



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

GIORDANNA OLIVEIRA CORRÊA

REGRESSÃO WEIBULL TRUNCADA MODAL PARA MODELAR DIFERENÇAS
ENTRE TAXAS OU PROPORÇÕES

MANAUS – AMAZONAS

2024

GIORDANNA OLIVEIRA CORRÊA

**REGRESSÃO WEIBULL TRUNCADA MODAL PARA MODELAR DIFERENÇAS
ENTRE TAXAS OU PROPORÇÕES**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Jhonnata Bezerra de Carvalho

Coorientador: Prof. Dr. Jeremias da Silva Leão

MANAUS – AMAZONAS

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C824r Corrêa, Giordanna Oliveira
Regressão Weibull truncada modal para modelar diferenças entre
taxas ou proporções / Giordanna Oliveira Corrêa . 2024
125 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Jhonnata Bezerra de Carvalho
Coorientador: Jeremias da Silva Leão
Dissertação (Mestrado em Matemática - Estatística) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Modelo de regressão. 2. Máxima verossimilhança. 3.
Reparametrização. 4. Eleição presidencial. I. Carvalho, Jhonnata
Bezerra de. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

GIORDANNA OLIVEIRA CORRÊA

**REGRESSÃO WEIBULL TRUNCADA MODAL PARA MODELAR DIFERENÇAS
ENTRE TAXAS OU PROPORÇÕES**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Estatística.

Aprovada em: 29 de fevereiro de 2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jhonnata Bezerra de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. André Luís Santos de Pinho
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Prof. Dr. José Mir Justino da Costa
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Após anos de dedicação e esforço, gostaria de agradecer aos fundamentais apoios dos meus familiares, especialmente, meus pais Renildo Amaral e Rosimar de Oliveira, meu irmão Ianni de Oliveira, pelo incentivo e suporte constantes.

À minha querida tia-avó Maria Leonor Azedo (*in memorian*), gratidão por contribuir tanto em minha formação. Suas lembranças sempre estarão comigo.

Um agradecimento essencial ao meu orientador Jhonnata Bezerra e ao meu coorientador Jeremias Leão pelos ensinamentos, motivação e paciência. Seus conselhos e orientações impulsionaram o meu processo de aprendizado e me mantiveram perseverante.

Aos meus amigos pelos diálogos de incentivo e força.

À Universidade Federal do Amazonas e ao corpo docente do Departamento de Estatística pelo comprometimento com a qualidade e excelência de ensino.

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), pelo suporte financeiro.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende
o que ensina.”

(Cora Coralina)

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido um estudo fundamentado na distribuição Weibull truncada. O truncamento é realizado no intervalo $(0, 2)$, denominado truncamento à direita. No entanto, com objetivo de analisar dados de diferenças entre taxas ou proporções é sugerida uma transformação para obtenção de uma nova distribuição cujo conjunto suporte pertence ao intervalo $(-1, 1)$. Ademais, essa distribuição foi parametrizada em termos dos parâmetros moda e forma, e foi denominada de distribuição Weibull truncada modal (WTM). É proposto um novo modelo de regressão modal baseado na distribuição WTM com estruturas de regressão para os parâmetros e o método de estimação escolhido foi o de máxima verossimilhança. Um estudo de simulação foi realizado, via método de Monte Carlo, com o objetivo de avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança para diferentes cenários e estruturas de regressão. Ademais, foram obtidas as expressões analíticas para a matriz de informação de Fisher. Ao final, são apresentadas três aplicações do modelo de regressão WTM, das quais duas são para dados eleitorais do Brasil e dos Estados Unidos da América e uma referente a um exame de promoção para o corpo de bombeiros.

Palavras-chave: Modelo de Regressão. Máxima Verossimilhança. Reparametrização. Eleição Presidencial.

ABSTRACT

In this work, a study based on the truncated Weibull distribution is developed. Truncation is performed in the interval $(0, 2)$, referred to as right truncation. However, in order to analyze data on differences between rates or proportions, a transformation is suggested to obtain a new distribution whose support set belongs to the interval $(-1, 1)$. Furthermore, this distribution has been parameterized in terms of mode and shape parameters, and it is called the truncated Modal Weibull distribution (TMW). A new modal regression model based on the WTM distribution with regression structures for the parameters is proposed, and the chosen estimation method is maximum likelihood. A simulation study was conducted using the Monte Carlo method to evaluate the performance of the maximum likelihood estimators for different scenarios and regression structures. Furthermore, analytical expressions for the Fisher information matrix were obtained. Finally, three applications of the WTM regression model are presented, two of which are for electoral data from Brazil and the United States of America and one referring to a promotion exam for the fire department.

Keywords: Regression Model. Maximum Likelihood. Reparameterization. Presidential Election.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função densidade de probabilidade da WTM para diferentes cenários. . . .	22
Figura 2 – Box-plots das estimativas de Monte Carlo para o cenário A. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é logito.	42
Figura 3 – Box-plots das estimativas de Monte Carlo para o cenário A. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é probito.	44
Figura 4 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário A. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é cloglog.	46
Figura 5 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário B. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é logito.	48
Figura 6 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário B. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é probito.	50
Figura 7 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário B. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é complemento log-log.	52
Figura 8 – Resultado da votação presidencial do candidato Jair Bolsonaro, por município, no estado do Amazonas.	54
Figura 9 – Mapa de diferença da proporção de votos no 2º turno entre os anos de 2022 e 2018 do candidato Bolsonaro.	54
Figura 10 – Um estudo descritivo da variável diferença da proporção de votos.	55

Figura 11 – Eleição presidencial nos Estados Unidos em 2016 - vitória/derrota do candidato Donald Trump em 50 estados.	57
Figura 12 – Mapa da diferença entre as taxas de aceitação do partido republicano e partido democrata.	58
Figura 13 – Um estudo descritivo das variáveis resposta e das covariáveis.	58
Figura 14 – Gráficos de resíduos para o modelo de regressão Weibull truncado modal utilizando a função de ligação logito.	62
Figura 15 – Gráficos de resíduos para o modelo de regressão Weibull truncado modal utilizando a função de ligação probito.	63
Figura 16 – Gráficos de resíduos para o modelo de regressão Weibull truncado modal utilizando a função de ligação complemento log-log.	64
Figura 17 – Gráfico seminormal com envelope simulado para os resíduos quantílicos aleatorizados dos modelos de regressão parametrizados pela moda.	66
Figura 18 – Um estudo descritivo da variável diferença de pontuação de exames	67
Figura 19 – Gráfico seminormal com envelope simulado para os resíduos quantílicos aleatorizados dos modelos de regressão parametrizados pela moda.	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Função de ligação e sua respectiva função inversa.	26
Tabela 2	– Estudo de simulação para o cenário A: $g_1(m^*) = \log\left(\frac{m^*}{1-m^*}\right)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$, $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$	41
Tabela 3	– Estudo de simulação para o cenário A: $g_1(m^*) = \Phi^{-1}(m^*)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$	43
Tabela 4	– Estudo de simulação para o cenário A: $g_1(m^*) = \log(-\log(1-m^*))$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$	45
Tabela 5	– Estudo de simulação para o cenário B: $g_1(m^*) = \log\left(\frac{m^*}{1-m^*}\right)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$	47
Tabela 6	– Estudo de simulação para o cenário B: $g_1(m^*) = \Phi^{-1}(m^*)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$	49
Tabela 7	– Estudo de simulação para o cenário B: $g_1(m^*) = \log(-\log(1-m^*))$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$	51
Tabela 8	– Estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull truncada modal.	55
Tabela 9	– Ajuste do modelo de regressão WTM a dados eleitorais estadunidenses de 2016.	59
Tabela 10	– Ajuste do modelo de regressão WTM a dados eleitorais estadunidenses, após a seleção de variáveis.	60
Tabela 11	– Resumo para os ajustes dos modelos para os dados eleitorais. Em parênteses o erro-padrão.	65
Tabela 12	– Teste Vuong para comparação dos modelos WTM, Kuma, UGomp, UGama e beta, para os dados eleitorais.	66
Tabela 13	– Resumo para os ajustes dos modelos para os dados de pontuação de exames. Em parênteses o erro-padrão.	68

Tabela 14 – Teste Vuong para comparação dos modelos WTM, Kuma, UGomp, UGama e beta, para os dados de pontuação de exames.	69
Tabela 15 – Estudo de simulação para o cenário C: $g_1(m^*) = \log\left(\frac{m^*}{1-m^*}\right)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 2,0, \beta_1 = -1,0, v_0 = 1,5$ e $v_1 = 2,0$	123
Tabela 16 – Estudo de simulação para o cenário C: $g_1(m^*) = \Phi^{-1}(m^*)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 2,0, \beta_1 = -1,0$ e $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 2,0$	124
Tabela 17 – Estudo de simulação para o cenário C: $g_1(m^*) = g_1(m^*) = \log(-\log(1 - m^*))$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 2,0, \beta_1 = -1,0$ e $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 2,0$	125

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	DISTRIBUIÇÃO WEIBULL TRUNCADA À DIREITA	18
3	ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS	23
4	MODELOS DE REGRESSÃO	24
5	ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO	32
6	COMPARAÇÃO DE MODELOS	36
7	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	39
8	APLICAÇÕES EM DADOS REAIS	53
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A – Cálculos	76
	APÊNDICE B – Simulação	123

1 INTRODUÇÃO

A distribuição Weibull é extensivamente aplicada em diversas áreas do conhecimento. Nomeada em virtude de Ernst Hjalmar Wallodi Weibull, um matemático e engenheiro sueco, que a propôs em 1939 por meio de um estudo sobre a resistência da ruptura de materiais (JANDHYALA; FOTOPOULOS; EVAGGELOPOULOS, 1999). Em 1951 Wallodi Weibull publicou o trabalho "*A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*" no *ASME Journal of Applied Mechanics*. Weibull (1951) apresenta a aplicabilidade estatística da distribuição Weibull a diversos estudos: resistência ao escoamento de aço Bofors, distribuição de tamanho de cinzas volantes, resistência da fibra de um algodão indiano, comprimento de *Cyrtodeae*, vida em fadiga de um aço St-37, estaturas de homens adultos nascidos nas ilhas britânicas e na largura de feijões.

Através do estudo precursor de Wallodi Weibull é possível utilizar a distribuição Weibull para descrever variados fenômenos. De acordo com Jodrá (2022) a distribuição Weibull é um dos modelos de probabilidade mais populares, tanto do ponto de vista teórico quanto prático e tem sido usada com sucesso para modelar dados de vida útil e falhas. Casella e Berger (2021) reiteram sua utilidade para modelagem de funções de risco, além de constituir um papel importante na análise de dados referentes ao tempo para falha. Por possuir grande utilidade em um vasto campo de conhecimento, consegue alcançar aplicabilidade tanto a dados meteorológicos, como nas áreas de: ciências sociais, biológicas, ambientais, da saúde, física e engenharias (RINNE, 2008). Ademais, amplamente utilizada em engenharia de confiabilidade e segurança de sistemas (MÉNDEZ-GONZÁLEZ *et al.*, 2017). Dessa forma encontram-se na literatura diversas análises fundamentadas na distribuição Weibull, como em: Fang, Patterson e Jr (1993) que propuseram um método para modelar distribuições de tamanhos de partículas bi e tri dimensionais; Apt (1976) aplicou a distribuição Weibull a conjuntos de dados de radioatividade atmosférica; Jandhyala, Fotopoulos e Evaggelopoulos (1999) apresentam uma metodologia para detectar mudanças dinâmicas em temperaturas mínimas utilizando a distribuição Weibull; Berry (1981) descreveu um estudo que fundamenta suposições de que a distribuição Weibull explica melhor os dados de tempo em execução de tarefas humanas comparada à distribuição normal; Wong (1977) utilizou dados meteorológicos para verificar o melhor ajuste da distribuição Weibull em comparação às distribuições gama, log-Normal e kappa com três parâmetros; Jeon e Sohn (2015) abordaram a análise do padrão de falha de produtos a partir de dados de garantia, utilizando a regressão Weibull para identificar fatores influentes que afetam a variação do tempo médio entre

falhas; Li (1994) estende a análise de regressão linear e desenvolve uma nova técnica baseada na distribuição Weibull com três parâmetros; Cavalcante *et al.* (2023) propõem aplicações em biomedicina, empregando a regressão Weibull em um estudo comparativo, aplicado à análise de sobrevivência; e Skinner e Humphreys (1999) utilizam a regressão Weibull para tempos de vida medidos com erro.

A distribuição Weibull, devido à sua flexibilidade e fácil aplicabilidade, frequentemente, é sugerida como tentativa para explicação de variados fenômenos. De modo que existe a possibilidade da obtenção de outras distribuições a partir da Weibull, evidenciando os relacionamentos com outras distribuições, como casos especiais. A transformação de uma variável aleatória com distribuição Weibull possibilita a obtenção de novas distribuições, ampliando sua utilidade na teoria e métodos estatísticos. Almalki e Nadarajah (2014) fazem um resumo de modificações desta distribuição, descrevendo as transformações abordando os espaços paramétricos discreto e contínuo. Destaca-se o truncamento de uma distribuição que, segundo Rinne (2008), está associado a uma população, no qual existe uma restrição do seu suporte para um intervalo menor de variação.

Na estatística, uma distribuição truncada é definida como uma distribuição condicional que resulta da restrição do domínio da distribuição estatística (KANTAR; USTA, 2015). As distribuições truncadas são aplicáveis a situações em que o intervalo de uma variável aleatória é limitado, comumente utilizada em aplicações de confiabilidade (ZHANG; XIE, 2011). Desta forma, evidencia-se os tipos de truncamento existentes: superior (à direita), inferior (à esquerda) e duplamente (ambos). Uma vez que a Weibull possui grande variedade de aplicações, o truncamento desta distribuição também tem contribuído para a pesquisa e análise de dados. Dusit e Cohen (1984) estudaram os pontos de truncamento da distribuição Weibull, considerando os truncamentos superior e inferior. Kantar e Usta (2015) propuseram o uso da distribuição Weibull truncada superior à modelagem de dados de velocidade do vento, sugerindo-a como alternativa para avaliação do potencial de energia eólica. Zhang e Xie (2011) estudaram as características da distribuição Weibull truncada superior, além de discutir o uso desta para modelagem de falhas de componentes ou sistemas. Wingo (1988) desenvolveu métodos matemáticos e computacionais para ajustar a distribuição Weibull truncada superior a dados de vida ou sobrevivência. Maltamo *et al.* (2004) apresentaram métodos de predição da altura de pequenas árvores utilizando as distribuições Weibull completa e Weibull truncada à esquerda.

Motivação

Em muitas situações a variável de interesse é obtida através da diferença entre duas taxas ou proporções em tempos distintos. Isso é feito com o intuito de capturar e quantificar as mudanças de um determinado fenômeno, e a análise dessas diferenças permite avaliar o crescimento ou decréscimo da taxa (ou proporção). Ademais, essa análise nos permite avaliar o impacto de uma política pública ou na comparação de indicadores em diferentes períodos, como feito em Abreu, Souza e Mathias (2018) que analisaram o impacto da lei seca na mortalidade por acidentes de trânsito no estado do Paraná no período de 1980 a 2014; Nascimento, Almeida e Gomes (2014) estudaram a diferença entre a taxa de mortalidade neonatal total e a taxa de mortalidade neonatal por causas evitáveis, com objetivo de identificar padrões espaciais da distribuição da mortalidade neonatal nas microrregiões do estado de São Paulo; Monteiroa, Romiob e Drezette (2021) avaliaram a diferença de raça/cor em relação à taxa de feminicídio no Brasil; Jones (2016) realizou um estudo para verificar a preferência política presidencial, entre os partidos democrata e republicano, e utilizou a diferença entre as taxas de aceitação entre os dois partidos. Além disso, na área econômica existe uma metodologia chamada de *difference-in-difference* (diff-in-diff) que compara a mudança na variável dependente entre dois grupos antes e depois de um evento específico, como em Azuaga e Sampaio (2017) que utilizaram um modelo diff-in-diff para avaliar o impacto da lei Maria da Penha sobre o feminicídio no Brasil.

Dessa forma, faz-se necessário utilizar um modelo probabilístico cujo suporte seja o mesmo da variável em estudo, isto é, a diferença entre taxas (ou proporções), pois caso isso não seja levado em consideração, a predição pode não pertencer ao suporte da variável.

Objetivos

O objetivo central consiste em avaliar a distribuição Weibull truncada à direita com um deslocamento para o intervalo $(-1, 1)$.

Objetivos Específicos

1. Estudar as principais características da distribuição Weibull truncada como: momentos, função de distribuição, função quantil e a moda.
2. Estudar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança para a distribuição Weibull truncada.

3. Analisar a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança aproximados para os parâmetros.

Contribuições

As principais contribuições do presente trabalho são:

1. É proposto um novo modelo de probabilidade cujo suporte está no intervalo $(-1, 1)$;
2. São obtidas expressões analíticas para a matriz de informação de Fisher do modelo; e
3. Avaliações numéricas para averiguar os desempenhos do estimador de máxima verossimilhança e dos intervalos assintóticos para os parâmetros do modelo.

Organização da Dissertação

Além desse capítulo, esta dissertação é composta por mais 8 capítulos. No Capítulo 2 é feita uma caracterização da distribuição Weibull com as principais propriedades. Além disso, é proposto uma transformação e uma reparametrização em termos da moda da distribuição. No Capítulo 3 é feita uma descrição sobre o método da máxima verossimilhança. No Capítulo 4 é descrito o modelo de regressão Weibull truncada modal e as inferências sobre os parâmetros. No Capítulo 5 são descritos os métodos para análise diagnóstica do modelo. O Capítulo 6 apresenta distribuições parametrizadas pela moda com o objetivo de compará-las com a distribuição proposta neste trabalho. No Capítulo 7 são apresentados os estudos de simulação para diferentes estruturas de regressão. No Capítulo 8 é apresentada aplicações para o modelo proposto. Por fim, no Capítulo 9 são feitas as considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

2 DISTRIBUIÇÃO WEIBULL TRUNCADA À DIREITA

Nesta seção, caracterizaremos as propriedades da distribuição Weibull truncada à direita, apresentando sua definição e principais características.

Função de Densidade de Probabilidade da Distribuição Weibull

Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade Weibull de dois parâmetros, denotada por $X \sim \text{We}(\alpha, \lambda)$. Sua função de densidade de probabilidade (fdp) é dada por

$$f(x|\alpha, \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}, \quad x > 0; \alpha, \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1)$$

no qual α representa o parâmetro de forma e λ corresponde ao parâmetro de escala. A função de distribuição acumulada da variável aleatória X é dada por

$$F(x|\alpha, \lambda) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}.$$

Função Densidade de Probabilidade da Distribuição Weibull Truncada

A função densidade da distribuição Weibull duplamente truncada é definida por

$$f_T(x|\alpha, \lambda) = \frac{f(x|\alpha, \lambda)}{F(t_r|\lambda, \alpha) - F(t_l|\lambda, \alpha)}, \text{ para } t_l < x < t_r.$$

A forma de $f_T(x|\alpha, \lambda)$ é determinada pela forma de $f(x|\alpha, \lambda)$ no intervalo $t_l < x < t_r$ (RINNE, 2008). Em que t_l e t_r representam os pontos de truncamento à esquerda e à direita, respectivamente. Dessa forma, é de interesse do presente estudo especificar os pontos de truncamento para $t_l = 0$ e $t_r = 2$, que resultam em

$$f_T(x|\alpha, \lambda) = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}}, \quad 0 < x < 2. \quad (2.2)$$

Desse modo, a função densidade da distribuição Weibull truncada à direita é considerada um caso especial da distribuição Weibull duplamente truncada e possui as características da distribuição Weibull não truncada, disposta na equação (2.1), em que $f_T(x|\alpha, \lambda)$ na equação (2.2) contém o mesmo parâmetro de forma da Weibull usual de dois parâmetros (ZHANG; XIE, 2011).

Transformação

Seja X uma variável aleatória com fdp $f(x)$ e $Y = g(X)$, no qual g é uma função monótona e sejam χ e γ os conjuntos suporte das distribuições de X e Y , respectivamente. Suponha que $f(x)$ seja contínua em χ e que $g^{-1}(y)$ tenha uma derivada contínua em γ (CASELLA; BERGER, 2021). Então a fdp de Y é dada por

$$f(y) = f(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|. \quad (2.3)$$

Considerando-se a transformação $Y = X - 1$. Em que sua função inversa é da forma

$$X = Y + 1 = g^{-1}(y),$$

e a derivada da função inversa de $g^{-1}(y)$ é

$$\left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = 1.$$

Da equação (2.3) é obtida a função densidade da transformação. A variável aleatória Y segue distribuição Weibull truncada à direita com deslocamento para o intervalo $(-1, 1)$ e parâmetros $\alpha, \lambda > 0$, se sua função de distribuição é dada por

$$f(y|\alpha, \lambda) = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{y+1}{\lambda} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{y+1}{\lambda} \right)^{\alpha}}}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda} \right)^{\alpha}}}, \text{ para } -1 < y < 1. \quad (2.4)$$

O parâmetro de forma é representado por α e o parâmetro de escala por λ , baseando-se nas características da distribuição Weibull da equação (2.1), e os pontos de truncamento considerados fixos, a função densidade da variável Y também pode ser derivada a partir da distribuição Weibull truncada com três parâmetros, denotada por $Y \sim We(\beta, \alpha, \lambda)$, em que $y \geq \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda > 0$. Fixado o ponto de truncamento à esquerda ($t_l = \beta$), é possível obter a distribuição truncada à direita, cuja função de distribuição acumulada é (RINNE, 2008)

$$F(y|\alpha, \lambda, \beta, t_r) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{y-\beta}{\lambda} \right)^{\alpha}}}{1 - e^{-\left(\frac{t_r-\beta}{\lambda} \right)^{\alpha}}}, \beta < y < t_r. \quad (2.5)$$

Função de Distribuição Acumulada

Considerando a equação (2.5), em que β assume o valor do ponto de truncamento à esquerda ($t_l = -1$) da distribuição de Y , a função de distribuição acumulada da Weibull truncada

à direita é caracterizada como

$$F(y|\alpha, \lambda) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}}. \quad (2.6)$$

McEwen e Parresol (1991) desenvolveram as expressões de momento da Weibull com três parâmetros nas formas: padrão e com truncamentos. Em que os resumos das estatísticas são derivadas a partir dos momentos da distribuição em evidência. Para isto são utilizadas as mesmas técnicas da distribuição Weibull padrão, obtendo-se as estatísticas: média, variância, assimetria, curtose, função quantil e moda. O k -ésimo momento amostral de uma variável aleatória Y com fdp, definida na equação (2.4), é dado por

$$E(Y^k) = \frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \lambda^{k-j} \gamma\left(\frac{(k-j)}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right). \quad (2.7)$$

Crénin (2015) fornece os cálculos das expressões de momentos da distribuição Weibull truncada. Os momentos, média e variância são expressos em termos da função gama incompleta inferior, definida como $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$, para $a > 0$. Os dois primeiros momentos populacionais da variável Y , são derivados a partir da equação (2.7), fazendo-se $k = 1$ e $k = 2$, respectivamente. Assim, temos que a esperança e variância são dadas, respectivamente, por

$$E(Y) = \frac{\lambda \gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right)}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}} - 1,$$

$$Var(Y) = \frac{\lambda^2}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}} \left[\gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right) - \frac{\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right)}{(1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha})} \right],$$

A identidade $\frac{\gamma\left(1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right)}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}} = 1$ é utilizada para obtenção de $E(Y)$.

O ponto máximo (moda) da fdp pode ser encontrado utilizando as técnicas de derivação na função $\log(f(y|\alpha, \lambda))$, no qual resultam em

$$\text{Moda}(Y) = m = -1 + \lambda \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^{1/\alpha}, \quad \text{para } \alpha > 1, \lambda > 0. \quad (2.8)$$

Os cálculos da equação (2.8), bem como as funções de momentos e variância estão disponíveis no Apêndice A.

DISTRIBUIÇÃO WEIBULL REPARAMETRIZADA EM TERMOS DA MODA

Reparametrização

É considerada a reparametrização da distribuição Weibull truncada à direita com relação a sua moda e um parâmetro de forma. Em que a moda é representada pela equação (2.8) e o parâmetro de forma $\phi = \alpha$, para $\phi > 1$ e $-1 < m < 1$. Avalia-se a nova parametrização com $\alpha = \phi$ e $\lambda = (m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi}$.

Utilizando-se a nova parametrização na fdp da equação (2.4), é obtida a fdp da distribuição Weibull truncada à direita em função da moda (m) e de um parâmetro de forma (ϕ), aqui denominada de Weibull truncada modal (WTM). Considere a notação $Y \sim WTM(m, \phi)$, para representar a variável aleatória Y com distribuição WTM com a seguinte função densidade

$$f(y|m, \phi) = \frac{\left(\frac{\phi}{m+1} \right) \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{y+1}{m+1} \right)^{\phi-1} e^{-\left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{y+1}{m+1} \right)^{\phi}}}{1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)}}.$$

O k -ésimo momento amostral da variável aleatória $Y \sim WTM(m, \phi)$ é dado por

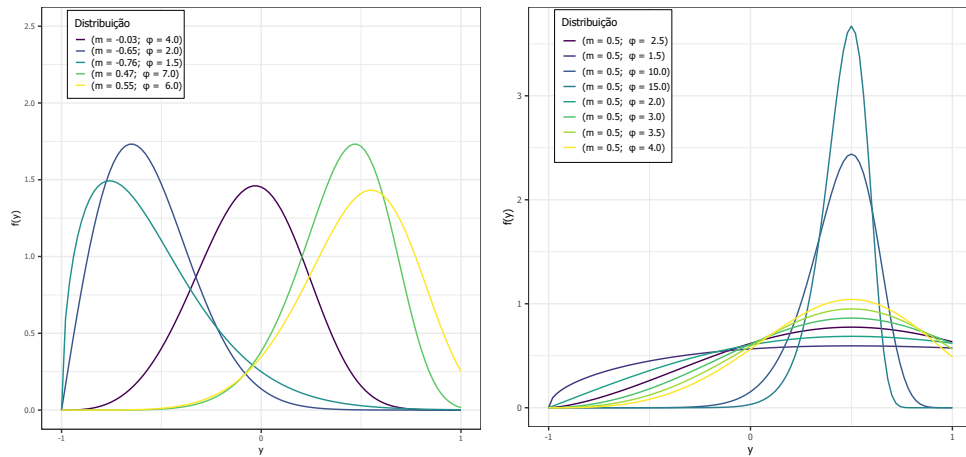
$$E(Y^k) = \frac{\sum_{j=1}^n \binom{k}{j} (-1)^j \left((m+1) \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)^{1/\phi} \right)^{k-j} \gamma \left(\frac{k-j}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \right)}{1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)}}. \quad (2.9)$$

A partir da equação (2.9) obtém-se o primeiro e segundo momentos da distribuição reparametrizada. A esperança e variância são dadas, respectivamente, por

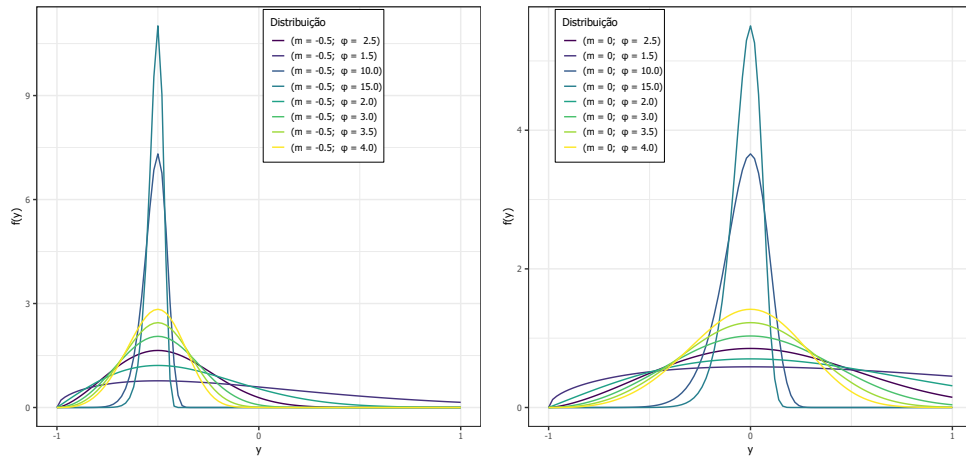
$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{(m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} \gamma \left(\frac{1}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \right)}{1 - e^{-\left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi}}} - 1, \\ \text{Var}(Y) &= \frac{\left[(m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} \right]^2}{1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)}} \left[\gamma \left(\frac{2}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma^2 \left(\frac{1}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \right)}{1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)}} \right]. \end{aligned}$$

A função de distribuição acumulada da variável Y , a partir da nova parametrização é dada

$$F(y|m, \phi) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{y+1}{m+1} \right)^{\phi}}}{1 - e^{-\left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi}}}. \quad (2.10)$$



(a) Função de densidade da distribuição WTM para diferentes combinações de parâmetros. (b) Função de densidade da distribuição WTM para $m = 0,5$ e diferentes valores de ϕ .



(c) Função de densidade da distribuição WTM para $m = -0,5$ e diferentes valores de ϕ . (d) Função de densidade da distribuição WTM para $m = 0$ e diferentes valores de ϕ .

Figura 1 – Função densidade de probabilidade da WTM para diferentes cenários.

Na Figura (1a) são apresentados cinco cenários com o objetivo de avaliar a flexibilidade da distribuição, verificando-se que esta assume assimetria negativa e positiva, cuja função densidade demonstra ser unimodal. As Figuras (1b), (1c) e (1d) apresentam a função densidade de probabilidade da WTM para diferentes valores de ϕ e m fixo. Observa-se que para menores valores de ϕ mais a distribuição é dispersa, ou de maneira complementar, quanto maior o valor de ϕ mais a distribuição se concentra em torno da moda. Além disso, observa-se que a fdp da distribuição WTM possui variadas formas, dependendo, portanto, de um parâmetro de forma, responsável pela aparência da densidade Weibull (RINNE, 2008), estabelecido por ϕ . De acordo com Casella e Berger (2021), o parâmetro ϕ é conhecido por influenciar no pico da distribuição.

3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

Um problema de estimação envolve a escolha de um método de cálculo a partir de derivações estatísticas de uma amostra, que são projetadas para estimar os valores dos parâmetros de uma população hipotética (FISHER, 1922). Na estimação paramétrica, um método extensamente empregado é o de máxima verossimilhança. Proposto inicialmente pelo matemático Carl Friedrich Gauss e investigado por Ronald Aylmer Fisher, esta teoria compreende um método popular para derivar estimadores em inferência estatística.

MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Seja $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top$ uma amostra aleatória de uma população Y , em que $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ representa a amostra observada, com fdp (ou função de probabilidade) dada por $f(y|\boldsymbol{\theta})$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)^\top$ é o vetor de parâmetros. A função de verossimilhança é definida como

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = L(\theta_1, \dots, \theta_k | y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \theta_1, \dots, \theta_k).$$

O método da máxima verossimilhança consiste na obtenção de informações sobre um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, a partir do ponto $\mathbf{y}$ do espaço amostral através de $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$, isto é, toda informação de $\boldsymbol{\theta}$ obtida de um experimento está contida na função de verossimilhança (BERGER; WOLPERT, 1988). Propriedades importantes do estimador de máxima verossimilhança são apresentadas em Cordeiro (1992), nas quais destacam-se: eficiência assintótica, consistência e invariância. A maneira mais conveniente de encontrar a estimativa de máxima verossimilhança é examinando os máximos locais da verossimilhança (COX; HINKLEY, 1979), solucionando as equações

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Considera-se uma amostra observada $\mathbf{y}$ da variável aleatória $Y \sim WTM(m, \phi)$ com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (m, \phi)^\top$. A função log-verossimilhança da distribuição WTM é dada por

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= n \log \left(\frac{\phi - 1}{m + 1} \right) + (\phi - 1) \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{y_i + 1}{m + 1} \right) - \left(\frac{\phi - 1}{\phi} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i + 1}{m + 1} \right)^\phi \\ &\quad - n \log \left(1 - e^{-\left(\frac{\phi - 1}{\phi} \right) \left(\frac{2}{m + 1} \right)^\phi} \right). \end{aligned}$$

4 MODELOS DE REGRESSÃO

Modelos de regressão são caracterizados por descreverem relacionamentos entre variáveis através de um modelo matemático, cuja preocupação da análise de regressão está associada à dependência estatística entre estas variáveis. Segundo Fahrmeir *et al.* (2013) o objetivo deste instrumento de estudo é modelar o efeito de um determinado conjunto de variáveis, denominadas como explicativas ou covariáveis, sobre uma variável de interesse primário, denominada de resposta ou dependente. Um modelo estatístico tradicionalmente usado na análise de dados, cujo propósito é avaliar esses relacionamentos entre variáveis através de uma equação linear nos parâmetros, é denominado de modelo de regressão linear (MRL).

A formulação mais usual deste modelo consiste em especificar uma distribuição normal com média 0 e variância σ^2 para o componente aleatório (erros). A validação de um MRL permite realizar testes de hipóteses, fazer previsões, construir intervalos de confiança. No entanto, uma vez que não há adequação do modelo, identifica-se sua limitação à natureza do estudo, tornando-se necessário o ajuste de novas técnicas que permitam conclusões adequadas. Uma alternativa é a aplicação de transformações, pois, de acordo com Gelman e Hill (2006) nem sempre é apropriado ajustar um modelo de regressão clássico usando os dados em sua forma bruta, às vezes, transformações não lineares, como a logarítmica, podem ajudar no ajuste do modelo. Porém, nem sempre a transformação dos dados consegue contornar os problemas gerados pela suposição de normalidade dos erros. Diante disso, a generalização de modelos, como exemplo os modelos lineares generalizados, torna-se uma possibilidade para melhorar o ajuste aos dados, visto que, unificam muitas abordagens de regressão com variáveis resposta que não seguem, necessariamente, uma distribuição normal.

Modelos de regressão usuais, geralmente, modelam a média. No entanto, na prática, a utilização dessa medida pode não ser apropriada devido sua grande influência aos dados, tornando a análise de regressão clássica imprecisa. De acordo com Aristodemou (2014), na presença de *outliers*, a média é puxada na direção da cauda, tornando a regressão à média um método de análise menos representativo. Yao e Li (2013) propuseram uma nova ferramenta de análise de dados denominada modelo de regressão modal, para explorar o relacionamento de uma variável resposta e um conjunto de variáveis preditoras, caracterizada pela robustez a dados discrepantes.

MODELO DE REGRESSÃO WTM

Assim como a média, a moda é também uma importante medida de tendência central, que preserva características fundamentais que a tornam uma alternativa eficaz na presença de *outliers*. A regressão modal é uma abordagem alternativa para investigar a relação entre a resposta mais provável com covariáveis e pode, revelar estruturas importantes perdidas pelos métodos de regressão usuais (MENEZES; CHAKRABORTY, 2021). Bourguignon, Leão e Gallardo (2020) destacam vantagens na utilização da regressão modal, como: robustez para *outliers*, distribuições condicionais assimétricas e distribuições assimétricas dos ruídos. A distribuição proposta neste trabalho é assimétrica, logo, é conveniente definir um modelo de regressão, cuja variável resposta possui distribuição WTM.

Definição da Estrutura de Regressão

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes, em que $Y_i \sim WTM(m_i, \phi_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$. As estruturas de regressão para a moda (m_i) e o parâmetro de forma (ϕ_i) são, respectivamente, dadas por

$$g_1(m_i) = \eta_{1i} = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} \quad \text{e} \quad g_2(\phi_i) = \eta_{2i} = \mathbf{z}_i^\top \mathbf{v}. \quad (4.1)$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_q)^\top$ são vetores de parâmetros desconhecidos, que representam os coeficientes de regressão, considerados funcionalmente independentes, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{q+1}$, com $p + q + 2 < n$. Os preditores lineares são representados por η_{1i} e η_{2i} , $\mathbf{x}_i = (1, x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$ e $\mathbf{z}_i = (1, z_{i1}, \dots, z_{iq})^\top$ representam covariáveis conhecidas associadas à i -ésima resposta. Assume-se que as matrizes de planejamento $\mathbf{X} = (\mathbf{1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$ e $\mathbf{Z} = (\mathbf{1}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)^\top$, no qual $\mathbf{1}$ é um vetor de dimensão $n \times 1$ em que todos os seus elementos são iguais a 1. As funções de ligação $g_1 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_2 : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ devem ser estritamente monótonas, positivas e pelo menos duas vezes diferenciáveis, de modo que $m_i = g_1^{-1}(\eta_{1i})$, $\phi_i = g_2^{-1}(\eta_{2i})$, em que $g_1^{-1}(\cdot)$ e $g_2^{-1}(\cdot)$ representam as funções inversas de $g_1(\cdot)$ e $g_2(\cdot)$, respectivamente. (BOURGUIGNON; LEÃO; GALLARDO, 2020).

Da equação (4.1), nota-se que a variável resposta está relacionada ao i -ésimo preditor por meio de uma função, isto é, a formulação do modelo é estabelecida a partir de uma ligação entre a moda da distribuição e o preditor linear. A escolha da função de ligação resulta em um modelo adequadamente ajustável, sob condição de mapear apropriadamente o espaço paramétrico dos parâmetros (m_i e ϕ_i) para o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$). Para uma discussão

mais detalhada das funções de ligação, consulte McCullagh e Nelder (1989).

Considere a relação $m_i^* = \left(\frac{m_i+1}{2}\right)$. As funções de ligação que satisfazem as exigências do modelo, aplicadas à equação (4.1), são:

- Função logito

$$g(m_i^*) = \log \left(\frac{m_i^*}{1 - m_i^*} \right)$$

- Função probito

$$g(m_i^*) = \Phi^{-1}(m_i^*)$$

em que $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição de uma variável aleatória normal padrão.

- Complemento log-log

$$g(m_i^*) = \log \{ -\log(1 - m_i^*) \}$$

- Logaritmo

$$g(\phi_i) = \log(\phi_i)$$

- Raiz

$$g(\phi_i) = \sqrt{\phi_i}$$

A Tabela (1) apresenta as respectivas funções inversas das funções de ligação: probito, logito, complemento log-log, logaritmo e raiz.

Tabela 1 – Função de ligação e sua respectiva função inversa.

Função de ligação	Função inversa
Logito	$m = 2 \frac{e^{\eta_1}}{1 + e^{\eta_1}} - 1$
Probita	$m = 2\Phi(\eta_1) - 1$
Complemento log log	$m = 2(1 + e^{\eta_1}) - 1$
Logarítmo	$\phi = e^{\eta_2}$
Raiz	$\phi = (\eta_2)^2$

Inferência sobre os parâmetros do modelo

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes do modelo de regressão proposto e $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \mathbf{v}^\top)^\top$ o vetor de parâmetros da regressão. A função log-verossimilhança da distribuição WTM indexada pelos parâmetros m_i e ϕ_i , corresponde a

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(m_i, \phi_i), \quad (4.2)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_i(m_i, \phi_i) &= \log\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) + \log\left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right) + (\phi_i - 1) \log\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right) - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right) \\ &\quad - \log\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

A diferenciação da função log-verossimilhança na equação (4.3) com relação aos parâmetros desconhecidos do modelo resulta na obtenção da função escore, representada por $U(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta})^\top, \mathbf{U}_v(\boldsymbol{\theta})^\top)^\top$, no qual

$$U_{\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} \frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j}, \quad j = 0, 1, \dots, p. \quad (4.4)$$

$$U_{v_r}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial v_r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\eta_{2i}}{\partial v_r}, \quad r = 0, 1, \dots, q. \quad (4.5)$$

A derivada da log-verossimilhança com relação ao vetor de parâmetros da regressão ($\boldsymbol{\beta}$), corresponde ao cálculo da equação (4.4). Os termos que compõem a função escore, são dados por

$$U_{\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{2}{g_1'(m_i^*)} x_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, p,$$

no qual

$$\begin{aligned} b_i &= \left[\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)}{1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)}} - \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A primeira derivada parcial da função log-verossimilhança com relação ao parâmetro m_i é denotada por $\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i}$ e expressa pela equação (4.6). A diferenciação em função do preditor

linear $dm_i/d\eta_{1i} = 2/g'_1(m_i^*)$, em que g'_1 representa a primeira derivada da função de ligação $g_1(\cdot)$ e $\partial\eta_{1i}/\partial\beta_j = x_{ij}$, para $j = 0, 1, \dots, p$, sob restrição de $x_{i0} = 1$, para $i = 1, \dots, n$.

A primeira derivada da log-verossimilhança em termos do vetor de parâmetros $\mathbf{v}$, corresponde ao cálculo da equação (4.5). A determinação de cada termo desta expressão resulta em

$$U_{v_r}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{g'_2(\phi_i)} z_{ir},$$

na qual,

$$a_i = \log\left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right) - \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) - \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} + \left(\frac{1}{\phi_i-1}\right) \\ - \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \right]}{1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}},$$

a derivada $d\phi_i/d\eta_{2i} = 1/g'_2(\phi_i)$, a função g'_2 representa a primeira derivada da função $g_2(\cdot)$, $\partial\eta_{2i}/\partial v_r = z_{ir}$, para $r = 0, 1, \dots, q$, sob restrição de $z_{i0} = 1$, para $i = 1, \dots, n$.

Em forma matricial o vetor escore é estabelecido como $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{b}$ e $\mathbf{U}_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Z}^\top \mathcal{M} \mathbf{a}$, em que $\mathbf{X}$ é uma matriz de dimensão $n \times (p+1)$, cuja i -ésima linha é composta pelo vetor $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{Z}$ é uma matriz de dimensão $n \times (q+1)$, cuja i -ésima linha é composta pelo vetor $\mathbf{z}_i$, para $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^\top$, $\mathbf{M} = \text{diag}\{2/g'_1(m_1^*), \dots, 2/g'_1(m_n^*)\}$ e $\mathcal{M} = \text{diag}(1/g'_2(\phi_1), \dots, 1/g'_2(\phi_n))$.

As estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ de $\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{v}$, respectivamente, são obtidos solucionando o sistema de equações $U_{\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ e $U_{v_r}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Porém, as equações não possuem uma forma fechada, impossibilitando a obtenção das estimativas de maneira analítica. Em contrapartida, uma alternativa é a utilização de métodos numéricos. A segunda derivada da função log-verossimilhança (4.2) com relação a cada elemento de $\boldsymbol{\theta}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
U_{\beta_j, \beta_l} &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \beta_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} \frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_l} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \frac{dm_i}{d\eta_{1i}} + \frac{\partial \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial m_i} \left(\frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \right) \right] \frac{dm_i}{d\eta_{1i}} x_{ij} x_{il}, \\
U_{\beta_j, v_r} &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial v_r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_r} \left[\frac{\partial \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} \frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} z_{ir} \right] \frac{dm_i}{d\eta_{1i}} x_{ij}, \\
U_{v_j, v_r} &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial v_j \partial v_r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{\partial \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial v_r} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} + \frac{\partial \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right) \right] \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} z_{ij} z_{ir}.
\end{aligned}$$

A matriz de informação de Fisher é obtida a partir da segunda derivada da função log-verossimilhança com respeito aos parâmetros do modelo, isto é, calculando a esperança das segundas derivadas parciais e multiplicando cada esperança por -1 , resultando nos elementos da matriz (RINNE, 2008). O desenvolvimento dos cálculos dessas esperanças está posicionado no Apêndice A e depende dos seguintes resultados.

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] &= \frac{\left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})}, \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{\gamma'(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(\phi_i - 1) (1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})^2}, \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{\frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \left[2 \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma'(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right]^2 \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \gamma''(2, \delta(m_i, \phi_i)) \right],
\end{aligned}$$

em que a matriz é definida em termos da função gama incompleta inferior, por meio das expressões de esperança, em que $\gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))$, $\gamma'(2, \delta(m_i, \phi_i))$ e $\gamma''(2, \delta(m_i, \phi_i))$ denotam a função gama incompleta inferior, primeira e segunda derivadas desta função, respectivamente, na qual $\delta(m_i, \phi_i) = \left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)$. Resultados fundamentais são exigidos na obtenção dos elementos da matriz, destacam-se $E \left(\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} \right) = 0$ e $E \left(\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} \right) = 0$. Alicerçado nisto, obtém-se os componentes

$$-E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right] = - \sum_{i=1}^n E \left(\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \right) \left(\frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 x_{ij} x_{il}. \quad (4.7)$$

O formato matricial da equação (4.7) é dado por $-\mathbf{X}^\top \mathbf{S} \mathbf{M}^2 \mathbf{X}$, em que $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)^\top$, $\mathbf{M} = \text{diag}\{2/g'_1(m_1^*), \dots, 2/g'_1(m_n^*)\}$, para $j, l = 0, 1, \dots, p$.

Ademais, encontra-se os demais componentes

$$-E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial v_r} \right] = - \sum_{i=1}^n E \left(\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \right) \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right) \left(\frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \right) z_{ir} x_{ij}. \quad (4.8)$$

O formato matricial da expressão (4.8) é dado por $-\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{D} \mathcal{M} \mathbf{Z}$, em que $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)^\top$, $\mathbf{M} = \text{diag}\{2/g'_1(m_1^*), \dots, 2/g'_1(m_n^*)\}$, $\mathcal{M} = \text{diag}(1/g'_2(\phi_1), \dots, 1/g'_2(\phi_n))$, para $j = 0, 1, \dots, p$ e $r = 0, 1, \dots, q$.

A expressão do elemento $\mathbf{K}_{(v,v)}$ da matriz é dada por

$$-E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial v_j \partial v_r} \right] = - \sum_{i=1}^n E \left(\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \right) \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 z_{ij} z_{ir}. \quad (4.9)$$

O formato matricial da equação (4.9) é dado por $-\mathbf{Z}^\top \mathbf{V} \mathcal{M}^2 \mathbf{Z}$, em que $\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)^\top$, $\mathcal{M} = \text{diag}(1/g'_2(\phi_1), \dots, 1/g'_2(\phi_n))^\top$, para $j = 0, 1, \dots, p$ e $r = 0, 1, \dots, q$.

A matriz de informação de Fisher para o vetor de parâmetros é denotada por $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{(\beta, \beta)} & \mathbf{K}_{(\beta, v)} \\ \mathbf{K}_{(v, \beta)} & \mathbf{K}_{(v, v)} \end{pmatrix},$$

os elementos da matriz correspondem a $\mathbf{K}_{(\beta, \beta)} = -\mathbf{X}^\top \mathbf{S} \mathbf{M}^2 \mathbf{X}$, $\mathbf{K}_{(\beta, v)} = \mathbf{K}_{(v, \beta)}^\top = -\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{D} \mathcal{M} \mathbf{Z}$ e $\mathbf{K}_{(v, v)} = -\mathbf{Z}^\top \mathbf{V} \mathcal{M}^2 \mathbf{Z}$. Sob condições de regularidade e para n suficientemente grande o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ possui aproximadamente distribuição normal multivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ (PAWITAN, 2001).

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \stackrel{a}{\sim} N_{p+q+2} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \right),$$

em que $\stackrel{a}{\sim}$ representa “assintoticamente distribuído”, N_{p+q+2} denota a distribuição normal de dimensão $p+q+2$, os EMVs de $\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{v}$ são denotados, respectivamente, por $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$.

A distribuição assintótica do EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ justifica a construção de testes para n suficientemente grande, isto é, um teste aproximado baseado em uma estatística que à medida que n cresce ($n \rightarrow \infty$), sua distribuição converge para a normal padrão. Suponha que é de interesse testar as hipóteses $H_0 : \theta_i = \theta_i^0$ versus $H_1 : \theta_i \neq \theta_i^0$, em que o teste de Wald pode ser utilizado para testar essas hipóteses. O teste de Wald é um teste que possui propriedades de poder assintótico, baseado em uma estatística de teste $W^2 = \left(\hat{\theta}_i - \theta_i^0 \right)^2 / k^{ii}$, no qual k^{ii} é o i -ésimo termo da diagonal principal da matriz de variâncias e covariâncias $\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$. Comumente

utiliza-se a raiz quadrada da estatística de teste original de Wald, dada por

$$W = \frac{|\hat{\theta}_i - \theta_i^0|}{\sqrt{k^{ii}}},$$

em que essa estatística de teste busca quantificar a diferença entre a estimativa e um valor hipotético do parâmetro desconhecido, ponderado por uma medida de precisão representada pelo erro padrão $EP(\hat{\theta}_i) = \sqrt{k^{ii}}$. Sob H_0 e para n grande a estatística de teste W segue, aproximadamente, uma distribuição $N(0, 1)$ (PAWITAN, 2001). A partir da estatística de teste é possível obter intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros θ_i , considerando-se um nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$, para $\alpha \in (0, 1)$.

$$\left(\hat{\theta}_i - z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{k^{ii}}; \hat{\theta}_i + z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{k^{ii}} \right),$$

em que $z_{1-\alpha/2}$ denota o quantil da normal padrão $\Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

5 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO

A escolha de um modelo que ajuste adequadamente aos dados exige uma análise de diagnóstico, para que seja justificável a seleção deste modelo como uma representação verossímil da relação entre as variáveis em estudo, possibilitando-se uma aproximação da realidade na aplicação do modelo de regressão. A análise de diagnóstico engloba uma cuidadosa análise de seus resíduos e tem como objetivo realizar uma investigação na procura de discrepâncias (presença de pontos influentes ou *outliers*), em evidências de violação na suposição da distribuição da variável resposta, na avaliação da parte sistemática do modelo e na adequação da função de ligação.

As incongruências do modelo podem ser identificadas a partir de métodos de diagnóstico que consistem em detectar padrões ao examinar o comportamento dos resíduos, identificando, a princípio, por meio de técnicas informais: ferramentas gráficas. Destaca-se os principais gráficos que permitem esta detecção: gráfico de resíduos em relação aos valores ajustados, gráfico quantil-quantil, gráfico de índices versus resíduos e gráficos de valores observados versus valores ajustados. A partir da inspeção dos resíduos do modelo ajustado, é possível constatar sua adequabilidade. Destaca-se as formas residuais com frequente aplicabilidade na literatura: resíduo de Pearson (MCCULLAGH; NELDER, 1989), resíduo de Pearson padronizado (MCCULLAGH; NELDER, 1989), resíduo componente da *deviance* (DAVISON; GIGLI, 1989) e resíduo quantílico aleatorizado (DUNN; SMYTH, 1996).

Com a finalidade de apresentar uma definição geral de resíduos para modelos de regressão que possuem respostas independentes, Dunn e Smyth (1996) propuseram os resíduos quantílicos aleatorizados, definidos por

$$r_i^q = \Phi^{-1} \left(F(y_i; \hat{m}_i, \hat{\phi}_i) \right), \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

no qual $\Phi^{-1}(\cdot)$ denota a função quantil da distribuição normal padrão e $F(y_i; \hat{m}_i, \hat{\phi}_i)$ denota a função de distribuição acumulada da variável resposta com distribuição WTM dada pela equação (2.10), em que $\hat{m}_i = 2g^{-1} \left(\mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) - 1$ e $\hat{\phi}_i = g^{-1}(\mathbf{z}_i^\top \hat{\mathbf{v}})$. Os resíduos quantílicos aleatorizados seguem, assintoticamente, uma distribuição $N(0, 1)$ quando a distribuição proposta do modelo ajustado está corretamente especificada. Além disso, o gráfico normal de probabilidades para os resíduos é recomendado na avaliação de afastamentos da distribuição proposta para a resposta bem como a presença de observações aberrantes (PAULA, 2004).

As ferramentas que auxiliam nesta etapa da análise compreendem os gráficos de probabilidade, definidos como uma técnica informal para comparar visualmente os dados provenientes de duas distribuições. Usualmente estas comparações podem ser efetuadas a partir

dos quantis teóricos e amostrais, derivando-se o gráfico também denominado quantil quantil (QQ-plot). Quando a comparação é decorrente dos quantis da distribuição normal, as observações comportam-se de maneira linear, aproximando-se de uma reta e sugerindo correspondência das distribuições mediante a coincidência dos quantis. O gráfico de probabilidade normal é obtido por meio dos valores ordenados de um determinado resíduo, diga-se $r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(n)}$ com $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(n)}$ no qual $r_{(i)}$ representa a i -ésima estatística de ordem, versus os valores esperados das estatísticas de ordem $Z_{(i)}$ de uma distribuição normal padrão, ou seja, os pontos $(E(Z_{(i)}), r_{(i)})$, que constituem o gráfico descrevendo os quantis da distribuição normal padrão no eixo das abscissas. Utiliza-se a aproximação para $E(Z_{(i)})$, detalhada a princípio por Blom (1958) como

$$E(Z_{(i)}) \cong \Phi^{-1} \left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

o gráfico seminormal é obtido utilizando-se a aproximação, descrita por McCullagh e Nelder (1989)

$$E(|Z_{(i)}|) \cong \Phi^{-1} \left(\frac{i + n + 1/2}{2n + 9/8} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

A construção deste gráfico consiste em traçar os valores absolutos de um determinado resíduo $(|r_{(i)}|)$ versus as estatísticas de ordem esperadas de uma distribuição normal padrão, isto é, significa que o gráfico seminormal é constituído das coordenadas $(E(|Z_{(i)}|), |r_{(i)}|)$.

Uma técnica gráfica introduzida por Atkinson (1981), também denominada envelope, é um método fundamentado em simulação para produzir bandas de confiança e adicioná-las a um QQ-plot. Segundo Atkinson (1987) os envelopes simulados melhoram a interpretação de um gráfico diagnóstico e mostra afastamentos da distribuição de referência. Atkinson (1982, p. 36) relata: “gráficos seminormais parecem mais eficazes do que gráficos de probabilidade normais na detecção de valores discrepantes e observações influentes para amostras de tamanho moderado, porém, espera-se que para amostras grandes o gráfico de probabilidade normal seja mais informativo”. Para um modelo adequadamente ajustado, os resíduos permanecem dentro dos limites do envelope. A obtenção das bandas de confiança é executada via simulação de Monte Carlo e segue a sequência de passos:

- 1) Ajustar o modelo de regressão WTM para obtenção das estimativas $\hat{m}$ e $\hat{\phi}$;
- 2) Simular uma amostra aleatória de tamanho n da variável resposta $Y \sim WTM(\hat{m}, \hat{\phi})$;
- 3) Ajustar o mesmo modelo a cada variável resposta para os dados simulados com objetivo de extrair os resíduos quantílicos aleatorizados;

- 4) Repetir os passos 2) e 3) t vezes, resultando em uma matriz com os resíduos quantílicos aleatorizados $r_{i,j}$, em que $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, t$. Composta pelos resíduos originais e simulados;
- 5) Ordenar de forma crescente os resíduos, obtendo-se a nova matriz de resíduos ordenados
- 6) Obter os limites $r_{(i),(1)}^* = \min_j (r_{i,j})$, $r_{(i),(t)}^* = \max_j (r_{i,j})$ e mediana;
- 7) Plotar os resíduos quantílicos ordenados versus $\Phi^{-1}((i + n - 1/8)/(2n + 1/2))$; e
- 8) Adicionar o envelope simulado ao gráfico do item 7).

Seleção de modelos

Os modelos estatísticos tentam descrever a realidade para obtenção de interpretações precisas. Na existência de pelo menos dois modelos satisfatórios, busca-se selecionar o mais adequado, fundamentando-se em técnicas de comparação entre um modelo considerado verdadeiro e modelos candidatos. Para esta escolha considera-se, neste trabalho, a ferramenta analítica intitulada critério de informação. Os critérios de informação fornecem uma maneira de avaliar o ajuste de um modelo com base no valor ótimo da função log-verossimilhança, após aplicar uma penalização aos parâmetros que são estimados no ajuste do modelo (WEST; WELCH; GALECKI, 2022). Akaike (1973) propôs um método de seleção resultante da minimização da distância de Kullback-Leibler, denominado critério de informação de Akaike (AIC). Definido por

$$AIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2d,$$

a formulação desta técnica baseia-se na função de log-verossimilhança acrescida de uma penalidade, representada por duas vezes a dimensão dos parâmetros de regressão ($d = p + q + 2$). O critério de escolha é definido pelo valor desta medida, isto é, destaca-se o modelo com menor AIC comparado ao de outros modelos candidatos.

Como uma alternativa à técnica de Akaike (1974), outra abordagem para seleção de modelos é apresentada por Schwarz (1978). Denominado critério de informação bayesiano (BIC), este método avalia o comportamento assintótico de estimadores bayesianos, baseando-se em uma classe especial de distribuições *a priori*, definido por

$$BIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + d \log(n),$$

este critério é calculado para cada modelo. De maneira semelhante ao AIC, a escolha do melhor modelo pelo critério de informação bayesiano é baseada no menor valor do BIC, em que sua

formulação difere do AIC através da função penalidade $d \log(n)$, descrita como a multiplicação da dimensão de $\boldsymbol{\theta}$ pelo logaritmo do número de observações.

Ademais, a qualidade do ajuste pode ser verificada por meio da análise de diagnóstico. Segundo Ferrari e Cribari-Neto (2004) uma medida da variação explicada pode ser obtida através do pseudo $R^2(R_p^2)$, considerado como uma generalização do R^2 para modelos clássicos, definido como o quadrado do coeficiente de correlação e utilizado para avaliar a relação entre $\hat{\eta}$ e $g(y)$, em que $0 \leq R_p^2 \leq 1$. É considerado o melhor ajuste aquele cujo modelo apresenta maior valor de R_p^2 .

Outro critério de qualidade de ajuste, que também é obtido a partir da função de verossimilhança, foi proposto por Cox e Snell (1989), definido por

$$R_{CS}^2 = 1 - \left[\frac{L(0)}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right]^{2/n}, \quad (5.1)$$

no qual, observa-se que esta medida depende da razão entre $L(0)$, que representa a função de verossimilhança do modelo com um intercepto (também chamado de modelo “nulo”) e $L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, que representa a função de verossimilhança maximizada sobre $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$, referente ao modelo de regressão ajustado. Percebe-se que a razão de verossimilhanças apresentada na equação (5.1) procura quantificar a diferença entre os dois modelos, de modo que, quanto menor for o valor desta quantidade, isto é $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) > L(0)$, maior será o valor de R_{CS}^2 , que no máximo será igual a 1. Por outro lado, se ambos os modelos não são muito diferentes, então o valor de R_{CS}^2 será próximo a 0. Em síntese, o modelo com melhor ajuste possui maior R_{CS}^2 .

6 COMPARAÇÃO DE MODELOS

Menezes e Chakraborty (2021) forneceram uma coleção de modelos de regressão parametrizados pela moda, em que a variável resposta é limitada no intervalo unitário, compreendendo as distribuições beta, Kumaraswamy, Gompertz unitária e gama unitária. A princípio para relacionar as distribuições mencionadas com a WTM, considera-se a transformação $Y = 2X - 1$, em que X é uma variável aleatória cujo conjunto suporte pertence ao intervalo $(0, 1)$.

Seja Y uma variável aleatória com distribuição beta, sua função densidade de probabilidade é definida por

$$f(y|a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \left(\frac{y+1}{2} \right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{y+1}{2} \right) \right]^{b-1} \frac{1}{2}, \text{ para } -1 < y < 1,$$

para $a, b > 1$ a distribuição beta possui uma única moda, dada por

$$\text{Moda}(Y) = m = 2 \left(\frac{a-1}{a+b-2} \right) - 1.$$

A função de densidade beta modal, considerando-se $b = 1 + \phi(1-m)$ e $a = 1 + \phi m$, para $\phi > 0$, é definida por

$$f(y|m, \phi) = \frac{\left(\frac{y+1}{2} \right)^{\phi m} \left[1 - \left(\frac{y+1}{2} \right) \right]^{\phi(1-m)} \frac{1}{2}}{B(1 + \phi m, 1 + \phi(1-m))}, \text{ para } -1 < y < 1.$$

Seja Y uma variável aleatória com distribuição Kumaraswamy, sua função densidade de probabilidade é definida por

$$f(y|a, b) = ab \left(\frac{y+1}{2} \right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{y+1}{2} \right) \right]^a \frac{1}{2}, \text{ para } -1 < y < 1,$$

para $a, b > 1$ a distribuição Kumaraswamy possui uma única moda, dada por

$$\text{Moda}(Y) = m = 2 \left(\frac{a-1}{ab-1} \right)^{1/a} - 1.$$

A função de densidade Kumaraswamy modal é obtida considerando $b = \phi^{-1} [1 + m^{-\phi}(\phi - 1)]$ e $a = \phi$, para $\phi > 0$, e é dada por

$$f(y|m, \phi) = \frac{1}{2} \left[1 + (\phi - 1)m^{-\phi} \right] \left(\frac{y+1}{2} \right)^{\phi-1} \left[1 - \left(\frac{y+1}{2} \right) \right]^{\phi} \phi^{-1} [1 + m^{-\phi}(\phi - 1)]^{-1}, \text{ para } -1 < y < 1.$$

Seja Y uma variável aleatória com distribuição gama unitária, sua função densidade de probabilidade é definida por

$$f(y|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{y+1}{2} \right)^{b-1} \left[-\log \left(\frac{y+1}{2} \right) \right]^{a-1} \frac{1}{2}, \text{ para } -1 < y < 1,$$

para $a, b > 1$ a distribuição gama unitária é unimodal, cuja equação é dada por

$$\text{Moda}(Y) = m = 2e^{\left(\frac{1-a}{b-1}\right)} - 1.$$

A função de densidade gama unitária modal é obtida utilizando $b = [1 + \log(m) - \phi] \log(m)^{-1}$ e $a = \phi$, para $\phi > 0$, e é dada por

$$f(y|m, \phi) = \frac{1}{2} \frac{\{[1 + \log(m) - \phi] \log(m)^{-1}\}^\phi}{\Gamma(\phi)} \left(\frac{y+1}{2}\right)^{(1-\phi) \log(m)^{-1}} \left[-\log\left(\frac{y+1}{2}\right)\right]^{\phi-1},$$

para $-1 < y < 1$.

Seja Y uma variável aleatória com distribuição Gompertz unitária, sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y|a, b) = \frac{1}{2} ab \left(\frac{y+1}{2}\right)^{-(b+1)} e^{\left\{-a\left[\left(\frac{y+1}{2}\right)^{-b} - 1\right]\right\}}, \text{ para } -1 < y < 1,$$

para $a, b > 0$ a distribuição possui uma única moda, cuja equação é dada por

$$\text{Moda}(Y) = m = 2 \left(\frac{ab}{b+1}\right)^{1/b} - 1.$$

A função de densidade Gompertz unitária modal é caracterizada considerando $b = \phi$ e $a = \phi^{-1} m^\phi (\phi + 1)$, para $\phi > 0$, e é dada por

$$f(y|m, \phi) = \frac{1}{2} m^\phi (\phi + 1) \left(\frac{y+1}{2}\right)^{-(\phi+1)} e^{\left\{-\phi^{-1} m^\phi (\phi + 1) \left[\left(\frac{y+1}{2}\right)^{-\phi} - 1\right]\right\}}, \text{ para } -1 < y < 1.$$

Uma abordagem clássica para seleção de modelos concorrentes foi desenvolvida por Vuong (1989), no qual é feito um teste de hipóteses para comparar os ajustes de dois modelos concorrentes, em que as hipóteses consideradas são

- H_0 : Os dois modelos são equivalentes.
- H_1 : Os dois modelos não são equivalentes.

O teste de Vuong é fundamentado na razão de verossimilhanças de Vuong, para comparar modelos de regressão não aninhados e possui a estatística de teste definida por

$$T = \frac{1}{\hat{\omega}^2 \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \log \frac{f(y_i|x_i, \hat{\theta})}{g(y_i|x_i, \hat{\gamma})},$$

no qual

$$\hat{\omega}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{f(y_i|x_i, \hat{\theta})}{g(y_i|x_i, \hat{\gamma})} \right)^2 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{f(y_i|x_i, \hat{\theta})}{g(y_i|x_i, \hat{\gamma})} \right) \right]^2,$$

em que $f(\cdot)$ representa a fdp (ou a função de probabilidade) para o modelo 1 e $g(\cdot)$ representa a fdp para o modelo 2. Para n suficientemente grande a estatística de teste (T), sob H_0 , possui

aproximadamente distribuição normal padrão. Considerando um nível de significância $100 * \alpha\%$, a hipótese nula avalia a equivalência entre duas distribuições, na qual H_0 será rejeitada se $|T| > z_{\alpha/2}$, em que $z_{\alpha/2}$ representa o quantil $\alpha/2$ da distribuição $N(0, 1)$ (MENEZES; CHAKRABORTY, 2021). Caso a hipótese nula seja rejeitada, deve-se verificar o sinal da estatística de teste. Se $T > 0$ então o modelo 1 é preferível em comparação ao modelo 2, por outro lado, se $T < 0$ então o modelo 2 é preferível em comparação ao modelo 1.

7 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Um estudo de simulação foi realizado com o objetivo de avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo de regressão WTM. As inferências pontuais e intervalares são obtidas pelo método de Monte Carlo, com o suporte computacional do software R (R Core Team, 2023) para estimação paramétrica. Foram geradas n observações de $Y \sim \text{WTM}(m_i, \phi_i)$, considerando-se as seguintes estruturas

$$\begin{aligned} g_1(m_i) &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip}, \\ g_2(\phi_i) &= v_0 + v_1 z_{i1} + \cdots + v_q z_{iq}, \end{aligned}$$

em que $i = 1, \dots, n$, para a estrutura de regressão da moda foram estabelecidas três funções de ligação: logito, probito e complemento log-log, enquanto para estrutura do parâmetro de forma foi utilizada a função logarítmica. As covariáveis associadas a i -ésima observação são geradas a partir de uma distribuição uniforme padrão, isto é, $U(0, 1)$, devido à conveniência numérica. Considerou-se $R = 10.000$ réplicas de Monte Carlo e três cenários para avaliar o desempenho dos estimadores: cenário (A): $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$, cenário (B): $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$, cenário (C): $\beta_0 = 2,0$, $\beta_1 = -1,0$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 2,0$. Foi considerado, para esta análise, sete tamanhos de amostra $n \in \{20, 30, 40, 50, 100, 200, 500\}$, dois tamanhos para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ ($p = 1$ e $p = 2$) e um tamanho para $\mathbf{v}$ ($q = 1$). Obtendo-se para cada tamanho amostral as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{MC} &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{\theta}_i, \\ dp(\hat{\theta}_{MC}) &= \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{MC})^2}, \\ VR(\hat{\theta}_{MC}) &= \left(\frac{\hat{\theta}_{MC} - \theta}{\theta} \right) 100\%, \\ \sqrt{eqm(\hat{\theta}_{MC})} &= \sqrt{dp^2(\hat{\theta}_{MC}) + b^2(\hat{\theta}_{MC})}. \end{aligned}$$

As equações denotam, respectivamente, a média, o desvio-padrão, viés relativo (porcentagem) e raiz quadrada do erro quadrático médio, também será apresentado a curtose e assimetria, cujo valor verdadeiro do parâmetro é denotado por $\boldsymbol{\theta}$. A estimação dos parâmetros é efetuada através da função `nlminb()`, cujos valores iniciais para obtenção das estimativas do parâmetro $\boldsymbol{\beta}$ são obtidos pelo método de mínimos quadrados de um modelo de regressão linear, a partir da transformação $Y^* = g_1(\frac{Y+1}{2})$, os chutes iniciais para o vetor $\mathbf{v}$ são obtidos a partir

do cálculo da variância Y^* , dada por $S^2(Y^*)$ (MELO; LOOSE; CARVALHO, 2021). Para cada cenário foi avaliado as estimativas de Monte Carlo: média, viés relativo, desvio-padrão, erro quadrático médio, coeficiente momento de curtose (K), coeficiente momento de assimetria (CA) e taxas de cobertura (TC), utilizando-se as funções de ligação: logito, probito e complemento log-log.

Ao avaliar o cenário A (Tabela 2) verifica-se que as estimativas do parâmetro β estão próximas dos valores especificados $\beta_0 = -1,0$ e $\beta_1 = 0,5$. De maneira semelhante, analisa-se uma concordância entre as estimativas do parâmetro $\mathbf{v}$ e seus valores determinados. Portanto, observa-se que com o aumento do tamanho amostral as estimativas obtidas pelo método de Monte Carlo dos parâmetros do modelo se aproximam dos verdadeiros valores estabelecidos. Para o tamanho amostral $n = 20$ o viés relativo de $\hat{v}_0$ chega a 10,20%, de modo que o viés diminui gradativamente quando n aumenta, mantendo-se próximo de zero para $n = 500$. Além disso, de acordo com a Tabela (2) as medidas de curtose e coeficiente de assimetria dão indícios de normalidade assintótica para os estimadores, pois, conforme o tamanho de n aumenta o valor do coeficiente de assimetria das estimativas se aproxima de zero e o valor da curtose se aproxima de 3. Com o aumento de n , o desvio-padrão diminui e as taxas de cobertura estimadas se aproximam de $1 - \alpha$, para os níveis de significância previamente estabelecidos por $\alpha = 0,01, 0,05$ e $0,1$. De maneira complementar é possível identificar nos gráficos box-plots da Figura (2) que o aumento de n implica na diminuição da dispersão e as estimativas de $\hat{\theta}_{MC}$ dos parâmetros tornam-se mais precisas.

Com auxílio das Tabelas (3) e (4) é possível identificar concordância entre o modelo logito e os modelos probito e complemento log-log, caracterizados pelo baixo viés relativo referente ao parâmetro β e gradativa diminuição do viés relativo relacionado ao parâmetro $\mathbf{v}$, de forma que, a partir do tamanho $n = 200$ os vieses de $\hat{v}_0$ e $\hat{v}_1$ se aproximam de zero. Observa-se que as medidas de curtose e coeficiente de assimetria indicam normalidade assintótica para os estimadores devido às estimativas se aproximarem dos valores 3 e 0, respectivamente. As taxas de cobertura estimadas para ambos os modelos se aproximam do valor ideal com o aumento do tamanho amostral. Os gráficos box-plots das Figuras (3) e (4), referentes aos modelos probito e complemento log-log, respectivamente, indicam diminuição na dispersão e estimativas MC mais precisas de acordo com o aumento de n .

Verifica-se pelas Tabelas (5), (6) e (7), referentes ao cenário B, que tanto as estimativas do parâmetro β quanto as estimativas do parâmetro $\mathbf{v}$ estão próximas dos valores estabelecidos $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$ e $v_0 = 1,5$, $v_1 = 0,5$. Além disso, quando o

Tabela 2 – Estudo de simulação para o cenário A: $g_1(m^*) = \log\left(\frac{m^*}{1-m^*}\right)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$, $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$.

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	$\hat{\beta}_0$	-0,9977	-0,2295	0,2300	0,2300	3,9015	-0,1916	0,8115	0,8756	0,9494
	$\hat{\beta}_1$	0,5005	0,1053	0,4016	0,4016	4,0979	0,0667	0,8022	0,8688	0,9462
	$\hat{v}_0$	1,1021	10,2097	0,3853	0,3986	4,2718	0,6078	0,8075	0,8802	0,9531
	$\hat{v}_1$	0,5445	8,8968	0,6923	0,6938	3,8685	-0,0850	0,7896	0,8712	0,9583
30	$\hat{\beta}_0$	-1,0001	0,0106	0,1753	0,1753	3,2643	-0,1774	0,8343	0,8989	0,9632
	$\hat{\beta}_1$	0,5088	1,7520	0,3009	0,3011	3,3504	0,0438	0,8311	0,8997	0,9635
	$\hat{v}_0$	1,0677	6,7700	0,2777	0,2859	4,1149	0,6079	0,8342	0,8994	0,9666
	$\hat{v}_1$	0,5306	6,1169	0,4948	0,4957	3,6065	-0,0607	0,8153	0,8835	0,9641
40	$\hat{\beta}_0$	-1,0002	0,0240	0,1465	0,1465	3,3979	-0,1627	0,8567	0,9160	0,9714
	$\hat{\beta}_1$	0,5037	0,7432	0,2541	0,2542	3,2680	0,0365	0,8408	0,9056	0,9683
	$\hat{v}_0$	1,0451	4,5085	0,2230	0,2275	3,7610	0,5190	0,8494	0,9108	0,9734
	$\hat{v}_1$	0,5346	6,9277	0,4015	0,4030	3,3857	0,0396	0,8318	0,8995	0,9667
50	$\hat{\beta}_0$	-1,0002	0,0185	0,1301	0,1301	3,1448	-0,1374	0,8590	0,9195	0,9767
	$\hat{\beta}_1$	0,5040	0,7925	0,2212	0,2212	3,2781	0,0128	0,8602	0,9168	0,9733
	$\hat{v}_0$	1,0391	3,9099	0,1954	0,1993	3,6334	0,4514	0,8521	0,9165	0,9749
	$\hat{v}_1$	0,5196	3,9151	0,3414	0,3420	3,3399	-0,0234	0,8477	0,9098	0,9734
100	$\hat{\beta}_0$	-0,9995	-0,0488	0,0890	0,0890	3,0932	-0,0879	0,8835	0,9384	0,9832
	$\hat{\beta}_1$	0,5010	0,2046	0,1497	0,1497	3,0658	0,0070	0,8808	0,9318	0,9842
	$\hat{v}_0$	1,0189	1,8896	0,1254	0,1268	3,3347	0,3580	0,8787	0,9359	0,9848
	$\hat{v}_1$	0,5093	1,8675	0,2190	0,2192	3,2062	0,0175	0,8756	0,9306	0,9812
200	$\hat{\beta}_0$	-0,9995	-0,0454	0,0625	0,0625	3,0243	-0,0800	0,8908	0,9420	0,9875
	$\hat{\beta}_1$	0,5001	0,0248	0,1050	0,1050	3,0619	0,0254	0,8853	0,9389	0,9861
	$\hat{v}_0$	1,0084	0,8366	0,0847	0,0851	3,1142	0,2202	0,8918	0,9426	0,9888
	$\hat{v}_1$	0,5058	1,1664	0,1466	0,1467	3,0184	0,0104	0,8868	0,9417	0,9877
500	$\hat{\beta}_0$	-1,0000	-0,0042	0,0383	0,0383	3,0034	-0,0234	0,9015	0,9487	0,9894
	$\hat{\beta}_1$	0,5011	0,2220	0,0642	0,0642	2,9144	-0,0171	0,9012	0,9513	0,9904
	$\hat{v}_0$	1,0034	0,3445	0,0526	0,0527	3,1221	0,2134	0,8987	0,9477	0,9881
	$\hat{v}_1$	0,5026	0,5160	0,0910	0,0910	3,0142	-0,0472	0,8939	0,9438	0,9884

tamanho amostral aumenta os valores da curtose e coeficiente de assimetria se aproximam dos valores 3 e 0, respectivamente, em que verifica-se a propriedade de normalidade assintótica para os estimadores dos modelos logito, probito e complemento log-log. As taxas de cobertura estimadas para n suficientemente grande se aproximam de 0,9, 0,95 e 0,99. Os gráficos box-plots das Figuras (5), (6) e (7) elucidam a exatidão das estimativas e diminuição da dispersão, acarretada pelo aumento de n .

A simulação associada ao cenário C encontra-se no Apêndice B: considerou-se as

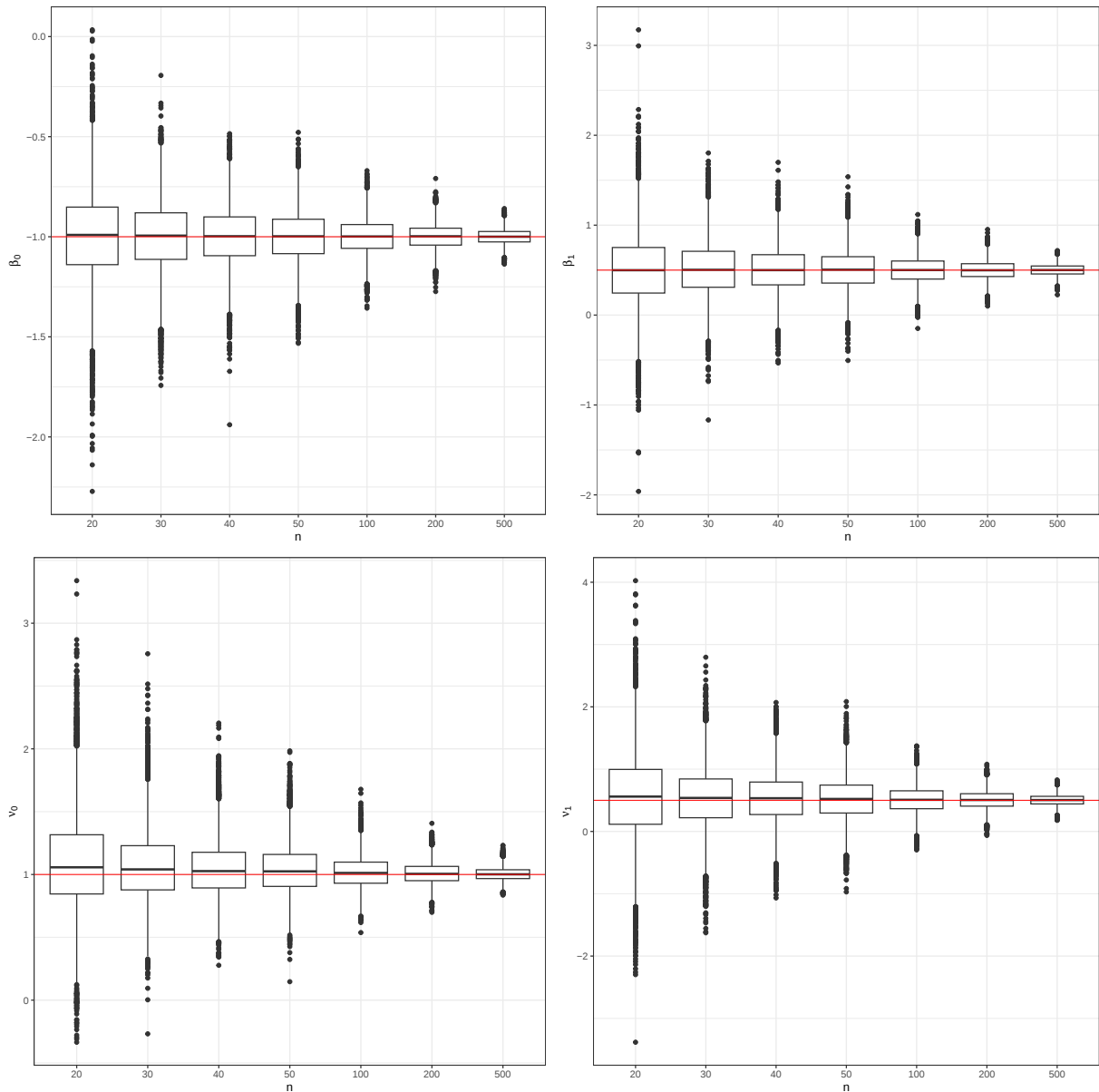


Figura 2 – Box-plots das estimativas de Monte Carlo para o cenário A. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é logito.

funções de ligação logito, probito e complemento log-log, em que a propriedade de normalidade assintótica é verificada para o modelo logito, cujo comportamento das estimativas coincidem com os demais cenários destacados neste capítulo. Porém, para as funções de ligação probito e complemento log-log, o viés relativo e desvio-padrão foram considerados altos, sobretudo, para tamanhos amostrais pequenos, além da curtose e coeficiente de assimetria de β apresentarem distância dos valores 3 e 0. A função de ligação complemento log-log foi considerada a menos eficaz para o cenário C.

Tabela 3 – Estudo de simulação para o cenário A: $g_1(m^*) = \Phi^{-1}(m^*)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ em que $\beta_0 = -1, 0$, $\beta_1 = 0, 5$, $v_0 = 1, 0$ e $v_1 = 0, 5$.

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	β_0	-0,9996	-0,0410	0,1123	0,1123	3,8260	-0,1946	0,8544	0,9120	0,9709
	β_1	0,4981	-0,3827	0,2013	0,2013	3,8129	0,0749	0,8466	0,9044	0,9671
	v_0	1,1068	10,6824	0,3619	0,3773	6,1375	0,8385	0,8208	0,8917	0,9674
	v_1	0,5006	0,1283	0,6403	0,6403	4,3593	-0,2051	0,8419	0,9066	0,9661
30	$\hat{\beta}_0$	-1,0008	0,0841	0,0857	0,0857	3,2553	-0,1955	0,8676	0,9221	0,9761
	$\hat{\beta}_1$	0,5045	0,9053	0,1525	0,1526	3,2791	0,0257	0,8602	0,9214	0,9764
	$\hat{v}_0$	1,0713	7,1290	0,2695	0,2787	3,7842	0,6482	0,8442	0,9054	0,9688
	$\hat{v}_1$	0,5134	2,6729	0,4729	0,4731	3,4197	-0,1747	0,8534	0,9183	0,9783
40	$\hat{\beta}_0$	-1,0005	0,0454	0,0725	0,0725	3,1682	-0,1842	0,8694	0,9259	0,9792
	$\hat{\beta}_1$	0,5027	0,5455	0,1286	0,1286	3,1900	0,0432	0,8607	0,9220	0,9755
	$\hat{v}_0$	1,0494	4,9408	0,2204	0,2259	3,6424	0,5708	0,8575	0,9165	0,9738
	$\hat{v}_1$	0,5207	4,1462	0,3855	0,3861	3,2757	-0,0819	0,8561	0,9229	0,9811
50	$\hat{\beta}_0$	-0,9996	-0,0421	0,0633	0,0633	3,2449	-0,1530	0,8764	0,9311	0,9807
	$\hat{\beta}_1$	0,5016	0,3147	0,1119	0,1119	3,2437	0,0064	0,8739	0,9293	0,9796
	$\hat{v}_0$	1,0360	3,6045	0,1870	0,1904	3,5078	0,5135	0,8695	0,9252	0,9810
	$\hat{v}_1$	0,5240	4,8053	0,3311	0,3320	3,2907	-0,1004	0,8627	0,9265	0,9826
100	$\hat{\beta}_0$	-0,9998	-0,0194	0,0442	0,0442	3,0957	-0,0884	0,8774	0,9336	0,9823
	$\hat{\beta}_1$	0,5008	0,1641	0,0772	0,0772	3,1095	0,0165	0,8813	0,9347	0,9832
	$\hat{v}_0$	1,0193	1,9280	0,1257	0,1272	3,1878	0,3314	0,8775	0,9337	0,9836
	$\hat{v}_1$	0,5102	2,0344	0,2184	0,2186	3,1406	-0,0153	0,8733	0,9294	0,9844
200	$\hat{\beta}_0$	-1,0002	0,0206	0,0304	0,0304	3,0197	-0,0758	0,8925	0,9405	0,9869
	$\hat{\beta}_1$	0,5011	0,2278	0,0528	0,0528	3,0075	0,0359	0,8914	0,9461	0,9882
	$\hat{v}_0$	1,0100	0,9994	0,0847	0,0853	3,1555	0,2770	0,8927	0,9443	0,9877
	$\hat{v}_1$	0,5026	0,5109	0,1473	0,1473	3,0470	-0,0003	0,8863	0,9424	0,9870
500	$\hat{\beta}_0$	-0,9999	-0,0129	0,0190	0,0190	3,0652	-0,0221	0,8963	0,9457	0,9901
	$\hat{\beta}_1$	0,5000	0,0029	0,0330	0,0330	3,0224	-0,0121	0,8998	0,9500	0,9893
	$\hat{v}_0$	1,0036	0,3578	0,0521	0,0522	3,0015	0,1127	0,8990	0,9487	0,9902
	$\hat{v}_1$	0,5012	0,2396	0,0897	0,0897	2,9990	0,0383	0,8998	0,9514	0,9909

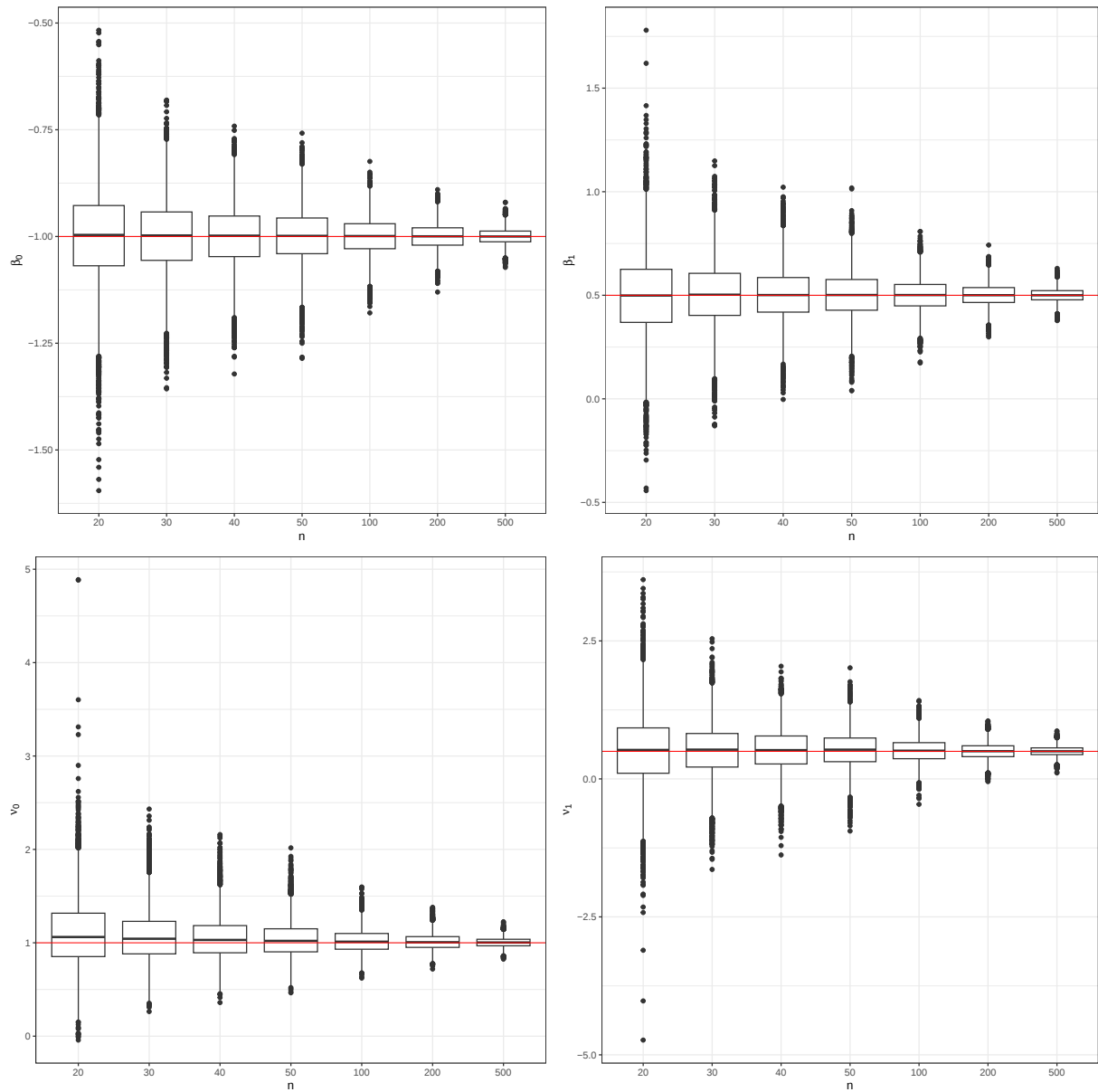


Figura 3 – Box-plots das estimativas de Monte Carlo para o cenário A. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é probito.

Tabela 4 – Estudo de simulação para o cenário A: $g_1(m^*) = \log(-\log(1 - m^*))$, para os tamanhos amostrais $n=20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ em que $\beta_0 = -1, 0$, $\beta_1 = 0, 5$, $v_0 = 1, 0$ e $v_1 = 0, 5$

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	$\hat{\beta}_0$	-1,0006	0,0638	0,2037	0,2037	4,0042	-0,2705	0,7998	0,8656	0,9420
	$\hat{\beta}_1$	0,5040	0,7926	0,3542	0,3542	4,2961	0,1242	0,7933	0,8588	0,9389
	$\hat{v}_0$	1,0952	9,5200	0,4066	0,4176	5,2177	0,6333	0,8062	0,8774	0,9513
	$\hat{v}_1$	0,5592	11,8497	0,7325	0,7349	4,4042	-0,1301	0,7764	0,8579	0,9517
30	$\hat{\beta}_0$	-1,0013	0,1339	0,1562	0,1562	3,2848	-0,2043	0,8258	0,8903	0,9620
	$\hat{\beta}_1$	0,5055	1,0952	0,2650	0,2650	3,4058	0,0683	0,8261	0,8850	0,9573
	$\hat{v}_0$	1,0565	5,6517	0,2917	0,2972	4,1740	0,4628	0,8308	0,8957	0,9650
	$\hat{v}_1$	0,5483	9,6516	0,5215	0,5238	3,8422	0,0453	0,8071	0,8792	0,9572
40	$\hat{\beta}_0$	-1,0009	0,0857	0,1298	0,1298	3,2693	-0,1953	0,8493	0,9111	0,9689
	$\hat{\beta}_1$	0,5058	1,1572	0,2204	0,2205	3,3569	0,0303	0,8463	0,9071	0,9682
	$\hat{v}_0$	1,0404	4,0361	0,2330	0,2364	4,0154	0,4478	0,8520	0,9121	0,9733
	$\hat{v}_1$	0,5399	7,9883	0,4116	0,4135	3,5424	0,0264	0,8311	0,8960	0,9660
50	$\hat{\beta}_0$	-1,0010	0,1030	0,1148	0,1148	3,1655	-0,1745	0,8579	0,9185	0,9754
	$\hat{\beta}_1$	0,5043	0,8679	0,1932	0,1933	3,2959	0,0268	0,8588	0,9159	0,9725
	$\hat{v}_0$	1,0353	3,5318	0,2011	0,2041	3,6844	0,3315	0,8535	0,9172	0,9753
	$\hat{v}_1$	0,5255	5,1045	0,3495	0,3505	3,4601	0,0533	0,8463	0,9099	0,9735
100	$\hat{\beta}_0$	-1,0000	0,0010	0,0783	0,0783	3,1028	-0,1122	0,8819	0,9391	0,9833
	$\hat{\beta}_1$	0,5013	0,2593	0,1304	0,1304	3,0716	0,0124	0,8813	0,9319	0,9844
	$\hat{v}_0$	1,0171	1,7091	0,1278	0,1290	3,3342	0,2971	0,8793	0,9374	0,9855
	$\hat{v}_1$	0,5120	2,4075	0,2223	0,2226	3,2358	0,0544	0,8755	0,9302	0,9816
200	$\hat{\beta}_0$	-1,0001	0,0122	0,0552	0,0552	3,0471	-0,0829	0,8828	0,9392	0,9875
	$\hat{\beta}_1$	0,5018	0,3687	0,0917	0,0918	3,0903	-0,0102	0,8808	0,9386	0,9866
	$\hat{v}_0$	1,0081	0,8138	0,0860	0,0864	3,1225	0,2100	0,8926	0,9474	0,9877
	$\hat{v}_1$	0,5061	1,2186	0,1490	0,1492	3,1042	-0,0048	0,8884	0,9417	0,9870
500	$\hat{\beta}_0$	-1,0004	0,0413	0,0342	0,0343	3,0546	-0,0613	0,8950	0,9468	0,9879
	$\hat{\beta}_1$	0,5012	0,2412	0,0565	0,0566	2,9458	0,0099	0,8946	0,9468	0,9888
	$\hat{v}_0$	1,0034	0,3446	0,0531	0,0532	3,0549	0,1683	0,8974	0,9468	0,9901
	$\hat{v}_1$	0,5015	0,3087	0,0915	0,0915	2,9898	-0,0260	0,8963	0,9469	0,9888

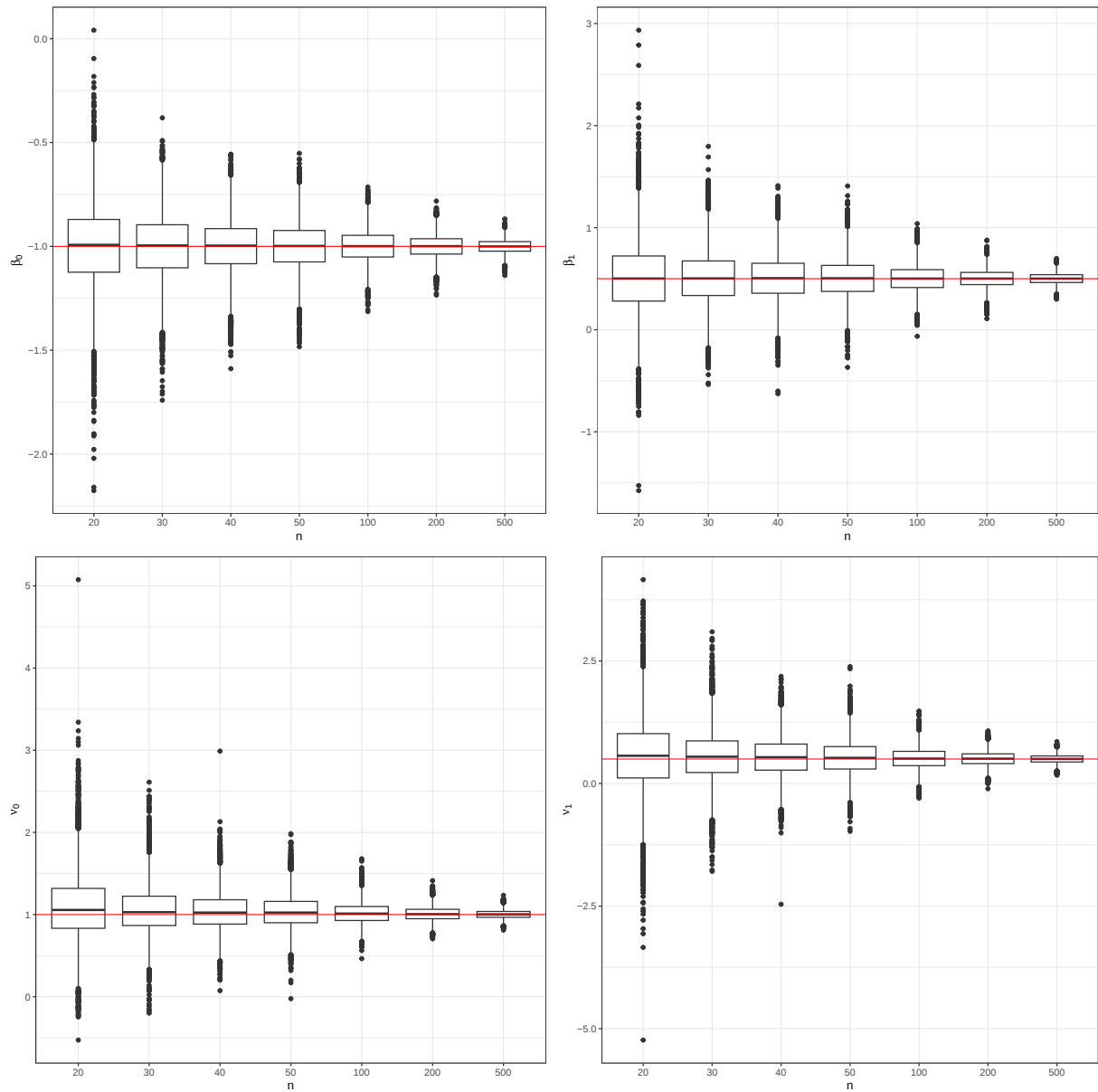


Figura 4 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário A. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = -1,0$, $\beta_1 = 0,5$, $v_0 = 1,0$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é cloglog.

Tabela 5 – Estudo de simulação para o cenário B: $g_1(m^*) = \log\left(\frac{m^*}{1-m^*}\right)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 0,5, \beta_1 = -1,0, \beta_2 = -0,5, v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	β_0	0,5073	1,4673	0,2620	0,2621	3,9323	-0,0092	0,8300	0,8908	0,9565
	β_1	-1,0142	1,4202	0,3154	0,3158	3,7685	-0,0726	0,8310	0,8943	0,9590
	β_2	-0,5073	1,4549	0,3109	0,3110	4,0654	-0,0584	0,8295	0,8896	0,9590
	v_0	1,6181	7,8736	0,4759	0,4903	4,7486	0,4147	0,7743	0,8500	0,9424
	v_1	0,5527	10,5441	0,8912	0,8928	4,6265	0,1601	0,7810	0,8509	0,9121
30	β_0	0,5039	0,7845	0,1968	0,1969	3,3372	0,0052	0,8428	0,9096	0,9695
	β_1	-1,0063	0,6323	0,2338	0,2338	3,2838	-0,0906	0,8484	0,9115	0,9702
	β_2	-0,5074	1,4896	0,2298	0,2300	3,3710	-0,0673	0,8453	0,9089	0,9694
	v_0	1,5798	5,3203	0,3324	0,3418	3,6464	0,3957	0,8141	0,8799	0,9559
	v_1	0,5330	6,6063	0,5964	0,5973	3,6196	-0,0853	0,8271	0,8944	0,9629
40	β_0	0,5051	1,0254	0,1631	0,1631	3,2655	-0,0245	0,8590	0,9198	0,9746
	β_1	-1,0086	0,8583	0,1931	0,1933	3,2596	-0,0224	0,8617	0,9209	0,9764
	β_2	-0,5039	0,7861	0,1916	0,1917	3,3733	0,0391	0,8510	0,9122	0,9695
	v_0	1,5544	3,6292	0,2677	0,2732	3,4484	0,4249	0,8344	0,8942	0,9633
	v_1	0,5392	7,8304	0,4732	0,4748	3,3128	-0,1314	0,8326	0,9062	0,9723
50	β_0	0,5026	0,5153	0,1430	0,1430	3,1910	0,0313	0,8682	0,9223	0,9756
	β_1	-1,0040	0,3976	0,1683	0,1683	3,1834	-0,0586	0,8668	0,9245	0,9773
	β_2	-0,5018	0,3530	0,1642	0,1642	3,1698	-0,0120	0,8622	0,9233	0,9766
	v_0	1,5466	3,1052	0,2293	0,2340	3,4448	0,4202	0,8467	0,9046	0,9669
	v_1	0,5299	5,9738	0,4044	0,4055	3,1939	-0,0420	0,8406	0,9092	0,9745
100	β_0	0,5016	0,3181	0,0966	0,0966	3,1191	-0,0340	0,8811	0,9373	0,9842
	β_1	-1,0025	0,2542	0,1132	0,1133	3,0253	-0,0002	0,8773	0,9331	0,9829
	β_2	-0,5018	0,3547	0,1104	0,1104	3,1363	-0,0251	0,8763	0,9348	0,9838
	v_0	1,5195	1,2997	0,1450	0,1463	3,1728	0,2140	0,8737	0,9299	0,9815
	v_1	0,5193	3,8503	0,2522	0,2529	3,1456	-0,0309	0,8736	0,9303	0,9821
200	β_0	0,5016	0,3206	0,0676	0,0676	3,1291	-0,0789	0,8849	0,9380	0,9855
	β_1	-1,0027	0,2674	0,0787	0,0787	3,0394	0,0002	0,8835	0,9382	0,9853
	β_2	-0,5002	0,0497	0,0767	0,0767	3,1561	0,0099	0,8873	0,9404	0,9840
	v_0	1,5100	0,6667	0,0979	0,0984	3,0788	0,2098	0,8866	0,9410	0,9863
	v_1	0,5081	1,6165	0,1699	0,1701	3,0435	-0,0429	0,8861	0,9402	0,9850
500	β_0	0,5010	0,1975	0,0418	0,0418	3,0289	0,0525	0,8948	0,9458	0,9886
	β_1	-1,0013	0,1303	0,0485	0,0485	2,8840	-0,0285	0,8921	0,9459	0,9895
	β_2	-0,5006	0,1294	0,0475	0,0475	2,9909	0,0113	0,8950	0,9462	0,9892
	v_0	1,5040	0,2696	0,0602	0,0603	3,0864	0,1118	0,8958	0,9459	0,9875
	v_1	0,5034	0,6882	0,1038	0,1038	3,0284	-0,0247	0,8916	0,9420	0,9876

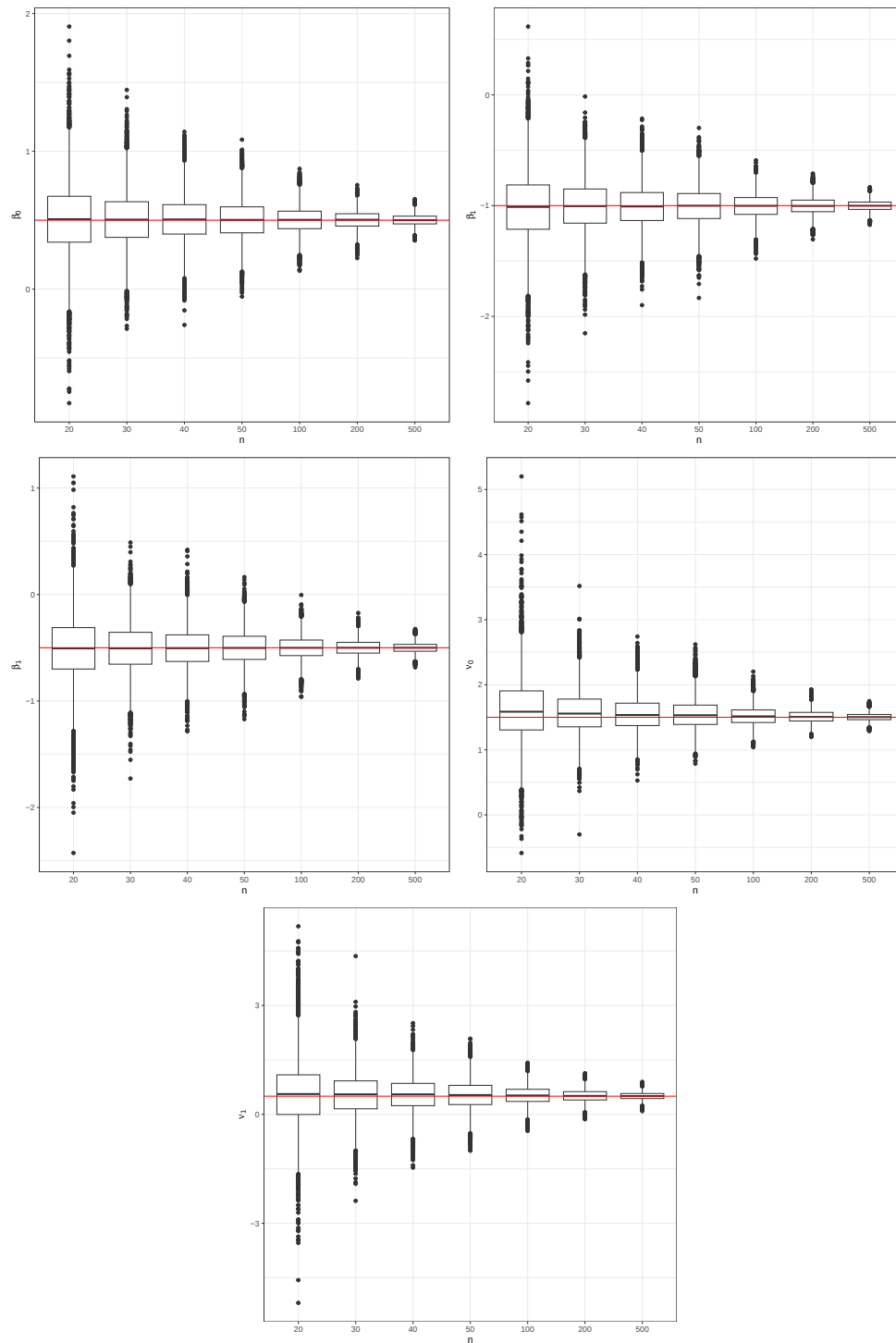


Figura 5 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário B. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é logito.

Tabela 6 – Estudo de simulação para o cenário B: $g_1(m^*) = \Phi^{-1}(m^*)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 0,5, \beta_1 = -1,0, \beta_2 = -0,5, v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	β_0	0,5015	0,2934	0,1603	0,1603	3,5785	0,0194	0,8664	0,9151	0,9619
	β_1	-1,0053	0,5301	0,1862	0,1862	3,8097	-0,0797	0,8686	0,9131	0,9570
	β_2	-0,5049	0,9736	0,1797	0,1798	3,9432	-0,0952	0,8732	0,9223	0,9684
	v_0	1,5854	5,6933	0,4712	0,4789	5,0768	0,5563	0,8105	0,8812	0,9431
	v_1	0,5917	18,3395	0,9078	0,9124	4,3801	0,1347	0,7637	0,8182	0,8700
30	β_0	0,5007	0,1427	0,1186	0,1186	3,3859	-0,0470	0,9009	0,9427	0,9792
	β_1	-1,0037	0,3653	0,1362	0,1362	3,4753	-0,0244	0,9085	0,9475	0,9799
	β_2	-0,5020	0,3983	0,1309	0,1309	3,3351	-0,0162	0,9020	0,9448	0,9838
	v_0	1,5739	4,9251	0,3181	0,3265	4,1220	0,3637	0,8458	0,9137	0,9792
	v_1	0,5128	2,5586	0,5858	0,5859	3,9043	0,0169	0,8477	0,9039	0,9544
40	β_0	0,5019	0,3861	0,0998	0,0999	3,2407	-0,0730	0,9150	0,9540	0,9860
	β_1	-1,0041	0,4132	0,1148	0,1149	3,1518	0,0230	0,9152	0,9534	0,9875
	β_2	-0,5017	0,3428	0,1075	0,1075	3,3405	-0,0093	0,9140	0,9541	0,9894
	v_0	1,5587	3,9157	0,2630	0,2695	3,4847	0,3544	0,8538	0,9167	0,9785
	v_1	0,5106	2,1206	0,4626	0,4628	3,4621	-0,0634	0,8757	0,9328	0,9779
50	β_0	0,5020	0,4081	0,0881	0,0882	3,1923	-0,0425	0,9137	0,9543	0,9879
	β_1	-1,0032	0,3216	0,0995	0,0996	3,1520	-0,0576	0,9230	0,9624	0,9915
	β_2	-0,5022	0,4487	0,0961	0,0961	3,3110	0,0227	0,9066	0,9496	0,9863
	v_0	1,5515	3,4315	0,2236	0,2294	3,2887	0,3669	0,8652	0,9212	0,9793
	v_1	0,5063	1,2633	0,3918	0,3919	3,3534	-0,1026	0,8846	0,9409	0,9842
100	β_0	0,5011	0,2268	0,0595	0,0595	3,0716	-0,0470	0,9188	0,9619	0,9924
	β_1	-1,0021	0,2058	0,0666	0,0666	3,1137	-0,0151	0,9251	0,9640	0,9932
	β_2	-0,5011	0,2187	0,0642	0,0642	3,0599	-0,0044	0,9116	0,9546	0,9921
	v_0	1,5195	1,3021	0,1465	0,1478	3,1441	0,2292	0,8792	0,9349	0,9841
	v_1	0,5156	3,1198	0,2548	0,2553	3,1202	-0,0585	0,8895	0,9460	0,9888
200	β_0	0,5013	0,2536	0,0416	0,0416	3,1330	-0,0236	0,9188	0,9620	0,9924
	β_1	-1,0019	0,1913	0,0462	0,0462	3,0705	0,0234	0,9218	0,9616	0,9921
	β_2	-0,5004	0,0743	0,0439	0,0439	3,1322	-0,0027	0,9133	0,9601	0,9923
	v_0	1,5104	0,6942	0,0986	0,0991	3,0447	0,2111	0,8886	0,9420	0,9864
	v_1	0,5090	1,8073	0,1711	0,1713	2,9914	-0,0342	0,8907	0,9464	0,9896
500	β_0	0,4997	-0,0516	0,0256	0,0256	2,9527	0,0250	0,9259	0,9674	0,9945
	β_1	-1,0000	0,0025	0,0285	0,0285	3,0663	-0,0475	0,9253	0,9645	0,9951
	β_2	-0,4996	-0,0798	0,0270	0,0270	2,9830	0,0155	0,9221	0,9640	0,9950
	v_0	1,5044	0,2922	0,0604	0,0605	3,0985	0,1051	0,8995	0,9490	0,9892
	v_1	0,5030	0,6096	0,1033	0,1033	3,0677	0,0111	0,9038	0,9529	0,9904

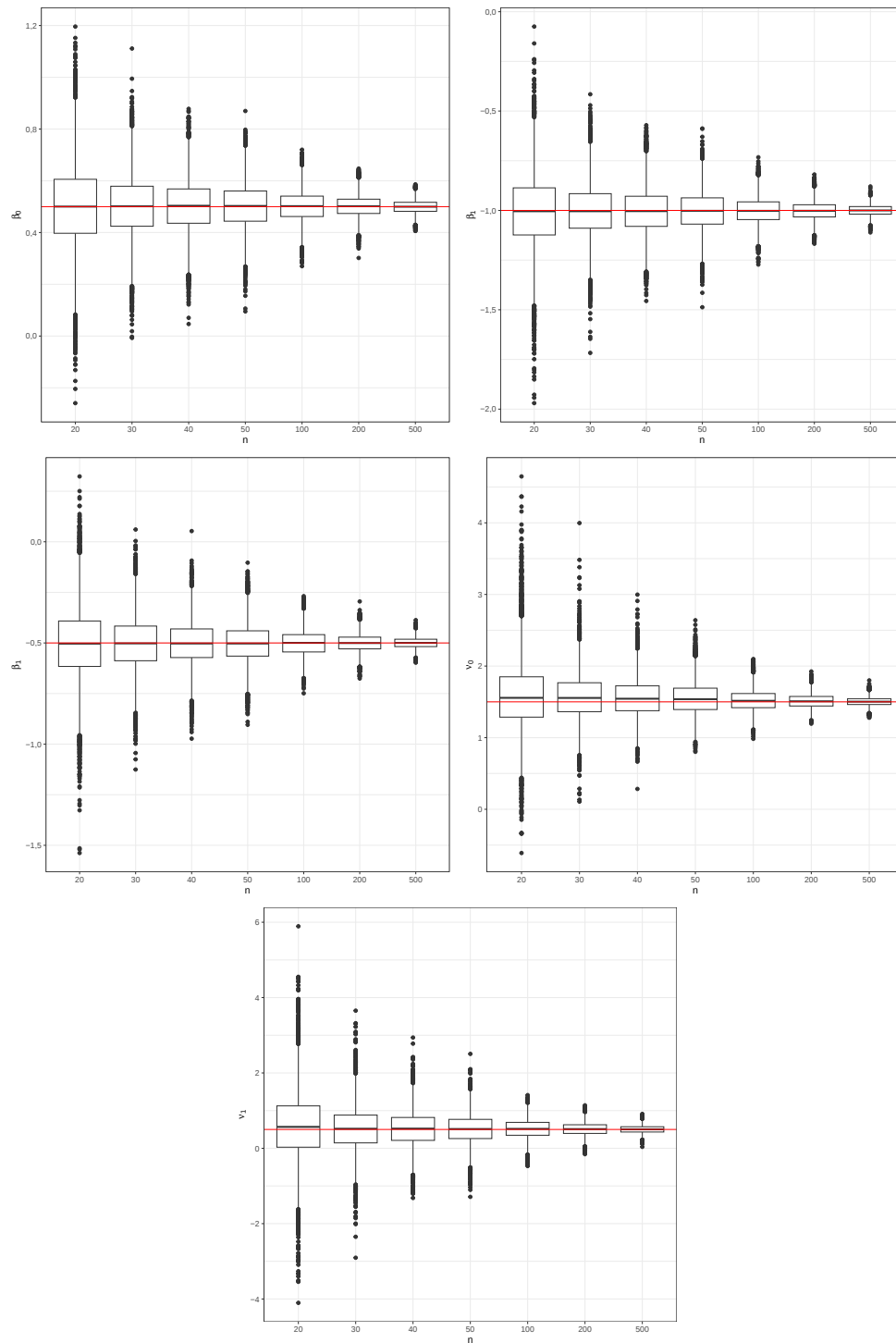


Figura 6 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário B. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é probito.

Tabela 7 – Estudo de simulação para o cenário B: $g_1(m^*) = \log(-\log(1 - m^*))$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	β_0	0,5170	3,4071	0,2430	0,2436	4,5703	0,1978	0,7957	0,8634	0,9424
	β_1	-1,0243	2,4350	0,2900	0,2911	4,6076	-0,2841	0,7981	0,8663	0,9410
	β_2	-0,5126	2,5135	0,2812	0,2814	4,7590	-0,0855	0,7886	0,8592	0,9389
	v_0	1,6083	7,2181	0,5287	0,5397	4,1132	0,1680	0,7491	0,8198	0,9178
	v_1	0,5892	17,8431	0,9848	0,9888	4,5368	0,1784	0,7479	0,8305	0,9193
30	β_0	0,5119	2,3734	0,1791	0,1795	3,4605	0,1063	0,8250	0,8901	0,9612
	β_1	-1,0166	1,6591	0,2110	0,2116	3,4697	-0,1286	0,8281	0,8894	0,9601
	β_2	-0,5075	1,4942	0,2026	0,2027	3,4193	-0,0290	0,8203	0,8849	0,9588
	v_0	1,5691	4,6052	0,3618	0,3684	4,2116	0,3619	0,7985	0,8644	0,9482
	v_1	0,5638	12,7517	0,6535	0,6566	3,9628	-0,0595	0,7811	0,8597	0,9528
40	β_0	0,5070	1,3940	0,1476	0,1477	3,3200	0,0450	0,8425	0,9085	0,9672
	β_1	-1,0119	1,1883	0,1734	0,1738	3,3991	-0,1531	0,8393	0,9036	0,9695
	β_2	-0,5042	0,8391	0,1682	0,1683	3,3724	-0,0430	0,8342	0,9015	0,9653
	v_0	1,5510	3,3991	0,2862	0,2907	3,7368	0,2847	0,8212	0,8871	0,9595
	v_1	0,5477	9,5430	0,5084	0,5106	3,4528	-0,0131	0,8083	0,8796	0,9619
50	β_0	0,5065	1,3000	0,1304	0,1305	3,2741	0,0496	0,8487	0,9113	0,9706
	β_1	-1,0087	0,8662	0,1514	0,1516	3,1960	-0,0870	0,8443	0,9096	0,9760
	β_2	-0,5055	1,0971	0,1455	0,1456	3,2419	-0,0408	0,8507	0,9089	0,9713
	v_0	1,5387	2,5772	0,2416	0,2447	3,5233	0,2602	0,8363	0,8990	0,9676
	v_1	0,5441	8,8135	0,4332	0,4354	3,4125	0,0176	0,8154	0,8845	0,9643
100	β_0	0,5033	0,6675	0,0862	0,0862	3,0968	0,0601	0,8743	0,9328	0,9821
	β_1	-1,0046	0,4562	0,0995	0,0996	3,1079	-0,0499	0,8784	0,9319	0,9840
	β_2	-0,5012	0,2359	0,0965	0,0965	3,1235	-0,0666	0,8740	0,9319	0,9803
	v_0	1,5196	1,3059	0,1535	0,1548	3,1292	0,1580	0,8667	0,9230	0,9787
	v_1	0,5214	4,2742	0,2683	0,2691	3,2122	0,0889	0,8557	0,9171	0,9762
200	β_0	0,5022	0,4371	0,0593	0,0593	3,0735	0,0133	0,8930	0,9439	0,9872
	β_1	-1,0030	0,2984	0,0687	0,0688	3,1042	-0,0357	0,8866	0,9403	0,9865
	β_2	-0,5012	0,2309	0,0662	0,0662	3,1062	-0,0256	0,8881	0,9408	0,9864
	v_0	1,5083	0,5547	0,1029	0,1033	3,0587	0,1477	0,8831	0,9370	0,9875
	v_1	0,5121	2,4184	0,1769	0,1773	3,0964	0,0359	0,8769	0,9344	0,9838
500	β_0	0,5008	0,1632	0,0370	0,0370	3,0097	0,0176	0,8966	0,9455	0,9886
	β_1	-1,0009	0,0919	0,0427	0,0427	2,9641	-0,0103	0,8964	0,9470	0,9894
	β_2	-0,5006	0,1117	0,0410	0,0410	2,9554	-0,0224	0,8967	0,9492	0,9908
	v_0	1,5022	0,1497	0,0622	0,0622	3,0634	0,0917	0,8980	0,9497	0,9884
	v_1	0,5055	1,1083	0,1062	0,1063	3,0730	0,0055	0,8959	0,9463	0,9887

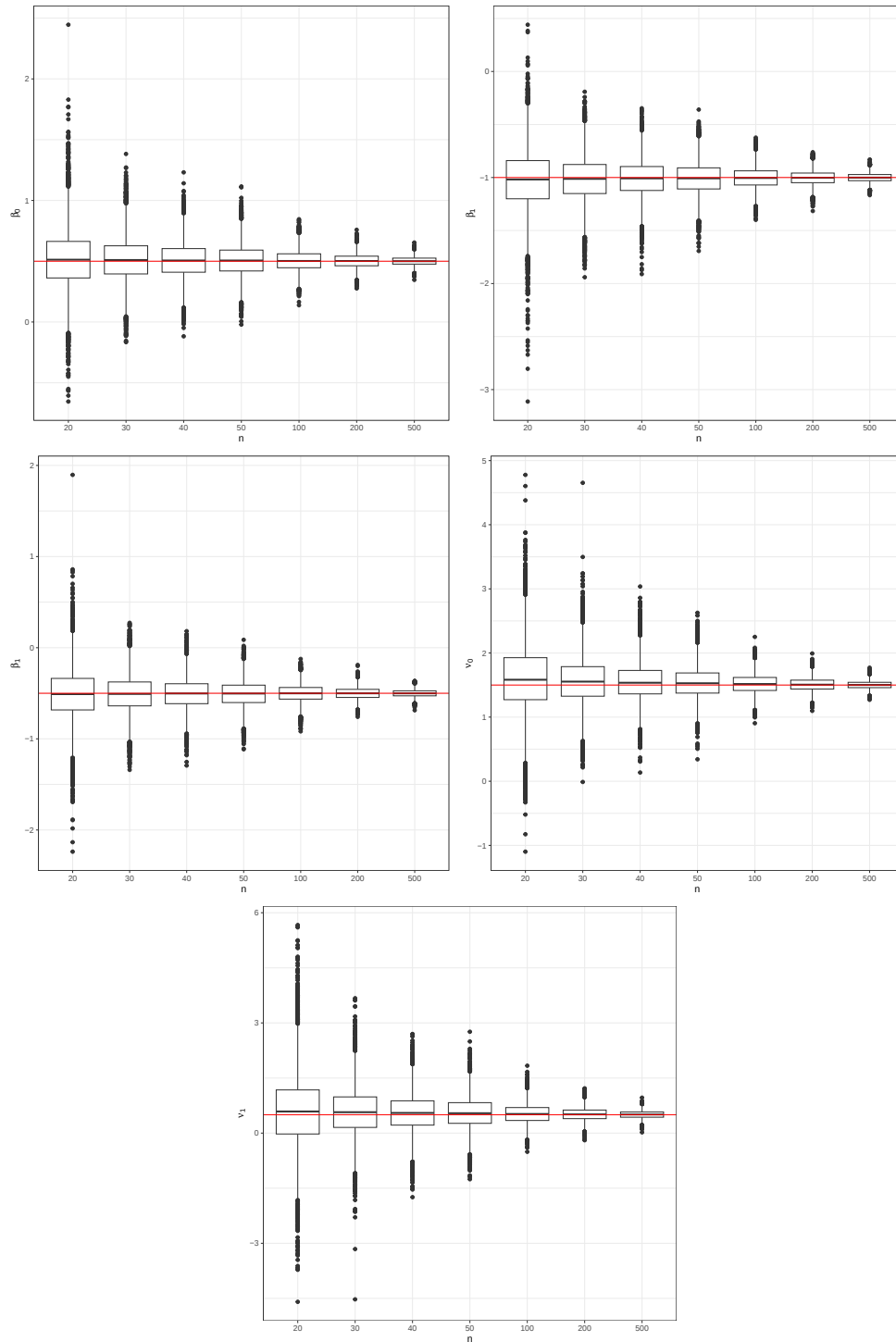


Figura 7 – Box-plot das estimativas de Monte Carlo para o cenário B. Linha vermelha representa o valor verdadeiro do parâmetro, em que $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -1,0$, $\beta_2 = -0,5$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 0,5$ de acordo com o tamanho amostral (n), cuja função de ligação é complemento log-log.

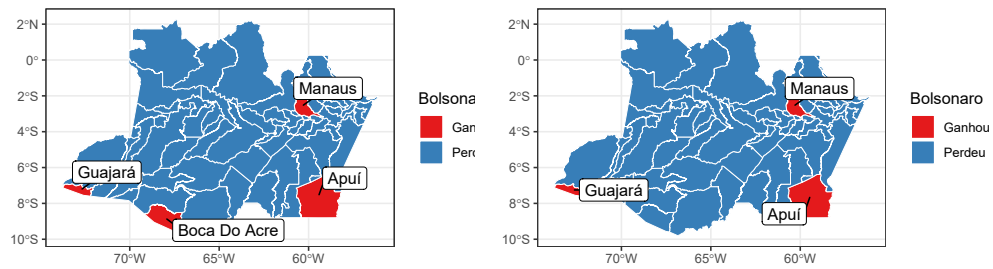
8 APLICAÇÕES EM DADOS REAIS

Neste capítulo, serão apresentadas três aplicações da metodologia detalhada anteriormente. A primeira aplicação é feita utilizando dados eleitorais das eleições para presidente do Brasil nos anos de 2022 e 2018 no estado do Amazonas; na segunda aplicação são utilizados dados eleitorais estadunidenses, em que será feito o ajuste do modelo de regressão WTM e posteriormente será avaliada a adequabilidade do modelo através da análise dos resíduos; e a terceira análise é referente a dados de pontuação de exames para o corpo de bombeiros em Connecticut - EUA.

DIFERENÇA ENTRE A PROPORÇÃO DE VOTOS DO CANDIDATO JAIR BOLSONARO ENTRE 2022 E 2018

A eleição presidencial do Brasil é caracterizada pela forma de votação direta, ou seja, é eleito o candidato que possui maior quantidade de votos da população. A disputa do cargo de presidente ocorre de quatro em quatro anos e a obrigatoriedade é estabelecida para quem tem entre 18 e 70 anos e sabe ler e escrever, além de facultativo para as idades de 16 e 17 anos. Nas eleições brasileiras o voto é considerado secreto e registrado através de urnas eletrônicas. O candidato em disputa necessita de mais de 50% dos votos válidos, isto é, 50% mais um voto.

A eleição presidencial no ano de 2022 foi caracterizada pela acirrada disputa entre os candidatos ao cargo de presidente da república. No estado do Amazonas houve alguns cenários que culminaram na derrota de Jair Messias Bolsonaro, do Partido Liberal (PL). O mapa da Figura (8a) apresenta o resultado, por município, da eleição no 2º turno, referente à vitória/derrota de Jair Bolsonaro. Nota-se que dos 62 municípios do Amazonas 4 elegeram em sua maioria o candidato do PL, cujas maiores vantagens foram nos municípios de: Manaus (capital), Apuí, Guajará e Boca do Acre. As demais cidades do Amazonas optaram pela eleição de seu adversário, Luiz Inácio da Silva. Apesar da vitória do Bolsonaro na capital, a configuração final foi de derrota no estado do AM, com 48,9% dos votos válidos. A eleição que antecedeu o mandato presidencial de Jair Bolsonaro foi a do ano de 2018, representada pela Figura (8b). O mapa mostra que o ex-deputado obteve maior vantagem sobre seu adversário em três municípios: Manaus (capital), Apuí e Guajará. Apesar da derrota em 59 municípios do estado, os cenários configuraram vitória para Jair Bolsonaro nas eleições gerais do Amazonas, ponderado pela vantagem dos votos válidos na capital amazonense.



(a) Votação para presidente no 2º turno do ano de 2022. (b) Votação para presidente no 2º turno do ano de 2018.

Figura 8 – Resultado da votação presidencial do candidato Jair Bolsonaro, por município, no estado do Amazonas.

Destaca-se no mapa da Figura (9) o comportamento da variável, que representa a diferença entre as proporções de votos de 2022 e 2018 para Jair Bolsonaro no Amazonas. A variável em evidência, como visualiza-se na escala do mapa da Figura (9), possui conjunto suporte no intervalo $(-1, 1)$. Destaca-se os valores próximos a zero, pois são provenientes de municípios que não houve diferença expressiva na porcentagem de uma eleição para outra, seja para cenário de vitória ou derrota em cada cidade. Exemplificado pelos panoramas de Manaus e Parintins: na capital do Amazonas o cenário foi de vitória em ambas as eleições, obtendo-se uma proporção de 0,6128 em 2022 e 0,6572 em 2018, cuja diferença entre as proporções foi de $-0,0444$, ou seja, maior proporção em 2018. Já em Parintins o cenário foi de derrota em ambas as eleições, obtendo-se uma proporção de 0,1744 em 2022 e 0,1750 em 2018, cuja diferença entre as proporções foi de $-0,00055$, ou seja, maior proporção em 2018. Valores negativos para a diferença indicam uma proporção de votos maior em 2018, já valores positivos para a diferença indicam uma proporção de votos maior no ano de 2022. Na Figura (9) estão representadas as diferenças entre as proporções de votos para todos os municípios do Amazonas.

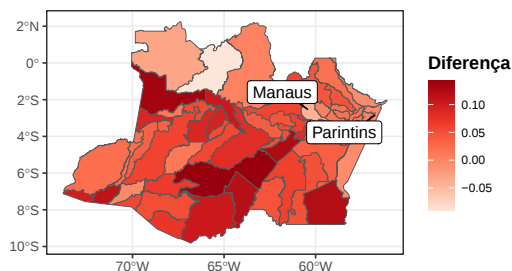
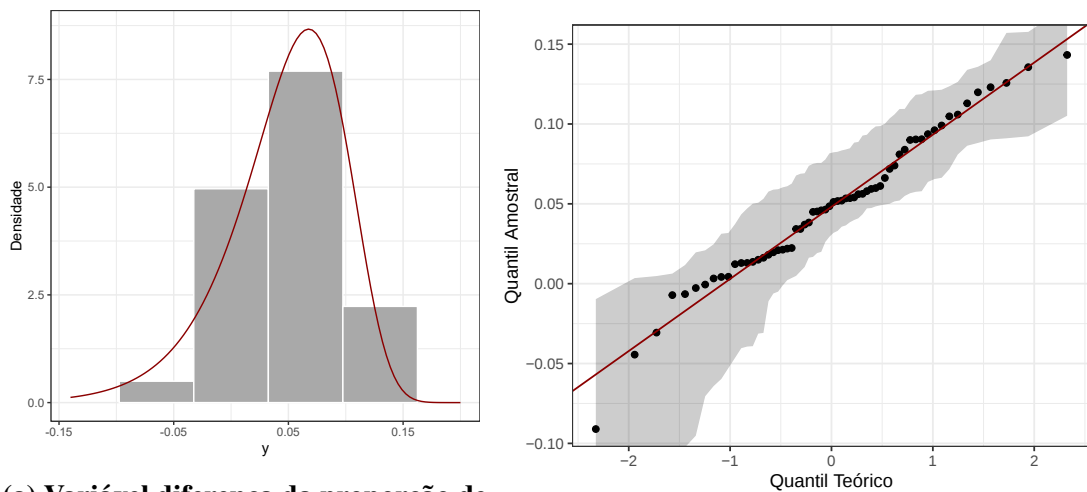


Figura 9 – Mapa de diferença da proporção de votos no 2º turno entre os anos de 2022 e 2018 do candidato Bolsonaro.

A Figura (10a) apresenta o histograma da diferença entre a proporção de votos sobreposto pela densidade da distribuição WTM. A partir deste gráfico é possível observar um bom ajuste do modelo WTM aos dados de eleição do Amazonas. Além disso, na Figura (10b) é apresentado o gráfico QQ-plot para a diferença entre as proporções e observa-se que todos os pontos estão dentro das bandas de confiança, indicado que o modelo se ajusta bem aos dados. Ademais, observa-se da Tabela (8) e Figura (10a) que a estimativa da moda é de 0,0677, bem como a estimativa de ϕ é de 25,1741.



(a) Variável diferença da proporção de votos sobreposta pela densidade da WTM. (b) QQ-plot com envelopes simulados para os dados da diferença de votos.

Figura 10 – Um estudo descritivo da variável diferença da proporção de votos.

O histograma ainda revela que a maior frequência desta variável apresenta valor positivo, porém, próximo do valor zero, o que indica que em grande parte dos municípios do Amazonas a proporção de votos neste candidato em 2022 foi semelhante (relativamente maior) à proporção de votos no ano de 2018, isto é, não houve diferença evidente na proporção entre 2022 e 2018 em uma frequência maior de municípios para este candidato.

Tabela 8 – Estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull truncada modal.

Parâmetro	Estimativa	EP
m	0,0677	0,0058
ϕ	25,1741	2,3764

ELEIÇÕES PRESIDENCIAIS NORTE AMERICANA 2016

O processo eleitoral nos Estados Unidos é um sistema tradicional e consolidado, caracterizado pela forma de votação indireta. Este modelo segue algumas convenções que o tornam dependente do bipartidarismo, isto é, apesar da existência de diversos partidos políticos, apenas dois possuem relevância na disputa pela vaga da presidência, são eles: democrata e republicano. Destaca-se algumas particularidades que ajudam a caracterizar esta bipolaridade, em que cada partido possui uma cor como identificação: azul para os democratas e vermelho para os republicanos. Além do mais podem ser reconhecidos através de símbolos: o burro é uma ilustração que representa o partido democrata, enquanto o elefante identifica o republicano.

O partido republicano, também denominado *Grand Old Party* (GOP) foi fundado em 1854 e compõe o protagonismo político nacional americano juntamente com o partido democrata, fundado em 1824. Distinguem-se em ideologia, filosofia, economia e outros, enquanto o partido democrata caracteriza-se por uma filosofia liberal, de maior intervenção do Estado na economia e defesa de políticas sociais assistencialistas, o republicano é identificado como um partido conservador, que defende a redução de impostos e a defesa do Estado mínimo, cujo perfil de seu eleitorado é religioso.

A eleição estadunidense é baseada em um sistema denominado colégio eleitoral, este sistema consiste em atribuir “pontos” a cada unidade federativa, cujo candidato eleito por votação popular em um estado leva todos os votos. A distribuição de pontuação é baseada na quantidade de representantes parlamentares de cada estado no congresso, isto significa que estados mais populosos possuem maior quantidade de representantes, consequentemente, um “peso” maior será atribuído àquele estado na votação presidencial. Os estados que compõe o país norte-americano somam 50, além do distrito de Colúmbia. A Califórnia, como estado mais populoso dos EUA, possui 55 deputados ou senadores no congresso, logo, o candidato vencedor neste estado acumulará mais 55 pontos. Historicamente os dois partidos possuem predominância em algumas unidades federativas, portanto, o período que antecede as eleições evidencia uma preferência partidária, ou seja, há um favoritismo de determinado candidato naquele estado.

Um estudo realizado por Jones (2016) apontou que pela primeira vez após 8 anos o partido republicano (vermelho) superou o partido democrata (azul) na preferência política presidencial, observa-se na Figura (11) o resultado do mapa eleitoral para o candidato republicano Donald Trump, em 2016. Esta pesquisa foi baseada em entrevistas telefônicas realizadas do dia 1º de janeiro à 31 de dezembro de 2015, com uma amostra de 177.991 adultos com 18 anos

ou mais, residentes em todos os estados do país. Os números de telefone foram selecionados com base no método de “discagem de dígitos aleatórios”. A base de dados referente aos dados de eleições presidenciais 2016 por estado está disponível no pacote Stat2Data, dispõe de 4 variáveis preditoras: renda per capita (RPC), porcentagem de graduados no ensino médio (PGE), porcentagem de graduados com ensino superior (PGR), porcentagem de pessoas com graus avançados de escolaridade (PDA) e a variável resposta representada pela diferença entre as taxas de aceitação entre os partidos democrata e republicana (DDR).

Destaca-se no mapa da Figura (11) os estados em que o candidato representante do partido republicano, Donald Trump, venceu ou perdeu nas eleições de 2016. Como destacado anteriormente, historicamente, há um favoritismo de partidos políticos em determinados estados, ou seja, vitórias republicanas são frequentes nos estados do: Texas (TX), Utah (UT), Wyoming (WY), Idaho (ID) e Kansas (KS). Os estados que tradicionalmente elegem um partido democrata são: Califórnia (CA), Nova Iorque (NY), Colorado (CO) e Illinois (IL).

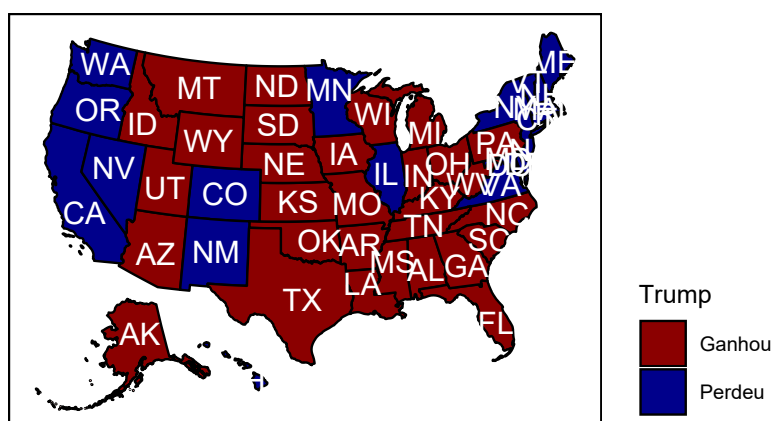


Figura 11 – Eleição presidencial nos Estados Unidos em 2016 - vitória/derrota do candidato Donald Trump em 50 estados.

A Figura (12) apresenta o mapeamento da variável resposta DDR nos 50 estados do país norte-americano. Nota-se que a diferença das taxas de aceitação dos partidos assume valores positivos, maiores que 0,2, quando há maior aceitação ao partido democrata, exemplificado pelos estados: Califórnia, Nova Iorque e Illinois. Por outro lado, nota-se que a DDR assume valores negativos, abaixo de -0,2, em estados cuja predominância partidária é republicana, como: Utah, Wyoming e Idaho.

A Figura (13a) representa o histograma da variável DDR sobreposto pela densidade da distribuição WTM. A partir deste gráfico é possível observar um bom ajuste dos dados

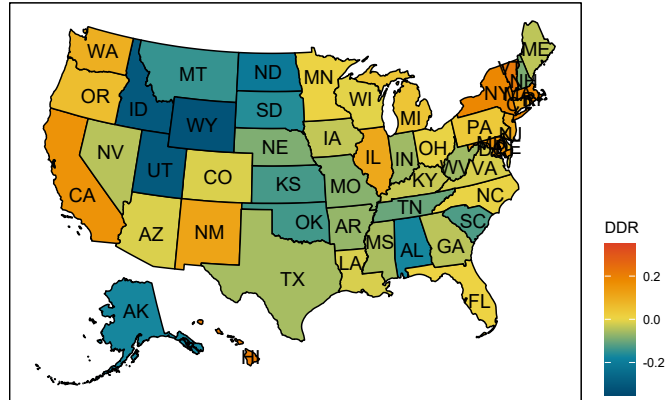
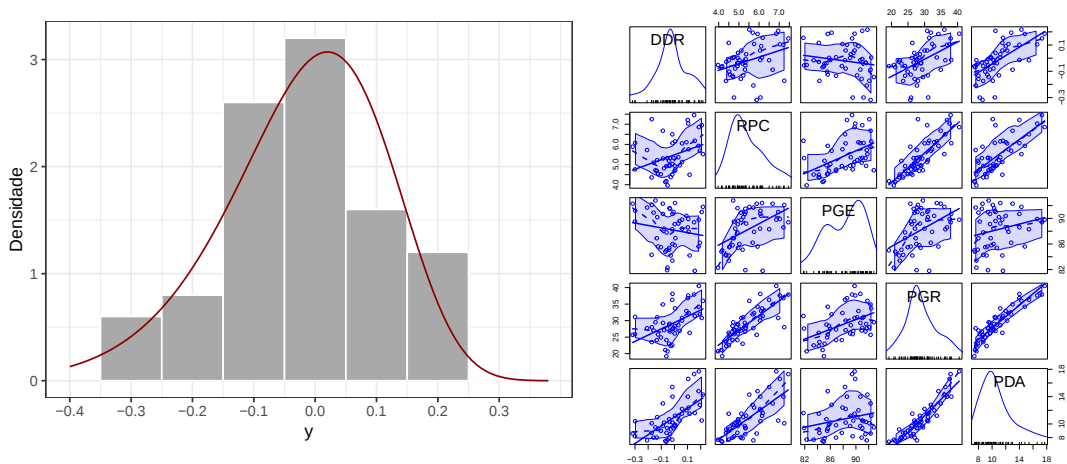


Figura 12 – Mapa da diferença entre as taxas de aceitação do partido republicano e partido democrata.

ao modelo proposto neste trabalho. Consequentemente, verifica-se através de um gráfico de dispersão possíveis relações existentes entre a variável resposta e as demais variáveis da base de dados. O gráfico da Figura (13b) apresenta a relação da variável DDR com as variáveis: RPC, PGE, PGR e PDA, na qual observa-se uma relação não linear entre a variável resposta e as variáveis RPC e PGE e notadamente uma relação linear com a variável PDA. As estruturas de



(a) Ajuste do modelo WTM aos dados eleitorais (b) Relacionamento da variável resposta e as variáveis RPC, PGE, PDA e PGR.

Figura 13 – Um estudo descritivo das variáveis resposta e das covariáveis.

regressão para a moda (m_i) e para o parâmetro de forma (ϕ_i) são dadas por

$$g_1(m_i^*) = \beta_0 + \beta_1 \log(\text{RPC})_i + \beta_2 \text{PGE}_i + \beta_3 \text{PGR}_i + \beta_4 \text{PDA}_i,$$

$$g_2(\phi_i) = v_0 + v_1 \text{PDA}_i + v_2 \text{PGE}_i,$$

para $i = 1, 2, \dots, 50$. As funções de ligação definidas para a moda m_i são: logito, probito, complemento log-log e estabelecida a função logarítmica para o parâmetro de forma ϕ_i . Apresenta-se a tabela dos ajustes e gráficos de diagnóstico com o objetivo de avaliar não somente a significância

das variáveis, mas também a adequação do modelo aos dados, pela análise da qualidade de ajuste. As medidas analisadas são: R^2_{CS} , AIC e BIC. Inicialmente é apresentado o ajuste do modelo incluídas todas as variáveis da base de dados, para seleção dos fatores que possivelmente estejam relacionadas com a variável de interesse (DDR).

Tabela 9 – Ajuste do modelo de regressão WTM a dados eleitorais estadunidenses de 2016.

Parâmetro	Logito			Probita			Complemento log-log		
	Estimativa	EP	valor-p	Estimativa	EP	valor-p	Estimativa	EP	valor-p
β_0 (intercepto)	0,8313	1,0827	0,4426	-3,7282	1,7995	0,0383	-5,9078	1,2979	<0,01
β_1 (PGR)	-2,3466	3,5383	0,5072	-7,0859	3,8080	0,0628	-12,9645	2,7032	<0,01
β_2 (PDA)	9,8837	5,7567	0,0860	8,3608	10,6924	0,4343	12,8123	6,1009	0,0357
β_3 (PGE)	-2,3589	1,9693	0,2310	2,6832	0,9334	0,0040	4,0068	0,2221	<0,01
β_4 (RPC)	0,5325	0,4460	0,2325	1,6271	0,8988	0,0702	2,7711	0,7331	<0,01
v_0 (intercepto)	15,0371	2,2578	<0,01	31,0199	2,1691	<0,01	28,9829	0,9734	<0,01
v_1 (PDA)	-0,9324	4,9548	0,8507	15,4626	4,7198	<0,01	12,8050	4,0217	<0,01
v_2 (PGE)	-13,8980	2,9733	<0,01	-35,0095	2,8167	<0,01	-32,5424	0,7613	<0,01
R^2_{CS}	0,9697			0,81630			0,7678		
AIC	128,0362			37,9851			26,278		
BIC	143,3324			53,2812			41,5741		

Observa-se a partir da Tabela (9) que nem todos os parâmetros do modelo são significativos para o modelo logito, destacado por possuir maior valor de R^2_{CS} . Para a estrutura da moda este ajuste apresenta significância estatística a 10% para o parâmetro associado à variável PDA; para a estrutura do parâmetro de forma identifica-se significância estatística a 1% para o intercepto (v_0) e para o parâmetro associado à variável PGE. Por outro lado, o modelo complemento log-log foi o que apresentou menor R^2_{CS} e assemelhou-se ao modelo probito em relação às estimativas. Realizadas novas análises, a partir do modelo especificado na Tabela (9), derivam-se um novos ajustes em que todos os parâmetros são significativas, dados por

Tabela 10 – Ajuste do modelo de regressão WTM a dados eleitorais estadunidenses, após a seleção de variáveis.

Parâmetro	Logito			Probita			Complemento log-log		
	Estimativa	EP	valor-p	Estimativa	EP	valor-p	Estimativa	EP	valor-p
β_0 (intercepto)	1,4110	0,4984	<0,01	0,8857	0,3118	<0,01	0,6675	0,3744	0,0746
β_1 (PDA)	7,9977	1,4109	<0,01	5,0030	0,8778	<0,01	5,6571	0,9763	<0,01
β_2 (PGE)	-2,5494	0,6927	<0,01	-1,5985	0,4331	<0,01	-1,8479	0,5185	<0,01
v_0 (intercepto)	15,1587	1,8846	<0,01	15,1644	1,8844	<0,01	15,3793	1,8740	<0,01
v_1 (PGE)	-14,2304	2,2222	<0,01	-14,2373	2,2220	<0,01	-14,4848	2,2103	<0,01
R^2_{CS}	0,96686			0,96684			0,96664		
AIC	117,6288			117,6005			117,2973		
BIC	127,1889			127,1607			126,8574		

Todos os parâmetros associados às variáveis de todos os modelos apresentaram significância estatística de 1% para as funções de ligação logito e probito. Os critérios AIC e BIC apresentaram valores aproximados para os modelos com função de ligação logito, probito e complemento log-log, no entanto, o logito, apresentou maior valor de R^2_{CS} , considerado o melhor entre os demais. Percebe-se que as estimativas de todos os modelos, aqui determinados, são próximas, até mesmo os sinais correspondem. A partir da Tabela (10) nota-se que o parâmetro associado a variável PGE possui efeito negativo na moda da diferença entre as taxas de aceitação do partido republicano e o partido democrata, enquanto a variável PDA possui efeito positivo na moda da diferença entre as taxas de aceitação. Apresenta-se o ajuste do melhor modelo como

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 2 \frac{e^{\{1,4110+7,997PDA-2,5494PGE\}}}{1 + e^{\{1,4110+7,997PDA-2,5494PGE\}}} - 1 \\ \hat{\phi} &= e^{\{15,1587-14,2304PGE\}}\end{aligned}$$

Interpretação dos coeficientes significativos para a estrutura da moda:

- Quando a PGE e a PDA são iguais a zero, a moda da diferença entre as taxas de aceitação dos partidos republicano e democrata é igual a 0,6078 $\left(2 \frac{e^{1,4110}}{1 + e^{1,4110}} - 1\right)$;
- Para o aumento em 1% na PDA, a moda da diferença entre as taxas aumenta, isto significa que quanto maior a PDA maior a taxa de aprovação do partido democrata, mantendo-se a variável PGE constante.

- Para o aumento em 1% na PGE, a moda da diferença entre as taxas de aceitação diminui, isto significa que, quanto maior a PGE maior a taxa de aprovação dos republicanos, mantendo-se a variável PDA constante.

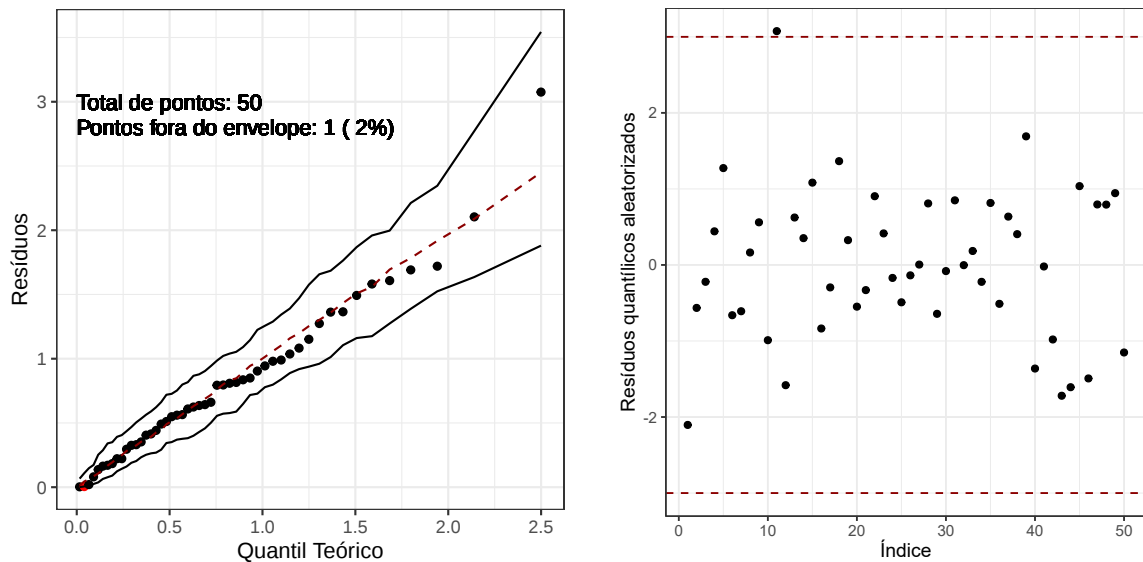
Interpretação dos coeficientes significativos para a estrutura do parâmetro de forma:

- Quando a PGE é igual a zero, $\hat{\phi} = 3831244 (e^{15,1587})$. Indicando uma grande concentração em torno da moda.
- Para o aumento em 1% na PGE há um decréscimo de 99,99% ($e^{-14,2304}$) na estimativa do parâmetro ϕ , ou seja, diminui a concentração em torno da moda.

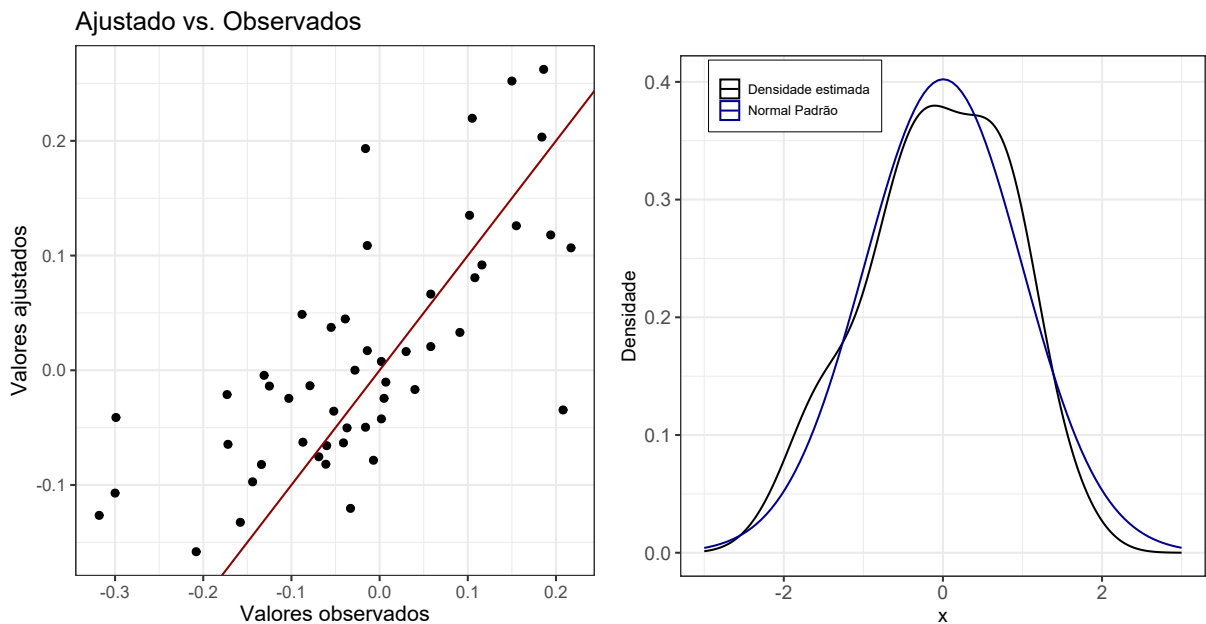
Após a seleção do melhor ajuste, é de fundamental importância a análise da adequação do modelo escolhido, através da avaliação de seus resíduos. As Figuras (14), (15), (16) apresentam as ferramentas de diagnóstico para análise dos resíduos quantílicos aleatorizados: QQ-plot com envelopes simulados, gráficos de índices versus resíduos, gráfico de valores observados versus valores ajustados e gráfico da função densidade estimada dos resíduos.

As Figuras (14a), (15a) e (16a) representam os gráficos de probabilidade normal com envelopes simulados baseados em 100 réplicas para os modelos logito, probito e complemento log-log, respectivamente. É possível observar no gráfico referente ao modelo logito que a maioria dos resíduos encontram-se dentro do envelope simulado, restando apenas um ponto fora desses limites. É importante ressaltar que os resíduos dos modelos probito e complemento log-log, em sua maioria, distribuíram-se dentro dos limites do envelope. Constata-se a partir deste gráfico um ajuste adequado referente ao modelo logito, sugerido pela aproximação à distribuição normal dos resíduos quantílicos aleatorizados.

Nas Figuras (14b), (15b) e (16b) nota-se nos gráficos de índices versus resíduos que não há indícios de padrões ou dependência entre as observações, pois os pontos encontram-se distribuídos aleatoriamente em torno de zero e variando entre os limites de -3 a 3 . Da mesma maneira, as Figuras (14c), (15c) e (16c) indicam que para os modelos logito, probito e complemento log-log as observações encontram-se dispostas em torno da reta identidade. Adicionalmente, apresentam-se as Figuras (14d), (15d) e (16d) para visualização da densidade estimada dos resíduos dos modelos logito, probito e complemento log-log, percebe-se um comportamento semelhante ao da distribuição normal padrão. De modo geral, todas as análises gráficas indicaram que os modelos forneceram bons ajustes, pois os resíduos apresentaram um comportamento adequado.

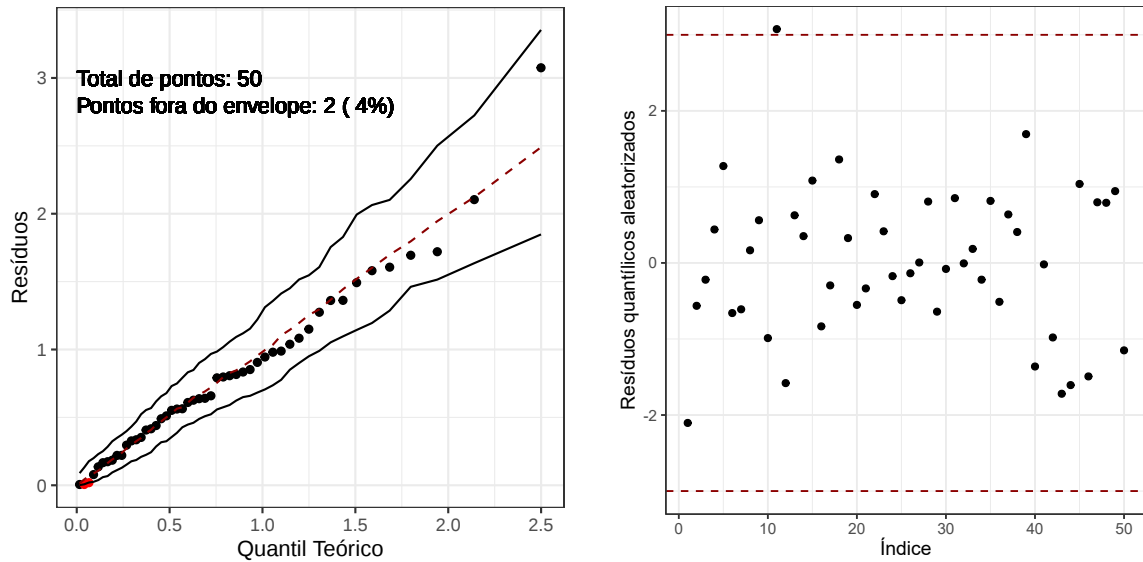


(a) QQ-plot com envelopes simulados para os resíduos quantílicos aleatorizados. (b) Índices versus resíduos quantílicos aleatorizados.

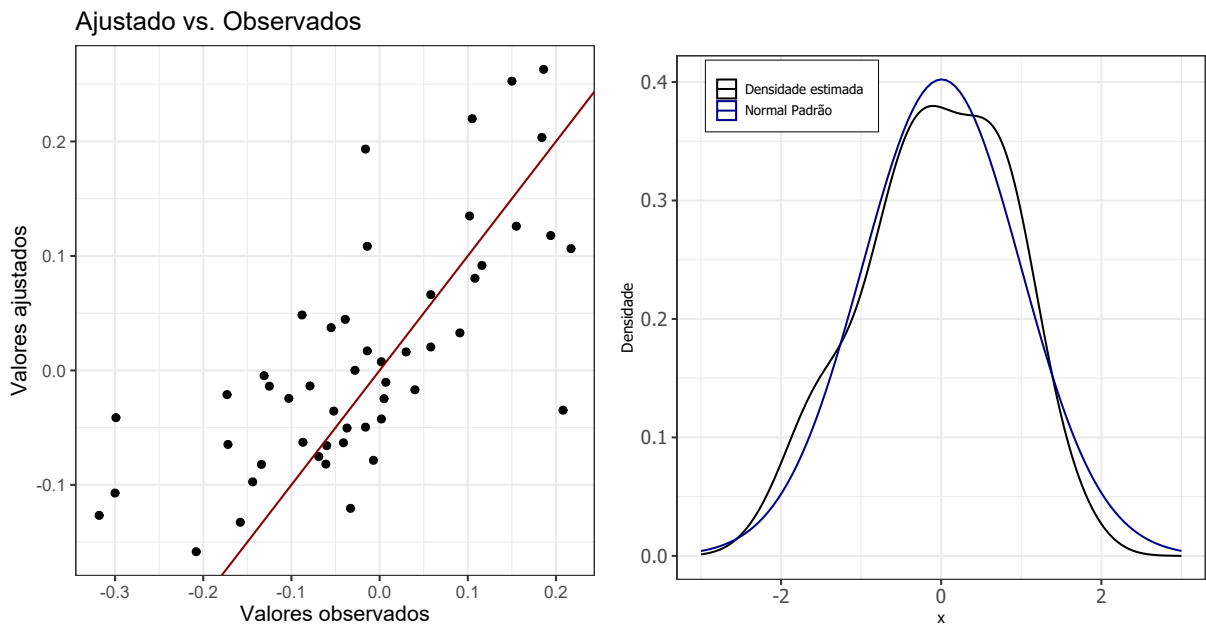


(c) Valores observados versus valores ajustados. (d) Função densidade de probabilidade.

Figura 14 – Gráficos de resíduos para o modelo de regressão Weibull truncado modal utilizando a função de ligação logito.

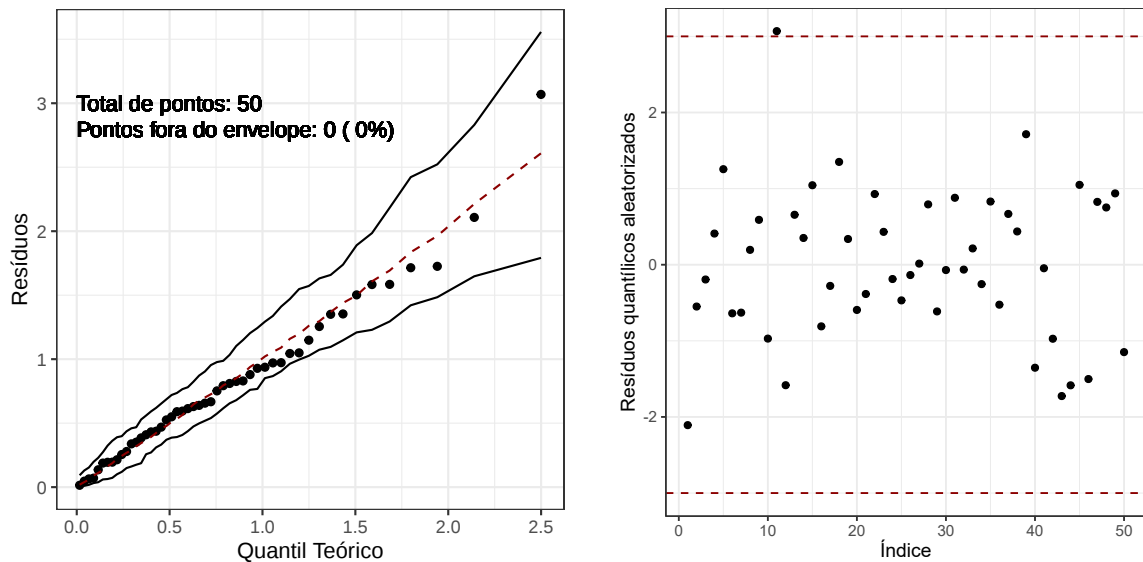


(a) QQ-plot com envelopes simulados para os resíduos quantílicos aleatorizados. (b) Índices versus resíduos quantílicos aleatorizados.

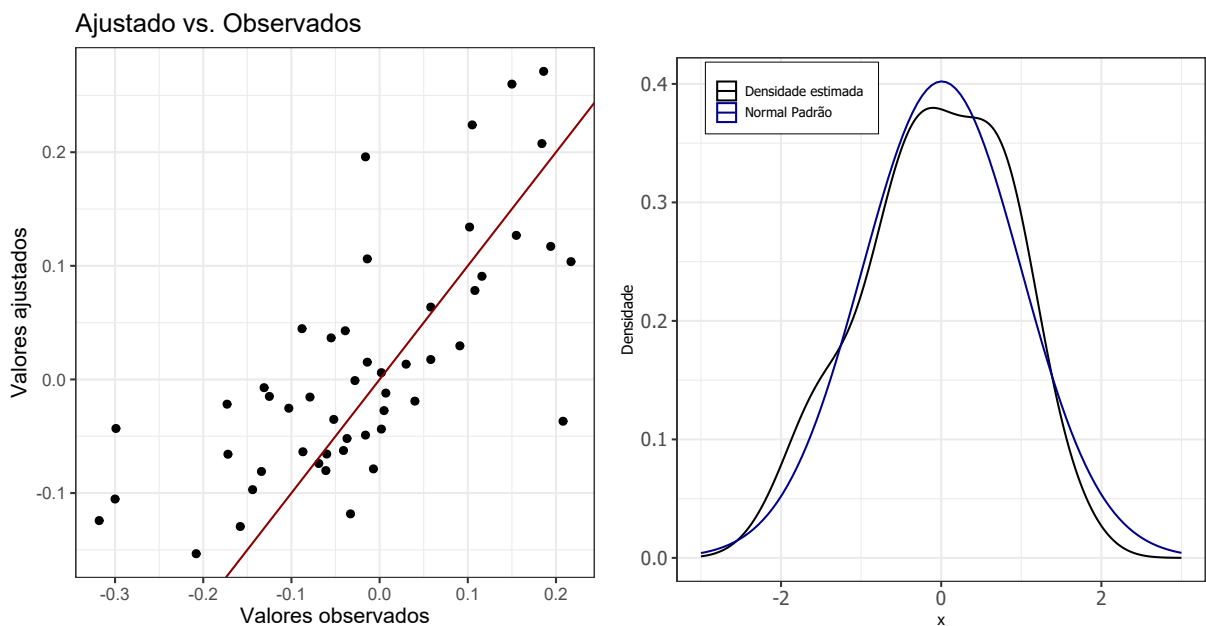


(c) Valores observados versus valores ajustados. (d) Função densidade de probabilidade.

Figura 15 – Gráficos de resíduos para o modelo de regressão Weibull truncado modal utilizando a função de ligação probito.



(a) QQ-plot com envelopes simulados para os resíduos quantílicos aleatorizados. (b) Índices versus resíduos quantílicos aleatorizados.



(c) Valores observados versus valores ajustados. (d) Função densidade de probabilidade.

Figura 16 – Gráficos de resíduos para o modelo de regressão Weibull truncado modal utilizando a função de ligação complemento log-log.

Comparação de modelos

A partir dos dados da Tabela (11), pode-se observar o ajuste da regressão WTM em comparação com as regressões: Gompertz unitária (UGomp), gama unitária (UGama), beta e Kumaraswamy (Kuma) modais. Identifica-se que as estimativas foram próximas em todos os cenários de ajuste. Ademais, nota-se que o modelo de menor R_{CS}^2 observado foi o modelo Gompertz, no qual, os modelos preferíveis foram: WTM e beta modal. Na Figura (17), estão os gráficos quantil-quantil seminormal para os resíduos dos modelos. Pode-se perceber que há um afastamento da normalidade dos resíduos para o modelo de regressão Gompertz (Figura (17c)), enquanto que para os demais modelos, não houve afastamento da normalidade (ver Figuras 17a, 17b, 17d e 17e).

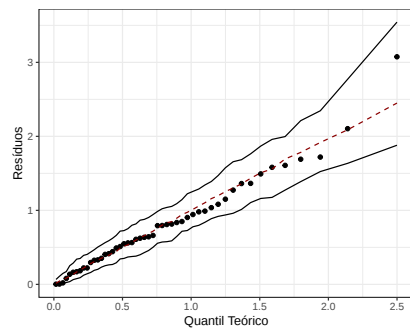
Tabela 11 – Resumo para os ajustes dos modelos para os dados eleitorais. Em parênteses o erro-padrão.

Parâmetro	UGomp	Kuma	WTM	UGama	Beta
β_0 (intercepto)	2,3422 (0,6487)	1,4110 (0,4937)	1,4110 (0,4984)	1,6040 (0,8096)	1,5943 (0,7900)
β_1 (PDA)	7,9124 (1,0669)	7,9977 (0,8612)	7,9977 (1,4109)	7,4680 (0,8930)	7,5559 (1,1294)
β_2 (PGE)	-3,7941 (0,7719)	-2,5494 (0,5860)	-2,5494 (0,6927)	-2,7766 (0,9228)	-2,7746 (0,9677)
v_0 (intercepto)	10,3054 (3,1456)	15,1587 (0,0028)	15,1587 (1,8846)	16,6342 (0,7400)	21,6171 (3,0093)
v_1 (PGE)	-9,0008 (3,5652)	-14,2314 (NA)	-14,2304 (2,2222)	-14,0666 (0,8068)	-18,9013 (3,3911)
R_{CS}^2	0,9347	0,9667	0,9669	0,9666	0,9669

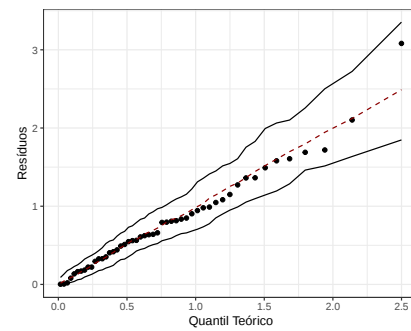
A Tabela (12) apresenta o resultado das comparações dos ajustes dos modelos de regressão através do teste de Vuong. De acordo com esta tabela os modelos WTM, beta e UGama são estatisticamente equivalentes. Além disso, o modelo WTM apresentou melhor ajuste quando comparado aos modelos Kuma e UGomp. O modelo que apresentou melhor ajuste aos dados eleitorais foi o modelo WTM seguido dos modelos beta, UGama e Kuma, já o pior ajuste foi considerado o modelo UGomp, uma vez que “perdeu” em todas as combinações. Portanto, o resultado da Tabela (12) reafirma a análise gráfica da Figura (17) e conclui-se que o modelo UGomp não está bem ajustado aos dados, devido ao afastamento da normalidade dos resíduos.

Tabela 12 – Teste Vuong para comparação dos modelos WTM, Kuma, UGomp, UGama e beta, para os dados eleitorais.

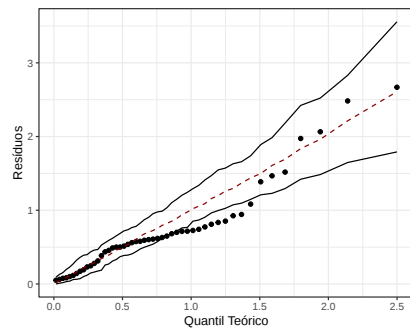
Comparação	Estatística de Vuong	<i>p</i> -valor
WTM versus Beta	0,627	0,265
WTM versus Kuma	109,841	< 0,01
WTM versus UGomp	3,542	< 0,01
WTM versus UGama	0,790	0,215
Beta versus Kuma	−0,617	0,269
Beta versus UGomp	9,612	< 0,01
Beta versus UGama	4,403	< 0,01
Kuma versus UGomp	3,532	< 0,01
Kuma versus UGama	0,783	0,217
UGomp versus UGama	−8,904	< 0,01



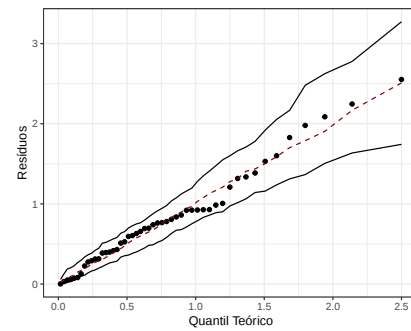
(a) Modelo WTM.



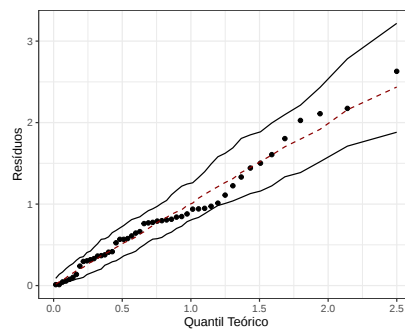
(b) Modelo Kuma modal.



(c) Modelo UGomp modal.



(d) Modelo beta modal.



(e) Modelo UGama modal.

Figura 17 – Gráfico semínormal com envelope simulado para os resíduos quantílicos aleatorizados dos modelos de regressão parametrizados pela moda.

PONTUAÇÃO DE EXAMES

O pacote Stata2Data dispõe de um conjunto de dados com 118 observações, referente à pontuação dos exames de promoção de bombeiro, descrito como objeto de um processo judicial denominado Ricci v.DeStafano, que trata de discriminação racial. De acordo com Miao (2010) a cidade de New Haven, Connecticut, administrou exames oral e escrito em novembro de 2003 para bombeiros que esperavam se qualificar para a promoção de tenente ou capitão do corpo de bombeiros da cidade. Para computação da nota final do exame foi atribuído peso de 60% para a prova escrita e peso de 40% para a prova oral. Para cada pessoa que fez o exame, foi registrado uma das etnias: afrodescendente, hispânico (HIS) ou branco (BRAN). Além do cargo em disputa para tenente (TEN) ou capitão, notas das provas oral e escrita, além da pontuação combinada.

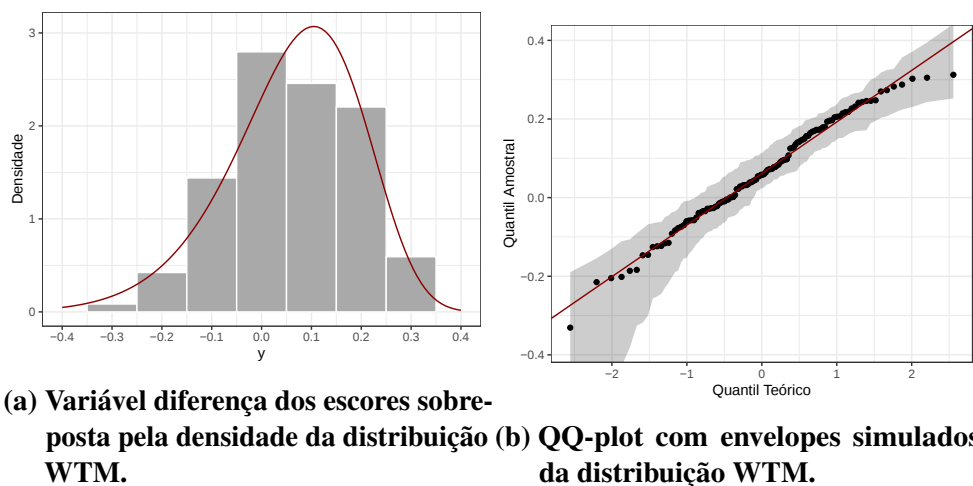


Figura 18 – Um estudo descritivo da variável diferença de pontuação de exames

A Figura (18a) apresenta o histograma da variável diferença de pontuação de exames sobreposta pela curva da densidade da distribuição WTM, pondera-se que a estimativa da moda é de 0,1048 e a estimativa de ϕ é de 9,2765, valores positivos desta variável indicam que a pontuação de escrita foi maior para o participante, enquanto valores negativos indicam que a pontuação oral foi maior para o candidato. De acordo com o histograma a frequência maior de valores desta variável compreende valores positivos, revelando que a maioria dos participantes obtiveram pontuação maior na prova escrita. Ademais, a Figura (18b) apresenta o gráfico quantil-quantil com envelopes simulados da distribuição WTM, nota-se que os dados comportam-se de forma linear dispostos dentro do envelope, que sugere, de fato, que a distribuição WTM para a variável denominada diferença de pontuação de exames, se ajusta bem aos dados.

Comparação de modelos

A partir dos dados da Tabela (13), pode-se observar o ajuste da regressão WTM em comparação com as regressões: UGomp, UGama, beta e Kuma modais. A Tabela apresenta o pseudo- R^2 do ajuste de cada modelo, cujo modelo mais adequado possui maior valor de R_{CS}^2 , isto é, o modelo UGama e beta modais são preferíveis ao modelo UGomp modal. A Figura (19) apresenta os gráficos quantil-quantil seminormal para os resíduos dos modelos. Percebe-se que há um afastamento da normalidade dos resíduos para o modelo de regressão UGomp (Figura 19c), enquanto que para os demais modelos, não houve afastamento da normalidade (ver Figuras 19a, 19b, 19d e 19e).

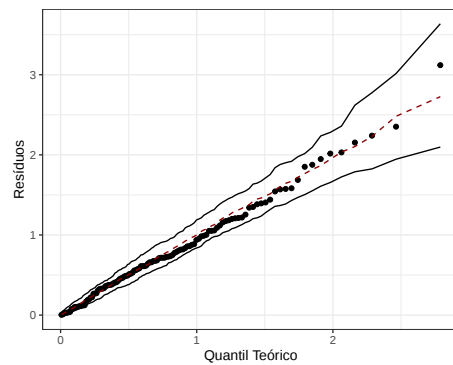
Tabela 13 – Resumo para os ajustes dos modelos para os dados de pontuação de exames. Em parênteses o erro-padrão.

Parâmetro	U-Gompertz (EP)	Kumaraswamy (EP)	WeibulTM (EP)	U-Gama (EP)	Beta (EP)
β_0 (intercepto)	-0,2582 (0,0597)	0,0241 (0,0501)	0,0241 (0,0497)	-0,0926 (0,0597)	-0,0914 (0,0580)
β_1 (TEN)	0,0701 (0,0502)	0,1015 (0,0432)	0,1012 (0,0431)	0,1185 (0,0479)	0,1190 (0,0477)
β_2 (HIS)	0,3841 (0,0769)	0,2230(0,0653)	0,2224 (0,0651)	0,3057 (0,0695)	0,2990 (0,0702)
β_3 (BRAN)	0,1616 (0,0563)	0,1238 (0,0495)	0,1235 (0,0493)	0,1397 (0,0572)	0,1421 (0,0561)
ϕ	7,5590 (0,5030)	9,8491 (0,7510)	9,8674 (0,6877)	31,5111 (0,9833)	67,2524 (NA)
R_{CS}^2	0,8498	0,9266	0,9267	0,9302	0,9300

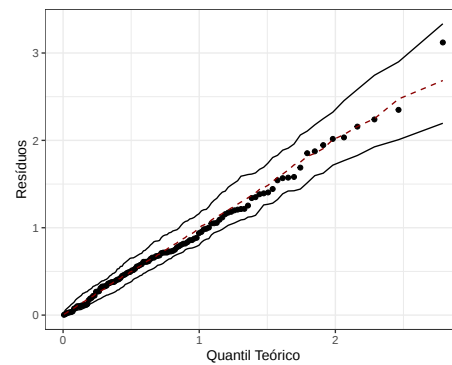
Conforme a Tabela (14) não houve equivalências entres as distribuições comparadas pelo teste de Vuong, pois p -valor $< 0,01$ em todas as combinações realizadas. Ademais, observa-se que o modelo WTM foi considerado melhor ajuste quando comparado ao modelo UGomp. O modelo que apresentou melhor ajuste aos dados de pontuação de exames foi o modelo UGama, seguido dos modelos beta, Kuma e WTM. O modelo que apresentou pior ajuste aos dados foi o da distribuição UGomp. Portanto, o resultado da Tabela (14) reafirma a análise gráfica da Figura (19) e conclui-se que esse modelo não está bem ajustado aos dados, devido ao afastamento da normalidade dos resíduos.

Tabela 14 – Teste Vuong para comparação dos modelos WTM, Kuma, UGomp, UGama e beta, para os dados de pontuação de exames.

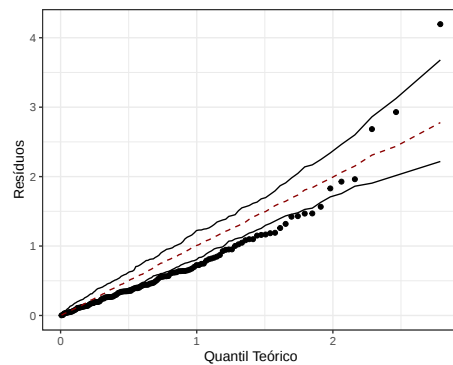
Comparação	Estatística de Vuong	p -valor
WTM versus beta	-3,896	< 0,01
WTM versus Kuma	-170,340	< 0,01
WTM versus UGomp	4,912	< 0,01
WTM versus UGama	-3,703	< 0,01
Beta versus Kuma	3,868	< 0,01
Beta versus UGomp	11,072	< 0,01
Beta versus UGama	-13,538	< 0,01
Kuma versus UGomp	4,904	< 0,01
Kuma versus UGama	-3,682	< 0,01
UGomp versus UGama	-11,012	< 0,01



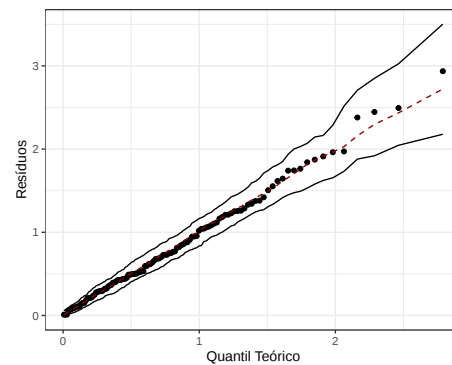
(a) Modelo WTM.



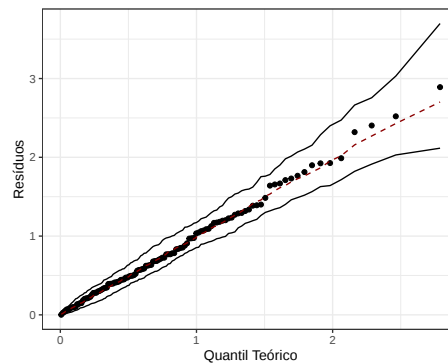
(b) Modelo Kuma modal.



(c) Modelo UGomp modal.



(d) Modelo beta modal.



(e) Modelo UGam modal.

Figura 19 – Gráfico semínormal com envelope simulado para os resíduos quantílicos aleatorizados dos modelos de regressão parametrizados pela moda.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi estudar a distribuição Weibull truncada através de uma reparametrização de sua moda, por este motivo, chamada de Weibull truncada modal (WTM). O deslocamento da variável resposta após o truncamento garante que o conjunto suporte da distribuição pertença ao intervalo $(-1, 1)$. Foram apresentadas as propriedades desta distribuição, bem como descrito o comportamento probabilístico da variável aleatória contínua associada a esta distribuição. A estimação dos parâmetros do modelo de regressão foi realizada utilizando o método de máxima verossimilhança.

Um estudo de simulação foi desenvolvido com o objetivo de avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo aqui proposto, a avaliação das inferências pontuais e intervalares foi realizada através do método de Monte Carlo com propósito de investigar diferentes cenários para os parâmetros do modelo, além de demonstrar a propriedade assintótica de normalidade dos estimadores de máxima verossimilhança. Destaca-se que o viés relativo e o desvio-padrão diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta e as taxas de cobertura estimadas do intervalo de confiança se aproximam do coeficiente de confiança $(1 - \alpha)$ verdadeiro.

Na primeira aplicação foi utilizada a diferença da proporção de votos entre 2022 e 2018 do candidato Jair Messias Bolsonaro, em que avaliou-se a sobreposição da distribuição WTM a dados eleitorais do Amazonas. A segunda aplicação foi fundamentada no estudo de Jones (2016), com o intuito de analisar as diferenças entre taxas partidárias na eleição presidencial estadunidense de 2016. Foram realizados ajustes do modelo de regressão WTM para avaliar possíveis fatores que influenciam na moda da diferença entre as taxas de aceitação dos partidos republicano e democrata, cuja variável resposta pertence ao intervalo $(-1, 1)$ e as variáveis significativas do melhor modelo possuem conjunto com suporte no intervalo $(0, 1)$. O melhor ajuste do modelo de regressão WTM constatou de maneira satisfatória que as variáveis: porcentagem de pessoas com graus de escolaridade avançadas (PDA) e porcentagem de graduados no ensino médio (PGE) possuem relação significativa com a moda da variável resposta DDR, estabelecida a função de ligação logito para esta estrutura de regressão. Concluiu-se que a variável PGE possui efeito negativo na moda da diferença entre as taxas de aceitação do partido republicano e o partido democrata, enquanto a variável PDA possui efeito positivo na moda da diferença entre as taxas de aceitação. Diante do exposto no Capítulo 2, concluiu-se que com o aumento em 1% da PGE há um decréscimo na estimativa do parâmetro ϕ , ou seja, há diminuição

dos valores em torno da moda. Na terceira aplicação, foi utilizada uma base de dados referente a um exame de promoção de bombeiro, em que o modelo de regressão UGama forneceu o melhor ajuste com base no teste de Vuong e o modelo WTM conseguiu ser melhor em comparação ao modelo UGomp, no qual forneceu o pior ajuste.

Trabalhos Futuros

- Propor uma nova reparametrização para o modelo de regressão Weibull truncada modal utilizando um parâmetro de precisão;
- Comparar o desempenho do estimador de máxima verossimilhança na presença de *outliers*;
- Realizar um estudo para correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição WTM;
- Propor medidas de influência; e
- Realizar um estudo de simulação de Monte Carlo em que as covariáveis são geradas a partir de uma distribuição beta, com o intuito de explorar o impacto da assimetria das covariáveis na estimação.

REFERÊNCIAS

- ABREU, D. R. d. O. M.; SOUZA, E. M. d.; MATHIAS, T. A. d. F. Impacto do código de trânsito brasileiro e da lei seca na mortalidade por acidentes de trânsito. **Cadernos de Saúde Pública**, SciELO Brasil, v. 34, 2018.
- AKAIKE, H. Information theory as an extension of the maximum likelihood principle—in: Second international symposium on information theory (eds) bn petrov, f. Csaki. **BNPBF Csaki Budapest: Akademiai Kiado**, 1973.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.
- ALMALKI, S. J.; NADARAJAH, S. Modifications of the weibull distribution: A review. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 124, p. 32–55, 2014.
- APT, K. Applicability of the weibull distribution function to atmospheric radioactivity data. **Atmospheric Environment (1967)**, Elsevier, v. 10, n. 9, p. 777–781, 1976.
- ARISTODEMOU, K. **New regression methods for measures of central tendency**. Tese (Doutorado) — Brunel University London, 2014.
- ATKINSON, A. C. Two graphical displays for outlying and influential observations in regression. **Biometrika**, v. 68, n. 1, p. 13–20, 04 1981.
- ATKINSON, A. C. Regression diagnostics, transformations and constructed variables. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, v. 44, n. 1, p. 1–22, 1982.
- ATKINSON, A. C. **Plots, transformations, and regression : an introduction to graphical methods of diagnostic regression analysis**. [S.l.]: Clarendon Press and Oxford University Press, 1987.
- AZUAGA, F.; SAMPAIO, B. Violência contra mulher: o impacto da lei maria da penha sobre o feminicídio no brasil. **Anais do 45o Encontro ANPEC**, 2017.
- BERGER, J. O.; WOLPERT, R. L. The likelihood principle. In: IMS. [S.l.], 1988.
- BERRY, G. L. The weibull distribution as a human performance descriptor. **IEEE Transactions on Systems, Man, & Cybernetics**, Institute of Electrical & Electronics Engineers Inc, 1981.
- BLOM, G. **Statistical estimates and transformed beta-variables**. Tese (Doutorado) — Almqvist & Wiksell, 1958.
- BOURGUIGNON, M.; LEÃO, J.; GALLARDO, D. I. Parametric modal regression with varying precision. **Biometrical Journal**, Wiley Online Library, v. 62, n. 1, p. 202–220, 2020.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. [S.l.]: Cengage Learning, 2021.
- CAVALCANTE, T.; OSPINA, R.; LEIVA, V.; CABEZAS, X.; MARTIN-BARREIRO, C. Weibull regression and machine learning survival models: Methodology, comparison, and application to biomedical data related to cardiac surgery. **Biology**, v. 12, n. 3, 2023.
- CORDEIRO, G. Introdução à teoria de verossimilhança. **SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**, Rio de Janeiro, 1992.

- COX, D. R.; HINKLEY, D. V. **Theoretical statistics**. [S.l.]: CRC Press, 1979.
- COX, D. R.; SNELL, E. J. **Analysis of binary data (2nd edition)**. [S.l.]: Chapman and Hall, 1989.
- CRÉNIN, F. Truncated weibull distribution functions and moments. 2015.
- DAVISON, A. C.; GIGLI, A. Deviance residuals and normal scores plots. **Biometrika**, [Oxford University Press, Biometrika Trust], v. 76, n. 2, p. 211–221, 1989.
- DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. Randomized quantile residuals. **Journal of Computational and graphical statistics**, Taylor & Francis, v. 5, n. 3, p. 236–244, 1996.
- DUSIT, C.; COHEN, A. C. Estimation in the singly truncated weibull distribution with an unknown truncation point. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 13, n. 7, p. 843–857, 1984.
- FAHRMEIR, L.; KNEIB, T.; LANG, S.; MARX, B.; FAHRMEIR, L.; KNEIB, T.; LANG, S.; MARX, B. **Regression models**. [S.l.]: Springer, 2013.
- FANG, Z.; PATTERSON, B. R.; JR, M. E. T. Modeling particle size distributions by the weibull distribution function. **Materials characterization**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 177–182, 1993.
- FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 31, n. 7, p. 799–815, 2004.
- FISHER, R. A. On the mathematical foundations of theoretical statistics. **Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character**, The Royal Society London, v. 222, n. 594-604, p. 309–368, 1922.
- GELMAN, A.; HILL, J. **Data analysis using regression and multilevel/hierarchical models**. [S.l.]: Cambridge university press, 2006.
- JANDHYALA, V.; FOTOPOULOS, S.; EVAGGELOPOULOS, N. Change-point methods for weibull models with applications to detection of trends in extreme temperatures. **Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society**, Wiley Online Library, v. 10, n. 5, p. 547–564, 1999.
- JEON, J.; SOHN, S. Y. Product failure pattern analysis from warranty data using association rule and weibull regression analysis: A case study. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 133, p. 176–183, 2015.
- JODRÁ, P. A note on the right truncated weibull distribution and the minimum of power function distributions. **REVSTAT-Statistical Journal**, v. 20, n. 3, p. 305–308, 2022.
- JONES, J. M. **Red states outnumber blue for first time in Gallup tracking**. 2016. Disponível em: <<https://news.gallup.com/poll/188969/red-states-outnumber-blue-first-time-gallup-tracking.aspx>>.
- KANTAR, Y. M.; USTA, I. Analysis of the upper-truncated weibull distribution for wind speed. **Energy conversion and management**, Elsevier, v. 96, p. 81–88, 2015.
- LI, Y.-M. A general linear-regression analysis applied to the 3-parameter weibull distribution. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 43, n. 2, p. 255–263, 1994.

- MALTAMO, M.; EERIKÄINEN, K.; PITKÄNEN, J.; HYYPPÄ, J.; VEHMAS, M. Estimation of timber volume and stem density based on scanning laser altimetry and expected tree size distribution functions. **Remote sensing of environment**, Elsevier, v. 90, n. 3, p. 319–330, 2004.
- MCCULLAGH, P.; NELDER, J. **Generalized Linear Models, Second Edition**. [S.l.]: Chapman & Hall, 1989.
- MCEWEN, R. P.; PARRESOL, B. R. Moment expressions and summary statistics for the complete and truncated weibull distribution. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 20, n. 4, p. 1361–1372, 1991.
- MELO, M. d. S.; LOOSE, L. H.; CARVALHO, J. B. de. Lomax regression model with varying precision: Formulation, estimation, diagnostics, and application. **Chilean Journal of Statistics (ChJS)**, v. 12, n. 2, 2021.
- MÉNDEZ-GONZÁLEZ, L. C.; RODRÍGUEZ-PICÓN, L. A.; VALLES-ROSALES, D. J.; ROMERO-LÓPEZ, R.; QUEZADA-CARREÓN, A. E. Reliability analysis for electronic devices using beta-weibull distribution. **Quality and reliability engineering international**, Wiley Online Library, v. 33, n. 8, p. 2521–2530, 2017.
- MENEZES, J. M. A. F. B.; CHAKRABORTY, S. A collection of parametric modal regression models for bounded data. **Journal of Biopharmaceutical Statistics**, Taylor & Francis, v. 31, n. 4, p. 490–506, 2021.
- MIAO, W. Did the results of promotion exams have a disparate impact on minorities? using statistical evidence in ricci v. destefano. **Journal of Statistics Education**, Taylor & Francis, v. 18, n. 3, 2010.
- MONTEIROA, M. F. G.; ROMIOB, J. A. F.; DREZETTC, J. Existe diferença de raça/cor do feminicídio no brasil? a desigualdade das taxas de mortalidade por causas violentas entre mulheres brancas e negras. **J Hum Growth Dev**, v. 31, n. 2, p. 358–366, 2021.
- NASCIMENTO, L. F. C.; ALMEIDA, M. C. d. S.; GOMES, C. d. M. S. Causas evitáveis e mortalidade neonatal nas microrregiões do estado de são paulo. **Revista Brasileira de Ginecologia e Obstetrícia**, SciELO Brasil, v. 36, p. 303–309, 2014.
- PAULA, G. A. **Modelos de regressão: com apoio computacional**. [S.l.]: IME-USP São Paulo, 2004.
- PAWITAN, Y. **In all likelihood: statistical modelling and inference using likelihood**. [S.l.]: Oxford University Press, 2001.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2023.
- RINNE, H. **The Weibull distribution: a handbook**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2008.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, JSTOR, p. 461–464, 1978.
- SKINNER, C. J.; HUMPHREYS, K. Weibull regression for lifetimes measured with error. **Lifetime Data Analysis**, Springer, v. 5, p. 23–37, 1999.
- VUONG, Q. H. Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 57, n. 2, p. 307–333, 1989.

WEIBULL, W. A statistical distribution function of wide applicability. **Journal of applied mechanics**, 1951.

WEST, B. T.; WELCH, K. B.; GALECKI, A. T. **Linear mixed models: a practical guide using statistical software**. [S.l.]: Crc Press, 2022.

WINGO, D. R. Methods for fitting the right-truncated weibull distribution to life-test and survival data. **Biometrical journal**, Wiley Online Library, v. 30, n. 5, p. 545–551, 1988.

WINGO, D. R. The left-truncated weibull distribution: theory and computation. **Statistical papers**, Springer, v. 30, n. 1, p. 39–48, 1989.

WONG, R. K. Weibull distribution, iterative likelihood techniques and hydrometeorological data. **Journal of Applied Meteorology (1962-1982)**, JSTOR, p. 1360–1364, 1977.

YAO, W.; LI, L. A new regression model: Modal linear regression. **Scandinavian Journal of Statistics**, v. 41, p. 656–671, 2013.

ZHANG, T.; XIE, M. On the upper truncated weibull distribution and its reliability implications. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 96, n. 1, p. 194–200, 2011.

APÊNDICE A – Cálculos

A função gama incompleta é definida por

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \text{para } a > 0. \quad (\text{A.1})$$

No cálculo das funções: esperança, variância, função geradora de momentos e k -ésimo momento, função escore e informação de Fisher utiliza-se a função gama incompleta

Cálculos da distribuição Weibull truncada à direita

Apresenta-se o desenvolvimento das expressões matemáticas associadas à distribuição Weibull truncada à direita.

Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada é a probabilidade de que a variável aleatória Y assumira valores menores ou igual a y , denotado por $F(y)$.

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \int_0^{\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha} \frac{\lambda}{\alpha} e^{-u} du \\ F(y) &= \frac{1}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}\right)} \int_0^{\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha} e^{-u} du \\ F(y) &= \frac{1}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}\right)} \left[-e^{-u}\right]_0^{\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha} \\ F(y) &= \frac{1}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}\right)} \left[e^{-0} - e^{-\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha}\right] \\ F(y) &= \frac{1 - e^{-\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Função Geradora de Momentos

Definida por

$$\phi_Y(t) = E(e^{tY}),$$

para todo t , $-\infty < t < \infty$, em que a esperança seja finita. Para a variável aleatória contínua devemos calcular:

$$E(e^{tY}) = \int_{-1}^1 e^{tY} f(y) dy.$$

Fazendo-se $u = \left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha$, sua derivada $\frac{\lambda}{\alpha} du = \left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^{\alpha-1} dy$ e $y = \lambda u^{1/\alpha} - 1$.

$$\begin{aligned} E(e^{tY}) &= \frac{\alpha}{\lambda(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \int_{-1}^1 e^{tY} \left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha} dy \\ E(e^{tY}) &= \frac{\alpha}{\lambda(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} e^{t(\lambda u^{1/\alpha} - 1)} \frac{\lambda}{\alpha} e^{-u} du. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Reescreve-se a equação (A.3) a partir da expansão da função exponencial em série de potência, $e^{tY} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tY)^n}{n!}$, de modo que a função geradora de momentos (FGM) da variável aleatória Y com distribuição Weibull truncada é dada por

$$\begin{aligned} E(e^{tY}) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda u^{1/\alpha})^n}{n!} e^{-t} e^{-u} du \\ E(e^{tY}) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-t} \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} u^{n/\alpha} e^{-u} du \\ E(e^{tY}) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-t} \gamma\left(\frac{n}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right) \\ E(e^{tY}) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} \lambda^n \gamma\left(\frac{n}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right). \end{aligned} \quad (A.4)$$

K -ésimo momento

O K -ésimo momento amostral de uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade definida em (2.4). Considerando-se a substituição $u = \left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha$,

$$du = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^{\alpha-1} dy \text{ e } y = \lambda u^{1/\alpha} - 1.$$

$$E(Y^k) = \frac{\alpha}{\lambda(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \int_{-1}^1 y^k \left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha} dy,$$

$$\begin{aligned}
E(Y^k) &= \frac{\alpha}{\lambda(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} (\lambda u^{1/\alpha} - 1)^k \frac{\lambda}{\alpha} e^{-u} du \\
E(Y^k) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} (\lambda u^{1/\alpha} - 1)^k e^{-u} du.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Para resolução da expressão é utilizada a expansão binomial. A equação (A.5) pode ser reescrita

$$\begin{aligned}
E(Y^k) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda u^{1/\alpha})^{k-j} (-1)^j e^{-u} du \\
E(Y^k) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} (\lambda u^{1/\alpha})^{k-j} e^{-u} du \\
E(Y^k) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \lambda^{k-j} \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} u^{\left(\frac{k-j}{\alpha} + 1\right) - 1} e^{-u} du \\
E(Y^k) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \lambda^{k-j} \gamma\left(\frac{k-j}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right).
\end{aligned}$$

Esperança

O valor esperado da variável aleatória com distribuição Weibull truncada é encontrado resolvendo

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right) (\lambda u^{1/\alpha} - 1) e^{-u} du \\
E(Y) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \left[\int_0^{(2/\lambda)^\alpha} \lambda u^{1/\alpha} e^{-u} du - \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} e^{-u} du \right] \\
E(Y) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \left[\int_0^{(2/\lambda)^\alpha} \lambda u^{(1/\alpha + 1) - 1} e^{-u} du - \int_0^{(2/\lambda)^\alpha} u^{1-1} e^{-u} du \right] \\
E(Y) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \left[\lambda \gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right) - \gamma\left(1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right) \right] \\
E(Y) &= \frac{1}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \left[\lambda \gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right) - (1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha}) \right] \\
E(Y) &= \frac{\lambda \gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right)}{1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha}} - 1.
\end{aligned}$$

Variância

A Variância é obtida por meio do primeiro e segundo momentos.

$$Var(Y) = \frac{\lambda^2}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \left[\gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right) - \frac{\left[\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha\right)\right]^2}{(1 - e^{-(2/\lambda)^\alpha})} \right].$$

Mediana

Para obtenção da mediana iguala-se a expressão (A.2) a $\frac{1}{2}$ e resolve para y

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-(\frac{y+1}{\lambda})^\alpha}}{1 - e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha}} &= \frac{1}{2} \\ 1 - e^{-(\frac{y+1}{\lambda})^\alpha} &= \frac{(1 - e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha})}{2} \\ 1 - \frac{1 - e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha}}{2} &= e^{-(\frac{y+1}{\lambda})^\alpha} \\ \frac{1 + e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha}}{2} &= e^{-(\frac{y+1}{\lambda})^\alpha}. \end{aligned}$$

Aplica-se o log

$$\begin{aligned} -\left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha &= \log\left(\frac{1 + e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha}}{2}\right) \\ \left(\frac{y+1}{\lambda}\right)^\alpha &= -\log\left(\frac{1 + e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha}}{2}\right) \\ \left(\frac{y+1}{\lambda}\right) &= \left[-\log\left(\frac{1 + e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha}}{2}\right)\right]^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Encontra-se a expressão

$$y = -1 + \lambda \left[-\log\left(\frac{1 + e^{-(\frac{2}{\lambda})^\alpha}}{2}\right) \right]^{1/\alpha}.$$

Moda

Aplica-se o log à função densidade da distribuição Weibull truncada à direita (equação 2.4), da forma

$$\log f(y) = \log \left[\frac{\alpha}{\lambda \left(1 - e^{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha} \right)} \right] + (\alpha - 1) \log \left[\frac{y+1}{\lambda} \right] - \left(\frac{y+1}{\lambda} \right)^\alpha, \quad (\text{A.6})$$

em que derivando-se (A.6) com relação a y e igualando a zero

$$\frac{\alpha - 1}{y + 1} - \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{y + 1}{\lambda} \right)^{\alpha - 1} = 0, \quad (\text{A.7})$$

é possível isolar y para obtenção da moda,

$$y = -1 + \lambda \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^{1/\alpha}, \quad \text{para } \alpha > 1.$$

A segunda derivada parcial da $\log f(y)$ é obtida derivando-se a equação (A.7) em função de y

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \log f(y) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\alpha - 1}{y + 1} \right]}_{(I)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{y + 1}{\lambda} \right)^{\alpha - 1} \right]}_{(II)},$$

resolvendo-se (I) pela regra do quociente e (II) pela regra da cadeia

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \log f(y) = -\frac{(\alpha - 1)}{(y + 1)^2} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\lambda^2} \left(\frac{y + 1}{\lambda} \right)^{\alpha - 2} < 0.$$

Cálculos da distribuição reparametrizada

Apresenta-se o desenvolvimentos das expressões matemáticas associadas a distribuição Weibull truncada modal, como: K -ésimo momento, esperança, variância, função log-verossimilhança, matriz hessiana, função gradiente. Utiliza-se a substituição $y = (m_i + 1) \left[u \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right]^{1/\phi_i} - 1$, $dy = u^{\frac{1}{\phi_i} - 1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{\frac{1}{\phi_i}} \left(\frac{m_i + 1}{\phi_i} \right) du$ e $u = \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)$, bem como a função gama incompleta.

K -ésimo momento

Considerando-se $\delta(m_i, \phi_i) = \left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)$. O k -ésimo momento da distribuição reparametrizada permite obtenção da esperança e variância de Y .

$$\begin{aligned}
E(Y^K) &= \int_{-1}^1 y^k \frac{\left(\frac{\phi}{m+1}\right) \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right) \left(\frac{y+1}{m+1}\right)^{\phi-1} e^{-\left(\frac{\phi-1}{\phi}\right) \left(\frac{y+1}{m+1}\right)^{\phi}}}{(1 - e^{-\delta(m,\phi)})} dy \\
E(Y^K) &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m,\phi)})} \int_0^{\delta(m,\phi)} \left\{ \left[u \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right) \right]^{1/\phi} (m+1) - 1 \right\}^k e^{-u} du \\
E(Y^K) &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m,\phi)})} \int_0^{\delta(m,\phi)} \left\{ u^{1/\phi} \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} (m+1) - 1 \right\}^k e^{-u} du. \\
E(Y^K) &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m,\phi)})} \int_0^{\delta(m,\phi)} \left\{ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[u^{1/\phi} \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} (m+1) \right]^{k-j} (-1)^j \right\} e^{-u} du \\
E(Y^K) &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m,\phi)})} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} (m+1) \right]^{k-j} (-1)^j \int_0^{\delta(m,\phi)} u^{\left(\frac{k-j}{\phi}+1\right)-1} e^{-u} du \\
E(Y^K) &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m,\phi)})} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} (m+1) \right]^{k-j} (-1)^j \gamma\left(\frac{(k-j)}{\phi} + 1, \delta(m,\phi)\right) \\
E(Y^K) &= \frac{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} (m+1) \right]^{k-j} (-1)^j \gamma\left(\frac{(k-j)}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)}.
\end{aligned}$$

Primeiro momento

Fazendo-se $K = 1$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{\left[(m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} \right] \gamma\left(\frac{1}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right) - \gamma\left(1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \\
E(Y) &= \frac{\left[(m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} \right] \gamma\left(\frac{1}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} - \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \\
E(Y) &= \frac{\left[(m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} \right] \gamma\left(\frac{1}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} - 1.
\end{aligned}$$

Segundo momento

Fazendo-se $k = 2$

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \frac{\left[(m+1)\left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi}\right]^2 \gamma\left(\frac{2}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} + \frac{\gamma\left(1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \\
 &\quad - 2 \frac{\left[(m+1)\left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi}\right] \gamma\left(\frac{1}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \\
 E(Y^2) &= \frac{\left[(m+1)\left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi}\right]^2 \gamma\left(\frac{2}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} + \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \\
 &\quad - 2 \frac{\left[(m+1)\left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi}\right] \gamma\left(\frac{1}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \\
 E(Y^2) &= \frac{\left[(m+1)\left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi}\right]^2 \gamma\left(\frac{2}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} + 1 \\
 &\quad - 2 \frac{\left[(m+1)\left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi}\right] \gamma\left(\frac{1}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \\
 E(Y^2) &= \frac{\left[(m+1)\left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi}\right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)}\right)} \left\{ \left[(m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1}\right)^{1/\phi} \right] \gamma\left(\frac{2}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \gamma\left(\frac{1}{\phi}+1, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right) \right\} + 1.
 \end{aligned}$$

Variância

A variância da Weibull truncada modal é calculada pela equação $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$$Var(Y) = \frac{\left[(m+1) \left(\frac{\phi}{\phi-1} \right)^{1/\phi} \right]^2}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1} \right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)} \right)} \left\{ \gamma \left(\frac{2}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1} \right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \right) - \frac{\left[\gamma \left(\frac{1}{\phi} + 1, \left(\frac{2}{m+1} \right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \right) \right]^2}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1} \right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)} \right)} \right\}.$$

Método da Máxima Verossimilhança

Considera-se uma amostra observada $\mathbf{y}$ da variável aleatória $Y \sim WTM(m, \phi)$ com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (m, \phi)^\top$

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(y_i; m, \phi)$$

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\left(\frac{\phi}{m+1} \right) \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{y_i+1}{m+1} \right)^{\phi-1} e^{-\left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{y_i+1}{m+1} \right)^\phi}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m+1} \right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)} \right)} \right].$$

Ao aplicar o log a $L(\boldsymbol{\theta})$ é encontrada a log-verossimilhança da distribuição Weibull truncada modal

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= n \log \left(\frac{\phi-1}{m+1} \right) + (\phi-1) \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{y_i+1}{m+1} \right) - \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i+1}{m+1} \right)^\phi \\ &\quad - n \log \left(1 - e^{-\left(\frac{\phi-1}{\phi} \right) \left(\frac{2}{m+1} \right)^\phi} \right). \end{aligned}$$

Derivada da função gama incompleta

Wingo (1989) apresentou a derivada da função gama incompleta para a distribuição Weibull truncada à esquerda como

$$\gamma^{(m)}(a, x) = \int_0^x t^{a-1} (\log(t))^m e^{-t} dt.$$

Derivando a equação (A.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \gamma(a, x) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial a} [t^{a-1} e^{-t}] dt \\ \frac{\partial}{\partial a} \gamma(a, x) &= \int_0^x e^{-t} t^{-1} [e^{a \log(t)}]' dt \\ \frac{\partial}{\partial a} \gamma(a, x) &= \int_0^x e^{-t} t^{-1} [t^a \log(t)] dt \\ \gamma'(a, x) &= \int_0^x t^{a-1} \log(t) e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Bem como, $\gamma''(a, x) = \int_0^x t^{a-1} (\log(t))^2 e^{-t} dt$. Outra alternativa: fazer $W = t \left[\left(\frac{2}{m+1} \right) \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)^{1/\phi} \right]^{-\phi}$, isso implica que $t = W \left[\left(\frac{2}{m+1} \right) \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)^{1/\phi} \right]^{\phi}$

e sua derivada $dt = \left[\left(\frac{2}{m+1} \right) \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)^{1/\phi} \right]^{\phi} dw$, quando $t = 0$, $w = 0$ da mesma maneira quando $t = \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\phi} \left(\frac{\phi-1}{\phi} \right)$, $w = 1$. A integral por substituição é dada por

$$\gamma\left(b, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi_i}\right)\right) = \int_0^1 \left[w \left[\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi_i}\right)^{1/\phi} \right]^\phi \right]^{b-1} e^{-w \left[\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)^{1/\phi} \right]^\phi} \left[\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)^{1/\phi} \right]^\phi dw$$

$$\gamma\left(b, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)\right) = \int_0^1 w^{b-1} \left[\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right) \right]^b e^{-w \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)} dw.$$

A derivada em função de ϕ resulta na derivada de primeira ordem da função gama incompleta

$$\gamma' \left(b, \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right) \right) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ w^{b-1} \left[\left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right) \right]^b e^{-w \left(\frac{2}{m+1}\right)^\phi \left(\frac{\phi-1}{\phi}\right)} \right\} dw.$$

Derivadas

Derivadas de primeira ordem

A obtenção do vetor escore decorre do cálculo de derivadas. Destaca-se as derivadas de primeira ordem da $\ell(m_i, \phi_i)$ em termos dos parâmetros m_i e ϕ_i . Levando em consideração o parâmetro m_i , obtém-se a primeira derivada da função log-verossimilhança a partir da diferenciação da equação (A.8), também denotada por $\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} = & \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) + \log \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) + (\phi_i - 1) \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right. \\ & \left. - \log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Derivando-se individualmente cada termo na equação (A.8)

- Derivada do log

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{[\phi_i(m_i + 1)^{-1}]'}{\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right)} \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \right] &= -\frac{\frac{\phi_i}{(m_i + 1)^2}}{\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right)} \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \right] &= -\left(\frac{\phi_i}{(m_i + 1)^2} \right) \left(\frac{m_i + 1}{\phi_i} \right) \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \right] &= -\frac{1}{m_i + 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

- Derivada de um termo constante com relação a m_i

$$\frac{\partial}{\partial m_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.10})$$

- Derivada do log em função de m_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_i} \left[(\phi_i - 1) \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= (\phi_i - 1) \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[(\phi_i - 1) \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= (\phi_i - 1) \frac{[(y_i + 1)(m_i + 1)^{-1}]'}{\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)} \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[(\phi_i - 1) \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= -(\phi_i - 1) \left[\left(\frac{y_i + 1}{(m_i + 1)^2} \right) \left(\frac{m_i + 1}{y_i + 1} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[(\phi_i - 1) \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= - \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

- Derivada pela regra da cadeia em função de m_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= - \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= - \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) [(y_i + 1)^\phi (m_i + 1)^{-\phi}]' \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) [\phi_i (y_i + 1)^{\phi_i} (m_i + 1)^{-\phi_i - 1}] \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

- Derivada do log em função de m_i

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \right] &= -\frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)} \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \right] &= -\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) \right]'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)} \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \right] &= -\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) 2^{\phi_i} [(m_i+1)^{-\phi_i}]'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)} \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \right] &= \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) [2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-(\phi_i+1)}]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)} \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \right] &= \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) \left(\frac{\phi_i}{m_i+1} \right) \left(\frac{2}{m_i+1} \right)^{\phi_i}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \right] = \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)}. \quad (\text{A.13})$$

A partir do resultado das derivadas (A.9), (A.10), (A.11), (A.12) e (A.13), obtém-se a primeira derivada de $\ell(m_i, \phi_i)$ em função do parâmetro

m_i .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} &= -\left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) + \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} + \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-(\phi_i+1)}\right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \\ \frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} &= -\left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) + \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} + \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right)\right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \\ \frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i} &= -\left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) + \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} + \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De maneira semelhante, deve-se encontrar a primeira derivada da função log-verossimilhança, porém, com relação ao parâmetro de forma

ϕ_i .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} &= \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) + \log \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) + (\phi_i - 1) \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Derivando-se cada termo na equação A.15 de forma independente, tem-se

- Derivada do log com relação a ϕ_i .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right)'}{\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right)} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \right] &= \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{m_i + 1}{\phi_i} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{1}{\phi_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

- Derivada do log.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= \frac{\left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)'}{\left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= \frac{1}{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i - 1} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

- Derivada em função de ϕ_i

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[(\phi_i - 1) \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] = \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right). \quad (\text{A.18})$$

- Derivada do produto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= - \left[\left(e^{\phi_i \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)} \right)' \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)' \right] \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= - \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \right] &= - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

- Derivada do log, regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right) \right] &= - \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right)'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right)} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right) \right] &= - \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \left[\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)' \right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right)} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right) \right] &= - \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \left[\left(e^{\phi_i \log \left(\frac{2}{m_i + 1} \right)} \right)' \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) + \left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)' \right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \right] = - \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right) \right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)}.$$

(A.20)

As equações (A.16), (A.17), (A.18), (A.19) e (A.20) solucionam a primeira derivada da função log-verossimilhança em função do parâmetro ϕ_i , que é denotada por $\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i}$. O resultado é detalhado como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} = & - \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right) \right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)} \\ & - \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) - \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right) + \left(\frac{1}{\phi_i-1}\right) + \log \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right). \end{aligned}$$

Derivada de segunda ordem

Os elementos que compõem a matriz hessiana e a matriz de informação de Fisher são obtidos a partir da diferenciação de segunda ordem dos parâmetros desconhecidos. Deseja-se obter, inicialmente, as derivadas $\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2}$, $\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i}$ e $\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2}$. Para obter a segunda derivada de $\ell(m_i, \phi_i)$ em função de m_i , iremos derivar a equação (A.14) com relação a m_i .

$$\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} = \frac{\partial}{\partial m_i} \left\{ -\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} + \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i + 1)^{-(\phi_i + 1)}\right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)}\right)} \right\}. \quad (\text{A.21})$$

Resolvendo-se cada termo da equação (A.21) individualmente, é obtido

- Derivada da regra da cadeia em função de m_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] &= -\frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] &= -\frac{\partial}{\partial m_i} [\phi_i (m_i + 1)^{-1}] \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] &= \phi_i (m_i + 1)^{-2} \\ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[-\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] &= \frac{\phi_i}{(m_i + 1)^2}. \end{aligned}$$

- Derivada pela regra do produto

$$\frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \right] = \left\{ \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right)' \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \right]' \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] &= \left\{ (\phi_i - 1) \left[(m_i + 1)^{-1} \right]' \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) (y_i + 1)^{\phi_i} \left[(m_i + 1)^{-\phi_i} \right]' \right\} \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] &= \left\{ -(\phi_i - 1) (m_i + 1)^{-2} \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} - \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) (y_i + 1)^{\phi_i} \phi_i (m_i + 1)^{-\phi_i - 1} \right\} \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left[\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] &= - \left(\frac{\phi_i - 1}{(m_i + 1)^2} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} - \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i}.
\end{aligned}$$

- Derivada pela regra do quociente

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial m_i} \left[\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right] \\
h_1(m_i, \phi_i) &= \frac{\left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]' \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) - \left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right] \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2} \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

- Derivada pela regra do produto

$$\left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]' = \left(e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)' \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right] + \left(e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]'$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \right]' \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right] + \left(e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]' \\
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[2^{\phi_i} (m_i+1)^{-\phi_i} \right]' \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right] \\
&\quad + \left(e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \left\{ \left[2^{\phi_i} (m_i+1)^{-\phi_i} \right]' \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} [(\phi_i-1)(m_i+1)^{-1}]' \right\} \\
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[-2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-\phi_i-1} \right] \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right] \\
&\quad + \left(e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \left\{ \left[-2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-\phi_i-1} \right] \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} [-(\phi_i-1)(m_i+1)^{-2}] \right\} \\
&= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) \right] \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right] \\
&\quad + \left(e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right) \left\{ \left[-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) \right] \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{(\phi_i-1)}{(m_i+1)^2} \right] \right\} \\
&= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left[\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]^2 \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{(\phi_i-1)}{(m_i+1)^2} \right]. \tag{A.23}
\end{aligned}$$

Multiplique-se a equação (A.23) por $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)$. O resultado é

$$\begin{aligned}
&= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left[\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left[\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]^2 \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{(\phi_i-1)}{(m_i+1)^2}\right] + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{(\phi_i-1)}{(m_i+1)^2}\right].
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Por outro lado, derivaremos a equação $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)$ em função de m_i utilizando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)\right]' \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\right]' \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} (m_i+1)^{-\phi_i}\right]' \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[-2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-\phi_i-1}\right] \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) &= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) 2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-\phi_i-1} \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) &= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) \\
\frac{\partial}{\partial m_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) &= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right).
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Multiplicando-se a equação (A.25) por $-\left\{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]\right\}$ resultará em

$$\begin{aligned} &= -\left\{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]\right\} \times \left\{-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]\right\} \\ &= e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i}\left[\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]^2. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

A obtenção do numerador da equação (A.22) é efetuada pela soma das equações (A.24) e (A.26). A partir das simplificações obtém-se o resultado da derivada da equação (A.22).

$$\begin{aligned} h_1(m_i, \phi_i) &= \left\{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i}\left[\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right)\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right. \\ &\quad + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right)\left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left[\frac{(\phi_i-1)}{(m_i+1)^2}\right] \\ &\quad \left. + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left[\frac{(\phi_i-1)}{(m_i+1)^2}\right]\right\} / \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2 \end{aligned}$$

A segunda derivada da função $\ell(m_i, \phi_i)$ em relação ao parâmetro m_i tem como resultado a expressão

$$\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} = \frac{\phi_i}{(m_i+1)^2} - \left(\frac{\phi_i-1}{(m_i+1)^2}\right)\left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} - \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)\left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right)\left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} + h_1(m_i, \phi_i)$$

A derivada da expressão $\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i}$ com relação ao parâmetro ϕ_i resulta em

$$\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[-\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} + \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i + 1)^{-(\phi_i + 1)}\right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i}\right)}\right)} \right].$$

Portanto, deseja-se derivar a equação (A.14) com relação a ϕ_i . Calcula-se cada derivada individualmente

- Derivada em função de ϕ_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[-\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] &= -\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[-\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1}\right) \right] &= -\left(\frac{1}{m_i + 1}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

- Derivada do produto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \right] &= \left\{ \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right)' \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \right]' \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \right] &= \left\{ \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right)' \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left[e^{\phi_i \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)} \right]' \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \right] &= \left\{ \left(\frac{1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1}\right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

- Derivada do quociente

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-(\phi_i+1)}\right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right], \quad (\text{A.29})$$

$$h_2(m_i, \phi_i) = \frac{\left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-(\phi_i+1)}\right] \right]' \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-(\phi_i+1)}\right] \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2}. \quad (\text{A.30})$$

Reorganizando o numerador da expressão (A.29) para derivada em função de ϕ_i

$$\begin{aligned} \left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-(\phi_i+1)}\right] \right]' &= \left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{m_i+1}\right) \right]' \\ \left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[2^{\phi_i} \phi_i (m_i+1)^{-(\phi_i+1)}\right] \right]' &= \left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]' \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

A derivada da equação (A.31) é resolvida pela regra do produto

$$\left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]' = \left\{ \left(e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \right)' \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]' \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \right]' \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right]' \right\} \\
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(e^{\phi_i \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)} \right)' \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)' \right] \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(e^{\phi_i \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)} \right)' \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)' \right] \\
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \right] \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) \right] \\
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right). \tag{A.32}
\end{aligned}$$

A equação (A.32) multiplicada por $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)$ resulta em

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) \\
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right). \tag{A.33}
\end{aligned}$$

Por outro lado, é necessário derivar a função $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)$ em relação a ϕ_i

- Derivada pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)\right]' \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(e^{\phi_i \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)}\right)' \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)'\right] \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}\right] \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}. \tag{A.34}
\end{aligned}$$

Multiplicando-se a equação (A.34) por $-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right)$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \times \left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}\right] \\
&= -e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2}. \tag{A.35}
\end{aligned}$$

A soma das equações (A.33) e (A.35) é a solução do numerador da equação (A.30), que dividido por $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2$ resulta em

$$\begin{aligned}
h_2(m_i, \phi_i) &= \left\{ -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right. \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) \\
&\quad \left. - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \right\} / \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2 \\
h_2(m_i, \phi_i) &= \left\{ -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \right. \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) \\
&\quad \left. + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) \right\} / \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2
\end{aligned} \tag{A.36}$$

A solução da derivada de segunda ordem da função $\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i}$ é obtida a partir das equações (A.27), (A.28) e (A.36).

$$\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} = -\left(\frac{1}{m_i+1}\right) + \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i+1}\right) + \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1}\right) + h_2(m_i, \phi_i)$$

A derivada parcial de segunda ordem da função log-verossimilhança com relação ao parâmetro ϕ_i é dada por

$$\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[- \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right) \right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right. \\ \left. - \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) - \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right) + \left(\frac{1}{\phi_i-1}\right) + \log \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right) \right].$$

- Derivada em função de ϕ_i .

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\left(\frac{1}{\phi_i-1}\right) \right] = -\frac{1}{(\phi_i-1)^2}. \quad (\text{A.37})$$

- Derivada de constante em função de ϕ_i

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right) \right] = 0. \quad (\text{A.38})$$

Deseja-se derivar a expressão

$$\begin{aligned}
 h_3(m_i, \phi_i) &= -\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left\{ \frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right) \right]}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right\} \\
 h_3(m_i, \phi_i) &= -\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right] \right\}. \quad (\text{A.41})
 \end{aligned}$$

Para obtenção de $h_3(m_i, \phi_i)$ é necessário calcular a soma das derivadas e multiplicá-las por (-1) , como representado pela equação (A.41).

Utiliza-se a regra do quociente para derivação de ambas as expressões.

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right] \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \right]' \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log \left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2} \\
 &\quad (\text{A.43})
 \end{aligned}$$

- Utiliza-se a regra do produto para resolver

[illegible]

Multiplicando-se a equação (A.44) por $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)$ resulta em

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right). \tag{A.45}
\end{aligned}$$

Por outro lado, deseja-se derivar $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)$ com relação a ϕ_i , pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)\right]' \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(e^{\phi_i \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)}\right)' \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)'\right] \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}\right] \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}. \tag{A.46}
\end{aligned}$$

A multiplicação da equação (A.46) por $\left[-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)\right]$, resultará em

$$\begin{aligned}
&= \left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \right] \times \left[-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \right] \\
&= -e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \quad (\text{A.47})
\end{aligned}$$

A soma das equações (A.45) e (A.47) representa a solução do numerador da equação (A.43), que resulta em

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 \\
&\quad - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \\
&\quad - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \\
&= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right]^2 \\
&\quad + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right). \quad (\text{A.48})
\end{aligned}$$

A equação (A.43) é solucionada dividindo-se (A.48) por $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2$

$$\begin{aligned}
= & \left\{ -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right. \\
& + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 \\
& \left. + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right\} / \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2 \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

De maneira semelhante, calcula-se a derivada pela regra do quociente da função

$$\left[\frac{e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)} \right]' = \frac{\left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \right]' \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)'}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2}. \quad (\text{A.50})$$

- Pela regra da cadeia

[illegible]

Multiplica-se a equação (A.51) por $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)$

$$= \left[-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{2}{\phi_i^3}\right) \right] \times \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right).$$

Resulta em

$$= -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{2}{\phi_i^3}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{2}{\phi_i^3}\right). \quad (\text{A.52})$$

É necessário derivar $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)$ em função de ϕ_i .

$$\begin{aligned}
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)\right]' \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(e^{\phi_i \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)}\right)' \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)'\right] \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left[\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}\right] \\
\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)' &= e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}. \tag{A.53}
\end{aligned}$$

Multiplica-se a equação (A.53) por $\left(-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}\right)$

$$\left[e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}\right] \times \left[-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2}\right]$$

Igual a

$$= -e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2. \tag{A.54}$$

A soma das equações (A.52) e (A.54) representa o numerador da equação (A.50).

$$\begin{aligned}
= & -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \\
& -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 \\
& + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \\
& -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{2}{\phi_i^3}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{2}{\phi_i^3}\right) \\
& -e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{A.55}$$

A partir das simplificações da equação (A.55) e sua divisão por $\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2$ é obtido

$$\begin{aligned}
= & \left[-e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 \right. \\
& + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \\
& \left. - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{2}{\phi_i^3}\right) + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{2}{\phi_i^3}\right) \right] / \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2.
\end{aligned} \tag{A.56}$$

A equação (A.56) representa o resultado da derivada (A.50). No entanto, como deseja-se encontrar $h_3(m_i, \phi)$, deve-se somar as equações

(A.49) e (A.56), além de multiplicá-las por (-1) .

$$\begin{aligned}
h_3(m_i, \phi_i) = & (-1) \times \left\{ -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right. \\
& + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 \\
& + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \\
& - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 \\
& + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \\
& \left. - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{2}{\phi_i^3}\right] + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{2}{\phi_i^3}\right] \right\} / \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2. \tag{A.57}
\end{aligned}$$

As simplificações da equação (A.57) resultam

$$\begin{aligned}
h_3(m_i, \phi_i) = & - \left\{ -e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)^2 \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 - 2e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) \right. \\
& + e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 - e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left[\log\left(\frac{2}{m_i+1}\right)\right]^2 \\
& + 2e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) - 2e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \frac{1}{\phi_i^2} \log\left(\frac{2}{m_i+1}\right) - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{2\phi_i} \left(\frac{1}{\phi_i^2}\right)^2 \\
& \left. - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{2}{\phi_i^3}\right] + e^{-2\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)} \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left[\frac{2}{\phi_i^3}\right] \right\} / \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)}\right)^2. \tag{A.58}
\end{aligned}$$

A derivada de segunda ordem da log-verossimilhança com relação a ϕ_i é obtida a partir das equações (A.37), (A.38), (A.39), (A.40) e (A.58).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} = & - \left(\frac{1}{(\phi_i - 1)^2} \right) - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) - 2 \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{1}{\phi_i^2} \right) + \\ & + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \frac{2}{\phi_i^3} + h_3(m_i, \phi_i) \end{aligned}$$

Propriedades importantes

Para resolução destas quantidades utiliza-se a substituição $u = \left(\frac{y_i+1}{m_i+1}\right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right)$, $y = \left[u \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1}\right)\right]^{1/\phi_i} (m_i+1) - 1$ e $dy = \frac{1}{\phi_i} u^{1/\phi_i-1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1}\right)^{1/\phi_i} (m_i+1)$. Quando $y = -1$, $u = 0$, de maneira semelhante quando $y = 1$, $u = \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i}\right) \left(\frac{2}{m_i+1}\right)^{\phi_i}$. Em que γ representa a função gama incompleta, γ' representa a primeira derivada da função gama e γ'' a segunda derivada da função gama incompleta.

$$\begin{aligned}
 E \left[\left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \right] &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \frac{\left(\frac{\phi_i}{m_i+1} \right) \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) \left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i-1} e^{-\left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) \left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i}}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right)} \right)} dy \\
 E \left[\left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \right] &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left(\frac{\phi_i-1}{m_i+1} \right) \left[\frac{u^{1/\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1} \right)^{1/\phi_i} (m_i+1) - 1 + 1}{m_i+1} \right]^{2\phi_i-1} e^{-u} \frac{1}{\phi_i} u^{1/\phi_i-1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1} \right)^{1/\phi_i} (m_i+1) du \\
 E \left[\left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \right] &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) \left[u^{1/\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1} \right)^{1/\phi_i} \right]^{2\phi_i-1} e^{-u} u^{1/\phi_i-1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1} \right)^{1/\phi_i} du \\
 E \left[\left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \right] &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} u^{\frac{(2\phi_i-1)}{\phi_i}} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1} \right)^{\frac{(2\phi_i-1)}{\phi_i}} e^{-u} u^{1/\phi_i-1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1} \right)^{1/\phi_i} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) du \\
 E \left[\left(\frac{y_i+1}{m_i+1} \right)^{\phi_i} \right] &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} u^{2-1/\phi_i+1/\phi_i-1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i-1} \right)^{2-1/\phi_i+1/\phi_i} e^{-u} \left(\frac{\phi_i-1}{\phi_i} \right) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] &= \frac{\left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^2}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} u^{2-1} e^{-u} du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] &= \frac{\left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})}.
\end{aligned} \tag{A.59}$$

Em que $\delta(m_i, \phi_i) = \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i}$.

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] \frac{\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i - 1} e^{-\left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i}}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right)} dy \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left[u^{1/\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{1/\phi_i} \right]^{2\phi_i - 1} \log \left[\left(u \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right)^{1/\phi_i} \right] e^{-u} \frac{1}{\phi_i} u^{1/\phi_i - 1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{1/\phi_i} (m_i + 1) du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{\frac{1}{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} u^{\frac{2\phi_i - 1}{\phi_i}} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{\frac{2\phi_i - 1}{\phi_i}} \log \left[\left(u \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right) \right] e^{-u} u^{1/\phi_i - 1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{1/\phi_i} du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{\frac{1}{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^2 u^{2-1} \left[\log(u) + \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right] e^{-u} du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{\left(\frac{1}{\phi_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left(u^{2-1} \log(u) e^{-u} + \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) u^{2-1} e^{-u} \right) du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] &= \frac{\gamma'(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(\phi_i - 1) (1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})}.
\end{aligned} \tag{A.60}$$

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \frac{\left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i - 1} e^{-\left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i}}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{2}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right)} \right)} dy \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{\left(\frac{\phi_i - 1}{m_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left[u^{1/\phi_i} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{1/\phi_i} \right]^{2\phi_i - 1} \left\{ \log \left[\left(u \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right)^{1/\phi_i} \right] \right\}^2 e^{-u} \frac{1}{\phi_i} u^{1/\phi_i - 1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{1/\phi_i} (m_i + 1) du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left\{ \log \left[\left(u \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right)^{1/\phi_i} \right] \right\}^2 u^{2 - 1/\phi_i + 1/\phi_i - 1} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)^{2 - 1/\phi_i + 1/\phi_i} e^{-u} du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) u^{2 - 1} \left\{ \log \left[\left(u \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right)^{1/\phi_i} \right] \right\}^2 e^{-u} du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{\frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} u^{2 - 1} \left\{ \log(u) + \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right\}^2 e^{-u} du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{\frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} u^{2 - 1} \left\{ [\log(u)]^2 + 2 \log(u) \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) + \left[\log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right]^2 \right\} e^{-u} du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{\frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \int_0^{\delta(m_i, \phi_i)} \left[u^{2 - 1} [\log(u)]^2 e^{-u} + 2 \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) u^{2 - 1} \log(u) e^{-u} + \left[\log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right]^2 u^{2 - 1} e^{-u} \right] du \\
E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] &= \frac{\frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \left[2 \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma'(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \left[\log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right]^2 \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \gamma''(2, \delta(m_i, \phi_i)) \right].
\end{aligned}$$

Matriz de Informação de Fisher

A matriz de informação de Fisher é obtida a partir da matriz hessiana. Objetiva-se calcular $-E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right]$, $-E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \mathbf{v}_r} \right]$ e $-E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{v}_j \partial \mathbf{v}_r} \right]$.

Inicialmente calcularemos: $E \left[\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \right]$, $E \left[\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \right]$ e $E \left[\frac{\partial \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \right]$ a partir das seguintes quantidades

$$\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} = \frac{\phi_i}{(m_i + 1)^2} - \left(\frac{\phi_i - 1}{(m_i + 1)^2} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} - \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} + h_1(m_i, \phi_i) \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} = \frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i \partial m_i} = - \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) + h_2(m_i, \phi_i) \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} = & - \left(\frac{1}{(\phi_i - 1)^2} \right) - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) - 2 \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{1}{\phi_i^2} \right) + \\ & + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \frac{2}{\phi_i^3} + h_3(m_i, \phi_i). \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Decorre das propriedades da esperança que o valor esperado das expressões (A.62), (A.63) e (A.64), são

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \right] &= E \left[\left(\frac{\phi_i}{(m_i + 1)^2} \right) - \left(\frac{\phi_i - 1}{(m_i + 1)^2} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} - \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} + h_1(m_i, \phi_i) \right] \\ E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \right] &= \left(\frac{\phi_i}{(m_i + 1)^2} \right) - \left(\frac{\phi_i - 1}{(m_i + 1)^2} \right) E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] - \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] + h_1(m_i, \phi_i) \\ E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \right] &= \left(\frac{\phi_i}{(m_i + 1)^2} \right) - \left(\frac{\phi_i - 1}{(m_i + 1)^2} \right) \left[\frac{\left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \right] - \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i}{m_i + 1} \right) \left[\frac{\left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \right] + h_1(m_i, \phi_i) \\ E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \right] &:= s_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \right] &= E \left[- \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) + h_2(m_i, \phi_i) \right] \\
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \right] &= - \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) + \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] + h_2(m_i, \phi_i) \\
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \right] &= - \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) + \left(\frac{1}{m_i + 1} \right) \left[\frac{\left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \right] + \left(\frac{\phi_i - 1}{m_i + 1} \right) \left[\frac{\gamma'(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(\phi_i - 1)(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \right] + h_2(m_i, \phi_i) \\
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \right] &:= d_i, \\
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \right] &= E \left[- \left(\frac{1}{(\phi_i - 1)^2} \right) - \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) - 2 \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \left(\frac{1}{\phi_i^2} \right) + \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \frac{2}{\phi_i^3} \right. \\
&\quad \left. + h_3(m_i, \phi_i) \right] \\
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \right] &= - \left(\frac{1}{(\phi_i - 1)^2} \right) - \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \left[\log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right]^2 \right] - \left(\frac{2}{\phi_i^2} \right) E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \log \left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right) \right] + \frac{2}{\phi_i^3} E \left[\left(\frac{y_i + 1}{m_i + 1} \right)^{\phi_i} \right] + h_3(m_i, \phi_i) \\
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \right] &= - \left(\frac{1}{(\phi_i - 1)^2} \right) - \left(\frac{\phi_i - 1}{\phi_i} \right) \left\{ \frac{\frac{1}{\phi_i^2} \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right)}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \left[2 \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \left[\log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \right]^2 \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \gamma''(2, \delta(m_i, \phi_i)) \right] \right\} \\
&\quad - \left(\frac{2}{\phi_i^2} \right) \left[\frac{\gamma'(2, \delta(m_i, \phi_i)) + \log \left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(\phi_i - 1)(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \right] + \frac{2}{\phi_i^3} \left[\frac{\left(\frac{\phi_i}{\phi_i - 1} \right) \gamma(2, \delta(m_i, \phi_i))}{(1 - e^{-\delta(m_i, \phi_i)})} \right] + h_3(m_i, \phi_i) \\
E \left[\frac{\partial^2 \ell(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \right] &:= v_i.
\end{aligned}$$

Os elementos da matriz de informação de Fisher

$$\begin{aligned} -E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right] &= -\sum_{i=1}^n E \left(\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i^2} \right) \left(\frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 x_{ij} x_{il} \\ &= -\sum_{i=1}^n s_i \left(\frac{2}{g'_1(m_i^*)} \right)^2 x_{ij} x_{il}. \end{aligned}$$

O formato matricial é dado por $-\mathbf{X}^\top \mathbf{S} \mathbf{M}^2 \mathbf{X}$, em que $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)^\top$, $\mathbf{M} = \text{diag}\{2/g'_1(m_1^*), \dots, 2/g'_1(m_n^*)\}$, para $j, l = 0, 1, \dots, p$.

$$\begin{aligned} -E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial v_r} \right] &= -\sum_{i=1}^n E \left(\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial m_i \partial \phi_i} \right) \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right) \left(\frac{dm_i}{d\eta_{1i}} \right) z_{ir} x_{ij} \\ &= -\sum_{i=1}^n d_i \left(\frac{2}{g'_1(m_i^*)} \right) \left(\frac{1}{g'_2(\phi_i)} \right) z_{ir} x_{ij}. \end{aligned}$$

O formato matricial é dado por $-\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{D} \mathcal{M} \mathbf{Z}$, em que $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)^\top$, $\mathbf{M} = \text{diag}\{2/g'_1(m_1^*), \dots, 2/g'_1(m_n^*)\}$, $\mathcal{M} = \text{diag}(1/g'_2(\phi_1), \dots, 1/g'_2(\phi_n))$, para $j = 0, 1, \dots, p$ e $r = 0, 1, \dots, q$.

$$\begin{aligned} -E \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial v_j \partial v_r} \right] &= -\sum_{i=1}^n E \left(\frac{\partial^2 \ell_i(m_i, \phi_i)}{\partial \phi_i^2} \right) \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 z_{ij} z_{ir} \\ &= -\sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{1}{g'_2(\phi_i)} \right)^2 z_{ij} z_{ir}. \end{aligned}$$

O formato matricial é dado por $-\mathbf{Z}^\top \mathbf{V} \mathcal{M}^2 \mathbf{Z}$, em que $\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)^\top$, $\mathcal{M} = \text{diag}(1/g'_2(\phi_1), \dots, 1/g'_2(\phi_n))$, para $j = 0, 1, \dots, p$ e $r = 0, 1, \dots, q$.

APÊNDICE B – Simulação

Tabela 15 – Estudo de simulação para o cenário C: $g_1(\mathbf{m}^*) = \log\left(\frac{\mathbf{m}^*}{1-\mathbf{m}^*}\right)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 2,0$, $\beta_1 = -1,0$, $v_0 = 1,5$ e $v_1 = 2,0$

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	β_0	2,0040	0,1985	0,2564	0,2564	23,3962	1,4306	0,8164	0,8796	0,9468
	β_1	-1,0191	1,9071	0,3916	0,3921	14,7161	-0,6311	0,8287	0,8864	0,9497
	v_0	1,4957	-0,2837	0,5362	0,5362	3,7573	0,1440	0,8146	0,8702	0,9359
	v_1	2,2240	11,2019	0,9605	0,9863	4,3247	0,1554	0,8124	0,8644	0,9153
30	β_0	2,0011	0,0549	0,1777	0,1777	3,8676	-0,0022	0,8493	0,9062	0,9662
	β_1	-1,0093	0,9280	0,2675	0,2677	4,0314	-0,0663	0,8691	0,9186	0,9715
	v_0	1,4900	-0,6679	0,3918	0,3919	3,4826	0,0120	0,8536	0,9112	0,9677
	v_1	2,1548	7,7386	0,6684	0,6861	3,6086	0,1394	0,8628	0,9186	0,9681
40	β_0	2,0006	0,0318	0,1488	0,1488	3,4364	0,0187	0,8608	0,9179	0,9710
	β_1	-1,0071	0,7083	0,2200	0,2201	3,5345	-0,0697	0,8783	0,9289	0,9765
	v_0	1,4852	-0,9844	0,3235	0,3238	3,1397	0,0539	0,8700	0,9238	0,9745
	v_1	2,1327	6,6330	0,5488	0,5646	3,1452	0,0542	0,8694	0,9311	0,9821
50	β_0	2,0013	0,0668	0,1312	0,1312	3,2642	0,0375	0,8666	0,9188	0,9727
	β_1	-1,0068	0,6787	0,1925	0,1926	3,5328	-0,0813	0,8835	0,9357	0,9797
	v_0	1,4854	-0,9742	0,2857	0,2861	3,1259	0,0066	0,8715	0,9269	0,9770
	v_1	2,1116	5,5795	0,4772	0,4900	3,2009	0,0914	0,8710	0,9315	0,9831
100	β_0	2,0008	0,0415	0,0878	0,0878	3,0962	-0,0028	0,8907	0,9418	0,9854
	β_1	-1,0039	0,3857	0,1273	0,1274	3,2178	-0,0403	0,8984	0,9474	0,9883
	v_0	1,4944	-0,3734	0,1930	0,1931	3,0314	0,0327	0,8845	0,9360	0,9825
	v_1	2,0524	2,6198	0,3225	0,3267	3,0971	0,0681	0,8788	0,9342	0,9832
200	β_0	2,0003	0,0165	0,0618	0,0618	3,0213	-0,0232	0,8909	0,9455	0,9871
	β_1	-1,0012	0,1233	0,0887	0,0887	3,0710	-0,0309	0,8966	0,9481	0,9889
	v_0	1,4973	-0,1770	0,1311	0,1311	2,9880	-0,0128	0,8969	0,9460	0,9877
	v_1	2,0250	1,2486	0,2181	0,2195	2,9691	0,0540	0,8885	0,9414	0,9883
500	β_0	2,0003	0,0150	0,0379	0,0379	2,9299	0,0534	0,9028	0,9559	0,9905
	β_1	-1,0008	0,0764	0,0542	0,0542	2,9472	-0,0461	0,9043	0,9539	0,9921
	v_0	1,4981	-0,1235	0,0838	0,0838	2,9911	-0,0295	0,8912	0,9439	0,9878
	v_1	2,0104	0,5211	0,1379	0,1383	2,9252	0,0583	0,8900	0,9434	0,9883

Tabela 16 – Estudo de simulação para o cenário C: $g_1(\mathbf{m}^*) = \Phi^{-1}(\mathbf{m}^*)$, para os tamanhos amostrais $n= 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 2, 0$, $\beta_1 = -1, 0$ e $v_0 = 1, 5$ e $v_1 = 2, 0$

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	β_0	3,4786	73,9277	111,4250	111,4348	9858,0605	98,9832	0,7100	0,7693	0,8469
	β_1	-2,4996	149,9601	113,9409	113,9508	9857,5313	-98,9771	0,7240	0,7878	0,8724
	v_0	1,5023	0,1539	0,5806	0,5806	4,5189	0,5601	0,8220	0,8847	0,9473
	v_1	2,2832	14,1616	1,0482	1,0858	4,6197	-0,3292	0,7679	0,8420	0,9276
30	β_0	2,1728	8,6410	2,0413	2,0486	2529,7727	42,1228	0,7608	0,8210	0,8936
	β_1	-1,1666	16,6625	2,9375	2,9422	2112,7296	9,1795	0,7705	0,8318	0,9141
	v_0	1,4946	-0,3611	0,4287	0,4288	3,7075	0,2905	0,8460	0,9077	0,9668
	v_1	2,1891	9,4558	0,7529	0,7763	3,6398	-0,1060	0,8084	0,8774	0,9530
40	β_0	2,0793	3,9631	0,8425	0,8462	2398,8288	38,4593	0,8022	0,8548	0,9196
	β_1	-1,0828	8,2816	1,6929	1,6949	4928,1528	51,2658	0,8029	0,8658	0,9338
	v_0	1,4944	-0,3730	0,3523	0,3523	3,4051	0,2506	0,8617	0,9200	0,9750
	v_1	2,1447	7,2357	0,6073	0,6243	3,4009	-0,1032	0,8284	0,8949	0,9648
50	β_0	2,0654	3,2692	0,6351	0,6384	2332,0654	36,2536	0,8242	0,8766	0,9344
	β_1	-1,0814	8,1390	0,7202	0,7248	1761,6139	-29,6809	0,8213	0,8812	0,9463
	v_0	1,4913	-0,5782	0,3028	0,3029	3,3082	0,2738	0,8748	0,9321	0,9793
	v_1	2,1182	5,9104	0,5245	0,5376	3,3454	-0,1393	0,8425	0,9025	0,9707
100	β_0	2,0169	0,8441	0,1970	0,1977	6,4116	1,0363	0,8602	0,9121	0,9651
	β_1	-1,0241	2,4089	0,2509	0,2521	5,6114	-0,8731	0,8634	0,9159	0,9700
	v_0	1,4984	-0,1045	0,2058	0,2058	3,0912	0,1355	0,8859	0,9399	0,9858
	v_1	2,0533	2,6644	0,3425	0,3466	3,0203	-0,0038	0,8729	0,9314	0,9829
200	β_0	2,0067	0,3374	0,1290	0,1292	3,6234	0,4679	0,8817	0,9268	0,9747
	β_1	-1,0098	0,9816	0,1641	0,1644	3,4936	-0,4031	0,8773	0,9286	0,9767
	v_0	1,4976	-0,1579	0,1416	0,1416	3,0052	0,1110	0,8912	0,9453	0,9882
	v_1	2,0296	1,4809	0,2360	0,2378	2,9598	-0,0206	0,8817	0,9387	0,9865
500	β_0	2,0025	0,1228	0,0781	0,0781	3,1913	0,3030	0,8969	0,9462	0,9847
	β_1	-1,0033	0,3332	0,0994	0,0994	3,1340	-0,2513	0,8944	0,9455	0,9859
	v_0	1,4999	-0,0085	0,0884	0,0884	2,9313	0,0363	0,8981	0,9489	0,9900
	v_1	2,0100	0,5020	0,1461	0,1465	3,0466	-0,0080	0,8920	0,9445	0,9876

Tabela 17 – Estudo de simulação para o cenário C: $g_1(\mathbf{m}^*) = g_1(\mathbf{m}^*) = \log(-\log(1 - \mathbf{m}^*))$, para os tamanhos amostrais $n = 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500$ e $\beta_0 = 2, 0$, $\beta_1 = -1, 0$ e $v_0 = 1, 5$ e $v_1 = 2, 0$

n	Estimador	$\hat{\theta}_{MC}$	VR(%)	dp	$\sqrt{eqm}$	K	CA	TC		
								0,90	0,95	0,99
20	β_0	2,4651	23,2571	13,2654	13,2736	3837,6516	54,3940	0,4895	0,5224	0,5793
	β_1	0,0553	-105,5312	29,9555	29,9741	3715,7774	41,2591	0,5959	0,6440	0,7217
	v_0	1,4995	-0,0318	0,5654	0,5654	4,8270	0,5283	0,8320	0,8943	0,9566
	v_1	2,3806	19,0293	1,0553	1,1219	4,2957	-0,1367	0,7527	0,8246	0,9138
30	β_0	2,8979	44,8940	34,3293	34,3410	6689,3787	77,4863	0,5372	0,5705	0,6240
	β_1	-0,5408	-45,9195	36,3282	36,3311	5446,9327	-65,7121	0,6412	0,6862	0,7603
	v_0	1,4993	-0,0476	0,4173	0,4173	3,8792	0,2381	0,8482	0,9110	0,9725
	v_1	2,2426	12,1288	0,7694	0,8067	3,6569	0,0705	0,7977	0,8688	0,9450
40	β_0	2,2667	13,3344	4,7699	4,7773	438,9420	17,2774	0,5667	0,6016	0,6561
	β_1	-0,0808	-91,9156	12,8924	12,9251	1908,2804	33,5155	0,6618	0,7110	0,7834
	v_0	1,5007	0,0452	0,3385	0,3385	3,6559	0,2322	0,8671	0,9294	0,9800
	v_1	2,1769	8,8429	0,6235	0,6481	3,4157	0,0327	0,8288	0,8942	0,9592
50	β_0	2,6760	33,8025	14,8238	14,8392	2446,4994	44,9905	0,5847	0,6211	0,6795
	β_1	-0,6040	-39,6030	18,0004	18,0047	1398,5841	-18,4430	0,6777	0,7300	0,7993
	v_0	1,4949	-0,3379	0,2925	0,2925	3,3256	0,1304	0,8775	0,9339	0,9822
	v_1	2,1462	7,3079	0,5357	0,5552	3,1805	0,0538	0,8393	0,9015	0,9690
100	β_0	2,5562	27,8109	12,8766	12,8886	4949,2582	64,0542	0,6643	0,7026	0,7593
	β_1	-0,6239	-37,6067	15,7086	15,7131	2471,8232	-31,2554	0,7328	0,7794	0,8431
	v_0	1,5000	-0,0023	0,1955	0,1955	3,1444	0,1258	0,8892	0,9438	0,9875
	v_1	2,0667	3,3349	0,3593	0,3654	2,9913	0,0709	0,8708	0,9265	0,9807
200	β_0	2,3212	16,0598	2,8890	2,9068	581,2890	19,6939	0,7401	0,7776	0,8323
	β_1	-0,6828	-31,7233	15,5928	15,5960	8576,5418	89,1988	0,7773	0,8198	0,8747
	v_0	1,5014	0,0930	0,1339	0,1339	3,1173	0,0741	0,8976	0,9480	0,9893
	v_1	2,0235	1,1762	0,2501	0,2512	2,9827	0,0462	0,8847	0,9367	0,9833
500	β_0	2,2056	10,2822	2,2178	2,2273	6369,2201	72,3142	0,8282	0,8625	0,9083
	β_1	-0,7804	-21,9614	4,3838	4,3893	1714,8075	19,7079	0,8396	0,8769	0,9246
	v_0	1,5014	0,0952	0,0836	0,0836	2,9723	0,0274	0,9040	0,9517	0,9911
	v_1	1,9920	-0,3990	0,1674	0,1676	2,6756	-0,0084	0,8606	0,9279	0,9838