UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ALZENIRA DA SILVA LEÃO

RECONHECENDO INVARIANTES OPERATÓRIOS NO SÓLIDO GEOMÉTRICO CILINDRO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

MANAUS - AMAZONAS

2024

ALZENIRA DA SILVA LEÃO

RECONHECENDO INVARIANTES OPERATÓRIOS NO SÓLIDO GEOMÉTRICO CILINDRO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação de Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Amazonas para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática na Linha de Processos de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática.

ORIENTADOR: DR. YURI EXPÓSITO NICOT

COORIENTADOR: DR. GLAUCO COHEN FERREIRA PANTOJA

MANAUS - AMAZONAS

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Leão, Alzenira da Silva
L437r Reconhecendo invariantes operatórios no sólido geométrico cilindro à luz da teoria dos campos conceituais / Alzenira da Silva Leão . 2024
123 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Yuri Expósito Nicot
Coorientador: Glauco Cohen Ferreira Pantoja
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Processo de Ensino e Aprendizagem. 2. Resolução de Problema. 3. Invariantes Operatórios. 4. Geometria Espacial. 5. Estruturas Multiplicativas. I. Nicot, Yuri Expósito. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Alzenira da Silva Leão

RECONHECENDO INVARIANTES OPERATÓRIOS NO SÓLIDO GEOMÉTRICO CILINDRO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/PPG-ECIM da Universidade Federal do Amazonas/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br YURI EXPOSITO NICOT
Data: 19/04/2024 19:02:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Yuri Expósito Nicot
Presidente da Banca

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO ETEVAL DA SILVA FEITOSA
Data: 19/04/2024 19:56:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa
Membro Interno

Documento assinado digitalmente
gov.br PATRIK MARQUES DOS SANTOS
Data: 19/04/2024 19:11:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Patrik Marques dos Santos
Membro Externo

Aprovado em: 18/04/2024

DEDICATÓRIA

Esta dissertação é inteiramente dedicada aos meus pais, Alzenir e Itamar, aos meus filhos, Arthur Gabriel e Ana Alice e ao meu esposo, Dannylo. Graças ao apoio e incentivo de vocês realizei um sonho. Aqui estão os resultados das minhas muitas renúncias, que foi possível por ter a compreensão e amor de vocês. Gratidão!

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que me permitiu ter saúde, ânimo e coragem nesses dois anos de leitura e de produção. A fé de que esse dia chegaria me fez seguir firme no objetivo de concluir mais uma etapa acadêmica e possibilitar traçar outras conquistas maiores. Gratidão Deus por me dá a sabedoria e a paciência que eu necessitava durante o processo de formação;

Aos meus pais, Alzenir e Itamar, por me presentear com o amor incondicional, o cuidado e o zelo. Por me permitir estudar e alçar outros níveis acadêmicos e muitas das vezes sem entender os motivos, incentivaram-me a crescer e ir atrás daquilo que acredito ser o certo sempre;

Aos meus filhos, Arthur e Ana, que durante a formação entenderam a minha ausência e as muitas vezes que precisei ficar trancada no quarto lendo ou escrevendo. Vocês me fazem mais forte e durante essa etapa o amor e a compreensão foram essenciais para que pudéssemos hoje comemorar essa vitória. Amo-os;

Ao meu esposo e companheiro de vida, Dannylo, que a uma década, me apoia e incentiva a crescer academicamente e profissionalmente. Gratidão por me auxiliar a enfrentar a loucura que foi esse processo e mesmo sem entender o que eu falava, ouvia e concordava. Amo-te;

Aos meus sogros, Ana Catarina e Francisco João Bosco, por terem ficado com meus filhos e cuidado do meu lar em minha ausência quando estava em campo realizando a coleta de dados. Gratidão;

Ao meu orientador e amigo, Professor Yuri, por topar de primeira está comigo nessa jornada e ter acompanhado de perto meu nascimento como pesquisadora. Gratidão pelas palavras de incentivo, pelo apoio nas minhas decisões e por todo conhecimento construído nesse período;

Ao meu coorientador e amigo, Professor Glauco, que muitas das vezes sem dizer nada, fez a escuta ativa e no momento ideal soltou palavras certeiras para acalmar e incentivar quem estava no processo de construção. Gratidão pelas oportunidades de construir conhecimento e pelas partilhas ao longo dessa etapa;

Gratidão à minha amiga de longa data, Lissa Nareli que distante geograficamente foi presente em todos os momentos apoiando e ouvindo as queixas de uma pesquisadora em formação. A partilha de conhecimento foi essencial para que esse dia chegasse;

Ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática pela acolhida no início do mestrado, por responder imediatamente as demandas e dúvidas e por oportunizar a formação de pesquisadores na Amazônia;

Aos professores do programa que nos presentearam com aulas dinâmicas e uma maneira diferenciada de olhar para as nossas problemáticas educacionais. Gratidão pela partilha de conhecimento;

Aos meus colegas de turma, pelas discussões, seminários e trabalhos em grupo, graças a nossa união, conseguimos concluir uma importante etapa. Em especial, agradeço a minha amiga e mãe de coração, Rosemary, juntas, fomos consolo uma para outra. Nessa etapa sua amizade e carinho de mãe me fortaleceu e me permitiu atingir a conclusão do curso;

Ao Grupo de Ensino e Aprendizagem Significativa em Exatas (GEAE) pela parceria, amizade e apoio durante as reuniões e discussões ao longo da formação. A pesquisa é uma construção coletiva e graças aos professores, colegas e amigos existentes no grupo estou finalizando uma importante etapa acadêmica. Gratidão em especial a Amanda Cantal que com sua experiência compartilhou dicas maravilhosas;

À Escola Sebastiana Braga e aos responsáveis pela gestão e bom funcionamento do espaço educativo, minha gratidão pela oportunidade de mergulhar na realidade educacional de Manaus e aflorar a vontade de contribuir na educação da região norte;

À Universidade Federal do Amazonas por ter sido um espaço acolhedor e de aprendizagem. Gratidão por oportunizar educação de qualidade e gratuita;

Para finalizar agradeço a todos aqueles que de alguma forma contribuíram e torceram para que eu desse mais um passo na formação acadêmica. O espaço é limitado para listar as tantas pessoas incríveis que estiveram comigo, contudo, destaco a minha gratidão e o compromisso de usar o meu conhecimento para que novos frutos venham a partir deste. Paulo Freire foi sábio ao dizer que a educação não transforma o mundo, ela transforma as pessoas, para que nós possamos ser o agente da mudança por meio das nossas ações.

A apropriação de uma cultura por um indivíduo depende necessariamente de sua própria atividade, o que compreende seu próprio trabalho de construção ou reconstrução dos conceitos constitutivos dessa cultura. Ela depende também da ajuda que ele recebe do meio em que está inserido e, portanto, da qualidade das mediações de que ele se beneficia.

Gérard Vergnaud

RESUMO

O desenvolvimento cognitivo ocorre por meio da conceitualização ao longo do tempo e pelas experiências vividas pelo sujeito. No que tange ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, a formação de conceitos é necessária para que o estudante se desenvolva em uma postura crítica frente aos problemas existentes na atual sociedade moderna, como propõe a BNCC, mostrando, portanto, uma urgência em romper com a memorização de algoritmos que têm encaminhado para uma aprendizagem mecânica e sem lógica em relação aos conceitos matemáticos visitados. Este estudo tem por objetivo analisar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes da 3ª série do Ensino Médio em situações-problema envolvendo o conceito de volume do sólido geométrico cilindro à luz da teoria dos campos conceituais em uma escola estadual pública da cidade de Manaus. É feito um recorte quanto aos conceitos a serem abordados dentro da geometria espacial no conteúdo de corpos redondos, destacando aquele relativo a volume presente nas estruturas multiplicativas discutidas por Vergnaud. Os pressupostos teóricos utilizados para a construção do estudo estão ancorados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2009, 2011, 2014) e a Teoria dos Campos Conceituais elaborada por Gérard Vergnaud. A pesquisa é delineada em uma abordagem qualitativa, do tipo observação participante, sua natureza é aplicada e tem objetivos exploratórios e descritivos. Os participantes da pesquisa foram estudantes do 3º ano do ensino médio de uma escola estadual localizada na zona norte de Manaus. Os participantes foram submetidos a problemas geradores a respeito do conceito de volume no cilindro, para então realizarmos o reconhecimento dos conceitos em ação e dos teoremas em ação. Os instrumentos adotados durante a coleta de campo, foram: a observação, o diário de bordo e os registros de imagens e áudios. O método de análise dos dados coletados foi o da análise de conteúdo proposta por Laurence Bardin (2011), que consistiu na organização prévia do material obtido em campo, leitura flutuante dos dados obtidos e o surgimento das primeiras categorias de análise, no segundo momento, foi confirmado se as categorias atendiam o proposto nos objetivos, identificando os conhecimentos em ação fazendo a organização dentro das categorias, por fim realizamos a interpretação dos dados obtidos, fazendo inferências com o aporte teórico adotado. Entende-se que a pesquisa é uma contribuição na área de Educação Matemática, sobretudo, na área das didáticas da Matemática, uma vez que comtempla os três pilares do ato educativo, professor, aluno e saber. Nestes resultados, há a necessidade de abordar as situações-problema com mais intensidade, visando uma melhor correlação dos conceitos matemáticos existentes, um outro ponto que é salientado trata a necessidade da produção escrita ou incentivo da verbalização, pois os participantes tiveram nas três atividades dificuldades de compartilhar os passos e as estratégias de resolução. Destaca-se também que os eventos didáticos quando pensados do ponto de vista da didática contribuem no reconhecimento de possíveis obstáculos relativos aos conceitos de volume do sólido cilindro.

Palavras-chave: Processo de Ensino e Aprendizagem; Resolução de Problemas; Invariantes Operatórios; Geometria Espacial; Estruturas Multiplicativas.

ABSTRACT

Cognitive development occurs through conceptualization over time and through experiences lived by the subject. Regarding the process of teaching and learning mathematics, the formation of concepts is necessary for the student to develop a critical stance towards the problems that exist in current modern society, as proposed by the BNCC, therefore showing an urgency to break with the memorization of algorithms that have led to mechanical and logical learning in relation to the mathematical concepts visited. This study aims to analyze the operational invariants mobilized by 3rd grade high school students in problem situations involving the concept of volume of the geometric solid cylinder in the light of conceptual field theory in a public state school in the city of Manaus. We made an outline of the concepts to be addressed within spatial geometry in the content of round bodies, highlighting that relating to volume present in the multiplicative structures discussed by Vergnaud. The theoretical assumptions used to construct the study are anchored in the Teaching-learning-assessment Methodology through Problem Solving proposed by Onuchic and Allevato (2009, 2011, 2014) and the Theory of Conceptual Fields elaborated by Gérard Vergnaud. The research is designed in a qualitative approach, of the participant observation type, its nature is applied and has exploratory and descriptive objectives. The research participants were 3rd year high school students from a state school located in the north of Manaus. Participants were subjected to generating problems regarding the concept of volumes in the cylinder, so that we could then recognize the concepts in action and the theorems in action. The instruments adopted during the field collection were: observation, the logbook and image and audio records. The method of analyzing the collected data was content analysis proposed by Laurence Bardin (2011), which consisted of the prior organization of the material obtained in the field, floating reading of the data obtained and the emergence of the first categories of analysis, in the second moment, it was confirmed whether the categories met what was proposed in the objectives, identifying the knowledge in action by organizing it within the categories. Finally, we interpreted the data obtained, making inferences with the theoretical support adopted. We understand that the research is a contribution to the area of Mathematics Education, especially in the area of mathematics teaching, as it encompasses the three pillars of the educational act: teacher, student and knowledge. In our results, there is a need to approach problem situations with more intensity, aiming for a better correlation of existing mathematical concepts. Another point we highlight is the need for written production or ncouragement of verbalization, as participants had difficulties in all three activities. to share resolution steps and strategies. We also highlight that didactic events, when considered from a didactic point of view, contribute to the recognition of possible obstacles related to the concepts of solid cylinder volume.

Keywords: Teaching and Learning Process; Problem solving; Operative Invariants; Spatial Geometry; Multiplicative Structures.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular
BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP – Comitê de Ética da Pesquisa
EM - Educação Matemática
EM - Ensino Médio
ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
ICME - International Congress on Mathematical Education
IDEB - Indice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MMM - Movimento da Matemática Moderna
NCTM - National Council of Teachers of Mathematics
NEM - Novo Ensino Médio
RP – Resolução de Problemas
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
PPP - Projeto Político Pedagógico
RCA - Referência Curricular do Amazonas
SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica
TALE - Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCC – Teoria dos Campos Conceituais
TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDM – Teoria da Disciplina Mental
UNESP - Universidade Estadual Paulista
ZDP - Zona de Desenvolvimento Proximal

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é conhecida por sua complexidade de entendimento. Rivière (1995) destaca que tanto o ensinar como o aprender são difíceis na Matemática, sendo dependentes de exigências cognitivas: o caráter hierárquico e as necessidades básicas de atenção, memória e prática. Além dessa complexidade, a educação passa por grandes desafios, o "ensino é criticado, sobretudo pelo baixo desempenho dos alunos" (Micotti, 1999, p. 153).

Nesse viés, e tomando como objeto de estudo o processo de ensino e aprendizagem da didática, podemos imaginar como tem ocorrido o ensino de matemática. Golbert (2010, p. 90) enfatiza que "muitas práticas escolares contribuem para agravar a situação". As metodologias são mecanicistas, descontextualizadas, que exigem esforços de atenção e memória, independente dos interesses dos alunos. O gosto pela Matemática decresce conforme o estudante avança no sistema educativo, gerando um sentimento de aversão, apatia e incapacidade. No entanto, esse gosto nos primeiros anos é diferente, normalmente as crianças chegam à escola gostando de Matemática (Silva, 2016).

Nesse cenário, as dificuldades apresentadas no processo de ensino e de aprendizagem da disciplina são camufladas gerando obstáculos de cunho didático, isto é, os conhecimentos encontram-se estabilizados intelectualmente, podendo dificultar a evolução da aprendizagem (Pais, 2019). Os sentimentos gerados somados aos obstáculos acumulados contribuem para o desenvolvimento de atitudes negativas em relação à disciplina. Silva (2016) ressalta que as atitudes decorrem das experiências vividas pelo sujeito.

Dessa maneira, faz-se necessário pensar em meios/estratégias que estabeleçam uma experiência positiva e promova a explicitação de lacunas e dificuldades na aprendizagem apresentada pelo sujeito. O professor no contexto da sala de aula é um elemento indispensável, sendo, portanto, um pesquisador, cuja principal tarefa é investigar o processo de construção do conhecimento dos estudantes (Marques, 2010).

Em todas as disciplinas na formação básica, existem situações que inibem o protagonismo dos estudantes na construção dos seus conhecimentos. No ensino de matemática, em especial, e fazendo uso das ideias de Fazenda (2010), somos o produto da "escola do silêncio", onde o cenário consiste em alunos sentados diante do professor, esperando receber dele o conhecimento. O produto em sua essência são alunos com dificuldades na externalização dos seus pensamentos por meio principalmente da fala e da escrita. Entendemos que o professor tem papel essencial na construção do pensamento matemático dos seus alunos, e isso tem ficado cada vez mais evidente, sendo dele a escolha das estratégias a serem utilizadas na sala de aula.

Como forma de reforçar as ideias introdutórias, temos que os resultados do último Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), disponível no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), em relação à proficiência de matemática, a despeito de suas ressalvas devido à pandemia ocasionada pela COVID-19, acende um sinal de alerta para que estratégias sejam pensadas e adotadas na tentativa de melhorar o quadro para os próximos anos. Quando comparados os resultados obtidos com a matriz de referência, nos anos Finais do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, o segundo atingiu o nível 2, o que mostra uma situação crítica em matemática, sendo esse resultado a nível nacional.

Na região norte, mais precisamente na região amazônica, os dados são mais preocupantes, pois os números revelam uma nota de 245,54 em matemática, comparada na escala de desempenho do referido sistema avaliativo, não chegamos nem no limite do nível 1 que é de 250. Esses resultados são referentes a estudantes da 3ª série do Ensino Médio, o que significa a probabilidade de serem capazes de "associar uma tabela de até duas entradas a informações apresentadas textualmente ou em um gráfico de barras ou de linhas" (BRASIL, 2022).

Por serem estudantes no final da Educação Básica, é inevitável o questionamento quanto à formação crítica desses sujeitos e sua atuação social em meio às demandas que a sociedade moderna exige. À luz dos dados citados, uma maneira que defendemos ser útil para auxiliar o professor no reconhecimento das dificuldades de aprendizagem e contribuir para que o aluno tenha um desenvolvimento em elaboração escrita e verbal na disciplina de Matemática explicitando seus conhecimentos em ação é a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato.

A Resolução de Problemas (RP) se faz presente desde os primórdios da civilização humana, sendo utilizada para resolver problemáticas reais do cotidiano (Morais; Onuchic, 2014), e a História da Matemática aborda essa temática datada há milênios. No entanto, como uma abordagem metodológica ganha força no século XX, quando o ensino de matemática era dado por repetição de processos. O pioneiro na difusão da Resolução de Problemas como estratégia para o ensino de Matemática foi o pesquisador e matemático George Polya.

Suas contribuições por meio do livro "A arte de resolver problemas" publicado em 1945 mobilizou pesquisadores e professores de matemática por todo o mundo, pensando em maneiras de ensinar a matemática não como a mera elaboração de um produto, mas como um processo de compreensão e dentro de uma perspectiva que estivesse interessado no ensino e aprendizagem da matemática (Morais; Onuchic, 2014).

Assim, na perspectiva de romper com um modelo didático tradicional que tem a sua estrutura enraizada em conteúdo-exemplo-exercício, consideramos importante a adoção da construção de um professor em uma caminhada epistemológica, cuja postura consiste em um planejamento didático visando o mais adequado no processo de aprendizagem dos estudantes em suas diversidades culturais e sociais, dentro de um contexto que preze pela avaliação durante toda a construção do conhecimento não só dos estudantes, mas da própria prática docente (Ramos, 2008).

Morais e Onuchic (2014, p. 40) destacam que há uma emergência em “superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimentos”. Quando o aluno assume o papel principal, visando a sua aprendizagem como relevante na construção dos conhecimentos, há espaços para o desenvolvimento da criatividade, da autonomia e de habilidades de pensamento crítico, além de contribuir para o trabalho em colaboração.

Além da Resolução de Problemas, este trabalho propõe utilizar como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) para auxiliar na identificação dos possíveis invariantes operatórios evocados pelos estudantes. A TCC foi elaborada pelo francês Gérard Vergnaud como sendo uma ampliação das ideias de esquema de Jean Piaget. Enquanto Piaget defendia a relação sujeito-objeto, Vergnaud destacou a relação esquema – situação (Vergnaud, 2009a). A escolha pela TCC deu-se pelo fato de ser uma teoria de desenvolvimento que tem em sua base, elementos da didática, sobretudo aqueles que discorrem sobre os processos de ensino e aprendizagem na matemática. Nesse viés, ressaltamos que a didática tem como objetivos a análise dos comportamentos e dos discursos dos estudantes, bem como as escolhas e ações dos professores (Zanella; Barros, 2014).

Nessa perspectiva, Zanela e Barros (2014) apontam que a TCC estuda as ações dos estudantes, bem como as condições de produção, registro e comunicação durante situações de aprendizagem em sala de aula. Oferecendo ao docente uma compreensão das ações dos estudantes e possibilitando a organização dos conteúdos, em especial da matemática, para privilegiar uma diversidade de situações/problemas relacionadas a um mesmo conceito.

A pedra angular da teoria elaborada por Vergnaud é a conceitualização: o estudante precisa ser submetido ao maior número de situações/problemas para apropriar-se de um certo conceito, contudo, ele enfatiza não ser um processo imediato. Além das ideias de Piaget, Vergnaud também faz uso das ideias de Vygotsky, mais precisamente, na configuração que o professor assume no contexto de sala de aula. Em face à mediação, o docente assume um conjunto de atividades com o intuito de possibilitar aos estudantes o avanço dos seus conhecimentos (Moraes, 2008). No que tange à conceitualização, denotada por Vergnaud, a tarefa do professor consiste em escolher as melhores situações e conduzir em uma atitude questionadora o processo de construção do conhecimento (Moreira, 2002).

Os alunos externalizam em suas ações uma pequena parcela do existente em suas estruturas cognitivas. A sala de aula não é o único local para que um dado conceito seja apreendido, há outros locais que contribuem para o processo de formação do sujeito, os chamados espaços não formais, como: a família, a igreja, a comunidade etc. (Libâneo, 2013; Vergnaud, 1985). Portanto, a TCC sugere que por meio das situações, sejam externalizados esses conceitos e identificados as rupturas e lacunas na construção do conhecimento para que aconteça a passagem de conceitos empíricos para conceitos científicos.

A partir das ideias apresentadas anteriormente e reflexões na temática adotada surgiu o seguinte problema de pesquisa: como a resolução de problemas contribui para o reconhecimento de invariantes operatórios no processo de ensino e aprendizagem do conceito de volume do sólido geométrico cilindro? Destaca-se que o conceito da grandeza volume do cilindro definido para este estudo está presente na unidade de Geometria Espacial, mais precisamente no conteúdo que tange a parte métrica, onde estão os corpos redondos. Este recorte foi definido em decorrência dos muitos conceitos presentes na unidade e de como os conteúdos são priorizados na educação básica, sendo este, um conteúdo que muitas vezes nem é contemplado, por estar ao final da grade curricular. Contudo este tem grande relevância na aplicabilidade cotidiana.

A respeito da área de conhecimento para o estudo, Souza (2021) afirma que não há um abandono do ensino de geometria, mas existem questionamentos sobre a maneira como é ensinada. Até o século XX, a geometria era uma disciplina fundamental no currículo daqueles que pretendiam seguir carreira em engenharias e afins. No entanto, com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), houve a valorização da "algebrização" dos conteúdos de matemática. Outro agravante nesse cenário é a não preparação adequada dos professores. As pesquisas recentes mostram que os professores "revelam a própria defasagem no conhecimento geométrico" (Souza, 2021, p. 249).

Nessa temática, Souza *et al* (2022, p. 1) apresentam um mapeamento dos últimos dez anos sobre a RP e a Geometria em dissertações e teses encontradas no portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Em síntese, os resultados apresentam que a RP "para o ensino de Geometria, possibilita aos estudantes um maior envolvimento nas aulas de Matemática, além de apresentar contribuições para o processo de ensino e aprendizagem".

Contudo, observamos que das sete produções científicas analisadas que tinham como objeto de pesquisa o ensino da geometria, cinco desenvolveram a atividade no ensino médio, destas, três pesquisas foram com alunos da 3ª série do ensino médio e apenas uma com o conteúdo de geometria espacial. Outro ponto observado foi que as pesquisas em sua maioria usam como aporte teórico apenas a metodologia didática de Resolução de Problemas, não tendo na maioria dos casos um diálogo com uma teoria de aprendizagem. Com essa conclusão, entendemos que tratando-se de investigações direcionadas no espaço de sala de aula e envolvendo o conteúdo do conhecimento matemático, há, portanto, uma relação importante entre o professor, o aluno e o saber. Essa terna contém elementos que abordam os modelos de ensino, as psicologias da aprendizagem e a estrutura conceitual e epistemológica, sendo objetos de estudo da didática, que tem o objetivo principal de desenvolver conceitos e teorias compatíveis com o espaço educativo (Pais, 2019).

Assim, pensar em metodologias que diferem da hegemonia tradicional é válido, mas na perspectiva de processos de ensino e aprendizagem, faz-se necessário um olhar em termos de teoria, de preferência uma teoria de aprendizagem que potencialize as discussões e permita uma construção sólida dos conceitos. Tal construção é dada pela identificação dos conceitos empíricos mediante as ações sob as situações/problemas.

As autoras do mapeamento destacam em suas análises que há "poucas pesquisas que relacionam a Resolução de Problemas ao ensino de Geometria na Educação Básica, carecendo de mais investigações para que a metodologia seja disseminada entre os professores desse nível de ensino" (Souza et al., 2022, p. 22). No que tange à Resolução de Problemas e o aporte teórico Campos Conceituais, Monteiro et al. (2020, p. 57) destacam que "pode ser uma estratégia de grande potencial para descrever, analisar e interpretar aquilo que se passa na sala de aula, na aprendizagem de Matemática".

Assim, o objetivo geral da proposta consiste em analisar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes da 3ª série do Ensino Médio em situações-problema envolvendo o conceito de volume do sólido geométrico cilindro à luz da teoria dos campos conceituais. Ressaltamos que os conceitos abordados encontram grande intersecção com o campo conceitual das estruturas multiplicativas, que se constitui em uma classe de dimensões-produto (Vergnaud, 2009b).

Para alcançar o objetivo geral, traçamos alguns objetivos específicos, sendo eles: elaborar um evento didático distribuído em três situações problemas com o conceito de volume do cilindro para os estudantes dos 3ª série do Ensino Médio; aplicar o evento didático com os estudantes da 3ª série do Ensino Médio contemplando as etapas propostas na metodologia da resolução de problemas e identificar os possíveis invariantes operatórios mobilizados durante a aplicação do evento didático em grupos.

Esta investigação trata-se de uma observação participante, cujo processo denota uma intervenção articuladas nas práticas investigativa, reflexiva e educativa (Fiorentini, 2020), estando o seu delineamento metodológico em uma abordagem do tipo qualitativa, de natureza aplicada, com os objetivos exploratório e descritivo.

Os participantes da pesquisa foram alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Manaus no estado do Amazonas, consideramos pertinente essa escolha, pelo conceito de volume do cilindro contemplado no conteúdo (corpos redondos) ser dado no ano anterior, e os estudantes recorrerem ao uso dos seus conhecimentos prévios para as etapas da resolução do problema.

Durante a execução da atividade, foi feito o uso dos seguintes instrumentos para a coleta dos dados: a observação, diário de bordo e os registros visuais e de áudios. Fazer uso da observação durante o processo possibilita ao investigador captar o que os seus olhos e sentidos percebem, diferente de ter que ouvir por outra pessoa, sendo, portanto, dados básicos e valiosos (Yin, 2016).

O diário de bordo para as anotações pessoais do pesquisador contendo "ideias, estratégias, reflexões e palpites [...] ajuda o investigador a acompanhar o desenvolvimento do projeto" (Bogdan; Biklen, 1994, p. 150-151). Os registros visuais e em áudio foram utilizados para posterior análise dos possíveis invariantes operatórios evocados durante a atividade realizada em sala de aula.

A análise dos dados coletados foi a partir da análise de conteúdo proposta por Bardin (2011), que consiste em três etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. A pré-análise consiste na organização do material coletado em campo, e constituída de outros elementos importantes que descrevem a etapa, sendo eles: a leitura flutuante, a escolha dos documentos para a análise, a (re)formulação dos objetivos, a elaboração de hipóteses e a formulação de indicadores. A exploração do material, consiste basicamente na criação de categorias, mas também podendo ser traçadas previamente e a última etapa, a interpretação dos resultados obtidos (Bardin, 2011).

Na pré-análise, mediante os registros de imagens e áudios, foi feita a identificação de possíveis invariantes operatórios por meio da articulação das observações realizadas durante a execução da atividade e registradas no diário de bordo. Na segunda etapa, foi feito o processo de categorização referente aos invariantes operatórios reconhecidos na ação dos estudantes mediante os registros feitos. Na terceira etapa, ancorado no aporte teórico adotado, realizamos as discussões pertinentes frente aos resultados obtidos.

Este trabalho está organizado em quatro seções. A primeira caracteriza o objeto de estudo à luz da BNCC e traz alguns trabalhos relacionados com ele. A segunda descreve os principais elementos apresentados na pergunta de pesquisa: Resolução de Problemas, Ensino de Geometria e Teoria dos Campos Conceituais. Tentamos fazer uma construção histórica da Resolução de Problemas até os dias de hoje. No ensino de geometria, olhamos para o contexto brasileiro, como o ensino de geometria ocorreu ao longo das décadas. O aporte teórico, TCC é dado pela apresentação da teoria e seus principais conceitos. A terceira seção descreve o percurso metodológico da proposta de pesquisa e na última seção apresentamos os resultados e as discussões dos dados obtidos no campo empírico após a realização das análises, apontando as inferências e continuação de outras possíveis pesquisas no campo.

1 CARACTERIZAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

A educação brasileira teve muitas modificações ao longo do tempo, como por exemplo, a reforma Campos que orientou o currículo escolar no governo de Getúlio Vargas. Ou ainda, a Reforma Capanema que possibilitou a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Assim, compreender como o documento curricular oficial, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), orienta a educação no Brasil hoje é necessário, uma vez que ela traz em sua estrutura as competências e habilidades que os estudantes devem construir ao longo do seu processo de formação escolar básica.

Nesta seção, vamos discorrer a respeito do objeto processo de ensino e aprendizagem na geometria espacial, especialmente no que tange ao último nível de escolarização, o ensino médio. Ainda nessa seção, tomando o conceito da grandeza de volume presente na unidade de Geometria Espacial métrica, descrevemos alguns resultados encontrados na revisão de literatura em consonância com a nossa proposta, fazendo o uso da resolução de problemas e/ou tendo o aporte a teoria dos campos conceituais.

1.1 O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL DE ACORDO COM A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

O documento oficial que orienta a educação nacional é fruto de inúmeras discussões e articulações visando uma base curricular para toda a educação básica, a BNCC foi promulgada oficialmente no ano de 2018. No que tange a matemática, nível médio, o documento enumera cinco competências, a partir de uma leitura elencamos para cada competência as habilidades que caracterizam o objeto de estudo deste trabalho.

A primeira competência aponta para o uso de estratégias, conceitos, procedimentos, direcionando o estudante a construção de interpretações de diferentes contextos. No ensino de geometria, uma das habilidades a serem desenvolvidas dentro dessa competência consiste em: mediante a noção das transformações isométricas, homotéticas, os estudantes deverão ser capazes de analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (BRASIL, 2018). Entendemos que para que isso aconteça, os estudantes devem ser confrontados com as mais diversas situações do mundo real, possibilitando de forma individual e/ou coletiva uma construção e análise crítica e reflexiva do espaço a sua volta.

A segunda competência trata da proposta e/ou investigação de ações para os desafios do mundo moderno de forma colaborativa, ressaltando o social e o sustentável nas vivências em comunidade, é uma ampliação da primeira, contudo, chama a atenção para a importância de resolutivas de problemas de modo consensual tendo como princípios a ética e a responsabilidade por parte do estudante. No que tange às habilidades na unidade de geometria, destacamos a que enfatiza a participação em ações da comunidade do estudante, envolvendo situações de medições e cálculo de perímetros, cálculo de área, volume, capacidade e/ou massa (BRASIL, 2018). Entendemos que adotar nas aulas de matemática situações/problemas da realidade do estudante, possibilita uma maior compreensão dos desafios do mundo moderno e uma sólida construção do processo de conceitualização do real destacado por Vergnaud na teoria dos campos conceituais.

A terceira competência discorre sobre o uso de conceitos, procedimentos para a proposição e resolução de problemas em diversos contextos do mundo. Desenvolvendo no estudante a capacidade de interpretar e verificar quanto aos resultados e caminhos adotados para as resolutivas (BRASIL, 2018). O documento ainda ressalta que o estudante deve desenvolver habilidades para a resolução não só de problemas do dia a dia, mas da comunidade o qual esteja inserido em diversas situações do mundo, mas também do trabalho.

Quanto às habilidades que diz respeito ao objeto de estudo, o documento elenca a habilidade para a resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e de volumes dos objetos tridimensionais, estando entres eles, o recorte deste trabalho, os corpos redondos. A BNCC ainda aponta para a importância de situações do real que permitam, por exemplo, aos estudantes uma investigação de cálculo de gastos para a composição dos objetos estudados.

A competência de número quatro, aponta para o uso das representações visando comunicar os dados obtidos em resolução de situações. No que tange às habilidades, não há nenhuma específica para o objeto de estudo deste trabalho, porém, o documento ressalta a importância de converter as situações de cunho algébrico para representações geométricas, fazendo o uso de software de construções dinâmicas. Cabe ressaltar que a representação é um dos elementos constituintes de um conceito, destacado na teoria dos campos conceituais, sendo, portanto, relevante para a conceitualização quando submetido à resolução de problemas, permitindo ao estudante expressar os seus pensamentos por meio dos registros gráficos.

A quinta competência discorre sobre a investigação e do estabelecimento de conjecturas de conceitos e propriedade na busca de padrões. Na geometria espacial, o documento aponta a importância de investigar o processo para cálculo de volume dos sólidos, citando o princípio de Cavalieri como um recurso a ser adotado (BRASIL, 2018).

A BNCC é enfática ao orientar o ensino de matemática, destacando aqui o objeto de estudo da proposta, o ensino de geometria, em praticamente todas as competências a partir da Resolução de Problemas, como uma metodologia a ser considerada. Contudo, podemos observar que muito se usa a palavra conceito, ou seja, a formação conceitual é essencial para o desenvolvimento do estudante, caracterizando o que Vergnaud aponta em sua teoria quando afirma que o processo de conceitualização do real é que possibilita o desenvolvimento do sujeito ao longo do tempo quando submetido às mais diversas situações/tarefas/problemas.

1.2 ESTUDOS RELACIONADOS AO OBJETO DE PESQUISA

A partir da definição do tema neste estudo, começamos a revisão de literatura, que se caracteriza por um estudo bibliográfico em busca de dissertações e/ou artigos com o intuito de conhecer melhor o campo temático investigativo. Para isso, usamos as principais plataformas de divulgação científica, contudo, focando na que possui maior abrangência em termos de divulgação dos trabalhos de pós-graduação na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Fazendo o uso das palavras-chave: Resolução de Problemas, Campos Conceituais, Conceitos Geométricos, Volume, área, Invariantes Operatórios. Os resultados são nulos, porém quando combinados, por exemplo, resolução de problemas e teoria dos campos conceituais ou ainda, resolução de problemas, área e volume, os resultados surgem em grande escala. Contudo, para esta investigação, priorizamos quatro dissertações (Quadro 1) com os principais conceitos envolvidos neste estudo: resolução de problemas, área, volume e a teoria dos campos conceituais, e que acreditamos melhor estarem relacionados com os objetivos propostos nesta investigação.

Quadro 1 - Produções Científicas selecionadas de acordo com o objeto de estudo da pesquisa

Autor/ano	**Objetivo**	**Aporte teórico**	**Instrumentos**	**Método de análise**	**Resultados**
Ana Paula Nunes Braz Figueiredo (2013)	Analisar como os estudantes do 3º ano do ensino médio lidavam com situações de volume.	Teoria dos Campos Conceituais; Hipótese didática-volume como uma grandeza da Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian.	Teste de sondagem; Entrevista.	Discutiu os dados obtidos na revisão de literatura e no campo empírico com o aporte teórico adotado.	Lacunas de natureza epistemológica; Obstáculos na construção do conhecimento por uso excessivo de fórmulas e situações de medida que apresentam um significado amplo para volume.
Larisse Vieira de Melo (2018)	Analisar os conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo.	Teoria dos Campos Conceituais; Imbricações entre campos conceituais proposto por Teles (2017); Conceituação de volume como grandeza adaptado do modelo didático de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian.	Testes diagnósticos; Entrevistas.	Análise a priori das questões do teste que serviu de base para a análise posterior correlacionada com a TCC e as Imbricações proposta por Teles.	Identificação de conhecimentos mobilizados em diferentes tipos de campos conceituais a autora destaca que várias representações foram utilizadas durante os testes.
Fabiane de Lima Righi (2018)	Investigar os esquemas em ação referentes à grandeza e volume junto a uma turma de licenciatura em matemática.	Teoria dos Campos Conceituais; Teoria da Aprendizagem Significativa.	Documentos oficiais; Observação; Diário de bordo; Questionário;	Análise textual discursiva.	Destaca que há uma consonância dos documentos com a geometria na formação de professores, aponta a necessidade de reformular o currículo; destaca

			Dois testes.		ausência de subsunçores para a aprendizagem do conceito de volume.
Wesley da Silva Martins (2019)	Utilizar a Resolução de Problemas com alunos do ensino médio, com o intuito de verificar as contribuições da metodologia para a aprendizagem em geometria espacial.	Enfoque Histórico-Cultura de Vygotsky.	Diário de bordo; Fotografias; Resoluções escritas; Gravações de áudios.	A partir das resoluções escritas o autor fez a análise discorrendo suas interpretações à luz do Enfoque Histórico-Cultura de Vygotsky.	A Resolução de Problemas contribui para o desenvolvimento da percepção, compreensão, apreensão da linguagem matemática e da nomenclatura dos elementos geométricos.

Fonte: Elaborado por Leão (2024)

O primeiro trabalho, uma dissertação intitulada “Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da teoria dos campos conceituais”, de Ana Paula Nunes Braz Figueiredo, desenvolveu um estudo de tipo exploratório sobre o modo como os estudantes do 3º ano do ensino médio lidavam com situações de volume. A autora usou a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud, e adotou a hipótese de didática que descreve o volume como uma grandeza. Tal consideração foi uma adaptação proposta nas considerações didáticas de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Os instrumentos utilizados pela pesquisadora foram aplicação de teste de sondagem e entrevista, enquanto sua coleta de dados aconteceu em três esferas de ensino: privada, pública federal e pública estadual. A análise ocorreu mediante os dados obtidos na revisão de literatura em consonância com o aporte teórico adotado. Os seus resultados mostraram lacunas de natureza epistemológica, destacando complexidade nas relações com outras grandezas, por exemplo, vinculadas aos conceitos de dimensão e capacidade, em outras palavras, área e massa. A pesquisa também apontou origem para os obstáculos, que seriam o uso excessivo de fórmulas e situações de medida que apresentam um significado amplo para volume.

O segundo, uma dissertação, sob o título “Conhecimentos mobilizados por estudantes do ensino médio em situações que envolvem volume do paralelepípedo retângulo: um Estudo Sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais" de autoria da Larisse Vieira de Melo. A pesquisa buscou analisar os conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das

Imbricações entre Campos Conceituais. A autora foi específica quanto ao objeto de estudo, e além da Teoria dos Campos Conceituais, ela trouxe contribuições de Teles sobre as imbricações entre campos conceituais e a conceituação de volume como grandeza adaptado do modelo didático de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Os seus instrumentos de coleta de dados foram: testes diagnósticos contendo problemas de volume do conteúdo definido e entrevistas. A análise dos dados permitiu a identificação de conhecimentos mobilizados em diferentes tipos de campos conceituais e a autora destaca que várias representações foram utilizadas, entre elas: as fórmulas, as figuras, as unidades de medidas e os números.

O terceiro, também uma dissertação, voltado para a formação de professores com o título "Esquemas em ação para a aprendizagem significativa da grandeza volume: implicações para formação inicial de professores", com a autoria de Fabiane de Lima Righi. A proposta de pesquisa buscou investigar os esquemas em ação referentes à grandeza e volume junto a uma turma de licenciatura em matemática. Como instrumentos de coleta, a autora fez o uso dos documentos oficiais, observação, diário de bordo, questionário, e dois testes, um fazendo o uso da Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por David Ausubel e o outro usando a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Como resultados, a autora destaca em consonância com os documentos oficiais de educação, uma melhoria no ensino de geometria nos cursos de formação de professores, contudo, aponta a necessidade de uma atualização na grade curricular dos cursos. Um outro resultado, destaca a fragilidade e/ou ausência quanto aos subsunçores necessários para a aprendizagem do conceito de volume. A autora também detectou obstáculos entre os quadros geométricos e numéricos para aprendizagem do conceito abordado, principalmente no que diz respeito ao entendimento de volume como uma grandeza.

O último trabalho selecionado tem como título "A Resolução de Problemas de Geometria Espacial sob a perspectiva dos conceitos Vygotskyanos", a autoria é de Wesley da Silva Martins. O seu objetivo no estudo foi utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com alunos do ensino médio, com o intuito de verificar as contribuições da metodologia para a aprendizagem em geometria espacial, seu aporte teórico foi Vygotsky. Para alcançar os objetivos, o autor fez uso dos registros escritos elaborados pelos estudantes dos problemas propostos. Como resultados, o autor destaca que o processo de aprendizagem nos conteúdos relativos à geometria espacial mediante a utilização da metodologia de resolução de problemas foi consistente, contribuindo para que os estudantes desenvolvessem uma melhor percepção, compreensão, apreensão da linguagem matemática e da nomenclatura dos elementos geométricos. O autor ainda ressalta que há um desenvolvimento de habilidade para compreender e interpretar o mundo, além de engajar para outras situações que envolvem a experimentação, a elaboração de conjecturas e a formalização matemática.

As pesquisas citadas acima trazem importante contribuição para a pesquisa na área da educação matemática. No que tange à elaboração deste estudo, tendo como objeto o processo de ensino e aprendizagem da geometria, ressaltamos que um olhar sobre a tríade estudante, professor e conhecimento faz-se necessário. O primeiro estudo citado traz uma lacuna que consiste nos obstáculos apresentados pelos estudantes, em decorrência do uso excessivo de fórmulas. Assim, destacamos a importância deste estudo em priorizar o processo de conceitualização, quando unido com uma metodologia que preza pela sistematização das ideias, como, a resolução de problemas. O segundo estudo, destaca a diversidade das representações apresentadas pelos estudantes, mas também a imbricação entre campos conceituais. Para este estudo, as representações têm relevância no sentido que será também a partir delas o possível reconhecimento dos invariantes operatórios. Além disso, acreditamos que embora os conceitos na geometria espacial, conceitos de outros campos são necessários para a conceitualização.

A terceira investigação traz a contribuição de que há ausência de esquemas consolidados em relação aos conceitos geométricos. Entendemos que essa informação pontua as lacunas no processo de conceitualização, o possibilita inferir que há uma necessidade maior de atenção e investigações em termos de didática para pontuar e restabelecer uma compreensão dos conceitos científicos da matemática. Nesse sentido, a proposta de pesquisa contribui para o reconhecimento dessas rupturas do conhecimento e vislumbra estratégias de cunho didático quando defende o uso da Resolução de Problemas articulada com uma teoria do desenvolvimento. A última pesquisa, apresenta as potencialidades da resolução de problemas, destacando a mediação para o desenvolvimento da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) proposta por Vygotsky. A teoria dos campos conceituais reforça essa importância, mas destaca a necessidade de situações para o desenvolvimento de conceitos.

Assim, tomar uma metodologia didática que auxilia no direcionamento da prática docente em sistematização com uma teoria do desenvolvimento que tem a formação de conceitos como pedra angular, é vislumbrar uma contribuição para o ensino de matemática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O processo de ensino e aprendizagem tem em sua estrutura importantes elementos. Entre eles estão aqueles que apresentam uma significância maior no contexto educacional: o aluno, o professor e os conteúdos. Enraizado na grande área da Didática, entende-se que “ensino e aprendizagem são duas facetas de um mesmo processo. O professor planeja, dirige e controla o processo de ensino, tendo em vista estimular e suscitar a atividade própria dos alunos para a aprendizagem" (Libâneo, 2013, p. 86 e 87).

Há, portanto, um vínculo entre o ensinar e o aprender que consiste nos conteúdos do saber escolar. A principal tarefa do ensino, de acordo com Libâneo (2013), é assegurar o desenvolvimento das capacidades cognoscitivas dos estudantes através dos conteúdos do saber, que consiste em conhecimentos científicos e organizados, habilidades e competências métodos e procedimentos de aprendizagem, atitudes e convicções para enfrentar o mundo, em uma tríade que engloba o sujeito na totalidade do pensar, agir e sentir.

Sobre a tríade citada, entendemos que o indivíduo se constrói no que Novak (2010. p. 23) defende na sua teoria da educação "a aprendizagem significativa está subjacente à integração construtiva de pensar, sentir e agir, levando à capacitação para o compromisso e a responsabilidade." O autor destaca que para o empoderamento do sujeito é preciso levar em consideração as áreas cognitivas, psicomotoras e afetivas. Somos o somatório das interações que temos desde o nosso nascimento e estamos em constante construção. Na sala de aula, como professores, somos os responsáveis pela mediação dos conteúdos matemáticos, promovendo uma boa relação entres os estudantes por meio das interações positivas que uma metodologia de ensino pode oferecer e que gere nele uma satisfação boa em querer construir o conhecimento com os demais sujeitos do grupo.

A respeito do exposto, Hermes (2016) apresenta uma contribuição que coaduna com as ideias introdutórias da seção, entretanto, com ênfase na disciplina Matemática. Segundo ele, a disciplina está sujeita a normas que são implícitas e explícitas, e que gerenciam o funcionamento do sistema didático, funcionando nesse sentido, a partir dos três elementos citados: o professor, o aluno e o conhecimento.

Entendemos que há a necessidade de um entendimento por completo de todo o sistema que rege o ato educativo, bem como de compreender as nuances e funções de cada elemento, visando o empoderamento do sujeito e a sua preparação para o exercício da cidadania na sociedade. Nessa perspectiva, enfatizamos que o empoderamento do sujeito não será dado pela aprendizagem mecânica, pois a compreensão dos elementos constitutivos do processo de ensino é imprescindível, Masini e Moreira afirmam que:

> [...] É necessário para isso que educadores e participantes da escolarização cultivem em si a confiança do agricultor que respeita a individualidade e a singularidade do ser com que se defronta, sem comparar seu ritmo de desenvolvimento e aprendizagem com o de outro qualquer. Indispensável considerar o aluno como uma unidade e orientar sua educação, compreendendo-o e agindo com ele de acordo com suas especificidades, a partir do conhecimento dele, das características próprias do seu

> período de desenvolvimento e do contexto em que está inserido (Masini; Moreira, 2017, p. 11-12).

Buscar soluções para contornar a aprendizagem mecânica, visando a compreensão dos conceitos e a sua aplicabilidade em problemas reais, faz-se necessário para que a aprendizagem significativa aconteça. Para isso, há inúmeras metodologias sendo aplicadas e estudadas por pesquisadores e professores, e uma delas que teve um consenso da comunidade nos últimos tempos foi a resolução de problemas (Teixeira; Moreira, 2022). Nesse cenário, concordamos com as palavras de Paulo Freire, quando destaca a importância de unir teoria e prática, que esses estão em uma relação dialética, visando a construção do indivíduo em sua totalidade. Segundo o patrono da educação brasileira, "formar é muito mais do que puramente treinar o educando no desempenho de destrezas" (Freire, 2011, p. 10).

Dessa maneira, entendemos que a aprendizagem mecânica, quando promove um melhor desempenho das destrezas sem uma compreensão dos conceitos trabalhados, interrompe a construção de um conhecimento científico pautado na criticidade e capacidade reflexiva do estudante. Uma teoria com possibilidade de visar o processo conceitualização como epicentro da construção dos conhecimentos é a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud.

Nas seções seguintes trataremos a metodologia Resolução de Problemas, seguido da contextualização do ensino de geometria no âmbito brasileiro e a teoria dos campos conceituais, que será o aporte para a construção teórica, conceitual e descritiva da referida pesquisa, visando promover uma discussão com olhar para o redirecionamento do processo de ensino e aprendizagem, pautado na preparação por completo do sujeito para atuação social.

2.1 CONTEXTUALIZANDO A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas de matemática ocupam um lugar de destaque no currículo dos conteúdos desde os primórdios da humanidade. São, portanto, presentes na história de civilizações antigas, como as egípcias, chinesas e gregas, ou ainda, em livros textos dos séculos XIX e XX (Onuchic, 1999). Nas pesquisas em Educação Matemática, foi a temática com maior destaque no século passado (Fiorentini; Lorenzato, 2006). Contudo, a resolução de problemas tinha como sinônimo apresentar situações problemas, e a prática dos estudantes consistia em verificar um exemplo com uma técnica específica para ser repetido em outras dez situações similares (Onuchic, 1999).

Nesse sentido, Hermes (2016, p. 171) afirma que "[...] nas escolas do EUA, resolver problemas consistia em traduzir o enunciado de problemas escritos em linguagem simbólica e praticar manipulações aritméticas e algébricas, de pouca ou nenhuma utilidade na vida cotidiana". Esse modelo de ensino começou a despertar a atenção dos pesquisadores e professores, gerando discussões na comunidade científica e possibilitando mudanças nos currículos de ensino de matemática.

Assim, para que mudanças ocorram, principalmente no que diz respeito ao ensino, as teorias psicológicas são premissas para que existam as teorias pedagógicas e esta é uma condição que se dá pelo nível de complexidade existente no processo de ensino e aprendizagem, principalmente na sala de aula. De acordo com Morais e Onuchic (2014), na virada do século teorias tanto psicológicas quanto pedagógicas eram fortemente usadas na orientação e elaboração dos currículos escolares. Nesse período, havia pelos menos três teorias que regiam o currículo, sendo elas: Teoria da Disciplina Mental (TDM), Conexionismo e “Teoria Significativa”[1].

A TDM foi elaborada em 1740 pelo psicólogo alemão Christian Wolff. Ela orientou o currículo escolar até a virada do século XIX para o século XX. A TDM em sua concepção teórica defendia a mente como sendo:

> [...] uma detalhada hierarquia, isto é, uma coleção de faculdades ou capacidades, a saber: percepção, memória, intuição ou razão, imaginação e compreensão. Treinando uma faculdade, acreditava-se que ocorria uma transferência geral da mente para todas as outras e, assim, o ensino se ocupava mais em desenvolver essas faculdades do que com os conteúdos que seriam ensinados. (Morais; Onuchic, 2014, p. 19).

Assim, o papel da escola, mas principalmente o processo de ensino, consistia em ajudar os estudantes no desenvolvimento de suas capacidades mentais. Entendemos que o processo descrito se enquadra como em um exercício físico: quando realizado repetidas vezes, promove o desenvolvimento de um certo músculo. Esse entendimento valia também para as faculdades da mente, pois acreditava-se ser necessário treiná-la inúmeras vezes a fim de atingir um certo grau de aprimoramento.

O conexionismo foi elaborado por Thorndike logo no início do século XX, refutando a TDM. Morais e Onuchic (2014) destacam que as ideias de Thorndike causaram uma mobilização na comunidade de estudiosos da matemática e psicólogos, pois havia resistência em aceitar a legitimidade dos dados apresentados por ele. Thorndike não concordava com as ideias defendidas na Teoria da Disciplina Mental, para isso, em parceria com outro pesquisador, decidiu investigar como ocorria a aprendizagem. Isso causou uma movimentação entre os pesquisadores, professores e simpatizantes da matemática na sociedade da época (Onuchic, 2014).

Nesse momento da história, a sociedade estava passando por transições na economia, e uma das exigências dos indivíduos consistia em saber mais matemática para ser usada na vida

---

[1] Colocamos entre aspas por ser uma teoria que não tem relação alguma com a Teoria da Aprendizagem Significativa do estadunidense David Ausubel.

prática. A sociedade deixava de viver apenas da produção do campo, passando agora a ter um novo setor: a economia pautada nas indústrias. Assim, o conhecimento precisaria ser construído para aplicabilidade na vida cotidiana, atendendo as demandas desse sujeito como parte de uma sociedade moderna (Onuchic, 1999).

Como dito, Thorndike submeteu em experimento as alegações da TDM, encontrando elementos suficientes para contradizê-las. Nesse contexto, a teoria conexionista ou ainda, a teoria associacionista, entendia que a aprendizagem consistia em: “adição, eliminação e de organização de conexões. [...] conexões são formadas, ou quebradas, ou organizadas, entre situações e respostas” (BROWNELL, 1944 apud MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 19).

A teoria proposta por Thorndike tem em sua estrutura três leis: 1) lei do efeito; 2) lei do exercício; 3) lei da prontidão. As três leis regiam o processo de ensino e consequentemente, a orientação dos currículos escolares. Moreira (2022) descreve as três como: a primeira, quando uma conexão tem uma consequência boa, será fortalecida, do contrário, enfraquecida, é a ideia do reforço positivo ou negativo. A segunda, consiste no fortalecimento por meio da prática: quanto mais a situação se repetir, lei do uso, caso tenha um enfraquecimento, lei do desuso. A última, é caracterizada pela prontidão: estar preparado para uma ação, isto é, se a ação for concretizada, satisfatório, se não, irritação.

A teoria do conexionismo era pautada nas ideias de estímulo e resposta, estímulos positivos geram resultados satisfatórios, do contrário, os resultados serão na perspectiva do estímulo negativo. Outro ponto observado, é a repetição: quanto mais prática, significa que tem uso, logo, é relevante, do contrário, não terá significância.

No ensino de matemática, o teórico supracitado teceu críticas sobre a forma como eram ensinados os conteúdos, principalmente na área da aritmética. As suas críticas possibilitaram um olhar diferenciado para as tarefas presentes nos livros e apresentadas na sala de aula. Um dos seus escritos famosos, chamado de “Os Novos Métodos na Aritmética", foi publicado no Brasil no ano de 1936, e traduzido pela professora de pedagogia Anadyr Coelho da Escola Normal de Porto Alegre, com o título “A nova metodologia da Aritmética”. Neste livro, o autor defende o ensino de matemática como auxiliar de vida. De acordo com Morais e Onuchic “os problemas deveriam ser pensados de modo que as perguntas feitas não tivessem respostas sem sentido para a vida real” (Moraes; Onuchic, 2014, p. 20).

O livro de Thorndike traz contribuições de como deveriam ser utilizados os “novos métodos” no ensino da aritmética, tecendo comentários acerca de inadequações observadas em alguns problemas. Em síntese, o livro apresenta vários exemplos para a aplicação da aritmética na vida. Um dos capítulos apresenta quatro técnicas de Resolução de Problemas:

> 1. Se tem a certeza de que sabe resolver o problema, resolva-o imediatamente; 2. Se não tem, considere a questão, os dados e o que poderá fazer com eles, perguntando a si mesmo: o que quer saber nesse problema? O que tenho de procurar? De que dados disponho para achar a solução? O que sei a respeito deles? O que devo fazer com eles? O que poderei fazer com os números e com o que sei a respeito deles? 3. Pense no que vai fazer e porque vai fazê-lo assim e indique as operações de modo a saber o que fez; 4. Tire a prova dos resultados; veja se são razoáveis, se estão de acordo com o que diz o problema. (Thorndike, 1936, p. 167).

De acordo com Morais e Onuchic (2014), embora Lee Thorndike tenha se concentrado em grande parte nas discussões em torno do uso da Aritmética para aplicabilidade na realidade, a sua teoria teve grandes desdobramentos de forma geral sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Contudo, apesar disso, ficou conhecida como "teoria da repetição".

Posterior à teoria proposta por Thorndike, outra construção teórica passa a orientar os currículos de educação. Entre 1930 e 1940, havia um gerenciamento sobre os processos de aprendizagem e não somente sobre os produtos, tal como foi feito nas teorias anteriores. A teoria psicológica que comandava esse cenário é a chamada "teoria significativa" elaborada por William Brownell. Foi nesse cenário que a Resolução de Problemas se propagou inicialmente como uma teoria, nas mãos daquele que viria a ser conhecido como o "pai da Resolução de Problemas", George Polya.

Destacamos que a partir desse momento da história, os movimentos para as mudanças no currículo da matemática começam a surgir nas três teorias apresentadas anteriormente. Onuchic (1999) aponta uma divisão em relação ao ensino de matemática: a primeira delas como sendo um ensino por repetição, que entendemos fazem parte a teoria da disciplina mental e o conexionismo. A segunda se trata do ensino de matemática por compreensão, onde o produto era menos importante, sendo o foco o processo. Nesse ensino, elencamos a "aprendizagem significativa". Contudo, nesse último momento, embora houvesse uma preocupação com o processo de ensino, os professores não estavam preparados para trabalhar nos moldes defendidos, retornando ao ensino anterior, por repetição.

Na década de 40, a Resolução de Problemas ganha notoriedade entre professores e alunos no ensino superior. O grande marco teórico apontado para o início de pesquisas em Resolução de Problemas, foi o Húngaro George Polya que se consolidou nos Estados Unidos quando assumiu uma vaga como professor titular na Universidade de Stanford (Onuchic, 1999; Morais; Onuchic, 2014). Polya lançou suas contribuições à comunidade científica a partir do livro *A arte de resolver problemas*[2], sendo reconhecido a maior autoridade na temática, como educador e pesquisador matemático. A sua trajetória é marcada além das Resoluções de

[2] Obra original recebe o título em inglês: How to solve it: a new aspect of mathematical method.

Problemas, também, pelos processos heurísticos (Morais; Onuchic, 2014). A sua contribuição impulsionou discussões e produções na temática defendida.

Vale lembrar que todos os movimentos citados visando à reformulação do ensino de matemática ocorreram nos Estados Unidos, tendo seus reflexos no Brasil, contudo, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) na disciplina de Matemática:

> os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil, a partir dos anos 20, não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista deste ensino, bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL, 1998, p. 19).

No final do século XX, na Alemanha, Félix Klein, tem um olhar diferenciado para a prática docente, que mirava como esse professor deveria trabalhar a matemática com os seus alunos. Ele dedica o seu tempo a escrever sobre o ensino da matemática elementar em um nível avançado, incumbindo aos professores a tarefa de sugerir caminhos de soluções para os problemas elaborados (Onuchic, 1999). Sua preocupação girava em torno do processo de ensino da matemática, pois via a necessidade de professores mais bem-preparados para a atuação profissional.

Onuchic (1999) e Morais e Onuchic (2014) apontam que foi nesse período que o Movimento da Matemática Moderna surgiu, ficando conhecido como um movimento de renovação, deixando de lado todos os movimentos anteriores. Apresentava uma estrutura para o ensino da matemática pautada em: estruturas lógicas, algébricas, topológicas e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. Essa renovação trouxe uma matemática carregada de propriedades, preocupação excessiva com as abstrações, a linguagem era universal, concisa e precisa. Sua excessividade em símbolos e terminologia complexa acabava comprometendo o aprendizado.

O cenário em sala de aula consistia no professor expondo oralmente conceitos, propriedades e relações e os estudantes sem uma boa compreensão da terminologia utilizada. Muitos não conseguiam fazer as devidas ligações do que era ensinado com os problemas matemáticos, e mais ainda, com os problemas da vida real. Agora, as preocupações eram outras, o excesso de formalização estava distante das questões práticas dos estudantes.

O contexto histórico da Resolução de Problemas cruza em alguns momentos da história com pontos críticos referente ao currículo do ensino da matemática, que faz com que nasça uma nova área de pesquisa, a Educação Matemática (EM) (Fiorentini; Lorenzato, 2006). Esta surge no emaranhado de divergências e preocupações em torno dos processos de ensino e aprendizagem, que tem como mola propulsora uma das temáticas mais pesquisadas e apontadas para o ensino da matemática, a Resolução de Problemas.

A Resolução de Problemas como uma metodologia é recente, aceitá-la como uma possibilidade nas aulas de matemática passou a receber atenção nas últimas décadas. Segundo Onuchic (1999, p. 203):

> A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade.

A Resolução de Problemas como campo de pesquisa da Educação Matemática teve o seu início com George Polya. Embora os seus escritos sejam da década de 40, tomaram repercussão nos currículos escolares a partir da década de 70, ganhando espaço no mundo inteiro (Morais; Onuchic, 2014). Nos Estados Unidos, em 1980, é editada no *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) - *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*. Essa publicação fazia um convite a todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo e maciço, buscar uma melhor educação matemática para todos (Onuchic, 1999; Morais; Onuchic, 2014).

A primeira das recomendações defendia o uso da Resolução de Problemas como o foco da matemática escolar para aquela década. Onuchic (1999, p. 204) afirma que essa recomendação sustentava que a "Resolução de Problemas envolve aplicar à matemática ao mundo real, atender à teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas".

Atualmente, o documento oficial, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que rege a educação brasileira, coaduna com a recomendação da resolução de problema proposto pelo NCTM em 1980. Segundo o documento, a resolução de problemas deve estar presente desde os anos iniciais e não deve ser problemas com enunciados típicos, mas no sentido de provocar e colocar o estudante no estado reflexivo, compreendendo à importância da resolução de problemas em outros contextos (BRASIL, 2018).

No ensino médio, última etapa da educação básica, o documento aponta que para que os propósitos elencados na proposta curricular e que se desdobra em processos mais elaborados e sofisticados de reflexão e abstração em torno do ensino de matemática seja concretizado faz-se necessário:

> "[...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões

> e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529).

Entre os anos 70 e 80, a Resolução de Problemas ganhou força. Pesquisas foram elaboradas buscando um ensino e uma aprendizagem de matemática significativa, contudo, no primeiro momento, a Resolução de Problemas era pautada no exercício exaustivo de uma grande quantidade de problemas, ou seja, não havia preocupação com o processo (Morais; Onuchic, 2014). Tempos depois, o processo foi resgatado e a resolução de problemas consistia no uso de diferentes estratégias.

George Polya apresenta a resolução de problemas em quatro fases que, segundo ele, são aquelas que um resolvedor de problemas executa durante a resolutiva dos problemas:

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (Polya, 1945 tradução de Lisboa, 2006, p. 4 e 5).

O pensamento heurístico também é uma das marcas de Polya, em que ele apresenta como deve ser o comportamento ao encarar um problema: primeiro começar por algo que seja familiar, ou com utilidade, ou que desafie a querer resolver. Que tenha conexão com as situações do mundo real, visando à aplicabilidade, que seja possível partir do particular para o geral. A linguagem pode ser coloquial, com poucos termos técnicos, pois o uso deles devem partir do estudante ao sentir a necessidade. As demonstrações devem ser moderadas. Estas dicas indicam à importância das etapas no processo de aprendizagem.

Em 1972 em uma palestra no Segundo Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME) realizado na Inglaterra, Polya incita “que a Resolução de Problemas fosse considerada como estratégia de ensino” (Morais; Onuchic, 2014). Devido às recomendações do documento “Uma Agenda para Ação” publicado no NCTM em 1980, muitas pesquisas impulsionaram a Resolução de Problemas e, assim, muito material havia sido produzido para as salas de aula e estavam ajudando os professores a fazerem RP com o foco no ensino.

Contudo, Schroeder e Lester (1989) ratificaram as ideias de Hatfield (1978), quando afirmam que as produções não tinham coerência e uma direção. O ensino de matemática pautado na Resolução de Problemas se mantinha sem grandes mudanças e dos objetivos definidos para a década de 80, uma minoria havia sido atingida. Segundos os autores citados, havia três tipos de abordagem/concepções para o ensino de Resolução de Problemas: “(1) ensinando sobre a resolução de problemas, (2) ensinando para a resolver problemas, e (3) ensinando via resolução de problemas” (Schroeder; Lester, 1989, p. 32).

No Movimento da Matemática Moderna, entre as décadas de 1960 e 1970, segundo Gonçalves e Allevato (2020, p. 57-58), o "principal objetivo de ensinar Matemática se concentrava nas abstrações, embora o foco estivesse em uma linguagem matemática universal, concisa e precisa se percebeu o pífio desenvolvimento na aprendizagem”.

Assim, o ensino pautado na resolução de problemas surgiu como uma alternativa para mudar o ensino que predominava à época e tinha como base a memorização de procedimentos e de algoritmos, produzindo assim, uma aprendizagem nada significativa dos conceitos matemáticos. A mudança é fortemente ancorada na heurística defendida por Polya, conforme Allevato:

> As heurísticas ganharam força, constituindo-se em listas de sugestões e estratégias gerais, independentes do assunto particular. Elas auxiliavam a fazer aproximações, compreender um problema e dispor, eficientemente, os recursos para resolvê-lo. Portanto, foi sedimentada a crença de que era preciso ensinar os estudantes a resolver problemas ou, o que é o mesmo, ensinar sobre a resolução de problemas (Allevato, 2005, p. 49).

Esse ensino pautado na concepção *sobre* a RP, tinha em sua essência o método proposto por George Polya, exceto por uma pequena variação (Moraes E Onuchic, 2014). Assim, a resolução de problemas é uma atividade que o docente deve ensinar aos estudantes. Nesse processo, devem estar inseridos os conceitos, habilidades e algoritmos importantes para ampliar os conhecimentos matemáticos (Dante, 2000). Para Gonçalves e Allevato (2020, p. 58) “a concepção de que saber resolver problemas não constitui uma prática natural da aprendizagem de conteúdos matemáticos, pois o aluno que domina tais conteúdos não é, essencialmente, um bom resolvedor de problemas”.

Há, portanto, a defesa do uso de boas estratégias para a resolução de problemas e estas são as quatro etapas apontadas por Polya (1945) e defendidas também por Dante (2010), sendo assim importante a sua apresentação aos estudantes. Gonçalves e Allevato (2020), apontam como sendo essenciais:

> procurar padrões e generalizações; tentativa e erros organizados; e resolver primeiro problemas mais simples, de tal modo o aluno deveria dominar estratégias e algoritmos específicos, bem como exercitar técnicas apoiadas na repetição de problemas semelhantes (Gonçalves; Allevato, 2020, p. 58).

Contudo, a concepção que versa o ensino *sobre* a resolução de problemas tem a limitação de que, “a repetição de uma estratégia ou técnica operatória, mesmo que realizada corretamente, não garante a compreensão do conceito ou conteúdo matemático envolvido" (Allevato, 2005, p. 52). A afirmação, recai sobre o aporte teórico que usaremos neste trabalho, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, que defende a conceitualização como princípio no processo de ensino e aprendizagem, sendo, portanto, necessário considerar o conhecimento organizado como um grande campo de conceitos que estão interligados.

O ensino *para* a Resolução de Problemas consiste, primeiro, na apresentação de um conteúdo matemático, assim como um algoritmo ou uma técnica matemática, para depois aplicá-los na resolução dos problemas propostos (Gonçalves; Allevato, 2020). Há, portanto, uma concentração por parte do professor no conteúdo a ser ensinado, subsidiando o estudante de conceitos e técnicas.

A matemática é vista como utilitária, podendo ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros (Onuchic, 1999). Allevato (2005, p. 52) concorda ao afirmar que "essa é a visão que considera a Matemática como utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do seu ensino é ser capaz de utilizá-la". Tal afirmação gera, no estudante, a falsa impressão de aplicabilidade em qualquer situação, sendo capaz de resolver qualquer tipo de problema (Gonçalves; Allevato, 2020).

Na visão de Allevato (2005), há duas limitações imediatas desse ensino utilitário da matemática, são eles:

> [...] limita a atividade do aluno a resolução de problemas rotineiros, uma vez que os problemas devem exigir a aplicação da teoria matemática já supostamente aprendida pelos alunos;
> [...] ignora o potencial formador da Matemática, no tocante ao desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de abstrair, relacionar, representar, tomar decisões e, por que não, criar (Allevato, 2005, p. 55).

Dessa maneira, a concepção que entende o ensino *para* a Resolução de Problemas não contribui para o desenvolvimento do raciocínio e a criatividade do estudante quando inserido no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Para Van de Walle (2009, p. 57) a resolução de problemas deve ser o contrário, "os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática". Essa afirmação está fortemente atrelada às orientações dadas no Padrões 2000 proposta no NCTM, que visa pela construção do sujeito em toda uma esfericidade de habilidades essenciais para o seu completo desenvolvimento, de acordo com o referido autor (2009):

> A resolução de problemas desenvolve o "potencial matemático". Os estudantes que resolvem problemas em sala de aula serão envolvidos em todos os cinco dos Padrões de Processos descritos pelo documento Princípios e Padrões do NCTM: resolver problemas, raciocinar (argumentar), comunicar, conectar e representar. Esses são os processos do fazer matemática (Van De Walle, 2009, p. 59).

Ainda sobre essa concepção Allevato e Onuchic (2014) denotam que o correto não é ensino *para* a resolução de problemas, mas ensino de Matemática para a resolução de problemas. Logo, o eixo de sustentação não é mais a Resolução de Problemas, mas a Matemática, e esta tendo a primeira como um apêndice, um acessório. Em suma, "interessa a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto (em geral, puramente matemático) para problemas em outros contextos" (Allevato; Onuchic, 2014, p. 38).

A terceira e última concepção apontada por Hatfield em 1978 e retomada uma década depois, 1989, por Schroeder e Lester, trata do ensino de matemática *através* da resolução de problemas. A palavra destacada tem a ideia de desfocalizar a resolução de problemas como centro da aprendizagem, significando, portanto, “ao longo”, “durante o processo”, e enfatizando que Matemática e resolução de problemas são consideradas simultaneamente e construídas mutuamente e de maneira contínua (Allevato E Onuchic, 2014).

De maneira didática, “é uma metodologia de ensino e aprendizagem, na qual o conhecimento matemático se constrói ou se amplia através da resolução de um problema gerador” (Gonçalves; Allevato, 2020, p. 60). Esta última concepção vem sendo divulgada como uma proposta mais atual de ensino e aprendizagem, sendo tema de novas pesquisas em todos os níveis de ensino. Nesse sentido, parece ter Onuchic como a principal defensora.

Gonçalves e Allevato (2020) destacam que a resolução de problemas ganhou notoriedade como metodologia a partir da década 90, quando foi colocada para o ensino e aprendizagem da matemática. Assim, Onuchic e Allevato (2011, p. 80) apontam que “o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos. Os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo”.

Dessa maneira, há uma defesa para o ensino através da RP que consiste em apoiar-se na crença de que o motivo mais relevante para esse tipo de ensino-aprendizagem é o de auxiliar os estudantes a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro de tarefas para cada unidade temática da matemática (Onuchic, 1999). A RP, nessa perspectiva parece, portanto, convergente com as ideias apresentadas por Vergnaud como veremos mais adiante.

A respeito dessa última concepção, que é a mais atual de Resolução de Problemas, Onuchic e Allevato (2014, p. 39) defendem que é “uma das alternativas metodológicas adequadas ao cenário de complexidade em que se encontram atualmente as escolas, onde se insere o relevante trabalho do educador matemático”. Para a proposta aqui apresentada, concentraremos o nosso estudo sobre essa concepção, pois entendemos que há uma relação dual no processo de ensino e aprendizagem, da resolução de problemas com a matemática, e do professor com o estudante, todos esses elementos construindo-se simultaneamente ao longo do processo educacional.

2.1.1 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A partir da década de 90, o NCTM desenvolveu com intensidade trabalhos com a principal intenção de auxiliar os professores destacando aspectos essenciais para o ensino da Matemática (Onuchic; Allevato, 2011). Entre as tantas publicações feitas pelo conselho internacional de professores de matemática, estão aqueles que ficaram conhecidos como os Standards 2000 (Padrões 2000). De acordo com Onuchic e Allevato (2011) nesse documento:

> são enunciados seis Princípios (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia); cinco Padrões de Conteúdo (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, e Análise de Dados e Probabilidade); e cinco Padrões de Procedimento, entre os quais o primeiro é Resolução de Problemas, seguido por Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação (Onuchic; Allevato, 2011, p. 79).

Destacamos que os seis princípios citados estão presentes na BNCC referente ao Ensino Fundamental, tendo a sua ampliação no ensino médio. Onuchic e Allevato (2014) destacam que considerada agora a Resolução de Problemas como um procedimento, a concepção que ganha notoriedade é do ensino de matemática através da resolução de problemas. Mais tarde, devido a outras publicações no mesmo segmento pelo NCTM, pesquisadores adeptos das recomendações feitas, começam a dar ênfase na pesquisa e na formação de professores, considerando aspectos voltados para o ensino, a aprendizagem e a avaliação.

O ensino, a aprendizagem e a avaliação de matemática, embora constituam-se como elementos distintos na literatura, com as suas ocorrências em diferentes intervalos de tempo, Onuchic e Allevato afirmam:

> “o que se considera ideal é que ensino e aprendizagem se realizem, sim, integrados nas situações de sala de aula. [...] o conceito de avaliação começou a ser repensado e, a partir da compreensão da necessidade de adorar princípios de avaliação contínua e formativa, ela passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos” (Onuchi; Allevato, 2014, p. 42 - 43).

Dessa maneira, fica explícito o motivo de ensino-aprendizagem ser uma expressão com grande uso no meio educacional. Já sobre a avaliação, esta vem a ser um desafio para os educadores, sobretudo para os que pensam na aprendizagem em matemática como dada pela quantidade de acertos, portanto, romper com esse paradigma consiste em um obstáculo a ser superado pelos professores. Tem-se que o processo de construção é mais consistente, e uma das recomendações feitas consiste em configurar o processo avaliativo como sendo uma oportunidade para aprender nas aulas de matemática.

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2009) defendem a composição das três palavras como um sistema indissociável, na qual a avaliação é realizada durante a Resolução de

Problemas, orientando e acompanhando o crescimento dos estudantes, intensificando a aprendizagem e reorientando a prática docente quando houver necessidade. Assim:

> “a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador” (Onuchic; Allevato, 2014, p. 43).

Nesse viés, desde a década de 90 um grupo de pesquisa coordenado por Lourdes Onuchic na Universidade Estadual Paulista (UNESP/Rio Claro) tem desenvolvido contribuições acerca da Resolução de Problemas visando o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Muitos são os frutos oriundos das discussões que foram divulgados em dissertações e teses e continuam sendo difundidos. Em 2008, agora sob a coordenação de Norma Allevato, é criado um outro grupo de pesquisa na Universidade Cruzeiro do Sul em São Paulo, mas com um destaque para a metodologia da resolução de problemas destacando o ensino, a aprendizagem e a avaliação (Costa, 2021).

Recentemente, Costa (2021) fez um panorama das contribuições já realizadas pelas autoras citadas sobre a metodologia, onde elas recomendam que:

> [...] deve-se propor aos estudantes problemas que tenham como objetivo a construção de novos conceitos e conteúdos antes de apresentar formalmente sua teoria e a linguagem Matemática. Por isso, o professor deve iniciar pela escolha do problema que deve ser apropriado ao que se pretende construir, denominado “problema gerador” (Costa, 2021, p. 9 - 10).

Nesse sentido, Onuchic (1999) propõe que a atividade matemática não deve ser direcionada para as coisas prontas e definitivas: o aluno deve assumir uma posição que permita a construção e a apropriação de um conhecimento que servirá para compreender e transformar a realidade.

Ancorada nessas ideias, Onuchic e Allevato (2011; 2014) propõem uma estrutura de dez etapas que possibilite um espaço formativo de compreensão e significado através da Resolução de Problemas. 1) O professor começa a aula a partir de um problema selecionado ou elaborado que visa a construção de um dado conceito, chamado de **problema gerador**. 2) O estudante faz a **leitura individualmente** do problema, o intuito é levá-lo a refletir, e ter um primeiro contato com a linguagem matemática, desenvolvendo uma compreensão sua sobre o problema apresentado. 3) A partir da formação de pequenos grupos, **os estudantes leem em conjunto** o problema e expressam suas ideias de compreensão, o professor pode auxiliar para que se expressem com clareza. 4) Os estudantes discutem com o intuito de encontrar uma **resolução para o problema**, fazem o uso de recursos escritos, caso não dominem a linguagem matemática, a representação por meio de gráficos, desenhos, entre outros é válido. 5) **O professor** através de atos de mediação, **auxilia** por meio de indagações encaminhando os estudantes a reflexão de suas ações, incentiva o uso de conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e convida-os a trocarem ideias, contudo, sem fornecer as respostas. 6) Os estudantes **registram suas resoluções** na lousa, logo há o compartilhamento das diferentes maneiras de resolução e o aprimoramento das escritas. 7) Os estudantes dialogam em uma **plenária** apresentando seus pontos de vista e buscando apontar melhorias nas resoluções uns dos outros. 8) Há a **busca por um consenso** para o resultado correto. 9) **Formalização do conteúdo** por parte do professor de forma organizada e estruturada, destacando os principais conceitos matemáticos e os procedimentos. 10) **Proposição e resolução** de outros problemas com os conceitos trabalhados.

Destacamos que as etapas apresentadas buscam integrar os envolvidos no trabalho colaborativo, onde a principal tarefa é a busca de soluções para um dado problema. Outro ponto consiste no professor fazendo uso de ações de mediação para conduzir a atividade e incentivar os estudantes como principal responsável pela construção do seu conhecimento. De acordo com Gonçalves e Allevato (2020, p. 63), a atividade quando pensada dentro das etapas apresentadas "orientam alunos e professores a desenvolverem atividades que possam potencializar a aprendizagem de conteúdos matemáticos, bem como, promover uma aprendizagem mais significativa em um ambiente colaborativo e reflexivo".

No que diz respeito aos processos de ensino e aprendizagem, Garcia (2009) afirma que é vislumbrada a compressão dos conceitos e consequentemente uma superação do modelo tradicional, que tem enraizada a apropriação dos conteúdos transmitidos pelos professores, a proposta do trabalho colaborativo na resolução de problemas busca mobilizar os estudantes de forma física e intelectual para a atividade de construção do conhecimento, "a colaboração surge como ideia principal referente ao pressuposto psicológico de constituição da mente humana por meio das interações sociais" (Garcia, 2009, p. 69).

Nessa perspectiva e diante de todo o contexto apresentado, fica a principal indagação do que viria a ser um problema. Na literatura que utilizamos como embasamento para a construção deste texto, cada autor traz à sua maneira, uma definição. Para Dante (2010, p. 11) "é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo". Ou ainda como aponta Hiebert *et al*, (1997) em Van de Walle (2009, p. 57) "um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método 'correto' específico de solução".

Perceba que um problema é algo do qual não se tem ferramentas imediatas para resolver, logo, ele causa um desequilíbrio cognitivo e sai em busca de elementos que possibilitem uma organização e a tentativa de uma resolução. Em outras palavras, quando estamos diante de um problema, os esquemas cognitivos existentes em nosso repertório de vivências e variedades não são o suficiente para solucioná-lo, ou seja, há a necessidade de modificações e adaptações. Essa afirmação vai de encontro com as ideias do aporte teórico adotado neste trabalho, Gérard Vergnaud.

Outro ponto que devemos destacar consiste no fato de um problema não ser o mesmo para todos: o que é um problema para o estudante da turma X pode não ser para o estudante da turma Y. Ainda, o que é um problema em um dado contexto, pode não ser em outro (Dante, 2010). Há um consenso entre os educadores matemáticos do que vem a ser um problema, Lester (1982) em Dante (2010, p. 12) afirma que "problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução".

Neste texto queremos destacar a importância da resolução de problemas para o ensino de matemática, mais precisamente aquele que diz respeito a área de Geometria, que será discutida na próxima seção. Segundo Van de Walle (2009), há alguns elementos que asseguram a relevância da metodologia:

- A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas.
- A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido.
- A resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados.
- A resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos.
- Uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina.
- A resolução de problemas desenvolve o "potencial matemático".
- É muito divertida! (Van De Walle, 2009, p. 59).

Entendemos ser a Resolução de Problemas uma possibilidade metodológica eficaz para contribuir com o Ensino de Matemática de forma colaborativa, reflexiva, criativa e prática. A divulgação científica, a pesquisa na área e as recomendações de documentos oficiais que regem o currículo escolar brasileiro nos levam a acreditar que ela possibilita uma construção sólida de conceitos trabalhados em sala de aula.

2.2 ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL E SUA IMPLICAÇÃO PARA O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

As pesquisas em Educação Matemática têm contribuído para que novos olhares sejam lançados em torno do ensino de geometria. Olhares esses que auxiliam no direcionamento da prática caracterizando a importância de todos os conteúdos da Matemática para a formação do sujeito ativo e crítico na sociedade moderna. Nesse sentido, e a respeito da importância da geometria, Dana (1994, p. 141) destaca que ela "pode ser estimulante, motivadora, gratificante, instigadora do raciocínio e, às vezes, desafiante", todas essas potencialidades levando em consideração os estudantes e os professores.

Para caracterizar o ensino de geometria, faz-se necessário buscar as fontes do surgimento desse ramo da matemática. Assim como toda a matemática, a geometria surge em meio a necessidade do homem, como, por exemplo, na construção de sua morada e na divisão da terra para o seu plantio e sustento. Sabemos, portanto, através da história que o berço dela foi na Grécia, vindo o seu nome significar, geo = terra e metria = medir, portanto, medir a terra.

Ainda nesse contexto, a Geometria foi marcada ao longo dos séculos por grandes nomes de pensadores gregos, entre eles: Pitágoras, Tales de Mileto, Arquimedes e Euclides, esse último sendo o responsável pela organização de teoremas, axiomas e corolários da geometria em sua obra "Os Elementos". Contudo, isso não é uma certeza, Roque (2012, p. 107) destaca que "há registros de que, muito antes de Euclides, existiram diversas outras obras organizadas como "elementos" de algum tipo de matemática, que procuravam apresentar um extenso conhecimento de modo coerente".

Assim sendo, a Geometria marcada pela história contada e relatada por diversos autores, em termos de ensino, o que nos interessa é o seu desenvolvimento a nível nacional, sendo, portanto, o principal foco neste trabalho. Em nossas leituras, notamos que o ensino da geometria foi marcado por um longo contexto histórico, político e social que tem seu início pouco tempo depois da chegada dos Portugueses ao solo brasileiro em 1500. De acordo com Meneses (2007, p. 1), em seu estudo a respeito do desenvolvimento do ensino de geometria no Brasil:

> [...] se não foi o que mais sofreu modificações ao longo dos anos, certamente está no rol dos ensinamentos que mais se modificaram, não só no que diz respeito às metodologias, mas também do grau de importância atribuído a esse ramo da Matemática, para ensino escolar.

Caldatto e Pavanello (2015) apontam que cinquenta anos depois da chegada dos portugueses no Brasil, em meados de 1549 com o primeiro governador-geral, Tomé de Sousa e dos padres da Companhia de Jesus, tem-se o início do processo de formação escolar. O processo de escolarização perdurou um pouco mais de duzentos anos, ficando sob o comando dos Jesuítas no período de 1549 a 1759, era o único sistema educacional vigente e tinha como principal objetivo a catequização e aculturação dos povos indígenas aqui existentes (Caldatto; Pavanello, 2015).

Com a chegada de nobres da coroa portuguesa visando, principalmente, a exploração da terra brasileira em uma perspectiva do engrandecimento econômico, viu-se a necessidade de um redirecionamento educacional. Agora, além da instrução cristã "[…] a preocupação foi ensinar aos poucos nativos e aos crioulos a língua portuguesa, o catecismo e a aritmética (ou arismética) vigentes em Portugal" (D'ambrósio, 1999, p. 10).

De acordo com os autores (2015) citados, em uma análise do contexto histórico do Ensino de Geometria, verifica-se que os ensinamentos dos Jesuítas mesmo após a chegada de novos habitantes na colônia brasileira eram precários. "[...] apresentam indícios de uma provável precarização do ensino de matemática proporcionado pelos jesuítas no Brasil. [...] o estudo de matemática restringia-se à aritmética, não abordando conhecimentos de áreas como a geometria e a álgebra" (Caldatto; Pavanello, 2015, p. 104).

Dessa maneira, em um primeiro momento e focalizando para o objetivo deste trabalho, o ensino de geometria surge da necessidade de defesa do território brasileiro, ou seja, o principal objetivo das aulas eram preparar os colonos em termos de conhecimento matemático para o resguardo da terra e das riquezas (Meneses, 2007). Contudo, o ensino das áreas do conhecimento era de forma isolada, a partir da implantação das aulas régias criadas por Marquês de Pombal, havia as aulas de Aritmética, de Álgebra e de Geometria. Nesse contexto, o Brasil passa tempos depois a ter influência da educação francesa. Em 1648 chegam ao Brasil os especialistas em assuntos militares para capacitar os colonos, a base para a formação era o ensino de geometria (Caldatto; Pavanello, 2015).

Carente de livros didáticos, os primeiros livros elaborados com a impressão na Europa, foram de autoria do engenheiro militar José Fernandes Pinto Alpoim. O conhecimento a respeito da matemática para a preparação de militares é distribuído em dois volumes, o Exame de Artilheiros (1744) e o Exame de Bombeiros (1748). De acordo com Meneses (2002, p. 24) "os livros apesar de terem objetivos militares, também atendiam objetivos didático-pedagógicos, no entanto, não tinham nenhum compromisso com o *rigor matemático*, pois os livros visavam à formação para a atuação. Dessa forma, o ensino era voltado para a prática na guerra, como exemplo, calcular a trajetória e a mira dos canhões.

O Exame de Artilheiros tinha o foco em geometria, no entanto, era um ensino dos rudimentos geométricos e as suas aplicações, sendo, portanto, necessário um conhecimento de aritmética. Assim, em suas páginas introdutórias, Meneses (2007) destaca que era dada prioridade a essa área da matemática, com enfoque nas quatro operações fundamentais. A organização do livro em termos de atividade era em perguntas e respostas. Pela descrição apresentada pelo referido autor, nota-se que o principal objetivo do livro consistia na preparação do estudante para a prática em situações de guerra. As aulas eram conduzidas em torno de modelos que poderiam acontecer em um campo de concentração. O autor faz um alerta para o tipo de geometria trabalhada no livro 1, pois não eram abordados conteúdos de cálculo de áreas e volumes.

No segundo livro, Exame de Bombeiros, o foco era dado em geometria e trigonometria. A obra continuava no formato de perguntas e respostas, porém diferentes do primeiro. Alpoim passou a dar um certo rigor matemático nas situações desenvolvidas e inserir o conceito de volume a partir do corpo redondo, a esfera, Meneses (2007) destaca:

> o autor apresenta a noção de esfera, o cálculo do seu diâmetro e do seu volume e indica que essas noções servem não somente para saber quanta pólvora levam as câmeras côncavas dos morteiros e o côncavo da bomba, mas também para conhecer quantas polegadas cúbicas têm as suas câmeras e os vãos das bombas e, inclusive para saber o próprio peso (Meneses, 2007, p. 31).

Há também nesse segundo livro, o cálculo de áreas, no entanto, o que se percebe nos dois volumes elaborados por Alpoim é a preocupação “em instruir como proceder dentro das atividades militares do que criar sequências de princípios, exemplos, generalização, exercícios” (Meneses, 2007, p. 35).

Passado esse momento, na França a formação militar é considerada referência, e os livros de autores franceses passam a ser utilizados no Brasil, nesse processo, surgem dois cursos voltados para a formação militar, sendo eles: o curso da Academia Real dos Guardas Marinha (1782) e o curso da Academia Real Militar (1810). Em ambos os cursos havia uma valorização da geometria, estes também fizeram uso de livros didáticos de origem francesa por um certo tempo, quando os livros passam a ser gradativamente substituídos pelas obras do brasileiro Francisco Vilela Barbosa, que nos anos de 1801 a 1821 passou a avaliar os cursos de Matemática das Academias já citadas e os alunos passam a realizar os testes baseado em seus escritos (Caldatto; Pavanello, 2015).

Os livros utilizados de origem francesa, não tinham em sua estrutura o rigor matemático, o que é um quesito que difere do autor brasileiro. Contudo, Meneses (2007), Caldatto e Pavanello (2015) apontam os livros de Vilela como uma cópia das obras de Bézout, um dos autores franceses utilizados. Exceto pelo detalhe já descrito, Vilela Barbosa traz as ideias de teorema, axioma e corolários, itens renegados nos livros do francês citado.

Com a emancipação do Brasil, em 1822, a passagem do período colonial para o imperial fez com que uma nova reformulação fosse dada no ensino brasileiro. De acordo com Caldatto e Pavanello (2015, p. 110), a mudança dos períodos oportunizou “o estabelecimento do ensino secundário — e dos conhecimentos a serem neles contemplados — como o estabelecimento de cursos superiores no Brasil, inicialmente das áreas de direito, medicina e engenharias".

Quando a coroa portuguesa chega ao Brasil, não havia uma estrutura de país, os livros utilizados eram impressos na Europa como já citado parágrafos acima, assim como para ter um título de ensino superior, necessitavam ir para a Universidade de Coimbra em Portugal. No entanto, Caldatto e Pavanello (2015) afirmam que com a criação das universidades a partir do Brasil império, as aulas que até então eram régias, passaram a ser avulsas. Para entrar nos cursos superiores, um dos pré-requisitos era o conhecimento de Geometria, sendo exigido primeiro no curso de Direito, estendendo-se para Medicina e posteriormente as Engenharias.

Nesse intervalo de tempo, é criado o colégio que seria a referência de ensino para os demais colégios do país, o Colégio Dom Pedro II. Essa instituição, foi idealizada com base nas ideias da educação escolar francesa. De acordo com Valente (1999), a respeito do ensino de matemática no secundário:

> [...] terá sua referência a partir do programa de ensino do Colégio posto em seu regulamento: a Aritmética era ensinada nos três primeiros anos do curso, seguida pela Geometria por mais dois anos e Álgebra no sexto ano. Nos dois últimos, as matemáticas eram ensinadas sob o título de matemática. Na verdade, tratava-se do ensino da Trigonometria e da Mecânica (Valente, 1999, p. 118).

Percebe-se que a Matemática ainda vinha em uma estrutura de ensino de áreas isoladas. O material utilizado, segundo Valente (1999), nos cursos preparatórios seriam os de origem francesa e no ensino superior tinha uma forte tendência na coleção *Os Elementos* de Euclides.

A Proclamação da República em 1889, do ponto de vista de D'Ambrosio (1999), foi uma fase em que em nada houve mudança no ensino de matemática e na ciência em geral. A partir de 1920, com a repercussão das intensas discussões no contexto internacional sobre a Reforma do Ensino de Matemática, como apontado na seção anterior, que a educação brasileira toma uma direção liderada pela atuação de Euclides Roxo.

De acordo com Pavanello (1993), no início do século XX, o Brasil tem sua economia predominantemente agrícola, vivendo da comercialização e exportação para os países industrializados. A população em sua maioria era analfabeta, sem acesso à educação. Uma pequena parcela tinha acesso aos níveis de escolarização oferecidos. No ensino superior, o acesso era apenas aos herdeiros de latifundiários, preferencialmente nos cursos de área jurídica que facilitavam o acesso aos cargos burocráticos e políticos do governo.

O ensino de matemática na escola primária era utilitário, tinha o objetivo de preparar para a vida prática, com foco nas atividades comerciais. No ensino de geometria, eram trabalhadas algumas noções básicas (Pavanello, 1993). O ensino secundário era pago e voltado para a classe rica, visando a preparação para o ensino superior. Segundo a referida autora:

> Os conteúdos de matemática (aritmética, álgebra, geometria etc) são ensinados separadamente e por professores diferentes. O tratamento dado a eles é puramente abstrato, sem qualquer preocupação com as aplicações práticas. Os livros utilizados também desenvolvem casa assunto progressiva e sistematicamente como um todo, sem procurar estabelecer qualquer relação entre os diferentes ramos da matemática. Os professores são quase sempre autodidatas ou oriundos das profissões liberais. [...] Se existe, algum desenvolvimento da matemática, ele se dá na Escola Militar e na Politécnica do Rio de Janeiro (Pavanello, 1993, p. 8 - 9).

Como já mencionado em outras partes deste texto, o ensino de matemática no mundo, principalmente na Europa, vinha em intensas discussões. Tratava-se do chamado Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática. Tais discussões surgem principalmente pela drástica mudança econômica que o mundo vinha sofrendo, saindo da economia agrária para a economia industrial, evidenciando a necessidade de um maior conhecimento de matemática (Pavanello, 1993; Meneses 2007; Onuchic; Allevato, 2014; Caldatto; Pavanello, 2015).

Caldatto e Pavanello (2015) destacam que o movimento ganhou força a partir do IV Congresso Internacional de Matemáticos ocorrido em Roma no ano de 1908. Nesse evento, pesquisadores, matemáticos e educadores matemáticos “propuseram a criação de uma comissão internacional para estudar como desenvolver o ensino da matemática na escola” (Caldatto; Pavanello, 2015, p. 112). Ainda de acordo com os referidos autores:

> “as ações desenvolvidas e propostas pela comissão influenciaram o ensino de matemática em vários países, inclusive no Brasil, onde, a partir da década de 1930, procurou-se implantar um ensino delineado pela adequação das propostas da comissão composta, dentre outros, por Euclides Roxo” (Caldatto; Pavanello, 2015, p. 114).

Impulsionado pelo Movimento Internacional da Matemática, Euclides Roxo, efetivo no Colégio Dom Pedro II, começa o processo de reformulação do Ensino da Matemática no país. De acordo com Soares, Dassie e Rocha (2004), o processo impulsionou as reformas Campos, Capanema e o Movimento da Matemática Moderna.

Contudo, antes das reformas citadas, Meneses (2007, p. 59) destaca como era o ensino de geometria em 1925. No Brasil, a reforma chamada Rocha Vaz tinha “o ensino de Geometria, que era dado no 3º e 4º ano, passou a ser dado apenas no 4º ano, portanto um ano a menos. Apesar da redução de tempo, os conteúdos continuaram inalterados”, O autor destaca a diferença entre os ensinos francês e brasileiro: o primeiro tinha preocupação com a formação cidadã; e o segundo visava apenas a preparação para o Ensino Superior, sendo esse o principal objetivo do ensino de geometria no Brasil (Meneses, 2007).

Contudo, houve uma grande valorização do ensino pautado na repetição. Meneses (2007) destaca que a aprendizagem era mecânica, sendo, portanto, o ensino de geometria baseado na reprodução dos conteúdos abordados pelos professores nas aulas, buscando principalmente o direcionamento para as provas de admissão nos cursos superiores.

Na Revolução de 1930, Getúlio Vargas assume o governo e cria o Ministério da Educação e Saúde, indicando Francisco Campos para chefiá-lo (Pavanello, 1993). A partir desse ministério, houve uma das mais relevantes tentativas de organizar o sistema de educação no Brasil (Soares; Dassie; Rocha, 2004). Segundo os autores, a partir da reforma:

> As mudanças no ensino secundário, provocadas pela Reforma Campos, foram instituídas pelo decreto 19.890, de 18 de abril de 1931, e consolidadas por meio do decreto 21.241, de 4 de abril de 1932. O principal objetivo era o de ampliar a finalidade do curso secundário, que deveria deixar de ser apenas um curso propedêutico para ingresso nas faculdades, para possuir uma finalidade própria. Com este objetivo, o curso passaria a ter sete anos, divididos em duas partes: a primeira, de cinco anos, comum ou fundamental, e a segunda, de dois anos, com finalidade de preparação para as escolas superiores (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004, p. 8).

No que tange ao ensino da matemática, Euclides Roxo, nesse contexto, agora como diretor do Colégio Dom Pedro II, faz uso do seu cargo para ampliar as suas ideias por todo o país. Estas receberam várias críticas: o lado contrário às ideias afirmava que o ensino já não era bom e, com as ideias do então professor, deixaria de existir (Soares; Dassie; Rocha, 2004). Em suma, os autores citados destacam que as ideias de Roxo resumiam-se na fusão das áreas de aritmética, álgebra e geometria, sendo a nova disciplina denominada de Matemática, tendo, portanto, o professor a missão de conduzir a disciplina nos três segmentos. Ainda nessa temática, Miorim (1998) destaca que o ensino de geometria estava pautado principalmente no caráter intuitivo e experimental, segundo ele:

> [...] percebe-se uma clara preocupação em introduzir os raciocínios lógicos apenas após um trabalho inicial que familiarize o aluno com as noções básicas presentes nas figuras geométricas, quer em sua posição fixa, quer através de seus movimentos. Com respeito a este último aspecto, enfatiza-se a importância de serem examinadas as noções de simetria axial e central, de rotação e de translação. Apesar de não ser eliminado o estudo da geometria dedutiva, que entretanto, ficará restrito a geometria plana, sugeria-se que ele fosse introduzido de forma gradual e tivesse sempre por base as observações intuitivas e a compreensão da necessidade de uma demonstração (Miorim, 1998, p. 97).

Embora a nova proposta estivesse articulada visando o entrelaçamento das áreas da matemática, a mudança nos currículos ocasionara um novo desafio: os professores até então eram autodidatas e, de acordo com Caldatto e Pavanello (2015, p. 116), "com a ausência de cursos de formação que oferecessem subsídios para essa alteração curricular, o livro didático passou a ser encarado como a principal fonte de disseminação da reforma".

Em 1942, tem-se no Brasil mais uma reforma em termo de educação, a chamada Reforma Capanema, em alusão ao então ministro da Educação e Saúde Gustavo Capanema. Para Soares, Dassie e Rocha (2004), essa reforma fez um recuo nas ideias da Reforma Campos, mas também possibilitou a criação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

No que diz respeito ao ensino de matemática na nova reforma, Pavanello (1989), em Caldatto e Pavanello (2015), apontam que há algumas diferenças entre as reformas:

> Em primeiro lugar, não mais se insiste em que os três assuntos — aritmética, álgebra e geometria — sejam abordados em cada uma das séries do curso ginasial. A geometria é ainda abordada nas quatro séries iniciais, intuitivamente nas duas primeiras e dedutivamente nas duas últimas. A aritmética (prática) é, no entanto, ministrada só nas séries iniciais, enquanto a álgebra é programada para as duas últimas. Progressões, logaritmos e exponenciais e funções circulares, que constavam do programa da 4ª série (programa de 1931) passam a figurar nos cursos clássico e científicos. No 3º ano são estudados limites e derivadas. A geometria é bastante priorizada no segundo ciclo, sendo programada para todos os anos, incluindo-se ainda trigonometria no 2º ano e geometria analítica no 3º (Pavanello, 1989 apud Caldatto; Pavanello, 2015, p. 117).

As duas grandes reformas que ocasionaram mudanças no sistema de ensino brasileiro foram marcadas por intensas discussões e firmadas por decretos federais. No caso da segunda, há um recuo em relação à primeira, quando opta por ter o ensino das áreas de modo sequencial e sem uma interação. No entanto, os autores citados acima (2015) destacam que as recomendações feitas e defendidas por Euclides Roxo durante toda a sua atuação para a mudança nos currículos, principalmente em relação ao ensino da matemática, foram acatadas e mantidas, sendo elas: a presença da matemática e de várias de suas áreas em todo o currículo escolar.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM), com ampla divulgação no cenário internacional, chega ao Brasil na década de 60. Essa reforma foi a única que não teve a sua promulgação a partir de um decreto e dentre todas as reformas na educação, sobretudo no ensino de matemática, esta foi a que teve o maior destaque (Soares; Dassie; Rocha, 2004).

A respeito do ensino de geometria, Caldatto e Pavanello (2015) destacam que eles sempre estiveram nos currículos escolares para serem trabalhados em sala de aula, porém com o advento da MMM, a geometria começou o processo de redução para atender às demandas defendidas pelo então movimento.

Essa reformulação em termos de uma Matemática Moderna surge em decorrência de dois momentos da história, Fiorentini e Lorenzato (2006) descrevem esses motivos:

> Esse movimento surgiu, de um lado, motivado pela Guerra Fria entre Rússia e Estados Unidos e, de outro, como resposta à constatação, após a Segunda Guerra Mundial, de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico e o currículo escolar vigente. A Sociedade Norte-Americana de Matemática, por exemplo, optou, em 1958, por direcionar suas pesquisas ao desenvolvimento de um novo currículo escolar de matemática. Surgem então vários grupos de pesquisa envolvendo matemáticos, educadores e psicólogos (Fiorentini; Lorenzato, 2006, p. 6).

Um outro ponto que merece destaque, além dos motivos que impulsionaram o surgimento da MMM, é a proposta com a qual ele chega. Caldatto e Pavanello (2015) descrevem como sendo uma proposta apoiada na teoria dos conjuntos e organizada em termos de estruturas. Essas estruturas eram as chamadas fundamentais da matemática: algébricas (com foco nos grupos), de ordem (com foco em rede) e topológicas (fundamentada nas noções de limite, continuidade e proximidade).

Dessa maneira, tem-se que esse movimento é lembrado pela grande importância que deu à algebrização, com forte influência na Teoria dos Conjuntos. Acabou sendo décadas depois um fracasso, pois sua base estava ancorada em uma linguagem carregada de símbolos, com ênfase em propriedades, abstrações matemáticas, caracterizando uma matemática universal, concisa e precisa, que não tinha sentido algum para a utilização na vida prática. De acordo com Onuchic (1999) o movimento:

> [...] acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. [...] o professor falava, porém muitas vezes não seguro daquilo que dizia. O aluno não percebia a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática dos problemas e, principalmente, com a matemática usada fora da escola. Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas (Onuchic, 1999, p. 202 - 203).

A sustentação epistemológica do movimento estava ancorada na teoria de desenvolvimento da aprendizagem proposta por Jean Piaget. Em seus estudos, Piaget afirmava haver uma relação entre o desenvolvimento das estruturas psicológicas do sujeito e a forma de ensinar a matemática proposta pelo Movimento. Essas conclusões de Piaget são embasadas nas correspondências que ele propôs com a três grandes estruturas: as algébricas, estruturas de ordem e as topológicas, a primeira sendo os sistemas de classes, a segunda de seriação e a terceira de separações (Caldatto; Pavanello, 2015).

Diante de todo o exposto, Pavanello na virada da década de 80 para década de 90 do século XX, fez um estudo a respeito do abandono da geometria no Brasil. Segundo a professora e pesquisadora, há dois motivos que podem ser considerados: o Movimento da Matemática Moderna, que deu grande destaque para a álgebra e a preocupação excessiva com a linguagem carregada de símbolos e formalismo no ensino de matemática, porém, essa não é culpa do MMM (Pavanello, 1993), mas ela pode ter dado o início em uma processo de “abandono” que estende-se até meados 2010 (Caldatto, Pavanello, 2015).

De acordo com a referida autora (1993), a promulgação da Lei Federal 5.692/71 durante o Regime Militar, possibilitou a maior parcela de jovens o acesso ao ensino secundário, mas também possibilitou às escolas brasileiras a liberdade de escolher seus programas de ensino. Dessa maneira, professores inseguros em ministrar os conteúdos correspondentes à geometria, possibilitavam o seu adiamento para o final do ano letivo. Isso implicava em que não se poderia garantir que o conteúdo fosse trabalhado, pois sua abordagem só seria possível caso houvesse tempo disponível. Assim, ensino de matemática passou a ser quase que exclusivamente para aritmética e para álgebra.

Diante da Lei e da elaboração dos currículos, pesquisadores como Perez (1991) alertavam para a carência do ensino de geometria na educação básica. Quatro anos depois, Lorenzato (1995) torna públicas as suas ideias sobre a importância de ensinar geometria, enfatizando que ela continuava abandonada nas aulas de matemática, atribuindo esse abandono ao despreparo dos professores e a maneira como o livro didático era utilizado. Assim, os educadores matemáticos buscaram somar forças para um resgate dessa importante área da matemática no contexto de sala de aula.

No ano de 1996, é promulgada a Lei de nº 9394, que institui a Educação Básica como obrigatória e gratuita dos 4 aos 17 anos de idade. Sendo agora os seus segmentos: Pré-escola, Ensino Fundamental e Ensino Médio, com os dois últimos substituindo os antigos 1º e 2º grau. Em consonância a Lei no ano de 1998, são editados os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino de Matemática, que em suas páginas recomenda o ensino de geometria como:

> […] As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca (BRASIL, 1998, p. 44).

Nota-se que a recomendação dada gira em torno da geometria euclidiana, possibilitando ao estudante um espaço experimental para a construção de conceitos e consequentemente do conhecimento geométrico. Ainda, nesse segmento de mudanças no cenário educacional, cria-se o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que tem por objetivo avaliar o desempenho dos estudantes concluintes, buscando dados para a melhoria da educação básica. Contudo, Caldatto e Pavanelo (2015) descrevem que:

> Os resultados obtidos pelos alunos nessas provas, especialmente no tocante à geometria, mostram que apesar das tentativas explícitas de restabelecimento do ensino desta no Brasil — principalmente por meio de medidas governamentais, como a inclusão de conteúdos da geometria em currículos em nível nacional e estadual — não se tem observado resultados positivos em relação ao alcance dos objetivos dessas medidas (Caldatto; Pavanello, 2015, p. 123).

Assim, no que tange ao ensino de geometria, foco deste trabalho, surgem várias indagações. E uma delas é onde está o impedimento da melhoria no Ensino de Geometria? Costa (2020, p. 129) destaca que “os professores de Matemática, em sua maioria, enfrentam dificuldades em realizar a transposição entre os cenários vivenciados, com os quais foram construídas as pesquisas, e a realidade prática de sala de aula, onde realizam o seu exercício profissional”. O mesmo autor afirma que há um distanciamento progressivo, sendo mais evidente no ensino de geometria. Há, portanto, uma "ausência de conexão entre a investigação em educação geométrica e a dinâmica complexa da sala de aula, podem prejudicar a compreensão de conceitos em Geometria” (Costa, 2020, p. 129).

Em 1995, como afirmado em outras partes deste texto, Lorenzato expressa as suas ideias sobre o abandono da Geometria. Ele afirma que há uma omissão geométrica nas aulas de matemática. Costa, quase 30 anos mais tarde, afirma que as aulas continuam contagiadas por essa omissão referente aos conteúdos de Geometria, pois houve mudanças, sobretudo no livro didático, uma vez que a geometria já não é capítulo final, mas perpassa por todo o material e em articulação com outras temáticas como: Grandezas e Medidas, Álgebra, Números e Operações etc. Porém, a omissão ocorre quando o professor prefere descartar o que diz respeito aos conceitos geométricos (Costa, 2020).

Dessa maneira, o presente trabalho busca identificar, através da Resolução de Problemas, como os conhecimentos em ação da Geometria Espacial vem sendo construído pelos estudantes no último ano da Educação Básica, sobretudo no que diz respeito ao conteúdo de corpos redondos, nos conceitos de área e volume. Optou-se pela Geometria Espacial, mas especialmente os conceitos de cálculo de área e volume dos corpos redondos, por ser um conteúdo que desde a formação dos militares no Brasil Colônia, tem pouca exploração nas aulas de matemática, sendo, a Geometria Plana a de maior abrangência. Contudo, os conteúdos referentes à Geometria Espacial ocupam a 3ª posição dentre os temas mais cobrados no ENEM (Veras et al., 2021).

Na tentativa de identificar os conhecimentos em ação a respeito da geometria, podemos refletir quanto ao processo de ensino e aprendizagem. Para isso, adotamos uma teoria psicológica e contemporânea que entende o processo de conceitualização como imprescindível para a construção do conhecimento. Processo esse que aponta para um redirecionamento da prática em tempos de pós-pandemia.

2.2.1 Conceitos de área e volume a partir da resolução de problemas

A BNCC orienta em toda a sua extensão, no que tange ao ensino de matemática, o uso da resolução de problemas. Paralelo a isso, os PCN referentes ao nível médio já faziam apontamentos para o processo de ensino e aprendizagem que possibilitassem ao estudante pensar e levantar ideias, bem como estabelecer conexões entre temas matemáticos e fora da Matemática, além de desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas.

A partir do entendimento colocado e da proposta feita para este estudo, e visando uma aprendizagem significativa, o ensino de matemática deve “proporcionar o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, tomar decisões, criticar e avaliar soluções, raciocinar” (Queiroz; Silva, 2004). Assim, o planejamento deve ser orientado para uma prática que coloque o estudante no centro de sua aprendizagem.

Além da tarefa de planejamento, o professor tem como mola propulsora de sua prática, a sondagem. A partir dela, podendo identificar e valorizar os conhecimentos prévios dos estudantes, no intuito de proporcionar as melhores situações para a ampliação dos conhecimentos, sendo, portanto, um elemento chave para a construção dos significados (Queiroz; Silva, 2004).

Chamamos atenção para a importância da construção de conceitos e a sua importância para as necessidades da sociedade moderna, e essa construção, mesmo que lenta, é o que permite o desenvolvimento do estudante, sendo esse possível, mediante a variedade de situações enfrentadas e as experiências em cada uma delas (Vergnaud, 1993), o que entendemos neste estudo como sendo os problemas.

Neste estudo, os conceitos de área e volume relativos aos corpos redondos serão adotados, partindo de um problema gerador, para que então ocorra o processo de formalização de conceitos e procedimentos relativos ao conteúdo. Nesse intervalo entre a apresentação do problema e a formalização dos conceitos, o estudante desenvolverá em conjunto uma possível solução, fazendo o que a BNCC orienta, ou seja, interpretando, analisando e consequentemente construindo uma compreensão e estratégias a partir de problemas (BRASIL, 2018), visando outras situações para além do contexto de sala de aula mediante as suas vivências.

A respeito dos conceitos definidos para o estudo, a literatura aponta que é um assunto milenar que se desenvolveu nas civilizações a partir de instrumentos básicos, atendendo às necessidades cotidianas (Lima, 1998). O referido autor classifica instrumentos básicos, por hoje existir uma variedade de recursos que permitem a construção, exploração e interpretação dos sólidos geométricos. No que tange ao ensino de geometria, estes recursos permitem uma visualização completa dos objetos: como exemplo, podemos citar o Geogebra[3].

Entendemos que os conceitos abordados neste estudo e construídos mediante principalmente as situações enfrentadas do material didático não garante a conceitualização do real. De acordo com Almouloud et al (2004) a geometria no currículo escolar não é suficiente, é preciso que o professor insira esta temática em seu planejamento, fazendo as devidas conexões com outras áreas do conhecimento para que os estudantes conheçam a sua importância e as suas potencialidades.

No ensino fundamental, a geometria encontra-se na unidade temática “espaço e forma”, onde de acordo com os PCN (1998) os estudantes desenvolvem o pensamento que lhe permitem compreenderem, descreverem e representarem de modo organizado o mundo em que vivem. Já no ensino médio, há uma ampliação desse modo estruturado do pensamento: na

[3] Software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que combina a álgebra, a geometria, a estatística, gráficos entre outros.

BNCC, é orientado o desenvolvimento de habilidades a partir da resolução de problemas, principalmente nos conceitos definidos (BRASIL, 2018).

Assim, em consonância com o aporte teórico adotado neste estudo, a BNCC (2018, p. 227) orienta que o ensino de geometria "envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento". A resolução de problemas, relativa ao conteúdo de corpos redondos, possibilita abordar conceitos de área e volume, fazendo as devidas relações e explorando diferentes estratégias de resolução (Nunes; Noguti; Allevato, 2014).

2.3 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC)

Trata-se de uma teoria cognitivista que analisa o desenvolvimento e a aprendizagem de competências complexas dos estudantes (Vergnaud, 1993). Foi elaborada pelo psicólogo, professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud, tendo como base as contribuições da Teoria da Epistemologia Genética de Jean Piaget. Este foi o seu orientador durante o doutorado. Vergnaud, retoma as ideias de Piaget, mas as teorias diferem em dois pontos: Piaget reduz em seus estudos às estruturas lógicas gerais, isto independente do conteúdo do conhecimento; e diferente de Vergnaud, Piaget teve pouco interesse pelo ensino e pelos conteúdos de ensino (Plaisance; Vergnaud, 2003), como fez o autor da TCC na disciplina de matemática.

Dessa maneira, entende-se que dois pontos são tomados como referência na TCC, o conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio do conhecimento. Para o criador da teoria, conhecimento é "tanto o saber fazer como os saberes expressos" (Vergnaud, 1996, p. 155). Em outras palavras, ele entende os conhecimentos como o conjunto de competências e concepções, sendo o primeiro, o saber fazer. A partir da ação dos estudantes, podemos observar e analisar os saberes expressos quando submetidos a situações, permitindo inferir sobre a aprendizagem do educando. "Por fornecer uma estrutura à aprendizagem, ela envolve a didática, embora não seja, em si uma teoria didática. A sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre os conhecimentos, em crianças e adolescentes [...] (Vergnaud, 1993, p. 1).

Além das contribuições da teoria de Piaget, Vergnaud reconhece a importância que as ideias de Vygotsky tiveram na elaboração da TCC. A teoria sócio interacionista de Vygotsky articula a relação adulto-criança, ou ainda, no contexto escolar, professor-estudante, visando a ampliação da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) que consiste no espaço existente entre o nível de desenvolvimento atual, tarefas realizadas sozinho pelo sujeito e o nível de desenvolvimento potencial, tarefas realizadas com a ajuda de alguém mais capaz (Garcia, 2009). Vergnaud reconhece essa importância quando assume a interação social, a linguagem e a simbolização no domínio de um certo campo conceitual. Nesse sentido, a partir da coleção de ações assumidas pelo professor, uma delas e talvez a mais difícil é a de prover oportunidades aos alunos para o desenvolvimento de seus esquemas na ZDP (Vergnaud, 1999).

A partir das vivências, entende-se que quando submetidos a novas situações, isto é, tarefas, os estudantes buscam utilizarem os conhecimentos adquiridos em suas experiências passadas. Vergnaud destaca que eles já possuem uma maneira de realizar as situações mediantes outras já confrontadas em outros contextos, estas sendo simples e familiares. Assim, a busca por esses conhecimentos dos quais eles não possuem uma maneira de solucionar, fará com que ocorra um desequilíbrio, posteriormente adaptações e/ou modifique o conhecimento (Vergnaud, 1988), chegando ao estágio de acomodação, esse último, é o que mostrará a superação da situação e adaptação do conhecimento já existente nas estruturas cognitivas.

Assim, o conhecimento para Gérard Vergnaud está organizado em Campos Conceituais, não sendo estes exclusivos da área de matemática, mas sendo extensíveis a qualquer área do conhecimento. Para o autor, é impossível estudar conceitos matemáticos separadamente, por isso, faz-se necessário em eventuais momentos realizar recortes, sendo prudentes analisar os Campos Conceituais. Eles são unidades frutíferas, capazes de dar sentido aos problemas e às observações feitas em relação à conceitualização (Vergnaud, 1996).

A conceitualização é a pedra angular da teoria desenvolvida pelo professor Vergnaud. Ele acredita que é a partir dos conceitos que o conhecimento será construído. Ele defende:

> [...] a tese de que o progresso da ciência é, antes de tudo, progresso da conceitualização: conceitos mais amplos, melhor ligados entre si, com mais propriedades e mais bem definidos por suas condições de uso, são substituídos, por etapas ou por evoluções abruptas, para conceitos mais primitivos, de um escopo mais circunscrito. (Vergnaud, 2002, p. 31).

O processo de conceitualização não acontece de um só golpe, como dito: é um processo, em um dado conteúdo do conhecimento. Um estudante pode levar dias, meses ou até anos para compreender o sistema que engloba os conceitos e teoremas que foram construídos em milênios na matemática (Vergnaud, 2002).

Assim, para Vergnaud, um campo conceitual consiste em:

> [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, interligados durante o processo de aquisição. (Vergnaud, 1982, p. 40).

Na teoria dos campos conceituais, além do conceito de campo conceitual, Vergnaud apresenta outros conceitos importantes para a compreensão do processo de conceitualização, sendo eles: conceitos, situações, esquemas, invariantes operatórios e representações. A partir de agora, tentaremos apresentar cada um desses conceitos e a sua importância para a apropriação de conceitos matemáticos.

2.3.1 Conceito e suas componentes base

Gérard Vergnaud (1993) afirma que um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente quando nos interessamos nos processos de ensino e aprendizagem pela conceitualização. Ele define o conceito como um conjunto de três elementos, sendo eles: situações, invariantes operatórios e representações, simbolicamente, C = (S, I, R). Para nomear esses elementos, ele faz uso das ideias de função simbólica de Piaget, ou ainda, função psicossemiótica[4], onde:

- S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (Vergnaud, 1985, p. 249; 1993, p. 8), em termos da função simbólica, seria o referente, que é a realidade ou o objeto de estudo, podemos dizer, portanto, que S é o referente;
- I é o conjunto de invariantes, isto é, conjunto onde estão os objetos, propriedades e relações sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito (Vergnaud, 1985, p. 249; 1993, p. 8), podendo ser identificado também, como "o conjunto dos invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que pode ser reconhecido e usado pelos sujeitos para analisar e dominar as situações" (Moreira, 2022, p. 193) – em termos da função simbólica, o conjunto dos invariantes representa o significado.
- R é o "conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento" (Vergnaud, 1993, p. 8) – nas ideias defendidas por Piaget, sobre a função simbólica, o conjunto das representações é o significante.

Em termos psicológicos, Vergnaud (1999) aponta que S implica a realidade e os conjuntos I e R a representação, que pode ser considerada como dois aspectos em interação do pensamento: o significado e o significante, respectivamente. Moreira (2022, p. 193) destaca que "para estudar o desenvolvimento e o uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou da sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente". Na sala de aula não se analisam os elementos de forma isolada, para isso, se faz necessário uma variedade de situações. Um conceito não pode ser analisado por um só tipo de situação e uma situação não abarca um único conceito (Vergnaud, 1993).

[4] Origina-se da Semiótica: ciência que estuda a comunicação e envolve três elementos básicos, o referente, o significado e o significante. (Gitirana et al., 2014).

No viés da temática desenvolvida neste trabalho, tomamos as falas de Vergnaud quando diz que é através das situações e das resoluções de problemas que um conceito adquire sentido para um estudante, embora seja um processo pragmático, ele é essencial para o desenvolvimento tanto na psicologia, na didática e na história das ciências (Vergnaud, 1993).

2.3.1.1 Situações

Na área da didática da matemática, quando ouvimos a palavra situações, esta nos remete imediatamente ao conceito de situações didáticas proposta por Guy Brousseau, contudo, o conceito de situação definido por Vergnaud não é o mesmo de Brosseau, mas, se coloca no sentido de atividades, tarefas (Moreira, 2022; Zanella; Barros, 2014). O conjunto das situações está associado ao processo cognitivo e às respostas apresentadas pelos estudantes quando confrontados com situações de um conteúdo do conhecimento.

Vergnaud (1993) apresenta duas ideias principais sobre as situações: a de variedade e a de história:

> A de **variedade**: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis; a da **história**: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentam e dominam progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (Vergnaud, 1993, p. 11).

Em cada campo conceitual existe uma variedade de situações, e os conhecimentos dos estudantes serão moldados pelas situações que são confrontados e vão dominando ao longo do tempo. O autor afirma que são as situações que dão sentido aos conceitos, contudo, o sentido não está nas situações em si e nem nas palavras do enunciado de cada situação, mas na relação do sujeito com as situações e os significantes.

Dessa maneira, podemos afirmar baseado nas palavras do professor Vergnaud que as classes de situações são: aquelas para as quais o estudante possui competências necessárias ao tratamento das informações na situação, sendo construída em determinado momento do seu desenvolvimento cognitivo e a segunda, aquelas que o estudante não dispõe ainda de competências amadurecidas o suficiente, necessitando de um tempo para refletir e desenvolver-se (Vergnaud, 1993).

Conceber as situações como meio para o processo de conceitualização é uma consequência direta na teoria dos campos conceituais. As competências dependem da história e da variabilidade de situações dominadas quando o sujeito é mais jovem e das competências que precisará ter quando for mais velho (Magina et al., 2008), sendo, portanto, herança do passado e preparação para o futuro. O sentido atribuído na relação do sujeito com as situações está impresso em um outro conceito importante na TCC, os esquemas.

2.3.1.2 Esquemas

O conceito de esquema para Vergnaud (1990) é um dos mais importantes introduzidos por Jean Piaget, estando, portanto, "no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas às situações encontradas. Eles também são os que caracterizam mais plenamente os diferentes estágios do desenvolvimento cognitivo em um determinado campo conceitual" (Vergnaud, 1990, p. 145).

Os esquemas, são, portanto, uma totalidade dinâmica, organizada e funcional dos invariantes do comportamento para uma classe de situações (Vergnaud, 1985, 1990, 1993). Para efeitos de entendimento, tomemos um exemplo no campo conceitual aditivo, dado por Vergnaud em suas discussões:

> O sentido da adição para um sujeito individual é o conjunto dos esquemas que ele pode acionar para tratar de situações com que venha a confrontar-se, concernentes à ideia de adição. É também o conjunto dos esquemas que ele pode acionar para operar com os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e linguísticos que representam a adição. (Vergnaud, 1993, p. 18).

Gitirana et al. (2014) apresentam os esquemas como sendo a forma e/ou a maneira como o estudante organiza os seus invariantes de ação quando submetido a situações. Para Vergnaud (2002), um esquema é constituído de quatro tipos de componentes, entre esses componentes estão os invariantes operatórios do tripleto conceito.

- Objetivo (ou mais), subobjetivos e antecipações.
- Regras de ação, coleta de informações e controle.
- Invariantes operatórios (conceitos em ação e ateromas em ação).
- Possibilidades de inferências.

Vergnaud (2009c) pontua que ao ser confrontado com um problema, o sujeito inicialmente tem duas fases: a escolha de dados e da operação e a realização da operação escolhida. Na primeira, é onde estão inseridos o objetivo e os sub-objetivos, priorizando uma organização hierárquica e sequencial dos dados. Na sequência, tem-se a tomada de informação e controle: o sujeito constrói as regras de ação, a parte geradora dos esquemas. É a partir das regras de ação que será determinado o transcurso temporal da conduta e da atividade. Elas são condicionadas pelas representações do objetivo a ser atingido e pelas conceitualizações que possibilitam a identificação dos objetos, propriedades e relações.

Os objetos, propriedades e relações são os chamados conceitos em ação, eles antecedem as proposições, sendo, dessa maneira, elementos necessários para a resolução do problema, o conjunto de conceitos e teoremas, é o que Vergnaud chama de invariantes operatórios, destacando de maneira acentuada em sua teoria que não há teoremas sem os conceitos, estes sendo essenciais para à existência daqueles. O último ingrediente concerne às inferências – elas reforçam a ideia de que os esquemas não são estereótipos, isto é, não há uma única maneira de resolver problemas, podemos supor que em uma dada situação haverá uma intensa mobilização dos esquemas já existentes para chegar a uma solução, podendo, portanto, ter vários caminhos viáveis de explicação.

Dessa maneira, baseado nos componentes apresentados acima, Vergnaud (1985) destaca que os esquemas são as melhores unidades para analisar a representação, contudo ele apresenta ressalvas:

> [...] essa totalidade, que é o esquema, não deixa de ser composta, de um lado, de esquemas mais elementares, como mostram o exemplo do esquema de contagem ou aquele da escada que se sobe de costas; de outro lado, de elementos cognitivos distintos dos quais se podem perceber as manifestações no que um sujeito em situação pode fazer e dizer; por exemplo, existem condutas observáveis que testemunham a existência de cálculos e de expectativas, mas seu conteúdo não é, por conta disto, facilmente identificável. Os conceitos de regra e de invariante são, exatamente, elementos indispensáveis para caracterizar o conteúdo dos esquemas. (Vergnaud, 1985, p. 253).

Dentre os componentes apresentados, os invariantes operatórios, são aqueles que têm importante contribuição na organização dinâmica do sujeito. Eles permitem a "identificação de objetos materiais e de suas relações pela percepção e interpretação das informações em situações que envolvem a incerteza, hipóteses, e raciocínios que repousam sobre os objetos sofisticadamente elaborados pela cultura" (Vergnaud, 2009c, p. 23).

2.3.1.3 Invariantes Operatórios

Os invariantes operatórios constituem-se nos termos, conceitos em ação e teoremas em ação. Vergnaud (2009c) define os primeiros como sendo aqueles que permitem identificar os objetos, as propriedades e relações. Por objetos, entendemos como sendo aqueles perceptíveis e/ou construídos pela cultura, ciência, técnica ou pelo próprio sujeito de forma individual. As propriedades e relações constituem-se como predicados observáveis e predicados que podem ser inferidos a partir dos observáveis, sendo eles próprios construções culturais e/ou individuais.

Os conceitos-em-ação auxiliam na construção de teoremas em ação. Em outras palavras, um conceito não é considerado verdadeiro ou falso, mas sim pertinente na ação dos estudantes, podendo ter um estatuto de objeto, de predicado com um lugar ou vários lugares (Vergnaud, 2009c). Os conceitos em ação são classificados por Vergnaud (1993) em um tipo lógico caracterizado por função proposicional, sendo implícitos. Ainda sobre os conceitos, durante a ação, o estudante pode expressar um conceito, uma relação, ou uma propriedade, que poderá ou não ser útil, mas que de certa maneira, auxilia na elaboração e na estruturação das proposições, isto é, dos teoremas em ação.

Os teoremas-em-ação são proposições tomadas como verdadeiras em um certo domínio e/ou falsas em outros na ação dos estudantes. Estando no tipo lógico classificado por Vergnaud como tipo proposição, os teoremas em ação são implícitos e tem validade local. É definido no domínio do conhecimento matemático como as relações consideradas pelos alunos ao realizar as escolhas de uma operação para um certo problema (Vergnaud, 1993).

Os invariantes operatórios são recursos a serem considerados pelo professor na análise de estratégias em resolução de problemas, bem como um auxílio para a transformação de conhecimento implícito em conhecimento explícito (Zanella; Barros, 2014). Vergnaud (1990) destaca que a parte explícita do processo de conceitualização é apenas a ponta do *iceberg*, há uma imensidão implícita que é de suma importância na construção dos conceitos, sem os invariantes operatórios, o explícito nada seria.

2.3.1.4 Representações

O último elemento constituinte da tríade conceitual proposta por Vergnaud consiste na representação, que em termos psicológicos são os significantes. A representação "é um conceito fluido; porém, a representação de um sujeito não é diretamente acessível ao observador externo; e ao mesmo tempo é cheia de ilusão de ótica para o próprio sujeito" (Vergnaud, 2009c, p. 24).

Para Vergnaud há vários significados para o termo em questão, contudo, em suas obras a definição mais usual consiste em "o conjunto de representações linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações às quais ele se aplica e os procedimentos de tratamento que dele se nutrem" (Franchi, 2002, p. 173).

Em outras palavras, a representação pode ser entendida como categorias de pensamento, onde os estudantes quando submetidos as situações captam e integram as informações (Vergnaud, 2009c). Os elementos anteriores, invariantes operatórios, são elementos essenciais da representação.

Nesse sentido, podemos entender o conhecimento como a relação entre significantes e significados, ou seja, o conhecimento não é formado somente de símbolos, ele apresenta conceitos e noções que refletem o mundo material e a atividade do sujeito inserido nesse mundo (Vergnaud, 1982). No processo de conceitualização do real, a linguagem, assim como outros modos de representação simbólica, é relevante (Franchi, 2002).

2.3.2 Estruturas Multiplicativas

Quando Gérard Vergnaud assumiu o conteúdo do conhecimento na área de matemática, admitindo a conceitualização como âmago do desenvolvimento cognitivo (Moreira, 2002), realizou os seus estudos em duas grandes estruturas. As estruturas aditivas, que consistem na composição de operações de adição, subtração e a combinação destas duas. E as estruturas multiplicativas que contêm em sua base operações de multiplicação, divisão e a combinação entre elas (Gitirana et al., 2014).

Contudo, essas estruturas envolvem muitos outros conceitos, como por exemplo, fração, funções linear, bilinear, combinação, produto cartesiano, entre outros (Vergnaud, 1993). Entre esses conceitos, estão os abordados neste trabalho, isto é, área e volume. Vergnaud (2009d) destaca que nas estruturas multiplicativas há duas categorias principais, são elas: o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. Zanella e Barros (2014) destacam que a primeira, trata-se de uma relação quaternária, isto é, há quatro medidas, duas a duas e diferentes se relacionando para obter um valor, por exemplo, a quantidade de canetas por pacotes, sabendo que em um pacote há três canetas, quanto seria a quantidade de canetas em quatro pacotes? No exemplo, sabemos a quantidade unitária e outras duas quantidades, em tipos de medidas diferentes.

Destacamos que em cada categoria existem subcategorias, na categoria produto de medidas, é onde estão os conceitos destaque desta pesquisa. Consiste na classe de situações problemas com uma relação do tipo ternária, isto é, entre três quantidades, das quais uma delas é o produto das outras (Zanella; Barros, 2014). Essa categoria, divide-se em duas subcategorias, chamadas de classes: a multiplicação e a divisão. Na primeira, busca-se a medida-produto conhecendo as medidas elementares (Zanella; Barros, 2014), nesse tipo de classe podemos encontrar as situações de combinação.

A segunda classe, das divisões, consiste nas situações em que se deseja encontrar classes elementares, conhecendo uma medida elementar e uma medida produto. Zanella e Barros (2014) destacam que essa classe é ainda dividida em subclasses do tipo produto: discreto-discreto, contínuo-contínuo e contínuo-contínuo/noção de média. Os conceitos relativos à área e a volume, encontram-se nas duas últimas classes.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

A convergência dos elementos teóricos apresentados nas seções anteriores possibilita, a partir de agora, apresentar o caminho metodológico que norteou este estudo. A construção tem a sua base ancorada nos pressupostos defendidos por Gérard Vergnaud na Teoria dos Campos Conceituais tecendo um diálogo com a Metodologia Resolução de Problemas. As ideias apresentadas tornaram-se uma possibilidade para explorar o processo de ensino e aprendizagem em matemática na busca da identificação dos conhecimentos em ação dos estudantes. Assim, o problema científico que norteou este estudo consiste em: como a resolução de problemas contribui para o reconhecimento de invariantes operatórios no processo de ensino e aprendizagem do conceito de volume do sólido geométrico cilindro?

Vergnaud defende que são as situações/problemas que dão sentido a um conceito. Na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, tudo parte de um problema gerador: os estudantes precisaram recorrer aos seus conhecimentos prévios para estabelecer um plano de ação na resolução. Uma das etapas da metodologia que utilizamos para a identificação dos invariantes consiste no trabalho colaborativo, portanto, a partir do diálogo entre os estudantes, e a explicitação dos pensamentos por meio da fala e da escrita nos possibilitou identificar os teoremas em ação e os conceitos em ação (conhecimentos em ação).

3.1 TIPO DA PESQUISA

A investigação tem os seus desdobramentos em uma abordagem do tipo qualitativa que, segundo Bogdan e Biklen (1994), é dada pela imersão no local de estudo, pois, os investigadores desse tipo de abordagem acreditam que as ações podem serem mais bem compreendidas quando observadas e analisadas em seu ambiente natural de ocorrência. Os investigadores "abordam o mundo de forma minuciosa, [...] examinando com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo" (Bogdan; Biklen, 1994, p. 49).

Para a realização do estudo, a estratégia de investigação foi uma observação participante que, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 108), "é uma estratégia que envolve não só a observação direta, mas todo um conjunto de técnicas metodológicas, pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada". Ainda nesse viés, Flick (2009) afirma que esse tipo de pesquisa deve ser dado sobre dois aspectos: i) o pesquisador deve tornar-se aos poucos um participante para obter acesso ao campo investigativo e aos participantes da pesquisa; ii) a observação deve ocorrer em todo o processo para tornar-se concreta, tendo como foco elementos essenciais do problema científico.

Uma vez que buscamos identificar os invariantes operatórios numa proposta teórica cognitiva, entendemos que este estudo possibilitou uma reflexão quanto aos processos existentes no contexto educacional, assim, direcionando os resultados para novas investigações.

A natureza da pesquisa é aplicada, que consiste na "aquisição de conhecimentos com vistas à aplicação numa situação específica" (Gil, 2017, p. 33).

Quanto aos objetivos, atende pelo exploratório e descritivo. Neste estudo, o primeiro, busca proporcionar uma familiaridade com o objeto de estudo, a fim de torná-lo mais explícito na área de pesquisa e possibilitar um levantamento de hipóteses a respeito do tema (Gil, 2017). Dessa maneira, o intuito consiste em ampliar esse campo temático, possibilitando que outras investigações sejam feitas e direcionadas para o processo educativo. O segundo, consiste na descrição de características de um dado fenômeno ou população, com a finalidade de identificar relações. O reconhecimento dos invariantes operatórios relativos aos conceitos de área e volume dos corpos redondos, através da Resolução de Problemas possibilitará uma análise e discussão por meio dos dados a serem obtidos e consequentemente uma contribuição nas pesquisas envolvendo o campo conceitual o qual estes conceitos se encontram, isto é, no campo das estruturas multiplicativas.

3.2 CARACTERIZAÇÃO DO CAMPO EMPÍRICO

Com a autorização do Comitê de ética, seguimos o nosso cronograma na instituição escolhida como campo empírico. A escolha foi em decorrência principalmente da localização e por apresentar o quantitativo de 99,7% de aprovação até a referida data da realização desta pesquisa. Em relação ao Indice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), a escola colocou como meta um valor de 4,4 em 2019, superando o valor com um quantitativo, de 4,5 de acordo com os dados disponibilizados pela escola no projeto político pedagógico.

A pesquisa ocorreu na Escola Estadual Professora Sebastiana Braga, que tem como mantenedora a Secretaria de Estado de Educação e Desporto do Amazonas, sob a jurisdição da Coordenadoria Distrital de Educação 6. A referida escola é localizada na cidade de Manaus, zona norte, no bairro Cidade Nova, foi criada pelo decreto 21.667/2001 e publicada no Diário Oficial em 1º de fevereiro de 2001, e sua inauguração ocorreu em setembro do mesmo ano. Oferece em sua atual modalidade de ensino: o Ensino Médio (EM) Regular e o Novo Ensino Médio (NEM), nos turnos matutino e vespertino. Até a realização deste estudo, a escola estava com capacidade de 1050 alunos do ensino regular matriculados, estimada em 92,22% do total que a escola suporta, que é 1080. Estes alunos estavam distribuídos nos turnos da manhã e da tarde.

De acordo com o Projeto Político Pedagógico (PPP) da Escola, ela conta com estrutura própria, dispondo de um total de 12 salas de aula e dividida em quatro pavilhões. O primeiro pavilhão é onde estão a diretoria, secretaria, sala da pedagogia, sala dos professores, refeitório e os banheiros masculinos e feminino, para os alunos e banheiros para os funcionários.

No segundo pavilhão, estão o laboratório de ciências, a biblioteca e o auditório, além de salas de aula que atendem as turmas da 1ª série do EM. No terceiro pavilhão, estão as turmas de 2ª série e no terceiro pavilhão estão as turmas de 3ª série, os sujeitos participantes da nossa pesquisa.

A escola, até a realização da pesquisa, contava com um corpo docente de 46 professores qualificados. De acordo com o PPP, esses docentes são graduados, pós-graduados e outros com mestrado na área de educação. De acordo com as informações coletadas em nosso período de observação e reconhecimento do espaço, obtemos a informação de que havia quatro turmas de finalistas da educação básica pelo turno vespertino e que em média essas turmas havia um público quantitativo de 40 estudantes por sala.

3.3 CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os estudantes participantes deste estudo foram os finalistas do 3º ano do Ensino Médio. Eles foram escolhidos por estarem no último ano da educação básica e por terem, em algum momento da sua formação durante o ensino médio, o contato com o conceito de volume do sólido cilindro, elemento constituinte do nosso objeto de estudo. Em outras palavras, já havia passado por um processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial.

Sabendo dessa condição e tendo o subsídio de que o estudante faz uso dos seus conhecimentos prévios quando submetidos em situações, visando a adaptação dos seus esquemas de ação, esse público atendeu as nossas condições. Outro fator que se somou a essa condicional é o fato de os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica apresentar um resultado não significativo para a região norte, colocando-nos em uma posição crítica referente a esse nível de ensino, carecendo, portanto, de investigações de cunho didático para compreender as lacunas existentes nesse campo.

Os participantes desta pesquisa, tinham em média a faixa etária de 17 a 18 anos, embora alguns com idade superior e trabalho remunerado no contraturno. O terceiro ano do ensino médio, de acordo com o PPP, é um dos menores públicos da escola, enquanto o maior público é a serie anterior.

Durante a realização da pesquisa, nosso primeiro contato com a escola ocorreu por meio de uma visita feita à instituição e uma reunião com a gestão escolar e a coordenação pedagógica. Autorizada a investigação a partir do termo de anuência, tivemos, posteriormente, o nosso segundo contato, estabelecido com a docente de matemática da turma. Em nossa conversa, explicamos-lhe o projeto e ela especificou como estava distribuída a componente curricular no documento oficial do amazonas, isto é, a Referência Curricular do Amazonas (RCA) e como distribuía ao longo da semana o seu planejamento, com as turmas finalistas. Sua carga horária na referida série estava distribuída em três dias da semana, com duração de 2 horas/aula, ou seja, ela tinha 6 aulas semanais. Às segundas, explicava o conteúdo novo ou continuação e deixava exercícios, às quartas resolvia os exercícios e as sextas, tirava alguma dúvida dos estudantes ou continuava o seu planejamento de aulas, seguindo de acordo com a estrutura da componente como proposta no RCA.

3.4 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DE PESQUISA

Na realização da pesquisa fizemos uso da resolução de problemas, proposta por Onuchic e Allevato. Em nosso planejamento pretendíamos adotar os dez passos propostos, contudo, sabendo que dependendo das condições do campo empírico poderíamos fazer as adaptações necessárias.

Por se tratar da identificação de esquemas de ação, nosso intuito seria analisar os participantes em situação. Para isso, o evento didático seria o mais adequado como proposto por Vergnaud (1990), pois as situações didáticas de Guy Brosseau, envolvem cunho emocional, sobretudo, no que tange ao contrato didático que se estabelece em sala de aula pelos protagonistas educativos. Isso não se aplica diretamente em nossa pesquisa, uma vez que esta adota um aporte teórico do desenvolvimento cognitivo, que defende a análise do sujeito em situação, isto é, o sujeito em ação, mobilizando esquemas cognitivos.

A nossa atividade de pesquisa foi desenhada em três encontros, com 3 situações-problema que atendem a objetivos distintos. A seguir, no quadro 2, vamos descrever como foram pensados os três encontros e como realizamos a adaptações diante da realidade do campo empírico.

Começamos nossas atividades em agosto de 2023, após o Comitê de Ética aprovar o projeto na plataforma Brasil (ANEXO A). Na sequência, a escola nos autorizou visitar e conhecer o espaço por meio do termo de anuência. Após um breve diálogo com a professora regente de matemática na referida escola, ficou acertado que faríamos a atividade nas sextas e sábado, dispondo de seis dias totais para colocar em prática nosso roteiro de atividade. Essa condicional se deu pelo atraso do cronograma devido a uma paralização dos professores, meses antes, em que reivindicavam reajuste salarial e recebimento dos direitos que não haviam sido cumpridos pela gestão governamental.

Na sequência, tendo o aval da professora, a gestão pedagógica ciente da nossa atividade na escola e de sua importância para compreender o processo de ensino e aprendizagem em geometria, foi solicitado que a professora escolhesse, de maneira totalmente aleatória, um número de no máximo dez estudantes entre as quatro turmas disponíveis no horário vespertino da Escola Sebastiana Braga. Após ter os dez estudantes escolhidos, foi apresentado os termos de consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (ANEXO B) e os Termos de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (ANEXO C). Obtivemos de retorno um total de quatro participantes para o início das atividades na sexta do dia 18 de agosto de 2023. Devido ao baixo quantitativo, ficou decidido que acrescentaríamos ao final da atividade mais um instrumento de pesquisa, a entrevista, para solidificar e apresentar dados mais precisos quanto as atividades pensadas. Dessa maneira, essa entrevista, permitiram obter melhores informações que porventura poderiam não ficar explicitas nas resoluções dos dados coletados.

No entanto, no dia 19 de agosto, segundo dia da coleta de dados, apareceu durante o encontro apenas um participante. O que para a nossa pesquisa, prejudicaria o andamento e consequentemente a coleta dos dados para responder ao problema científico proposto. Dessa maneira, em reunião com a gestão, foi solicitado que fizéssemos a pesquisa durante a semana, nos últimos horários após o intervalo, totalizando um total de 2 horas/aulas por encontro, como os últimos horários tem a duração de 40 minutos, os dois encontros seriam de 80 minutos.

Diante do exposto, temos que o evento didático elaborado, consiste em três momentos dispostos em três situações-problema abordando o conceito de volume no sólido cilindro, ancorado na ideia da Metodologia Resolução de Problemas. As nossas situações assumem o papel de problema gerador, que consiste em uma tarefa/situação elaborada pelo professor com o conteúdo a ser estudado. Através dela, busca-se identificar os invariantes operatórios relativos ao conceito de volume do sólido cilindro presente na unidade de corpos redondos.

Os problemas geradores para este estudo e apresentados aos estudantes foram elaborados e/ou escolhidos pela pesquisadora, ressaltamos que durante a elaboração das atividades, foram elencados pela própria pesquisadora possíveis invariantes operatórios, ou seja, conceitos em ação e teoremas em ação, que poderiam ser evocados durante a execução da atividade. Essa organização prévia, ajudaria mais tarde na organização dos dados coletados e estruturação das discussões.

Quadro 2 - Organização do Evento Didático

Encontro	Atividade	Objetivos	Recursos	Duração
1º 23/08/2023	Situação-Problema 1: adaptada do	Organizar os participantes em pequenos grupos; Apresentar a dinâmica da	Lousa Branca; Pincel; Material impresso	80 minutos

	Livro de Matemática Ensino Médio do Dante (2005).	atividade e como eles devem se organizar para encontrar uma solução;	com a situação-problema 1; Computador.	
2º (Parte I) 24/08/2023	Situação-Problema 2: adaptada do Livro Resolução de Problemas: teoria e prática, organizado por Onuchic et al (2014).	Reunir os participantes em grupo para aplicar as etapas da resolução de problemas e realizar o experimento para comparar os volumes dos cilindros construídos na atividade; Propor que busquem matematicamente uma maneira de encontrar o volume do cilindro I e II.	Material impresso com a situação-problema 2; Papel A4; Fita Adesiva; Copo medidor; Suporte plástico (vasilha retangular); Farinha de tapioca; Régua 30 cm; Quadro branco; Pincel; Computador.	80 minutos
3º (Parte II) 25/08/2023	Situação-Problema 2: adaptada do Livro Resolução de Problemas: teoria e prática, organizado por Onuchic et al (2014).	Devolver o material impresso para continuação da atividade; esperar que os participantes concluam as perguntas orientadoras da atividade e propor novo problema gerador a partir da situação trabalhada; Realizar os cálculos e propor a experimentação para a comprovação dos dados encontrados.	Papel A4; Fita Adesiva; Copo medidor; Suporte plástico (vasilha retangular); Farinha de tapioca; Régua 30 cm; Quadro branco; Pincel; Computador.	80 minutos
4º (28/08/2023)	Situação – Problema 3: Problemas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) sobre o conceito de volume do cilindro.	Leitura, interpretação e identificação dos dados das situações do ENEM; Propor aos participantes que organizem as informações a partir da metodologia resolução de problemas e descreva os passos utilizados para chegar na solução.	Material impresso com a situação-problema 3; Pincel; Computador; Quadro Branco;	80 minutos

Fonte: Elaborado por Leão (2023)

Antes de comentar os encontros realizados, é pertinente discorrer sobre as dificuldades que tivemos no andamento da pesquisa e as decisões tomadas para que esta acontecesse. Diante do ocorrido em relação à ausência dos participantes nos encontros aos sábados, tínhamos que alguns dos estudantes já haviam tido contato com os primeiros materiais da atividade podendo comentar na sala com outro colega, assim, foram realizadas as devidas adaptações e modificações nas situações-problema, agora ao invés de ser escolhido de forma aleatória, optamos pode deixar livre que os participantes manifestassem o interesse, fomos de sala em sala verificando quem gostaria de ser participante da pesquisa, obtendo um quantitativo de 8 participantes. Com os termos de autorização e respaldos devidamente assinados, reiniciamos as atividades no dia 23 de agosto de 2023. Destacamos que a escola faz uso de todos os espaços, e no dia da nossa coleta, tínhamos apenas a sala da pedagogia disponível. Assim, após o intervalo os 8 participantes reuniram em foram divididos em dois grupos de quatro estudantes, explicamos a dinâmica da atividade e como eles poderiam se organizar, bem como, solicitar o apoio da pesquisadora quando houvesse dúvidas. Após as orientações, realizaram em conjunto a primeira atividade, ao concluírem, fizemos a recolha do material.

No dia 24 de agosto de 2023, a biblioteca estava disponível para a realização da pesquisa. Nesse espaço, os mesmos grupos formados na atividade 1 se reuniram em duas mesas dispostas no centro da sala. Explicamos novamente a dinâmica da atividade e foi dado um intervalo de 10 minutos para construírem os sólidos do problema proposto e para, na sequência, optarem por um personagem dentre os três disponíveis no enunciado da situação. Após todos terem concluído, disponibilizamos o material para a parte experimental e solicitamos que todos viessem até o centro da sala, então, escolhemos dois sólidos e pedimos que dois participantes colocassem a cilindro mais alto dentro do cilindro mais largo, tendo como base o recipiente de plástico. A próxima etapa foi a de encher com cuidado o cilindro mais alto com a farinha de tapioca até a borda e, por fim, puxar com cuidado as bordas para que o conteúdo caísse dentro do cilindro mais largo.

Como essa atividade demandou um intervalo de tempo acima do estimado, impossibilitando que fossem concluídas as perguntas realizadas depois da atividade proposta, optamos por dividi-la em dois momentos. O segundo deles seria para a conclusão da atividade e a realização de um novo problema surgido a partir das construções e experimentações.

O segundo momento da atividade 2, aconteceu no dia 25 de agosto de 2023, também na biblioteca, onde os estudantes novamente organizaram-se em grupo e concluíram as perguntas orientadoras deixadas no primeiro momento. Após todos finalizarem, questionamos, quais deveriam ser as medidas para que ambos os cilindros tivessem o mesmo volume? Então, foi proposto que pensassem um pouco e, como depois de um intervalo de tempo ninguém chegou a uma conclusão, fizemos uma intervenção, questionando: “quem alterou os volumes na situação-problema?”. Então todos responderam: “o quadrado do raio”. Foi feito o seguinte questionamento: “devemos ir atras de quem para que ambos tenham o mesmo volume?”. Ninguém soube dizer, portanto, dessa maneira fizemos a seguinte colocação: “se os volumes deram diferentes e o responsável foi o quadrado do raio, devemos igualar esses volumes e encontrar um novo raio para o cilindro mais largo, esse raio deve ser o suficiente para suportar a quantidade de tapioca do cilindro mais alto quando realizarmos novamente o experimento”. Dessa maneira, perguntamos novamente: “qual deve ser o valor desse novo raio e do novo comprimento do cilindro?”.

Diante do exposto, os participantes fizeram o cálculo e um grupo excedeu um pouco na medida final do comprimento do novo cilindro a ser construído, já o segundo chegou na medida exata. Quando realizamos o experimento para verificar se os volumes eram iguais, fizemos o mesmo procedimento realizado no início da atividade. Após a conclusão do experimento, tendo um grupo chegado na solução correta, concluímos o encontro apontando os principais conceitos abordados e como eles se relacionavam para a obtenção da grandeza volume: que a variável raio ou a variável altura influenciavam significativamente no volume do cilindro.

A terceira atividade aconteceu no dia 28 de agosto. Reunimo-nos com os participantes e foram apresentadas a dinâmica da última atividade. Tratava-se de situações referentes ao Exame Nacional do Ensino Médio que tinham em sua estrutura o conceito abordado na pesquisa. Foi solicitado aos participantes que respondessem à questão e, após todos concluírem, coletamos o material e finalizamos a atividade. As duas situações propostas foram generalizações das atividades desenhadas para a pesquisa e, como na grande maioria, as situações-problema buscam uma única solução correta, esperávamos que os participantes fizessem uso das perguntas orientadoras para organizar os esquemas de ação durante a realização da terceira atividade.

3.5 INSTRUMENTOS DE COLETA

A variedade de pesquisas nas ciências sociais possibilita distintos procedimentos de coleta de dados. Dentre esses, a abordagem qualitativa apresenta características e desafios diversos (Yin, 2016). Ainda nesse viés, Yin (2016) destaca que, nesse tipo de abordagem, o pesquisador é o principal instrumento de pesquisa, pois, embora os dados medidos sejam externos, o conteúdo e a forma dos relatos passam pelo filtro do pensamento e pelo significado colocado na coleta de dados. Para a coleta dos dados desta pesquisa, os instrumentos foram: a observação, diário de campo e os registros de imagens/áudios.

O tipo de observação conduzido nesse estudo se enquadra nos moldes, que “consiste na participação real do pesquisador na vida da comunidade, da organização ou do grupo em que é realizada a pesquisa” (Gil, 2017, p. 87). Trata-se de um modo valioso de coletar dados, pois, segundo Yin (2016) o que se percebe com os seus olhos e os sentidos não é filtrado pelo que os outros podem relatar ou o que foi dito em algum documento. Nesse caso, a observação como instrumento de coleta é considerada fonte relevante de dados.

No que tange à pesquisa, a observação como instrumento permitirá ao pesquisador tomar nota das ações dos estudantes que não podem ser captadas nos registros visuais e de áudio durante a atividade. Em sua subjetividade, a partir da lente teórica adotada, pode perceber um gesto, um olhar ou uma interação entres os participantes no grupo que seja relevante para a conduta de resolutivas.

O diário de campo, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 150), consiste no “relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha, refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo”. Neste estudo, o diário de bordo é um instrumento vinculado à observação e consiste em uma produção da realidade em textos, sendo influenciado pela percepção e apresentação seletiva do pesquisador (Flick, 2009). O diário de campo permitirá as anotações sobre o andamento da pesquisa, a ocorrência de fatos percebidos pelo pesquisador que podem ser utilizados posteriormente na análise dos dados, em sinal de completude para os registros obtidos. Gil (2017) destaca a importância de fazer os relatados o quanto antes, para evitar a perda de detalhes relevantes para o estudo.

Todos os instrumentos apresentados têm sua significância para o estudo, contudo, os registros em imagens e em áudios são o de maior destaque por apresentarem elementos diretos dos participantes no que tange às ações adotada durante as etapas da Resolução de Problemas, sendo o principal foco deste estudo a identificação dos invariantes presentes nestas ações.

As imagens foram obtidas, durante a pesquisa, através de aparelho celular. Segundo Flick (2009), elas permitem ao pesquisador captar aspectos e eventos no desenrolar da atividade. As imagens auxiliam a ativar as lembranças e estimulam a elaboração de enunciados sobre situações e processos complexos (Flick, 2009). Na presente pesquisa, as imagens obtidas das resoluções propostas pelos estudantes foram um auxílio para o pesquisador, no sentido de identificar os invariantes operatórios evocados durante as ações. Este instrumento deve estar ancorado com os registros de áudios.

Os registros em áudio foram feitos mediante uso de gravadores de som disponibilizados pelo pesquisador. Segundo Flick (2009), as gravações produzem dados reais, capturam os sons do ambiente, permitindo ao pesquisador estudar as práticas de instrução ou as ações e interações entre os estudantes. No estudo, estas interações são relevantes para o entendimento e compreensão do trabalho colaborativo, bem como as tomadas de decisões no grupo quanto às ações frente à resolução de problemas.

3.6 MÉTODO DE ANÁLISE

A análise dos dados obtidos em pesquisas de cunho qualitativo tem em sua estrutura um desenvolvimento de um sistema de codificação que vai da organização dos dados até a sua conclusão, não sendo uma tarefa simples (Bogdan; Biklen, 1994). Os dados obtidos nesse tipo de pesquisa são geralmente variados e, como destaca Teixeira (2003, p. 64), há “um enorme volume de dados que precisam ser organizados e compreendidos, requerendo assim um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando-lhes o significado”.

Contudo, Bogdan e Biklen (1994) destacam que uma das características principais do processo de análise consiste na leitura minuciosa dos dados, buscando compreender e identificar padrões para a construção de categorias de codificação (Bogdan; Biklen, 1994). Ainda nesse viés, Yin (2009) pontua que, de modo geral, as pesquisas qualitativas adotam um ciclo de cinco fases para a análise dos dados empíricos, sendo elas: compilar, decompor, recompor (e arranjar), interpretar e concluir.

Contudo, fica ao encargo de cada investigador usar o método que julgar pertinente em sua pesquisa, mas sem deixar de lado o aspecto mais importante que consiste no rigor científico (Yin, 2009). Neste estudo, o método para a análise dos dados coletados foi o da análise de conteúdo proposto por Bardin. As categorias foram definidas durante a condução dos processos de pré-análise e exploração do material coletado em campo.

3.6.1 Análise de conteúdo

A análise de conteúdo, de acordo com Bauer (2000) em Flick (2009), é um dos métodos clássicos para a análise de documentos, não importando a sua origem. Como já dito neste estudo, fizemos o uso da análise de conteúdo proposta por Bardin. Ele se organiza-se em torno de três polos cronológicos: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação (Bardin, 2011).

A pré-análise é a organização do material a ser analisado. Ela tem por objetivo sistematizar as ideias iniciais e trata-se de um planejamento preciso do desenvolvimento das operações adotadas (Bardin, 2011), sendo, portanto, um planejamento da condução a ser utilizada pelo pesquisador no material coletado em campo. Esse primeiro momento do método apresenta três características essenciais, porém, que não acontecem obrigatoriamente em uma ordem cronológica: “a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação final” (Bardin, 2011, p. 95).

A exploração do material é o que a autora chama de uma fase longa e fastidiosa que consiste nas operações de codificação, desconto ou enumeração em função das regras previamente definidas na etapa anterior (Bardin, 2011). É aí que ocorre a verdadeira exploração do material coletado, a aplicação de índice e indicadores e a construção do processo de análise.

O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação são diferentes nas abordagens quantitativa e qualitativa, a segunda o qual encontra-se este estudo, apresenta três técnicas: a síntese da análise de conteúdo, a análise explicativa do conteúdo e a análise estruturadora de conteúdo (Flick, 2009). Neste trabalho, a que melhor se articula com os objetivos é a análise explicativa do conteúdo.

Segundo Flick (2009), ela esclarece trechos difusos, ambíguos ou contraditórios. Sendo de dois tipos de análise: a restrita e a ampla. Na primeira, assimila outros enunciados no material em análise com o intuito de explicar os elementos. A segunda, busca informações fora do material, sobre o autor, situações gerativas e provenientes de teorias. Nos dois casos, formula-se e testa uma paráfrase explicativa.

3.6.2 Procedimento para a análise

Na investigação aqui apresentada, os materiais de análise foram as imagens obtidas durante as etapas da Resolução de Problemas e os áudios gravados durante os diálogos nos grupos. Depois da coleta de dados, o planejamento foi estruturado em: reunir os materiais obtidos (imagens e áudios), agrupar os dados de acordo com os grupos formados na sala de aula, transcrever os áudios dos grupos, identificar os invariantes operatórios e encaixar nas categorias criadas, que neste estudo emergiram ainda na fase de organização do material coletado como veremos mais adiante.

A partir dessa sistematização, as inferências e interpretações, bem como a construção das paráfrases explicativas, foram realizadas mediante as anotações feitas no diário de bordo e as observações do pesquisador durante a condução da atividade. Essa construção foi feita à luz do aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, articulada com a Metodologia da Resolução de Problemas, visando o processo de ensino-aprendizagem da matemática em uma perspectiva autorreflexiva da prática e da criticidade do estudante frente ao desenvolvimento em colaboração com os demais colegas de turma.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos dentro do que foi proposto na metodologia. Para melhor elucidar as ideias, apresentamos algumas figuras que descrevem a proposta investigativa e reforçam as nossas discussões. No que tange ao foco deste estudo, identificar os invariantes operatórios, optamos por construir um quadro que articula as categorias criadas e os invariantes que, por sua vez, foram divididos dentro do que Vergnaud propõe na Teoria dos Campos Conceituais, isto é, teoremas em ação como sendo do tipo verdadeiro ou falso e os conceitos em ação assumindo o valor de pertinente e não pertinente.

4.1 PRIMEIRA ATIVIDADE: TESTE PRÉ-DIAGNÓSTICO

A atividade foi proposta a partir de uma situação (APÊNDICE A), escolhida no livro de Dante (2005), sobre o conceito de volume e adaptada para a realidade do ambiente escolar dos estudantes. A adaptação se fez necessária para podermos "explorar a oralidade em matemática, estimulando os alunos a expressarem suas estratégias diante de uma questão" (Dante, 2010, p. 18). Nesse sentido, destacamos que em nossas visitas de reconhecimento do espaço, observamos que a caixa d'água apresentava um formato similar ao que estávamos propondo investigar.

O objetivo da primeira atividade gira em torno de sondar os conhecimentos prévios dos participantes a respeito do conceito de volume do sólido cilindro. Esse objetivo coaduna com a ideia de que a conceitualização do real se dá mediante à experiência das situações enfrentadas pelo estudante ao longo da vida (Vergnaud, 1993). Por se tratar de um conceito presente na classe de medida de produtos do tipo terciária, como propôs Vergnaud (2009), o volume é entendido, de forma resumida, como o produto de uma medida de área por uma medida de comprimento. Essa formulação fica mais bem explicitada quando consideramos que o volume é o produto de três comprimentos, a partir de uma relação de dimensões, indicando, dessa maneira, o motivo da potência igual a três.

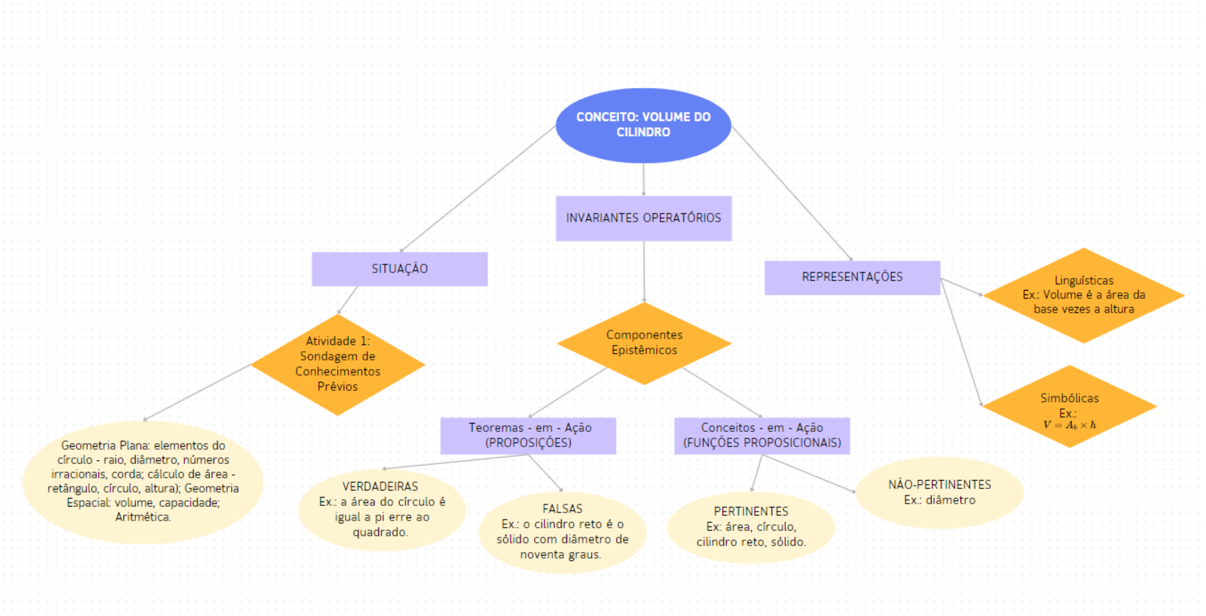
Diante do exposto, começar um evento didático[5] com o conceito principal (volume), sem levar em consideração toda a construção que existe em termos de conteúdos matemáticos antes dele, é ir na contramão do que propõe a teoria dos campos conceituais (TCC). Em consonância com a proposta de não desprezar as ideias primeiras do estudante, temos a fala de

---

[5] Para Vergnaud, quando falamos de campos conceituais, a tese subjaz a realização de um bom evento didático (mise-em-scène didactique), apoiando-se "necessariamente sobre o conhecimento da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos habitualmente encontrados, do repertório de procedimentos disponíveis e das representações possíveis" (1990, p. 157, *tradução nossa*).

Vergnaud (1993) quando aponta que uma situação não aborda um único conceito, assim como um conceito não é construído a partir de um só tipo de situação. Nesse cenário, nossa intervenção é desenhada (Figura 1) em termos da identificação do sólido cilindro, visitando os elementos constituintes que envolvem conceitos presentes na geometria plana e, por fim, da sondagem do conceito de volume, aprofundando na diferenciação com o conceito de capacidade.

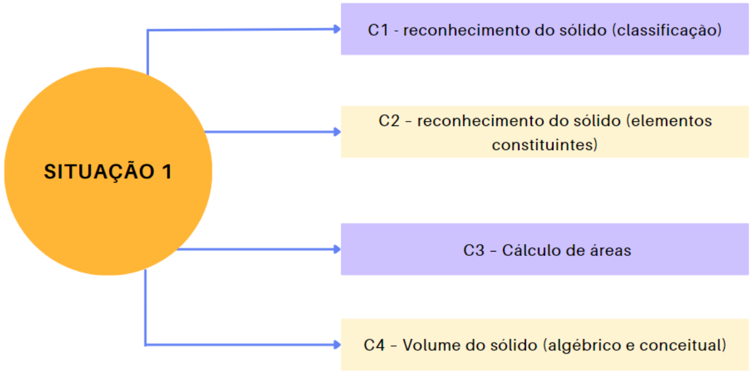
Figura 1 - Delineamento da proposta de atividade 1 baseado nas contribuições de Vergnaud a respeito do conceito como tripleto de três conjuntos



Fonte: Elaborado por Leão (2023)

Em nossas análises referentes a essa atividade, obtivemos quatro categorias (Figura 2), sendo elas: C1 - reconhecimento do sólido (classificação); C2 – reconhecimento do sólido (elementos constituintes); C3 – Cálculo de áreas; C4 – Volume do sólido (algébrico e conceitual). Destacamos que essas categorias emergiram da organização prévia do material e a leitura flutuante das informações obtidas, como proposto em Bardin (2020). Até a realização da coleta não tínhamos categorias pré-definidas, portanto, elas ocorreram depois, a partir do corpus de análise. A partir da escuta, da transcrição dos áudios, da análise das resoluções escritas e das anotações feitas em diário de bordo articuladas com as nossas observações em campo, construímos o Quadro 1, e nele organizamos os invariantes operatórios identificados. Destacamos que fizemos uma reorganização dos itens das situações, buscando similaridades entre elas como descreveremos abaixo.

Figura 2 - Categorias elaboradas na Situação 1 a partir da análise dos dados coletados



Fonte: Elaborado por Leão (2023)

A C1 (engloba os itens de a, b e c) trata da classificação do cilindro. O intuito dessa categorização é compreender como o participante classifica os tipos de cilindros existentes quanto à inclinação da geratriz com o plano da base. De acordo Neto et al. (1982), há duas classes de classificação: quanto à inclinação do eixo e à forma da seção meridiana. O primeiro comporta o cilindro reto ou de revolução e o cilindro oblíquo, já o segundo, o cilindro equilátero, pode ser o cilindro reto, desde que atenda a condição de a medida da altura ser igual ao dobro da medida do raio $(h = 2r)$.

Ainda nessa categoria, o item c, tratava da representação visual em três dimensões do sólido cilindro, bem como a identificação de suas partes, isto é, o item pedia que os estudantes fizessem a construção no espaço do sólido abordado na situação. Tal representação permitiria, portanto, responder os itens seguintes. Adotamos essa lógica por atribuir em nossa proposta de pesquisa o volume como um conceito e essa denominação, na Teoria dos Campos Conceituais, aponta para o conceito como a terna formada pelos conjuntos de Situação, Invariantes Operatórios e Representação.

Dessa maneira, não faz sentido identificar os elementos epistêmicos a partir de situações/problemas sem levar em consideração a parte representacional que, embora possa ser dada no uso da língua materna e/ou simbólico efetuada no próprio cálculo dos participantes, se nutre da visão espacial dos estudantes, que ajuda no reconhecimento de possíveis obstáculos referentes ao objeto de estudo desta pesquisa. Nesse sentido, Vergnaud (1990) aponta que os significantes representam os significados, e que devemos considerar os três conjuntos de forma indissociável.

A C2 (itens *d* e *f*) dispõe sobre os elementos constituintes no sólido cilindro, isto é, foi perguntado aos participantes sobre diâmetro, raio e a relação entre eles. Como a situação deu o valor do diâmetro, foi solicitado que os participantes apresentassem o valor do raio. Os questionamentos feitos na C2 nos levariam à ideia de planificação do sólido descrita na C3.

A C3 (trata dos itens *g* e *h*) abordou a planificação do sólido, uma representação visual do sólido no plano. Tal representação permitiria aos estudantes identificar os elementos e realizar os cálculos das áreas solicitadas no item h. Os participantes usaram nessa categoria conceitos presentes na geometria plana, na aritmética e na álgebra, que, de certa forma, articulam os conceitos para entender o conceito de volume.

A C4 (situações *2* e *3*) abordava o conceito de volume no sentido algébrico e, posteriormente, no sentido conceitual quando pede a diferença entre o conceito estudado e o conceito de capacidade. O primeiro pede que expressem o volume a partir dos dados encontrados na situação anterior, a segunda que apresentem a diferença entre volume e capacidade, caso digam que são conceitos diferentes.

A partir da organização, leitura e transcrição dos áudios e material coletado em campo, organizamos o quadro 3, com os principais invariantes observados a respeito da primeira atividade. Na sequência, tratamos das inferências obtidas. É importante destacar que os itens referentes à representação serão comentados à parte, por não terem sido citado pelos participantes proposições ou funções proposicionais durante a atividade. No entanto, pontuamos que foram observados a dificuldade de representar o objeto, o que não anula o processo de conceitualização, mas a dificuldade de externalizar seus invariantes durante a atividade proposta por meio da verbalização ou forma escrita. Propusemos, ainda, no item 4, que pedia aos participantes que descrevessem o roteiro de execução das situações. O intuito de tal situação foi incentivar a construção por meio da escrita do que fizeram, caso tivessem que explicar ou auxiliar um colega.

Quadro 3 - Invariantes Operatórios evocados na atividade 1 – Pré-diagnóstica

Categorias	Teoremas em Ação (TA)		Conceitos em Ação (CA)	
	Verdadeiro	**Falso**	**Pertinente**	**Não-Pertinente**
C1	Item a (i): *"é uma estrutura feita em uma base de 90 graus"; "é um cilindro com ângulos retos"; "o cilindro é reto quanto tem um ângulo reto em sua estrutura".* Item a (ii): os participantes não expressaram TA apenas CA.	*"é uma base de 90º"; "cilindro reto é quando está em cima base de 90º"; "o cilindro é reto quando o diâmetro é de 90º"; "é uma base retangular em com círculo em cima e embaixo de 90º".*	*Equilátero; ângulos 90º; ângulo reto; obliquo; cilindro obliquo; reto; círculo; base.*	*Cilindro Isósceles; ângulo de 180º; ângulo de 360º; diâmetro de 90º; base retangular.*

C2	*"raio seria a metade do diâmetro"; "diâmetro é a linha reta que atravessa o centro do cilindro"; "raio vai ser uma linha que cruza até o centro do cilindro"; "base é uma superfície"*	*"diâmetro seria a superfície do cilindro"; "diâmetro é a distância do ponto central até a circunferência"; "raio seria uma extremidade no círculo presa por uma linha". "raio é o contrário do diâmetro, que irá cruzar o centro com uma linha". "diâmetro é a medida de uma ponta a outra do cilindro"; "diâmetro é uma parte plana para a outra"; "raio é igual raio vezes pi".*	*Metade; centro; diâmetro; ponto central = origem; linha = corda; extremidade = borda do círculo; raio; Superfície = base.*	*Superfície = diâmetro; parte plana.*
C3	*"$A_b = 2\pi r^2$"; "A base é o círculo – As duas bases são dois círculos, então é: $A_b = 2\pi r^2$"; "A área lateral é o retângulo – $A_l = \text{Área do retângulo} = c.h$"; "A área do cilindro é a soma das áreas".*	*"$A = 2\pi r^2$"; "Área do círculo vai ser $2\pi r$"; "comprimento = perímetro do círculo da base é π; "$A_t = A_b + \text{comprimento}$.*	*Área; perímetro; bases; comprimento; produto = vezes; elevado ao quadrado; círculo; raio; retângulo; área lateral; altura; dobro, soma.*	*Bases redondas; Forma quadricular.*
C4	*"Volume é todo o espaço que pode ser habitado dentro de um sólido"; "Volume é tudo que cabe dentro de um sólido"; "Volume é a área da base vezes a altura - $V = A_b.h$".*	*"volume usa metros e a capacidade usa litros"; "$V = A_b^2 .\ h$"; "Volume é a área total vezes a altura"; "O volume ocupado pode ser menor que a capacidade total"; "A capacidade é o limite delimitado". "$V = a^2.h$"; "$V = ab.h.\pi r^2$"; "Volume é a junção da altura, base e área"; "Capacidade é o máximo, já está no nome, é o que caberia".*	*Espaço; Habitado = ocupado; Altura. Unidade de medida: Metros; Litros.*	*Menor; Area total; Área da base ao quadrado; Limite delimitado.*

Fonte: Elaborado por Leão (2023)

Na C1, de modo geral, os participantes apresentaram dúvidas no item ‘a’, na segunda pergunta, quanto à classificação do sólido quando este apresenta a medida do diâmetro e da altura iguais. Um participante questiona: “*como assim, não entendi, é para escrever o nome*?”. Por isso, entendemos que o uso da palavra **classificação** pode não ter sido interpretado como esperávamos, gerando essa confusão do entendimento entre os participantes. Embora a intercorrência esteja na interpretação da palavra, o trabalho em grupo promoveu discussões em torno da questão, fazendo com que outros participantes lembrassem do cilindro equilátero. No entanto, de um modo geral, apenas citaram o tipo de cilindro sem apresentar uma conclusão, o que indica que foram guiados por um teorema implícito, mas que não era explicitável. Caso o fosse, poderiam indicar algo em língua materna como, por exemplo, quando a medida do diâmetro é igual à medida da altura, dizemos que o cilindro é equilátero, pois o corte transversal que passa o eixo de simetria fornece a relação, h = d, o que levou a adotarmos como um conceito em ação, uma vez que, ele foi expresso como um predicado ou qualidade sobre o sólido, sem uma proposição formada. No entanto, para que a proposição fosse explicitada, seriam necessárias mais situações no campo conceitual investigado.

A respeito da colaboração, Allevato e Onuchic (2014, p. 45) destacam que em grupos, os estudantes “tentam resolver o problema, que lhe conduzirá à construção dos conhecimentos sobre o conteúdo planejado”. Isso foi visível por meio das ações de escrita e da oralidade, onde precisam modificar a maneira de reportar sobre um conceito, podendo recorrer ao uso de recursos simbólicos como desenhos, gráfico entre outros. Além disso, alunos incentivados e orientados trabalham de forma ativa na busca de soluções para um dado problema matemático (Dante, 1995).

Ainda, nesse item, os participantes evocaram teoremas em ação na definição de cilindro reto, no entanto, como mostrado no quadro 1, a grande maioria dos teoremas foram falsos. Em nossas análises, concluímos que embora existam muitos conceitos em ação pertinentes, estes são usados de forma equivocada e geram a construção de teoremas em ação falsos. Os conceitos listados, bem como os teoremas em ação, nos mostram que mais situações dessa classe precisariam ser confrontadas pelos estudantes para que o sentido fosse constituído (Vergnaud, 1993). Apenas um evento didático com uma ou outra situação não é suficiente para superar as dificuldades observadas.

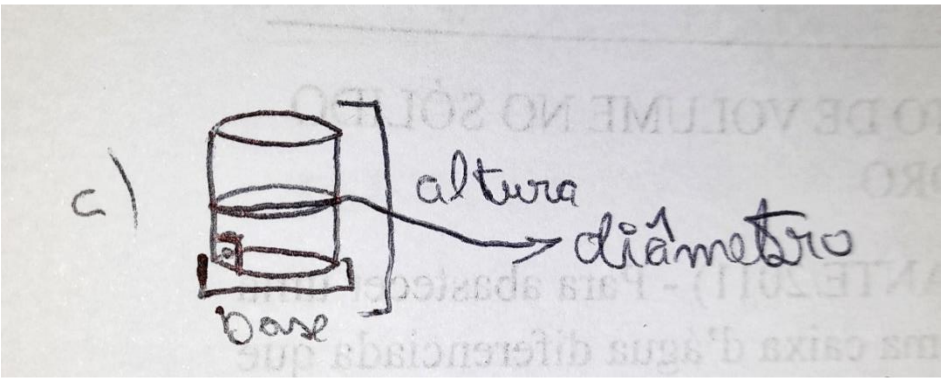
Os conhecimentos implícitos, ao serem explicitados e identificados no ato da resolução de problemas, permitiram compreender que sim, os participantes têm obstáculos a serem superados e que precisaríamos de um intervalo de tempo maior para perceber a superação dessas lacunas. O autor da TCC é enfático ao afirmar que o desenvolvimento não acontece de um só golpe, é preciso um certo tempo e maturação, mas que com toda certeza isso ocorre por meio das situações enfrentadas em variedade e experiência (Vergnaud, 1983).

No item ‘b’, da C1 pedíamos que os participantes mencionassem outros tipos de cilindro, caso existissem. Nesse item, muitos afirmaram não existir outros tipos desse sólido geométrico. E como listado no quadro 1, depois de discutirem em si, alguém lembrou do cilindro oblíquo, que entendemos como sendo um conceito em ação, afinal, eles apenas o citaram, sem dar uma justificativa para isso, ou seja, não foi elaborada uma proposição. Por outro lado, eles poderiam ter uma forma operatória, mas precisaríamos de mais situações para explicitar esse esquema. Os que tentaram, apresentaram conceitos não pertinentes, como ângulos de 180º e 360º, o que não satisfaz a condição dos cilindros oblíquos, em outros casos, na tentativa de listar mais de um, apresentaram o cilindro isósceles.

Ainda nesse item da C1, temos que durante o conflito cognitivo para acomodação de uma solução, os estudantes ainda lembram do cilindro oblíquo, mas pela falta de variedade de outras situações no campo geométrico a respeito desse sólido, eles optam por sair listando todos aqueles que são fruto do desequilíbrio cognitivo vivido no confronto com a nova situação. Nesse sentido, o que os estudantes fizeram foi uma tentativa de compreensão. Entendemos que no confronto com a situação, buscaram em seus esquemas variedades de contextos para fazer as devidas relações, segundo Onuchic e Allevato (2012, p. 242) “compreender é essencialmente relacionar”. Assim, as situações são frutíferas nesse sentido por permitir variedade e história em relação aos conceitos matemáticos (Vergnaud, 1993).

A respeito do item ‘c’, que foi a construção de uma representação visual do sólido cilindro e a identificação das partes, concluímos, em nossas análises, que os participantes apresentaram dificuldades de imaginar o cilindro no espaço e identificar as partes que o compõem (que haviam sido solicitadas na questão). Destacamos que a situação, em sua elaboração inicial, não apresentava uma imagem, pois acreditávamos que a imagem poderia influenciar nas respostas dos participantes, contudo, optamos, posteriormente, por colocar uma imagem referência para o problema e, ainda assim, mesmo tendo um modelo, os participantes tiveram dificuldades em compreendê-la. As figuras a seguir, apresentam a construção de três participantes.

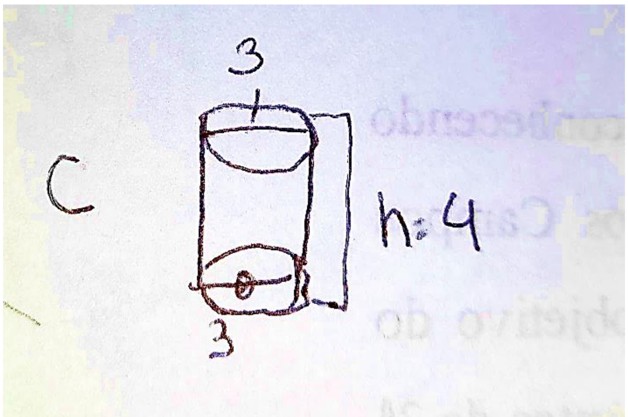
Figura 3 - Construção do cilindro realizado por participante



Fonte: Arquivos de Leão (2024)

No desenho da figura 3, o participante imaginou o sólido cilindro, identificando o ângulo de 90º graus na base, identificou a altura e o diâmetro, faltando o valor do raio. Contudo, chamemos a atenção para o diâmetro que embora nas falas e no quadro dos invariantes não tenha sido expresso como um teorema, a representação mostra que esse participante entende essa medida como a maior corda do círculo que passa pela origem.

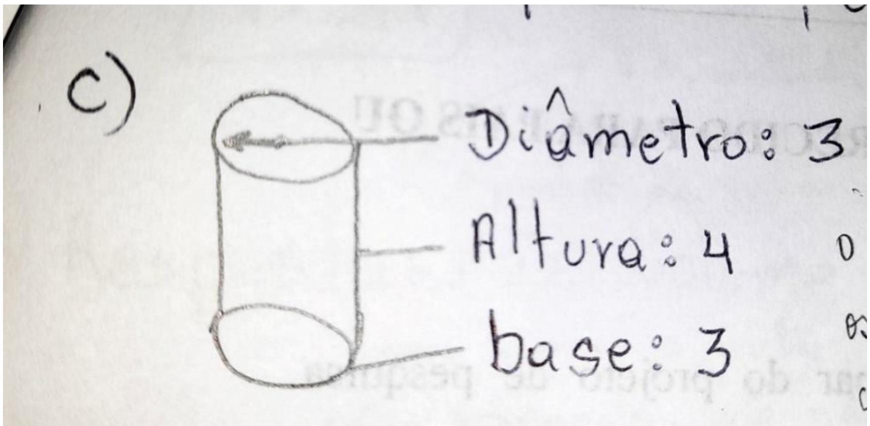
Figura 4 - Construção realizada por participante da pesquisa



Fonte: Arquivos de Leão (2024)

O participante da figura 4, também fez uma representação boa do cilindro, similar ao primeiro. Ele também identificou o dimantro, altura e a base, esquecendo de representar o raio. O que chama a atenção na sua construção é que esse diz que a base tem medida igual a 3, o que expressa uma valor falso, que não condiz com os cálculos que viriam posteriormente. Outro ponto observado é a ausência da unidade de medida nas representações.

Figura 5 - Construção realizada por participante da pesquisa



Fonte: Arquivos de Leão (2024)

Na figura 5, temos que o participante também expressou um teorema em ação verdadeiro sobre a ideia de diâmetro. Ele, assim como os demais esqueceu do raio e das unidades de medida em sua representação. No entanto, o que podemos inferir é que as funções proposicionais pertinentes expressas de forma aleatória e em maior quantidade nas falas dos participantes, como mostra o quadro 3, evidencia um confronto nos esquemas cognitivos e uma tentativa de organizar as informações enfrentadas na situação 1.

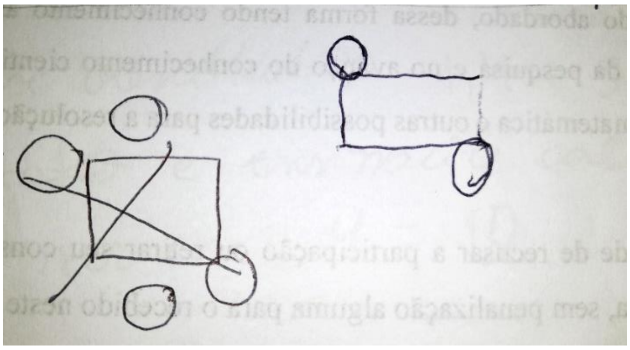
A BNCC orienta que os estudantes do nível médio devem desenvolver habilidades no que tange aos processos investigativos, construção de modelos e resolução de problemas. Quanto às representações, ela pontua que "o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade" (BRASIL, 2018, p. 531). Reforçando essa ideia, Vergnaud (1993) defendia que as situações, os invariantes e as representações são idissociáveis, sendo, portanto, impossível analisar apenas um dos elementos, pois há uma relação intrínseca ocorrendo no processo da conceitualização do real.

Na C2, assim como na C1, houve uma quantidade razoável de teoremas-em-ação verdadeiros, mas a grande maioria foram teoremas-em-ação falsos. A maior parte dos conceitos-em-ação foi pertinente, o que mostra que os participantes têm lacunas nos conceitos trabalhados ainda na geometria plana como, por exemplo, diâmetro. Muitos optam por usar a palavra linha, ao invés de corda, ou ainda, uma linha que vai de uma ponta a outra do círculo, o que não implica em ser o diâmetro, pois a definição apresentada é de corda. Uma pequena parte dos participantes expressaram que o diâmetro é a *linha que passa pelo centro do círculo*, o que para nós consiste como um teorema-em-ação, embora não dito na linguagem formal, mas é o que mais se aproxima do que é ensinado no ambiente escolar. Nesse sentido, deve-se lembrar que as demais linhas, sem a condição de passar pelo centro, são secantes, enquanto a maior corda, o diâmetro, passa obrigatoriamente pelo centro do círculo. A definição proposta nos livros didáticos e ensinada no ambiente escolar afirma que o diâmetro é a maior corda de uma circunferência que vai de uma borda a outra, passando pela origem. O mesmo raciocínio vale para a definição de raio. Embora os estudantes que optaram por essa proposição não tenham colocado como ensinado no sistema, eles fizeram uma boa aproximação do que seria esperado, fazendo-nos entender a proposição como um teorema-em-ação relativamente próximo do conhecimento matemático.

No que tange à relação entre essas duas definições, um quantitativo grande dos participantes teve dificuldade em expressar o diâmetro como o dobro do raio, isso em linguagem materna e/ou símbolos matemáticos. Contudo, quando solicitado o valor, era imediata a resposta. Em nossas análises, isso mostra que os participantes podem ter um esquema que implica na relação entre as definições, mas, a dificuldade consiste em explicitar por meio de palavras e/ou símbolos matemáticos, carecendo, portanto, de situações que explorem mais a oralidade e escrita. Dante (2010) aponta que situações-problema auxiliam a desenvolver o poder da comunicação quando exploradas no sentido da oralidade, oportunizando uma organização e valorização dos conhecimentos prévios. Assim, mais situações dessa classe seriam necessárias para auxiliar os participantes na compreensão e externalização do que realmente eles entendem por diâmetro versus raio.

A categoria 3 consiste em uma representação visual, no entanto, agora em duas dimensões. Os participantes teriam que imaginar como seria a planificação do sólido cilindro no plano identificando suas constituintes, o que permitiria no item seguinte calcular as áreas. Assim como na representação no espaço, os participantes também apresentaram dificuldades de realizar essa construção. Nas figuras abaixo, apresentamos duas imagens de como foi esse processo.

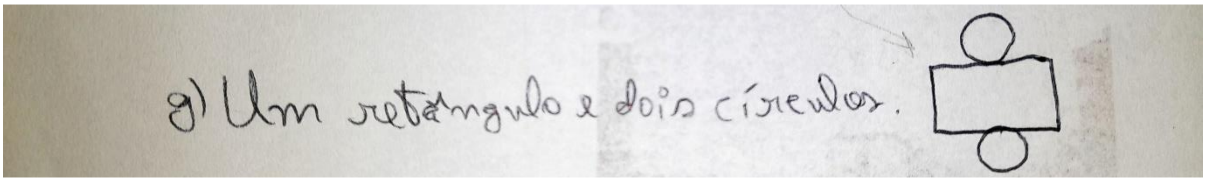
Figura 7 - Representação da planificação do cilindro realizada por participante



Fonte: Arquivos de Leão (2024)

Na figura 6, observa-se em um primeiro momento, uma tentativa de construção, contudo ao perceber que os círculos precisariam estar conectados com a lateral (retângulo), o participante fez o ajuste em sua construção. Podemos inferir que no confronto com essa situação o participante tentou buscar em suas estruturas cognitivas algo que já tenha vivido antes, similar ao que acabara de enfrentar, ao analisar uma possibilidade a partir de uma folha A4 ou em interação com os colegas do grupo, modificou sua representação para algo que melhor descrevesse a solução do problema.

Figura 6 - Representação feita por participante durante a realização da atividade 2



Fonte: Arquivos de Leão (2024)

Na figura 7 apresentada acima, o participante expressou um teorema-em-ação verdadeiro quanto às partes constituintes para a planificação do cilindro, e como forma de reforçar o que escreveu, fez a representação gráfica ao lado. Esse participante talvez já tivesse um esquema consolidado em suas estruturas cognitivas e acomodou a situação enfrentada bem como a representação do que entende como modelo para o sólido cilindro.

No que tange ao item h, os teoremas-em-ação tiveram um certo equilíbrio no que tange a quantidade de invariantes identificados: tivemos um quantitativo alto de conceitos pertinentes. Isso nos revela que as funções proposicionais se fazem presentes nas estruturas cognitivas, mas não são utilizadas com a coerência necessária na construção das proposições. Elas necessitam, portanto, de mais referentes para ampliar e consolidar esses conceitos em formação e o melhor entendimento deles para a conceitualização, possibilitando sentido para o estudante.

Em nossas observações e anotações nos diários de bordo, observamos que os participantes têm domínio da utilização das operações, contudo, presenciamos dificuldades em operar com o conjunto dos números racionais. Isso ficou perceptível no cálculo da área das bases, em que o resultado seria 14,1 cm², mas, os participantes chegaram em 1,4 cm². Há, também, a fala de um dos participantes: "*eu não sei resolver multiplicação com número quebrado*". Entretanto, mesmo chegando em alguns resultados corretos, há frases de alguns que expressam dúvida quanto ao cálculo: "*mesmo que eu não seja especialista em matemática, isso para mim está errado*". Nessa última fala, mostra-se que não há só a dificuldade com a operação de números decimais, mas a não compreensão do funcionamento do algoritmo da multiplicação. Aqui, ressaltamos que situações das estruturas multiplicativas para estabelecer as relações pertinentes seriam necessárias para a superação das lacunas, uma vez que essas observações denotam para dificuldades na aritmética.

Uma outra observação feita é o não uso das unidades de medidas. Eles afirmam, por exemplo, que o diâmetro era 4, mas não completam o que seria esse número em termos de unidades de medida. O mesmo aconteceu nos cálculos de área e volume. Chamar a atenção para essas questões é relevante para enfatizar que uma situação não aborda um único conceito, pois, mesmo sendo uma situação para abordar o conceito de volume de cilindro, acabamos trazendo outros campos conceituais da matemática. Assim, o pesquisador/professor pode não só identificar dificuldades do conceito estudado, mas, de outros conteúdos que precisam ser observados para que o estudante consiga se desenvolver. Nesse item, observamos lacunas no campo conceitual das unidades de medida[6], sobretudo, na importância desta para apresentar os resultados e a real compreensão do seria um número seguido de uma unidade de medida. Vergnaud (2009, p. 246) destaca a importância da análise dimensional, "ela permite elucidar completamente as relações presentes em uma multiplicação".

Bem mais que elucidar as relações na multiplicação, a análise dimensional, instrumento da física, pode auxiliar na compreensão das unidades de medida, possibilitando um melhor entendimento de que não podemos relacionar grandezas de medidas distintas e/ou grupos numéricos, a exemplo, hora com quilômetros. Em nossa atividade, observamos que os estudantes tiveram certa dificuldade para identificar os itens calculados, o que mostra duas questões, a não compreensão do que fizeram ou a falta que a unidade de medida faz como elemento essencial para a identificação dos itens.

Voltando às análises, de forma geral os participantes conseguiram expressar como deveria ser o cálculo da área das bases, da área lateral e da área total. Entendemos tais

---

[6] Destacamos que não faz parte do nosso objeto de pesquisa o campo das unidades de medidas, por esse motivo não estendemos as discussões, contudo, várias questões surgem nesse sentido, a exemplo: como relacionar os diferentes campos das matemáticas que surgem em um dado conceito? Como elaborar um evento didático ou situação didática que articulem os conceitos e possibilite a conceptualização do real? Quais desafios encontramos na educação de base para implementar metodologias que promovam a conceptualização na matemática?

enunciados como teoremas-em-ação. Essa nossa afirmação é reforçada na seguinte fala: "*a base é um círculo, são dois círculos, então é,* $A_b = 2\pi r^2$". Salientamos que nessa categoria, os estudantes expressaram as fórmulas em símbolo matemático. Uma outra fala foi: "*a área lateral é o retângulo, área lateral é igual a área do retângulo comprimento vezes altura*". Nesta última fala chamamos atenção para a dificuldade dos participantes em visualizar o comprimento como sendo o perímetro do círculo da base. É importante ressaltar que as questões abordadas na situação não apresentavam as informações de imediato. Na situação comentada, os estudantes precisariam buscar as relações a partir das construções já feitas e observar que o comprimento da circunferência, isto é, borda da base do cilindro, seria o comprimento do retângulo, a área lateral. Assim, para encontrar o valor do raio, precisariam fazer a relação[7], $c = p_c$, chegando em $2\pi r = p_c = c$. Muitos ficaram questionando o que utilizar como comprimento.

Durante nossas observações, houve um excesso da necessidade de utilizar os algoritmos que descrevem o volume do cilindro. A memorização automatizada das fórmulas nos mostrou a dificuldade para o processo de conceitualização quando os dados não são explicitados na situação. Como no caso descrito anteriormente, foi dado o comprimento da área lateral do cilindro, devendo o participante fazer as devidas correlações e buscar as informações, como: raio e diâmetro, para então encontrar a área da base e consequentemente o volume.

Em relação à área total, houve participantes que evocaram o teorema-em-ação verdadeiro de que a soma da área das bases e lateral seria a área total do cilindro. Há, ainda, a identificação de um teorema em ação falso, explicitado como área total sendo a soma da área da base com a medida do comprimento da superfície lateral do cilindro. Esse participante provavelmente estava organizando seus esquemas vislumbrando uma estratégia de resolução, na sua fala, mostra uma confusão entre as áreas.

Dessa maneira, seria interessante insistir, por meio de questionamentos e intervenções, para elucidar que ele precisaria identificar as áreas e fazer o somatório delas para obter a área total. Por outro lado, se durante a construção da planificação do sólido, este participante apresentou dificuldade de imaginar o sólido em duas dimensões, isso possivelmente dificultou a identificação das áreas das bases e lateral.

Na C4, os participantes deveriam responder às situações 2 e 3 que abordavam o conceito propriamente dito de volume, foco deste estudo. Na situação 2, a partir de toda a construção feita, a situação propõe que apresentassem quais os elementos seriam suficientes para calcular o volume da caixa d'água e quanto seria esse volume. Tivemos muitos conceitos

[7] Onde c é o comprimento do retângulo que é o perímetro do círculo, sendo equivalente a $2\pi r$.

em ação pertinentes, mas um quantitativo grande de teoremas em ação falsos, o que confirma a não adequação dos conceitos-em-ação para a formação de proposições verdadeiras, mostrando fragilidade na compreensão destes conceitos presentes em outros campos conceituais da matemática.

Vergnaud (1985) destaca em uma publicação sua, sobre o conceito de volume, que é difícil os estudantes compreenderem esse conceito, o que aponta a urgência, portanto, de mais pesquisas na área para identificar os obstáculos que causam essa não compreensão. Em nosso estudo, sobretudo, nessa situação sobre o conceito de volume, destacamos que precisaríamos de mais tempo para explorar situações de diferentes níveis abordando o conceito em questão. Chamamos atenção para que antes de uma aplicação como a pensada, seria interessante uma imersão do pesquisador dentro da sala de aula, observando os participantes, isto é, como eles reagem em situação, elencando as dificuldades para então pensar em atividades visando a superação das lacunas.

A partir de nossas análises da situação 2, entendemos que ela ocasionou um conflito cognitivo nos estudantes. Os participantes buscaram associar o volume do cilindro recorrendo a esquemas já elaborados para outros sólidos como, por exemplo, hexaedro. Percebemos a afirmação em falas do tipo: "*o volume do cilindro é a^2 vezes a altura*". Quando questionado sobre o motivo de a^2, o participante diz que seria por conta da área do quadrado. Isso nos leva a pensar que essa associação ajuda a construir a ideia de volume para o cubo. Nesse sentido, Lima (1991) destaca que no ensino de volume costumamos adotar o cubo de aresta de uma unidade de comprimento, apresentando uma ideia intuitiva do volume para sólidos regulares, mas que não tem significância quando aplicado para volumes muito pequenos ou muito grandes.

Quando precisamos abordar o volume de sólidos irregulares, muitas vezes isso é condicionado à apresentação de um algoritmo, sem muitas explicações, a fim de evitar o lado laboral da atividade matemática e as complexidades conceituais existentes. Contudo, destacamos que há a necessidade de pensar atividades que levem os estudantes ao processo da descoberta, mesmo que já existente nos manuais, para que ele perceba a relevância da atividade. O uso abusivo e imediatista de uma fórmula matemática, ocasiona a memorização e uma aprendizagem mecânica sem compreensão dos conceitos existentes no campo conceitual em questão. Ainda, nessa categoria, observamos que os estudantes não entendem o expoente do resultado do produto de medidas de três comprimentos das dimensões do sólido. Seria necessário situações dessa classe para abordar a construção do volume de forma intuitiva, formal e usando o princípio de Cavalieri, fazendo o uso da análise dimensional para a compreensão do expoente nas unidades de medida.

Inferimos que as tentativas dos estudantes em apresentar uma solução ocorreu mediante à mobilização de esquemas anteriores oriundos das situações vivenciadas a respeito de volume em outros sólidos. Em nossas observações, os esquemas mobilizados são similares à definição intuitiva apresentada por Lima (1991), quando diz que para pensarmos em volume, é comum adotarmos uma unidade de medida como o cubo e estimar quantos desse cubo comporta um determinado sólido.

Um outro participante evoca o seguinte o teorema em ação, "*volume é ab vezes altura vezes* πr^2*, seria alguma coisa com ab*". Nessa fala, observamos um processo de desequilíbrio, ocasionado pela situação, mas, ao mesmo tempo, uma tentativa de reorganização dos esquemas existentes, o que mostra que o participante estava tentando organizar seus esquemas antigos e solucionar o novo problema. Quando ele acomoda o novo esquema, conclui: "*ab é área da base*", e verbaliza em língua materna "*o volume do cilindro é área da base vezes altura*".

Contudo, outro problema surgiu, pois alguns não conseguiam ver a relação com a situação anterior, mesmo estando no enunciado do problema a informação **sobre os dados da situação anterior**. Isso fica evidente na fala: "*tem a altura, mas acho que não tem área da base. É dada a área da base*?". Um outro colega, completa: "*Sim, calculamos ela!*". Em um outro diálogo, temos: "*se for considerar esses dados aqui, eu acho que ficaria 12 de área, 3 de base e 4 de altura. Acho que dá para calcular só com isso*". Nessa fala, observamos que o aluno multiplicou o diâmetro pela altura e conclui que isso seria a área. Portanto, concluiu que o valor de 3, que seria o diâmetro, corresponderia à área da base.

Embora dispondo de elementos para calcular a área da base e o volume, este participante teve dificuldade para relacionar esses dados. Para ter certeza do que dispõe, compartilha com seus colegas: "*porque eu acho que não tem como chegar em outra fórmula, dá para calcular a base do círculo com esses dados aqui*". Observamos que o participante confunde a base com área e isso nos chama a atenção para a importância do trabalho colaborativo, pois um outro participante do grupo, contra-argumenta sobre a fala: "*temos sim! É base ou área?*", ele leva o colega a refletir sobre a sua fala, e ajustar seu pensamento: "*é a área, a área é do círculo, e é* $pi.r^2$".

Na situação 3, pertencente à C4, pedíamos que os participantes opinassem sobre se volume e a capacidade são iguais do ponto de vista conceitual. Dos oito participantes, sete expressaram de imediato que "o volume é em metros e a capacidade em litros" na folha da atividade, o que caracteriza um teorema-em-ação falso, pois expressaram suas respostas em termos das unidades de medida, o que não era o objetivo dessa situação. No entanto, nos áudios transcritos, identificamos alguns teoremas em ação verdadeiros como disposto no quadro 1.

Outros casos, foram de que volume é a junção da altura, base e área e capacidade o máximo, o que caberia no sólido.

Em síntese, a primeira atividade proposta traz à luz boas reflexões sobre o ensino de matemática e encaminhamentos para novas investigações. No que tange ao tempo disponível para este estudo e a superação de lacunas observadas durante a nossa coleta de dados, há a necessidade de um intervalo maior de tempo para apresentar situações que promova o real desenvolvimento cognitivo. Somado a isso, destacamos a importância de uma imersão do professor/pesquisador junto dos participantes em sala de aula, observando suas dificuldades epistêmicas, para então, pensar nas melhores situações-problemas.

Quanto aos invariantes operatórios, em nosso estudo, temos um quantitativo pertinente de conceitos em ação e poucas proposições explicitáveis. Esse resultado, mostra que embora os estudantes apresentem relações e propriedades sobre o conceito, há dificuldades para organizar as ideias em um teorema em ação explicitável. Percebemos a dificuldade quando precisam expressar na forma escrita, há teoremas em ação, mas na forma operatória, mostrando a resistência de expressar de outra maneira. Um ponto que pode dificultar essa externalização é a não compreensão do conceito matemático, mas em nossos resultados, concluímos que há um apego pela memorização dos algoritmos. Carecendo, portanto, de atividades que vise a construção dos conceitos e a sensação de descoberta no ensino de matemática.

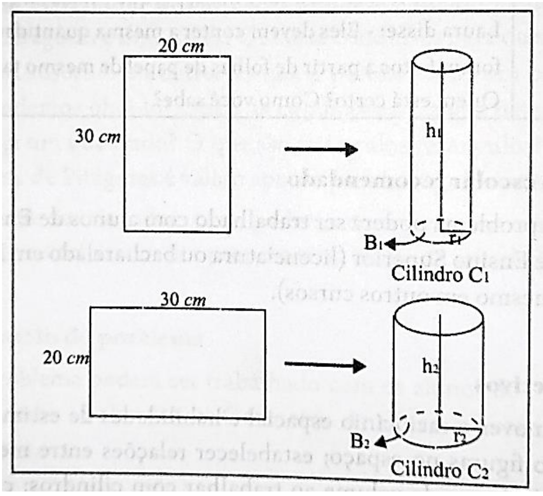
4.2 SEGUNDA ATIVIDADE: SITUAÇÃO-PROBLEMA COM PARTE EXPERIMENTAL NO SÓLIDO CILINDRO

A segunda atividade, além da situação problema, inserimos a parte experimental para oportunizar aos participantes o processo de descoberta e questionamentos quanto ao problema a ser solucionado. A situação (APÊNDICE B) foi retirada do livro Resolução de Problemas: teoria e prática, organizado por Onuchic *et al* (2014) e adaptada com perguntas orientadoras a fim de motivar a organização para resolução do problema.

O objetivo da situação era possibilitar aos participantes a construção do sólido a partir de um dado problema, bem como calcular o volume e pensar sobre as problemáticas levantadas ao longo da atividade.

No item “a” os participantes realizaram de forma individual e optaram por um dos personagens da situação. A partir do questionamento feito ao longo do enunciado, os participantes deveriam dizer quem estava correto e construir um dos modelos propostos na atividade (Figura[8] 8), para isso fizeram uso de folhas A4, fita adesiva e tesoura.

Figura 8 - Diagrama das construções a serem realizadas a partir do A4, medidas 20x30 cm

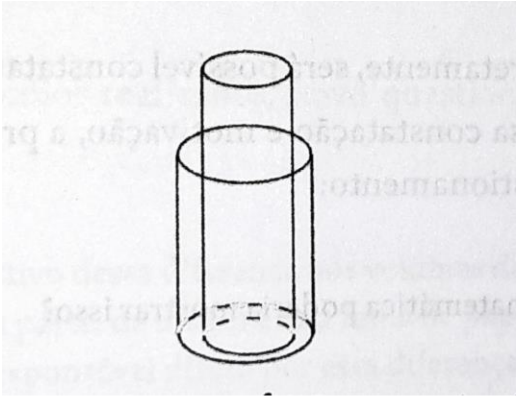


Fonte: Imagem retirada do livro Resolução de Problemas: teoria e prática (2014, p. 120)

A partir do item “b”, os participantes reuniram-se em grupo para organizar as ideias e responder aos questionamentos feitos ao longo da atividade. Após cada participante ter um personagem correto, foi solicitado que todos viessem ao centro da sala e a partir dos materiais, dois cilindros construídos, um de 21 cm de altura e outro 30 cm de altura, recipiente transparente para servir de base, farinha de tapioca e copo medidor realizassem o seguinte experimento: em uma mesa, dois participantes colocaram o recipiente transparente, a base de apoio, dentro dele colocaram o cilindro de altura 21 cm, isto é, o cilindro mais largo, e dentro do cilindro mais largo, colocar o cilindro de 30 cm (Figura 9).

Figura 9 - Estrutura montada para a realização do experimento com os cilindros construídos pelos participantes

[8] Na pesquisa colocamos as medidas de 30x21 cm, a imagem é apenas para ilustrar como foi o processo da pesquisa.



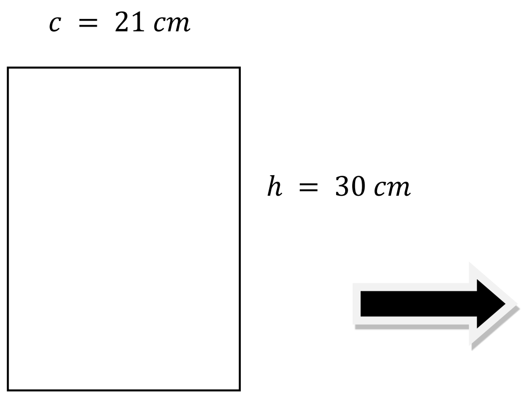
Fonte: Imagem retirada do livro Resolução de Problemas: teoria e prática (2014, p. 121)

Após montarem a estrutura, pegaram a farinha de tapioca com o copo medidor e colocaram aos poucos no cilindro mais alto, até preencher completamente. Na sequência, com cuidado, os participantes puxaram o cilindro mais alto, de modo que o conteúdo caísse no cilindro mais largo. Tal procedimento mostrou que o $V_2 > V_1$. Dessa maneira, mostrou aos participantes que embora os cilindros tenham sido construídos a partir do mesmo material e com as mesmas medidas, ambos possuíam volumes diferentes, o que caracteriza que o personagem Gabriel escolhido por sete dos participantes estava incorreto, enquanto apenas uma entre as participantes indicou a personagem Ana como a correta, contudo, não deu uma explicação para a sua escolha.

No item "c", é questionada a utilidade da matemática para compreender a situação, ou seja, como os participantes poderiam fazer uso da matemática para verificar a diferença de volumes sem precisar fazer o experimento anterior. A ideia por detrás dessa situação é a de que os estudantes buscassem em seus esquemas cognitivos, uma maneira já vista em algum conteúdo passado, ou em situações similares a abordada estratégias de solução. Assim, foi optado pela relação que expressa o volume como o produto da área pela altura, ou seja, $V_{c1} = Ab_{c1} \, . \, h_{c1}$, para o cilindro mais alto e $V_{c2} = Ab_{c2} \, . \, h_{c2}$, para o cilindro mais largo.

Nessa situação, nosso intuito consistia na percepção, por parte dos estudantes, das relações entre grandezas, isto é, o volume como produto de medidas entre o quadrado do raio e a altura. Para chegar nas resoluções, os participantes deveriam organizar as informações disponíveis e aplicá-las de acordo com os questionamentos feitos ao longo da situação.

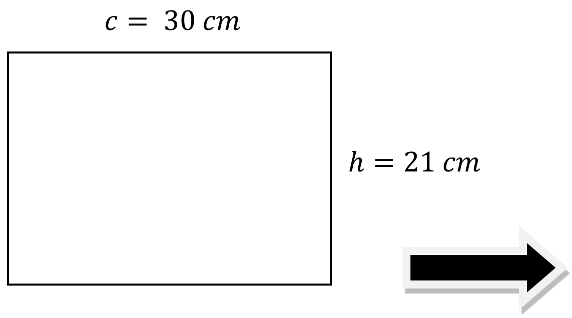
Para C_1, os participantes deveriam identificar as dimensões do papel A4, como descrito a seguir:



Dados de C_1:
$h = 30\ cm$
$c = p_c = 2\pi r$
$21 = 2\pi r$
$$r = \frac{21}{2\pi} = \frac{21}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{21}{6{,}28} \cong 3{,}3\ cm$$

Onde, $c = p_c$, é o comprimento da circunferência; h, a altura do cilindro e r, o raio da circunferência.

Para C_2, realizar o mesmo procedimento, o que nos resulta no seguinte:



Dados de C_2:
$h = 21\ cm$
$c = p_c = 2\pi r$
$30 = 2\pi r$
$$r = \frac{30}{2\pi} = \frac{30}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{30}{6{,}28} \cong 4{,}7\ cm$$

No item "d", após os estudantes constarem por meio dos cálculos que $V_{C2} > V_{C1}$, questiona-se quanto ao responsável pela variação entre os volumes V_1 e V_2 . A resposta esperada seria o raio, ou seja, quanto maior a medida do raio, maior seria o seu volume, ou ainda, que percebessem que o quadrado no expoente, exprime esse valor de forma significativa por permitir seu crescimento muito rápido, observando na relação πr^2.

O item "e", trata de estimativas e aproximações por contagem de unidades para a capacidade de cada sólido. O estudante precisava fazer o uso de seus conhecimentos prévios para fazer as corretas aplicações referente a proporcionalidade. Já no item "f", esperava-se que os participantes aplicassem a ideia de soma e diferença, bem como a aproximação para os números significativos quando necessário.

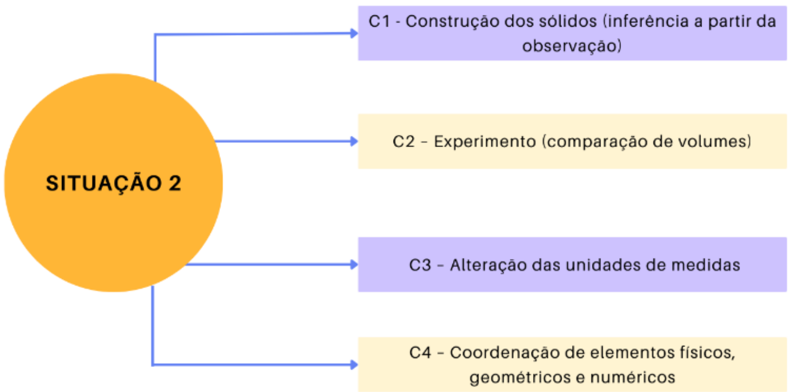
No item "g", tratava-se de uma elaboração escrita de como esse participante faria caso fosse explicar a um colega os passos adotados. Esse item também nos auxilia a compreender como foi estruturado a forma operatória do participante.

Antes da conclusão da situação, foi visualizada uma possível generalização das ideias apresentadas, ou ainda, foi feita uma provocação que deu origem a uma outra situação problema. Uma vez que a diferença de volumes estava sendo afetada pelo raio do cilindro de 30 cm de comprimento, então, quanto deveria ser a medida do novo raio para que esse cilindro suportasse o conteúdo disposto no cilindro de comprimento igual a 21 cm?

Essa indagação levou os participantes a pensar em uma estratégia que auxiliasse a encontrar o novo raio e consequentemente o novo comprimento para construir um cilindro de altura igual a 21 cm que suportasse o conteúdo disposto no cilindro mais alto.

Diante do exposto, obtivemos um total de quatro categorias (Figura 10) nessa segunda situação. Essas categorias emergiram da organização prévia e leitura flutuante do material coletado no campo empírico e, a partir, delas procuramos identificar os possíveis invariantes operatórios evocados pelos participantes.

Figura 10 - Categorias elaboradas na Situação 1 a partir da análise dos dados



Fonte: Elaborado por Leão (2024)

A partir das categorias criadas, foi possível listar e organizar os invariantes identificados e, na sequência, realizar as discussões pertinentes a cada categoria, tendo como suporte os outros instrumentos de coleta, o diário de bordo e a gravação dos áudios. Destacamos que em nossos registros não obtivemos uma proposição ou funções proposicionais para a C4, mas apresentamos imagens das resoluções, as quais podemos tecer comentários a respeito das ações tomadas pelos participantes.

Quadro 4 - Invariantes Operatórios evocados na atividade 2

Categorias	Teoremas em Ação (TA)		Conceitos em Ação (CA)	
	Verdadeiro	**Falso**	**Pertinente**	**Não-Pertinente**
C1	*"alteram os volumes mudando apenas a altura e a área";*	*"os cilindros possuem as mesmas medidas independente de como foi dado, 30 por 21 ou 21 por 30";*	*Altura* *Área* *Volume* *Cilindros*	*Area como soma de tudo;* *Altura iguais dos cilindros;*

		"a área é a soma de tudo e a altura será igual nas construções"; *"possuem o mesmo volume tendo tamanhos diferentes";* *"somando a área da base vai ter o mesmo volume";* *"os cilindros se compensam, a falta de algo com o excesso da outra medida";* *"os cilindros têm o mesmo volume por utilizarem o mesmo material";* *"os dois devem conter o mesmo volume, pois são de um papel de mesmo tamanho".*		
C2	*"o raio é o responsável pela diferença de volumes";* *"o quadrado do raio que causa a diferença de volumes";* *"área das são diferentes, o responsável é o raio – o quadrado do raio";* *"existem duas maneiras de comparar, com alguma massa/líquido e realizando o cálculo";* *"calculando o volume do cilindro".*	*"as áreas da base mais a altura do cilindro";* *"se considerarmos ambos os cilindros com a mesma quantidade de líquido, o volume daria o mesmo";* *"a soma das áreas da base dá o mesmo volume";* *"por meio da prática" (não especificou qual seria a prática;* *"a área do círculo é 2pir²";* *"o volume é a soma da área com o comprimento";* *"o volume é pir³h";* *"o volume é a área da base vezes h²".*	*Área das bases;* *Volume;* *Cilindro;* *Altura;* *Comparação;* *Quadrado do raio;* *Massa (estimar o volume) ou líquido (estimar a capacidade);* *raio;* *Área do círculo;* *Comprimento;*	*Soma;* *O cubo do raio;* *Quadrado da altura.*

C3	*"usando regra de três, o cilindro I, tem 1,364 l e o cilindro II tem 0,964 l";* *"a diferença entre os volumes é de aproximadamente 399, 66 cm³ ou 0,4 l".*	*"a diferença de volumes será de aproximadamente 230, e a capacidade será de uma diferença de aproximadamente 21382".*	*Regra de três; Litros; Cilindro; Centímetros cúbicos; Diferença.*	*Não foi localizado conceitos em ação não pertinentes.*

Fonte: Elaborado por Leão (2024)

Os itens foram organizados visando a construção do sólido cilindro e o entendimento do conceito de volume a partir de uma situação que permitisse um momento prático. Destacamos de início certa dificuldade dos participantes em interpretar a situação proposta, assim como retirar do texto as informações necessárias para calcular o volume dos cilindros que viriam a ser construídos (Figura 11). Assim, no item a, contemplada na C1, dos oito participantes na pesquisa, apenas um escolheu a personagem Ana, enquanto o restante escolheu o Gabriel. Em suas concepções prévias, os cilindros apresentavam o mesmo volume por ter sido feito da mesma matéria prima: a folha A4 com medidas 30x21 cm. O participante que escolheu a personagem Ana acredita que o cilindro de menor altura e área de base maior apresenta o maior volume, mas não apresentou uma justificativa do motivo de sua escolha, logo não fica explicito como foi pensado. No entanto, por não ter sido explicitado o pensamento, entendemos que há a necessidade de intervenção por parte do mediador, oportunizando ao participante explicitar suas dificuldades e/ou a maneira como pensou sobre sua escolha.

Figura 11 - Participantes construindo os cilindros propostos na situação 2

Fonte: Arquivos de Leão (2024)

Na C2, que contempla os itens b, c e d, temos as inferências a partir do experimento, no qual os participantes realizaram comparações entre volumes. Quanto ao item b ainda, boa parte dos participantes afirmaram que seria por meio da prática, mas não souberam dizer ao certo como seria essa prática, já que um ou outro afirma: “se eu pegar dois recipientes iguais a essas construções e colocar água nos mais alto, e depois despejar no mais baixo, veremos que eles têm o mesmo volume”, um outro participante, complementa: “o que falta em um, excede no outro”. Esses participantes construíram seus argumentos em cima da ideia de que por terem sido construídos a partir do mesmo material, o volume se mantém.

Após realizarem a prática (Figura 12), e terem visto por meio do experimento que os volumes eram diferentes, foi perguntado no item c como a matemática poderia auxiliar a formalizar a diferença, ou seja, como poderíamos transportar o que foi feio na prática para símbolos matemáticos e perceber a diferença numericamente. Grande parte dos participantes afirmaram que seria calculando o volume dos cilindros, de acordo com as identificações que fizemos em nossas análises quanto aos invariantes operatórios, observamos alguns teoremas de ação falsos quanto a explicitação predicativa de como calcular o volume do sólido. Podemos observar essa dificuldade na seguinte fala: “embora a altura e a largura sejam diferentes, a área é diferente. Mas a soma de todas as partes dá o volume total”.

Figura 12 - Participantes realizando o experimento após a construção dos cilindros

Fonte: Arquivos de Leão (2024)

Para esse participante, o invariante implícito de volume presente em suas estruturas cognitivas, ao que parece corresponde à área total do cilindro. O que expressa um teorema em ação falso, pois o volume não é expresso pela relação das somas e sim pelo produto de medidas do comprimento área e da altura. Destacamos a importância do confronto com mais referentes desse campo, que auxilie na superação das lacunas existentes nos produtos de medidas, sobretudo, na melhor compreensão e construção do conceito de volume. Um outro ponto que chama a atenção ainda nesse item, trata-se dos conceitos em ação que embora sejam pertinentes em sua grande maioria, carecem de uma maior variedade de situações do campo conceitual abordado para explicitar melhor as proposições e relações entre os conceitos matemáticos.

Ainda na C2, o que corresponde ao item d, sobre o responsável pela alteração entre os volumes, uma parte dos participantes afirmou como sendo o responsável o raio ao quadrado, outros participantes optaram por não responder. Mas ainda assim, aos que apresentaram uma solução, não houve uma justificativa do motivo de ser o raio. Para alguns, seria o raio por ser um número decimal, ou seja, associaram maior volume por pertencer ao conjunto dos números racionais. Outros participantes afirmaram ser o π o responsável pela alteração dos volumes. Nesse item, poderíamos questioná-los quanto às variáveis como, por exemplo, o que acontece se variar a altura ou o raio. Essa questão ficou evidente após a atividade, no entanto, já destacamos possíveis intervenções que podem ser feitas em outras atividades dessa natureza, a exemplo, as perguntas orientadoras para auxiliar no desvelamento das informações.

Na C3, que corresponde ao item e, mas também ao item f, diz respeito das operações e alterações das unidades de medidas. Para isso foram dados os valores correspondentes ao cm^3 em litros e m^3 em litros. Nesse sentido, observamos uma certa dificuldade por parte dos participantes em operar com o conjunto dos números racionais ainda nos itens anteriores, uma vez que os valores encontrados no item c, influenciariam nos itens e e f. Dessa maneira, levando o participante ao cálculo correto ou incorreto – alguns por falta de atenção sobretudo no que tange ao uso das unidades de medidas, chegaram em resultados com certa discrepância (observa-se isso no teorema em ação falso listado no quadro 4). Ademais, a resolução e a fala do participante não dispõem de unidades de medida, dificultando, portanto, afirmar sobre a dimensionalidade dos dados encontrados.

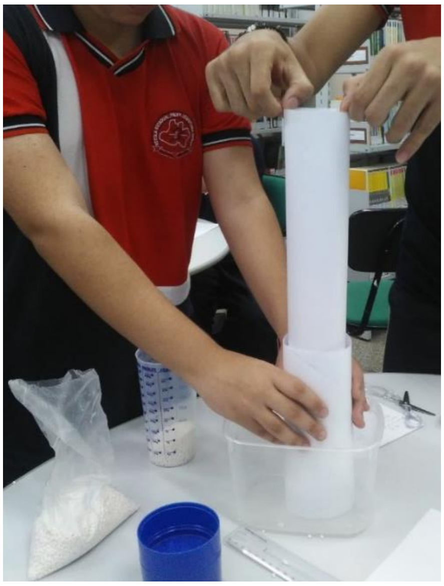
Ainda nessa categoria, observamos que os participantes usaram uma situação vivencial para a resolução do item f. Por exemplo, ao precisar converter os dados e encontrar a diferença em capacidade, associaram a ação que costumam fazer para dividir o refrigerante na hora do intervalo da escola. Vergnaud (1993) destaca que as situações precisam ser diversificadas tanto em história quanto em variedade. No item citado, a vivência dos participantes os auxiliou na adaptação de um esquema, isto é, fizeram o uso de uma situação experenciada no dia a dia para a conversão de volume em capacidade.

Destacamos que durante toda a atividade, observou-se um apego excessivo nas equações que permitem calcular o volume e área, mesmo sendo apresentado, por exemplo, que o volume é um produto de medidas que se origina a partir de um cálculo de área por um comprimento (altura) e que disto desdobra-se um produto de três comprimentos, o que explica a unidade de medida elevada ao cubo. Mesmo com essas informações, os participantes buscam recursos para memorização, seja por meio de uma palavra, uma figura ou uma incógnita. Em outras palavras, há uma necessidade de gravar de imediato as chamadas “fórmulas”.

Na C4, categoria na qual não obtivemos proposições ou funções proposicionais, destacamos que, em nossas observações, quando o problema foi lançado para os participantes, percebeu-se dificuldade para interpretar e organizar o que o problema estava propondo. Se a situação estava propondo saber o novo raio do cilindro mais largo para que os volumes fossem iguais, de imediato, poderiam pensar, basta igualar $V_1 = V_2$. Contudo, foi preciso realizar uma nova leitura para auxiliar na identificação das informações e montagem da estratégia de solução.

Nos cálculos, novamente observou-se dificuldades em operar com o campo conceitual numérico, sobretudo, com o conjunto dos números racionais. Levando inclusive a alteração do resultado, o que impossibilitou um grupo de chegar na resposta correta, fazendo-o repetir os cálculos. Um grupo (Figura 13) chegou no resultado de que o raio deveria ter medida igual a 3,8 cm, o que possibilitaria chegar na medida do comprimento igual a 23,86 cm que arredondado ficaria com o comprimento de 24 cm, ou seja, a folha ao invés de 30 cm de comprimento, deveria ser reduzida para 24 cm. Os participantes munidos de folha A4, tesoura, régua e fita adesiva, construíram o novo cilindro e, na sequência, realizaram novamente o experimento, colocando o cilindro mais alto dentro do novo cilindro construindo e preenchendo com farinha de tapioca.

Figura 13 - Participantes realizando o experimento do problema gerado a partir da situação proposta

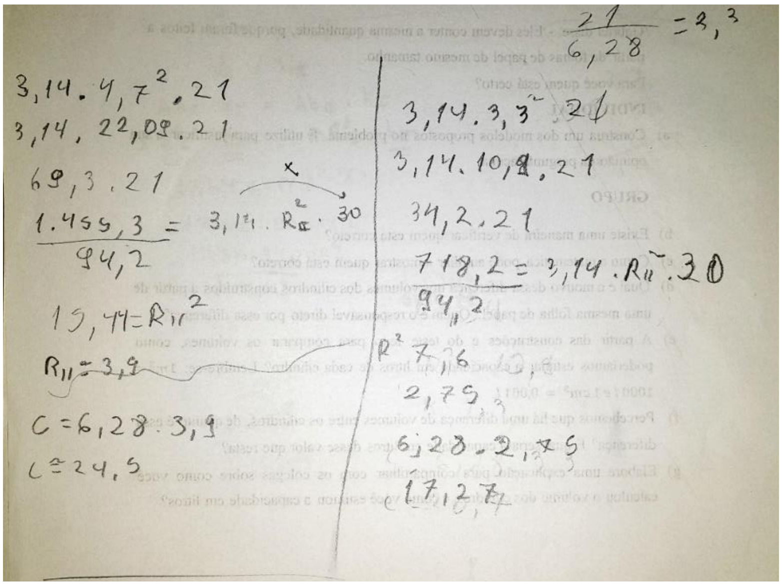


Fonte: Arquivos de Leão (2024)

Após puxaram o cilindro mais alto e permitirem que a substância caísse no novo cilindro, perceberam que excedia um pouco a quantidade usada, ou seja, os cálculos não foram feitos corretamente para estimar o raio e o novo comprimento do cilindro.

Por outro lado, o segundo grupo de participantes realizou dois cálculos (Figura 14), nos quais um deles permitiria aumentar o cilindro mais alto de 30 cm mais 17,27 cm para que a nova altura fosse de 47,27 cm, ou ainda, 47,3 cm e conseguisse preencher todo o volume do cilindro de altura igual a 21 cm. Contudo, em nossas observações, os participantes ao realizarem a construção, trocaram os dados, pois, para eles o cilindro deveria ter a altura igual a 17,27 cm, o que impossibilitou seu experimento. No entanto, ao percebermos o resultado que o grupo encontrou, agimos de forma mediadora para reforçar que o cálculo não estava incorreto, o que ocorreu foi que ao invés de diminuir o A4 e construir um novo cilindro com altura de 21 cm, os participantes encontraram o valor que deveria aumentar a altura do cilindro de base menor. O papel A4 tinha 30cmx21cm de dimensão, o que implica que presariam colar duas folhas, de modo que fosse acrescentado 17 cm aos 30 cm e retirar o excesso, para então construir o cilindro. Assim, eles optaram por refazer os cálculos, ajustar e construir o cilindro de altura 21 cm com o novo raio.

Figura 14 - Cálculos realizados por participantes do problema gerado a partir da situação 2



Fonte: Arquivos de Leão (2024)

Na nova construção, os participantes chegaram no raio igual 3,9 cm, o que levou ao comprimento de 24,5 cm, realizaram a construção e fizeram o mesmo experimento do início da atividade e que os demais participantes haviam feito minutos antes, concluído que seus cálculos estavam corretos, portanto, o novo raio do cilindro de base maior deveria ser 3,9 cm para que os cilindros 1 e 2 tivessem o mesmo volume.

De forma resumida, na segunda atividade, embora houvesse a articulação das partes teórica e prática, o que possibilitaria a sensação de descoberta e uma melhor compreensão do conceito, em nossos resultados, foi possível inferir dificuldades dos participantes na interpretação do enunciado. Os participantes mostraram dificuldades para entender e retirar os dados do enunciado, organizá-los e elaborar uma estratégia de solução. Esse resultado nos mostra que atribuir uma metodologia de ensino que coloque os estudantes de forma colaborativa, permitindo a construção verbal e escrita em resoluções de problema podem auxiliar no melhor entendimento e compreensão dos conceitos matemáticos.

Pontuamos ainda que, houve uma expressiva dificuldade no campo conceitual numérico. Em nossas observações e na análise dos dados, inferimos obstáculos na realização de pequenos cálculos com números do conjunto racional, bem como a realização nas conversões quando necessário das unidades de medida.

4.3 TERCEIRA ATIVIDADE: TESTE PÓS-DIAGNÓSTICO, EXPLORANDO O CONCEITO DE VOLUME DO CILINDRO EM SITUAÇÕES DO ENEM

A última atividade (APÊNDICE C), intitulado teste pós-diagnóstico, consiste em duas situações retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), referente aos anos de 2013 e 2015, ambas da unidade de Geometria Espacial, sobretudo, no que diz respeito ao conceito, foco da nossa investigação, o volume do cilindro.

Nessas situações, os participantes deveriam fazer a interpretação, bem como a identificação dos dados do problema, dando enfoque ao conceito principal, o de volume. Chamamos essa terceira atividade de uma generalização das situações propostas nas duas primeiras atividades, uma vez que orientávamos por perguntas. A fim de auxiliar a organizar os dados, nessa situação, o participante seria o responsável pela organização e coleta das informações no problema.

Essa forma de estrutura remete à realidade da sociedade moderna, pois as situações serão enfrentadas e não existirão pistas, já que é o solucionador quem precisa organizar as informações e elaborar estratégias de solução. Assim, o participante da pesquisa, precisaria identificar a pergunta da situação, bem como organizar os dados para explicar a forma de raciocínio utilizada.

Os cálculos apresentados pelos participantes trazem muitas informações a respeito da forma operatória do pensamento, contudo, como forma de compreender a organização da atividade mental, colocamos uma tarefa extra que consiste em descrever como explicaria a um colega caso tivesse que explicar a resolução da situação.

O problema 1, referente ao ENEM 2015, que no caderno CINZA, consiste na questão 159, trata de verificar entre as cinco caixas retangulares qual suporta a maior quantidade de latas cilíndricas. Nesse problema, o participante precisaria, além do volume do cilindro, relembrar o volume do paralelepípedo. A situação apresentava as dimensões das latas e um quadro com as dimensões das caixas, enquanto ao participante cabia a tarefa de organizar essas informações da melhor forma a fim de chegar na solução correta.

O problema 2 consistia em uma situação do ENEM de 2013, no caderno de cor AZUL é a questão de número 157, trata-se de um problema onde os participantes teriam de explorar a ideia de cilindro reto para a correta interpretação dos dados e encontrar o valor do menor raio, definido pela situação como r, que atendesse ao critério estabelecido. A situação contempla outras unidades dos campos matemáticos, como por exemplo, o campo das inequações, então, além dos conceitos de geometria espacial, o participante precisaria buscar em suas estruturas cognitivas conhecimentos acerca das inequações.

Consideramos essa situação como tendo um nível difícil. Uma leitura rápida, sem a devida compreensão do que o problema propõe, sem identificar corretamente quais os dados apresentados, pode levar o participante ao equívoco, portanto, a organização das principais ideias e a seleção dos principais conteúdos matemáticos evocados podem auxiliar na elaboração de uma estratégia de solução.

Nas situações observou-se dificuldades por parte dos participantes em realizar as generalizações do cálculo do cilindro para outro sólido, como o caso do paralelepípedo proposto no problema. Podemos observar essa dificuldade na fala de um participante que diz "*não consigo imaginar a caixa comportando os potes*". Houve excesso de cálculos, pois os participantes calcularam todos os volumes das caixas indicadas e depois dividiram os valores encontrados pelo volume do pote cilíndrico.

Em um ou dois casos, houve uma estratégia diferente, em que o participante imaginou o seguinte: se pegar as dimensões comprimento, largura e altura da caixa e dividir pelas dimensões do pote, diâmetro e altura, tem-se a quantidade cada caixa suporta. A ação leva ao que Vergnaud chama de competência, sendo competente aquele que economiza cálculos ou faz uma resolução mais elegante.

Ainda nessa situação, foi feita uma adaptação para que os participantes apresentassem roteiro das ações tomadas durante a resolução. Em outras palavras, a adaptação propunha que fosse explicitada a estratégia de resolução adotada, caso fosse preciso explicar ou ajudar um colega. Não obtivemos sucesso no que foi proposto, pois observou-se um entrave por parte dos estudantes em organizar as ações e escrever a respeito delas. Quando precisavam verbalizar, havia uma certa dificuldade em organizar as ideias e dizer com certa clareza o que se pretendia ou qual dúvida apresentava.

Na primeira situação da terceira atividade, em particular, a dificuldade no campo conceitual numérico, sobretudo, nas operações com números decimais se manteve. No entanto, observou-se que quando explicitado o cálculo para o volume, os participantes não apresentaram mais teoremas em ação falsos como descritos nos quadros 1 e 2. O mesmo aconteceu para o cálculo de área do círculo no pote cilíndrico. Enfatizamos que para superar as lacunas existentes em relação ao campo numérico, precisaríamos de mais situações dessa natureza que confrontassem diretamente as dificuldades apresentadas, levando o participante a readaptar ou modificar os seus esquemas.

No problema 2, observamos dificuldades por parte dos participantes durante a leitura e interpretação do problema. Os participantes não conseguiram de imediato compreender que a situação queria saber o valor máximo do raio da ilha. Trata-se de uma situação de nível difícil, que envolvia o campo conceitual algébrico das inequações. Durante a resolução, um participante expressou "*qual a fórmula, eu só consigo resolver com fórmula*". A situação precisaria de uma estratégia de resolução, mas o excesso precoce pelo uso da memorização de algoritmos leva os participantes a tentar adaptar os esquemas em algo que já viram antes, nesse caso, teriam que readaptar ou modificar, uma vez que não era um resultado imediato.

Os participantes precisariam organizar as informações do problema como sendo $V_p - V_i \geq 4$, onde a diferença do volume da piscina e o volume da ilha tem de ser maior igual a 4, como proposto na situação. A dificuldade dos participantes sobressaiu quando apareceu a inequação. De acordo com as falas nos áudios, os participantes não sabiam o que seria uma inequação.

Na última atividade, as inferências giram em torno das dificuldades de interpretar o problema e retirar do enunciado os dados necessários para a resolução das situações. Por outro lado, os participantes já não apresentaram teoremas falsos acerca do conceito de volume obtivemos nas atividades 1 e 2. Mas a necessidade pelo uso de fórmulas matemáticas, uso excessivo da memorização, persistiu. Ainda nessa atividade, os resultados pontuam lacunas em outros campos conceituais da matemática, como por exemplo, o algébrico. Em nossas análises, inferimos que os conhecimentos dos participantes são do tipo operatório, isso é evidente no insucesso nos itens da atividade que pedia o passo a passo escrito das resoluções de cada situação caso precisasse explicar a um colega.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo nasceu de inquietações da pesquisadora ainda durante a pós-graduação lato sensu, o que culminou em um aprofundamento de leituras e o delineamento da proposta para ingressar na formação stricto sensu. Estruturado no objetivo de identificar os invariantes operatórios evocados a respeito do conceito de volume do sólido cilindro por estudantes finalistas da educação básica, fizemos o uso de uma teoria de desenvolvimento e uma metodologia de ensino. Em nossas leituras, a busca na literatura e reflexões sobre o tema, chegamos à conclusão de que tanto a teoria como a metodologia adotada na investigação apresentam pontos de convergência que permitem identificar lacunas e rupturas no processo de conceitualização. Vergnaud aponta que as situações, ou ainda, os problemas matemáticos, são essenciais para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Ainda nesse viés, pontua que o desenvolvimento não será de um só golpe, mas ao longo de um certo intervalo de tempo.

A metodologia de ensino, resolução de problemas, sobretudo a divulgada por Onuchic e Allevato, consiste na organização de dez passos, onde a exploração e o processo de conceitualização acontece a partir de um problema gerador. A ideia é romper com o processo de memorização ou com a reprodução de exemplos na matemática, e, colocar os estudantes como os responsáveis pela construção do conhecimento. Ainda nessa metodologia, a possibilidade de organização, identificação dos dados, as relações e as propriedades que os estudantes podem estabelecer para encontrar uma ou várias soluções, auxiliam na identificação de obstáculos que poderão ser usadas pelo mediador para contorná-las e/ou auxiliar na superação e melhor compreensão do conceito. Destacamos que o conhecimento é uma construção coletiva e propor o trabalho de forma colaborativa é pertinente por permitir que os estudantes ajudem uns aos outros e explicitem seus conhecimentos de maneira mais acolhedora, de igual para igual.

Em nosso estudo, elaboramos um evento didático disposto em três encontros, cada encontro com uma atividade (problema gerador) sobre o conceito de volume do sólido cilindro. Nossos participantes foram os estudantes finalistas da educação básica de uma escola pública da cidade de Manaus. Durante as atividades, foram formados pequenos grupos, onde puderam dialogar sobre a situação e evocar os conhecimentos prévios a respeito do conceito abordado. Ainda durante a execução das atividades, fizemos a observação, anotações em diário de bordo, registro de imagens dos participantes realizando as atividades e das suas resoluções e as gravações dos diálogos nos grupos.

Para a análise dos dados coletados, fizemos o uso da análise de conteúdo proposta por Bardin. Organizamos o material de acordo com os encontros realizados, fizemos a leitura flutuante do que foi coletado, o que já possibilitou a criação de categorias de análise. Na sequência, fizemos a identificação dos principais conceitos em ação e dos teoremas em ação evocados e organizamos em quadros para discorrer sobre as principais inferências obtidas.

Resumidamente, em nossos resultados, os participantes apresentaram um quantitativo grande de teoremas em ação falsos e muitos conceitos em ação pertinentes acerca do conceito de volume, o que mostra, uma dificuldade de organizar melhor os conceitos para formar as proposições. Inferimos que há lacunas e obstáculos a serem superados sobre o conceito não só da geometria espacial, mas também da geometria plana. Vergnaud destaca que o conceito de volume é muito difícil de trabalhar com os estudantes e em nosso estudo, reforçamos o que foi dito pelo teórico, e acrescentamos que nas atividades houve uma necessidade imediata por parte dos estudantes em recorrer ao uso dos algoritmos.

Destacamos ainda, que a forma do conhecimento apresentada pelos participantes é operatória, isso fica evidente quando, durante as atividades, foi solicitado que realizassem a descrição da resolução do problema. Não obtivemos sucesso, pois embora os teoremas em ação existam, nem sempre são explicitáveis ou fácil de explicitar. Essa dificuldade acende uma alerta para a realização de mais investigações dentro desse campo conceitual, sobretudo, no desenvolvimento da escrita e da oralidade no ensino de matemática, o que poderá ser de grande valia para identificar com mais precisão as lacunas e as rupturas nos conceitos. Teóricos como, Dante, Allevato, Onuchic e tantos outros pesquisadores na Educação Matemática apontam uma urgência em adotar uma metodologia que incentive a representação escrita e verbal dos estudantes. A própria BNCC orienta o desenvolvimento dessa competência.

Ainda sobre os resultados, os participantes apresentaram dificuldades para interpretar e retirar os dados do problema, o que reforça a possibilidade de investigações científicas para superar as dificuldades nesse campo de conhecimento. Em nossas análises, houve obstáculos nos campos conceituais algébrico e numérico, sobretudo, quando houve a necessidade de realizar operações com o conjunto dos números racionais. Observamos também o não uso das unidades de medida, o que dificultou a melhor compreensão dos resultados obtidos.

A nossa investigação ainda tem a necessidade de muitos aprofundamentos, sobretudo, na melhor elaboração de um evento didático. Destacamos que está inserido na realidade escolar, poder observar de perto as reais problemáticas do ensino de matemática, são de grande valia para pensar melhor as propostas de intervenção para a identificação de obstáculos, mas sobretudo, para a superação deles. Pontuamos que a teoria não funciona sem a prática e vice-versa, e se tratando de desenvolvimento cognitivo, sobretudo, conceitualização do real, uma teoria que contempla isso tudo e entendê-la para obter resultados bons é sem dúvidas necessário.

O estudo iniciado traz resultados que podem auxiliar o professor/pesquisador a pensar nas problemáticas que giram em torno das dificuldades apresentadas pelos estudantes. Trata-se de uma contribuição para começarmos a pensar em romper com a memorização, a automatização dos algoritmos e possibilitar a construção dos conceitos matemáticos por meio da experiência e da colaboração em grupos.

Como dito, esse é um estudo iniciado, mas pretendemos seguir nessa linha investigativa, ampliando nosso campo de estudo para outros sólidos da geometria espacial ou ainda outros campos conceituais da matemática, em uma proposta de imbricações dos campos articulados nas situações apresentadas. Destacamos que a metodologia de ensino é uma aliada no desvelamento dos obstáculos encontrados e com grande potencialidade quando articulada com uma teoria do desenvolvimento cognitivo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador a resolução de problemas fechados:** análise de uma experiência. 2005. 370 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlia de Mesquita Filho, Rio Claro.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC et al (orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. – Jundiaí : Paco Editorial, 2014.

ALMOULOUD, S. A. *et al*. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**. (27), p. 94–108, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista ; Revisão: António Branco Vasco. Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Pesquisas Estatísticas e Indicadores Educacionais**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb/resultados>. Acesso em: 10 de dezembro de 2022.

_______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. - Brasília, 1998.

_______. Ministério da Educação e do Desporto. Base Nacional Comum Curricular. - Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 27 de fevereiro de 2023.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, Vol. XXIV, N.º 1, 2015.

COSTA, R. C. Construção do conhecimento científico segundo algumas contribuições da epistemologia de Bachelard. In: Moraes, R. (Org.) **Construtivismo e ensino de ciências: reflexões epistemológicas e metodológicas** - 3. ed. - Porto Alegre : EDIPUCRS, 2008.

COSTA, A. P. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. **Revista Educação Matemática em Foco**, v.9, n.1, 2020.

COSTA, M. S. Um panorama da resolução de problemas na visão das pesquisadoras brasileiras Onuchic e Allevato. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. especial, 2021.

D'AMBRÓSIO, U. História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. **Saber y Tiempo: Revista de Historia de la Ciencia**, 2(8), 7–37, 1999.

DANA, M. E. Geometria - um enriquecimento para a escola elementar. In: Lindquist, M. M; Shulte, A. P. (Orgs.) **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. - São Paulo : Atual, 1994.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12. ed. São Paulo : Editora Ática, 2000.

_______. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. - 1. ed. - São Paulo : Ática, 2010.

FAZENDA, I. Dificuldades comuns entre os que pesquisam educação. In. Fazenda. I. (org.) **Metodologia da Pesquisa Educacional**. – 12. ed. – São Paulo : Cortez, 2010.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Fiorentini, D; Garnica, A. V. M; Bicudo, M. A. V. (Orgs.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. - 6. ed. 1. reimp. - Belo Horizonte : Autêntica, 2020.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. - Campinas : Autores Associados, 2006.

FLICK, U. **Introdução a Pesquisa Qualitativa**. Tradução: Joice Elias Costa ; Revisão: Sônia Elisa Caregnato. - 3. ed. - Porto Alegre : Artmed, 2009.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: Machado *et al*. (Orgs.) **Educação Matemática: uma introdução**. - 2. ed. - São Paulo : EDUC, 2002.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

GARCIA, D. E. S. Aprendizagem a partir do trabalho colaborativo baseado na resolução de problemas. In: Damiani, M. F; Porto, T. M. E; Schlemmer, E. (Orgs.) **Trabalho Colaborativo/Cooperativo em educação: uma possibilidade para ensinar e aprender**. - Sao Leopoldo : Oikos; Brasília : Liber Livro, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. – 6. ed. – São Paulo : Atlas, 2017.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais**. - 1. ed. - São Paulo : PROEM, 2014.

GOLBERT. C. S. O papel do professor na construção do pensamento matemático. In: Becker, F.; Marques, T. B. I. (org.) **Ser professor é ser pesquisador**. - 2. Ed. – Porto Alegre : Mediação, 2010.

GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. **Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças**. - 1. ed. - Curitiba : CRV, 2020.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. – 2. ed. – São Paulo : Cortez, 2013.

LIMA, E. **Medidas e Formas em Geometria, comprimento, Área, volume e semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, 1(4), 3–13, 1995.

MAGINA, S. et al. **Repensando Adição e Subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais**. - 3. ed. - São Paulo : PROEM, 2008.

MARQUES, T. B. I. Professor ou Pesquisador? In: Becker, F.; Marques, T. B. I. (orgs.) **Ser professor é ser pesquisador**. - 2. Ed. – Porto Alegre : Mediação, 2010.

MASINI, E. F. S.; MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa na escola**. - 1. ed. - Curitiba : CRV, 2017.

MENESES, R. S. **Uma história da geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino**. 163 p. São Paulo. Dissertação de mestrado (Mestrado em Educação Matemática). PUC-SP, 2007.

MICOTTI, M. C. O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. – São Paulo : Editora UNESP, 1999.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MONTEIRO *et al*. Contribuição da resolução de problemas como metodologia de ensino de matemática. **Revista REAMEC**, Cuiabá (MT), v. 8, n. 2, p. 57-68, 2020.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC et al (orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. – Jundiaí : Paco Editorial, 2014.

MORAES, R. É possível ser construtivista no ensino de ciências? In: Moraes, R. (Org.) **Construtivismo e ensino de ciências: reflexões epistemológicas e metodológicas** - 3. ed. - Porto Alegre : EDIPUCRS, 2008.

MOREIRA, M. A. A teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigação em Ensino de Ciências** – V7(1), p. 7 – 29, 2002.

_________. **Teorias de Aprendizagem**. - 3. ed. ampl. - Rio de Janeiro : LTC, 2022.

NOVAK, J. D. Aprender, Criar e Usando o Conhecimento: Mapas conceituais como ferramentas facilitadoras em escolas e corporações. **Revista de e-Learning e Sociedade do Conhecimento**. Vol. 6, n. 3, p 21 -30, 2010.

NUNES, C. B.; NOGUTI, F. C. H.; ALLEVATO, N. S. G. Espaço e Forma. In: ONUCHIC et al (orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. – Jundiaí : Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. - São Paulo : Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de Professores: Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (org.) **Educação Matemá,tica no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema. Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. – 4. Ed. – Belo Horizonte : Autêntica Editora, 2019.

PAVANELLO, R. M. O abandono da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, 1(1), 7–17, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. Campinas, Tese de Doutorado (Doutorado em Educação), UNICAMP, 1991.

PLAISANCE, É.; VERGNAUD, G. **As ciências da educação**. Tradução: Nadyr de Salles Penteado, Odila Aparecida de Queiroz. Revisão: Maurício Balthazar Leal. Edições Loyola, São Paulo, 2003.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. 1945. Título em inglês: “How to solve it: a new aspect of mathematical method”. Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro : Interciência, 1995.

QUEIROZ, A. C.; SILVA, J. R. Atribuindo significado aos conceitos de área e volume de cilindros a partir do uso de materiais recicláveis. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. UFPE, Recife, jul, 2004.

RAMOS, M. G. Epistemologia e Ensino de Ciências: compreensões e perspectivas. In: Moraes, R. (Org.) **Construtivismo e ensino de ciências: reflexões epistemológicas e metodológicas** - 3. ed. - Porto Alegre : EDIPUCRS, 2008.

RIVIÈRE, A. Problemas e dificuldades na aprendizagem da matemática. Uma perspectiva cognitiva. In: Coll, Cesar et al. (Orgs.) **Desenvolvimento psicológico e educação. Necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar**. Vol. 3. - Porto Alegre : Artes Médicas, 1995.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. - Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRATFON, P. R.;SHULTE, A. P. (eds.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston : NCTM, 1989, p. 31- 42.

SILVA, F. H. S. **Educação Matemática: caminhos necessários**. – Belém : Palheta, 2016.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos a Matemática Moderna. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, 2004.

SOUZA, D. S. Problemática do Ensino de Geometria: desafios, possibilidades e experiências. **Caminhos da educação matemática em revista (online)/IFS**. V. 11, n. 3, 2021.

SOUZA, J. N.; ALMEIDA, C. G.; MADRUGA, Z. E. F. Resolução de Problemas e Geometria: um estudo de teses e dissertações. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, São Paulo, v. 19, n. 01, p. 1 – 24. 2022.

TEIXEIRA, E.B. A Análise de Dados na Pesquisa Científica: importância e desafios em estudos organizacionais. **Desenvolvimento em Questão**, v. 1, n. 2, 177–201, 2003.

TEIXEIRA, C. J.; MOREIRA, G. E. Ensino-Aprendizagem da Matemática por meio da Proposição de Problemas: uma proposta metodológica. **RIDEMA**, Juiz de Fora, v. 6, n. 1, p. 1-20, 2022.

THORNDIKE, E. L. **A nova metodologia da Aritmética**. 1921/1936. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/182564>. Acesso em: 17 de fevereiro de 2023.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730–1930)**. 1. ed. São Paulo : Annablume, 1999.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERAS, W. S. *et al*. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Conteúdo matemático mais abordado e suas dificuldades. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 6, 2021.

VERGNAUD, G. Conceitos e Esquemas em uma Teoria Operatória da Representação. **Psychologie Française**, 30, p. 245 – 252. Tradução de Maria Lucia Faria Moro com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares, 1985.

____________. **L'enfant, la mathématique et la realité**. Berne, Francfort/M, Peter Lang, 1982.

____________. Par quelles compétences mathématiques l'école maternelle est-elle concernée? In: **Vivre à l'Ecole Maternelle, apprendre, grandir**. Actes du 6ème Congrès de l'AGIEM, Toulouse, p. 51-55, 1988.

____________. Catégories logiques et invariants opératoires. In: **Archives de Psychologie**, N° 58, p.145-149, 1990.

____________. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. UFRJ. Projeto Fundão - Instituto de Matemática - p. 1-26, 1993.

____________. A teoria dos campos conceituais. In: Brun, Jean. **Didática das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget - Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.

____________ On n'a jamais fini de relire Vygotsky et Piaget (Colloque Vygotsky, mai 1998). In: **Y. Clot (Ed.), Avec Vygotsky**. Paris: La Dispute/SNEDIT. Traduzido por Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares, 1999.

____________. Activité, développement, représentation. In: **Colloquium Didactique des Mathématiques**, Paris, 2009a.

____________. **A criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escola Elementar**. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba : Editora da UFPR, 2009b.

____________. O que é aprender? In: Bittar, M.; Muniz, C. A. (orgs.) **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. – 1. Ed. – Curitiba : Editora CRV, 2009c.

____________. The Theory of Conceptual Fields. In: **Human Development**. Vol. 52, nº 2. p. 83-94. Printed in Switzer-land: Karger, 2009d.

____________. L' explication est-elle autre chose que la conceptusalisaton? In: **M. Saada-Robert (Éd.), Expliquer et comprendre en Sciences de l'Éducation**, p. 31-44. Traduzido por Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares, 2002.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Tradução: Daniel Bueno ; revisão: Dirceu da Silva. Porto Alegre : Penso, 2016.

ZANELLA, M. S.; BARROS, R. M. O. **Teoria dos Campos Conceituais: situações problemas da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais**. - 1. ed. - Curitiba : CRV, 2014.

ANEXO A – APROVAÇÃO DA PESQUISA NO COMITÊ DE ETICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Reconhecendo invariantes operatórios na geometria espacial à luz da Teoria dos Campos Conceituais
Pesquisador Responsável: ALZENIRA DA SILVA LEAO
Área Temática:
Versão: 2
CAAE: 70585423.9.0000.5020
Submetido em: 05/08/2023
Instituição Proponente: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Situação da Versão do Projeto: Aprovado
Localização atual da Versão do Projeto: Pesquisador Responsável
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

PLATAFORMA BRASIL
COORDENADOR
PLATAFORMA BRASIL

Comprovante de Recepção: PB_COMPROVANTE_RECEPCAO_2094224

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

O(A) seu(sua) filho(a) está sendo convidado a participar do projeto de pesquisa “Reconhecendo invariantes operatórios no sólido geométrico cilindro à luz da Teoria dos Campos Conceituais”, cujo pesquisador responsável é Alzenira da Silva Leão. O objetivo do projeto consiste em analisar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes da 3ª série do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo o conceito de volume do sólido geométrico cilindro à luz da teoria dos campos conceituais. O(A) seu(sua) filho(a) está sendo convidado porque está na eminência de concluir o ensino médio e por já ter tido um contato com o conteúdo abordado, dessa forma tendo conhecimento anteriores para contribuir na execução da pesquisa e no avanço do conhecimento científico, podendo também experienciar a matemática e outras possibilidades para a resolução de problemas da realidade.

O(A) Sr(a). tem de plena liberdade de recusar a participação do seu(sua) filho(a) ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o tratamento que ele(a) recebe neste serviço.

Caso aceite participar a participação do seu(sua) filho(a) consiste em envolver-se de maneira ativa nas atividades propostas pelo pesquisador. As atividades giram em torno da aplicação de problemas de matemática a respeito do sólido cilindro, onde para obter os dados necessários, adianta-se que serão realizados a gravação de imagens das resoluções e a gravação de áudios quando realizadas em grupos. Ressalta-se que os dados coletados via o registro de imagens e áudios serão confidenciais e limitados apenas à análise pelo pesquisador, sendo vedada a exposição a terceiros de forma a proteger vossa integridade.

Toda pesquisa com seres humanos envolve riscos aos participantes. Nesta pesquisa os riscos para o(a) Sr.(a) são as exposições e/ou divulgação dos dados obtidos à terceiros. Neste caso, assumimos o compromisso e a responsabilidade em manter todas as informações adquiridas em constante sigilo, sendo submetido a análise exclusivamente pelo pesquisador, vedando a exposição a terceiros para que vossa integridade seja protegida. Como forma de minimizar tais riscos, após coletar os dados, estes serão organizados de forma a vedar a identificação dos alunos, identificando-os apenas como aluno "A", "B", "C", etc. Também são esperados os seguintes benefícios com esta pesquisa: atingir todas as pessoas envolvidas na educação, aqueles que fazem parte do processo de ensino e aprendizagem, estudantes e docentes, que poderão compreender a importância da compreensão dos conceitos na construção do conhecimento matemático entendendo a sua importância na aplicabilidade cotidiano, bem como contribuindo para a formação de cidadãos críticos e reflexivos frente as problemáticas do mundo moderno; a sociedade civil que terá acesso a informações pertinentes ao processo de ensino para mudanças de paradigmas, visando a necessidade de implementação de metodologias ativas buscando melhores resultados quanto a aprendizagem dos estudantes.

Se julgar necessário, o(a) Sr(a) dispõe de tempo para que possa refletir sobre a participação do seu filho(a), consultando, se necessário, seus familiares ou outras pessoas que possam ajudá-los na tomada de decisão livre e esclarecida.

Garantimos ao seu(sua) filho(a), e seu acompanhante quando necessário, o ressarcimento das despesas devido sua participação na pesquisa, ainda que não previstas inicialmente.

Também estão assegurados ao(à) Sr(a) o direito a pedir indenizações e cobertura material para reparação a dano, causado pela pesquisa ao participante da pesquisa, seu filho(a).

Asseguramos ao seu(sua) filho(a) o direito de assistência integral gratuita devido a danos diretos/indiretos e imediatos/tardios decorrentes da participação no estudo, pelo tempo que for necessário.

Garantimos ao(à) Sr(a) a manutenção do sigilo e da privacidade da participação do seu filho(a) e de seus dados durante todas as fases da pesquisa e posteriormente na divulgação científica.

O(A) Sr(a). pode entrar com contato com o pesquisador responsável Alzenira da Silva Leão a qualquer tempo para informação adicional no endereço nyraleao4@gmail.com e (93)992184524.

O(A) Sr(a). também pode entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal do Amazonas (CEP/UFAM) e com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando pertinente. O CEP/UFAM fica na Escola de Enfermagem de Manaus (EEM/UFAM) - Sala 07, Rua Teresina, 495 – Adrianópolis – Manaus – AM, Fone: (92) 3305-1181 Ramal 2004, E-mail: cep@ufam.edu.br. O CEP/UFAM é um colegiado multi e transdisciplinar, independente, criado para defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

Este documento (TCLE) será elaborado em duas VIAS, que serão rubricadas em todas as suas páginas, exceto a com as assinaturas, e assinadas ao seu término pelo(a) Sr(a)., e pelo pesquisador responsável, ficando uma via com cada um.

CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO

Declaro que concordo que meu(minha) filho(a) ____ participe desta pesquisa.

Manaus, ____/_____/_____

____
Assinatura do Responsável Legal

____
Assinatura do Pesquisador Responsável

IMPRESSÃO

ANEXO C – TERMO E ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

Você está sendo convidado a participar do projeto de pesquisa “Reconhecendo invariantes operatórios no sólido geométrico cilindro à luz da Teoria dos Campos Conceituais”, cujo pesquisador responsável é Alzenira da Silva Leão. O objetivo do projeto consiste em analisar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes da 3ª série do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo o conceito de volume do sólido geométrico cilindro à luz da teoria dos campos conceituais. Você está sendo convidado porque está na eminência de concluir o ensino médio e por já ter tido um contato com o conteúdo abordado, dessa forma tendo conhecimento anteriores para contribuir na execução da pesquisa e no avanço do conhecimento científico, podendo também experienciar a matemática e outras possibilidades para a resolução de problemas da realidade.

Você tem plena liberdade de recusar a participação ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o recebido neste serviço.

Caso aceite participar, sua participação consiste em envolver-se de maneira ativa nas atividades propostas pelo pesquisador. As atividades giram em torno da aplicação de problemas de matemática a respeito do sólido cilindro, onde para obter os dados necessários, adianta-se que serão realizados a gravação de imagens das resoluções e a gravação de áudios quando realizadas em grupos. Ressalta-se que os dados coletados via o registro de imagens e áudios serão confidenciais e limitados apenas à análise pelo pesquisador, sendo vedada a exposição a terceiros de forma a proteger vossa integridade.

Toda pesquisa com seres humanos envolve riscos aos participantes. Nesta pesquisa os riscos para você são as exposições e/ou divulgação dos dados obtidos à terceiros. Neste caso, assumimos o compromisso e a responsabilidade em manter todas as informações adquiridas em constante sigilo, sendo submetido a análise exclusivamente pelo pesquisador, vedando a exposição a terceiros para que vossa integridade seja protegida. Como forma de minimizar tais riscos, após coletar os dados, estes serão organizados de forma a vedar a sua identificação, identificando-os apenas como aluno "A", "B", "C", etc. Também são esperados os seguintes benefícios com esta pesquisa: atingir todas as pessoas envolvidas na educação, aqueles que fazem parte do processo de ensino e aprendizagem, estudantes e docentes, que poderão compreender a importância da compreensão dos conceitos na construção do conhecimento matemático entendendo a sua importância na aplicabilidade cotidiano, bem como contribuindo para a formação de cidadãos críticos e reflexivos frente as problemáticas do mundo moderno;

a sociedade civil que terá acesso a informações pertinentes ao processo de ensino para mudanças de paradigmas, visando a necessidade de implementação de metodologias ativas buscando melhores resultados quanto a aprendizagem dos estudantes.

Se julgar necessário, você dispõe de tempo para que possa refletir sobre a sua participação, consultando, se necessário, seus familiares ou outras pessoas que possam ajudá-los na tomada de decisão livre e esclarecida.

Garantimos a você, e seu responsável quando necessário, o ressarcimento das despesas devido sua participação na pesquisa, ainda que não previstas inicialmente.

Também estão assegurados a você o direito a pedir indenizações e cobertura material para reparação a dano, causado pela pesquisa.

Asseguramos a você o direito de assistência integral gratuita devido a danos diretos/indiretos e imediatos/tardios decorrentes da participação no estudo, pelo tempo que for necessário.

Garantimos a você a manutenção do sigilo e da privacidade da sua participação e de seus dados durante todas as fases da pesquisa e posteriormente na divulgação científica.

Você pode entrar com contato com o pesquisador responsável Alzenira da Silva Leão a qualquer tempo para informação adicional no endereço nyraleao4@gmail.com e (93)992184524.

Você também pode entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal do Amazonas (CEP/UFAM) e com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando pertinente. O CEP/UFAM fica na Escola de Enfermagem de Manaus (EEM/UFAM) - Sala 07, Rua Teresina, 495 – Adrianópolis – Manaus – AM, Fone: (92) 3305-1181 Ramal 2004, E-mail: cep@ufam.edu.br. O CEP/UFAM é um colegiado multi e transdisciplinar, independente, criado para defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

Este documento (TALE) será elaborado em duas VIAS, que serão rubricadas em todas as suas páginas, exceto a com as assinaturas, e assinadas ao seu término por você e pelo pesquisador responsável, ficando uma via com cada um.

CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO

Eu, ____ declaro que concordo em participar desta pesquisa.

Manaus, ____/_____/_____

Assinatura do Participante

Assinatura do Pesquisador Responsável

IMPRESSÃO

APÊNDICE A – Atividade 1: Situação-Problema adaptada do Livro de Matemática Ensino Médio do Dante (2005)

1 (SITUAÇÃO ADAPTADA DO LIVRO DO DANTE/2011) - Para abastecer uma escola estadual de ensino médio, é necessária uma caixa d'água diferenciada que suporte toda a demanda do educandário. Um dos modelos frequentemente adotado é a do tipo tubular, como a figura abaixo:

Fonte: Imagem retirada da internet. Disponível em: https://pmsaposse.sp.gov.br/reservatorio-de-agua-da-pedra-branca-e-substituido/

Na imagem apresentada, tem-se que o sólido é um cilindro reto, suas dimensões consistem em uma base de 3 m de diâmetro e a altura mede, 4 m. Nessas condições, podemos determinar a área das bases, a área lateral e a área total. Contudo, precisamos pensar em algumas coisas antes:

a) O que é um cilindro reto? Caso o diâmetro e altura tivessem o mesmo valor, como poderíamos denominar esse sólido?

b) Na sua opinião, existem outros tipos de cilindro? Se sim, quais?

c) Desenhe o cilindro reto descrito no enunciado e identifique as bases, a altura, o raio e o diâmetro.

d) A partir da sua construção, o que seria o diâmetro?

e) Qual a relação dele com o raio?

f) Na situação, qual o valor do raio?

g) Como seria a planificação do cilindro apresentado?

h) Apresente as soluções para a área das bases, área lateral e área total do cilindro da situação.

2 Na sua opinião, a situação acima apresenta elementos suficientes para calcular o volume da caixa? Se sim, quais são esses elementos? E qual seria o volume do cilindro?

3 Na sua opinião, o volume é a mesma coisa que a capacidade? Se não, qual a diferença entre eles?

4 Caso fosse explicar para um colega sobre como encontrou o volume da caixa, como você faria? Organize uma sequência dos passos utilizados na sua resolução.

APÊNDICE B – Atividade 2: Situação-Problema adaptada do Livro Resolução de Problemas: teoria e prática, organizado por Onuchic *et al* (2014)

1) (ADAPTADO/NUNES, NOGUTI, ALLEVATO – 2014) A professora Alice entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de 30 cm por 21 cm, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.

Arthur disse: - No meu cabe mais, porque é mais alto.
Ana disse: - No meu cabe mais, porque é mais largo.
Gabriel disse: - Eles devem conter a mesma quantidade, porque foram feitos a partir de folhas de papel de mesmo tamanho.
Para você quem está certo?

INDIVIDUAL

a) Construa um dos modelos propostos no problema. E utilize para justificar a sua opinião da pergunta acima.

GRUPO

b) Existe uma maneira de verificar quem está correto?
c) Como a matemática pode auxiliar a mostrar quem está correto?
d) Qual é o motivo dessa diferença nos volumes dos cilindros construídos a partir de uma mesma folha de papel? Quem é o responsável direto por essa diferença?
e) A partir das construções e do teste feito para comparar os volumes, como poderíamos estimar a capacidade em litros de cada cilindro? Lembre-se: $1m^3 = 1000\, l\, e\, 1\, cm^3 = 0{,}001\, l$.
f) Percebemos que há uma diferença de volumes entre os cilindros, de quanto é essa diferença? E qual seria a capacidade em litros desse valor que resta?
g) Elabore uma explicação para compartilhar com os colegas sobre como você calculou o volume dos cilindros e como você estimou a capacidade em litros?

PROBLEMA ORIGINADO A PARTIR DA SITUAÇÃO: Sabendo que o raio é o responsável pela alteração dos volumes dos cilindros, qual deve ser a medida do raio do cilindro mais largo para que os dois modelos tenham o mesmo volume?

APÊNDICE C – Atividade 3: Situações-Problema do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) sobre o conceito de volume do cilindro

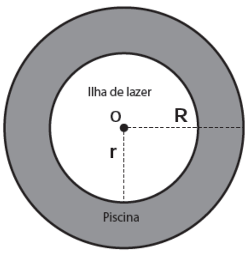
1) ENEM - QUESTÃO 159 - (2015) Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas. No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

IMPORTANTE: Elabore uma sequência dos passos utilizados para responder o problema.

2) ENEM - QUESTÃO 157 - (2013) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.



Considere 3 como valor aproximado para π. Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de qual valor?

IMPORTANTE: Elabore uma sequência dos passos utilizados para responder o problema.