UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, AGRICULTURA E AMBIENTE – IEAA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E HUMANIDADES – PPGECH

EVANJEFFSON SANTOS DE MELO

MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Humaitá/AM
2024

EVANJEFFSON SANTOS DE MELO

MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades – PPGECH, do Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente – IEAA/UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Humanidades.

Orientador: Dr. Marcos André Braz Vaz

Linha de pesquisa 02: Fundamentos e Metodologias para o Ensino das Ciências Naturais e Matemática

HUMAITÁ/AM
2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M528m

Melo, Evanjeffson Santos de
Mobilização de conceitos de Análise Combinatória à luz da Teoria das Situações Didáticas / Evanjeffson Santos de Melo . 2024
91 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Marcos André Braz Vaz
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Raciocínio combinatório. 2. Análise Combinatória. 3. Matemática. 4. Teoria das Situações Didáticas. I. Vaz, Marcos André Braz. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E HUMANIDADES

Linha de pesquisa 02: Fundamentos e metodologias para o ensino das ciências naturais e matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Evanjeffson Santos de Melo
Dissertação defendida e aprovada em 02 de maio de 2024, pela banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
MARCOS ANDRE BRAZ VAZ
Data: 11/06/2024 16:50:03-0300
CPF: ***.140.748-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz
Presidente - Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Profa. Dra. Eliane Regina Martins Batista
Membro interno - Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Jefferson Ferreira dos Santos
Membro externo - Universidade Federal do Amazonas - UFAM

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Orismar Santos de Melo e Evandro Menezes de Melo, pelo apoio incondicional nos estudos e por serem minhas referências de vida. A minha esposa Maiana Dandara e minha filha Alana Ágatha, por todo o amor e apoio, vocês são tudo para mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o amor e apoio de minha esposa, Maiana Dandara Ribeiro Torres, e de minha filha, Alana Ágatha Torres de Melo. Sem elas, não teria sido possível superar todos os obstáculos e adversidades. À minha mãe, Orismar Santos de Melo, ao meu pai, Evandro Menezes de Melo, à minha irmã, Kayenne Santos de Melo, e ao meu irmão, Evancley Santos de Melo, por sempre me incentivarem a buscar a evolução através dos estudos. Á meu orientador, Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz, pela paciência e amizade e por me apresentar ao campo da Educação Matemática e às teorias francesas da didática da matemática, áreas nas quais decidi continuar meus estudos. À coordenadora do PPGECH, profa. Dra. Elizabeth Tavares Pimentel, à secretaria do programa, especialmente à Danielle Ivana Pereira dos Santos e Mario Melo, sempre tão célere nas urgências que as demandas burocráticas exigem. Á Arthur da Silva Ribeiro, Ricardo da Silva Ribeiro e Acácia Elizabeth da Silva Ribeiro que me receberam de coração aberto logo que cheguei em Humaitá. Á prof Homero Almeida e toda a academia Humaitá Jiu-Jitsu pelo carinho e hospitalidade. À Marcos Ruben de Almeida Caldas e Iraneide Samira de Almeida Caldas, colegas da República da Rua Stanislau com os quais a convivência, carinho e cuidado ajudou a encarar a rotina de estudos de modo mais alegre. À Afimar da Silva Fernandes, Aldenice Fonseca Alencar, Antônia Fernanda Dutra Pinto, Cláudia de Oliveira Pacheco, Danjelo Pereira de Araújo, Diego Melquior Melo Martins, Francinetti Martins de Lira, Geângela Azevedo de Souza, Gerlane Lima da Silva, Inaê Nogueira Level, Jhully Gomes Morais, João Bosco Ferreira de Souza Júnior, Kelison Mendonça Gondim, Lívia Souza e Silva, Lucianny Thaís Freire Matias, Mônica Mendonça de Morais, Rayla Beatriz da Silva, Rodrigo Bonifácio de Souza Pavani, Ronecla Roneyne Alves Moreia e Sávio Oliveira da Silva, colegas e irmãos de turma, obrigado pelo carinho e amizade. À Genilson Campos Castro de Oliveira, irmão de orientação, companheiro nesse estágio de aprendizado com o qual alcancei vitórias nesse novo patamar que é o mestrado. Agradeço especialmente à Rogerio Silva, minha equipe de coleta de dados, fundamental para a instrumentação e gravação de áudio. Meu muito obrigado a Profa. Dra. Eliane Regina Martins Batista, prof. Dr. Renato Abreu Lima e Profa. Dra. Eulina Nogueira, pelo auxílio e atenção em minha jornada. Meu muito obrigado ao prof. Silio Valença, e aos alunos do curso de Licenciatura em Ciências Matemática e Física do Instituto de Saúde e Biotecnologia da Universidade Federal do Amazonas pelo total suporte e participação para que esta pesquisa ocorresse.

Este trabalho foi desenvolvido com o apoio do Governo do Estado do Amazonas por meio Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas, com a concessão de bolsa de estudo.

Meu muito obrigado a todos.

RESUMO

MELO, Evanjeffson Santos de. MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS. 2024. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades, Universidade Federal do Amazonas, Humaitá/AM.

A Análise Combinatória desempenha papel significativo na matemática e, apesar de repleta de problemas capazes de motivar os alunos, é considerada uma disciplina complicada, na qual os alunos têm dificuldades de encontrar o caminho correto para a resolução de cada problema. Os alunos sentem dificuldades em identificar corretamente a contagem de possibilidades em um problema de combinatória. Isso pode resultar em respostas incorretas e frustração por parte dos alunos. A Teoria das Situações Didáticas (TSD) pode ser uma estratégia valiosa para o ensino de conceitos de Análise Combinatória e para o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório dos alunos. Nesse sentido, o uso de Sequências Didáticas, embasadas pela TSD, pode ser uma estratégia eficaz para aprimorar a aprendizagem e superar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes. Definimos a seguinte questão norteadora: de que maneira as Sequências Didáticas mobilizam conceitos de Análise Combinatória em alunos de curso de licenciatura de ensino superior? Para isso, temos como objetivo geral o de analisar a mobilização de conceitos de Análise Combinatória por meio de sequências didáticas em alunos do ensino superior. Nosso referencial teórico fundamenta-se na TSD e o referencial metodológico utilizado é a Engenharia Didática de Michelè Artigue. Tendo uma abordagem qualitativa, o estudo foi conduzido em uma disciplina de um curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física na Universidade Federal do Amazonas (UFAM), onde foram confrontadas as análises *a priori* e *a posteriori*, além de identificados e descritos níveis de raciocínio combinatório de uma amostra de seis alunos. Essa abordagem demonstrou ser uma estratégia pedagógica eficaz para a aprendizagem dos alunos. Observou-se a construção colaborativa de conhecimento entre os participantes, bem como o enriquecimento do pesquisador, que simultaneamente explora objetivos educacionais e adquire aprendizados através de sua prática. Durante a aplicação da sequência didática, pode-se observar a mobilização de conceitos de Permutação, além de conceitos como Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial. Notou-se uma dificuldade comum, que foi a dificuldade em aplicar corretamente conceitos de permutação com repetição. A aplicação prática das sequências didáticas provou ser eficaz, pois permitiu aos estudantes, mesmo aqueles com conhecimentos prévios limitados em Análise Combinatória, alcançar as soluções corretas ou ajustar seus raciocínios após a intervenção docente. Além disso, promoveu a socialização e o desenvolvimento colaborativo do raciocínio combinatório, mostrando-se uma estratégia pedagógica valiosa não só para o Ensino Superior, mas também com potencial de adaptação para o Ensino Médio.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório. Análise Combinatória. Matemática. TSD.

ABSTRACT

MELO, Evanjeffson Santos de. MOBILIZATION OF CONCEPTS OF COMBINATORY ANALYSIS IN THE LIGHT OF THE THEORY OF TEACHING SITUATIONS. 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades, Universidade Federal do Amazonas, Humaitá/AM.

Combinatorial Analysis plays a significant role in mathematics and, despite being full of problems capable of motivating students, it is considered a complicated subject, in which students have difficulty finding the correct way to solve each problem. Students have difficulty correctly identifying the count of possibilities in a combinatorics problem. This can result in incorrect answers and frustration on the part of students. The Theory of Didactic Situations (TSD) can be a valuable strategy for teaching Combinatorial Analysis concepts and for developing students' Combinatorial Reasoning. In this sense, the use of Didactic Sequences, based on TSD, can be an effective strategy to improve learning and overcome the difficulties faced by students. We defined the following guiding question: how do Didactic Sequences mobilize Combinatorial Analysis concepts in higher education undergraduate students? To achieve this, our general objective is to analyze the mobilization of Combinatorial Analysis concepts through didactic sequences in higher education students. Our theoretical framework is based on TSD and the methodological framework used is Michelè Artigue's Didactic Engineering. Taking a qualitative approach, the study was conducted in a discipline of a Science Degree course: Mathematics and Physics at the Federal University of Amazonas (UFAM), where a priori and a posteriori analyzes were compared, in addition to identifying and describing levels of combinatorial reasoning of a sample of six students. This approach has proven to be an effective pedagogical strategy for student learning. The collaborative construction of knowledge among the participants was observed, as well as the enrichment of the researcher, who simultaneously explores educational objectives and acquires learning through his practice. During the application of the didactic sequence, one can observe the mobilization of Permutation concepts, in addition to concepts such as the Fundamental Principle of Counting and Factorial. A common difficulty was noted, which was the difficulty in correctly applying permutation concepts with repetition. The practical application of the didactic sequences proved to be effective, as it allowed students, even those with limited prior knowledge in Combinatorial Analysis, to reach the correct solutions or adjust their reasoning after the teaching intervention. Furthermore, it promoted the socialization and collaborative development of combinatorial reasoning, proving to be a valuable pedagogical strategy not only for Higher Education, but also with potential for adaptation for Secondary Education.
Keywords: Combinatorial reasoning. Combinatorial analysis. Mathematics. TDS.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

AACC	Atividades Acadêmicas-Científico-Culturais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CONEP	Comissão Nacional de Ética em Pesquisa
CONSUNI	Conselho Universitário
ED	Engenharia Didática
IEAA	Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente
IREM	Instituto de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática
ISB	Instituto de Saúde e Biotecnologia
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PIBIC	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica
PPGECH	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades
RP	Residência Pedagógica
SCORM	Sharable Content Object Reference Model
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
ULBRA	Universidade Luterana do Brasil

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Iniciei minha graduação em 2016, no curso de Licenciatura Plena em Ciências: Matemática e Física no Instituto de Saúde e Biotecnologia (ISB) da Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Ao longo desse período, participei de diversas Atividades Acadêmicas-Científico-Culturais (AACC), como o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), a Residência Pedagógica (RP) e monitorias, o que me permitiu ter contato direto com produções científicas e aprofundar meus conhecimentos. Durante minha jornada na graduação, observei que alguns conteúdos como os relacionados à Análise Combinatória eram frequentemente tratados como um emaranhado de fórmulas e memorização de procedimentos mecânicos.

Esse intenso envolvimento com a área da educação não apenas enriqueceu minha formação acadêmica, mas também despertou em mim um profundo interesse pela pesquisa e pelo ensino. Motivado por essas experiências, decidi continuar meus estudos, buscando aprimorar continuamente minhas habilidades e contribuir para meu desenvolvimento educacional. Após concluir a graduação, meu desejo de aprofundar meus conhecimentos e habilidades resultou em minha aprovação, em 2021, no mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades (PPGECH), no Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente (IEAA), em Humaitá-AM. Sob a orientação do professor Dr. Marcos André Braz Vaz, tive a oportunidade de desenvolver pesquisas que integraram ciência e educação, fortalecendo significativamente minha trajetória acadêmica e profissional.

Composto por um corpo docente excepcional, o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades (PPGECH) conta com especialistas em diversas áreas. Esse corpo docente diversificado e qualificado é um dos pontos fortes do programa, proporcionando aos alunos uma ampla gama de conhecimentos e experiências. Esses professores não apenas são reconhecidos por suas contribuições acadêmicas, mas também pela sua atuação prática e pela relevância de seus trabalhos no cenário nacional e internacional. A presença desses profissionais enriquece o ambiente acadêmico do PPGECH, estimulando a produção científica e o debate acadêmico, além de oferecer oportunidades únicas de aprendizado para os alunos.

O professor Dr. Marcos André Braz Vaz, especialista em educação matemática e educação estatística, foi fundamental para o aprofundamento das nossas pesquisas. Ele me apresentou as principais teorias e metodologias que utilizamos em nosso estudo, proporcionando uma base sólida e abrangente para nossa investigação.

Com o embasamento teórico estabelecido, nossas pesquisas progrediram de maneira significativa, permitindo uma análise aprofundada e crítica dos dados coletados. Agora, na próxima seção, iremos apresentar e discutir os resultados obtidos, destacando as implicações e contribuições da nossa pesquisa para o campo da educação.

A análise combinatória desempenha um papel significativo na matemática escolar e tem sido frequentemente abordada na literatura de Educação Matemática (Navarro; Batanero; Godino, 1996; Nascimento, 2018; Miotto, 2014; Kapur, 1970; Lopes, 1998; Borba; Rocha; Azevedo, 2015; Borba, 2002; Batista, 2020; Batanero, 2001, 2005). Desde o século passado até os dias atuais, pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória têm se consolidado como um campo de investigação importante para lidar com as dificuldades enfrentadas por alunos e professores.

A análise combinatória é uma ferramenta matemática poderosa que pode ser aplicada em uma ampla gama de áreas, desde a matemática teórica até a resolução de problemas cotidianos. Suas origens remontam a construção e resolução de quadrados mágicos (Vazques; Noguti, 2004; Zanon, 2019; Eves, 1997; Boyer, 1974) e jogos de azar (Borba; Rocha; Azevedo, 2015; Zanon, 2019; Eves, 1997; Boyer, 1974), mas ao longo do tempo ela se desenvolveu e hoje é utilizada em diversas áreas, como: planejamento de eventos, design de sistemas digitais, organização de dados, probabilidade e estatística (Souza, 2018; Souza, 2020), planejamento de rotas e logística, codificação e criptografia (Vidal, 2019), biologia molecular, economia etc. (Pessoa; Borba, 2010; Borba; Rocha; Azevedo, 2015). Segundo Morgado *et al.* (1991), a Análise Combinatória, apesar de repleta de problemas capazes de motivar os alunos, é considerada uma disciplina complicada, em que os alunos têm dificuldade de encontrar o caminho correto para a resolução de cada problema.

A combinação de conceitos matemáticos com situações do cotidiano pode ser um desafio para muitos estudantes, especialmente quando se trata de conceitos de combinatória. Existem diversas razões pelas quais os alunos podem enfrentar dificuldades ao aprender sobre combinatória, e isso tem sido objeto de estudo e pesquisa na área de Educação Matemática. Como abordado nos estudos de Moro e Soares (2006), Pereira e Curi (2016) e Barbosa e Oliveira (2018), uma das dificuldades mais comuns é a falta de habilidades em contagem e raciocínio lógico. Os alunos frequentemente têm dificuldade em identificar corretamente a contagem de possibilidades em um problema de combinatória e em aplicar fórmulas e conceitos matemáticos relevantes, como o Princípio Fundamental da Contagem, a fórmula de permutação e a fórmula de combinação. Essa dificuldade pode resultar em respostas incorretas e frustração por parte dos alunos.

Diante disso, estudos sobre novas metodologias para facilitar a aprendizagem sobre Raciocínio Combinatório contribuem na compreensão de problemas combinatórios por parte dos alunos. A combinatória é um tópico difícil para muitos alunos, e com o intuito de superar as dificuldades mencionadas é fundamental que os professores adotem uma abordagem clara e simplificada ao ensinar combinatória, destacando os conceitos fundamentais e incentivando os alunos a se envolverem em práticas e resolução de uma variedade de problemas. Além disso, a contextualização da combinatória com situações da vida real e sua conexão com outras áreas da matemática podem desempenhar um papel crucial ao promover uma melhor compreensão dos conceitos e sua aplicação prática pelos alunos.

Nesse sentido, as linhas de pesquisa em Educação Matemática ajudam a elucidar os problemas enfrentados ao longo da jornada escolar do estudante. A Teoria das Situações Didáticas - TSD (Brousseau, 1996, 2008), que se constitui numa abordagem referente à Didática da Matemática Francesa, é uma estratégia valiosa para o ensino de conceitos de Análise Combinatória e para o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório dos alunos. A TSD se concentra no estudo do ensino e aprendizagem da matemática, buscando entender como os alunos constroem seus conhecimentos matemáticos.

As dificuldades de aprendizagem em Matemática são um fenômeno presente em todas as áreas, exemplos são: Biologia, Química, Engenharias, Geometria, Estatística, entre outras (Silva, 2019; Santos, 2020; Souza, 2018, Souza, 2020; Maia, 2021). A incompreensão das propriedades básicas da matemática pelos alunos pode criar uma barreira para o avanço no aprendizado, prejudicando a compreensão não apenas de conceitos de análise combinatória, mas também de outras áreas que envolvem exatas.

Existem várias razões pelas quais é fundamental estudar Análise Combinatória (Kapur, 1970; Duro; Becker, 2015; Miotto, 2014; Morgado *et al.*, 1991). Os alunos adquirem compreensões sobre problemas de conceitos de combinatória que são influenciadas por diferentes fontes, incluindo a escola, por meio de problemas envolvendo o produto cartesiano, e/ou experiências fora da sala de aula, abordando permutação, arranjo e combinação (Nascimento, 2018).

Uma das principais razões para as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos é a falta de conexão entre o conteúdo apresentado em sala de aula e a realidade dos estudantes (Placha, 2006; Moro; Soares, 2006). Muitos alunos não conseguem perceber a utilidade prática da matemática em suas vidas cotidianas, o que resulta em desinteresse e dificuldades na compreensão dos conceitos (Duarte, 2019). Trocado (2017) diz que, atualmente, o ensino de análise combinatória na maioria das escolas está centrado na memorização de fórmulas e na aplicação mecânica dessas fórmulas aos problemas propostos.

Esse método resulta em grande desinteresse e desmotivação tanto para alunos quanto para professores, levando a um aprendizado deficiente e superficial sobre o assunto. É necessário buscar novas abordagens para o ensino da matemática, levando em consideração a diversidade cultural e os conhecimentos prévios dos alunos, a fim de tornar o aprendizado mais significativo e contextualizado. Além disso, é importante valorizar os erros como parte do processo de aprendizagem e adotar uma abordagem lúdica e desafiadora para ensinar a disciplina, visando potencializar a construção de conhecimentos. Como apontado por Luckesi (1990, p. 133), "A visão culposa do erro, na prática escolar, tem conduzido ao uso permanente do castigo como forma de correção e de direção da aprendizagem, tomando a avaliação como suporte da decisão. Todavia, uma visão sadia do erro possibilita sua utilização de forma construtiva".

Esta pesquisa é justificada pela necessidade de se repensar o ensino da matemática, visto que muitos estudantes encontram dificuldades em compreender os conceitos matemáticos, muitas vezes por conta de um ensino que prioriza a memorização e a repetição de procedimentos mecânicos. É necessário buscar alternativas que permitam aos estudantes desenvolver um pensamento crítico e reflexivo, capaz de relacionar os conceitos matemáticos com o mundo real e de solucionar problemas de forma criativa e autônoma. Assim, esta dissertação busca contribuir para a formação inicial de professores que possam oferecer um ensino mais significativo e contextualizado, que valorize a compreensão e a construção de conceitos pelos estudantes.

O elevado número de alunos em recuperação em matemática é preocupante e afeta não só os cursos de exatas, mas também outras áreas do conhecimento (Lima *et al.*, 2020). Diante dessa realidade, é necessário buscar alternativas para melhorar o ensino, especialmente em conteúdos considerados desafiadores, como a Análise Combinatória. Nesse sentido, o uso de Sequências Didáticas, embasadas pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, pode ser uma estratégia eficaz para aprimorar a aprendizagem e superar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Considerando o contexto exposto, formulou-se a questão norteadora: "De que maneira as sequências didáticas mobilizam conceitos de Análise Combinatória em estudantes de cursos de licenciatura no ensino superior?". Para isso, temos como objetivo geral o de analisar a mobilização de conceitos de Análise Combinatória por meio de sequências didáticas em alunos do ensino superior. Para alcançar isso, temos como objetivos específicos: a) Desenvolver sequências didáticas sobre o conteúdo de Análise Combinatória para estudantes do ensino superior; b) Identificar os conceitos de Análise Combinatória mobilizados por meio dessas sequências; c) Analisar estratégias e erros no processo de mobilização de conhecimentos de Análise Combinatória nas sequências didáticas à luz da TSD. Este enfoque visa aprofundar a compreensão da aplicação e do impacto das sequências didáticas no ensino de conceitos matemáticos complexos em contextos de licenciatura, contribuindo para o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino superior.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: seguindo desta introdução, são apresentados os objetivos da pesquisa; no capítulo 3, estão os levantamentos iniciais da pesquisa, onde abordam-se aspectos teóricos relevantes para a construção do objeto de estudo, destacando-se uma breve contextualização histórica da Análise Combinatória, além de aspectos de seu ensino, as definições da Educação Matemática, Sequências Didáticas e Didática da Matemática. No capítulo 4 são abordados os referenciais teórico-metodológicos, onde são apresentados o referencial teórico, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, e o referencial metodológico, com a Engenharia Didática descrita por Michèle Artigue, além dos Níveis de Raciocínio Combinatório descritos por Moro e Soares. Já no capítulo 5, intitulado Construção da base experimental, realiza-se uma revisão bibliográfica sobre análise combinatória. E após, no capítulo 6, sobre as análises *a priori* e *a posteriori*, encontra-se a descrição dos participantes e lócus da pesquisa, os encontros e os resultados e as discussões. Por fim, apresentam-se as considerações finais da pesquisa.

3 LEVANTAMENTOS INICIAIS DA PESQUISA

Nesta seção, apresentaremos os levantamentos iniciais da pesquisa, que incluem uma análise histórica da análise combinatória, a abordagem do ensino, bem como as definições de educação matemática, sequência didática e didática da matemática.

3.1 Análise Combinatória em um contexto histórico

Antes de iniciarmos a discussão acerca da Análise Combinatória, é conveniente explorar os eventos históricos associados a essa área da Matemática. A prática de organizar e contar está intrinsecamente ligada ao dia a dia desde as civilizações antigas. Embora existam escassos registros detalhando os métodos de contagem utilizados, é possível compreender seu domínio por meio das aplicações conhecidas.

A matemática desempenha um papel fundamental e indispensável em nossas vidas, com uma longa história de aplicação em diversas áreas e contribuições significativas. Uma percepção histórica da matemática proporciona uma base sólida para explorar e compreender seus princípios, teorias e aplicações, permitindo uma abordagem mais completa e enriquecedora no processo de ensino e aprendizagem (D’Ambrósio, 1996). Para Lopes (1998) a matemática enfrenta atuais desafios, como o de ensinar não apenas o domínio dos números e das operações de forma mecânica, mas também ler, interpretar e refletir criticamente os fatos, fazendo com que o aluno realize inferências sobre incertezas e acontecimentos.

Historicamente, a matemática esteve intimamente relacionada aos avanços em áreas como a engenharia, a medicina, as telecomunicações e a educação. Em seu livro “Educação Matemática”, D’Ambrósio (1996) salienta que:

> Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. (D’Ambrósio, 1996, p. 29).

Os registros mais antigos do uso da combinatória são atribuídos aos chineses há quatro milênios atrás. Claramente, o que essa civilização contribuiu para o campo da Análise Combinatória não corresponde exatamente à teoria como entendida hoje. No entanto, já revelava uma capacidade notável de organizar e contar quantidades, um aspecto que fica claro nos Quadrados Mágicos contidos no *I-King* (ou *I Ching*), como mostra Eves (1997, p. 268):

> Um dos clássicos matemáticos chineses mais antigos é o *I-King* ou *Livro das Permutações*. Nele aparece um diagrama numérico conhecido como *Lo-Shu*, [...]. Trata-se do exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico; conta uma lenda que o primeiro a vê-lo foi o imperador *Yu*, por volta de 2.200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu às margens do rio Amarelo. [...] é um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para números ímpares.

Caminhando em diferentes direções e acumulando distintos conhecimentos, grupos de indivíduos compartilhando uma mesma modalidade foram se estruturando em sociedades e dando origem a grandes civilizações. Dentre as diversas civilizações, algumas merecem destaque, por exemplo, as que floresceram nos altiplanos do México e nos Andes, Astecas, Maias e Incas, nas planícies da América do Norte e na Amazônia, na África subequatorial, nos vales do Indus, do Ganges e do Yang-Tsé, e na bacia do Mediterrâneo. As civilizações situadas ao redor da bacia do Mediterrâneo, incluindo Egito, Babilônia, Judéia, Grécia e Roma, são de particular interesse devido a suas contribuições significativas. Para D'Ambrósio (1996, p. 34):

> A civilização egípcia floresceu com base de sustentação na agricultura nas margens do Nilo, que se fertilizavam periodicamente. A sociedade egípcia, organizada em torno desse recurso, estava subordinada a uma ordem hierárquica encabeçada por um faraó legitimado por divindades identificadas como os astros, obviamente associadas a regularidade do Nilo. A distribuição de recursos e a repartição das terras férteis deram origem a formas muito especiais de matemática.

A matemática, assim como os conhecimentos egípcios, chegou até o período contemporâneo por meio dos escritos em papiros e hieroglifos, dentre os mais conhecidos estão o Papiro de Rhind, no Museu Britânico, e o Papiro de Moscou. O Papiro de Rhind (ou Ahmes) é um dos mais antigos escritos de matemática e, originalmente, é uma obra do escriba Ahmes. De acordo com Eves (1997, p. 69):

> 1650 a.C. essa é a data aproximada do papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. [...]. O papiro Rhind foi publicado em 1927. Tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de 13 polegadas de altura.

Atualmente, o Papiro de Rhind está disponível para visualização pública no site do Museu Britânico e sua tradução contribuiu para compreender o desenvolvimento da matemática na civilização egípcia. Dentre os 85 problemas, existe um que está relacionado à contagem: o Problema 79, o qual foi enunciado por Boyer (1974, p. 12):

> Assim o Problema 79 cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hectares". É presumível que o escriba estava tratando de um, talvez bem conhecido, em que em cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que

> seria a quantidade de grão poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.

Historiadores associam o Problema 79 do Papiro de Rhind aos problemas enunciados ainda na Idade Média pelo matemático Leonardo Fibonacci (1.170 - 1.250), descrito por Eves (1997, p. 76):

> [...] ele viu no problema um precursor de um popular problema da Idade Média e que figura no Liber Abaci (1202) de Leonardo Fibonacci. Dentre os muitos problemas dessa obra há o seguinte: "Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?".

Portanto, observa-se que a solução tanto do problema mencionado no Papiro de Rhind quanto do problema enunciado por Fibonacci exige o uso repetido da multiplicação, seguida pela adição. Isso indica que ambos os problemas estavam relacionados com o Princípio Fundamental da Contagem.

As antigas civilizações conhecidas como Caldeus, Assírios e Fenícios floresceram na região denominada Mesopotâmia, entre os rios Tigres e Eufrates. Baseavam-se no pastoreio, cuja atividade levou-os à aritmética, à contagem e cálculos astronômicos. Emigrantes do Norte desenvolveram, na margem superior do Mediterrâneo, a importante civilização dos gregos. Eles se dedicavam a uma matemática prática, similar à dos egípcios, enquanto simultaneamente cultivavam o desenvolvimento de um raciocínio abstrato. Assim, inicia-se o surgimento das ciências, da filosofia e da matemática abstrata (D'Ambrósio, 1996).

A Tales de Mileto (625-547 a.C.) e Pitágoras de Samos (560-480 a.C.) são atribuídos os primeiros progressos da matemática grega. É relevante mencionar os três maiores filósofos da antiguidade Grega: Sócrates, Platão e Aristóteles, que viveram no século IV a.C., quando Matemática e Filosofia representavam uma mesma linha de pensamento. Platão fazia distinção entre uma matemática prática, essencial para comerciantes e artesãos, mas considerada insuficiente para intelectuais. Para esses últimos, ele defendia uma matemática abstrata, vista como crucial para a elite (D'Ambrósio, 1996).

No século IV a. C., Euclides (330-270 a.C.) organizaria em 13 livros o que seria a obra mais importante desse período: "*Os elementos*", nessa obra ele organizou toda a matemática então conhecida. Dentre suas proposições, apresentou o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^2$, para o caso $\mathbb{m} = 2$, anos mais tarde a teoria binomial foi ampliada (Morgado *et al.*, 1991).

No século III a. C. viveu Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), que de acordo com D'Ambrósio (1996, p. 37):

> Talvez o primeiro capaz de desenvolver, com igual competência, as duas matemáticas, a utilitária e a abstrata. Arquimedes, por muitos considerado o primeiro matemático aplicado, desenvolveu inúmeros engenhos para uso civil e militar e resolveu problemas práticos, tais como definir a quantidade dos metais constituindo uma liga, ao mesmo tempo em que dava as suas invenções um tratamento matemático teórico.

A expansão do Império Romano começou com características distintas dos gregos. Com foco em política, exerciam liberdade religiosa total, suas atividades voltavam-se a uma filosofia social e política, os maiores nomes são Cícero (106-43 a. C.) e Júlio César (70-19 a. C.). Os romanos desenvolveram um modelo político que se baseava em um sistema de leis e códigos, onde a maior força política era o Senado, formado por representantes de todas as províncias romanas e cujo poder executivo era um imperador, denominado César. Vale ressaltar os trabalhos de Apolônio (240-174 a. C.), Cláudio Ptolomeu (100-178 a. C.) e Diofanto no século III.

Na Idade Média, Alcuíno de York (735-804) destaca-se nesse período por seus trabalhos, que propõem quebra-cabeças e desafios incentivando o uso de estratégias combinatórias. Entre esses, destaca-se o desafio conhecido da travessia de barco, que é o seguinte: “Um lobo, uma cabra e um repolho precisam ser levados para o outro lado de um rio em um barco que só pode carregar um deles por vez, além do barqueiro. Qual a maneira de realizar a travessia de modo que o lobo não devore a cabra e a cabra não consuma o repolho?”. A solução desse problema descrita por Eves (1997) contribui para o desenvolvimento de um raciocínio combinatório, pois consiste em descrever todas as trajetórias possíveis do barco, observando as restrições apresentadas:

> Para solucionar este problema, é necessário assumir a posição do barqueiro e seguir os seguintes passos: 1. Levar a cabra para a outra margem; 2. Retornar com o barco vazio e pegar o repolho, para levá-lo até outra margem; 3. Deixar o repolho e trazer a cabra de volta no barco; 4. Trocar a cabra pelo lobo e cruzar o rio com o lobo; 5. Voltar para pegar a cabra. 6. Levar a cabra até a outra margem, onde estarão finalmente os três (Eves, 1997, p. 314).

Destaca-se, também, Leonardo (1170-1240), chamado de Fibonacci, e sua obra *Liber abbaci*, na qual explica todo o sistema posicional e as regras de operações aritméticas. Em obras como “O tratado das medições e cálculos”, de Abraham bar Hiyya (falecido em 1136), o cálculo combinatório de Bbraham ibn Ezra (1090-1167), a introdução do método de indução por Levi ben Gerson (1288-1344), junto com um reconhecimento do sistema lógico implícito em *Os elementos* de Euclides, foi possível completar a construção de uma teologia cristã. Coube a São Tomás de Aquino (1225-1274) publicar a maior obra filosófica da Idade Média, a *Summa theologica*. O interesse leigo na obra de Euclides surge apenas modestamente no século XV.

Nos séculos XIV e XV, os interesses eram na filosofia, lógica, ótica e nas navegações, para os quais os trabalhos de Pedro Nunes (1502-1575), que publicou *Álgebra na aritmética e na geometria* e o *Tratado da esfera,* devem ser mencionados. Nas artes e construção ressalta-se o trabalho de Leon Batista Alberti (1404-1472), que modernizou a obra de Vitruvius. Todos esses conhecimentos que passariam a ser denominados *matemática* começaram nessa época a serem organizados com um estilo singular e a serem conhecidos por especialistas. Reconhece-se aí o nascimento de especialidades no conhecimento. O termo *matemática* começa a ser utilizado como se conhece hoje no século XV. No Renascimento, pode-se destacar as obras de Girolamo Cardano (1501-1576) que, com influência de Nicolló Tartaglia (1499-1557), publicou *Ars magna* (1545), onde expõe métodos de resolução de equações de 3º e 4º graus.

Vale ressaltar Rene Descartes (1596-1650) e sua obra *Discurso do método*, que introduz um novo enfoque para a geometria, utilizando noções e notações da nova álgebra, sendo hoje conhecida como geometria analítica (D´Ambrósio, 1996). É importante considerar os trabalhos de Simon Stevin (1548-1620), ampliando o universo dos números com a introdução de decimais, além de John Napier (1550-1617), por seu trabalho com logaritmos. Isso possibilitou passar de uma ciência reflexiva a uma ciência experimental. O centro dessa importante mudança de conceito de ciências estava na Universidade de Cambridge, onde sem dúvida a figura mais importante nessa fase é Isaac Newton (1642-1727), que escreveu a obra *Principia mathematica philosophiae naturalis* (1687), na qual estabelece as leis da mecânica utilizando um novo instrumento matemático, o cálculo diferencial. Santos (2019) diz que Newton conceituou o binômio como um complemento ao estudo de produtos notáveis.

Essa área de estudo engloba aspectos como os coeficientes binomiais e suas respectivas propriedades, o Triângulo de Pascal, juntamente com suas características, e a formulação para o desenvolvimento do Binômio de Newton. As expedições da Espanha e Portugal e logo praticadas pela França, Holanda e Inglaterra estabeleceram as bases dos impérios coloniais e o mundo entrou em um outro sistema de propriedade e de produção, e a economia capitalista se estabeleceu. Na Alemanha, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) compartilha com Newton a glória de ter inventado o cálculo diferencial. Na Europa continental, as ideias de Newton encontraram bases filosóficas para a Revolução Francesa (D'Ambrósio, 1996).

Ressalta-se os trabalhos dos irmãos Bernoulli sobre o cálculo das variações e a teoria das séries infinitas. Leonhard Euler (1707-1783), em um de seus muitos trabalhos, estabelece as bases do conceito de permutação caótica a partir da interação acadêmica de Euler com Nicolaus Bernoulli (1687-1759), em uma troca de cartas, desafiado por Nicolaus, que lhe apresentou um problema intrigante: calcular o número de maneiras possíveis de distribuir uma determinada quantidade de cartas em igual número de envelopes endereçados a diferentes destinatários, de forma que nenhuma carta esteja no envelope correto.

A troca de cartas entre os franceses Blaise Pascal (1632-1662) e Pierre de Fermat (1601-1655) teve um papel crucial no avanço da teoria da probabilidade como é conhecida hoje. Nessas cartas, eles exploravam a solução para o problema dos pontos, que busca estabelecer como as apostas devem ser divididas em um jogo de dados interrompido entre dois competidores de habilidades comparáveis, baseando-se na pontuação no momento da interrupção e no total de pontos necessário para a vitória. Segundo Boyer (1974, p. 265):

> Enquanto Pascal em 1654 trabalhava em sua As cônicas, seu amigo, o Chevalier de Mére, propôs-lhe questões como esta: Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas, o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado? Pascal escreveu a Fermat sobre isto, e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades.

Na França, a teoria das probabilidades teve enormes avanços com Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre-Simon Laplace (1749-1827), a mecânica celeste e a física matemática passaram, então, a ser firmemente estabelecidas. Charles Babbage (1792-1871) fez avanços para a ciência da computação. Vale mencionar William Rowan Hamilton (1821-1865), Hermann Grassmann (1809-1877), Arthur Cailey (1821-1895) e James Sylvester (1814-1897) pelo desenvolvimento de espaços vetoriais, de quaterniões e das matrizes. Efetivamente, esse é o início da álgebra multilinear. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) coloca a análise matemática em termos rigorosos e introduz uma definição de limites que viria caracterizar o tratamento rigoroso da análise, mediante *epsilon* e *delta*. Com Carl F. Gauss (1777-1855), incorporando geometria analítica ao cálculo, a geometria diferencial tem seu momento de glória. Pelos trabalhos com os números complexos pode-se ressaltar Jean Baptiste Fourier (1768-1830) e Georg Bernhard Riemann (1826-1866), surgindo no final do século XIX a análise complexa.

A teoria dos números tem grande avanço, sobretudo com os estudos das propriedades e a distribuição de números primos, resolução de congruências, essencialmente equações num universo numérico modular, com as contribuições fundamentais de Carl F. Gauss, que já foi chamado de "príncipe dos matemáticos". Georg Cantor (1845-1918) formalizou uma teoria dos conjuntos, e os números reais foram rigorosamente definidos por Richard Dedekind (1831-1916). Bertrand Russel (1872-1970) e Alfred N. Whitehead (1861-1925) publicaram *Os Principia mathematica* e estabeleceram firmemente a lógica matemática.

Felix Klein (1849-1925) é uma figura de extrema importância para a educação matemática e um dos mais importantes matemáticos do século XIX, percebendo as possibilidades da Alemanha, que dependia de uma renovação da educação secundária, e, sobretudo, modernizando o ensino de matemática, publicou a obra *Matemática elementar de um ponto de vista avançado,* que marcou época e, segundo D'Ambrósio (1996, p. 53), "representa o início da moderna educação matemática".

Na transição do século XIX para o XX, realizou-se o primeiro Congresso Matemático Internacional em 1893, em Chicago, EUA, e em 1900 o segundo Congresso foi realizado na França, onde David Hilbert apresentou uma lista com 23 problemas que, segundo ele, seriam a principal preocupação dos matemáticos no século XX. O aparecimento da topologia no século XX formalizou uma geometria associada à análise, introduzindo uma análise para espaços de dimensões infinitas, que é a análise funcional, dando um formalismo algébrico à geometria, por meio da geometria algébrica. Destaca-se a obra *Elementos de matemática* de Nicolas Bourbaki, sendo o autor um personagem fictício adotado por um grupo de matemáticos franceses em 1928 com o objetivo de conceber uma obra equivalente a obra de Euclides, sintetizando toda a matemática conhecida no século XX.

3.2 O ensino de Análise Combinatória

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que estuda possibilidades e combinações possíveis entre conjuntos de elementos. Morgado *et al*. (1991) dizem que a análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Nesse mesmo sentido, Borba, Rocha e Azevedo (2015, p. 1350) referem que "A Combinatória estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam determinadas condições. Seguindo essa linha de raciocínio, Rocha *et al.* (2018) estabelecem que:

> A análise combinatória é a área da Matemática cujo objetivo é desenvolver métodos de contagem dos elementos de um determinado conjunto. Como estes conceitos são aplicados constantemente em situações cotidianas, seu estudo se torna importante para a formação de um cidadão crítico. (Rocha *et al.*, 2018, p. 1).

A Análise Combinatória é uma componente essencial da Matemática Discreta e, como tal, tem um papel importante na matemática escolar. Ela aborda uma ampla gama de problemas e utiliza não apenas combinações, arranjos e permutações, mas também outras técnicas para os enfrentar. O princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a Teoria dos Grafos e a Teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas na Análise Combinatória. Assim, Kapur (1970), para justificar o ensino da Combinatória na escola, apresentou as seguintes razões, que ainda são válidas:

> (1) A independência da combinatória do Cálculo facilita a adaptação de problemas adequados para séries e, geralmente, problemas muito desafiadores podem ser discutidos com os alunos para que eles descubram a necessidade de criar uma matemática mais "sofisticada".
> (2) A combinatória pode ser usada para treinar os alunos em enumeração, fazer conjecturas, generalização e pensamento sistemático; pode ajudar no desenvolvimento de muitos conceitos, como relações de equivalência e ordem, função, amostra etc.
> (3) Muitas aplicações em diferentes campos podem ser apresentadas (Kapur, 1970, p. 114).

A Análise Combinatória é uma ferramenta matemática poderosa que pode ser aplicada em uma ampla gama de áreas, desde a matemática teórica até a resolução de problemas cotidianos. Suas origens remontam a construção e resolução de quadrados mágicos (Vazques; Noguti, 2004; Zanon, 2019; Eves, 1997; Boyer, 1974) e jogos de azar (Borba; Rocha; Azevedo, 2015; Zanon, 2019; Eves, 1997; Boyer, 1974), mas ao longo do tempo ela se desenvolveu e hoje é utilizada em diversas áreas, como: planejamento de eventos, design de sistemas digitais, organização de dados, probabilidade e estatística, como destacado por Souza (2018; Souza, 2020), planejamento de rotas e logística, codificação e criptografia (Vidal, 2019), biologia molecular, economia etc.

Pessoa e Borba (2010), Borba, Rocha e Azevedo (2015) e Mello (2017) destacam como a sociedade contemporânea valoriza pessoas com habilidades críticas e analíticas mais acentuadas, aptas a analisar e sugerir soluções para os desafios emergentes, tanto no âmbito teórico quanto nas situações do dia a dia. Para Mello (2017, p. 10):

> A análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, constituindo, assim, uma importante ferramenta que abrange um vasto campo investigativo, com intensa atividade devido às suas inúmeras aplicações nas mais diversas áreas.

Destacam-se dois tipos de problemas frequentes em Análise Combinatória: (1) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; e (2) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas. Com base em classificações anteriores, Pessoa e Borba (2009) sugerem que os problemas combinatórios sejam organizados conforme seus invariantes de ordem e escolha. Assim, propõem a classificação desses problemas em quatro tipos: aqueles que investigam situações de produto cartesiano, combinações, arranjos e permutações.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Brasil de 1997 recomendam a introdução do Princípio Fundamental da Contagem já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de situações práticas de contagem simplificadas. No contexto do ensino da Matemática, os PCNs enfatizam a importância de explorar quatro grupos de situações relacionadas às estruturas multiplicativas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Dentre essas situações, destacam-se aquelas associadas à ideia de combinatória. Nessa perspectiva, por se tratar de um campo que abrange uma diversidade de conteúdos, esse bloco pode desenvolver:

> Também algumas ideias ou procedimentos matemáticos, como proporcionalidade, composição e estimativa, são fontes naturais e potentes de inter-relação e, desse modo, prestam-se a uma abordagem dos conteúdos em que diversas relações podem ser estabelecidas. A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real (Brasil, 1997, p. 38).

No estudo conduzido por Moro e Soares (2006) é explorada a hipótese de que é possível identificar e descrever distintos estágios na construção inicial do raciocínio combinatório, bem como sua evolução em direção a uma organização lógico-formal. Esse objetivo é investigado por meio da análise das soluções de problemas matemáticos do tipo produto cartesiano apresentados aos alunos.

Vergnaud (1983) destaca a elegância intrínseca do produto cartesiano como um dos motivos pelos quais ele é amplamente utilizado na França como uma forma de introduzir o conceito de multiplicação no ensino fundamental. Essa abordagem ressalta a importância de utilizar estratégias pedagógicas que não apenas promovam o aprendizado efetivo, mas também despertem o interesse e a compreensão dos alunos, rompendo com o modo tradicional de transmissão de conteúdo. Ao reconhecer a utilidade do produto cartesiano, pode-se explorar sua aplicação como uma ferramenta pedagógica eficaz para facilitar a compreensão conceitual da multiplicação desde os primeiros anos escolares.

Na literatura de psicologia da Educação Matemática, diversos estudos, conforme observado por Moro e Soares (2006), indicam que crianças, inclusive as que estão nas séries iniciais da educação básica, são capazes de iniciar a compreensão de conceitos e relações multiplicativas de natureza relativamente complexa.

Essa abordagem visa fomentar a criatividade dos alunos na resolução de problemas, permitindo-lhes recorrer ao desenho de objetos e à aplicação de operações de soma ou multiplicação em contextos de contagem. Essa estratégia é destacada como um recurso valioso para o fomento do raciocínio lógico-dedutivo. Assim, destacam-se problemas combinatórios:

> Levando-se em conta tais considerações, pode-se concluir que os problemas cumprem um importante papel no sentido de propiciar as oportunidades para as crianças, do primeiro e segundo ciclos, interagirem com os diferentes significados das operações, levando-as a reconhecer que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes operações, assim como uma mesma operação pode estar associada a diferentes problemas (Brasil, 1997, p. 73).

Durante o segundo ciclo do Ensino Fundamental, é essencial que os estudantes adquiram uma compreensão sólida do Princípio Multiplicativo, capacitando-os a identificar diferentes formas de combinar elementos de um conjunto específico. Esse conhecimento é crucial, pois facilita a elaboração de tabelas e gráficos, ferramentas fundamentais para a representação e análise de dados.

> Além disso, o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental (Brasil, 1997, p. 137).

Em relação a conteúdos como o Princípio Fundamental da Contagem, arranjos, combinação simples, permutação simples e permutação com elementos repetidos, Batista (2020, p. 18) destaca que: “Podem ser aplicados baseados em dados reais, ou tentativas de reprodução da realidade, e que por meio da resolução de problemas, podem ser resolvidos com criatividade, por parte do aluno, associando os problemas propostos ao cotidiano”.

O entendimento da Análise Combinatória como uma disciplina distinta das técnicas específicas de combinações, arranjos e permutações é refletido na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018). Nessa estrutura educacional, são descritas habilidades para a aprendizagem de “Técnicas de Contagem e Análise Combinatória” na área de Matemática e Suas Tecnologias. A BNCC aborda essas habilidades tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, destacando a importância de compreender os fundamentos e aplicações da Análise Combinatória em diferentes níveis de ensino.

Dentre as competências previstas na BNCC (Brasil, 2018), observa-se uma progressão na abordagem da Análise Combinatória ao longo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. No Ensino Fundamental, as habilidades elencadas estão relacionadas ao princípio da contagem e ao princípio multiplicativo, fornecendo uma base sólida para a compreensão dos fundamentos da contagem e da combinação de elementos.

Já no Ensino Médio, as competências relacionam-se aos princípios aditivos e multiplicativos do Ensino Fundamental para a resolução de problemas que envolvam cálculo de probabilidade. Essa progressão evidencia o desenvolvimento gradual das habilidades em

Análise Combinatória ao longo da jornada educacional dos estudantes, preparando-os para enfrentar desafios mais complexos e aplicar esses conceitos em contextos práticos. Segundo a BNCC:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (Brasil, 2018, p. 265).

No âmbito dessa conjuntura, as formas de representação utilizadas pelos alunos, tanto na notação quanto na verbalização, juntamente com suas interpretações das soluções adotadas, refletem o processo de aprendizagem construtivista em andamento. Esses aspectos fornecem uma base essencial para a intervenção do pesquisador, desempenhando o papel de professor em atividade na sala de aula. O objetivo dessa intervenção é promover o avanço das crianças nos estágios de desenvolvimento do raciocínio combinatório, conforme destacado por Placha (2006). Estudos, como os de Souza (2018, 2020) e Maia (2021), demonstram a preocupação e relevância de pesquisas que abordem o raciocínio de alunos em diversos níveis, como ensino fundamental, médio e superior.

Nesse contexto, surge a necessidade de investigar mais a fundo a separação desses níveis de raciocínio combinatório, visando a compreensão mais precisa de seu desenvolvimento e dos fatores envolvidos em sua progressão.

3.3 Educação Matemática

Ao longo das últimas décadas, observa-se um aumento significativo de estudos na área de Educação Matemática, que abrangem uma ampla variedade de temas. Essas pesquisas têm se dedicado a explorar o processo de construção de conhecimento matemático em crianças, adolescentes, adultos e professores, abarcando os diversos conceitos presentes nos currículos escolares, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior.

Dentre as diversas investigações realizadas, destaca-se a análise do desenvolvimento desses indivíduos no que diz respeito aos conceitos matemáticos fundamentais (Placha, 2006). A Educação Matemática, como um campo de pesquisa educacional, tem como foco a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem da matemática em diferentes níveis de escolaridade, abrangendo tanto sua dimensão teórica quanto prática. D’Ambrósio (1996, p. 7) considera a disciplina de Matemática “como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, entender, manejar e conviver com a realidade sensível e perceptível, com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural”.

A consolidação da Educação Matemática como uma área de pesquisa é relativamente recente, considerando a longa história da Matemática em si. Nas últimas décadas, houve um grande impulso no desenvolvimento dessa área, resultando em várias tendências teóricas que valorizam diferentes temas educacionais no ensino da Matemática. No contexto brasileiro, uma das tendências que se destaca é a Didática da Matemática, que possui uma forte influência de autores franceses (Pais, 2018).

A Matemática está correlacionada a vários aspectos encontrados no cotidiano do aluno e do professor, tal como uma notícia que assistimos no noticiário e até o ponto simples de comparar preços nos supermercados. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) indicam como um dos objetivos do ensino fundamental que os alunos sejam capazes de “posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas” e fazer “o uso de diferentes linguagens, seja ela verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal, como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação” (Brasil, 1997, p. 107).

O uso da didática para a disciplina está relacionado à inquietação de como ensinar matemática, em específico conceitos de Análise Combinatória, para que o estudante aprenda mais e melhor. Tendo em vista o ambiente acadêmico, como fazer da sala de aula um ambiente onde os estudantes tenham a possibilidade de desenvolver de forma autônoma suas capacidades e habilidades cognitivas?

Uma dificuldade encontrada no ensino de Análise Combinatória se dá pelo pouco tempo disponível para abordar todos os assuntos referentes à disciplina, levando-se em conta sua extensão teórica. Assim, de acordo com Miotto (2014, p. 9), “Tempo não mais disponível, visto que a grande quantidade de assuntos requisitados impossibilita que o professor de matemática se atenha por um longo período sobre um mesmo conceito”. Isso faz com que os conceitos sejam vistos de modo superficial. Um modelo baseado em um ensino mecânico não favorece a construção de conhecimentos por parte dos alunos nem o diálogo entre os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

A falta de espaço autônomo para a articulação e argumentação, quando não são desenvolvidas e estimuladas dentro de um ambiente de aprendizagem onde o professor assume um papel de mediador e não transmissor, pode ser um motivo pelo qual os alunos têm dificuldade de se expressar oralmente em aulas de matemática, pois têm medo de errarem e serem vítimas de constrangimentos (Moçambite, 2016). Outro ponto relevante a ser mencionado é a dificuldade na efetivação do ensino de matemática como insegurança dos professores, o que pode ser vista como a principal causalidade para a consolidação de matérias e estudo no âmbito educacional, levando ao ensino memorístico e automatizado. Batanero (2001) afirma que é natural o lecionador obter certas inseguranças para preparar e ensinar, assim o evitam, por insuficiência de compreender os conceitos e pela deficiência de sua formação docente.

Segundo Freire (2018), essa concepção de ensino se caracteriza em um modelo de educação bancária, no qual o poder de criatividade dos educandos é anulado ou é minimizado, estimulando-se sua passividade e não sua criticidade, satisfazendo os interesses dos opressores. Dessa forma, o professor monologa, falando e escrevendo repetidamente, por vezes a mesma coisa, quase sempre de um mesmo jeito, e o estudante assiste, passivamente, ouve passivamente, decora e repete as informações, sem questioná-las. Assim, estudar é memorizar conteúdos, sem significados.

Souza e Vaz (2017) chamam a atenção para a alfabetização estatística desde as séries iniciais como uma forma de minimizar dificuldades de aprendizagem em séries futuras, contribuindo para a formação crítica e participativa na sociedade e auxiliando na construção de conhecimentos e conceitos. Os autores chamam atenção para o letramento, que é definido como uma ferramenta que valoriza a análise crítica quando decorrem os processos educativos, ampliando os conhecimentos a partir de análises e dados sentindo as suas compreensões e dando uma possibilidade para atuar com as situações vividas (Souza 2020).

Dentro desse contexto, surgem metodologias de ensino, como a Teoria das Situações Didáticas (TSD), as Metodologias Ativas de Aprendizagem e as Sequências Didáticas, que podem atuar como facilitadores no processo de construção dos conhecimentos matemáticos. Ao aplicar a TSD ao ensino de Análise Combinatória, os professores podem criar situações didáticas que permitam aos alunos explorarem conceitos combinatórios em contextos reais e significativos. Isso pode envolver a utilização de dados do mundo real, a realização de pesquisas e experimentos e a análise crítica de informações divulgadas na sociedade. A TSD também enfatiza a importância da participação ativa do aluno no processo de aprendizagem. Isso pode incluir a realização de atividades em grupo, a discussão e análise de diferentes abordagens para resolver um problema de situações que exijam conceitos de combinatória e o uso de tecnologias educacionais para envolver os alunos em atividades interativas.

A variedade de teorias e suas características distintas evidenciam a dificuldade de uma única teoria abranger todos os fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem da matemática. A presença de teorias diversas e complementares é fundamental para desenvolver conceitos sólidos que possam capturar de maneira abrangente a realidade em estudo. A aplicação das sequências didáticas para a construção de conhecimentos matemáticos se dá por meio de atividades com situações problemas, para que se tenha o aperfeiçoamento da aprendizagem da Matemática e conceitos de Análise Combinatória. As sequências didáticas competem fundamentalmente em inovar os métodos de aprimoramento na aprendizagem em alunos, rompendo com um modelo de ensino tradicional, onde a memorização de fórmulas é priorizada em detrimento de um raciocínio criativo.

3.3.1 Sequência Didática

A metodologia de uma sequência didática é projetada para facilitar a conexão do estudante com o material de estudo por meio de um processo ordenado, permitindo que o aprendizado se desenvolva progressivamente em fases distintas. Zabala (2015, p. 18) descreve uma sequência didática como sendo um "Conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.

Para Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, p. 97), "uma Sequência Didática é um conjunto de atividades escolares organizadas sistematicamente em torno de um gênero oral ou textual escrito". Os autores defendem que ela é composta por fases distintas, a saber: 1) Uma apresentação da situação, em que é descrita detalhadamente a tarefa de expressão oral ou escrita que os alunos terão de realizar; 2) "Um primeiro texto inicial, oral ou escrito, que corresponda ao gênero trabalhado ou primeira produção; 3) "Um conjunto de módulos, compostos por um ou diversas atividades/exercícios em que os problemas colocados pelo género são abordados de forma sistemática e profunda"; e, por fim, 4) "Uma produção final, em que o aluno poderá colocar em prática os conhecimentos adquiridos e, junto com o professor, mensurar os avanços alcançados".

Zabala (2015, p. 55) também descreve as quatro fases de aplicação de uma sequência didática, a saber: "comunicação da lição, estudo individual do conteúdo, repetição do conteúdo estudado e avaliação ou nota do professor". Franco (2018, p. 156) afirma que "A sequência didática tem como finalidade organizar e orientar o processo de ensino". Isso corrobora o que Zabala nos traz quando menciona que "toda prática pedagógica requer uma organização metodológica antes de sua execução”. Portanto, compreende-se que é possível estruturar temas e conteúdos básicos e essenciais em uma sequência didática bem relacionada antes de introduzir conceitos mais avançados.

Isso envolve dar prioridade a uma ordem lógica de conteúdos que promove o entendimento do estudante, visto que o aprendizado se desenrola em uma sequência completa de atividades que progridem de forma gradual, favorecendo um entendimento mais aprofundado dos tópicos pelos alunos. Uma sequência didática bem estruturada pode favorecer um encadeamento de grandes temas correlatos, evidenciando a ligação que existe entre as grandes áreas de uma disciplina ou mesmo dentro de um contexto mais abrangente, abarcando diversas áreas do saber.

No trabalho de Groenwald, Zoch e Homa (2009) foi implementada uma abordagem de *e-learning* baseada no conteúdo de Análise Combinatória, seguindo o padrão SCORM (*Sharable Content Object Reference Model*), além de realizar a aplicação dessa metodologia por meio de uma sequência didática. Esse processo educativo foi experimentado com nove estudantes do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). No estudo de Silva e Guerra (2017), que aplicaram uma Sequência Didática com 20 alunos do Ensino Médio, em um diagnóstico prévio os resultados mostraram que os discentes deixaram quase todas as questões em branco e aqueles que responderam ainda assim não acertaram.

Tavares e Bogutchi (2019), em uma pesquisa-ação, desenvolveram uma Sequência Didática com um grupo de quatro alunos do curso de Sistemas de Informação da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) para a criação de um aplicativo para *Android*, no formato de um jogo. Marques e Barbosa (2021) elaboraram uma Sequência Didática utilizando Metodologias Ativas, como o Ensino Híbrido – Sala de Aula Invertida, e incorporando Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória para 16 alunos do 2º ano do Ensino Médio do município de Casimiro de Abreu-RJ.

Esses são alguns estudos que destacam a relevância e o impacto positivo das sequências didáticas em diferentes graus de ensino, oferecendo suporte essencial aos docentes no planejamento e na implementação de aulas que sejam não apenas mais envolventes e estimulantes, mas também inspiradoras. Ao adotarem essas estratégias, os professores conseguem superar o modelo tradicional de ensino, marcado pela simples exposição de conteúdos que não se conectam com a vida dos alunos seguida de exercícios focados em memorização. Essa abordagem renovada facilita a criação de um ambiente de aprendizado dinâmico, onde o conhecimento é construído de maneira mais significativa e integrada ao dia a dia dos estudantes.

3.3.2 Didática da Matemática

O movimento da matemática moderna levou os pesquisadores franceses, entre outros, a se interessarem pelo estudo e pela investigação de problemas relativos ao ensino e aprendizagem da matemática, bem como propor ações fundamentadas para resolvê-los. De acordo com Brousseau *et al.* (1986), a definição atribuída por Comenius à didática era a de "arte de instruir". Comenius considerava-a como um método singular, abrangente para todas as disciplinas, um método intrinsecamente natural que se aplicaria com igual eficácia tanto às artes quanto às línguas. Quaisquer variações seriam consideradas minimamente relevantes, não demandando métodos especializados. Assim, para Brousseau *et al.* (1986, p. 39):

> A Didática da Matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

A Didática da Matemática, surgida na França a partir dos anos 1970, em um contexto marcado pela reforma da Matemática Moderna, pela criação do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática (IREM) e pelo reconhecimento das teorias psicológicas de Piaget sobre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição de conceitos fundamentais, concentrou-se, primeiramente, nos desafios do ensino de conceitos matemáticos, levando em consideração as particularidades do conhecimento matemático.

Para Texeira e Passos (2013), pode-se complementar que a Didática da Matemática seria, também, a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um saber matemático por parte de um indivíduo. Segundo Pais (2018), a Didática da Matemática se destaca por sua ênfase na formalização conceitual de suas concepções práticas e teóricas, dando prioridade ao estudo da didática por meio de conceitos matemáticos. De acordo com Pais (2018), em uma definição específica para o contexto brasileiro, a Didática da Matemática é conceituada como:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (Pais, 2018, p. 11).

Os progressos das investigações em Didática da Matemática deram forma à ideia de estabelecer uma disciplina científica dedicada ao estudo dos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. De acordo com Placha e Moro (2009), o desafio central do ensino da Matemática reside na correspondência entre as estruturas cognitivas da criança e o método adotado pelo professor para ensinar os conceitos. Segundo essa perspectiva, é fundamental que o professor intervenha em sala de aula, promovendo a reflexão e a descoberta de noções, relações e propriedades matemáticas, proporcionando aos alunos uma evolução em sua compreensão dos conceitos abordados. Segundo Almouloud (2018, p. 148):

> A Didática da Matemática é definida como sendo a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mas especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, quanto do tipo de aprendizagem que elas possibilitam (Almouloud, 2018).

A diversidade de teorias, cada uma com suas características únicas e por vezes complementares, reforça o desafio de encontrar uma teoria ou modelo que consiga englobar e esclarecer todos os aspectos dos processos de ensino e aprendizagem em matemática. Apenas através da integração de diversas teorias complementares é que podemos formular conceitos robustos, com o objetivo de compreender a complexidade da realidade estudada de maneira abrangente.

4 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Nesta seção, apresentaremos o desenho de estudo de nossa pesquisa, nosso referencial teórico, nosso referencial metodológico, o conceito de contrato didático proposto por Brousseau, (2008) e os níveis de raciocínio combinatório descritos por Moro e Soares, (2006).

4.1 Desenho de estudo

Realizamos uma pesquisa qualitativa, pois na análise consideramos elementos dinâmicos e subjetivos a partir das concepções dos alunos nas atividades com anagramas e Análise Combinatória, visando aprofundar a compreensão do fenômeno. Segundo Teis e Teis, (2006), esse tipo de abordagem firmou-se como promissora possibilidade de investigação em pesquisas na área da educação, sendo caracterizada pelo seu enfoque interpretativo.

A pesquisa qualitativa concentra-se na compreensão e explicação das relações sociais, caracterizado em pesquisas pela descrição de aspectos como participação, comportamento, identificação de dificuldades e melhoria da aprendizagem dos alunos. Na educação matemática, essa abordagem permite explorar profundamente como os alunos compreendem conceitos matemáticos, quais são as suas dificuldades e quais estratégias utilizam para resolver problemas. Em relação ao uso de técnicas qualitativas com análises quantitativas, Oliveira (2011, p. 29), menciona que "adotar a prática de combinar técnicas de análise quantitativa com técnicas de análise qualitativa proporciona maior nível de credibilidade e validade aos resultados da pesquisa evitando-se assim, o reducionismo por uma só opção de análise".

Além disso, a pesquisa qualitativa na educação matemática contribui para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais eficazes e inclusivas. Ao compreender as experiências dos alunos em suas próprias palavras, os educadores podem identificar barreiras específicas que dificultam a aprendizagem e adaptar suas metodologias de ensino para melhor atender às necessidades de todos os estudantes. Isso é particularmente importante em contextos diversificados, onde as abordagens tradicionais podem não ser eficazes para todos.

Para alcançar esse objetivo, foram realizadas pesquisas bibliográficas, por meio da análise crítica de trabalhos acadêmicos e publicações relevantes na área, bem como pesquisas de campo, com a coleta de dados diretamente no ambiente onde o fenômeno ocorre. De acordo com Silva, (2019, p. 26):

> A pesquisa empírica, também conhecida como pesquisa de campo, envolve a comprovação prática de determinados aspectos por meio de experimentos ou

> observações em contextos específicos para a coleta de dados. Na relação com a teoria, a pesquisa de campo serve para fundamentar e validar no plano da experiência os conceitos apresentados teoricamente. Em outros casos, a observação e experimentação empíricas fornecem dados que contribuem para a sistematização da teoria. Dessa forma, a pesquisa empírica é essencial para a validação e comprovação das teorias.

A combinação dessas abordagens permitiu uma análise aprofundada e embasada, contribuindo para o avanço do conhecimento na área de estudo. A escolha por esse tipo de abordagem se justifica pela necessidade de capturar as diferenças e subjetividades presentes nas experiências individuais dos alunos. Este método nos permite explorar mais a fundo as percepções, dificuldades e estratégias utilizadas pelos alunos durante o processo de aprendizagem.

4.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

O referencial teórico utilizado nesta pesquisa é a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1996, 2008). Essa metodologia tem como objetivo entender as correlações existentes para com professores, alunos e o meio onde ocorre o aprendizado, neste caso, a sala de aula.

A Teoria das Situações Didáticas representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e conhecimento matemático. A proposta implantada na França na década de 1960 desenvolvia a formação de professores no intuito de produzir, por meio de materiais, como textos e jogos, exercícios capazes de controlar e produzir conhecimento.

Nesse sentido, essa teoria valoriza o trabalho do professor que busca proporcionar condições suficientes para que o aluno apreenda um determinado conteúdo matemático, e, por outro lado, reconhece os conhecimentos mobilizados pelo aluno no decorrer da construção do saber matemático em jogo. A teoria de Brousseau (2008) tem como objetivo executar a entrega de conhecimento por etapas cognitivas, um processo de aprendizagem para centrar o ensino especificamente em processos matemáticos. Por essa concepção, a metodologia oferece métodos de ceder explicações, conceitos por previsões e análises de resultados comportamentais dos alunos.

Assim, o professor, na tentativa de buscar organizar o meio, proporciona a participação do aluno. Para Freitas (2008, p. 79), “o meio é onde ocorrem as interações do sujeito [...]. É no meio que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos”.

Brousseau (2008) descreve que a reflexão entre os ensinos educacionais deveria proporcionar uma ampla investigação para que os conhecimentos matemáticos pudessem se vincular a um determinado conhecimento e fortalecessem em construção e consolidação, de modo que sua construção determine as mudanças resultantes do contato com a pesquisa e se consolide através de uma adaptação independente.

Quando, na ação do professor, ao propor uma situação ficar caracterizada uma intenção de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo, tem-se uma situação didática (Freitas, 2008). Brousseau *et al.* (1986) caracteriza uma situação didática como um conjunto de relações estabelecidas entre um aluno, em um determinado meio, e o professor com a finalidade de proporcionar a esse aluno a construção do saber. Silva (2008) menciona que o aluno deve se relacionar com o problema, desafiando-o a solucioná-lo.

O professor deve proporcionar não a simples comunicação de um conhecimento moldado, mas a devolução de um bom problema. Para Freitas (2008, p. 83), na devolução o aluno aceita a responsabilidade de resolver o problema, como se fosse dele e não somente porque o professor quer. Nesse caso, na devolução há um processo de transferência de responsabilidades e o professor passa a ser um coadjuvante. A partir desse momento fica caracterizada a situação didática.

Na teoria de Brousseau (2008), o aluno é tratado como pesquisador, pois o mesmo formula hipóteses, constrói modelos, estabelece teorias e faz comparações. Esse é o ponto-chave em que o aluno participa ativamente no seu próprio processo de aprendizagem.

A Teoria das Situações Didáticas divide-se em quatro vertentes norteadoras: ação, formulação, validação e institucionalização. Segundo Brousseau (2008), a situação de ação se baseia nas tomadas de decisões por parte dos alunos, onde são postos todos os saberes em prática com a finalidade de solucionar os problemas sugeridos, sem a intervenção do professor. O discente é colocado numa situação chamada de ação, permitindo-o julgar os seus resultados de ação ou até mesmo ajustá-los quando necessário.

Na argumentativa da formulação, conforme Brousseau (2008), o aluno troca informações com um ou mais indivíduos. É nessa vertente que todo o conhecimento interno é modificado em externo, e neste momento que as táticas usadas são explanadas. Na dialética da validação, o aluno deve utilizar mecanismos de prova, é onde o saber é usado com a finalidade de que o aluno deve mostrar a validade de um modelo criado pelo mesmo em conforme com a mensagem matemática. E, por fim, a dialética da institucionalização se baseia na validação da atitude matemática dos alunos, a qual visa a fixação convencional e explícita na referência do estatuto cognitivo do saber. Para Brousseau (2008, p. 102-103):

> A institucionalização acontece tanto em uma situação de ação – quando se reconhece o valor de um procedimento que se tornará um meio de referência – como em uma formulação […]. Nas situações de prova também: deve-se identificar, dentre as propriedades encontradas, quais serão mantidas.

Na Teoria das Situações Didáticas, o errar não deixa de fazer parte do conhecimento do aluno e não deve incumbir ao docente avaliar negativamente o aluno diante das situações errôneas. Nessa teoria, gera-se uma visão totalmente inovada sobre a ideia errônea que passou a ser compreendida como um percalço e parte da busca pela aquisição do saber. O saber prévio oferece um suporte para novos assuntos.

Cabe ao professor providenciar situações favoráveis de modo que o aluno aja efetivamente sobre o saber, transformando-o em conhecimento, assim tendo o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer (Freitas, 2008).

4.3 Engenharia Didática (ED)

A metodologia de validação adotada na presente pesquisa é a Engenharia Didática (ED) por ser apropriada e focada diretamente ao ensino de matemática. De acordo com Artigue (2002), a Engenharia Didática é uma abordagem didática inovadora que se fundamenta em experiências práticas realizadas em sala de aula, permitindo uma observação adequada das sequências de ensino. A ideia de Engenharia Didática surgiu no início da década de 1980 e, segundo Artigue (1996, p. 193), esse termo foi "cunhado para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro [...]", pois requer do pesquisador um rigor científico.

A Engenharia Didática tem como foco o sistema didático (professor-aluno-conhecimento) e é caracterizada por pesquisas experimentais em que o aluno possa apreender um elemento novo de um conteúdo, ou simplesmente um conteúdo novo. Tem como aporte, para essa aprendizagem, a teoria das situações didáticas de Brousseau *et al.* (1986).

A Engenharia Didática é específica para adquirir sequências capazes de se adequar a qualquer pesquisa de ensino, criada para atender questões como pesquisa investigativa no ensino e realizações didáticas. Dessa forma, ela é a metodologia desenvolvida no contexto das pesquisas em Didática da Matemática que utilizavam sequências de ensino. É um esquema estrutural para a elaboração, desenvolvimento e análise de sequências de ensino.

As fases da Engenharia Didática consistem em analisar a pesquisa antecipadamente para formular e articular passos para se adaptar às possíveis intervenções e obstáculos, sendo a prévia responsável de analisar o funcionamento do ensino habitual e inclui a análise prévia de dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas.

A análise preliminar é o entendimento e a realização das sequências das atividades impostas pela pesquisa, sendo descritas e, posteriormente, justificadas as decisões visualizadas pelo pesquisador desde a abordagem aos recursos e as hipóteses dos resultados possíveis. Nessa fase foi realizado um levantamento que abrangeu todo o estudo do objeto matemático, incluindo considerações do quadro teórico didático geral. Pais (2018) destaca que:

> Para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo (Pais, 2018, p. 101).

De acordo com Artigue (1996), faz-se uma análise epistemológica dos conteúdos contemplados sobre o assunto da Educação Matemática que vem sendo desenvolvido pelo ensino atual do referido assunto e uma análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que dificultam o processo de ensino e aprendizagem dentro do contexto matemático.

É na realização de uma análise preliminar seguida de uma análise *a priori* que o professor pode visualizar as opções da sequência didática elaborada, a qual será o motivo da investigação. Na segunda fase, concepção e análise *a priori*, o pesquisador escolhe certo número de variáveis pertinentes para o problema estudado. Essas variáveis são chamadas de variáveis de comando. Artigue (1996) distingue dois tipos de variáveis de comando:

> As variáveis macro-didácticas ou globais, que dizem respeito à organização global da engenharia; E as variáveis micro-didácticas ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase (Artigue, 1996, p. 202).

A terceira fase consiste na aplicação da sequência didática incorporada pela pesquisa, onde o professor emboça seu saber teórico. Nessa fase, a abordagem é desenvolvida através de uma metodologia que intensifique o privilégio de reflexão e a construção de um saber consciente e indagador.

A construção de uma sequência didática necessita de uma preparação, conforme aponta Pais (2018, p. 102):

> Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório.

Artigue (1996) relata que na fase experimental da sequência didática se torna necessário deixar sucinto os seguintes pontos: explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa; estabelecimento do contrato didático; aplicação dos instrumentos de pesquisa; e registros das observações feitas durante a experimentação.

Portanto, aos professores compete a responsabilidade e o posicionamento assumido perante o objeto de ensino, elaborando abordagens metodológicas que designem os princípios acima expostos.

A última fase de análise, *a posteriori*, e validação da experiência adquirida, é a conclusão da pesquisa, determinando as hipóteses válidas e as que não foram validadas. A fase da metodologia da Engenharia Didática incorpora análises sucintas que se dão pela comparação de cada uma, submetidas aos planos de ações que acontecem nas primeiras fases e assim validando.

Portanto, com o conhecimento concebido nas fases da engenharia didática é possível visualizar uma abordagem metodológica inovadora às práticas educativas desenvolvidas em sala de aula, em vista que se deve considerar a própria prática de ensino como objeto de investigação, propondo mudanças à medida que os resultados observados são alcançados.

4.4 Contrato Didático

O conceito de contrato didático desempenha um papel fundamental na Teoria das Situações Didáticas (TSD), sendo um dos elementos-chave na análise e criação de situações de ensino e aprendizagem em matemática. Segundo Brousseau (2008, p. 9):

> Numa situação de ensino preparada e realizada pelo professor, o aluno em geral tem a tarefa de resolver o problema que lhe é apresentado, por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências impostas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo aluno, e os comportamentos deste, esperados pelo professor, constituem o Contrato Didático.

Ao considerar que a descrição didática se manifesta no método de ensino, podemos observar que é por meio dessa manifestação que o professor assume a responsabilidade de organizar e implementar situações de ensino, visando incentivar seus alunos a adotarem uma postura de aprendizagem diante dos problemas matemáticos propostos.

4.5 Níveis de raciocínio combinatório

Nesta seção, exploramos os conceitos e os diferentes níveis de desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos de diferentes níveis de escolaridade. Com base em Moro e Soares (2006), Moro, Soares e Camarinha Filho (2010), Placha e Moro (2009), Magina e Spinillo (2018), Borba, Rocha e Azevedo (2015), Pereira e Curi (2016), Pessoa e Santos (2012), Lima e Borba (2019), Barbosa e Oliveira (2018) e Rocha (2011), buscamos identificar as etapas progressivas de construção desse tipo de raciocínio, desde sua formação inicial até sua organização lógico-formal. Assim, pode-se traçar e identificar níveis de raciocínios combinatórios.

A complexidade do Raciocínio Combinatório, uma forma particular de pensamento exigida na matemática escolar, muitas vezes é um obstáculo para os alunos. O Raciocínio Combinatório pode ser descrito como uma forma de pensamento utilizada para analisar situações em que é necessário agrupar elementos de conjuntos de acordo com critérios específicos de escolha e/ou ordenação. A partir dessa análise, é possível determinar o número total de agrupamentos possíveis, seja de forma direta ou indireta. Essa definição é proposta por Pessoa e Borba (2010) e destaca a importância desse tipo de raciocínio em diversas áreas do conhecimento.

O trabalho de Moro e Soares (2006) foi realizado para responder a questão sobre a possibilidade de se verificar como ocorre a construção do raciocínio combinatório quando da solução de problemas multiplicativos de produto cartesiano na escola fundamental. Como hipótese em exame, consideraram que podem ser identificados e descritos diferentes níveis da construção inicial daquele modo de raciocínio, em direção à sua organização lógico-formal, quando alunos, mesmos os das séries iniciais, 3ª e 4ª séries, solucionam problemas matemáticos do tipo produto cartesiano.

Apoiados em trabalhos de Jean Piaget e colaboradores, os autores veem importantes contribuições sobre a construção inicial e progressiva do raciocínio combinatório já em crianças pequenas, com alterações expressivas lógico-formais durante a adolescência. Segundo eles, há diversos estudos indicando que crianças, nas séries iniciais da educação básica, são capazes de iniciar a compreensão de conceitos e relações multiplicativas relativamente complexas, como as de razão, proporção e função, e que pertencem, também, ao campo conceitual das estruturas multiplicativas. São resultados que falam a favor da probabilidade de que uma construção afiliada, como a do raciocínio combinatório, também possa ocorrer quando se trata de organizar conteúdo de campos diversos de aprendizagem na escola fundamental.

Os autores relatam que há poucos estudos que tratam do raciocínio combinatório entre variáveis e seus valores. Menos frequentes ainda são os que examinam essa forma de raciocínio na solução de problemas multiplicativos, os de produto cartesiano. Assim, segundo os autores, identificar e descrever as estratégias de solução desses problemas pelos alunos é um caminho para estimular sua presença nas propostas dos professores. Deste modo:

> E, no terreno da aprendizagem escolar da matemática, é interessante conhecer a progressão do raciocínio combinatório do aluno da escola elementar que, provavelmente, venha a ser revelada e/ou estimulada pela solução de tal gênero de problemas. Desse tipo de resultado será possível inferir formas de intervenção do professor para ativar a elaboração de conceitos e relações matemáticas pertinentes e seus organizadores subjacentes (Moro; Soares, 2006, p. 107).

O estudo contou com 50 alunos de uma escola da rede pública municipal e foram apresentados quatro problemas de produto cartesiano. Foi destacado que poderiam responder utilizando diferentes formas de expressar a solução, como exemplo: desenhos, escritas numéricas e alfabéticas, gráficos, entre outras que julgassem necessárias. O principal procedimento de análise dos dados foi de ordem qualitativa e compreendeu a descrição interpretativa do conteúdo das soluções dos sujeitos a cada um dos problemas, segundo o que este conteúdo estaria revelando sobre a significação combinatória da solução. Essa análise foi efetuada de acordo com três momentos:

> a) da primeira descrição das principais características de cada solução; b) de uma segunda descrição, de depuração daquelas características nos diversos casos em que se faziam presentes, verificando seus traços e significados comuns com base na conjunção dos eixos de critérios acima referidos, para obter níveis e/ou subníveis prováveis de elaboração do raciocínio combinatório; c) de uma terceira descrição, a revisão dos níveis (subníveis) obtidos em b), para verificar a validade das descrições obtidas e da provável hierarquia ali presente (Moro; Soares, 2006, p. 110).

A seguir estão descritos os níveis e subníveis de raciocínio combinatório obtidos da análise das soluções de todos os sujeitos de 3ª e 4ª séries aos quatro problemas de produto cartesiano resolvidos.

Nível 0 – De resposta alheia ao contexto:

Consiste em solução não numérica, sem relação com o que pede o problema, e sem referências às variáveis.

Nível I – De resposta contextualizada sem indício de combinação:

Subnível IA - Da escolha de variáveis, consistindo de soluções que contêm escolhas relativas a uma ou mais variáveis, sem qualquer combinação entre elas;

Subnível IB - Da adição de valores, consistindo em soluções que se limitam ao cálculo aditivo (mental ou não) de alguns ou de todos os valores envolvidos, seguindo ou não sua ordem de aparecimento e incluindo ou não os distractores;

Subnível IC - Das composições numéricas em diferentes formas de cálculos, quando há emprego de algoritmo escolar de composição numérica em contexto ao qual ele não se aplica. São obtidas uma ou mais composições numéricas (com ou sem desenho ilustrativo) com os valores das variáveis (e/ou com os distractores) entre si combinados. São efetuados cálculos diversos (aditivos, multiplicativos) na aparente busca de "muitas maneiras".

Nível II – Das primeiras aproximações à solução combinatória:

Subnível IIA – Do caso favorito, quando é representada uma, e somente uma, possibilidade de combinação entre as variáveis (um e somente um valor de cada uma delas). Seria a combinação escolhida por razão estética ou por adequação de uso. Quando presentes, os valores distractores são também considerados;

Subnível IIB – Dos casos favoritos conforme valor distractor ou de variável estranha, quando há a representação de alguns casos de combinação das variáveis, envolvendo um ou mais valores, inclusive distractores e variáveis não presentes no problema, e que não se excluem quando os valores são pequenos. Para valores maiores, a cada valor de uma variável corresponde somente um valor da outra, por vezes ainda conforme critério de uso adequado, e com forte marca da correspondência termo a termo como organizador;

Subnível IIC – Dos casos favoritos ignorados os distractores, em que as soluções representam número limitado de casos de combinação das variáveis, cujos valores aparecem emparelhados, sem que os distractores interfiram na solução, por vezes ainda conforme critério de uso adequado. Há também forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador.

Nível III – Da obtenção de algumas combinações:

Subnível IIIA – Das buscas iniciais de combinações, "distorcidas" pelos "distractores", abrangendo soluções em que estão representadas muitas combinações entre os valores das variáveis, mas regidas pelos valores distractores. Essas combinações são obtidas ou apenas com cálculo aditivo ou mesclando tais cálculos com os multiplicativos, na aparente busca de "muitas maneiras";

Subnível IIIB – Das aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão, consistindo na busca de um certo número de combinações obtidas mediante diferentes junções e complementações de cálculos variados entre alguns e/ou todos os valores das variáveis envolvidas, repetidos ou não, bem como entre resultados desses cálculos, complementados por valores unitários do texto do problema;

Subnível IIIC – Das muitas combinações aditivo-multiplicativas com três variáveis, consistindo de número limitado de combinações entre os valores envolvidos, obtidas de diferentes "junções" aditivo-multiplicativas na busca da resposta final em termos de "muitos casos". Por vezes, há também a representação por diagrama com recursos pictóricos, quando aparece a dificuldade em representar os valores das três variáveis.

Nível IV – Da presença de solução combinatória: quando estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer em representação pelo diagrama cartesiano, quer por cálculo multiplicativo canônico.

Apesar de seu caráter exploratório e com os limites metodológicos que apresenta, o estudo ora reportado permitiu a identificação e a descrição de níveis e subníveis de soluções aos problemas de produto cartesiano focalizados em uma hierarquia que vai de soluções não pertinentes e/ou pertinentes ao problema, sem sinal de raciocínio combinatório, até aquelas em que sinais desse raciocínio aparecem.

O estudo de Moro, Soares e Camarinha Filho (2010) trata da construção do raciocínio combinatório tal como presente na solução de quatro problemas multiplicativos de produto cartesiano por alunos de 3ª a 6ª série da escola fundamental. É examinada a hipótese de que se pode identificar a psicogênese daquele tipo de raciocínio em direção à sua formalização, quando são solucionados, na escola, problemas matemáticos de produto cartesiano. Também foi verificada a ocorrência de relação entre os níveis identificados, a escolaridade e o tipo de problema resolvido, na expectativa de que, quanto mais avançada a escolaridade, soluções de níveis mais avançados tendam a ocorrer.

Como tal, além de verificar como se constrói o raciocínio combinatório, visou também examinar a validade e a fidedignidade dos resultados obtidos em trabalhos anteriores (Moro; Soares, 2006) que descreveram diferentes níveis hierárquicos de raciocínio combinatório, a partir da análise das soluções aos mesmos quatro problemas. O estudo foi conduzido em duas escolas públicas de uma extensa região metropolitana, selecionadas por conveniência devido à disponibilidade em receber os pesquisadores. Uma escola atendia alunos da 1ª a 4ª série, enquanto a outra atendia alunos da 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental. Participaram do estudo 110 alunos de ambos os sexos. Os alunos incluídos foram os presentes em cada turma que concordaram em participar da pesquisa. A seleção de uma turma por série também foi baseada na conveniência, considerando a disponibilidade dos professores em ceder suas turmas para a coleta dos dados.

Para a análise dos dados foram escolhidos procedimentos de ordem qualitativa e de ordem quantitativa. A análise qualitativa focalizou o conteúdo das soluções dos participantes a cada um dos problemas, centrando-se no que esse conteúdo pode revelar do raciocínio combinatório ali envolvido. Os critérios empregados organizaram-se em três eixos principais, a saber: presença de limites de interpretação, pelos sujeitos, das relações entre elementos do texto dos problemas; presença de um ou mais casos de combinação de valores das variáveis; e presença de cálculo relacional aditivo e/ou multiplicativo.

Em resumo, este estudo adota os mesmos eixos utilizados em estudos anteriores, porém, com uma diferença significativa: a definição do eixo relativo à interpretação das relações entre os elementos textuais do problema. A análise foi conduzida em dois momentos principais:

a) Revisão comparativa das características descritivas de cada grupo de soluções das duas hierarquias (3ª e 4ª séries e 5ª e 6ª séries), considerando critérios revisados para identificar traços e significados comuns;

b) Nova descrição dos níveis (e subníveis) com revisões repetidas para adaptar e redefinir os níveis em resposta à redefinição dos critérios, assegurando a validade das descrições obtidas e possíveis hierarquias presentes.

A análise quantitativa foi realizada utilizando testes estatísticos não paramétricos, como análise de variância e coeficiente de correlação de Spearman, aplicados às frequências das soluções agrupadas por níveis identificados. O objetivo foi verificar a relação entre esses níveis de solução, o nível de escolaridade (séries escolares) e o tipo de problema resolvido. Através da análise qualitativa das soluções dos quatro problemas aplicados, foram descritos os níveis e subníveis de elaboração do raciocínio combinatório. A seguir está a descrição dos níveis e subníveis identificados.

Nível I - De ausência de solução combinatória:

São soluções que se caracterizam por revelar limites maiores ou menores da interpretação sobre o que é informado e solicitado no texto do problema. Tais limites, quando acentuados, denotam atenção quase exclusiva aos algarismos do texto. Resultam, então, em composições numéricas por justaposição desses algarismos e em cálculos aritméticos variados com os números assim obtidos e com os contidos no texto, na tentativa de dar alguma resposta numérica ao problema.

Outra forma de manifestação dos limites mencionados é apelar, na busca de solução, para critérios relacionados ao uso social, o que denota certo desvio do contexto específico da matemática escolar em que os problemas apresentados se situam, mas em que há alguma atenção ao conteúdo do texto, não somente aos algarismos. Eis os subníveis identificados:

Subnível IA: da obtenção de resultado por um cálculo qualquer:

São soluções que se caracterizam pela aparente busca de algum resultado numérico, mediante justaposição de algarismos do texto ou pela execução (com cálculo mental ou não) de quaisquer das operações aritméticas com os valores das variáveis, dos distractores e/ou outros, por vezes resultantes das próprias operações (em ordem variada, de uma a quatro operações, repetindo-se exclusivamente ou não).

Subnível IB: da evocação de elementos do problema em contextos não matemáticos:

São soluções com desenho ou escrita alfabética. Referem-se (com cópia ou não) à pergunta ou ao texto do problema, às variáveis e/ou aos seus valores (sobretudo os distractores). Pautam-se pela interpretação do conteúdo do problema conforme o significado sociocultural das variáveis, mas sem combinação entre elas.

Nível II - Dos primeiros indícios de relações para soluções combinatórias:

A característica que distingue as soluções (predominantemente pictóricas) desse nível daquelas do anterior é o progressivo aparecimento de relações de correspondência termo a termo entre valores unitários das variáveis, todas elas ou alguma delas, como também entre partes dos valores de uma das variáveis com partes dos das outras. A marca de tais relações é ainda aditiva. Por vezes, fazem-se presentes, complementares às soluções, cálculos aritméticos envolvendo tanto valores numéricos do texto (incluídos os distractores) quanto valores numéricos estranhos ao texto. Segue a descrição dos subníveis identificados:

Subnível IIA: dos emparelhamentos parciais entre variáveis e seus valores:

A termo: (a) entre valor unitário de uma das variáveis ao valor da outra; ou (b) entre partes do valor de uma delas ao valor das outras. Seguem, respectivamente, cálculos aditivos, multiplicativos e subtrativos, envolvendo, de diferentes formas, as variáveis, considerados os distractores ou suas partes decompostas.

Subnível IIB: das composições aditivas restritas à variável única ou estranha:

Apesar do registro da resposta correta à pergunta, a solução representa composições aditivas (que se esgotam), não dos valores das duas variáveis do texto, mas dos dois valores de uma delas com um valor constante relativo à mesma variável. Essa não consta no texto, mas refere-se à característica do objeto ali evocado. Logo, está presente apenas a relação de composição (aditiva) dos valores de uma das variáveis.

Subnível IIC: do caso favorito:

São soluções que representam um caso apenas de relação entre as variáveis, e que colocam em correspondência termo a termo um – e somente um – valor de cada uma delas. Seria uma combinação escolhida por razão estética ou por adequação de uso. Quando presentes, os valores distractores são também considerados.

Subnível IID: dos casos favoritos:

São soluções (sobretudo pictóricas ou diagramáticas) que consistem em mais de um caso de relação entre as variáveis, mas que ordenam por correspondência termo a termo apenas partes dos valores dessas variáveis em relação a parte dos valores das outras, incluindo, por vezes, os distractores. Em alguns casos, a ordenação é claramente direcionada pelo critério de uso.

Nível III - Dos indícios de soluções combinatórias:

As soluções do nível III trazem, diversamente das de níveis anteriores, o fato de serem regidas pelo esquema de correspondência "um para muitos" entre os valores das variáveis, de início ainda envolvendo os distractores. Quando predomina o emprego de diagramas, a presença em progressão desse esquema é mais evidente, embora, por vezes, haja sinais de contagem dos casos obtidos e de cálculos aditivos, mesclados com cálculos multiplicativos. Outra marca importante é a de que são soluções não distorcidas por interpretações do conteúdo do problema, restritas a contextos socioculturais específicos. Eis os subníveis encontrados:

Subnível IIIA: da busca inicial de combinações mediante cálculos diversos distorcidos pelos distractores:

São soluções com diagrama ou com cálculo, em que estão representadas muitas tentativas de combinações entre os valores das variáveis, mas regidas pelos valores distractores. Essas tentativas são feitas por diferentes junções, repetições e complementações de cálculos variados entre alguns e/ou todos os valores das variáveis, os aditivos mesclados aos multiplicativos, na aparente busca de "muitas maneiras".

Subnível IIIB: das combinações parciais mediante cálculos aditivo-multiplicativos não distorcidos pelos distractores:

Trata-se de soluções obtidas por meio de diagramas ou de cálculos em que há multiplicação e/ou adição entre alguns ou todos os valores de algumas das variáveis, acompanhados de outro tipo de cálculo aditivo ou multiplicativo, envolvendo os resultados obtidos e/ou o valor da terceira variável, quando é o caso, sem a presença dos distractores. São combinações obtidas de diversas “relações” aditivo-multiplicativas, na busca de resposta final, em termos de “muitos casos”. Quando há diagrama com recursos pictóricos, fica evidente a dificuldade de representar todos os valores das três variáveis, combinados.

Subnível IIIC: das combinações de variáveis marcadas por relações aditivo-multiplicativas:

São soluções diagramadas ou com cálculos, as quais contemplam a composição de relações aditivo-multiplicativas entre todos os valores das variáveis envolvidas. Quando presentes, os cálculos são de adição e/ou de multiplicação entre os valores de cada variável e cada resultado obtido dessas operações. Os resultados são, então, incorretos, por causa dessa “combinação” de produtos e somas, às vezes com sinais de contagem dos casos obtidos.

Nível IV - Da presença de soluções combinatórias:

Muito apoiadas em diagramas ou em outro recurso gráfico (listas, tabelas, por exemplo), as soluções desse nível diferenciam-se daquelas do nível anterior, ao representarem a relação de “um para muitos” entre todos os valores de todas as variáveis, sejam elas duas ou três. Na elaboração dessas soluções, há o emprego de procedimentos econômicos, inclusive os com marca algébrica.

Subnível IVA: do total das combinações por cálculo de marca aritmética:

São soluções em que estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, representados quer em diagrama (com registro pictórico e/ou numérico do total de possibilidades identificadas, ou com apoio na disposição ordenada dos valores de uma ou mais variáveis como referência), quer por cálculo multiplicativo canônico.

Subnível IVB: do total das combinações por cálculo de marca algébrica:

Trata-se de solução com marca algébrica (siglas, algarismos) representada com certa ordem pela qual está indicada uma parte ou o total das combinações entre os valores das três variáveis. Esse traço expressa controle eficiente das possibilidades de combinação dos valores das variáveis na utilização de procedimento econômico de cálculo relacional. No caso obtido, essa representação é a da metade das combinações.

A hierarquia exposta neste texto retrata em termos gerais a tendência já desenhada naqueles estudos: de soluções sinalizando ausência de raciocínio combinatório, conforme, agora, os limites maiores ou menores da interpretação dos respondentes das relações entre os elementos do texto do problema, até aquelas em que há sinais de presença desse tipo de raciocínio, identificados os momentos de transição entre tais patamares e dentro de cada um deles.

Os resultados sugerem uma relação entre a transformação das referidas características, de forma que quanto mais aumentam nas soluções os casos de combinação das variáveis e de seus valores, mais ali aparecem sinais da presença em transformação do cálculo relacional aditivo em direção ao multiplicativo. Foi possível constatar que os avanços na identificação das variáveis e das combinações entre elas, conforme seus respectivos valores, ocorrem inicialmente por tateio, havendo na sequência melhor dissociação dos casos e um controle cada vez mais sistemático de suas inter-relações (Inhelder; Piaget, 1972).

Em síntese, os resultados obtidos apontam para a necessidade e a relevância do trabalho com problemas de produto cartesiano na escola fundamental, desde as séries iniciais, não somente pelo seu significado matemático específico, mas também como alternativa para promover o desenvolvimento cognitivo do aluno, ao ativar a construção de seu raciocínio combinatório, com possíveis reflexos em outras áreas da aprendizagem escolar.

5 CONSTRUÇÃO DA BASE EXPERIMENTAL: ANÁLISES A PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos um estudo de revisão bibliográfica sobre Análise Combinatória, com o intuito de analisar como o tema vem sendo abordado em pesquisas recentes. Em seguida, apresentamos os participantes da pesquisa, a sequência didática e as análises *a priori* dos encontros, contemplando níveis de raciocínio combinatório inferidos das análises das repostas dos participantes.

Neste estudo, focou-se exclusivamente em artigos publicados em periódicos. Para conduzir esta revisão sistemática, recorreu-se à base de dados disponível no Portal de Periódicos da Capes, uma plataforma virtual que reúne e fornece acesso a produções científicas tanto nacionais quanto internacionais (Capes, 2020). O intervalo de tempo considerado para a pesquisa compreendeu publicações do período de 2014 a 2024. O processo de pesquisa foi estruturado da seguinte maneira: inicialmente, aplicou-se o descritor “Análise Combinatória”. Posteriormente, introduziu-se um segundo descritor na funcionalidade de busca avançada. Este segundo termo, “Sequência Didática”, foi selecionado com o objetivo de refinar a pesquisa, garantindo que os resultados fossem pertinentes ao escopo do estudo. Essa estratégia resultou em nove resultados iniciais, dos quais, após a aplicação do filtro de periódicos revisados por pares, restaram seis. Desses, cinco artigos foram considerados relevantes para uma análise mais detalhada, categorização e inclusão no levantamento.

Em uma segunda etapa, replicou-se a estratégia de busca utilizando o descritor “Análise Combinatória” e adicionou-se um novo termo, “Ensino”, através da busca avançada no Portal de Periódicos da Capes. Essa busca gerou 56 resultados iniciais que, após a aplicação dos filtros de revisão por pares e delimitação temporal de 2014 a 2024, resultaram em 29 estudos. Desses, 21 artigos não contemplados na busca anterior foram adicionados à compilação de estudos. Na terceira e última etapa de busca, manteve-se o descritor “Análise Combinatória” e introduziu-se “Educação” como segundo termo na busca avançada. Essa ação gerou 42 resultados, entretanto, todos já haviam sido identificados nas etapas anteriores de busca, culminando em um total de 26 pesquisas analisadas integralmente.

Os resultados da revisão sistemática evidenciaram as pesquisas atuais e seus desafios no ensino de Análise Combinatória. Um total de 26 artigos foram encontrados, conforme os critérios selecionados de busca em periódicos científicos. Após a leitura de todos os artigos na íntegra, apenas 25 artigos foram validados para a etapa de categorização. O artigo excluído da análise não possuía relação com ensino ou educação. A seguir, apresenta-se uma lista com todos os artigos encontrados, analisados e categorizados:

Quadro 1 – Artigos científicos encontrados no Portal de Periódicos da CAPES

N°	Título	Ano	Autor(es)
01	Reflexão sobre o ensino de análise combinatória no Ensino Médio: percepções de professores formados no CEUNES–UFES	2014	Martins, G.G.; Silva, J.D.
02	O Ensino de Análise Combinatória como Referências Curriculares para Saberes Docentes	2015	Kashimoto, L.K.; Oliveira, R.G.
03	Os PCN e o bloco Tratamento da Informação: algumas possibilidades teórico-metodológicas para a sala de aula da Educação Básica	2016	Teixeira, P.J.M.
04	Um estudo probabilístico sobre caminhos em reticulados quadrados	2016	Santos, R.C.
05	O uso de pressupostos teóricos da Teoria da Aprendizagem Significativa no estudo acerca de Análise Combinatória	2016	Brum, W.P.; Poffo, I.R.D.
06	Noções de Análise Combinatória na Educação Básica: atividades interdisciplinares	2017	Dias, R.A.; Freitas, A.V.; Victer, E.F.
07	A aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio: uma proposta didática por meio da Resolução de Problemas	2017	Silva, D.P.; Guerra, E.A.
08	Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório	2017	Nunes, C.B.; Vidal, T.C.
09	A matemática por trás do sudoku	2018	Santos, R.P.; Vasconcellos, L.A.S.
10	Ensino da Análise Combinatória por meio de Tecnologia Móvel: um relato de experiência	2019	Tavares, P.C.M.; Bogutchi, T.F.
11	Modelagem na Educação Matemática para o desenvolvimento de conceitos de Análise Combinatória	2020	Bastos, T.A.; Rosa, M.
12	Materiais lúdicos como instrumentos de ensino-aprendizagem-avaliação de Análise Combinatória no Ciclo de Alfabetização	2020	Rostirola, S.C.M.; Siple, I.Z.
13	Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio	2020	Silveira, A.A.; Andrade, S.
14	Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória	2020	Santos, E.V.; Andrade, S.
15	Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: perspectivas investigativas	2021	Campos, C.E; Igliori, S.B.C.
16	Sala de aula invertida adaptada ao Ensino Remoto: uma proposta de Ensino Híbrido aplicado à Análise Combinatória	2021	Marques, B.S.M.; Barbosa, N.M.
17	Análise Combinatória: metodologia de apoio ao professor	2021	Venezuela, A.L.
18	A Proposição e Resolução de Problemas na aprendizagem de Matemática: possibilidades para o Ensino Superior	2021	Gieseler, L.C.; Schneider, B.; Possamai, J.P.; Allevato, N.S.G.
19	A Utilização da Gamificação na Aprendizagem de Análise Combinatória: possibilidades atreladas ao uso do H5P e do Wordwall	2022	Brito, C.E.; Almeida, L.M.
20	Aprendizagem matemática: usando loterias da caixa como metodologia de ensino de Análise Combinatória e Probabilidade	2022	Neres, R.L.; Correa, V.B.
21	Proposição de problema de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula	2022	Silveira, A.A.; Andrade, S.
22	Combinando: um material para Ensino de Análise Combinatória a estudantes cegos	2023	Basniak, M.I.; Dombrowski, A.F.
23	Utilização do *software* ℝ para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória	2023	Portela, A.C.T.; Oliveira, H.H.G.S.; Viola, D.N.
24	O estudo do modelo combinatório de Padovan por meio da Engenharia Didática	2023	Vieira, R.P.M.; Alves, F.R.V.; Catarino, P.M.M.C.
25	Polinômio de Gauss: uma investigação da origem do conceito e a relação com coeficiente binomial	2024	Teixeira, M.A.G.; Travassos, M.F.G.; Craveiro, I.M.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Os artigos foram categorizados quanto ao nível de ensino: fundamental, médio, superior ou formação continuada (Tabela 1). Nota-se que alguns artigos fizeram proposições de planos de aula ou revisão bibliográfica, não necessariamente avaliando a prática do ensino diretamente em sala de aula, portanto, para esse fim, esses artigos foram classificados na categoria “formação continuada” pelo entendimento que essas contribuições estão diretamente ligadas à prática dos docentes já formados e em exercício.

Tabela 2 - Frequência absoluta (fi) e relativa (fr) de artigos em relação ao enfoque da pesquisa quanto ao nível de ensino

Nível de Ensino	f_i	f_r
Fundamental	4	16%
Médio	13	52%
Superior	3	12%
Formação continuada	5	20%

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Nota-se que mais da metade das pesquisas encontradas (52%) estão relacionadas ao nível de ensino médio. Esse resultado reflete a relação dos conteúdos de Análise Combinatória com esse nível de ensino. A baixa porcentagem de pesquisas com enfoque no ensino superior (12%) demonstra a lacuna e reforça a justificativa da presente pesquisa em avaliar o ensino de Análise Combinatória no nível superior.

5.1 Ensino Fundamental

Dias, Freitas e Victer (2017) trouxeram propostas interdisciplinares de estudo de conceitos de análise combinatória na educação básica. Esses autores apresentam propostas lúdicas que mobilizam o princípio fundamental da contagem, combinações e arranjo simples, com as atividades “boneca de papel”, “eleições” e “campeonato de futebol”. Teixeira (2016) propõe problemas de contagem em uma atividade de pintar faixas, listras e regiões de bandeiras, para mobilizar o princípio aditivo da contagem. O autor ressalta a importância de se trabalhar a componente Análise Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Rostirola e Siple (2020) utilizaram materiais lúdicos contextualizando com a obra literária “Alice no País das Maravilhas” para realizar propostas de ensino que promovam o desenvolvimento do raciocínio combinatório, com alunos do 3º ano do ensino fundamental.

Santos e Andrade (2020) trabalharam conceitos de combinação, arranjo e permutação com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, aplicando a metodologia de resolução, exploração e proposição de problemas.

Percebe-se que, nos anos iniciais, as pesquisas possuem um olhar voltado mais para o lúdico. Nota-se que os artigos com enfoque no ensino fundamental, em contraste aos demais níveis de ensino, relatam menos dificuldades em relação à aplicação e participação dos alunos, indicando uma possível associação entre o nível de ensino e a complexidade dos conteúdos trabalhados em Análise Combinatória.

5.2 Ensino Médio

Kashimoto e Oliveira (2015) identificaram dificuldades de alunos do 2º ano do ensino médio quanto ao conteúdo de Análise Combinatória. Silva e Guerra (2017) realizaram testes de conhecimentos prévios sobre Análise Combinatória com alunos do 2º ano do ensino médio antes de aplicarem as sequências didáticas propostas. Os resultados dos testes prévios mostraram que os alunos não conseguiram resolver os problemas propostos. No entanto, após a aplicação das sequências didáticas, Silva e Guerra (2017) relatam que houve apropriação dos alunos quanto aos conceitos básicos de Análise Combinatória.

Santos e Vasconcellos (2018) utilizaram "Sudoku" como recurso didático com alunos do 3º ano do ensino médio. Os autores citam as dificuldades dos alunos em relação à aplicação da prática, mas também citam que a dinâmica proporcionou maior envolvimento dos alunos com assuntos de matemática e desenvolvimento do raciocínio. Tavares e Bogutchi (2019) desenvolveram um jogo de ensino de Análise Combinatória para smartphone "Foca na Comb". A aplicação foi utilizada em uma sala de aula com alunos do 2º ano do ensino médio, e, de acordo com os autores, facilitou o entendimento sobre os conteúdos de Análise Combinatória e promoveu maior envolvimento dos alunos.

Brito e Almeida (2022) empregaram tecnologias digitais e a metodologia de gamificação com alunos do 3º ano do ensino médio para mobilizar conhecimentos de Análise Combinatória. Os alunos recebiam pontuações de acordo com a participação em atividades propostas e ganhavam "emblemas" conforme a pontuação aumentava. Os autores relataram o parecer positivo dos alunos e a participação de 78% dos discentes de forma satisfatória.

Também envolvendo tecnologias digitais, Portela, Oliveira e Viola (2023) elaboraram uma ferramenta computacional em linguagem de programação R para a identificação do tipo de Análise Combinatória a ser utilizada em um problema. Os autores observaram que:

> [...] uma parcela significativa dos participantes apresentou um déficit significativo no entendimento dos conceitos de análise combinatória, revelando uma discrepância em relação ao conteúdo programático esperado para o respectivo nível educacional (Portela; Oliveira; Viola, 2023, p. 23).

Uma quantidade relevante de autores empregou tecnologias digitais e recursos computacionais em suas pesquisas (Tavares; Bogutchi, 2019; Brito; Almeida, 2022; Portela; Oliveira; Viola, 2023). Pelos resultados das pesquisas, nota-se que o acesso à tecnologia digital é um requisito para a aplicação dessas metodologias e o seu uso requer cautela para evitar a exclusão de alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Neres e Correa (2022) aplicaram um método de ensino com volantes de loteria da Caixa Econômica Federal, com alunos do 2º ano do ensino médio. Os autores mobilizaram tanto conhecimentos sobre Análise Combinatória quanto sobre Probabilidade. Os alunos envolvidos na pesquisa relataram dificuldades com conceitos matemáticos básicos, e os autores comentam que a utilização de práticas que envolvam o cotidiano promoveu melhor participação e interesse dos alunos.

A relação do cotidiano do aluno com a prática escolar também é vista no trabalho de Bastos e Rosa (2020), que aplicaram a modelagem matemática no ensino de Análise Combinatória com alunos do 2º ano do ensino médio. Nessa pesquisa, os alunos visitaram academias de suas preferências e aplicaram conceitos de combinação, permutação e arranjo na elaboração de fichas de treinos. Silveira e Andrade (2020) utilizaram a abordagem de exploração, resolução, proposição, codificação e descodificação de problemas com alunos do 2º ano do ensino médio. Nas duas pesquisas citadas, os autores relatam uma intervenção menor do professor em sala de aula, assumindo papel de mediador, e permitindo aos alunos maior autonomia, passando a desempenhar o papel de sujeito principal da aprendizagem.

Silveira e Andrade (2022) observaram os resultados da aplicação da metodologia de proposição de problemas com alunos do 2º ano do ensino médio. Os alunos elaboraram problemas envolvendo anagramas. É relevante notar que nessa prática, os autores relatam que alguns grupos de alunos desenvolveram questões muito similares ou parecidas com questões do livro didático. Houve situação em que o problema proposto necessitava de reformulação para evitar problemas de interpretação. De modo geral, resultados da prática pedagógica mostraram que os alunos se tornaram protagonistas de sua aprendizagem ao debaterem e tomarem decisões na proposição de problemas.

O protagonismo do aluno no processo de ensino e aprendizagem também é visto no trabalho de Marques e Barbosa (2021), apresentando tópicos de uma sequência didática com o tema Análise Combinatória. Os autores propuseram, durante o período de isolamento social causado pela pandemia da Covid-19, a metodologia de sala de aula invertida adaptada ao ensino remoto com alunos do 2º ano do ensino médio. Os autores relatam aspectos positivos da proposta, ao mesmo tempo em que citam os desafios nesse modelo de ensino quanto à possibilidade de perda de conexão com a internet, falta de energia elétrica, atualização dos softwares dos computadores e ruídos.

Basniak e Dombrowski (2023) mobilizaram o princípio fundamental da contagem utilizando material impresso 3D em uma proposta de inclusão entre alunos cegos e videntes. A pesquisa teve como foco alunos do ensino médio, mas os autores também indicam o uso do material didático para outros níveis de ensino, incluindo o ensino fundamental. Dentre os desafios, os autores mencionam que “[...] é preciso uma pessoa especializada que faça a modelagem e a impressão dos objetos [...]” (Basniak; Dombrowski, 2023, p. 18). Os resultados mostraram-se positivos na inclusão de alunos cegos utilizando o material produzido, que fora denominado “o Combinando”.

Teixeira, Travassos e Carneiro (2024) apresentam uma pesquisa com enfoque no ensino médio, porém, com uma abordagem diferente das apresentadas anteriormente. Nesse trabalho é explorado um histórico sobre a origem do conceito de Polinômio de Gauss e sua relação com o coeficiente binomial. Os autores acreditam que os resultados encontrados “[...] ampliam as possibilidades de abordagem combinatória, enriquecendo o ensino da matemática no Ensino Médio” (Teixeira; Travassos; Carneiro, 2024, p. 14).

5.3 Ensino Superior

Nunes e Vidal (2017) utilizaram o método de resolução de problemas com uma turma do curso de Licenciatura em Matemática no ensino de conceitos elementares de Análise Combinatória. Os autores citam o benefício encontrado na prática quando os alunos chegaram à compreensão por conta própria ao invés do texto de livros didáticos. Dentre as dificuldades relatadas nos resultados da pesquisa, cita-se a dificuldade que um dos grupos encontrou no processo de generalização na resolução dos problemas.

Gieseler *et al.* (2021) propuseram a resolução de problemas associada ao conteúdo de Análise Combinatória com alunos do curso de bacharelado em Ciência da Computação na modalidade de ensino remoto. Os alunos desenvolveram jogos digitais em diversas plataformas envolvendo problemas relacionados. Dentre os resultados positivos, os autores perceberam a participação mais ativa dos estudantes frente aos conteúdos de Matemática, bem como possibilidades de aplicação da atividade no Ensino Superior.

Vieira, Alves e Catarino (2023) desenvolveram uma proposta de estudo dos conceitos do modelo combinatório de Padovan para cursos de formação inicial de professores de matemática, utilizando a Engenharia Didática em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas.

Nota-se uma lacuna no quantitativo de pesquisas que envolvam estudos sobre o ensino de Análise Combinatória no nível de Ensino Superior. Esse contraste elenca as possibilidades de investigações que abordem a temática nos mais diversos cursos de formação de profissionais, além de verificar de que forma as novas metodologias aplicadas no Ensino Médio impactam na formação dos alunos quando entram na graduação.

5.4 Formação Continuada

Martins e Silva (2014) investigaram professores com formação inicial em matemática na sua prática docente ao ensinar os conceitos de Análise Combinatória. Os resultados dos questionários mostraram que os professores dominam os conceitos básicos, mas possuem inseguranças quanto à sua formação. Os autores citam que essas inseguranças podem refletir em uma abordagem mais superficial do tema enquanto professores do Ensino Médio.

Brum e Poffo (2016) apresentam resultados de uma pesquisa com um grupo de professores em exercício que lecionam no Ensino Médio. Os resultados mostraram as dificuldades dos professores em resolver exercícios relacionados com a Análise Combinatória. Os autores citam que na prática foi observado que os professores detinham conhecimentos básicos de Análise Combinatória, porém, "o conhecimento comum do conteúdo não é suficiente para abordar exercícios no ensino [...]" (Brum e Poffo, 2016, p. 126), indicando fragilidades na formação dos professores.

Esses resultados de pesquisas em formação continuada denotam ainda mais a importância de se investigar sobre as práticas de ensino no nível de Ensino Superior, uma vez que a formação de profissionais do Ensino Fundamental e Ensino Médio passam por essa etapa e podem refletir na insuficiência de aplicar as competências referentes ao ensino de Análise Combinatória.

Preocupado com as deficiências no ensino de Análise Combinatória, Venezuela (2021) contribui com roteiros de planos de aulas para que professores trabalhem os conteúdos de Arranjo simples, Arranjo com reposição, Combinação simples, Combinação com repetição, Permutação simples, Permutação circular e Permutação com elementos repetidos. Santos

(2016) propõe cálculos de probabilidade em reticulados quadrados que possam ser aplicados por professores do Ensino Médio e Superior em aulas de Análise Combinatória.

Campos e Igliori (2021) elaboraram uma revisão bibliográfica de teses e dissertações sobre o ensino de Análise Combinatória. Apesar de não ter um foco específico em formação continuada, esta pesquisa contribuiu para o entendimento do estado da arte em todos os níveis de ensino.

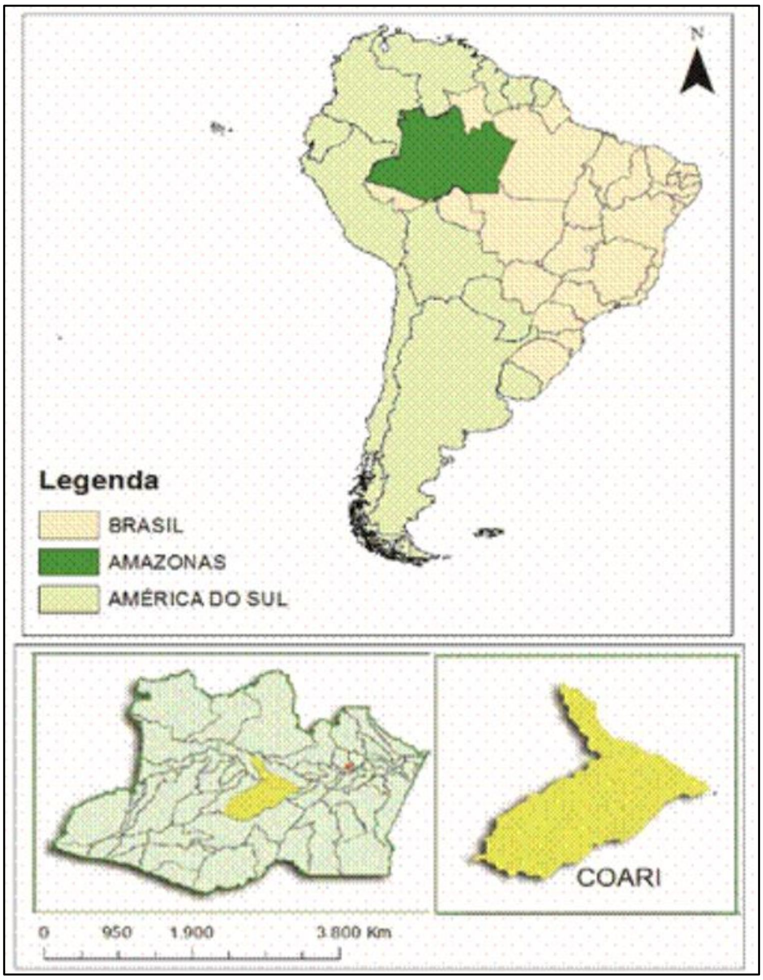
6 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI*

Nesta seção são apresentados o local, os participantes da pesquisa, os procedimentos e etapas que compõem as sequências didáticas e as estratégias que os alunos empregaram em suas resoluções. Além disso, serão descritas as experimentações, os resultados, as análises e algumas reflexões sobre os encontros realizados.

Coari (Figura 1) é um município localizado no Estado do Amazonas, a 366 km de distância da capital estadual Manaus. Segundo o censo demográfico realizado em 2010, o município possui uma área territorial de 57.970,768 km² e uma população de 75.965 habitantes. A estimativa populacional para o ano de 2021 é de 86.713 pessoas, conforme dados do IBGE (2010).

A pesquisa foi realizada no Instituto de Saúde e Biotecnologia (ISB) da Universidade Federal do Amazonas (UFAM) localizado em Coari-AM.

Figura 1 - Localização do município de Coari-AM



Fonte: Guilherme *et al.* (2016).

O ISB, antes denominado de Unidade Acadêmica Permanente de Coari, é uma das cinco Unidades Acadêmicas da UFAM criadas no interior do Estado do Amazonas através do Programa de Expansão. Foi criado pela Resolução n.º 26, de 25 de novembro de 2005, do Conselho Universitário (CONSUNI). O ISB está localizado na Estrada Coari/Mamiá, 305, Espírito Santo, na cidade de Coari, Médio Solimões. O nome atual do Instituto se deu através da Resolução n.º 26, de 26 de outubro de 2006. O ISB contém na sua grade o total de 7 cursos de graduação, segmentados nas áreas de exatas e biológicas (enfermagem, fisioterapia, nutrição, medicina, biotecnologia, licenciaturas conjuntas de física e matemática, e biologia e química). A implementação desses cursos, proporcionou ao município não apenas a capacidade de atender as próprias demandas educacionais, mas também, o tornou apto para suprir a carência dos municípios próximos.

O de licenciatura em ciências: matemática e física curso oferece 50 vagas anuais e, de acordo com o Projeto Pedagógico do Curso (PPC), disponível em sua página eletrônica:

> Art. 2º - Para a integralização curricular, a carga horária total do curso de Graduação em Licenciatura Ciências: Matemática e Física, correspondentes a 3.460 (três mil e quatrocentas e sessenta) horas/aula, equivalentes a 181 (cento e oitenta e um) créditos, a serem integralizados em, no mínimo 10 (dez) e, no máximo, 15 (quinze) períodos letivos. A carga horária total está distribuída em: componentes curriculares obrigatórios – com carga horária de 3.000 (três mil) horas/aula, totalizando 177 (cento e setenta e sete) créditos; componentes curriculares optativos – com carga horária de 60 (sessenta) horas/aula, totalizando 04 (quatro) créditos; estágio curricular com carga horária de 405 (quatrocentos e cinco) horas/aula, totalizando 18 (dezoito) créditos e Atividades Acadêmico-Científico-Culturais – com carga horária de 400 (quatrocentas) horas.

A escolha por trabalhar nesse curso específico de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física foi feita pela proximidade com o conteúdo abordado de Análise Combinatória pelo fato de estar presente na matriz curricular do curso e pela facilidade de acesso à pesquisa por parte do pesquisador por ser egresso do curso. Para proporcionar uma maior participação dos alunos, foram adotados os seguintes critérios de inclusão para a seleção dos participantes: ser cidadão brasileiro, possuir idade igual ou superior a 18 anos e estar matriculado na disciplina de Matemática Elementar II. Por outro lado, foram estabelecidos critérios de exclusão para indivíduos que não apresentaram condições de responder as avaliações/atividades durante a pesquisa, tais como alunos ausentes ou alunos que optaram por não participarem das interações.

O estudo em questão, que foi conduzido, destacou-se pela ausência de riscos tanto para os participantes envolvidos quanto para os pesquisadores. Todas as medidas de segurança e ética foram rigorosamente seguidas, garantindo a integridade física, psicológica e privacidade dos participantes. A coleta de dados foi realizada de forma não invasiva, por meio de entrevistas, observações e avaliações voluntárias, respeitando a autonomia e o consentimento informado dos indivíduos. O pesquisador adotou práticas científicas éticas e responsáveis, de acordo com as diretrizes e normas do Comitê de Ética em Pesquisa/Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CEP/Conep). É importante observar que a pesquisa foi aprovada na Plataforma Brasil, com o Parecer Consubstanciado do CEP aprovado e CAAE: 70193423.9.0000.5020, Número do Parecer: 6.115.731. Assim, foi assegurado que o estudo não apresentava quaisquer riscos significativos para os participantes ou para os pesquisadores.

A pesquisa oferece uma valiosa oportunidade de explorar e aprimorar o raciocínio combinatório de professores em formação, trazendo consigo uma série de benefícios substanciais. Ao enfocar essa habilidade cognitiva crucial, o estudo contribui para o desenvolvimento profissional dos futuros educadores, fortalecendo suas competências pedagógicas no ensino de disciplinas que requerem habilidades combinatórias, como matemática, ciências e áreas relacionadas.

O aprofundamento na compreensão e prática do raciocínio combinatório tem a possibilidade de formar na medida em que os professores a oferecerem uma educação mais enriquecedora e eficaz aos seus alunos, promovendo uma compreensão mais sólida de conceitos complexos e estimulando o pensamento criativo e crítico. Além disso, a pesquisa proporciona um maior embasamento teórico e empírico para aprimorar as estratégias de ensino e desenvolver recursos educacionais inovadores, enriquecendo o campo da pedagogia. Em última análise, o estudo visa contribuir para a formação de professores mais qualificados e preparados para enfrentar os desafios educacionais contemporâneos, beneficiando assim tanto os docentes em formação quanto as futuras gerações de estudantes.

Inicialmente, planejávamos realizar quatro encontros para a aplicação das sequências didáticas. Contudo, devido às limitações de tempo e questões organizacionais, foi necessário ajustar as sequências para dois encontros. O primeiro ocorreu com um grupo de voluntários que concordaram em participar de uma sessão online via Google Meet. Essa sessão funcionou como uma aula experimental, que forneceu a base para desenvolver a nova sequência didática, adaptada ao contexto alterado.

A turma era composta por cinco estudantes, com idades variando entre 25 e 35 anos. Entre os alunos, duas eram mulheres, representando 40% do grupo, enquanto três eram homens, constituindo 60% da turma. Portanto, observa-se que a maioria dos participantes era do sexo masculino, com todos os participantes tendo concluído o Ensino Médio.

O segundo encontro ocorreu na Universidade Federal do Amazonas (UFAM), em Coari-AM, no Instituto de Saúde e Biotecnologia (ISB). A pesquisa foi realizada com alunos do curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física. Esse encontro foi conduzido durante a disciplina de Matemática Elementar II, destinada aos alunos do segundo período do curso. A sessão escolhida para a investigação aconteceu em 05/12/2023, às 18h, contando com a presença de 12 alunos.

6.1 Primeiro encontro via *Google Meet*

O primeiro encontro ocorreu no dia 31/10/2023, de modo online síncrono via *Google Meet*[1], com cinco alunos participantes voluntários que serão tratados anonimamente como aluno 01, aluno 02 e assim por diante. Durante a sequência didática foram produzidos materiais de transcrição dos áudios capturados durante a conversação entre alunos e professor-pesquisador, bem como registros fotográficos das formulações para a resolução dos anagramas.

O encontro teve início às 10h da manhã, com uma introdução feita pelo professor-pesquisador, que explicou aos participantes os propósitos e as motivações por trás da aula de simulação proposta. Solicitou que os alunos preparassem papel e caneta, que poderiam ser necessários para auxiliar em suas respostas. No começo da sessão, o professor-pesquisador assegurou-se de que todos estavam familiarizados com o conceito de “anagrama”. Em seguida, pediu que os alunos escolhessem uma palavra à sua vontade, como, por exemplo, o nome ou sobrenome, e calcular o número possível de anagramas que poderiam ser criados a partir dela. Foi estabelecido um período de 20 minutos para que, individualmente, os alunos elaborassem suas soluções. Passado o período estabelecido, os alunos foram convidados a apresentarem suas resoluções. Um dos alunos questionou se as respostas deveriam ser postadas no chat da plataforma, ao que o professor afirmou que sim. Prosseguiu-se, então, com a atividade, na qual os participantes, fazendo uso de papel e caneta, elaboravam seus anagramas.

O Aluno 01 escolheu a palavra “JESUS” e apresentou o resultado de 505 anagramas. Em sua explicação, o aluno comentou que:

> Aluno 01: *De acordo com meu raciocínio matemático que não é muito lá essas coisas, a palavra JESUS tem cinco letras, então toda vez que a gente troca uma letra de*

[1] É um aplicativo do Google para Android, iOS e Web que oferece chamadas de vídeos pelo celular ou computador. Disponível em: http://www.techtudo.com.br. Acesso em: 30 mar. 2024.

> *alguma forma sempre vai dar uma palavra, eu consegui escrever quatro, mas eu conseguia pensar em mais umas dez aqui, todas diferentes, então meu palpite foi que dava em torno de 5, 500 ou 5 mil, múltiplos de 5, sabe.*

Observa-se que o aluno calculou sua resposta com base no número de caracteres da palavra, levando de alguma maneira ao resultado 505, indicando uma preferência por múltiplos de 5, porém, diferente do resultado esperado da aplicação da equação de permutação com repetição, que levaria ao total de 60 combinações. Não fica evidente se a resposta do aluno foi baseada em algum conceito de análise combinatória ou se foi apenas uma tentativa arbitrária de obter o resultado. Essa tentativa de resolver o problema dos anagramas indica que o estudante teve um foco quase exclusivo para os algarismos e caracteres, tentando encontrar uma resposta numérica.

A tentativa do Aluno 01 aproxima-se tanto da descrição do *Subnível IC – Das composições numéricas em diferentes formas de cálculos,* do raciocínio combinatório, quanto do nível I descrito por Moro e Soares (2006) em problemas escolares de produto cartesiano. Os autores descrevem que no nível I essas soluções se destacam por definir os limites de interpretação do enunciado do problema, muitas vezes focando excessivamente nos números presentes. Isso leva à formação de respostas numéricas através da justaposição de algarismos e à realização de cálculos aritméticos variados com os números encontrados no texto em um esforço para fornecer uma solução numérica. Adicionalmente, uma outra manifestação desses limites é a tentativa de resolver o problema com base em critérios de uso social, desviando-se do contexto matemático escolar, embora ainda haja alguma consideração pelo conteúdo. Entretando, podemos perceber que o Aluno 01 assimilou o conceito de anagrama, como mostrado em sua resposta que destacou como a troca de letras resultava na formação de uma nova palavra.

Prosseguindo com a sequência didática, o professor-pesquisador ainda não interveio na explicação do Aluno 01, propondo que continuassem com as resoluções antes de apresentar possíveis correções e equações matemáticas. Na sequência, o Aluno 02 apresentou seus resultados. Ele escolheu a palavra “SABRINA” e apresentou o resultado de 5.040 anagramas. Em sua explicação, o Aluno 02 comentou que: “*A resposta deu 5.040, porque é 7! fatorial, eu acho que, na minha cabeça, eu só lembrei de combinação, aí eu utilizei o 7! Fatorial*”.

Observa-se que o Aluno 02 não apresentou a mesma estratégia de resolução do Aluno 01. Uma vez que, diferente do Aluno 01, o Aluno 02 utilizou o fatorial para calcular as possíveis combinações de anagramas. Entretanto, não fica evidente se a escolha da aplicação do fatorial decorre do uso direto da equação da permutação simples ou por dedução. Neste caso, tem-se um resultado correto de 2.520 combinações, uma vez que há elementos repetidos no anagrama da palavra escolhida.

Na resolução do anagrama da palavra “SABRINA”, nota-se que houve uma tentativa inicial de formulação das possibilidades do anagrama. Essa tentativa aproxima-se do *Subnível IIIC: das combinações de variáveis marcadas por relações aditivo-multiplicativas*, descrição encontrada em Moro, Soares e Camarinha Filho (2010). Essas soluções envolvem diagramas ou cálculos que estabelecem relações aditivas e multiplicativas entre os valores das variáveis envolvidas. Geralmente, recorrem à adição e/ou multiplicação dos valores de cada variável e os resultados dessas operações.

Contudo, tais soluções frequentemente resultam em respostas incorretas devido à mistura inadequada de produtos e somas, às vezes acompanhadas de tentativas de contabilizar os casos derivados dessa combinação. É importante ressaltar que, no caso do Aluno 02, o esboço de todas as possíveis combinações do anagrama seria demasiadamente trabalhoso. Contudo, como fica evidente em sua explicação, o conceito de fatorial está incorporado à sua estrutura cognitiva, visto que caso a palavra escolhida não contivesse letras repetidas, o aluno teria obtido a resposta correta.

O Aluno 03 escolheu a palavra “RUBEN” e apresentou o resultado de 500 anagramas, e em sua explicação ele comentou que: “*Eu consegui fazer umas 10 palavras diferentes para a palavra RUBEN, logo eu acho que dá umas 500 formas diferentes. Deve ser algo em torno de 500, no mínimo, considerando que sou da área de humanas*”.

O Aluno 03 apresentou os resultados do anagrama para a palavra escolhida, e pode-se notar uma tentativa de resolução sem equações algébricas, apenas com esboços das possíveis combinações da palavra, resultando em um total de 500 combinações, distante do resultado esperado de 120 combinações para o anagrama. A resolução seguida pela resposta apresentada pelo Aluno 03 demonstra as limitações apresentadas pelo estudante. Aqui, observa-se que o aluno ficou restrito às combinações que conseguiu formar.

Apegando-se a resoluções sem indícios de cálculos combinatórios, o que aproxima sua resposta ao *Subnível IA – Da escolha de variáveis* descrito por Moro e Soares (2006), do qual o método consiste em soluções que envolvem escolhas relacionadas a uma ou mais variáveis, sem que haja combinação entre essas variáveis. Os sujeitos do Nível I contextualizam suas respostas, embora sem indícios de raciocínio combinatório em seu esforço para encontrar a solução do problema. Nesse nível, os sujeitos baseiam-se em abstrações muitas vezes de maneira aleatória.

O próximo aluno a apresentar sua resolução, o Aluno 04, escolheu a palavra "DANIELLE" para montar o seu anagrama e apresentou o resultado de 40.320 anagramas. Em sua explicação, ele comentou que:

> Aluno 04: *Considerando que meu nome tem 8 letras, também tive o mesmo raciocínio da SABRINA, então deu 8 fatorial, considerando que no anagrama não se repetem letras, eu cheguei neste valor onde eu fui multiplicando 8 vezes 7 vezes 6 vezes 5 e assim por diante.*

Observa-se que o Aluno 04 calculou o fatorial do número de caracteres da palavra, levando ao resultado 40.320, indicando a aplicação da permutação simples, porém, diferente do resultado esperado da aplicação da equação de permutação com repetição que levaria ao total de 10.080 combinações. Em sua resposta, podemos notar a sistematização das estratégias utilizadas. Fica evidente que a resposta do aluno foi baseada no conceito de permutação simples e não levando em conta os disctractores, o que mesmo apresentando indícios de cálculos combinatórios não levou em conta as duas letras repetidas na palavra escolhida.

Destaca-se que a resolução apresentada se assemelha à resposta do Aluno 02, que também utilizou o mesmo raciocínio em sua resposta, porém, com uma explicação de estratégias utilizadas mais claramente. O que também fica evidente em sua explicação é que o conceito de fatorial é bem claro em sua estrutura cognitiva.

Essa tentativa de resolver o problema dos anagramas indica que o estudante teve propriedades do pensamento formal e a inserção da realidade como subconjunto de um conjunto maior de possibilidades. Isso é descrito por Duro e Becker (2015, p. 872): "em lugar de teorizar sobre dados empíricos (concretos), o pensamento formal permite que o sujeito teorize sobre possibilidades".

A tentativa do Aluno 04 aproxima-se tanto da descrição do *Subnível IIIC: das combinações de variáveis marcadas por relações aditivo-multiplicativas*, do raciocínio combinatório, quanto do nível IV descrito por Moro, Soares e Camarinha Filho (2010). Os autores descrevem que no nível IV do raciocínio combinatório, como muito apoiadas em diagramas ou em outro recurso gráfico (listas, tabelas, por exemplo), as soluções desse nível diferenciam-se daquelas do nível anterior, ao representarem a relação de "um para muitos" entre todos os valores de todas as variáveis, sejam elas duas ou três. Na elaboração dessas soluções, há o emprego de procedimentos econômicos, inclusive os com marca algébrica.

O último aluno a apresentar sua resolução foi o Aluno 05, que elaborou anagramas para a palavra "CALEBE" e apresentou o resultado de 75 anagramas. Em sua explicação, o aluno comentou que:

> Aluno 05: *Deu 75, mas 'tá' errado porque eu fiz a somatória, faz muito tempo que eu fiz esse conteúdo, então eu não lembrei se eu somava 1 mais 2 mais 3 mais 4 mais 5, ou se era multiplicação, porém, eu concordo com as meninas que tem que fazer a multiplicação do fatorial com as 6 letras, o que dá 720. Eu cheguei nesse 75 porque eu eliminei um "E" aí eu somei e deu 75, primeiro eu coloquei 126, mas depois eu vi que dava 75.*

O aluno esboçou algumas possíveis combinações, o que indica um princípio de tentativa em solucionar o problema do anagrama. É interessante notar, pela explicação do Aluno 05, que ele não conseguiu esboçar uma estratégia correta para a resolução, chegando a um total de 75 combinações, mas a resposta correta seria 360 possibilidades de anagramas diferentes para a palavra escolhida. Podemos notar, também, que após as explanações dos outros alunos, o Aluno 05 conseguiu visualizar que sua estratégia traçada para resolução não é a correta. No entanto, sem perceber que a ocorrência da letra repetida "E" provavelmente chegaria em outra resposta incorreta por não levar em conta a correção feita pela letra repetida.

Analisando o esboço elaborado pelo Aluno 05, observa-se que sua resposta pode ser caracterizada como *Subnível IC – Das composições numéricas em diferentes formas de cálculos*, encontrado por Moro e Soares (2006), que descrevem o Nível II como característico quando há emprego de algoritmo escolar de composição numérica em contexto ao qual ele não se aplica. São obtidas uma ou mais composições numéricas (com ou sem desenho ilustrativo) com os valores das variáveis (e/ou com os distractores) entre si combinados. São efetuados cálculos diversos (aditivos, multiplicativos), na aparente busca de "muitas maneiras".

Na etapa seguinte, o professor-pesquisador interveio para introduzir as equações relacionadas às permutações simples e com repetição. A permutação simples, utilizada como técnica de contagem para anagramas sem repetição de letras, é representada por $P_n = n!$, onde n indica o número de letras na palavra. Já para palavras com letras repetidas, utiliza-se a fórmula de permutação com repetição: $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_i} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_i!}$, onde k_i representa o número de repetições de cada letra. Após explicar essas equações, os alunos tiveram a chance de revisar seus cálculos, corrigir ou ajustar suas respostas conforme necessário.

Passado um breve intervalo para essa atividade, procedeu-se à verificação das respostas de todos os alunos. Foi observado que todos conseguiram elaborar corretamente as soluções para o número de combinações possíveis de seus anagramas, aplicando de forma precisa as equações de permutação, seja para casos com ou sem repetição de letras. Essa atividade também possibilitou a assimilação dos conceitos abordados. O resultado indica uma possível influência positiva da interação de socialização com os demais colegas. Espera-se que a prática de socializar os resultados, proposta na sequência didática, permita a construção do raciocínio conjuntamente com todos os participantes da atividade.

6.2 Segundo encontro com alunos da disciplina de Matemática Elementar II

O segundo encontro ocorreu na Universidade Federal do Amazonas (UFAM), em Coari-AM, no Instituto de Saúde e Biotecnologia (ISB). A pesquisa foi realizada com alunos do curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física. Esse encontro foi conduzido durante a disciplina de Matemática Elementar II, destinada aos alunos do segundo período do curso. A sessão escolhida para a investigação aconteceu em 05/12/2023, às 18h, contando com a presença de 12 alunos. A escolha dessa disciplina se deu, principalmente, pela inclusão de Análise Combinatória em sua ementa, além da disponibilidade do professor em disponibilizar para a pesquisa uma de suas aulas, que faz parte de um curso com total de 60 horas letivas. A acessibilidade do local para o pesquisador também foi um fator crucial na seleção. Vale ressaltar que a execução desta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Propesp[2].

Instruímos os alunos a manterem seus celulares desligados durante a atividade, incentivando a confiança em suas próprias habilidades de raciocínio. Para proteger a identidade dos participantes, utilizamos nomes fictícios, como Aluno 1, Aluno 2, entre outros, em conformidade com as diretrizes éticas estabelecidas.

A sessão de estudo aconteceu em uma única ocasião noturna, estendendo-se por duas horas. Durante esse tempo, os dados foram coletados não apenas através da observação direta das atividades práticas realizadas pelos estudantes, mas também por meio de gravações de áudio, capturando suas interações e reflexões. A execução dessas atividades demandou materiais básicos, como canetas, folhas de papel em branco e um gravador de voz.

A importância dos métodos de Análise Combinatória, como destacado por Franco (2018), reside na sua capacidade essencial de sintetizar e decifrar grandes volumes de dados. De forma similar aos gráficos estatísticos, que simplificam visualmente informações complexas (Maia, 2021), a Análise Combinatória fornece um arsenal de estratégias matemáticas para explorar todas as combinações e permutações possíveis dentro de um conjunto de dados,

[2] A execução desta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Propesp, garantindo que a participação dos estudantes fosse totalmente voluntária e sem qualquer impacto em suas avaliações acadêmicas ou risco de represália. Como parte do processo, foram distribuídos Termos de Consentimento Livre e Esclarecido, Termos de Assentimento e Termos de Autorização de Uso de Imagem e Áudio, assegurando a privacidade e a confidencialidade das informações coletadas.

facilitando o entendimento mais aprofundado e meticuloso das informações (Morgado *et al*., 1991).

Adaptando-se perfeitamente à estrutura lógico-formal da Análise Combinatória, a sequência didática foi desenhada para promover uma aprendizagem sequencial, onde o domínio de cada etapa prepara o terreno para a próxima, e o progresso das atividades é planejado para reforçar a assimilação dos conceitos. Para apoiar uma diversidade de estilos de aprendizagem, a sequência didática em Análise Combinatória foi dividida em dois momentos-chave de entrega de conteúdo. No primeiro momento foi solicitado que os alunos resolvessem uma atividade envolvendo anagramas de palavras por eles escolhidas, no segundo momento, após uma revisão dos conceitos de permutação simples e com repetição, foi solicitada a correção (se necessário) dos conceitos inicialmente abordados, culminando na apresentação de suas próprias interpretações.

Na 1ª Etapa (apresentação e ambientação) foi realizada uma apresentação tanto dos objetivos da atividade quanto sobre a presença do pesquisador naquele dia específico. Também foram repassadas todas as orientações sobre como deveria ser feita a atividade, bem como a assinatura dos termos de consentimento.

Na 2ª Etapa (atividade com anagramas) foi solicitado que os alunos escolhessem uma palavra para responderem e defenderem sua resposta sobre quantos anagramas seria possível encontrar com a palavra escolhida por eles.

Na 3ª Etapa (revisão dos conceitos sobre permutação simples e com repetição) foi exposta uma breve revisão sobre o assunto em questão, perpassando o conceito de fatorial.

Na 4ª Etapa (correção e institucionalização) foi solicitado aos alunos, com base na revisão dos conceitos e levando em conta suas respostas na atividade com anagramas, que corrigissem (se necessário) suas respostas e explicitassem o que os levou à correção e defesa de sua nova resposta.

Portanto, explorar e elucidar as estratégias dos estudantes para resolver essas questões constitui uma estratégia eficaz para integrá-los às iniciativas educativas dos docentes. No contexto do ensino de matemática, é de particular interesse examinar como se desenvolve o raciocínio combinatório nos alunos e futuros professores, um processo que pode ser tanto revelado quanto fomentado através da resolução desses problemas específicos. A partir dessas percepções, é viável deduzir métodos pelos quais o educador pode mobilizar a construção de conceitos e relações matemáticas relevantes, incluindo seus princípios organizacionais fundamentais, especialmente em relação aos desafios combinatórios na esfera da matemática elementar, com vistas a mapear e esclarecer o desenvolvimento progressivo do pensamento combinatório evidenciado nas soluções dos alunos.

A metodologia central para a análise dos dados adotou uma abordagem qualitativa, focando na interpretação detalhada do conteúdo presente nas respostas dos participantes ao problema, visando desvendar o que essas respostas indicam sobre o significado do raciocínio combinatório aplicado. Os métodos selecionados para a análise dos dados incluíram abordagens tanto qualitativas quanto quantitativas.

A análise qualitativa focou no conteúdo das soluções dos participantes ao problema, centrando-se no que esse conteúdo pode revelar do raciocínio combinatório ali envolvido. Os critérios usados, inspirados dentre os apontados na literatura, disseram respeito às características da construção do raciocínio combinatório (Inhelder; Piaget, 1972; Moro; Soares, 2006; Duro; Becker 2015), aos esquemas e diferentes relações lógico-matemáticas presentes na construção das estruturas combinatória (Bryant; Nunes, 2012; Moro; Soares 2006) e às estratégias de solução a problemas de composição prática de combinações (Placha; Moro, 2009; Moro, Soares e Camarinha Filho, 2010; Duro; Becker, 2015). A seguir são descritos os níveis e os subníveis de elaboração do raciocínio combinatório, inferidos da análise qualitativa das soluções dos alunos ao problema aplicado.

Nível 0 – De resposta alheia ao contexto

Consiste em solução não numérica, sem relação com o que pede o problema e sem referências às variáveis.

Nível I – De resposta contextualizada sem indício de combinação

As soluções demonstram variações na interpretação dos problemas, focando mais nos números apresentados. Quando o foco é quase exclusivo nos algarismos ou caracteres, resulta em soluções baseadas na justaposição dos números e em cálculos aritméticos variados, tentando encontrar uma resposta numérica. Outra manifestação desses limites é o recurso a critérios de uso social na solução dos problemas, o que indica um afastamento do contexto matemático escolar, embora ainda considere o conteúdo do texto além dos números.

Subnível I – Da escolha de variáveis, consistindo de soluções que contêm escolhas relativas a uma ou mais variáveis, sem qualquer combinação entre elas. São soluções que se caracterizam pela aparente busca de algum resultado numérico, mediante a justaposição de algarismos do texto ou pela execução (com cálculo mental ou não) de quaisquer das operações aritméticas com os valores das variáveis, dos distractores e/ou outros, por vezes resultantes das próprias operações

Subnível II – Da adição de valores, consistindo em soluções que se limitam ao cálculo aditivo (mental ou não) de alguns ou de todos os valores envolvidos, seguindo ou não sua ordem de aparecimento e incluindo ou não os distractores.

Nível II – Das primeiras aproximações à solução combinatória

A característica que distingue as soluções desse nível daquelas do anterior é o progressivo aparecimento de relações de correspondência termo a termo entre valores unitários das variáveis, todas elas ou alguma delas, como também entre partes dos valores de uma das variáveis com partes dos das outras. A marca de tais relações é ainda aditiva. Por vezes, fazem-se presentes, complementares às soluções, cálculos aritméticos envolvendo tanto valores numéricos do texto (incluídos os distractores) quanto valores numéricos estranhos ao texto.

Subnível IIA – Do caso favorito, quando é representada uma, e somente uma, possibilidade de combinação entre as variáveis (um e somente um valor de cada uma delas). Seria a combinação escolhida por razão estética ou por adequação de uso. Quando presentes, os valores distractores são também considerados.

Subnível IIB – Dos emparelhamentos parciais entre variáveis e seus valores. São soluções que se compõem de esboços de correspondência termo a termo: (a) entre valor unitário de uma das variáveis ao valor da outra; ou (b) entre partes do valor de uma delas ao valor das outras. Seguem, respectivamente, cálculos aditivos e multiplicativos, envolvendo, de diferentes formas, as variáveis, considerados os distractores ou suas partes decompostas.

Nível III – Da obtenção de algumas combinações

As soluções do nível III trazem, diversamente daquelas dos níveis anteriores, o fato de serem regidas pelo esquema de correspondência “um para muitos” entre os valores das variáveis, de início ainda envolvendo os distractores. Quando predomina o emprego de diagramas, a presença em progressão desse esquema é mais evidente, embora, por vezes, haja sinais de contagem dos casos obtidos e de cálculos aditivos, mesclados com cálculos multiplicativos. Outra marca importante é a de que são soluções não distorcidas por interpretações do conteúdo do problema, restritas a contextos socioculturais específicos.

Subnível IIIA – Da busca inicial de combinações mediante cálculos diversos distorcidos pelos distractores. São soluções com diagrama ou com cálculo, em que estão representadas muitas tentativas de combinações entre os valores das variáveis, mas regidas pelos valores distractores. Essas tentativas são feitas por diferentes junções, repetições e complementações de cálculos variados entre alguns e/ou todos os valores das variáveis, os aditivos mesclados aos multiplicativos, na aparente busca de "muitas maneiras".

Subnível IIIB – Das combinações de variáveis marcadas por relações aditivo-multiplicativas. São soluções diagramadas ou com cálculos, as quais contemplam a composição de relações aditivo-multiplicativas entre todos os valores das variáveis envolvidas. Quando presentes, os cálculos são de adição e/ou de multiplicação entre os valores de cada variável e cada resultado obtido dessas operações. Os resultados são, então, incorretos, por causa dessa "combinação" de produtos e somas, às vezes com sinais de contagem dos casos obtidos.

Subnível IIIC – Das aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão, que consistem em soluções obtidas mediante diferentes combinações e junções de cálculos aditivos, multiplicativos e de divisão entre alguns e/ou todos os valores das variáveis envolvidas, repetidos ou não, bem como entre resultados desses cálculos, complementados, por vezes, por valores unitários do texto do problema e em ordens variadas.

Nível IV – Da presença de soluções combinatórias

Muito apoiadas em diagramas ou em outro recurso gráfico (listas, tabelas, por exemplo), as soluções desse nível diferenciam-se daquelas do nível anterior ao representarem a relação de "um para muitos" entre todos os valores de todas as variáveis, sejam elas duas ou três. Na elaboração dessas soluções, há o emprego de procedimentos econômicos, inclusive os com marca algébrica. Pode-se aqui notar a forte influência do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) sendo utilizado de modo intencional e correto.

Subnível IVA – Da presença de solução combinatória, quando estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer em representação pelo diagrama cartesiano, quer por cálculo multiplicativo canônico.

A sequência didática consiste na proposta de resolução de anagramas. Os alunos devem montar anagramas com alguma palavra de sua preferência, individualmente, e registrar sua formulação no papel. Após essa etapa, é proposto que alunos voluntários socializem no quadro branco suas respostas e que tentem validar seus resultados para os demais colegas da turma, seja por demonstração de cálculos ou apresentação de suas crenças em relação aos resultados obtidos. Por fim, o professor-pesquisador apresenta as equações de Permutação Simples e Permutação com Repetições, e propõe que os alunos façam a revisão de suas formulações para conferir se os resultados estavam corretos.

A proposta de sequência didática desta pesquisa diferencia-se das propostas tradicionais, uma vez que se faz uma inversão na ordem de apresentação do tema, demonstração de exemplos e exercícios propostos. A equação de Permutação Simples pode ser empregada como técnica de contagem para a resolução de anagramas sem letras repetidas: $P_n = n!$, em que n é o número de letras que a palavra contém. Para o caso em que a palavra contém letras repetidas, a equação da Permutação com Repetição é dada por: $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_i} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_i!}$, sendo k_i o número de repetições da i-ésima letra.

Os dados foram obtidos das formulações elaboradas e registradas pelos alunos em papel, bem como as apresentadas no quadro branco. Também foram feitos registros de áudio por meio de gravador de voz e, posteriormente, transcritos para a elaboração da análise, resultados e discussões.

Na primeira aula agendada de Matemática Elementar II, o professor responsável pela disciplina ofereceu uma oportunidade especial. Atendendo ao pedido do pesquisador, o professor Valença gentilmente cedeu uma de suas aulas, permitindo aplicar esta pesquisa. A seguir, serão detalhados o processo e os eventos ocorridos durante essa sessão.

Às 18h da data marcada, na sala 04 do bloco 01 da Universidade Federal do Amazonas, o pesquisador conduziu uma aula experimental para 12 alunos do 2º período do curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física. A sessão de estudo aconteceu em uma única ocasião noturna, estendendo-se por duas horas. A execução dessas atividades demandou materiais básicos, como canetas, folhas de papel em branco e um gravador de voz. Solicitou-se aos alunos que guardassem seus celulares, evitando consultas externas, para que a atividade fosse realizada exclusivamente com base em suas próprias habilidades e raciocínio.

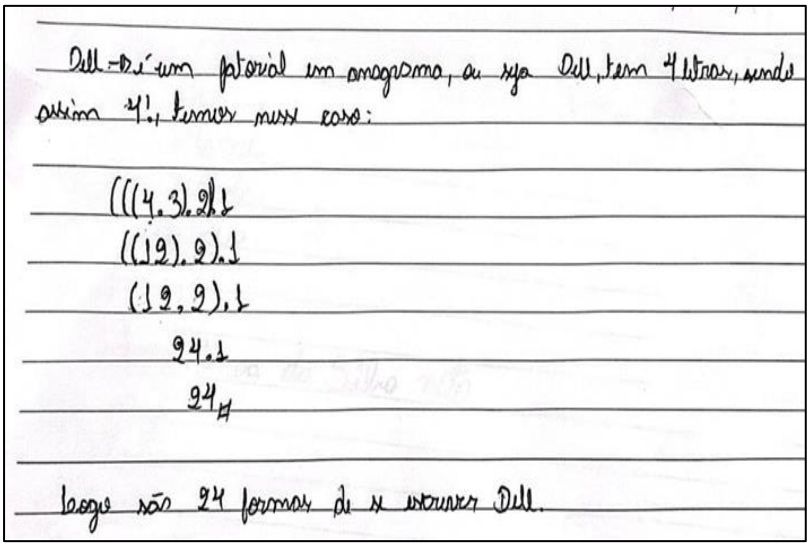
No início do encontro, o professor-pesquisador certificou-se de que todos os alunos compreendiam o conceito de “anagrama”. Em seguida, solicitou-se aos alunos que destacassem uma folha de seus cadernos para resolver um exercício proposto. Depois, pediu-se que escolhessem uma palavra à sua escolha e calculassem quantos anagramas seria possível formar com ela. O pesquisador instruiu: "Escolham um nome e calculem quantos anagramas podem ser formados com ele". Foi esclarecido que eles poderiam usar o próprio nome, um sobrenome ou qualquer outra palavra de sua escolha para determinar o número possível de anagramas.

Foi estabelecido um período de 20 minutos para que cada aluno, individualmente, formulasse sua resolução para o problema, este tempo foi estipulado tendo base o tempo levado pelos alunos do encontro com a turma voluntária. Enfatizou-se a importância de tentarem resolver o exercício individualmente, sem recorrer a celulares ou outras fontes de consulta, para garantir a autenticidade e a veracidade dos dados coletados na pesquisa. Orientou-se que as respostas poderiam ser apresentadas de diferentes formas, seja por meio de texto, fórmulas ou verbalmente. Também se reiterou que essa atividade não influenciaria a avaliação na disciplina de Matemática Elementar II, incentivando a participação ativa e honesta dos alunos sem auxílio externo. Com isso, iniciou-se o tempo destinado para a realização da tarefa proposta.

Após o período designado para a resolução da questão, deu-se início à fase de validação das respostas pelos alunos. De maneira voluntária, eles foram convidados a se dirigir ao quadro para expor os métodos e estratégias adotadas na obtenção de suas respostas. O pesquisador pediu que compartilhassem a palavra escolhida, o número de anagramas identificados e o processo utilizado para chegar ao resultado.

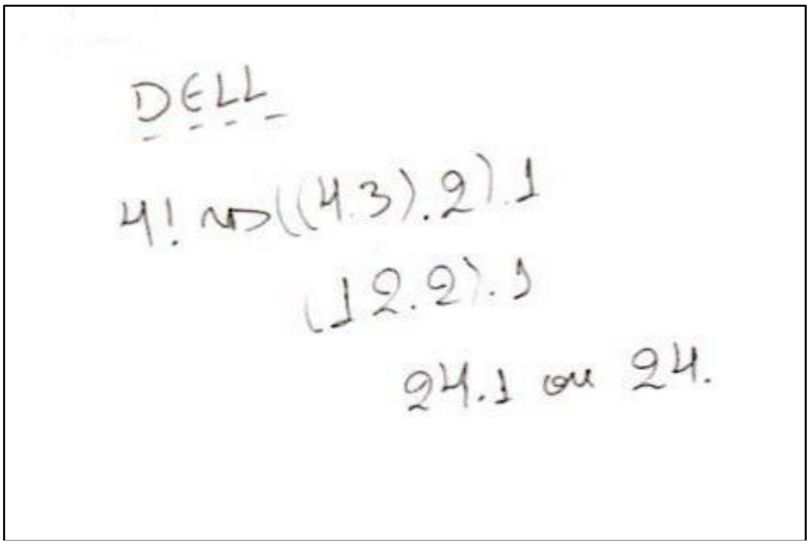
Inicia-se com o primeiro estudante que se voluntariou para apresentar sua resposta no quadro. O primeiro estudante, Aluno 01, escolheu a palavra “DELL”, e apresentou seu resultado no quadro, conforme a Figura 2.

Figura 2 - Resolução apresentada no caderno pelo Aluno 01 para o anagrama da palavra “DELL”



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Figura 3 - Resolução apresentada no quadro pelo Aluno 01 para o anagrama da palavra “DELL”.



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Observa-se que o aluno calculou o fatorial do número de caracteres da palavra, levando ao resultado 24, indicando a aplicação da permutação simples, porém, diferente do resultado esperado da aplicação da equação de permutação com repetição que levaria ao total de 12 combinações. Fica evidente que a resposta do aluno foi baseada no conceito de permutação simples, uma vez que o cálculo multiplicativo é utilizado na resposta. Destaca-se que a resolução apresentada no quadro se assemelhou ao resultado apresentado no caderno (Figura 3), portanto, a imagem foi omitida por redundância.

Nota-se que o Aluno 01 optou por aplicar diretamente uma fórmula matemática, sem esboçar todas as possibilidades do anagrama ou validar sua resposta. Em sua explicação no quadro, ele comentou que:

> *Eu escolhi a palavra DELL e utilizei o "fatorial" por se tratar de uma palavra com 4 letras, então dá 4! (fatorial), logo, fica 4 X 3 X 2 X 1 = 24 então tem 24 maneiras diferentes de escrever a palavra DELL* (Aluno 01).

Essa tentativa de resolver o problema dos anagramas indica que o estudante teve um foco quase exclusivo para os algarismos e caracteres, tentando encontrar uma resposta numérica. A tentativa do Aluno 01 aproxima-se tanto da descrição do subnível IIIA do raciocínio combinatório quanto do nível III descrito por Moro, Soares e Camarinha Filho (2010) em problemas escolares de produto cartesiano.

Os autores descrevem que no nível III do raciocínio combinatório como soluções diagramadas ou com cálculos, as quais contemplam a composição de relações aditivo-multiplicativas entre todos os valores das variáveis envolvidas. Quando presentes, os cálculos são de adição e/ou de multiplicação entre os valores de cada variável e cada resultado obtido dessas operações. Os resultados são, então, incorretos, por causa desta "combinação" de produtos e somas, às vezes com sinais de contagem dos casos obtidos.

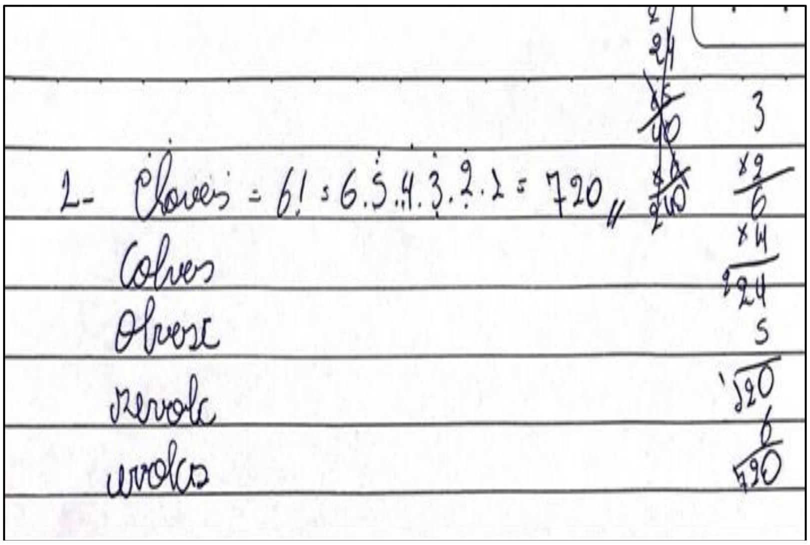
Continuando com a sequência didática, o professor-pesquisador ainda não interveio na explicação do Aluno 01, propondo que prosseguissem com as resoluções antes de introduzir possíveis correções e apresentar as equações matemáticas relevantes.

Prosseguindo com a coleta de respostas dos alunos, solicitou-se a uma estudante que fosse a próxima a detalhar sua metodologia no quadro. Contudo, ela optou por não participar. Recordando que a participação na pesquisa é inteiramente voluntária, a oportunidade foi então estendida a outro aluno disposto a compartilhar sua abordagem de maneira pública.

É importante destacar que apenas um número reduzido de alunos optou por participar ativamente na atividade, o que limitou a capacidade de extrair e analisar as estratégias e mecanismos adotados por eles para solucionar o problema proposto. Ressaltou-se novamente a importância da participação de todos os envolvidos, destacando que apenas através do engajamento dos participantes seria possível obter um diagnóstico preciso da situação investigada.

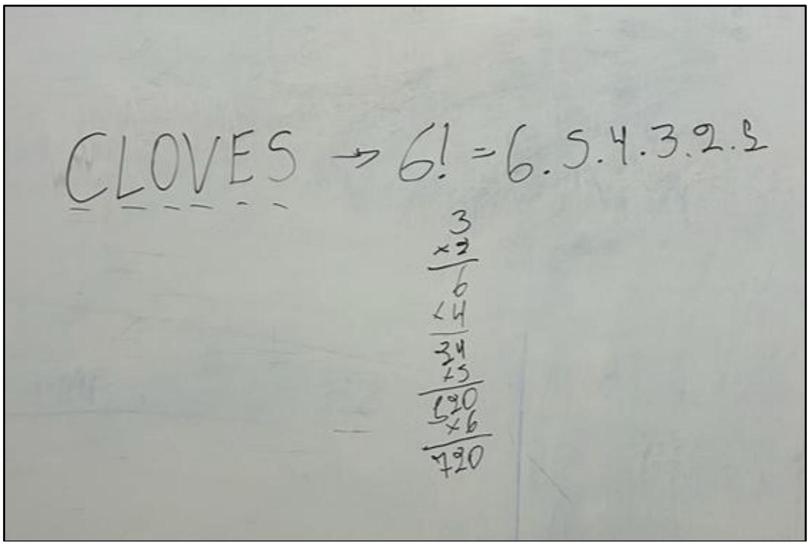
Um segundo estudante se ofereceu voluntariamente para se dirigir ao quadro e expor sua metodologia de resolução. Na sequência, o Aluno 02 apresentou seus resultados, conforme Figuras 4 e 5:

Figura 4 - Resolução apresentada no caderno pelo Aluno 02 para o anagrama da palavra "CLOVES"



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Figura 5 - Resolução apresentada no quadro pelo Aluno 02 para o anagrama da palavra "CLOVES".



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

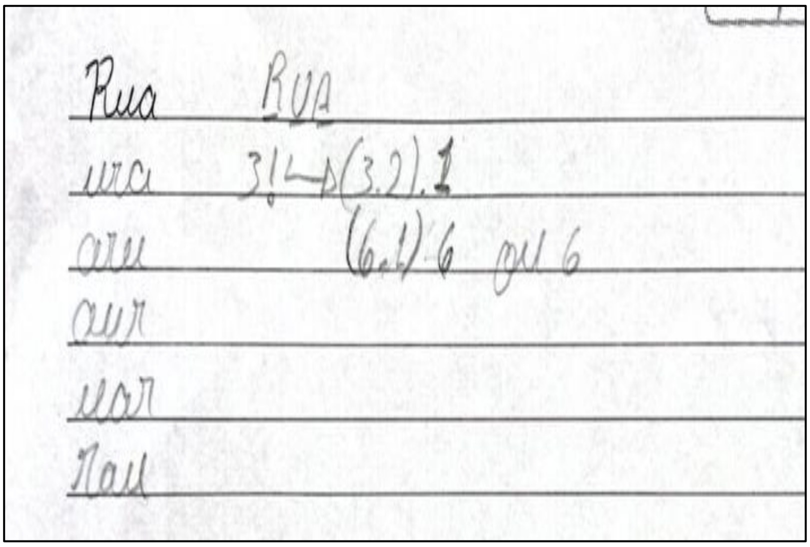
Observa-se que o Aluno 02 apresentou a mesma estratégia de resolução do Aluno 01. Na avaliação da resposta do aluno, destacou-se a aplicação de variadas técnicas de resolução, que incluíram desde diagramas até cálculos algébricos. Mais uma vez não fica evidente se a escolha da aplicação do fatorial decorre do uso direto da equação da permutação simples ou por dedução. Nesse caso, tem-se um resultado correto de 720 combinações, uma vez que não há elementos repetidos no anagrama. Ao fazer sua explicação o Aluno 02 comenta: "*Eu escolhi o nome Cloves, eu usei fatorial, e o nome tem 6 letras, então fica 6! Fatorial, que é multiplicar* *até o último número, no caso 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 = 720, então a palavra tem 720 anagramas, é isso*".

A resolução do anagrama da palavra "CLOVES" no caderno do Aluno 02 pode ser observada na Figura 4. Nota-se que houve uma tentativa inicial do aluno em esboçar as possibilidades do anagrama. Essa tentativa aproxima-se do subnível IIIA da descrição encontrada em Moro, Soares e Filho (2010), onde "[...] estão representadas muitas tentativas de combinações entre os valores das variáveis [...]". Essa abordagem demonstra competência no Nível IV, especificamente no Subnível IVA, que se caracteriza pela habilidade em lidar com soluções de natureza combinatória.

Concluída a exposição, questionou-se aos demais alunos sobre a compreensão dos métodos empregados pelo colega, recebendo-se respostas afirmativas de todos. Posteriormente, dois estudantes manifestaram interesse em apresentar suas soluções no quadro. Foi então decidido que o Aluno 03 procederia primeiro, seguido pelo Aluno 04.

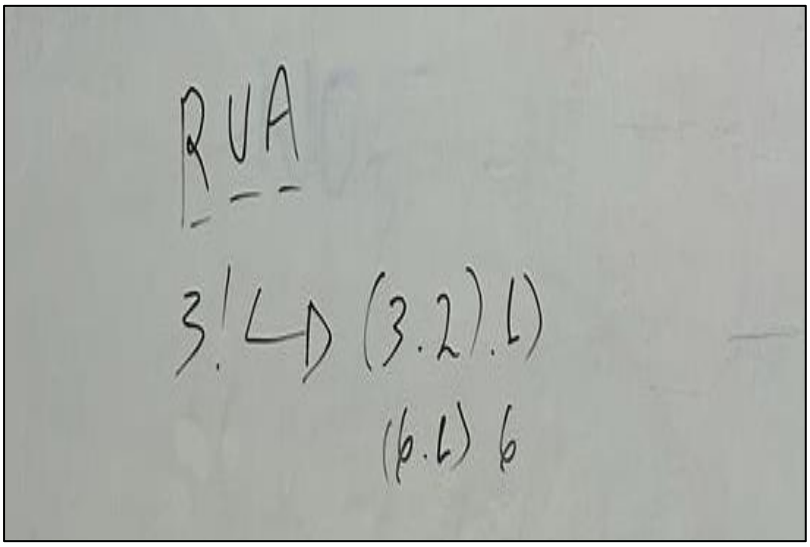
O próximo aluno, identificado por Aluno 03, escolheu a palavra "RUA". Diferente dos demais alunos, o Aluno 03 mostrou-se mais reservado e não realizou uma explicação enquanto redigia no quadro. A resolução pode ser vista nas Figuras 6 e 7:

Figura 6 - Resolução apresentada no caderno pelo Aluno 03 para o anagrama da palavra "RUA"



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Figura 7 - Resolução apresentada no quadro pelo Aluno 03 para o anagrama da palavra "RUA"



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Durante sua apresentação no quadro, o estudante limitou-se a registrar sua resposta, sem fornecer inicialmente uma explicação detalhada. Quando indagado pelo pesquisador sobre o processo utilizado para chegar àquela conclusão, o Aluno 03 então respondeu: "*É, eu coloquei 3 aqui e depois eu multipliquei aqui e deu 6*".

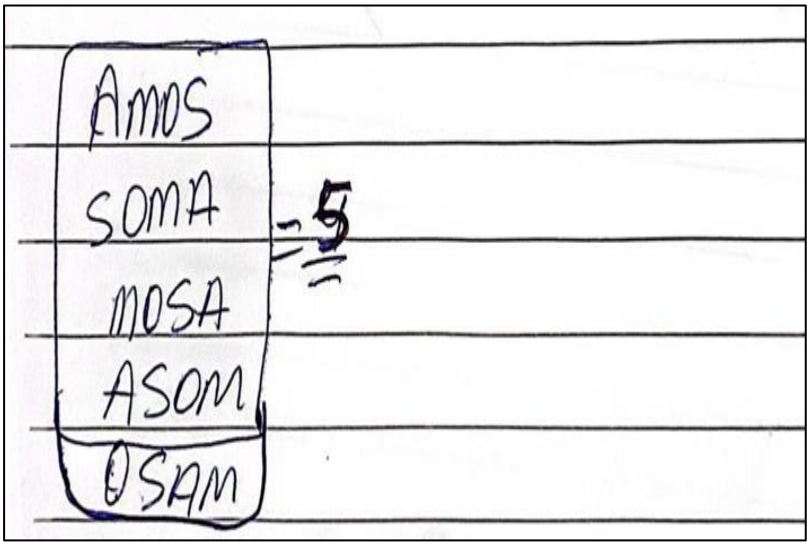
O pesquisador, buscando aprofundar a análise, questionou o aluno sobre o significado do símbolo "!", colocado ao lado do número 3, que o estudante havia mencionado como sendo a quantidade de letras na palavra "RUA". Inicialmente, o estudante admitiu não recordar o termo específico para o símbolo "!", mas enfatizou que o procedimento consistia simplesmente em multiplicar 3x2x1=6. Essa abordagem parece ter sido influenciada pelas explicações fornecidas pelos dois alunos anteriores.

Observa-se, novamente, a utilização da equação da permutação simples, sem evidências de que tenha sido utilizada intencionalmente ou por dedução. Ao comparar e avaliar os resultados apresentados pelo Aluno 03 no caderno, observa-se o esboço de todas as combinações da palavra "RUA" que denota uma validação dos resultados encontrados no cálculo matemático (Figura 6). Entretanto, essa explicação foi omitida pelo aluno durante sua explanação no quadro.

Ao analisar a resposta do aluno, constatou-se não apenas a correção da solução, mas também uma demonstração meticulosa na sua folha de resposta, onde esboçou todas as possíveis configurações da palavra selecionada, complementadas por cálculos algébricos que fundamentaram sua conclusão. Tal abordagem evidencia a mobilização de um avançado nível de raciocínio combinatório, enquadrando-se no Nível IV, especificamente no Subnível IVA, que destaca a competência em estratégias de resolução complexas e combinatórias.

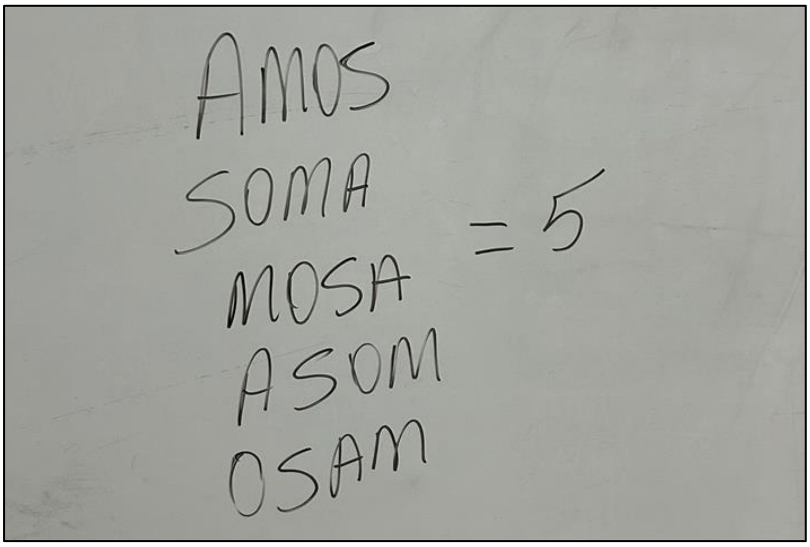
Após a conclusão da resposta do Aluno 03, o pesquisador convidou a próxima voluntária, a Aluna 04, para apresentar sua solução à frente da classe. A palavra escolhida pelo aluno foi "AMOS", como mostrado nas Figuras 8 e 9:

Figura 8 - Resolução apresentada no caderno pelo Aluno 04 para o anagrama da palavra "AMOS"



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Figura 9 - Resolução apresentada no quadro pelo Aluno 04 para o anagrama da palavra "AMOS"



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

O Aluno 04 apresentou os resultados do anagrama para a palavra "AMOS" (Figura 9). Aqui nota-se, pela primeira vez, uma tentativa de resolução sem equações algébricas, apenas com esboços das possíveis combinações da palavra, resultando em um total de 5 combinações, distante do resultado esperado de 24 combinações.

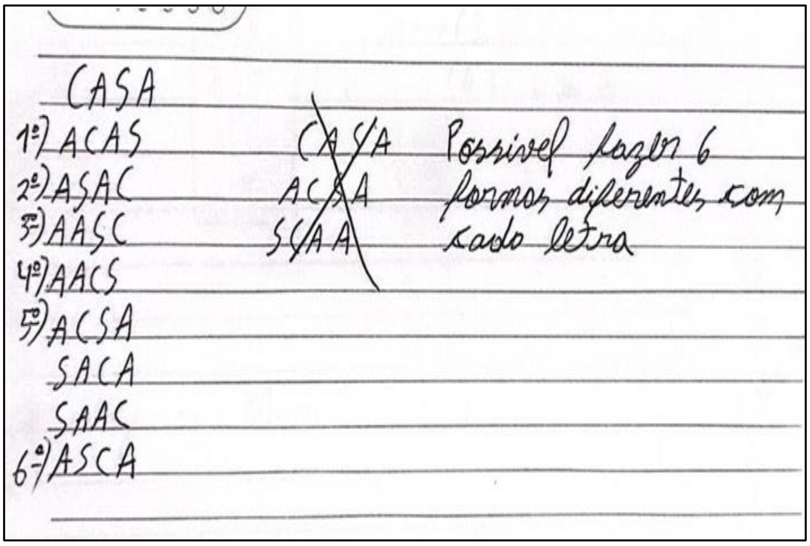
Quando questionado sobre sua resolução, a resposta do Aluno 04 foi a seguinte:

> *Eu só fiz assim, professor, eu não sei esse negócio aqui não[...] enquanto deu para formar, eu fui formando, deu cinco, professor[...] eu só fui fazendo, eu já ouvi dizer que é assim, quando não faz repetição, tipo aqui, quando não tiver repetições, tem que fazer uma outra palavra, pra ir misturando as letras e formar uma outra palavra, não foi que nem os meninos ali não, cheio de números na doida, essa daí eu não estudei não* (Aluno 04).

Na resposta fornecida, a aluna utilizou uma estratégia de listagem de possibilidades, como evidenciado em sua folha de resposta. Contudo, não aplicou métodos de cálculo algébrico ou estratégias baseadas em multiplicação. Essa abordagem sugere um entendimento inicial e superficial do problema, classificando sua resposta no Nível I. Esse nível é marcado por respostas contextualizadas, mas que não demonstram um entendimento profundo sobre combinações, mais especificamente situando-se no Subnível IA. Por outro lado, a resolução apresentada pelo Aluno 04 revela suas dificuldades. Fica claro que ele se limitou às combinações que conseguiu visualizar, mesmo tendo observado as soluções de seus colegas e respondido aos questionamentos do professor-pesquisador. Até aquele momento, a interação com o grupo não foi suficiente para motivá-lo a revisar ou modificar sua resposta original, que permaneceu inalterada no quadro, idêntica à versão de seu caderno, conforme ilustrado na Figura 8.

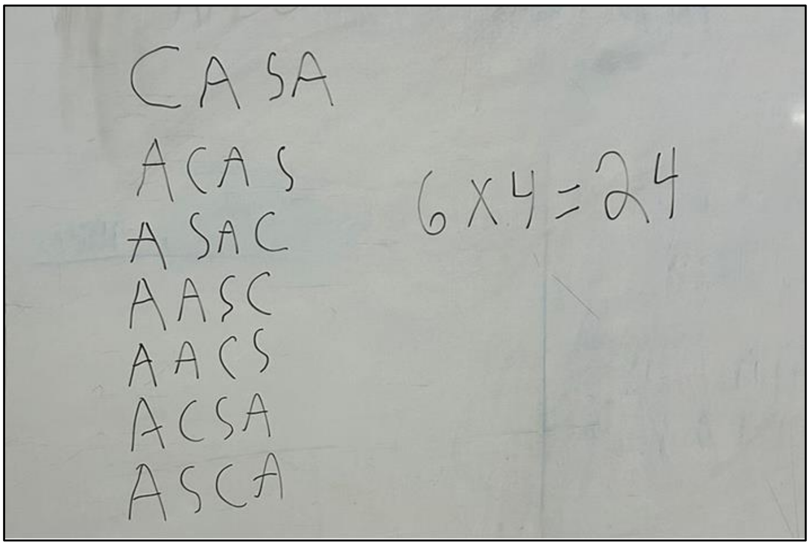
Concluída a exposição do aluno, o pesquisador convidou o próximo voluntário a detalhar sua resposta no quadro. O próximo aluno a apresentar sua resolução, o Aluno 05, escolheu a palavra “CASA” para montar o seu anagrama (Figura 10).

Figura 10 - Resolução apresentada no caderno pelo Aluno 05 para o anagrama da palavra “CASA”



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Figura 11 - Resolução apresentada no quadro pelo Aluno 05 para o anagrama da palavra “CASA”



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

O aluno registrou sua resposta no quadro de maneira reservada, e então foi questionado pelo professor-pesquisador sobre o resultado apresentado:

> *[...] eu só fiz até aí, então eu reparei que conseguia repetir 6 vezes a letra ‘a’, aí eu associei que as outras eu iria conseguir repetir mais três vezes, aí como são quatro letras, eu coloquei [...] eu não cheguei a fazer tudo. Como eu conseguia repetir a letra ‘a’ 6 vezes, eu associei que iria conseguir repetir a letra ‘c’ mais 6 vezes, depois novamente a letra ‘a’ e depois a letra ‘s’, aí eu cheguei ao número 24 de anagramas* (Aluno 05)

Ao esboçar possíveis combinações para solucionar o problema do anagrama, o Aluno 05 demonstrou um princípio de tentativa e um envolvimento inicial com a questão proposta. Interessantemente, antes de sua apresentação no quadro, análises do esboço em seu caderno (Figura 10) revelaram que ainda não havia aplicado o princípio multiplicativo em seu raciocínio combinatório. Isso sugere uma evolução em seu entendimento, possivelmente influenciada pela interação e socialização com os colegas, uma prática encorajada na sequência didática para fomentar a construção coletiva do conhecimento.

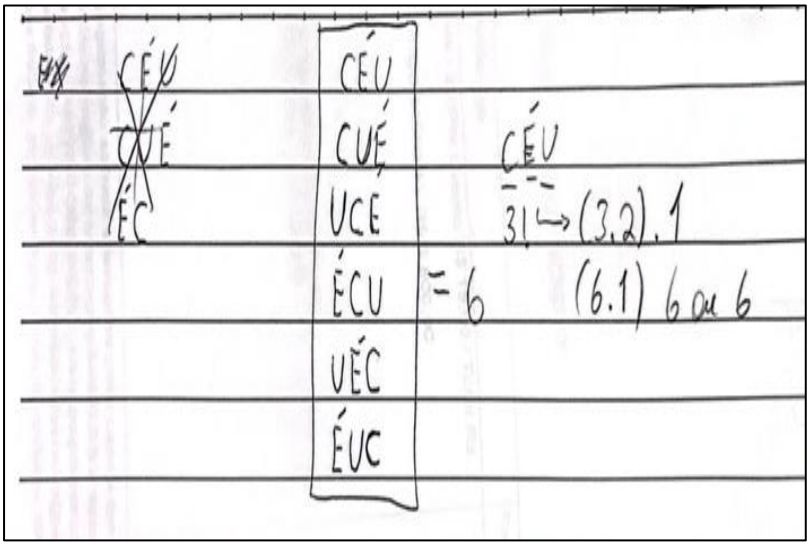
Durante a apresentação, apesar de não alcançar a resposta correta no quadro, o número de anagramas em sua folha de resposta estava precisamente identificado. Essa discrepância entre a apresentação e o trabalho escrito aponta para uma capacidade de dedução correta em uma situação de permutação simples, sem repetição. No entanto, uma compreensão incompleta acerca da repetição da letra "a" na primeira posição levou o aluno a não concluir o resultado correto de 12 combinações. A utilização da técnica de listagem de possibilidades por parte do Aluno 05 reflete um certo nível de engajamento e uma abordagem inicial ao problema, ainda que sua solução integral tenha sido dificultada por uma falta de compreensão completa da questão proposta.

A análise de suas respostas e explicação permite classificar o raciocínio combinatório do Aluno 05 no Nível II, especificamente no Subnível IIA, caracterizado pelos primeiros passos em direção à solução de problemas combinatórios. Tal classificação enfatiza a importância da interação entre colegas e a reflexão sobre as próprias tentativas como meios valiosos para aprofundar a compreensão e melhorar a habilidade em resolver problemas complexos.

Após a apresentação do Aluno 05, buscou-se o próximo voluntário para prosseguir com as explicações. No entanto, inicialmente, não houve manifestações de interesse. Seguiu-se um diálogo esclarecedor no qual o pesquisador destacou a importância da diversidade de participações, enfatizando que cada aluno possui uma perspectiva única na interpretação do problema, e que seriam justamente essas variações que enriqueceriam a análise.

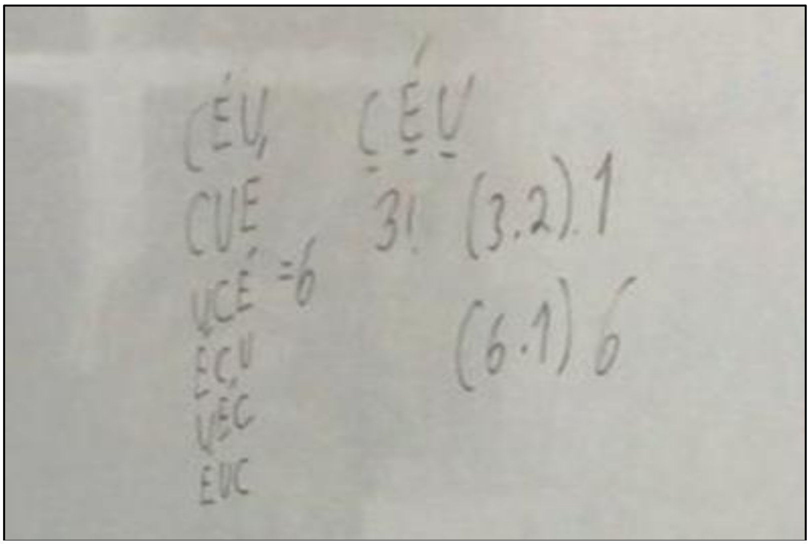
Motivado por essa explanação, um estudante se prontificou a detalhar sua abordagem no quadro, cuja explicação será abordada a seguir. A palavra escolhida pelo Aluno 06 foi “CÉU”, como demonstrado nas Figuras 12 e 13:

Figura 12 - Resolução apresentada no caderno pelo Aluno 06 para o anagrama da palavra “CÉU”



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

Figura 13 - Resolução apresentada no quadro pelo Aluno 06 para o anagrama da palavra “CÉU”



Fonte: Registro do pesquisador, 2023.

A última participação voluntária em apresentar sua resolução no quadro foi do Aluno 06, que elaborou anagramas para a palavra “CÉU” (Figura 13). Observa-se que nesse caso houve tanto o uso do esboço de todas as possíveis combinações quanto da validação do uso da permutação simples por meio do cálculo do fatorial. Após redigir no quadro, o pesquisador pediu a explicação do aluno sobre a resolução, que respondeu: “*Eu fiz assim, eu coloquei cada letra e fui mudando as outras duas, aí deu pra ver que deu 6, aí eu fiz essa conta aqui e chegou no número 6*” (Aluno 06).

Na sua solução, o aluno adotou uma abordagem metódica e eficaz, demonstrando habilidade na listagem de possibilidades e na execução de cálculos algébricos, sem, contudo, recorrer à terminologia técnica específica. Ele apresentou de maneira clara os métodos utilizados, alcançando a resposta correta tanto na sua folha de resposta (Figura 12) quanto na apresentação no quadro (Figura 13). Essa estratégia de solução não só reflete uma compreensão profunda dos conceitos combinatórios como também uma capacidade de aplicá-los de forma precisa, enquadrando-se no Nível IV, especificamente no Subnível IVA. Esse nível destaca a habilidade do aluno em desenvolver soluções combinatórias complexas, demonstrando muito entendimento e aplicação de conceitos avançados.

A decisão do aluno de esboçar todas as possíveis combinações do anagrama antes de proceder à resolução algébrica sugere uma estratégia deliberada para validar o esgotamento de todas as combinações possíveis através do cálculo. Essa abordagem indica uma compreensão e aplicação do método algébrico não apenas como uma ferramenta de solução, mas como um meio de verificação da exaustividade de suas combinações. Interessantemente, essa metodologia contrasta com abordagens mais tradicionais de ensino, onde a equação ou o cálculo algébrico pode ser empregado diretamente antes da exploração manual de todas as combinações possíveis, evidenciando uma adaptação inteligente e reflexiva do aluno às demandas do problema combinatório proposto.

Após a resolução apresentada pelo Aluno 06, não houve mais participações voluntárias, então, essa etapa da sequência didática foi encerrada. No próximo passo, foi realizada a intervenção do professor-pesquisador, em que finalmente são apresentadas as equações de permutação simples e permutação com repetição. Após a apresentação das equações, os alunos tiveram a oportunidade de refazer os cálculos, verificar e validar suas respostas ou reformular, conforme necessário. Após alguns minutos, foi realizada a verificação dos cadernos de todos os estudantes e constatado que todos conseguiram de forma satisfatória elaborar a resolução correta do número de combinações de seus anagramas, aplicando as equações de permutação adequadas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente estudo, foram elaborados anagramas com o objetivo de mobilizar conceitos específicos de Análise Combinatória, com foco em permutações, junto a estudantes de um curso de licenciatura situado no interior do Amazonas. Essa abordagem demonstrou ser uma estratégia pedagógica eficaz para a aprendizagem dos alunos. No entanto, enfrentou-se restrições de tempo e desafios organizacionais que nos levaram a modificar a sequência didática. Inicialmente, foi realizado um encontro com uma turma voluntária que contribuiu para a elaboração da sequência didática final. A aplicação preliminar da sequência didática com uma turma voluntária possibilitou a realização de ajustes cruciais e sua validação antes da implementação final no curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física do ISB. Essa estratégia aprimorou significativamente o processo de ensino-aprendizagem. A sequência ajustada foi, então, aplicada com êxito aos alunos do curso no ISB.

Os aspectos positivos identificados nesta pesquisa incluem a construção colaborativa de conhecimento entre os participantes, bem como o enriquecimento do pesquisador, que simultaneamente explora objetivos educacionais e adquire aprendizados através de sua prática. Por outro lado, enfrentamos desafios inesperados. Diferentemente do engajamento observado na turma voluntária, a aplicação da sequência didática com os alunos do curso resultou em uma participação reduzida por grande parte da turma. Essa discrepância evidencia a necessidade de considerar as características e dinâmicas específicas de cada grupo ao construir sequências didáticas. Essa redução na participação ativa do aluno destaca uma quebra no contrato didático estabelecido durante a primeira etapa, que envolveu a apresentação e ambientação. A baixa participação ativa dos alunos compromete o pleno desenvolvimento da TSD proposta por Brousseau, que defende o papel do aluno como sujeito ativo no processo de construção do conhecimento, assumindo o protagonismo. Assim, o professor atua como mediador, afastando-se do tradicional papel de transmissor de informações.

Durante a aplicação da sequência didática, pode-se observar a mobilização de conceitos de Permutação Simples e Permutação com Repetição, além de conceitos como Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial de um número. Notou-se uma dificuldade comum, tanto na turma experimental voluntária quanto na aplicação final com alunos do curso, que foi a dificuldade em aplicar corretamente conceitos de permutação com repetição. Foi possível observar que os alunos não conseguiram resgatar totalmente os conhecimentos de Análise Combinatória do Ensino Médio, mas de certa forma conseguiram se apropriar durante a prática desenvolvida no Ensino Superior. Alguns alunos obtiveram sucesso ao aplicar a equação de permutação simples, porém, quando o anagrama continha letras repetidas não houve aplicação da equação da permutação com repetição. A seleção das palavras dos anagramas pelos próprios alunos revelou escolhas mais simples, considerando-se que o número de letras das palavras variou entre três e seis.

À luz da TSD, a análise das estratégias e erros dos alunos revela diversas dificuldades, como a não interpretação completa do problema, que impacta na escolha inadequada de estratégias e na abordagem incorreta da resolução. Isso resulta em erros, como a seleção de fórmulas incorretas, a utilização de distrações e a desconsideração de repetições de letras, especialmente nas permutações com repetição.

Apesar do caráter exploratório e das limitações metodológicas, este estudo revelou avanços significativos no desenvolvimento do raciocínio combinatório entre os alunos do Ensino Superior, através da aplicação de sequências didáticas. Identificou-se diferentes níveis e subníveis de solução para problemas de combinatória, demonstrando uma evolução desde respostas não pertinentes ou sem sinais de raciocínio combinatório até aquelas que, embora não alcançassem um nível de formalidade teórica, exibiam claramente o uso desse tipo de raciocínio. Esse progresso, fortemente ancorado no uso prático de ferramentas, como o diagrama cartesiano, ressalta a importância de abordagens pedagógicas que incentivem etapas progressivas de desenvolvimento e refinamento do pensamento combinatório.

Os achados deste estudo reforçam as recomendações da literatura sobre a integração de problemas que demandam raciocínio combinatório em todos os níveis educacionais, destacando a capacidade e a necessidade dos estudantes de se engajarem com tais desafios desde cedo. Essa prática não apenas favorece a aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, mas também é crucial para o desenvolvimento cognitivo, conforme indicado pela teoria piagetiana sobre a lógica proposicional.

A aplicação prática das sequências didáticas provou ser eficaz, pois permitiu aos estudantes, mesmo aqueles com conhecimentos prévios limitados em Análise Combinatória, alcançar as soluções corretas ou ajustar seus raciocínios após a intervenção docente. Além disso, promoveu a socialização e o desenvolvimento colaborativo do raciocínio combinatório, mostrando-se uma estratégia pedagógica valiosa não só para o Ensino Superior, mas também com potencial de adaptação para o Ensino Médio. Assim, evidencia-se a relevância do desenvolvimento gradual e continuado do raciocínio combinatório, iniciando em fases precoces da educação, o que pode servir como fundamento para futuras investigações e práticas pedagógicas em matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. Ag. Diálogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 1, p. 145-178, 2018. Disponível em: https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/301. Acesso em: 10 fev. 2024.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. *In*: BRUN, J. (org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? In: **Les dossiers des sciences de l'éducation**, n. 8, p. 59-72, 2002.

BARBOSA, G. dos S.; OLIVEIRA, C. F. dos S. de. Produto de medidas: analisando as estratégias de resolução de problemas de estudantes do 7º ano do ensino fundamental. **Com a Palavra, o Professor**, v. 3, n. 7, p. 154-178, 2018. DOI: 10.23864/cpp.v3i3.286. Disponível em: http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/286. Acesso em: 27 mar. 2024.

BASNIAK, M.; DOMBROWSKI, A. F. Combinando: um material para ensino de análise combinatória a estudantes cegos. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 8, n. 1, p. 1-23, 2023. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/15346. Acesso em: 10 fev. 2024.

BASTOS, T. A.; ROSA, M. Modelagem na Educação Matemática para o desenvolvimento de conceitos de Análise Combinatória. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/490. Acesso em: 25 ago. 2021.

BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Granada: Servicio de Reprografia de la Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 2001. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Carmen Batanero/publication/ 255738320_ Didactica_ de_la_Estadistica/links/00b495209dbca3c32f000000/Didactica-de-la-Estadistica.pdf. Acesso em: 10 fev. 2024.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME**, v. 8, n. 3, p. 247-263, 2005. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/335/33508302.pdf. Acesso em: 10 fev. 2024.

BATISTA, M. S. **Princípio fundamental da contagem e modelagem matemática nos anos finais do ensino fundamental**. 2020. 85f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

BORBA, R. E. S. R. **O efeito de significados numéricos, invariantes conceituais e representações simbólicas no raciocínio de crianças sobre números direcionados**. 2002. Tese (Doutorado) - Universidade Oxford Brookes, 2002.

BORBA, R. E. de S. R.; ROCHA, C. de A.; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/d78Jmtspzcc9jzGzmBSc4rg/#. Acesso em: 10 fev. 2024.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora: Edgard Blücler Ltda, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 10 fev. 2024.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais – Matemática**/1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 10 fev. 2024.

BRITO, C. E.; ALMEIDA, L. M. A Utilização da Gamificação na Aprendizagem de Análise Combinatória: possibilidades atreladas ao uso do H5P e do Wordwall. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 6, n. 1, 2022. DOI: 10.34019/2594-4673.2022.v6.38185. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/38185. Acesso em: 26 mar. 2024.

BROUSSEAU, G. *et al*. Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. **Recherches en didactique des mathematiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986. Disponível em: http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1462973817_Fundamentos%20de%20Brousseau.pdf. Acesso em: 10 fev. 2024.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. *In*: BRUN, J. (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRUM, W. P.; POFFO, I. R. D. O uso de pressupostos teóricos da teoria da aprendizagem significativa no estudo acerca de anãlise combinatória. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, v. 11, n. 1, p. 117-127, 2016.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability**: A literature review (full report). London: Nuffield Foundation, 2012. Disponível em: https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/11/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acesso em: 15 abr. 2024.

CAMPOS, C. E.; IGLIORI, S. B. C. Teses e dissertações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória: perspectivas investigativas. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 16, p. 1-20, 2021.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR – CAPES. Portal de periódicos. CAPES, 2020. Disponível em: http://www.periodicos.capes.gov.br.ez88.periodicos.capes.gov.br/index.php. Acesso em: 16 nov. 2023.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática**. 6. ed. Campinas: Papirus Editora, 1996.

DIAS, R. A.; FREITAS, A.; VICTER, E. das F. Noções de análise combinatória na educação básica: atividades interdisciplinares. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 3, p. 296-313, 2017. DOI: 10.24116/emd25266136v1n32017a03. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/39. Acesso em: 26 mar. 2024.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. Sequências didáticas para o oral e para o escrito: apresentação de um procedimento. *In*: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas: Mercado de Letras, 2004. p. 95-128.

DUARTE, D. A. **A resolução de problemas contextualizados sobre análise combinatório na 2ª série do ensino médio**. 2019. 48f. TCC (Graduação em Matemática) - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2019.

DURO, M. L.; BECKER, F. Análise Combinatória: do método aleatório à combinatória sistemática. **Educ. Real**., Porto Alegre, v. 40, n. 3, p. 859-882, set. 2015. DOI: 10.1590/2175-623641714. Disponível em http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100 - 31432015000300859&lng =pt&nrm=iso. Acessos em: 27 mar. 2024.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

FRANCO, D. L. A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de Física moderna no Ensino Médio. **Revista Triângulo**, Uberaba, v. 11, n. 1, p. 151-162, 2018. DOI: 10.18554/rt.v0i0.2664. Disponível em: https://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2664. Acesso em: 29 mar. 2024.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 65. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2018.

FREITAS, J. L. M. **Teoria das situações didáticas**. Educação Matemática: uma (nova) introdução. São Paulo: Série Trilhas, 2008. p. 77-111.

GIESELER, L. C. *et al.* A Proposição e Resolução de Problemas na aprendizagem de Matemática: possibilidades para o Ensino Superior. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 7, n. esp., p. e4004, 2021. DOI: 10.35819/remat2021v7iespecialid5513. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/5513. Acesso em: 3 fev. 2024.

GROENWALD, C. L. O.; ZOCH, L. N.; HOMA, A. I. R. Seqüência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 34, p. 27-55, 2009. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3298. Acesso em: 29 mar. 2024.

GUILHERME, A. P. *et al*. Uso de índice de vegetação para caracterizar a mudança no uso do solo em Coari-AM. **Sociedade & Natureza**, v. 28, p. 301-310, 2016.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **De la lógica del niño a la lógica del adolescente**. Buenos Aires: Paidós, 1972. Disponível em: https://dblavallekuri.inba.gob.mx/xmlui/handle/123456789/14753. Acesso em: 29 mar. 2024.

KAPUR, J. N. Análise combinatória e matemática escolar. **Estudos Educacionais em Matemática**, p. 111-127, 1970. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/3481871. Acesso em: 29 mar. 2024.

KASHIMOTO, L. K.; OLIVEIRA, R. G. de. O Ensino de análise combinatória como referências curriculares para saberes docentes. **Educitec - Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, Manaus, v. 1, n. 01, p. e1320, 2015. DOI: 10.31417/educitec.v1i01.13. Disponível em: https://sistemascmc.ifam.edu.br/educitec/index.php/educitec/article/view/13. Acesso em: 26 mar. 2024.

LIMA, E. T.; BORBA, R. E. S. R. Articulando os raciocínios combinatório e probabilístico a partir da resolução de problemas na EJA. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 21, n. 1, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/37126. Acesso em: 29 mar. 2024.

LIMA, P. V. P. de *et al*. Brasil no Pisa (2003-2018): reflexões no campo da Matemática. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 3, n. 2, p. 03-26, 2020. DOI: 10.30612/tangram.v3i2.12122. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12122. Acesso em: 27 mar. 2024.

LOPES, C. A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental**: uma análise curricular. 1998. 125f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998. Disponível em: https://hdl.handle.net/20.500.12733/1586331. Acesso em: 27 mar. 2024.

LUCKESI, C. C. Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. **Centro de Referência em Educação Mario Covas**, São Paulo, 1990. Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_08_p133-140_c.pdf. Acesso em: 27 mar. 2024.

MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G.; MELO, L. M. de S. A Resolução de Problemas de Produto Cartesiano por Alunos do Ensino Fundamental. **Educ. Real.,** Porto Alegre, v. 43, n. 1, p. 293-311, mar. 2018. DOI: 10.1590/2175-623664750. Disponível em http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-31432018000100293&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 30 mar. 2024.

MAIA, E. C. L **Letramento estatístico: compreensão gráfica por meio de sequências didáticas interdisciplinares**. 2021. 182f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) – Universidade Federal do Amazonas, Humaitá, 2021.

MARQUES, B. S. L.; BARBOSA, N. M. Sala de aula invertida adaptada ao ensino remoto: uma proposta de ensino híbrido aplicado à Análise Combinatória. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 9, n. 18, p. 122-142, 2021. DOI: 10.5965/2357724X09182021122. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/19121. Acesso em: 26 mar. 2024.

MARTINS, G. G.; SILVA, J. D. Reflexão sobre o ensino de análise combinatória no Ensino Médio: percepções de professores formados no CEUNES–UFES. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 11, n. 21, p. 44-52, dez. 2014. DOI: 10.18542/amazrecm.v11i21.2369. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/2369. Acesso em: 26 mar. 2024.

MELLO, H. P. M. **Desmistificando o ensino de análise combinatória**. 2017. 64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.

MIOTTO, E. **A análise combinatória e seu ensino**. 2014. 85f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

MOÇAMBITE, N. S. **Situações didáticas na aprendizagem matemática na perspectiva da construção do conhecimento**. 2016. 217f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2016.

MORGADO, A. C. O. *et al*. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, n. 1, p. 99-124, 2006. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/543. Acesso em: 30 mar. 2024.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C.; CAMARINHA FILHO, J. A. Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano. **Zetetike**, Campinas, v. 18, n. 1, p. 211-242, 2010. DOI: 10.20396/zet.v18i33.8646698. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646698. Acesso em: 30 mar. 2024.

NASCIMENTO, R. A. **Análise Combinatória no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas**. 2018. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

NAVARRO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación matemática**, v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/10037/1/Razonamiento1996Navarro.pdf. Acesso em: 30 mar. 2024.

NERES, R. L.; CORREA, V. B. Aprendizagem matemática: usando loterias da caixa como metodologia de ensino de análise combinatória e probabilidade. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 5, n. 2, p. 170-189, 2022. DOI: 10.30612/tangram.v5i2.14532. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/14532. Acesso em: 26 mar. 2024.

NUNES, C. B.; VIDAL, T. C. Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório. **Com a Palavra, o Professor**, v. 2, n. 4, p. 80-104, 2017. DOI: 10.23864/cpp.v2i3.237. Disponível em: http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/237. Acesso em: 26 mar. 2024.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3 ed. 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica editora, 2018.

PEREIRA, J. F. F.; CURI, E. O Princípio Fundamental da Contagem: alunos de quinto ano construindo o raciocínio combinatório. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 7, n. 2, p. 39-51, 2016. DOI: 10.26843/rencima.v7i2.1147. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/1147. Acesso em: 27 mar. 2024.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetike**, Campinas, v. 17, n. 1, p. 105-150, 2009. DOI: 10.20396/zet.v17i31.8646726. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646726. Acesso em: 13 abr. 2024.

PESSOA, C. A. S; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, p. 1-22, 2010. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/31781/. Acesso em: 30 mar. 2024.

PESSOA, C. A. dos S.; SANTOS, L. T. B. dos. Estudo de caso: como duas crianças passam a compreender a combinatória a partir de intervenções? **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 358-382, 2012. DOI: 10.14244/19827199360. Disponível em: https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/360. Acesso em: 30 mar. 2024.

PLACHA, K. C. **A solução de problemas de produto de medidas de crianças da 3ª Série do ensino fundamental e a intervenção do professor**. 2006. 300f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

PLACHA, K. C; MORO, M. L. F. Problemas de produto cartesiano, Raciocínio Combinatório e Intervenção do professor. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, v. 25, n. 1, p. 7-17, 2009. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ptp/a/cyn6q9tSxLybHwVQGw9x5Qp/#. Acesso em: 30 mar. 2024.

PORTELA, A. C. T.; OLIVEIRA, H. H. G. S.; VIOLA, D. N. Utilização do software R para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da análise combinatória. **Ensino Em Re-Vista**, v. 30, p. 1-25, e037, 2023.

ROCHA, C. A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2011.

ROCHA, B. P. *et al*. A Resolução de Problemas para o Ensino-Aprendizagem de Arranjo Simples e Combinação Simples. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, 2018. Disponível em: https://proceedings.sbmac.emnuvens.com.br/sbmac/article/view/2249. Acesso em: 30 mar. 2024.

ROSTIROLA, S. C. M.; SIPLE, I. Z. Materiais lúdicos como instrumentos de ensino-aprendizagem-avaliação de análise combinatória no Ciclo de Alfabetização. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e020016, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id258. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/191. Acesso em: 26 mar. 2024.

SANTOS, R. C. dos. Um estudo probabilístico sobre caminhos em reticulados quadrados. C.Q.D. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 8, 2016. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/99. Acesso em: 26 mar. 2024.

SANTOS, A. A. M. **Binômio de Newton**: uma abordagem no campo da análise combinatória para o ensino médio. 2019. 107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2019.

SANTOS, L. R. **A experimentação como estratégia de ensino de Química em escola privada no Município de Humaitá - AM**. 2020. 131f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) - Universidade Federal do Amazonas, Humaitá, 2020.

SANTOS, E. V.; ANDRADE, S. Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e020030, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id293. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/205. Acesso em: 26 mar. 2024.

SANTOS, R. P. dos; VASCONCELLOS, L. A. da S. A matemática por trás do sudoku. C.Q.D. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 12, 2018. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/158. Acesso em: 26 mar. 2024.

SILVA, B. A. Contrato Didático. *In*: FRANCHI, A. *et al*. (orgs). **Educação Matemática uma Nova Introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 43-64. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/76288/mod_resource/content/1/capitulo_cd_puc.pdf. Acesso em: 30 mar. 2024.

SILVA, P. R. M. **A prática e a formação docente no ensino de biologia**. 2019. 103f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) - Universidade Federal do Amazonas, Humaitá, 2019.

SILVA, D. P.; GUERRA, E. A. A aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio: uma proposta didática por meio da Resolução de Problemas. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 3, n. 2, p. 40-51, 2017. DOI: 10.35819/remat2017v3i2id2346. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2346. Acesso em: 26 mar. 2024.

SILVEIRA, A. A. da; ANDRADE, S. de. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e020017, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id259. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/192. Acesso em: 26 mar. 2024.

SILVEIRA, A. A. da; ANDRADE, S. de. Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, n. 1, p. e022019, 2022. DOI: 10.37001/remat25269062v19id615. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/83. Acesso em: 26 mar. 2024.

SOUZA, D. W. N. L. **Mobilização do letramento estatístico articulado ao contexto socioambiental**. 2018. 175f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) – Universidade Federal do Amazonas, Humaitá, 2018.

SOUZA, D. W. N.; VAZ, M. A. B. Formação de professores: os desafios do ensino de estatística nas séries iniciais. **Revista de Estudos e Investigação em Psicologia e Educação**, Corunha, n. 6, pág. 242-246, 2017. DOI: 10.17979/reipe.2017.0.06.2556. Disponível em: https://revistas.udc.gal/index.php/reipe/article/view/reipe.2017.0.06.2556. Acesso em: 29 mar. 2024.

SOUZA, M. R. **Letramento estatístico por meio de sequências didáticas no ensino médio em uma escola pública no sul do Amazonas**. 2020. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) – Universidade Federal do Amazonas, Humaitá, 2020.

TAVARES, P. C. M.; BOGUTCHI, T. F. Ensino da Análise Combinatória por meio de Tecnologia Móvel: um relato de experiência. **Abakós**, v. 7, n. 3, p. 22-34, 29 nov. 2019. Disponível em: https://smtpgw.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/16537. Acesso em: 30 mar. 2024.

TEIS, D. T.; TEIS, D. T. A abordagem qualitativa: a leitura no campo de pesquisa. **Biblioteca On-line de Ciências da Comunicação**, v. 1, p. 1-8, 2006. Disponível em: http://bocc.ufp.pt/pag/teis-denize-abordagem-qualitativa.pdf

TEIXEIRA, P. J. M; PASSOS, C. C. M. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **ZETETIKÉ**, **Revista de Educação Matemática**, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/28793/ . Acesso em: 30 mar. 2024.

TEIXEIRA, M. A. G.; TRAVASSOS, M. F. G.; CRAVEIRO, I. M. Polinômio de Gauss: uma investigação da origem do conceito e a relação com coeficiente binomial. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 11, n. 31, p. 1-15, 2024. DOI: 10.30938/bocehm.v11i31.11108. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/11108. Acesso em: 26 mar. 2024.

TROCADO, N. L. **Uma proposta didática para um curso básico de análise combinatória**. 2017. 135f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7. **Anais**... Recife: SBEM, 2004. Disponível em: https://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf. Acesso em: 30 mar. 2024.

VENEZUELA, A. L. Análise combinatória: metodologia de apoio ao professor. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 9, n. 1, 2021. Disponível em: http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/437/4372025007/. Acesso em: 30 mar. 2024.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. *In*: RESH, R.; LANDAU, M. **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174. Disponível em: https://cir.nii.ac.jp/crid/1130000797467050240. Acesso em: 30 mar. 2024.

VIDAL, S. C. **Criptografia como ferramenta educacional no ensino da Análise Combinatória**. 2019. Dissertação (Mestrado em Projetos Educacionais de Ciências) - Universidade de São Paulo, Lorena, 2019.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. O estudo do modelo combinatório de Padovan por meio da engenharia didática. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, v. 12, n. 1, p. 397-416, 2023. DOI: 10.22481/rbba.v12i01.11698. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/rbba/article/view/11698. Acesso em: 26 mar. 2024.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

ZANON, T. X. D. **Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática**. 2019. 332f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.