

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Aplicações de contração-dilatação para tensores

MANAUS – AM
NOVEMBRO 2024

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Aplicações de contração-dilatação para tensores

por

Oscar Iván Blanco Ardila

sob as orientações de

Prof. Dr. Mikhail Neklyudov
(Orientador)

Prof. Dr. Germán Benítez Monsalve
(Coorientador)

MANAUS – AM
NOVEMBRO 2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

B641a Blanco Ardila, Oscar Ivan
Aplicações de contração-dilatação para tensores / Oscar Ivan
Blanco Ardila . 2024
60 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Mikhail Neklyudov
Coorientador: Germán Benítez Monsalve
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Produto tensorial . 2. Espaço tensorial . 3. Remodelação de tensores. 4. Produto direto. I. Neklyudov, Mikhail. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

FOLHA DE APROVAÇÃO

APLICAÇÕES DE CONTRAÇÃO-DILATAÇÃO PARA TENSORES

Oscar Iván Blanco Ardila¹

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Mikhail Neklyudov (Presidente)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM.

Prof. Dr. Felipe Albino dos Santos
Universidade Presbiteriana Mackenzie (Membro Externo).

Prof. Dr. Wilson Fernando Mutis Cantero (Membro Externo)
Universidad de Nariño - UDENAR.

¹O autor foi bolsista da Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior- CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha família, que mesmo à distância, me proporcionou um suporte incondicional. Suas palavras de incentivo e compreensão foram fundamentais para que eu superasse os momentos de dificuldade e mantivesse o foco em meus objetivos.

Ao meu orientador, Professor Dr. Mikhail Neklyudov, sou imensamente grato pela paciência, dedicação e confiança depositadas em mim. Seus conhecimentos, orientações e incentivos foram cruciais para o desenvolvimento desta dissertação

Ao meu coorientador, Professor Dr. Germán Benítez, agradeço pela disponibilidade, apoio e contribuições valiosas para o aprimoramento deste trabalho. Sua expertise e sugestões foram fundamentais para a realização desta dissertação.

Ao Departamento de Matemática da UFAM, agradeço a oportunidade de aprendizado e crescimento. As disciplinas cursadas e as interações com professores e alunos me permitiram ampliar meus horizontes e compreender a amplitude e a beleza da Matemática.

Aos colegas que conquistei durante o mestrado, expressei minha sincera gratidão. Suas amizades, companheirismo e troca de conhecimentos foram essenciais para minha formação e para tornar essa experiência ainda mais especial.

Aos membros da banca, Professor Dr. Felipe Albino dos Santos e Professor Dr. Wilson Fernando Mutis, pelas observações e sugestões que contribuíram para a melhoria desta dissertação.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos um estudo sobre tensores, o produto tensorial e suas propriedades fundamentais. Partindo de um conjunto de índices linearmente ordenado, definimos os espaços indexados por esse conjunto e construímos uma álgebra. Nesse contexto, introduzimos as aplicações de contração-dilatação, que possuem propriedades notáveis, como o fato de serem homomorfismos, além de se destacarem como uma ferramenta para representar tensores em forma matricial. Demonstramos que, sob condições específicas, o produto tensorial de matrizes quadradas pode ser interpretado como um caso particular das aplicações de contração-dilatação. Adicionalmente, caracterizamos as aplicações de contração-dilatação injetivas por meio de sua semelhança e, ao apresentar o operador de média, mostramos que qualquer aplicação de contração-dilatação pode ser expressa como a composição do operador de média com uma aplicação de contração-dilatação injetiva.

Palavras-chave:

Produto tensorial, espaço tensorial, remodelação de tensores, produto direto

Abstract

In this dissertation, we present a study on tensors, the tensor product and its fundamental properties. Starting from a linearly ordered set of indices, we define the spaces indexed by this set and construct an algebra. In this context, we introduce the stretching maps, which have notable properties, such as the fact that they are homomorphisms, in addition to standing out as a tool for representing tensors in matrix form. We demonstrate that, under specific conditions, the tensor product of square matrices can be interpreted as a particular case of stretching maps. Additionally, we characterize injective stretching maps up to similarity and, by presenting the averaging operator, we show that any stretching map can be expressed as the composition of the averaging operator with an injective stretching map .

Keywords: Tensor Product, Tensor space, tensor reshaping, direct product.

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	12
1.1 Tensores	12
1.2 Produto tensorial	15
1.2.1 Produto direto de matrizes	19
2 Aplicações de Contração-dilatação	22
2.1 Definição e propriedades elementares	22
2.2 Estrutura de álgebra associativa em $\text{Mat}(\mathbb{A})$	39
3 Algumas aplicações de ρ_F	45
3.1 O caso do produto tensorial	45
3.2 Contração-dilatação universal	56
Referências Bibliográficas	60

Notação

$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos inteiros positivos
$\text{Mat}(n)$	Espaço das matrizes quadradas de ordem n com entradas complexas
$\text{Mat}(\mathbb{A})$	Espaço das matrizes indexadas pelo conjunto $\mathbb{A}$
$E_{i,j}$	Elemento da base canônica para $\text{Mat}(n)$
$\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$	Conjunto das tuplas complexas com entradas indexadas pelo conjunto $\mathbb{A}$
$e_{\bar{i}}$	Elemento da base canônica de $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$
$E_{\bar{i},\bar{j}}$	Elemento da base canônica para $\text{Mat}(\mathbb{A})$
$\{e_i\}_{i=1}^n$	Base canônica para o espaço vetorial V
V^*	Espaço dual de V
$\{e^i\}_{i=1}^n$	Base dual de $\{e_i\}$.
$\oplus$	Soma direta de matrizes
$\otimes$	Aplicação produto tensorial.
$\langle, \rangle_F$	Produto interno em $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$
$\langle, \rangle_F^{\mathbb{A}}$	Produto interno em $\text{Mat}(\mathbb{A})$

Introdução

A história do conceito de tensor tem origens e contribuições entrelaçadas ao longo do final do século XIX e início do século XX, o que frequentemente causa confusão inicial sobre o tema.

Ricci, Gibbs, Voigt e Whitney estão entre os pioneiros da teoria dos tensores. Em 1881, Gibbs, no trabalho [Gib84], desenvolveu os conceitos de “dyads” e “polyads”, que são, essencialmente, tensores com diferentes denominações. Quase duas décadas depois, em 1898, Voigt [Voi98] cunhou o termo “tensor” em um contexto mais restrito, referindo-se a dois tensores simétricos no estudo da elasticidade dos cristais, representando-os como vetores em seis dimensões. Essa notação ficou conhecida como a notação de Voigt. O termo foi posteriormente adotado por físicos como Max Abraham, Arnold Sommerfeld e Max von Laue. Em 1900, Ricci [RLC00] definiu o que hoje reconhecemos como campo tensorial, embora não tenha utilizado o termo “tensor”. Em 1913, Einstein e Grossmann empregaram a definição de Ricci, utilizando pela primeira vez o nome “tensor”. Whitney, em [Whi38], formalizou a ideia de “dyads” proposta por Gibbs, definindo o produto tensorial.

Em 1927, Hitchcock [Hit27] demonstrou que todo tensor covariante pode ser expresso como a soma de produtos finitos de vetores covariantes, introduzindo também a definição de posto para um tensor. Essa decomposição ficou conhecida como “Canonical Polyadic Decomposition” (CADECOMP ou, mais comumente, CPD). Em 1966, Tucker apresentou uma nova forma de expressar um tensor como o produto de um tensor de menor posto e matrizes em cada uma de suas dimensões, conhecida como decomposição de Tucker.

Recentemente, a decomposição de tensores tem sido amplamente aplicada em diversos domínios, como processamento de sinais [C⁺02], aprendizado de máquina e neurociência [BS05], essas técnicas são ferramentas poderosas para redução de dimensionalidade, extração de características, agrupamento e classificação. Mais especificamente, a decomposição de tensores permite fatorar dados em componentes básicos, revelando padrões ocultos importantes.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um método para a representação de tensores por meio de matrizes, baseado nas aplicações propostas por Futorny, Ne-

klyudov e Zhao em [FNZ24], exploramos o produto tensorial de matrizes quadradas e introduzimos as aplicações de contração-dilatação.

No primeiro capítulo, estabelecemos os fundamentos da álgebra multilinear, definindo tensores como aplicações multilineares e explorando o espaço tensorial sobre um espaço vetorial V . Nesse contexto, apresentamos os elementos geradores do espaço tensorial, exploramos suas propriedades algébricas e destacamos a propriedade universal, que permite caracterizá-lo.

No segundo capítulo, apresentamos dois espaços vetoriais munidos com produto interno, sendo um deles composto por matrizes. Nesse cenário, definimos as aplicações de contração-dilatação e introduzimos uma aplicação bilinear que dá ao espaço das matrizes a estrutura de uma álgebra sobre o corpo dos complexos, permitindo demonstrar algumas propriedades das aplicações de contração-dilatação.

No terceiro capítulo, estudamos uma classe de aplicações de contração-dilatação que permite classificar, a menos de semelhança, a forma canônica de produtos tensoriais, um trabalho iniciado em 1934 por Aitken e Roth [Ait35], [Rot34].

Por fim, apresentamos o operador de média, que, embora não preserve todas as propriedades algébricas, demonstra sua utilidade ao permitir que qualquer aplicação de contração-dilatação seja expressa como uma composição entre ele e uma aplicação semelhante à aplicação produto tensorial.

Todos os espaços vetoriais que consideramos neste trabalho, são assumidos sobre o corpo dos complexos, $\mathbb{C}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos básicos da álgebra multilinear que sustentam o desenvolvimento desta dissertação. Exploraremos a definição e as propriedades fundamentais dos tensores, compreendendo-os como representações de formas multilineares, também abordaremos o espaço vetorial formado por esses objetos, estabelecendo as bases para a posterior apresentação das aplicações de contração-dilatação em capítulos posteriores. Para acompanhar o conteúdo deste capítulo, são apenas necessários conhecimentos em álgebra linear, tais como, espaço vetorial, espaço dual, base de um espaço vetorial, conjunto gerador, determinante, produto interno.

1.1 Tensores

Definição 1.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{C}$. Consideremos $\{e_i\}_{i=0}^{n-1}$ uma base para V e $\{e^j\}_{j=0}^{n-1}$ a respectiva base dual para o espaço V^* , ou seja,*

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

. Nessas condições, dizemos que o conjunto $\{e_j, e^i\}_{i,j=0}^{n-1}$ forma um sistema biortogonal para o espaço V .

Definição 1.2. *Sejam $W, V_1, \dots, V_m$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$, e tomemos $T : V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow W$. A aplicação T é chamada de **multilinear** se for linear em cada uma das variáveis.*

Exemplo 1.3. *Vejamos alguns exemplos de aplicações multilineares.*

- *Seja $\text{Mat}(n) = V_1 = V_2 = W$*

$$\begin{aligned} \cdot : \text{Mat}(n) \times \text{Mat}(n) &\longrightarrow \text{Mat}(n) \\ (A, B) &\longmapsto A \cdot B \end{aligned}$$

- Sejam $V_1 = \mathbb{C}$, $V_3 = W = \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \times \text{Mat}(2) &\longrightarrow \text{Mat}(2) \\ (\lambda, v, A) &\longmapsto T(\lambda, v, A) := \lambda A \cdot v^t \end{aligned}$$

Definição 1.4. Dados $W, U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$, com U_i^* denotando o espaço dual de U_i , $i = 1, \dots, p$. A aplicação multilinear:

$$\begin{aligned} T : \underbrace{U_1^* \times \dots \times U_p^*}_{p \text{ vezes}} \times \underbrace{V_1 \times \dots \times V_q}_{q \text{ vezes}} &\longrightarrow W \\ (u_1^*, \dots, u_p^*, v_1, \dots, v_q) &\longmapsto T(u_1^*, \dots, u_p^*, v_1, \dots, v_q) \end{aligned}$$

é chamada de **tensor**.

Exemplo 1.5. Seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ o espaço dos polinômios com coeficientes complexos, e $\{m_i\}_{i=1}^{n+1}$ inteiros positivos,

$$\begin{aligned} T : (C^{m_1})^* \times \dots \times (C^{m_{n+1}})^* \times C^{m_1} \times \dots \times C^{m_{n+1}} &\longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \\ (u_1^*, \dots, u_{n+1}^*, v_1, \dots, v_{n+1}) &\longmapsto p(z) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i^*(v_i) z^{i-1}. \end{aligned}$$

Embora a definição de tensor apresentada seja abrangente e compatível com diversas interpretações encontradas na literatura, vamos focar em um caso específico: o espaço das aplicações multilineares cujo domínio é o produto de p cópias do espaço dual V^* com q cópias do espaço vetorial V e contradomínio o corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e V^* seu espaço dual. A aplicação multilinear T definida por:

$$\begin{aligned} T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ vezes}} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u_1^*, \dots, u_p^*, v_1, \dots, v_q) &\longmapsto T(u_1^*, \dots, u_p^*, v_1, \dots, v_q) \end{aligned}$$

é chamada de **tensor** do tipo (p, q) sobre V

Os inteiros p, q indicam a ordem do tensor, sendo p a ordem contravariante e q a ordem covariante¹. O conjunto de todas as aplicações lineares T como na Definição 1.6 é chamado de **espaço tensorial** sobre V , que será denotado por $\mathcal{T}_q^p(V)$.

O conjunto $\mathcal{T}_q^p(V)$ possui estrutura de espaço vetorial com as operações de soma e

¹Em 1851 J. Sylvester introduz os termos *covariante* e *contravariante*, ver [Sy109]

produto por escalar definidas a seguir:

$$(T_1 + T_2)(u_1^*, \dots, u_p^*, u_1, \dots, u_q) = T_1(u_1^*, \dots, u_p^*, u_1, \dots, u_q) + T_2(u_1^*, \dots, u_p^*, u_1, \dots, u_q) \quad (1.1)$$

O elemento neutro é o tensor zero, definido por:

$$\mathbf{0}(u_1^*, \dots, u_p^*, u_1, \dots, u_q) = 0$$

Para todo $u_1^*, \dots, u_p^* \in V^*$ e $u_1, \dots, u_q \in V$.

e produto por escalar

$$(\alpha T_1)(u_1^*, \dots, u_p^*, u_1, \dots, u_q) = \alpha T_1(u_1^*, \dots, u_p^*, u_1, \dots, u_q) \quad (1.2)$$

Exemplo 1.7. *A continuação vamos ver alguns exemplos de tensores.*

1.
 - *Tensores do tipo $(0,0)$ são definidos como os elementos do corpo ou escalares.*
 - *Tensores do tipo $(0,1)$ são funcionais lineares, também chamados covetores*
2. *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, e $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ um produto interno $\langle, \rangle$ é um tensor do tipo $(0,2)$.*
3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n , sobre $\mathbb{C}$ e $\{e_i, e^j\}_{i,j=0}^{n-1}$ um sistema biortogonal para V . Consideremos*

$$\begin{aligned} \delta : V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u^*, v) &\longmapsto \delta(u^*, v) := u^*(v). \end{aligned}$$

fazendo $\delta_{i,j} = \delta(e^j, e_i) = e^j(e_i)$ obtemos 1 ou 0 segundo a Definição 1.1.

*Vamos chamar o tensor δ como **delta de Kronecker**.*

4. *Para cada $v \in V$, $u^* \in V^*$ definimos o tensor do tipo $(1,1)$*

$$\begin{aligned} v \otimes u^* : V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v^*, u) &\longmapsto v \otimes u^*(v^*, u) := u^*(v) \cdot v^*(u). \end{aligned}$$

É fácil ver que $v \otimes v^$ é bilinear e portanto pertence à $\mathcal{T}_1^1(V)$. O tensor $v \otimes v^*$ é chamado o **produto tensorial** de v e v^* .*

1.2 Produto tensorial

O **produto tensorial** desempenha um papel fundamental na estrutura algébrica do espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$ introduzido na seção anterior. A seguir veremos como estender a aplicação apresentada no Exemplo 1.7 item 4, para p covetores e q vetores. Consideremos $v_1, \dots, v_p \in V$ e $v_1^*, \dots, v_q^* \in V^*$, definimos a função :

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{K}. \quad (1.3)$$

Tal que:

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*(u_1^*, \dots, u_p^*, u_1, \dots, u_q) = u_1^*(v_1) \dots u_p^*(v_p) v_1^*(u_1) \dots v_q^*(u_q)$$

para todo $v_1, \dots, v_p \in V$ e $v_1^*, \dots, v_q^* \in V^*$, é fácil ver que a aplicação definida é linear em cada uma das suas variáveis, portanto pertence ao espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$. Vamos chamar a função definida recentemente como o **produto tensorial** de $v_1, \dots, v_p$ e $v_1^*, \dots, v_q^*$.

Tendo explorado exemplos de tensores e definido o produto tensorial envolvendo p covetores e q vetores, prosseguiremos com o estudo do espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$. Abordaremos questões pertinentes que podem surgir nesse contexto, como a determinação de sua dimensão e a construção de uma base para $\mathcal{T}_q^p(V)$.

Proposição 1.8. *Seja V um espaço de dimensão finita n , $\{e_j, e^i\}$ um sistema biortogonal para V . Então o conjunto $\mathcal{B} = \{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}; 0 \leq i_k, j_s \leq n-1 \text{ e } 0 \leq k \leq p; 0 \leq s \leq q\}$ é uma base para o espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$.*

Prova. Para demonstrar que $\mathcal{B}$ constitui uma base para $\mathcal{T}_q^p(V)$ dividiremos a prova em duas etapas. Primeiro estabeleceremos que $\mathcal{B}$ de fato gera $\mathcal{T}_q^p(V)$. Em seguida, mostraremos que $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente. Para começar tomemos $u_1^*, \dots, u_p^* \in V^*$, e $v_1, \dots, v_q \in V$

1. Tomemos o sistema biortogonal $\{e_i, e^j\}$, um tensor no espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$, em seguida, para os índices $0 \leq i_k, j_s \leq n-1$ com $k = 1, \dots, p$ e $s = 1, \dots, q$ consideramos

os escalares $\tau_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$,

$$\begin{aligned}
& T(u_1^*, \dots, u_p^*, v_1, \dots, v_q) \\
&= T\left(\sum_{i=0}^{n-1} u_1^*(e_i) e^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} u_p^*(e_i) e^i, \sum_{i=0}^{n-1} e^i(v_1) e_i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} e^i(v_q) e_i\right) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=0 \\ j_1, \dots, j_q=0}}^{n-1} T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) u_1^*(e_{i_1}) \dots u_p^*(e_{i_p}) e^{j_1}(v_1) \dots e^{j_q}(v_q) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=0 \\ j_1, \dots, j_q=0}}^{n-1} \tau_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} (u_1^*, \dots, u_p^*, v_1, \dots, v_q)
\end{aligned}$$

Portanto o conjunto $\mathcal{B}$ gera $\mathcal{T}_q^p(V)$.

2. Consideremos a seguinte equação, com $\mathbf{0}$ sendo o tensor nulo

$$\begin{aligned}
& \mathbf{0}(e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=0 \\ j_1, \dots, j_q=0}}^{n-1} \tau_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, \dots, e_{l_q}) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=0 \\ j_1, \dots, j_q=0}}^{n-1} \tau_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e^{j_1}(e_{l_1}) \dots e^{j_q}(e_{l_q}) e^{k_1}(e_{i_1}) \dots e^{k_p}(e_{i_p}) \\
&= \tau_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p} \delta_{l_1, l_1} \dots \delta_{l_q, l_q} \delta_{k_1, k_1} \dots \delta_{k_p, k_p} \\
&= \tau_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p}
\end{aligned}$$

Com $k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q = 0, 1, \dots, n-1$. Concluimos que $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente. $\square$

Corolário 1.9. *O conjunto $S := \{u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* \mid u_1, \dots, u_p \in V, v_1^*, \dots, v_q^* \in V^*\}$ gera o conjunto $\mathcal{T}_q^p(V)$.*

Observação 1.10. *É importante ressaltar que todo tensor em $\mathcal{T}_q^p(V)$ admite uma representação como soma de elementos pertencentes ao conjunto S , conforme estabelecido no corolário anterior. No entanto, os elementos de S possuem uma denominação específica: são chamados de tensores simples ou tensores decomponíveis².*

Definição 1.11. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n , $S := \{u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* \mid u_1, \dots, u_p \in V, v_1^*, \dots, v_q^* \in V^*\}$. Todo elemento $T \in S$ é chamado de **tensor simple** ou **tensor decomponível**.*

²Também chamados “dyads”, “triads” segundo o caso ver [Hac12]

Definição 1.12. Seja $Q \in \mathcal{T}_q^p(V)$ o posto de Q é o menor inteiro positivo r tal que $Q = \sum_{i=1}^r T_i$ onde $T_i \in S$

Na equação 1.3 apresentamos o produto tensorial como elemento do espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$, isto é, como aplicação multilinear com valores no corpo dados p vetores e q covetores fixos. Conforme a definição 1.11 o produto tensorial de p vetores e q covetores é um tensor simples, assim é possível definir o produto tensorial como aplicação com valores em $\mathcal{T}_q^p(V)$.

Definição 1.13. Dado V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A aplicação :

$$\begin{aligned} \otimes : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ vezes}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ vezes}} &\longrightarrow \mathcal{T}_q^p(V) \\ (u_1, \dots, u_p, v_1^*, \dots, v_q^*) &\longmapsto u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* \end{aligned}$$

Observação 1.14. A aplicação recentemente definida oferece uma perspectiva mais clara sobre a razão pela qual o espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$ também pode ser denotado por $V^{\otimes(p,q)}$.

Após estabelecermos a definição formal do produto tensorial, adentraremos agora o estudo de suas propriedades algébricas. Exploraremos a interação do produto tensorial com operações como a soma, além de mostrar a propriedade universal, um conceito crucial que caracteriza o produto tensorial de maneira única.

Observação 1.15. Na Definição 1.13, foi apresentado o produto tensorial como a aplicação que a uma $p + q$ -úpla de vetores e covetores associa um tensor simples. No entanto, é natural estender essa definição e definir o produto tensorial para tensores em geral. Sejam $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}^+$ e $A, B \in \mathcal{T}_{q_1}^{p_1}(V), \mathcal{T}_{q_2}^{p_2}(V)$ respectivamente. Assim definimos o produto tensorial $A \otimes B$ como:

$$\begin{aligned} A \otimes B(u_1^*, \dots, u_{p_1}^*, u_{p_1+1}^*, \dots, u_{p_1+p_2}^*, v_1, \dots, v_{q_1}, v_{q_1+1}, \dots, v_{q_1+q_2}) \\ = A(u_1^*, \dots, u_{p_1}^*, v_1, \dots, v_{q_1}) B(u_{p_1+1}^*, \dots, u_{p_1+p_2}^*, v_{q_1+1}, v_{q_1+q_2}) \end{aligned}$$

em que $u_1^*, \dots, u_{p_1+p_2}^* \in V^*$ e $v_1, \dots, v_{q_1+q_2} \in V$, portanto $A \otimes B \in \mathcal{T}_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}(V)$.

Propriedades do produto tensorial

Sejam A, B, C tensores em $\mathcal{T}_{q_i}^{p_i}(V)$, $i = 1, 2, 3$.

1. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.
2. Se $p_1 = p_2$ e $q_1 = q_2$ então $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$.

3. Se $p_2 = p_3$ e $q_2 = q_3$ então $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.

Proposição 1.16 (Propriedade Universal). *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, W um espaço vetorial e uma aplicação multilinear $B : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ vezes}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ vezes}} \rightarrow W$, então existe uma única transformação multilinear $G : \mathcal{T}_q^p(V) \rightarrow W$ tal que $B = G \circ \otimes$.*

Prova. Da Proposição 1.8 sabemos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base para o espaço $\mathcal{T}_q^p(V)$, assim definimos G , tal que $G(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}) = B(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$, logo pela multilinearidade é possível estender ao espaço todo. Sejam $u_1, \dots, u_p \in V, v_1^*, \dots, v_q^* \in V^*$ temos:

$$\begin{aligned} B(u_1, \dots, u_p, v_1^*, \dots, v_q^*) &= B\left(\sum_{i=0}^{n-1} e^i(u_1)e_i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} e^i(u_p)e_i, \sum_{j=0}^{n-1} v_1^*(e_j)e^j, \dots, \sum_{j=0}^{n-1} v_q^*(e_j)e^j\right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=0 \\ j_1, \dots, j_q=0}}^{n-1} e^{i_1}(u_1) \dots v_q^*(e_{j_q}) B(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=0 \\ j_1, \dots, j_q=0}}^{n-1} e^{i_1}(u_1) \dots v_q^*(e_{j_q}) G(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}) \\ &= G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*) \end{aligned}$$

Agora, suponha existe $G' : \mathcal{T}_q^p(V) \rightarrow W$ tal que $B = G' \circ \otimes$ pela equação anterior chegamos em

$$\begin{aligned} B(u_1, \dots, u_p, v_1^*, \dots, v_q^*) &= G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*) \\ &= G'(u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*) \end{aligned}$$

donde $G \equiv G'$

□

A **propriedade universal** do produto tensorial, essencialmente estabelece que se à aplicação B é multilinear, então o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ vezes}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ vezes}} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{T}_q^p(V) \\
\downarrow B & \nearrow G & \\
W & &
\end{array}$$

1.2.1 Produto direto de matrizes

A seguir, apresentaremos a definição do produto direto de matrizes, também conhecido como produto de Kronecker, embora suas primeiras aparições são atribuídas a Georg Zehfuss ³.

Definição 1.17. *Sejam $A = [a_{i,j}]$ com $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, e $B = [b_{r,s}]$ com $0 \leq r \leq p$, $0 \leq s \leq q$ duas matrizes com entradas complexas, definimos o **produto direto** de A e B sendo a matriz $A \otimes B = [a_{i,j}b_{r,s}]$ da forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & \dots & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.18. *Embora a definição anterior seja clara, na seguinte figura mostramos um exemplo quando $A = B \otimes C$ onde B é uma matriz de ordem 2×2 e C é de ordem 3×3*

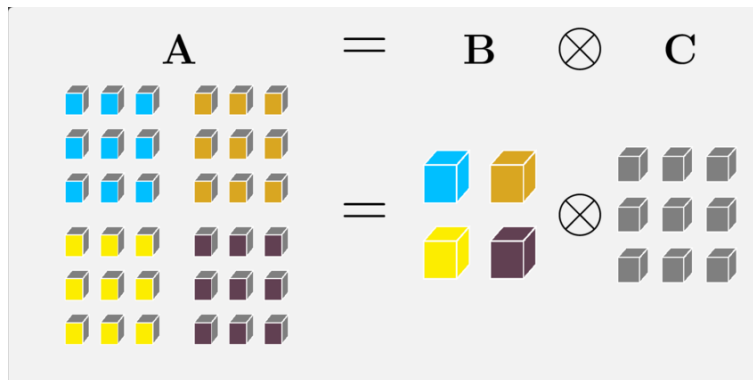


Figura 1.1: Exemplo do produto direto de matrizes

³Ver historia do produto direto de matrizes[HPS83]

Podemos associar o produto direto de matrizes com o **produto tensorial**⁴ considerado na observação 1.15, antes disso temos a seguinte proposição.

Proposição 1.19. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n , sobre um corpo $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\{e_i, e^j\}_{i,j=0}^{n-1}$ um sistema biortogonal para V . Então para cada tensor $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ existe uma única matriz $A \in \text{Mat}(n)$ tal que $A_{i,j} = T(e^j, e_i)$ para todo $i, j = 0, \dots, n-1$.*

Prova. Tomemos o sistema biortogonal $\mathcal{B}$, e um tensor $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$, sabemos pela Proposição 1.8 que o conjunto $\{e_i \otimes e^j\}$ é uma base para $\mathcal{T}_1^1(V)$ daí $T = \sum_{i,j=0}^{n-1} \tau_j^i e_i \otimes e^j$ em que $\tau_j^i = T(e^j, e_i)$, tomemos a matriz $A \in \text{Mat}(n)$ tal que $A_{i,j} = T(e^j, e_i)$. □

Agora estabeleceremos a relação entre o produto tensorial e o produto direto de matrizes. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $\{e_i, e^j\}$ um sistema biortogonal para V , tomemos $T, Q \in \mathcal{T}_1^1(V)$ e as matrizes $\Upsilon, \Phi \in \text{Mat}(n)$ tal que $\Upsilon_{i,j} = T(e^j, e_i)$ e $\Phi_{i,j} = Q(e^j, e_i)$, agora consideraremos a matriz $\Phi \otimes \Upsilon$, segundo a Definição 1.17 temos que $\Phi \otimes \Upsilon_{i,j} = T(e^{j_1}, e_{i_1})Q(e^{j_2}, e_{i_2})$ em que $i = i_1 + ni_2$ e $j = j_1 + nj_2$, daí fazendo $T(e^j, e_i) = \tau_j^i$ e $Q(e^j, e_i) = \phi_j^i$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi \otimes \Upsilon &= \begin{pmatrix} \phi_0^0 \tau_0^0 & \phi_0^0 \tau_0^1 & \dots & \phi_0^0 \tau_0^{n-1} & \phi_0^1 \tau_0^0 & \phi_0^1 \tau_0^1 & \dots & \phi_0^{n-1} \tau_0^{n-1} \\ \phi_0^0 \tau_1^0 & \phi_0^0 \tau_1^1 & \dots & \phi_0^0 \tau_1^{n-1} & \phi_0^1 \tau_1^0 & \phi_0^1 \tau_1^1 & \dots & \phi_0^{n-1} \tau_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0^0 \tau_{n-1}^0 & \phi_0^0 \tau_{n-1}^1 & \dots & \phi_0^0 \tau_{n-1}^{n-1} & \phi_0^1 \tau_{n-1}^0 & \phi_0^1 \tau_{n-1}^1 & \dots & \phi_0^{n-1} \tau_{n-1}^{n-1} \\ \phi_1^0 \tau_0^0 & \phi_1^0 \tau_0^1 & \dots & \phi_1^0 \tau_0^{n-1} & \phi_1^1 \tau_0^0 & \phi_1^1 \tau_0^1 & \dots & \phi_1^{n-1} \tau_0^{n-1} \\ \phi_1^0 \tau_1^0 & \phi_1^0 \tau_1^1 & \dots & \phi_1^0 \tau_1^{n-1} & \phi_1^1 \tau_1^0 & \phi_1^1 \tau_1^1 & \dots & \phi_1^{n-1} \tau_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n-1}^0 \tau_{n-1}^0 & \phi_{n-1}^0 \tau_{n-1}^1 & \dots & \phi_{n-1}^0 \tau_{n-1}^{n-1} & \phi_{n-1}^1 \tau_{n-1}^0 & \phi_{n-1}^1 \tau_{n-1}^1 & \dots & \phi_{n-1}^{n-1} \tau_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_0^0 \Upsilon & \dots & \dots & \phi_0^{n-1} \Upsilon \\ \phi_1^0 \Upsilon & \dots & \dots & \phi_1^{n-1} \Upsilon \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n-1}^0 \Upsilon & \dots & \dots & \phi_{n-1}^{n-1} \Upsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto o tensor $T \otimes Q \in \mathcal{T}_2^2(V)$ pode ser identificado com a matriz $\Phi \otimes \Upsilon$. Esse raciocínio permite-nos estabelecer formalmente o seguinte corolário.

Corolário 1.20. *Para todo tensor $T \in \mathcal{T}_p^p(V)$ e $\{e_i, e_j\}_{i,j=0}^{n-1}$ um sistema ortogonal para*

⁴Considerando as matrizes de transformações lineares ver [Gra18]

V , existe uma única matriz $A \in \text{Mat}(n^p)$ tal que $A_{I,J} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ onde $0 \leq i_k, j_k = n - 1, 1 \leq k \leq p$ e $I = i_1 + i_2n + \dots + i_p n^{p-1}$, $J = j_1 + j_2n + \dots + j_p n^{p-1}$.

A prova decorre do raciocínio previo ao enunciado, porém no terceiro capítulo aprofundaremos mais nesse assunto.

Capítulo 2

Aplicações de Contração-dilatação

Neste capítulo, apresentaremos as aplicações de contração-dilatação. Antes disso, será introduzido o conjunto domínio dessas aplicações. Para isso, consideraremos um conjunto de tuplas inteiras munido de uma ordem, que será usado para indexar matrizes. Por meio de uma função com domínio no conjunto ordenado de índices, e valores inteiros, definiremos uma relação de equivalência, essa relação será à base para criar uma estrutura de álgebra sobre o conjunto domínio das aplicações de contração-dilatação.

2.1 Definição e propriedades elementares

Consideremos o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}^+$ e tomemos $l \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Z}^l$ um subconjunto arbitrário de cardinalidade m , com $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, e seja “ $\prec$ ” uma relação de ordem total em $\mathbb{A}$.

Definição 2.1. *Seja T uma matriz quadrada de ordem m , dizemos que T é indexada pelo conjunto $\mathbb{A}$ se T tem a seguinte forma*

$$T = [T_{\bar{i}, \bar{j}}]_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}}$$

e se $\bar{i} \prec \bar{j}$ então a linha $\bar{i}$ aparece acima da linha $\bar{j}$, e a coluna $\bar{i}$ está mais para esquerda do que a coluna $\bar{j}$. E para cada $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}$ existe a entrada $T_{\bar{i}, \bar{j}} \in \mathbb{C}$.

Dito isto, vamos denotar o conjunto das matrizes T indexadas pelo conjunto $\mathbb{A}$ como $\text{Mat}(\mathbb{A})$.

Observação 2.2. *No caso $l = 1$ e $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ denotaremos $\text{Mat}(\mathbb{A}) = \text{Mat}(\infty)$.*

Exemplo 2.3. *Pretendemos com este exemplo esclarecer como são as matrizes do conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$.*

1. Seja $\mathbb{A} = \{(-1, 1) \prec (0, -1) \prec (2, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$. Um elemento do conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$ é da forma

$$\begin{matrix} & (-1, 1) & (0, -1) & (2, 1) \\ \begin{matrix} (-1, 1) \\ (0, -1) \\ (2, 1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \end{matrix} \in \text{Mat}(\mathbb{A}).$$

Porém,

$$\begin{matrix} & (-1, 1) & (2, 1) & (0, -1) \\ \begin{matrix} (-1, 1) \\ (2, 1) \\ (0, -1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} \end{matrix} \notin \text{Mat}(\mathbb{A})$$

pois as linhas e colunas não seguem a ordem do conjunto $\mathbb{A}$. Além disso,

$$\begin{matrix} & (-1, 1) & (2, 1) \\ \begin{matrix} (0, -1) \\ (2, 1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \end{matrix} \notin \text{Mat}(\mathbb{A})$$

pois a mesma, não é quadrada de ordem $|\mathbb{A}|$.

2. Pode parecer redundante pedir que para cada par de elementos $\bar{i}, \bar{j}$ no conjunto $\mathbb{A}$ exista a entrada $T_{\bar{i}, \bar{j}}$ na matriz T para pertencer ao conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$. Porém não é o caso, tomemos $l = 1$ e $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$

$$T = \begin{matrix} & 0 & 2 & 4 \\ \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a & b & c & \cdots \\ \cdots & d & e & f & \cdots \\ \cdots & g & h & i & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ \end{matrix} \end{matrix}$$

A matriz T , é de ordem $|\mathbb{A}|$, suas linhas e colunas são os inteiros pares, e suas linhas e colunas respeitam a ordem usual dos inteiros, porém, T não satisfaz a definição 2.1 dado que não existe a linha 1.

Em seguida, vamos considerar uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{A}$ induzida por uma função $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$, e por meio da função F vão ser definidas as aplicações de contração-dilatação para tensores .

Para cada $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$, definimos a relação de equivalência $\sim_F$ no conjunto $\mathbb{A}$, da

seguinte forma:

$$\bar{i} \sim_F \bar{j} \text{ se, e somente se, } F(\bar{i}) = F(\bar{j}).$$

Das propriedades da igualdade vemos que, com efeito, $\sim_F$ é uma relação de equivalência.

Exemplo 2.4. Neste exemplo vamos dar alguns exemplos para o conjunto $\mathbb{A}$ e funções de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{Z}$, considerando também as classes de equivalência geradas a partir da relação $\sim_F$.

1. Seja $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Z}^l$. Para cada $\bar{k} = (k_1, \dots, k_l) \in \mathbb{Z}^l$, e $\mathbb{A} \ni \bar{i} = (i_1, \dots, i_l)$ definimos a função

$$\begin{aligned} F_{\bar{k}}: \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \bar{i} &\longmapsto F_{\bar{k}}(\bar{i}) := \bar{k} \cdot \bar{i} = \sum_{s=1}^l k_s i_s \end{aligned}$$

podemos ver que “ $\cdot$ ” é o produto ponto em $\mathbb{C}^l$. Notemos que, $\bar{i} \sim_{F_{\bar{k}}} \bar{j}$ se, e somente se, $(\bar{i} - \bar{j})$ e $\bar{k}$ são ortogonais, pois:

$$\bar{i} \sim_{F_{\bar{k}}} \bar{j} \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow F_{\bar{k}}(\bar{i}) - F_{\bar{k}}(\bar{j}) \Leftrightarrow \bar{k} \cdot \bar{i} - \bar{k} \cdot \bar{j} \Leftrightarrow \bar{k} \cdot (\bar{i} - \bar{j}).$$

2. Seja $\mathbb{A} = \{(-1, 1) \prec (0, -1) \prec (1, 1) \prec (2, 2)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Para cada $\bar{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, consideremos a função

$$\begin{aligned} M_{\bar{k}}: \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \bar{i} &\longmapsto M_{\bar{k}}(\bar{i}) := \max\{k_1 + i_1, k_2 + i_2\} \end{aligned}$$

Na seguinte tabela podemos visualizar, em cada coluna, a imagem de $\bar{i} \in \mathbb{A}$ via $M_{\bar{k}}$, dependendo da relação entre k_1 e k_2 .

	$k_1 = k_2$	$k_1 > k_2 + 1$	$k_2 > k_1$
$(-1, 1)$	$k_1 + 1$	$k_1 - 1$	$k_2 + 1$
$(0, -1)$	k_1	k_1	$k_2 - 1$
$(1, 1)$	$k_1 + 1$	$k_1 + 1$	$k_2 + 1$
$(2, 2)$	$k_1 + 2$	$k_1 + 2$	$k_2 + 2$

De acordo com a tabela, da relação de equivalência $\sim_{M_{\bar{k}}}$ obtemos os seguintes conjuntos de classes de equivalência, cujas classes estão ressaltadas segundo a cor.

- Se $k_1 = k_2$ ou $k_2 > k_1$, então as classes de equivalência são:

$$\{(-1, 1), (1, 1)\}, \quad \{(0, -1)\} \quad e \quad \{(2, 2)\}$$

- Se $k_1 > k_2 + 1$, então as classes de equivalência são:

$$\{(-1, 1)\}, \quad \{(0, -1)\}, \quad \{(1, 1)\} \quad e \quad \{(2, 2)\}.$$

3. Sejam $l, k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Z}^l$ e consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \bar{x} &\longmapsto F(\bar{x}) := x_1^k + x_2^k + \cdots + x_l^k. \end{aligned}$$

Da relação de equivalência induzida por F temos que as classes de equivalência são:

$$C_m = \{\bar{x} \mid x_1^k + x_2^k + \cdots + x_l^k = m\}, \quad \text{com } m \in \mathbb{Z}.$$

Podemos ver que quando $k = 2$ cada classe de equivalência está conformada por pontos sobre à esfera centrada na origem e raio $\sqrt{m}$. Vejamos gráficamente as classes C_2 e C_3 quando $l = 3$.

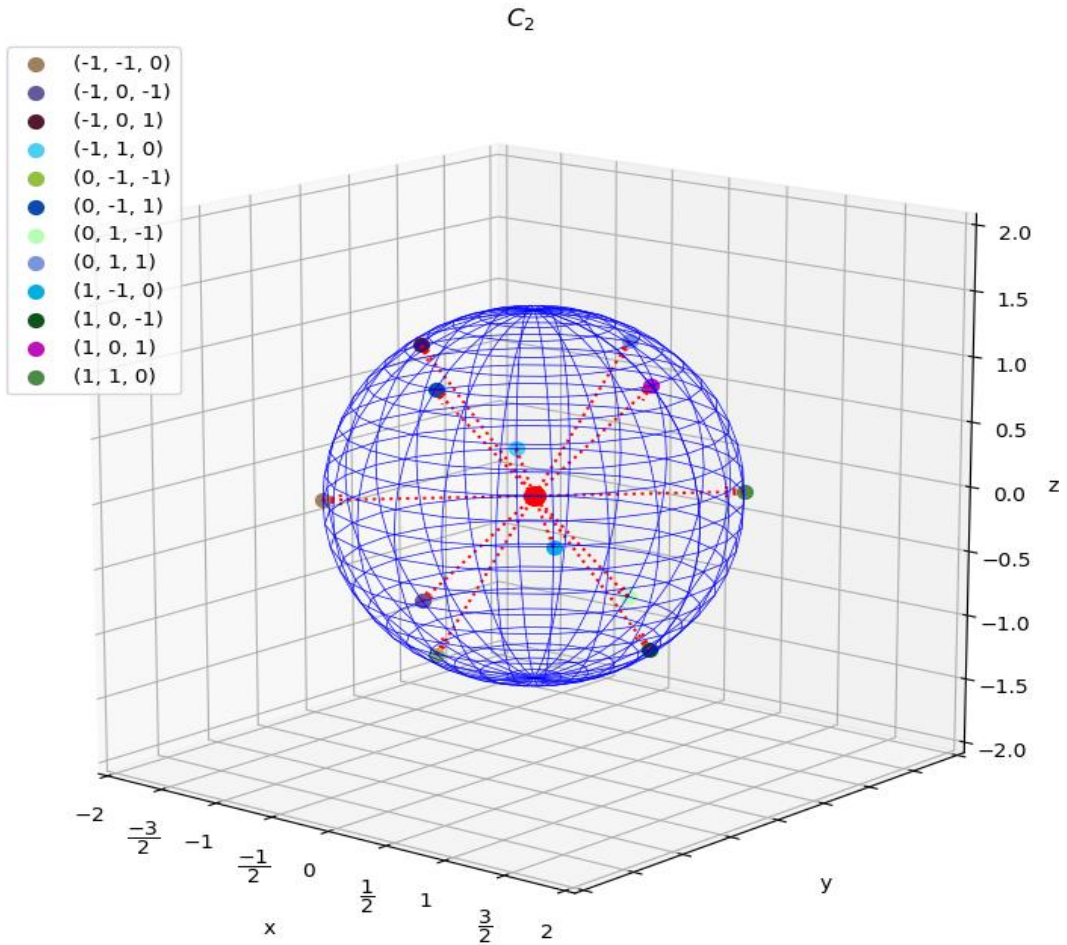


Figura 2.1: Classe de equivalência C_2

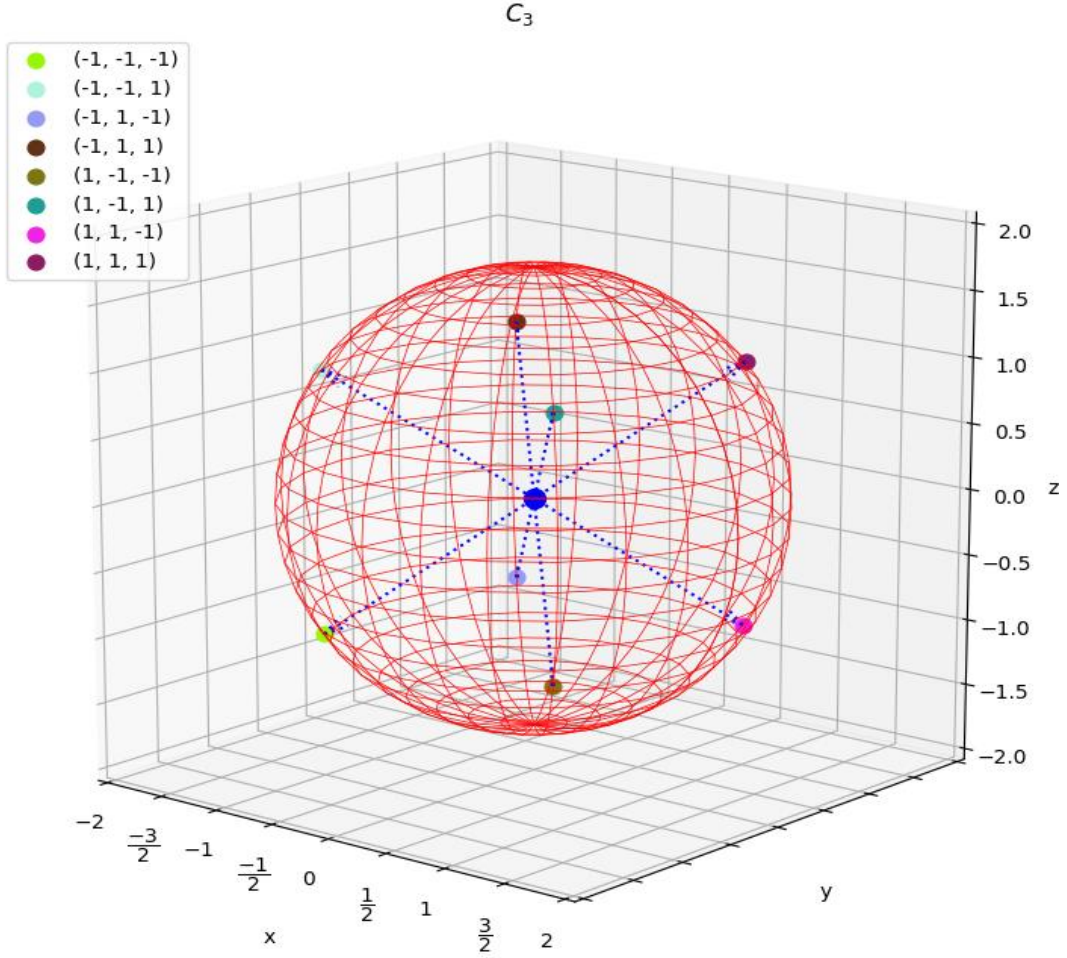


Figura 2.2: Classe de equivalência C_3

Antes de definir as aplicações de contração-dilatação, é necessário compreender como se define uma matriz básica no conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$. Lembremos que, se $\mathbb{A} = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}$, uma base para $\text{Mat}(\mathbb{A})$ é composta pelas matrizes $E_{i,j}$, onde a entrada (r, s) -ésima é dada por $\delta_{i,r}\delta_{j,s}$, como definido no Exemplo 1.7. De maneira análoga definimos $E_{\bar{i},\bar{j}}$ em que a $(\bar{r}, \bar{s})$ -ésima entrada é dada por $\delta_{\bar{r},\bar{i}}\delta_{\bar{s},\bar{j}}$.

Exemplo 2.5.

1. Consideremos o conjunto $\mathbb{A} = \{(-1, 1) \prec (0, -1) \prec (2, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$ do Exemplo 2.3 item 1. Fazendo $(-1, 1) = \bar{i}$, $(0, -1) = \bar{j}$, $(2, 1) = \bar{k}$ vejamos as nove matrizes elementares de $\text{Mat}(\mathbb{A})$:

$$E_{\bar{i},\bar{i}} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} \quad E_{\bar{i},\bar{j}} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} \quad E_{\bar{i},\bar{k}} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
E_{\bar{j},\bar{i}} &= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} & E_{\bar{j},\bar{j}} &= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} & E_{\bar{j},\bar{k}} &= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} \\
E_{\bar{k},\bar{i}} &= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} & E_{\bar{k},\bar{j}} &= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} & E_{\bar{k},\bar{k}} &= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix}
\end{aligned}$$

2. Consideremos $\mathbb{A} = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ com a ordem lexicográfica¹, algumas matrizes básicas para $\text{Mat}(\mathbb{A})$ são:

$$\begin{aligned}
E_{(1,2),(2,4)} &= \begin{pmatrix} \begin{matrix} (1,2) & (2,4) & (3,6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1,2) \\ (2,4) \\ (3,6) \end{matrix} \\
E_{(2,4),(3,6)} &= \begin{pmatrix} \begin{matrix} (1,2) & (2,4) & (3,6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1,2) \\ (2,4) \\ (3,6) \end{matrix}.
\end{aligned}$$

De agora em diante, para cada conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Z}^l$ denotaremos por $\mathbb{S}$ o conjunto

$$\mathbb{S} := \left\{ T \in \text{Mat}(\mathbb{A}) \mid \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} |T_{\bar{i}, \bar{j}}| < \infty \right\}.$$

Definição 2.6. Para cada $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$, arbitraria porém fixa, definamos a aplicação

$$\begin{aligned}
\rho_F : \mathbb{S} \subseteq \text{Mat}(\mathbb{A}) &\longrightarrow \text{Mat}(\infty) \\
T &\longmapsto \rho_F(T) := \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{j}} E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})}
\end{aligned}$$

¹ $(a, b) \leq (x, y)$ se e somente se $a \leq x$ ou $a = x$ e $b \leq y$

ρ_F será chamada de aplicação de contração-dilatação associada à função F .

Observação 2.7. Notemos que a (r, s) -ésima entrada da matriz $\rho_F(T)$ é dada por :

$$\rho_F(T)_{r,s} = \begin{cases} \sum_{\substack{\bar{i} \in F^{-1}(r) \\ \bar{j} \in F^{-1}(s)}} T_{\bar{i}, \bar{j}}, & \text{se } r, s \in F(\mathbb{A}), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, temos que:

1. A condição de definir ρ_F sobre $\mathbb{S}$, é para garantir a convergência de $\rho_F(T)_{r,s}$ quando $F^{-1}(r)$ ou $F^{-1}(s)$ é um conjunto infinito, pois, pela desigualdade triangular:

$$|\rho_F(T)_{r,s}| \leq \sum_{\substack{\bar{i} \in F^{-1}(r) \\ \bar{j} \in F^{-1}(s)}} |T_{\bar{i}, \bar{j}}| \leq \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} |T_{\bar{i}, \bar{j}}|.$$

2. Note que $\rho_F(T)$ é uma matriz infinita, sem perda de generalidade, representaremos a matriz $\rho_F(T)$ pela submatriz desta, indexada pelo conjunto $F(\mathbb{A})$ com a ordem usual em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 2.8. A continuação, vamos ver alguns exemplos da aplicação de contração-dilatação. Nos dois primeiros exemplos $\mathbb{A}$ é finito, enquanto o terceiro abordará o caso infinito chamando atenção para a convergência.

1. Sejam $\mathbb{A} = \{(0,0) \prec (0,1) \prec (1,0) \prec (1,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$, $\bar{k} = (1,2)$ e $F_{\bar{k}}$ como no Exemplo 2.4 item 1. Notemos que as imagens dos elementos de $\mathbb{A}$ pela aplicação $F_{\bar{k}}$ são:

$\bar{i}$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$F_{\bar{k}}(\bar{i})$	0	2	1	3

Tomemos $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$

$$\begin{matrix} & (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & i & 3 & \frac{1}{5} \\ 4 & 2i & -1 & 5 \\ -i & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & -1-i \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\rho_F} \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2i & 5 \\ \frac{1}{4} & 3 & i & \frac{1}{5} \\ -i & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & 1-i \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Vale a pena destacar que neste caso $F_{\bar{k}}$ é injetiva e mais para frente vamos observar, se F é injetiva, a aplicação ρ_F “herda” dita propriedade.

2. Sejam $\mathbb{A}$ e $M_{\bar{k}}$ como no Exemplo 2.4 item 2, com $\bar{k} = (1, 2)$. Na seguinte tabela se mostram as imagens dos elementos de $\mathbb{A}$ pela aplicação $M_{\bar{k}}$

$\bar{i}$	$(-1, 1)$	$(0, -1)$	$(1, 1)$	$(2, 2)$
$M_{\bar{k}}(\bar{i})$	3	1	3	4

Dada $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} (-1, 1) & (0, -1) & (1, 1) & (2, 2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (-1, 1) \\ (0, -1) \\ (1, 1) \\ (2, 2) \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\rho_F} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} f & e+g & h \\ b+j & a+c+i+k & d+l \\ n & m+o & p \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

3. Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}$ uma sequência de números complexos tal que $|z_{n+1}| = \lambda|z_n|$ com $\lambda \in (0, 1)$, $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$, F definida assim:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \bar{i} &\longmapsto F(\bar{i}) := i \pmod{3}. \end{aligned}$$

Agora consideremos a matriz $T \in \text{Mat } \mathbb{A}$ com entradas $T_{\bar{i}, \bar{j}} = z_{i \cdot j}$ para todo $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}$, sendo que “ $\cdot$ ” denota o produto dos inteiros.

Vejamos por quê a matriz T pertence ao conjunto S .

Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\infty} |z_{i \cdot j}| &= |z_1| \sum_{i,j=1}^{\infty} (\lambda^i)^j \\ &= |z_1| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \lambda^i} - 1 \\ &= |z_1| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{1 - \lambda^i} \\ &\leq |z_1| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{1 - \lambda} \\ &= \frac{|z_1|}{1 - \lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \\ &= \frac{|z_1|}{(1 - \lambda)^2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Portanto, $T \in \mathbb{S} \subset \mathbb{A}$. Agora, vejamos como é $\rho_F(T)$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{3i \cdot 3j} & \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{3i(3j+1)} & \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{3i(3j+2)} \\ \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{(3i+1)3j} & \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{(3i+1)(3j+1)} & \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{(3i+1)(3j+2)} \\ \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{(3i+2)3j} & \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{(3i+2)(3j+1)} & \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{(3i+2)(3j+2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Segue do mostrado na equação 2.1 que todas as entradas de $\rho_F(T)$ são somas convergentes.

A definição 2.1 limita-se à indexação de matrizes quadradas por meio do conjunto $\mathbb{A}$. Para indexar algum outro conjunto por $\mathbb{A}$, torna-se necessário esclarecer o quê isso significa. Com esse objetivo, introduziremos um novo conjunto indexado por $\mathbb{A}$.

Definição 2.9. *Seja $l \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Z}^l$, “ $\prec$ ” uma relação de ordem total em $\mathbb{A}$ com $m = |\mathbb{A}|$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $\mathbf{x}$ uma m -upla com entradas complexas, dizemos que $\mathbf{x}$ esta indexada pelo conjunto $\mathbb{A}$ se:*

$$\mathbf{x} = (x_{\bar{i}}, x_{\bar{j}}, \dots, x_{\bar{k}}, \dots)$$

onde $\bar{i} \prec \bar{j} \prec \bar{k}$ e para todo $\bar{i} \in \mathbb{A}$ existe a entrada $x_{\bar{i}}$ em $\mathbf{x}$. Denotamos por $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ o conjunto das tuplas complexas indexadas pelo conjunto $\mathbb{A}$.

Exemplo 2.10. *Seja $\mathbb{A} = \{(-1, 1) \prec (0, -1) \prec (1, 1) \prec (2, 2)\} \subset \mathbb{Z}^2$, o vetor $\mathbf{x}$ dado por:*

$$\begin{pmatrix} (-1, 1) & (0, -1) & (1, 1) & (2, 2) \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}.$$

$\mathbb{C}^{\infty}$ é o caso quando $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. Além disso, o conjunto $\{e_{\bar{i}}\}_{\bar{i} \in \mathbb{A}}$ é uma base para $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$

em que $e_{\bar{i}} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \bar{i} & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & \dots \end{pmatrix}$.

A seguir, introduziremos a aplicação de contração-dilatação para vetores no conjunto $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$. Para isso, consideremos o seguinte subconjunto de $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$.

$$\mathbb{M} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}} \mid \left(\sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}} |\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}} \right)^2 < \infty \right\}.$$

Definição 2.11. *Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$, $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ fixa, e definimos:*

$$\begin{aligned} \rho_F^0 : \mathbb{M} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{A}} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\infty} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \rho_F^0(\mathbf{x}) := \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}} \mathbf{x}_{\bar{i}} e_{F(\bar{i})} \end{aligned}$$

Vamos chamar ρ_F^0 como aplicação contração-dilatação para vetores.

Observação 2.12. A restrição de ρ_F^0 ao conjunto $\mathbb{M}$ considera as mesmas condições contempladas na observação 2.7, e sem perda de generalidade vamos notar $\rho_F^0(T)$ como o vetor indexado pelo conjunto $F(\mathbb{A})$.

Exemplo 2.13. Seja $\mathbb{A} = \mathbb{N}^2$ com a ordem lexicográfica, e a função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \bar{i} &\longmapsto F(\bar{i}) := \left\lfloor \frac{i_1 + i_2}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Note que as classes de equivalência C_n para $n \in \mathbb{Z}$ são vazias se $n \leq 0$ e se $n \geq 1$ estão dadas por:

$$C_n = \{(i_1, i_2) \in \mathbb{A} \mid i_2 = 2n + 1 - i_1 \text{ e } i_1 < 2n\},$$

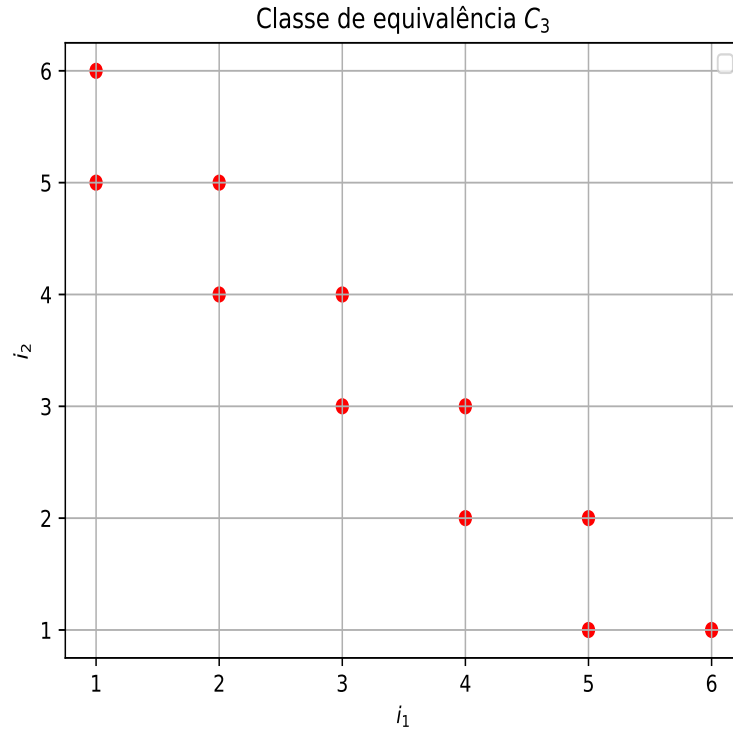


Figura 2.3: Classe de equivalência C_3

e seja $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ tal que $\mathbf{x}_{(i_1, i_2)} = (1 + i_1^2)^{-i_2}$. Tomando $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ e aplicando ρ_F^0 obtemos:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (2,1) \\ \alpha & \beta & \dots & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho_F^0} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha + \beta + \gamma & \sum_{i_1 < 4} \mathbf{x}_{(i_1, 5-i_1)} & \dots & \sum_{i_1 < 2n} \mathbf{x}_{(i_1, 2n+1-i_1)} \end{pmatrix}$$

A seguir, com intenção de aprofundar más o estudo da estrutura sobre os espaços indexados pelo conjunto $\mathbb{A}$, introduzimos um produto interno em $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$, quando $\mathbb{A}$ é um conjunto finito.

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$, e fixemos $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F = \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} \quad (2.2)$$

A notação $\bar{i} \sim_F \bar{j}$ significa, que, para $\bar{i} \in \mathbb{A}$ fixo, somamos através dos índices $\bar{j}$ relacionados com ele.

Exemplo 2.14. Consideremos o conjunto $\mathbb{A}$, $\bar{k} = (0, 0)$ e $M_{\bar{k}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ como no Exemplo 2.4 item 2. $\mathbb{A} := \{(-1, 1) \prec (0, -1) \prec (1, 1) \prec (2, 2)\}$, $M_{\bar{k}}(\bar{i}) = \max\{k_1 + i_1, k_2 + i_2\}$. As classes de equivalência estão dadas por:

$$\{(-1, 1), (1, 1)\}, \quad \{(0, -1)\} \quad e \quad \{(2, 2)\},$$

tomemos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ e calculemos seu produto interno.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{M_{\bar{k}}} = (\mathbf{x}_{(-1,1)} + \mathbf{x}_{(1,1)}) (\overline{\mathbf{y}_{(-1,1)}} + \overline{\mathbf{y}_{(1,1)}}) + \mathbf{x}_{(0,-1)} \overline{\mathbf{y}_{(0,-1)}} + \mathbf{x}_{(2,2)} \overline{\mathbf{y}_{(2,2)}}.$$

Uma verificação simples nos permite mostrar que, de fato, constitui um produto interno. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ e $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_F &= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{x}_{\bar{j}}} \\ &= \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}/\sim_F} \sum_{\bar{l} \sim_F \bar{i}} \sum_{\bar{j} \sim_F \bar{i}} \mathbf{x}_{\bar{l}} \overline{\mathbf{x}_{\bar{j}}} \\ &= \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}/\sim_F} \left| \sum_{\bar{l} \sim_F \bar{i}} \mathbf{x}_{\bar{l}} \right|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F &= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} \\ &= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \overline{\mathbf{x}_{\bar{i}} \mathbf{y}_{\bar{j}}} \\ &= \sum_{\bar{j} \sim_F \bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{i}}} \\ &= \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_F} \end{aligned}$$

e por último, seja $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{z}), \mathbf{y} \rangle_F &= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} (\lambda \mathbf{x}_{\bar{i}} + \mathbf{z}_{\bar{i}}) \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} \\ &= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \lambda \mathbf{x}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} + \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \mathbf{z}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} \\ &= \lambda \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} + \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \mathbf{z}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle_F \end{aligned}$$

Uma vez apresentado o produto interno, apresentamos à ação de $\text{Mat}(\mathbb{A})$ sobre $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$,

$$\begin{aligned} * : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \subseteq \text{Mat}(\mathbb{A}) \times \mathbb{C}^{\mathbb{A}} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}} \\ (T, \mathbf{x}) &\longmapsto (T * \mathbf{x}) := \sum_{\bar{i}, \bar{j} \sim \bar{l}} T_{\bar{i}, \bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{l}} e_{\bar{i}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observação 2.15. 1. Para vetores na base de $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$

$$\langle e_{\bar{i}}, e_{\bar{j}} \rangle_F = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{i} \sim_F \bar{j} \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

2. A aplicação de contração-dilatação definida em 2.11 toma a seguinte forma:

$$\rho_F^0 = (\mathbf{x}) \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle \mathbf{x}, e_{\bar{i}} \rangle_F e_{\bar{i}}.$$

3. A aplicação de contração-dilatação apresentada em 2.6 toma a forma:

$$\rho_F(T) = \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle T * e_{\bar{i}}, e_{\bar{j}} \rangle_F E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})}.$$

Exemplo 2.16. Agora vamos ver alguns exemplos da ação definida em 2.5

1. Tomemos o conjunto $\mathbb{A}$ e a função F como no Exemplo 2.4 item 2, na tabela do Exemplo 2.8 item 2 são mostradas as classes de equivalência. Tomemos $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ e $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$:

$$T = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (-1, 1) & (0, -1) & (1, 1) & (2, 2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1, 1) \\ (0, -1) \\ (1, 1) \\ (2, 2) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1, 1) \\ (0, -1) \\ (1, 1) \\ (2, 2) \end{pmatrix}$$

Logo

$$T * \mathbf{x} = \begin{pmatrix} (a+c)(\alpha+\gamma) + b\beta + d\delta \\ (e+g)(\alpha+\gamma) + f\beta + h\delta \\ (i+k)(\alpha+\gamma) + j\beta + l\delta \\ (m+o)(\alpha+\gamma) + n\beta + p\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1, 1) \\ (0, -1) \\ (1, 1) \\ (2, 2) \end{pmatrix}$$

2. Novamente podemos considerar o quê acontece quando tivermos pelo menos uma classe de equivalência infinita. Sejam $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}, T \in \text{Mat}(\mathbb{A}), F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$

como no Exemplo 2.8 item 3, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ tal que $x_{\bar{i}} = z_i$ então temos que:

$$T * \mathbf{x} = \left(\begin{array}{ccc} \dots & & \dots \\ \dots & \sum_{l,k=0}^{\infty} z_{3l+1} z_{i(3k+1)} + \sum_{l,k=0}^{\infty} z_{3l+2} z_{\bar{i}(3k+2)} + \sum_{l,k=1}^{\infty} z_{3l} z_{3ik} & \dots \end{array} \right)$$

Lembremos do Exemplo 2.8 item 3 que a sequência (z_n) tem a seguinte propriedade $|z_{n+1}| = \lambda |z_n|$ portanto podemos garantir a convergência das 3 series anteriores.

Notemos que dependendo da escolha da função F são permitidas permutações arbitrárias sobre as entradas da matriz $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ no momento de calcular $\rho_F(T)$. A saber, sejam $\varphi_\sigma : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$, $F_1 : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{Z}$, $F_2 : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{Z}$ duas funções injetivas tal que $F_1 = F_2 \circ \varphi_\sigma$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & \mathbb{A} \\ \downarrow F_1 & \searrow F_2 & \\ \mathbb{Z} & & \end{array} \quad (2.6)$$

podemos observar que $\rho_{F_1}(T) = \rho_{F_2 \circ \varphi_\sigma}(T)$.

Agora, vejamos como pode ser definida a aplicação φ_σ satisfazendo o diagrama acima. Seja σ arbitrária, porém fixa no grupo das permutações de l elementos S_l , definimos $\hat{\sigma}$ como segue:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} : \mathbb{Z}^l &\longrightarrow \mathbb{Z}^l \\ \bar{i} &\longmapsto \hat{\sigma}(\bar{i}) := (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(l)}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

é fácil ver que $\hat{\sigma}$ é uma aplicação bijetiva, com efeito, sejam $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}^l$ tais que $\hat{\sigma}(\bar{i}) = \hat{\sigma}(\bar{j})$, assim para $k = 1, \dots, l$ temos que $i_{\sigma(k)} = j_{\sigma(k)}$. Tomemos $s \in \{1, \dots, l\}$, σ é uma bijeção, logo existe um único $r \in \{1, \dots, l\}$ tal que $\sigma(r) = s$, portanto, $i_s = i_{\sigma(r)} = j_{\sigma(r)} = j_s$, então $\bar{i} = \bar{j}$ e $\hat{\sigma}$ é injetiva. Por outro lado, sejam $\bar{i} \in \mathbb{Z}^l$, $\sigma^{-1} \in S_l$ a permutação inversa de σ e $\bar{k} \in \mathbb{Z}^l$ tais que $k_s = i_{\sigma^{-1}(s)}$ para todo $s = 1, \dots, l$, daqui $\hat{\sigma}(\bar{k}) = \bar{i}$ e concluímos que $\hat{\sigma}$ é bijetiva.

A seguir, vamos considerar $\varphi_\sigma = \hat{\sigma} \mid_{\mathbb{A}}$. Estamos interessados em saber qual é o comportamento de $\hat{\sigma}$ no conjunto $\mathbb{A}$, e estabeleceremos uma conexão entre $\hat{\sigma}$ e ρ_F , para isso, introduziremos a aplicação $R_{\hat{\sigma}}$.

Definição 2.17. Para cada $\sigma \in S_l$ tal que $\hat{\sigma}(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$, definimos o operador de permutação :

$$\begin{aligned} R_{\hat{\sigma}} : \text{Mat}(\mathbb{A}) &\longrightarrow \rho_F(\text{Mat}(\mathbb{A})) \subseteq \text{Mat}(\infty) \\ T &\longmapsto R_{\hat{\sigma}}(\rho_F(T)) := \rho_{F \circ \hat{\sigma}}(T) \end{aligned}$$

Notemos que a condição de $\widehat{\sigma}(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$ não é sem motivo, pois caso não for satisfeita R_σ não está bem definida. Além disso vejamos que $\widehat{\sigma}(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$ implica que $\mathbb{A} = \widehat{\sigma}(\mathbb{A})$.

Proposição 2.18. *Seja $\sigma \in S_l$ e $\widehat{\sigma}$ como se definiu em 2.7 tal que $\widehat{\sigma}(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$, então $\mathbb{A} \subset \widehat{\sigma}(\mathbb{A})$.*

Prova. Sejam $\bar{i} \in \mathbb{A}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$ a ordem de $\sigma \in S_l$, temos que $\widehat{\sigma}(\bar{i}) = \bar{k}_1 \in \mathbb{A}$, aplicando novamente $\widehat{\sigma}(\bar{k}_1) = \widehat{\sigma}^2(\bar{i}) = \bar{k}_2 \in \mathbb{A}$, continuando assim chegamos em $\bar{k}_m = \widehat{\sigma}^{m-1}(\bar{i}) \in \mathbb{A}$, logo $\widehat{\sigma}(\bar{k}_m) = \bar{i}$, portanto $\bar{i} \in \widehat{\sigma}(\mathbb{A})$. □

Agora vamos ver, que de fato $R_{\widehat{\sigma}}$ está bem definida:

Suponhamos $\widehat{\sigma}(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$. Sejam $T_1, T_2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ se $T_1 = T_2$

$$\begin{aligned} R_{\widehat{\sigma}}(\rho_F(T_1)) &= \rho_{F \circ \widehat{\sigma}}(T_1) \\ &= \rho_{F \circ \widehat{\sigma}}(T_2) \\ &= R_{\widehat{\sigma}}(\rho_F(T_2)) \end{aligned}$$

Agora vamos ver um exemplo da aplicação $R_{\widehat{\sigma}}$ apresentando a relação exibida no diagrama 2.6

Exemplo 2.19. 1. *Seja $\sigma = (123) \in S_3$ $\mathbb{A} = \{(2, 3, 1) \prec (3, 1, 2) \prec (1, 2, 3)\} \subset \mathbb{Z}^l$. Agora tomemos alguma matriz $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ dada por:*

$$\begin{matrix} & (2, 3, 1) & (3, 1, 2) & (1, 2, 3) \\ \begin{matrix} (2, 3, 1) \\ (3, 1, 2) \\ (1, 2, 3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e consideremos as funções F, M como segue:

$$\begin{array}{ll} F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z} & M : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \bar{i} \longmapsto F(\bar{i}) := i_1 & \bar{i} \longmapsto M(\bar{i}) := i_3 \end{array}$$

Vamos calcular agora $\rho_F(T)$, $\rho_M(T)$ e $\rho_{F \circ \widehat{\sigma}}(T)$:

$$\begin{matrix} \rho_F(T) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix} i & g & h \\ c & a & b \\ f & d & e \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \rho_M(T) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\rho_{F \circ \hat{\sigma}}(T) = \begin{pmatrix} \overset{1}{a} & \overset{2}{b} & \overset{3}{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2. \\ 3 \end{matrix}$$

Logo, $\rho_M(T) = \rho_{F \circ \hat{\sigma}}(T)$, portanto são permitidas as permutações sobre as entradas da matriz $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$.

Observação 2.20. É importante resaltar que neste caso as matrizes $\rho_F(T)$ e $\rho_M(T)$ são semelhantes, pois:

$$\rho_M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & g & h \\ c & a & b \\ f & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver a matriz $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é ortogonal i.e $U^{-1} = U^t$, e é chamada matriz de permutação. Quando uma matriz é multiplicada a direita por uma matriz de permutação, suas colunas são permutadas, e quando é multiplicada a esquerda suas linhas são permutadas.

2. Seja $\mathbb{A} = \{\bar{i} \in \mathbb{Z}^2 \mid i_1 + i_2 = 0\}$ com a ordem lexicográfica, $\sigma = (12) \in S_2$ e a função F como segue:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \bar{i} &\longmapsto F(\bar{i}) := \min\{i_1, i_2\} \end{aligned}$$

Tomamos uma matriz $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$.

$$T = \begin{pmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & a & b & c & d & e & \dots \\ \dots & 0 & f & g & h & i & \dots \\ \dots & 0 & 0 & j & k & l & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & m & n & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & o & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2, 2) & (-1, 1) & (0, 0) & (1, -1) & (2, -2) \\ (-2, 2) \\ (-1, 1) \\ (0, 0) \\ (1, -1) \\ (2, -2) \end{matrix}$$

prosequimos com $R_\sigma(\rho_F(T))$, que é dado por:

$$\begin{pmatrix} & -2 & -1 & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & o+e+a & b+d & c & \dots \\ \dots & n+i & m+h+f & g & \dots \\ \dots & l & k & j & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}.$$

A seguir veremos como as características de ρ_F e F estabelecem relações entre as aplicações.

Proposição 2.21. *Seja $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Se ρ_F é sobrejetiva então F é sobrejetiva.*

Prova. Suponhamos ρ_F é sobrejetiva. Sejam $M \in \text{Mat}(\infty)$, $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $M_{r,s} \neq 0$ pela suposição inicial, existe $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ tal que $\rho_F(T) = M$, da definição de ρ_F concluímos que $r, s \in F(\mathbb{A})$ $\square$

Proposição 2.22. *Sejam $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\sigma \in S_l$ tal que $\widehat{\sigma}(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$. Se ρ_F é sobrejetiva então R_σ é um isomorfismo de espaço vetoriais sobre $\text{Mat}(\infty)$.*

Prova. Vamos provar primeiro a sobrejetividade da aplicação R_σ .

- Tomemos $T \in \text{Mat}(\infty)$, então existe $M \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ de tal forma que $\rho_F(M) = T$, agora se consideramos $P \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ tal que $P_{\bar{i}, \bar{j}} = M_{\widehat{\sigma}(\bar{i}), \widehat{\sigma}(\bar{j})}$, daí segue que,

$$R_\sigma(P) = \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} P_{\bar{i}, \bar{j}} E_{F(\widehat{\sigma}(\bar{i})), F(\widehat{\sigma}(\bar{j}))} = \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} M_{\widehat{\sigma}(\bar{i}), \widehat{\sigma}(\bar{j})} E_{F(\widehat{\sigma}(\bar{i})), F(\widehat{\sigma}(\bar{j}))} = \rho_F(M) = T.$$

Portanto R_σ é sobrejetora. Agora vejamos que é injetora,

- Sejam $T^1, T^2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ tais que $R_\sigma(T^1) = R_\sigma(T^2)$, daí temos que, para cada $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}$

$$\sum_{\substack{\bar{r} \in F^{-1}(\sigma(\bar{i})), \\ \bar{s} \in F^{-1}(\sigma(\bar{j}))}} T_{\bar{r}, \bar{s}}^1 = \sum_{\substack{\bar{r} \in F^{-1}(\sigma(\bar{i})), \\ \bar{s} \in F^{-1}(\sigma(\bar{j}))}} T_{\bar{r}, \bar{s}}^2$$

logo, segue que $T^1 = T^2$. $\square$

Proposição 2.23 ([FNZ24]). *Suponha que $\sigma_1, \sigma_2 \in S_l$ e $\widehat{\sigma}_p(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$, $p = 1, 2$ Então*

$$R_{\widehat{\sigma}_1} R_{\widehat{\sigma}_2} = R_{\widehat{\sigma}_2 \widehat{\sigma}_1} ; R_{\widehat{\sigma}_1}^{-1} = R_{\widehat{\sigma}_1^{-1}}$$

Prova. Seja $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ e

$$\begin{aligned} R_{\hat{\sigma}_1} R_{\hat{\sigma}_2}(\rho_F(T)) &= R_{\hat{\sigma}_1}(\rho_{F \circ \hat{\sigma}_2})(T) \\ &= \rho_{F \circ \hat{\sigma}_2 \circ \hat{\sigma}_1}(T) \\ &= R_{\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1}(\rho_F(T)) \end{aligned}$$

Agora vamos provar a outra igualdade:

$$\begin{aligned} R_{\hat{\sigma}_1^{-1}} R_{\hat{\sigma}_1}(\rho_F(T)) &= R_{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_1^{-1}}(\rho_F(T)) \\ &= \rho_F(T) \end{aligned}$$

portanto temos que $R_{\hat{\sigma}_1}^{-1} = R_{\hat{\sigma}_1^{-1}}$ □

Proposição 2.24. *Se a função $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ é injetiva então a aplicação de contração-dilatação ρ_F é injetiva.*

Prova. Suponha $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ injetiva, e tomemos $T \in \text{Ker}(\rho_F(T))$. Já que F é injetiva $E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} = E_{F(\bar{k}), F(\bar{s})}$ implica $\bar{i} \sim_F \bar{j}$ e $\bar{j} \sim_F \bar{s}$ daí $\bar{i} = \bar{k}$ e $\bar{j} = \bar{s}$ assim pode-se concluir que $T_{i,j} E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} = 0$, $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}$, se e somente se $T_{\bar{i}, \bar{j}} = 0$. □

O operador de permutação $R_{\hat{\sigma}}$ permite-nos definir a propriedade de *simetria* sobre os elementos de $\text{Mat}(\mathbb{A})$.

Definição 2.25. *Uma matriz $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ é dita simétrica se $R_{\hat{\sigma}}(\rho_F(T)) = \rho_F(T)$ para toda $\sigma \in S_l$ tal que $\hat{\sigma}(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$.*

Exemplo 2.26. *Sejam $\mathbb{A} : \{(i_1, i_2, i_3) \prec (i_3, i_1, i_2) \prec (i_2, i_3, i_1)\}$ e $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$,*

$$F(i_1, i_2, i_3) = 0$$

$$F(i_3, i_1, i_2) = 1$$

$$F(i_2, i_3, i_1) = 2$$

suponhamos $i_1 \neq i_2 \neq i_3$, assim se $\hat{\sigma}(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$ então $\sigma \in S_3$, temos que $\sigma = (123)$ ou $\sigma = (132)$. Portanto $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ dada por:

$$T = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (i_1, i_2, i_3) & (i_3, i_1, i_2) & (i_2, i_3, i_1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} (i_1, i_2, i_3) \\ (i_3, i_1, i_2) \\ (i_2, i_3, i_1) \end{matrix}$$

é uma matriz simétrica no conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$.

2.2 Estrutura de álgebra associativa em $\text{Mat}(\mathbb{A})$

Com o objetivo de estabelecer relações entre o espaço $\text{Mat}(\mathbb{A})$ e o espaço das matrizes quadradas através da aplicação ρ_F , e, em última instância, representar tensores por meio de matrizes, definimos até o momento um par de aplicações lineares sobre o conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$. Para enriquecer a estrutura algébrica desse conjunto e possibilitar operações que reflitam o comportamento dos elementos em $\text{Mat}(\mathbb{A})$ com sua representação no espaço das matrizes quadradas, propomos um produto em $\text{Mat}(\mathbb{A})$ que chamaremos *convolução*.

Definição 2.27. *Seja $F : \text{Mat}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ fixa e sejam $T^1, T^2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$.*

$$(T^1 * T^2)_{\bar{i}, \bar{j}} := \sum_{\bar{m} \sim \bar{n}} T_{\bar{i}, \bar{m}}^1 T_{\bar{n}, \bar{j}}^2. \quad (2.8)$$

Chamaremos o produto “” de convolução.*

Exemplo 2.28. *Tomemos o conjunto $\mathbb{A}$ e a função como no Exemplo 2. Lembrando $\mathbb{A} = \{(-1, 1) \prec (0, -1) \prec (1, 1) \prec (2, 2)\}$ as classes de equivalência são:*

$$\{\{(-1, 1), (1, 1)\}, \{(0, -1)\}, \{(2, 2)\}\}$$

e tomemos $T^1, T^2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ da definição anterior obtemos

$$(T^1 * T^2)_{\bar{i}, \bar{j}} = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{m}}^1 T_{\bar{m}, \bar{j}}^2 + T_{\bar{i}, (-1, 1)}^1 T_{(1, 1), \bar{j}}^2 + T_{\bar{i}, (1, 1)}^1 T_{(-1, 1), \bar{j}}^2$$

A continuação, vamos definir a matriz Id no conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$. O comportamento desta matriz com respeito da convolução é chave para definir o operador de média, que será introduzido no seguinte capítulo.

$$\text{Id}_{\bar{i}, \bar{j}} := \prod_{m=1}^l \delta_{i_m, j_m}. \quad (2.9)$$

Exemplo 2.29. *Seja $\mathbb{A} = \{(0, 0) \prec (0, 1) \prec (1, 0) \prec (1, 1)\}$, logo temos que:*

$$\text{Id} = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{(0, 0)} & \textcolor{blue}{(0, 1)} & \textcolor{blue}{(1, 0)} & \textcolor{blue}{(1, 1)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{(0, 0)} \\ \textcolor{blue}{(0, 1)} \\ \textcolor{blue}{(1, 0)} \\ \textcolor{blue}{(1, 1)} \end{pmatrix}$$

Observação 2.30. *Vemos que quando a função $F : \text{Mat}(\mathbb{A}) \longmapsto \mathbb{Z}$ é injetiva, a matriz*

Id é uma identidade para à convolução, assim $\text{Mat}(\mathbb{A})$ é uma álgebra associativa com unidade nesse caso.

Nesta proposição, apresentaremos e demonstraremos as propriedades do produto recentemente definido.

Proposição 2.31. *Propriedades da convolução: Consideremos $T^1, T^2, T^3 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$, o produto “ $*$ ” satisfaz :*

1.

$$(T^1 * T^2) * T^3 = T^1 * (T^2 * T^3).$$

2.

$$(T * \text{Id})_{\bar{i}, \bar{j}} = \sum_{\bar{m} \sim \bar{j}} T_{\bar{i}, \bar{m}}, \quad (\text{Id} * T)_{\bar{i}, \bar{j}} = \sum_{\bar{m} \sim \bar{i}} T_{\bar{m}, \bar{j}}.$$

Prova. 1.

$$\begin{aligned} ((T^1 * T^2) * T^3)_{\bar{i}, \bar{j}} &= \sum_{\bar{m} \sim \bar{n}} (T^1 * T^2)_{\bar{i}, \bar{m}} T_{\bar{n}, \bar{j}}^3 \\ &= \sum_{\bar{m} \sim \bar{n}} \sum_{\bar{k} \sim \bar{l}} T_{\bar{i}, \bar{k}}^1 T_{\bar{l}, \bar{m}}^2 T_{\bar{n}, \bar{j}}^3 \\ &= \sum_{\bar{k} \sim \bar{l}} T_{\bar{i}, \bar{k}}^1 (T^2 * T^3)_{\bar{l}, \bar{j}} \\ &= (T^1 * (T^2 * T^3))_{\bar{i}, \bar{j}}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (T^1 * \text{Id})_{\bar{i}, \bar{j}} &= \sum_{\bar{m} \sim \bar{n}} T_{\bar{i}, \bar{m}}^1 \text{Id}_{\bar{n}, \bar{j}} \\ &= \sum_{\bar{m} \sim \bar{j}} T_{\bar{i}, \bar{m}}^1. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} (\text{Id} * T)_{\bar{i}, \bar{j}} &= \sum_{\bar{m} \sim \bar{n}} \text{Id}_{\bar{i}, \bar{m}} T_{\bar{n}, \bar{j}} \\ &= \sum_{\bar{i} \sim \bar{n}} T_{\bar{n}, \bar{j}}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.32 ([FNZ24]). *Seja $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma função arbitrária, porém fixa. $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}^l, T^1, T^2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$. Então:*

$$\rho_F(T^1 * T^2) = \rho_F(T^1) \rho_F(T^2) \quad (2.10)$$

Além disso, para $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ e $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$:

$$\rho_F^0(T * x) = \rho_F(T) \rho_F^0(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Prova.

$$\begin{aligned} \rho_F(T^1) \rho_F(T^2) &= \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{j}}^1 E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} \sum_{\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{A}} T_{\bar{m}, \bar{n}}^2 E_{F(\bar{m}), F(\bar{n})} \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} \sum_{\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{j}}^1 E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} T_{\bar{m}, \bar{n}}^2 E_{F(\bar{m}), F(\bar{n})} \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{n} \in \mathbb{A}} \left(\sum_{\bar{m} \sim \bar{j}} T_{\bar{i}, \bar{m}}^1 T_{\bar{j}, \bar{n}}^2 \right) E_{F(\bar{i}), F(\bar{n})} \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{n} \in \mathbb{A}} (T^1 * T^2)_{\bar{i}, \bar{n}} E_{F(\bar{i}), F(\bar{n})} \\ &= \rho_F(T^1 * T^2) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho_F(T) \rho_F^0(\mathbf{x}) &= \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}} \sum_{\bar{j} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{j}} E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} \sum_{\bar{l}} \mathbf{x}_{\bar{l}} e_{F(\bar{l})} \\ &= \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}} \left(\sum_{\bar{j} \sim \bar{l}} T_{\bar{i}, \bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{l}} \right) e_{F(\bar{i})} \\ &= \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}} (T * \mathbf{x})_{\bar{i}} e_{F(\bar{i})} \\ &= \rho_F^0(T * \mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.33. Suponha $\text{Mat}(\mathbb{A})$ finito. E seja $\kappa : \text{Mat}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\kappa(T) = \det \rho_F(T)$ para $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$. Então:

$$\kappa(T^1 * T^2) = \kappa(T^1) \kappa(T^2).$$

Prova. Sejam $T^1, T^2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$.

$$\begin{aligned} \kappa(T^1 * T^2) &= \det \rho_F(T^1 * T^2) \\ &= \det \rho_F(T^1) \det \rho_F(T^2). \end{aligned}$$

□

Com o intuito de aprofundar mais nossa análise do espaço $\text{Mat}(\mathbb{A})$, vamos introduzir o operador adjunto, estudar seu comportamento e sua relação com a aplicação de

contração-dilatação

Definição 2.34. *Seja $\star : \text{Mat}(\mathbb{A}) \longrightarrow \text{Mat}(\mathbb{A})$ tal que $(\star T)_{\bar{i}, \bar{j}} := T_{\bar{j}, \bar{i}}$. Vamos chamar $\star$ de operador adjunto.*

Uma vez apresentado o *operador adjunto*, junto com a convolução e o produto interno introduzido em 2.2 podemos definir um produto interno em $\text{Mat}(\mathbb{A})$, quando $\mathbb{A}$ é um conjunto finito. Assim, dadas $T_1, T_2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$

$$\langle T_1, T_2 \rangle_F^{\mathbb{A}} = \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{l}} (T_1 * (\overline{\star T_2}))_{\bar{l}, \bar{i}}.$$

Proposição 2.35. *Sejam $T^1, T^2 \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ então:*

1. $\rho_F(\star T) = \rho_F(T)^t$.
2. $[\rho_F(T^2 * T^1)]^t = \rho_F((\star T^1) * (\star T^2))$.

Prova. Para a prova vamos usar o resultado do Teorema 2.32, e o calculo direto.

1.

$$\begin{aligned} \rho_F(\star T) &= \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} \star T_{\bar{i}, \bar{j}} E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} T_{\bar{j}, \bar{i}} E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} \\ &= \rho_F(T)^t \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} [\rho_F(T^2 * T^1)]^t &= [\rho_F(T^2) \rho_F(T^1)]^t \\ &= \rho_F(T^1)^t \rho_F(T^2)^t \\ &= \rho_F(\star T^1) \rho_F(\star T^2) \\ &= \rho_F((\star T^1) * (\star T^2)). \end{aligned}$$

□

Observação 2.36. *Se $\mathbb{A}$ é um conjunto finito e $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ satisfazendo $T = \overline{\star T}$ a ação definida na equação 2.5 satisfaz $\langle T * v, w \rangle_F = \langle v, T * w \rangle_F$, para $v, w \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$, a saber:*

$$\begin{aligned}
\langle T * v, w \rangle_F &= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} (T * v)_{\bar{i}} \overline{w_{\bar{j}}} \\
&= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \left(\sum_{\bar{k} \sim_F \bar{l}} T_{\bar{i}, \bar{k}} v_{\bar{l}} \right) \overline{w_{\bar{j}}} \\
&= \sum_{\bar{k} \sim_F \bar{l}} v_{\bar{l}} \left(\sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \star T_{\bar{k}, \bar{i}} \overline{w_{\bar{j}}} \right) \\
&= \sum_{\bar{l} \sim_F \bar{k}} v_{\bar{l}} (\star T * \overline{w})_{\bar{k}} \\
&= \langle v, \star \overline{T} * w \rangle_F \\
&= \langle v, T * w \rangle_F.
\end{aligned}$$

Além disso, se considerarmos o produto interno canônico em $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, vemos que a aplicação ρ_F^0 é uma isometria.

Proposição 2.37. *Sejam $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ fixa, o espaço $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ munido do produto interno $\langle, \rangle_F$ e $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno canônico. Então a aplicação de contração-dilatação para vetores ρ_F^0 é uma isometria.*

Prova. Tomemos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$

$$\begin{aligned}
\langle \rho_F^0(\mathbf{x}), \rho_F^0(\mathbf{y}) \rangle &= \left\langle \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle \mathbf{x}, e_{\bar{i}} \rangle_F e_{F(\bar{i})}, \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle \mathbf{y}, e_{\bar{i}} \rangle_F e_{F(\bar{i})} \right\rangle \\
&= \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle \mathbf{x}, e_{\bar{i}} \rangle_F \overline{\langle \mathbf{y}, e_{\bar{j}} \rangle_F} \langle e_{F(\bar{i})}, e_{F(\bar{j})} \rangle \\
&= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \langle \mathbf{x}, e_{\bar{i}} \rangle_F \overline{\langle \mathbf{y}, e_{\bar{j}} \rangle_F} \\
&= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{j}} \mathbf{x}_{\bar{i}} \overline{\mathbf{y}_{\bar{j}}} \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F.
\end{aligned}$$

□

Deste ponto decorre que se considerarmos o produto interno canônico no espaço das matrizes complexas, a aplicação de contração dilatação é uma isometria.

Proposição 2.38. *ρ_F é uma isometria.*

Prova. Sejam $A, B \in \text{Mat}(\mathbb{A})$,

$$\begin{aligned}
\langle \rho_F(A), \rho_F(B) \rangle &= \left\langle \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle A * e_{\bar{j}}, e_{\bar{i}} \rangle_F E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})}, \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle B * e_{\bar{j}}, e_{\bar{i}} \rangle_F E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} \right\rangle \\
&= \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}/\sim_F} \sum_{\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{A}/\sim_F} \langle A * e_{\bar{j}}, e_{\bar{i}} \rangle_F \overline{\langle B * e_{\bar{l}}, e_{\bar{k}} \rangle_F} \text{Tr} (E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} E_{F(\bar{l}), F(\bar{k})}) \\
&= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{k}} \sum_{\bar{l} \sim_F \bar{j}} \langle A * e_{\bar{j}}, e_{\bar{i}} \rangle_F \overline{\langle B * e_{\bar{l}}, e_{\bar{k}} \rangle_F} \\
&= \sum_{\bar{i} \sim_F \bar{k}} \sum_{\bar{l} \sim_F \bar{j}} A_{\bar{k}\bar{l}} (\star \overline{B_{\bar{j}, \bar{i}}}) \\
&= \sum_{\bar{i} \sim \bar{k}} (A * (\star \overline{B}))_{\bar{k}, \bar{i}} \\
&= \langle A, B \rangle_F^{\mathbb{A}}.
\end{aligned}$$

□

Onde Tr denota a matriz transposta no espaço das matrizes complexas.

Capítulo 3

Algumas aplicações de ρ_F

Neste capítulo mostraremos algumas aplicações da teoria desenvolvida no capítulo previo, em particular, estamos interessados na classe de aplicações ρ_F injetivas.

3.1 O caso do produto tensorial

Tendo explorado a operação de convolução em $\text{Mat}(\mathbb{A})$ na seção anterior, passamos agora a investigar a relação entre o produto tensorial de matrizes e as aplicações de contração-dilatação. Para estabelecer essa conexão de forma precisa, restringiremos nossa atenção aos casos em que o conjunto de índices $\mathbb{A}$ possui forma retangular, que definiremos a seguir. Demonstraremos como, sob essa condição, o produto tensorial de matrizes se relaciona com a aplicação de contração-dilatação, proporcionando uma representação matricial eficiente para tensores de ordem superior.

Definição 3.1. *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_l$ inteiros positivos e tome $\mathbb{A}_i = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$, dizemos que o conjunto $\mathbb{A}$ tem forma retangular se:*

$$\mathbb{A} = \prod_{i=1}^l \mathbb{A}_i . \quad (3.1)$$

Tomemos $\bar{k} \in \mathbb{Z}^l, \bar{k} = (k_1, \dots, k_l)$ com $k_1 = 1, k_2 = n_1, k_3 = n_1 n_2, \dots, k_l = n_1 \dots n_{l-1}$ e seja $F_{\bar{k}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ com $F_{\bar{k}}(\bar{i}) = \bar{k} \cdot \bar{i}$.

Sempre que $F_{\bar{k}}$ fosse a da forma apresentada aquí, vamos notar $F_{\bar{k}}$ como F_{PT} .

Proposição 3.2. *Sejam $\bar{k} \in \mathbb{Z}^l$ e $F_{\bar{k}}$ como na Definição 3.1 então $F_{\bar{k}} = F_{PT}$ é injetiva.*

Prova. Vamos considerar componente a componente para mostrar a igualdade.

Sejam $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}$ tais que $\bar{i} \sim_{F_{\bar{k}}} \bar{j}$ então tem-se $\sum_{s=1}^l k_s i_s = \sum_{s=1}^l k_s j_s$. Considere:

$$\begin{aligned} u_1 &= i_2 + n_2 i_3 \dots + n_2 \dots n_{l-1} i_l \\ v_1 &= j_2 + n_2 j_3 \dots + n_2 \dots n_{l-1} j_l \end{aligned} \quad (3.2)$$

Então da igualdade segue-se

$$i_1 + n_1 u_1 = j_1 + n_1 v_1 \quad (3.3)$$

E consideremos dois casos:

1. $i_1 = j_1$.
segue que $u_1 = v_1$
2. $i_1 \neq j_1$
e obtemos:

$$i_1 - j_1 = n_1(v_1 - u_1). \quad (3.4)$$

De 3.4 é claro que $i_1 - j_1$ é múltiplo de $v_1 - u_1$, e note que $-n_1 + 1 \leq i_1 - j_1 \leq n_1 - 1$ e $(v_1 - u_1) \in \mathbb{Z}$ o qual não é possível portanto $i_1 = j_1$ e $u_1 = v_1$. Considere agora :

$$\begin{aligned} u_2 &= i_3 + \dots + n_3 \dots n_{l-1} i_l \\ v_2 &= j_3 + \dots + n_3 \dots n_{l-1} j_l \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da conclusão de 3.3 e 3.5 obtemos

$$i_2 + n_2 u_2 = j_2 + n_2 v_2.$$

Fazendo um processo análogo como em 3.3 obtemos $i_2 = j_2$.

Continuando dessa forma obtemos que $i_s = j_s$ para $1 \leq s \leq l$. Assim $\bar{i} = \bar{j}$

□

Dando prosseguimento à nossa análise, investigaremos agora a relação entre o *produto tensorial* introduzido em 1.17, elementos no conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$ e a aplicação ρ_F .

Consideremos inteiros positivos $n_1, \dots, n_l$, o conjunto $\mathbb{A}$ e a função $F_k : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$, conforme estabelecido na Definição 3.1. Para uma coleção de matrizes $\{A_k\}_{k=1}^l$ onde $A_k \in \text{Mat}(n_k)$, identificaremos o tensor $T = A_1 \otimes \dots \otimes A_l \in \bigotimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k)$ como uma matriz $T \in \text{Mat } \mathbb{A}$, cujas entradas estão dadas por:

$$T_{\bar{i}, \bar{j}} = T_{i_1, j_1, \dots, i_l, j_l} = A_{i_1, j_1}^1 \dots A_{i_l, j_l}^l$$

em que $\bar{i} = (i_1, \dots, i_l)$, $\bar{j} = (j_1, \dots, j_l)$ e $0 \leq i_k, j_k \leq n_k - 1, k = 1, \dots, l$.

Com base nessa representação, definimos a aplicação *produto tensorial*:

$$\begin{aligned} \rho_{n_1, n_2, \dots, n_l} : \bigotimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k) &\longrightarrow \text{Mat}(n_1 n_2 \dots n_l) \\ \rho_{n_1, n_2, \dots, n_l}(T) &= \sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} T_{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l} E_{I, J}^N. \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que $N = n_1 n_2 \dots n_l - 1$, $I = i_1 + n_1 i_2 + n_1 n_2 i_3 + \dots + n_1 \dots n_{l-1} i_l$, $J = j_1 + n_1 j_2 + n_1 n_2 j_3 + \dots + n_1 \dots n_{l-1} j_l$.

Por meio dessa identificação, podemos considerar o espaço $\bigotimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k)$ como subespaço de $\text{Mat}(\mathbb{A})$, com efeito, sejam $P, Q \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ tais que existem $\{A_k\}_{k=1}^l$, $\{B_k\}_{k=1}^l$ com $A_k, B_k \in \text{Mat}(n_k)$ tais que $P_{\bar{i}, \bar{j}} = A_{i_1, j_1}^1 \dots A_{i_l, j_l}^l$ e $Q_{\bar{i}, \bar{j}} = B_{i_1, j_1}^1 \dots B_{i_l, j_l}^l$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, notemos que $(\lambda P + Q)_{\bar{i}, \bar{j}} = \lambda A_{i_1, j_1}^1 \dots A_{i_l, j_l}^l + B_{i_1, j_1}^1 \dots B_{i_l, j_l}^l$, e vamos considerar a aplicação de contração dilatação $\rho_{FPT} = \rho_{PT}$

$$\rho_{PT} : \text{Mat}(\mathbb{A}) \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \dots n_l).$$

Portanto, a aplicação produto tensorial $\rho_{n_1 n_2 \dots n_l}$ é induzida pela restrição da aplicação de contração-dilatação ρ_{PT} sobre $\bigotimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k)$.

Exemplo 3.3. Sejam $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $A \in \text{Mat}(2)$ e $B \in \text{Mat}(3)$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \\ k & l & m \end{pmatrix}$ segundo a Definição 1.17 temos:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & ag & be & bf & bg \\ ah & ai & aj & bh & bi & bj \\ ak & al & am & bk & bl & bm \\ ce & cf & cg & de & df & dg \\ ch & ci & cj & dh & di & dj \\ ck & cl & cm & dk & dl & dm \end{pmatrix}$$

O conjunto $\mathbb{A} = \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$, se tomarmos “ $\prec$ ” como a ordem lexicográfica, identificamos $A \otimes B \in \text{Mat}(2) \otimes \text{Mat}(3)$ com

$T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ com:

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (1,0) & (1,1) & (1,2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} ae & af & ag & be & bf & bg \\ ah & ai & aj & bh & bi & bj \\ ak & al & am & bk & bl & bm \\ ce & cf & cg & de & df & dg \\ ch & ci & cj & dh & di & dj \\ ck & cl & cm & dk & dl & dm \end{pmatrix} & \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (1,2) \end{matrix} \end{matrix}.$$

Aplicamos ρ_{FPT} ,

$$\rho_{FPT}(T) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} ae & be & af & bf & ag & bg \\ ce & de & cf & df & cg & dg \\ ah & bh & ai & bi & aj & bj \\ ch & dh & ci & di & cj & dj \\ ak & bk & al & bl & am & bm \\ ck & dk & cl & dl & cm & dm \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Proposição 3.4. *Seja $\mathbb{A}$ um conjunto retangular finito, então a aplicação ρ_{PT} é um isomorfismo de espaços vetoriais.*

Prova. Primeiro, notemos que o cardinal do conjunto $\mathbb{A}$ é $(n_1 \cdot \dots \cdot n_l)$, logo uma base para $\text{Mat}(\mathbb{A})$ tem $(n_1 \cdot \dots \cdot n_l)^2$ elementos, a mesma quantidade que uma base de $\text{Mat}(n_1 \dots n_l)$, da Proposição 3.2 temos que a função definida assim para $\bar{k} \in \mathbb{Z}$ é injetiva, da proposição 2.24 temos que a aplicação de contração-dilatação é injetiva, portanto $\text{Mat}(\mathbb{A})$ é isomorfo a $\text{Mat}(n_1 \dots n_l)$ $\square$

De maneira semelhante é possível identificar o l -tensor $\mathbf{x} \in \bigotimes_{k=1}^l \mathbb{C}^{n_k}$. Sejam $n_1, \dots, n_l$ inteiros positivos, $\mathbb{A}$ um conjunto retangular, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}^{n_k}, k = 1, \dots, l$. Identificamos $\mathbf{x}$ com o vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ de tal forma que $\mathbf{x}_{\bar{i}} = x_{i_1}^1 \dots x_{i_l}^l$ e $\bar{i} = (i_1, \dots, i_l), 0 \leq i_k \leq n_k - 1, k = 1, \dots, l$. Definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \rho_{n_1, \dots, n_l}^0 : \bigotimes_{k=1}^l \mathbb{C}^{n_k} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n_1 n_2 \dots n_l} \\ \rho_{n_1, \dots, n_l}^0(x) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_l=0}^{n_l-1} x_{i_1, i_2, \dots, i_l} e_I^N \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onde I, N são definidos da mesma forma que na equação (3.6). Portanto $\rho_{n_1, \dots, n_l}^0$ coincide com ρ_{FPT}^0 .

A seguir mostramos como é a forma da operação de convolução definida em 2.27 sobre $\bigotimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s)$:

$$(T^1 * T^2)_{\bar{i}, \bar{j}} = \sum_{\bar{m}} T_{\bar{i}, \bar{m}}^1 T_{\bar{m}, \bar{j}}^2.$$

Alem disso do teorema 2.32 seguem os seguintes corolários:

Corolário 3.5. 1. Sejam $T^1, T^2 \in \bigotimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k)$ então:

$$\rho_{n_1, \dots, n_l}(T^1 * T^2) = \rho_{n_1, \dots, n_l}(T_1) \rho_{n_1, \dots, n_l}(T_2).$$

2. De forma similar, para $\mathbf{x} \in \bigotimes_{k=1}^l \mathbb{C}^{n_k}$ e $T \in \bigotimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k)$

$$\rho_{n_1, \dots, n_l}^0(T * \mathbf{x}) = \rho_{n_1, \dots, n_l}(T) \rho_{n_1, \dots, n_l}^0(\mathbf{x}).$$

3. Seja $\kappa : \bigotimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\kappa(T) = \det \rho_{n_1, \dots, n_l}(T)$ então:

$$\kappa(T^1 * T^2) = \kappa(T^1) \kappa(T^2), T^1, T^2 \in \bigotimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s)$$

Prova. Segue-se do Teorema 2.32 e Corolário 2.33. □

Corolário 3.6 ([FNZ24]). 1. Sejam $A_s, B_s \in \text{Mat}(n_s)$, $s \in [1, l] \cap \mathbb{Z}$ então:

$$\rho_{n_1, \dots, n_l}(A_1 B_1 \otimes \dots \otimes A_l B_l) = \rho_{n_1, \dots, n_l}(A_1 \otimes \dots \otimes A_l) \rho_{n_1, \dots, n_l}(B_1 \otimes \dots \otimes B_l).$$

2. Seja I_k a matriz identidade no conjunto n_k então:

$$\rho_{n_1, \dots, n_l}(I_{n_1} \otimes \dots \otimes I_{n_l}) = I_{n_1 n_2 \dots n_l}.$$

3. A aplicação $\rho_{n_1 \dots n_l} : \bigotimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s) \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \dots n_l)$ é um isomorfismo de álgebra associativa.

Prova. 1. Considere $A_s = (A_{i_s, j_s}^s)$, $B_s = (B_{k_s, m_s}^s) \in \text{Mat}(n_s)$. Então temos que:

$$\begin{cases} \rho_{n_1, \dots, n_l}(A_1 \otimes \dots \otimes A_l) = \left(\sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} (A_{i_1, j_1}^1 \dots A_{i_l, j_l}^l) E_{I_1, J_1}^N \right) \\ \rho_{n_1, \dots, n_l}(B_1 \otimes \dots \otimes B_l) = \left(\sum_{k_1, m_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_l, m_l=0}^{n_l-1} (B_{k_1, m_1}^1 \dots B_{k_l, m_l}^l) E_{I_2, J_2}^N \right) \end{cases}$$

Multiplicando obtemos:

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} (A_{i_1, j_1}^1 \cdots A_{i_l, j_l}^l) E_{I_1, J_1}^N \right) \left(\sum_{k_1, m_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_l, m_l=0}^{n_l-1} (B_{k_1, m_1}^1 \cdots B_{k_l, m_l}^l) E_{I_2, J_2}^N \right) \\
&= \sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} \sum_{k_1, m_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_l, m_l=0}^{n_l-1} (A_{i_1, j_1}^1 \cdots A_{i_l, j_l}^l) (B_{k_1, m_1}^1 \cdots B_{k_l, m_l}^l) E_{I_1, J_1}^N E_{I_2, J_2}^N \\
&= \sum_{i_i, m_i=0}^{n_i-1} \left(\sum_{j_1=0}^{n_1-1} A_{i_1, j_1}^1 B_{j_1, m_1}^1 \right) \cdots \sum_{i_l, m_l=0}^{n_l-1} \left(\sum_{j_l=0}^{n_l-1} A_{i_l, j_l}^l B_{j_l, m_l}^l \right) E_{I_1, J_2}^N \\
&= \sum_{i_1, m_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_l, m_l=0}^{n_l-1} (A^1 B^1)_{i_1, m_1} \cdots (A^l B^l)_{i_l, m_l} E_{I_1, J_2}^N \\
&= \rho_{n_1, \dots, n_l} (A^1 B^1 \otimes \cdots \otimes A^l B^l).
\end{aligned}$$

2. Podemos perceber que no caso $i_s = j_s$ para $1 \leq s \leq l$ tem-se $I = J$ definidos da equação 3.6. Logo segue-se a igualdade

$$\begin{aligned}
\rho_{n_1, \dots, n_l} (I_{n_1} \otimes \cdots \otimes I_{n_l}) &= \sum_{i_1, j_1} \cdots \sum_{i_l, j_l} I_{i_1, j_1}^{n_1} \cdots I_{i_l, j_l}^{n_l} E_{I, J}^N \\
&= I_{n_1 \dots n_l}.
\end{aligned}$$

3. Temos que $\rho_{PT}|_{\otimes_{k=1}^l \text{Mat}(n_k)} = \rho_{n_1, \dots, n_l}$ e da Proposição 3.4 e o Teorema 2.32 se conclui o isomorfismo de álgebras. □

A continuação vamos ver qual é a forma e as propriedades do *operador adjunto* definido em 2.34, no conjunto $\otimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s)$.

$$\star : \bigotimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s) \longrightarrow \bigotimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s).$$

Tal que para $T \in \otimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s)$:

$$(\star T)_{i,j} := T_{j,i}.$$

Também tem-se propriedades do operador $\star$ e outra propriedade que segue da relação de semelhança entre as matrizes, elas vão ser apresentadas no seguinte corolário.

Corolário 3.7. 1. Seja $T \in \otimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s)$ então:

$$(\rho_{n_1 \dots n_l}(T))^t = \rho_{n_1 \dots n_l}(\star T).$$

2. Sejam $C_i, D_i \in \text{Mat}(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$ tais que C_i é semelhante à D_i para todo i então $\rho_{n_1 \dots n_l}(C_1 \otimes \dots \otimes C_l)$ é semelhante à $\rho_{n_1 \dots n_l}(D_1 \otimes \dots \otimes D_l)$

Para a prova do segundo item vamos usar o seguinte lema:

Lema 3.8. Sejam $U_i \in \text{Mat}(n_i)$ matrizes invertíveis para todo $i = 1, \dots, l$ então:

$$\rho_{n_1 \dots n_l}(U_1^{-1} \otimes \dots \otimes U_l^{-1}) = \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1 \otimes \dots \otimes U_l)^{-1}.$$

Prova. Pelos itens 1 e 2 do corolário 3.6 tem-se :

$$\begin{aligned} I_{n_1 \dots n_l} &= \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1 U_1^{-1} \otimes \dots \otimes U_l U_l^{-1}) \\ &= \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1 \otimes \dots \otimes U_l) \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1^{-1} \otimes \dots \otimes U_l^{-1}). \end{aligned}$$

□

Seguimos agora com a prova do corolário.

Prova. 1. Seja $T \in \bigotimes_{s=1}^l \text{Mat}(n_s)$.

$$\begin{aligned} \rho_{n_1 \dots n_l}(\star T) &= \sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} \star(T_{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l}) E_{I, J}^N \\ &= \sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} T_{j_1, i_1, j_2, i_2, \dots, j_l, i_l} E_{I, J}^N \\ &= \sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} T_{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l} E_{J, I}^N \\ &= \left(\sum_{i_1, j_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_l, j_l=0}^{n_l-1} T_{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l} E_{I, J}^N \right)^t \\ &= (\rho_{n_1 \dots n_l}(T))^t. \end{aligned}$$

2. Seja $U_i \in \text{Mat}(n_i)$ uma matriz invertível tal que $D_i = U_i C_i U_i^{-1}$ com $i = 1, \dots, l$ então tem-se:

$$\begin{aligned} \rho_{n_1 \dots n_l}(D_1 \otimes \dots \otimes D_l) &= \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1 C_1 U_1^{-1} \otimes \dots \otimes U_l C_l U_l^{-1}) \\ &= \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1 \otimes \dots \otimes U_l) \rho_{n_1 \dots n_l}(C_1 \otimes \dots \otimes C_l) \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1^{-1} \otimes \dots \otimes U_l^{-1}) \\ &= \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1 \otimes \dots \otimes U_l) \rho_{n_1 \dots n_l}(C_1 \otimes \dots \otimes C_l) \rho_{n_1 \dots n_l}(U_1 \otimes \dots \otimes U_l)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Agora consideremos o operador de permutação definido em 2.17, quando este é aplicado em $\rho_{n_1, \dots, n_l}$, e temos as seguintes propriedades.

Proposição 3.9 ([FNZ24]). *Seja $B_i \in \text{Mat}(n_i)$, $i = 1, \dots, l$ então:*

$$1. R_\sigma(\rho_{n_1 \dots n_l}(B_1 \otimes \dots \otimes B_l)) = \rho_{n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(l)}}(B_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes B_{\sigma(l)}).$$

Em particular.

$$R_r(\rho_{n_1, \dots, n_l}(B_1 \otimes B_2 \otimes \dots \otimes B_l)) = \rho_{n_l, \dots, n_1}(B_l \otimes B_{l-1} \otimes \dots \otimes B_1).$$

2. Para qualquer $\sigma \in S_l$ o operador R_σ é uma isometria.

Prova. 1. Tome $B_i \in \text{Mat}(n_i)$, $i = 1, \dots, l$.

$$\begin{aligned} \rho_{n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(l)}}(B_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes B_{\sigma(l)}) &= \sum_{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma(1)}=0}^{n_{\sigma(1)}-1} \dots \sum_{i_{\sigma(l)}, j_{\sigma(l)}=0}^{n_{\sigma(l)}-1} B_{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)} \dots B_{i_{\sigma(l)}, j_{\sigma(l)}}^{\sigma(l)} E_{\sigma(I), \sigma(J)}^N \\ &= R_\sigma(\rho_{n_1 \dots n_l}(B_1 \otimes \dots \otimes B_l)). \end{aligned}$$

2. Decorre do Corolário 2.38

□

O segundo item do Corolário 3.7 fornece um método para classificar a aplicação $\rho_{n_1 \dots n_l}(C_1 \otimes \dots \otimes C_l)$ a menos de semelhança. De fato é suficiente calcular produtos tensoriais de somas diretas de blocos de Jordan. Para ilustrar essa abordagem apresentaremos a seguir o cálculo da aplicação $\rho_{n_1 \dots n_l}$ de duas somas de blocos de Jordan. Porém antes lembraremos o que significa *soma direta* de matrizes, denotada pelo símbolo $\oplus$.

Observação 3.10. *Dadas duas matrizes $A \in \text{Mat } n_1$, $B \in \text{Mat}(n_2)$ com n_1, n_2 inteiros positivos, a soma direta $A \oplus B$ é definida como a matriz por blocos diagonal, onde os blocos na diagonal são precisamente as matrizes A, B ,*

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1} & \dots & a_{n_1 n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n_2 1} & \dots & b_{n_2 n_2} \end{pmatrix}.$$

Lema 3.11 ([FNZ24]). *Sejam $C_i \in \text{Mat } (\mu_i)$, $D_i \in \text{Mat } (\nu_i)$ onde $i = 1, 2$. Então:*

1. $\rho_{\mu_1, \nu_1}(C_1 \otimes D_1)$ é semelhante à $\rho_{\nu_1, \mu_1}(D_1 \otimes C_1)$.

2. $\rho_{\mu_1+\mu_2, \nu_1+\nu_2}((C_1 \oplus C_2) \otimes (D_1 \oplus D_2))$ é semelhante à $\bigoplus_{i,j=1}^2 \rho_{\mu_i, \nu_j}(C_i \otimes D_j)$.

Prova. 1. Consideremos a matriz $P = \sum_{i_1=0}^{\nu_1-1} \sum_{i_2=0}^{\mu_1-1} E_{i_1+i_2\nu_1, i_2+i_1\mu_1}$. Notemos que $P^{-1} = P^t$

$$\begin{aligned}
P^t \rho_{\nu_1, \mu_1}(D_1 \otimes C_1) P &= P^t \left(\sum_{i_1, j_1=0}^{\nu_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\mu_1-1} D_{i_1, j_1}^1 C_{i_2, j_2}^1 E_{i_1+i_2\nu_1, j_1+j_2\nu_1} \right) P \\
&= P^t \left(\sum_{i_1, j_1, k=0}^{\nu_1-1} \sum_{i_2, j_2, l=0}^{\mu_1-1} D_{i_1, j_1}^1 C_{i_2, j_2}^1 E_{i_1+i_2\nu_1, j_1+j_2\nu_1} E_{k+l\nu_1, l+k\mu_1} \right) \\
&= P^t \left(\sum_{i_1, j_1=0}^{\nu_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\mu_1-1} D_{i_1, j_1}^1 C_{i_2, j_2}^1 E_{i_1+i_2\nu_1, j_1+j_2\nu_1} E_{j_1+j_2\nu_1, j_2+j_1\mu_1} \right) \\
&= P^t \left(\sum_{i_1, j_1=0}^{\nu_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\mu_1-1} D_{i_1, j_1}^1 C_{i_2, j_2}^1 E_{i_1+i_2\nu_1, j_2+j_1\mu_1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\nu_1-1} \sum_{l=0}^{\mu_1-1} E_{l+k\mu_1, k+l\nu_1} \left(\sum_{i_1, j_1=0}^{\nu_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\mu_1-1} D_{i_1, j_1}^1 C_{i_2, j_2}^1 E_{i_1+i_2\nu_1, j_2+j_1\mu_1} \right) \\
&= \sum_{i_1, j_1=0}^{\nu_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\mu_1-1} D_{i_1, j_1}^1 C_{i_2, j_2}^1 E_{i_2+i_1\mu_1, j_2+j_1\mu_1} \\
&= \rho_{\mu_1, \nu_1}(C_1 \otimes D_1).
\end{aligned}$$

2. Primeiro notemos que $C_1 \oplus C_2 = C_1 \oplus \mathbf{0}_{\mu_2} + \mathbf{0}_{\mu_1} \oplus C_2$ onde $\mathbf{0}_\mu$ denota a matriz nula em $\text{Mat}(\mu)$, lembremos que $I = i_1 + i_2(\mu_1 + \mu_2)$, $J = j_1 + j_2(\mu_1 + \mu_2)$, $N = (\mu_1 + \mu_2)(\nu_1 + \nu_2)$.

$$\begin{aligned}
&\rho_{\mu_1+\mu_2, \nu_1+\nu_2}((C_1 \oplus C_2) \otimes (D_1 \oplus D_2)) \\
&= \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} (C_1 \oplus C_2)_{i_1, j_1} (D_1 \oplus D_2)_{i_2, j_2} E_{I, J}^N \\
&= \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} ((C_1 \oplus \mathbf{0}_{\mu_2}) + (\mathbf{0}_{\mu_1} \oplus C_2))_{i_1, j_1} (D_1 \oplus D_2)_{i_2, j_2} E_{I, J}^N \\
&= \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} (C_1 \oplus \mathbf{0}_{\mu_2})_{i_1, j_1} (D_1 \oplus D_2)_{i_2, j_2} E_{I, J}^N \\
&+ \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} (\mathbf{0}_{\mu_1} \oplus C_2)_{i_1, j_1} (D_1 \oplus D_2)_{i_2, j_2} E_{I, J}^N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} (C_1 \oplus \mathbf{0}_{\mu_2})_{i_1, j_1} (D_1 \oplus \mathbf{0}_{\nu_2})_{i_2, j_2} E_{I, J}^N \\
&+ \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} (C_1 \oplus \mathbf{0}_{\mu_2})_{i_1, j_1} (\mathbf{0}_{\nu_1} \oplus D_2)_{i_2, j_2} E_{I, J}^N \\
&+ \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} (\mathbf{0}_{\mu_1} \oplus C_2)_{i_1, j_1} (\mathbf{0}_{\nu_1} \oplus D_2)_{i_2, j_2} E_{I, J}^N \\
&+ \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1+\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1+\nu_2-1} (\mathbf{0}_{\mu_1} \oplus C_2)_{i_1, j_1} (D_1 \oplus \mathbf{0}_{\nu_2})_{i_2, j_2} E_{I, J}^N \\
&\sim \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1-1} C_{i_1, j_1}^1 D_{i_2, j_2}^1 E_{I, J}^N + \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_1-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_2-1} C_{i_1, j_1}^1 D_{i_2, j_2}^2 E_{I, J}^N \\
&+ \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_1-1} C_{i_1, j_1}^2 D_{i_2, j_2}^1 E_{I, J}^N + \sum_{i_1, j_1=0}^{\mu_2-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\nu_2-1} C_{i_1, j_1}^2 D_{i_2, j_2}^2 E_{I, J}^N \\
&\sim \rho_{\mu_1, \nu_1}(C_1 \otimes D_1) \oplus \mathbf{0}_{\mu_2 \nu_1} \oplus \mathbf{0}_{\mu_1 \nu_2} \oplus \mathbf{0}_{\mu_2 \nu_2} + \\
&+ \mathbf{0}_{\mu_1 \nu_1} \oplus \rho_{\mu_2, \nu_1}(C_2 \otimes D_1) \oplus \mathbf{0}_{\mu_1 \nu_2} \oplus \mathbf{0}_{\mu_2 \nu_2} + \\
&+ \mathbf{0}_{\mu_1 \nu_1} \oplus \mathbf{0}_{\mu_2 \nu_1} \oplus \rho_{\mu_1, \nu_2}(C_1 \otimes D_2) \oplus \mathbf{0}_{\mu_2 \nu_2} + \\
&+ \mathbf{0}_{\mu_1 \nu_1} \oplus \mathbf{0}_{\mu_2 \nu_1} \oplus \mathbf{0}_{\mu_1 \nu_2} \oplus \rho_{\mu_2, \nu_2}(C_2 \otimes D_2) \\
&\sim \bigotimes_{i, j=1}^2 \rho_{\mu_i, \nu_j}(C_i \otimes D_j).
\end{aligned}$$

□

Daquí podemos obter a fórmula para calcular a imagem $\rho_{n_1, \dots, n_l}$ a menos de semelhança.

Teorema 3.12 ([FNZ24]). *Seja $J_\mu(a)$ o bloco de Jordan de tamanho μ e autovalor a . Sejam:*

$$C := \bigoplus_{i=1}^m J_{\mu_i}(a_i), D := \bigoplus_{j=1}^n J_{\nu_j}(b_j).$$

em que

$$\bar{\mu}_l := \sum_{k=0}^l \mu_k, \bar{\nu}_s := \sum_{k=0}^s \nu_k, l = 0, \dots, m; s = 0, \dots, n \ (\mu_0 = \nu_0 = 0).$$

Então

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{\mu}_m, \bar{\nu}_n}(C \otimes D) &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} a_l b_s \sum_{i=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-1} \sum_{j=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-1} E_{i+\bar{\mu}_m j, i+\bar{\mu}_m j} + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} b_s \sum_{i=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-2} \sum_{j=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-1} E_{i+\bar{\mu}_m j, i+\bar{\mu}_m j+1} \\ &+ \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} a_l \sum_{i=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-1} \sum_{j=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-2} E_{i+\bar{\mu}_m j, i+\bar{\mu}_m j+\bar{\mu}_m} + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{i=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-2} \sum_{j=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-2} E_{i+\bar{\mu}_m j, i+\bar{\mu}_m j+\bar{\mu}_m+1}. \end{aligned}$$

Prova. Notemos que as entradas da matriz C são $a_i, 1$ ou 0 , $i = 0, \dots, m$, mais especificamente temos:

$$C_{i,j} = \begin{cases} a_{p+1} & \text{se } \bar{\mu}_p \leq i = j \leq \bar{\mu}_{p+1} - 1 \text{ } p = 0, \dots, m-1 \\ 1 & \text{se } \bar{\mu}_p \leq i+1 = j \leq \bar{\mu}_{p+1} - 2 \text{ } p = 0, \dots, m-1 \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Daí, aplicando a definição de $\rho_{\bar{\mu}_m, \bar{\nu}_n}$ temos que:

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{\mu}_m, \bar{\nu}_n}(C \otimes D) &= \sum_{i_1, j_1=0}^{\bar{\mu}_m-1} \sum_{i_2, j_2=0}^{\bar{\nu}_n-1} C_{i_1, j_1} D_{i_2, j_2} E_{i_1+i_2 \bar{\mu}_m, j_1+j_2 \bar{\mu}_m} \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{i_1, j_1=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-1} \sum_{i_2, j_2=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-1} C_{i_1, j_1} D_{i_2, j_2} E_{i_1+i_2 \bar{\mu}_m, j_1+j_2 \bar{\mu}_m} \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} a_l b_s \sum_{i_1=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-1} \sum_{i_2=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-1} E_{i_1+i_2 \bar{\mu}_m, i_1+i_2 \bar{\mu}_m} + \\ &+ \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} a_l \sum_{i_1=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-1} \sum_{i_2=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-2} E_{i_1+i_2 \bar{\mu}_m, i_1+(i_2+1) \bar{\mu}_m} + \\ &+ \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} b_s \sum_{i_1=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-2} \sum_{i_2=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-1} E_{i_1+i_2 \bar{\mu}_m, (i_1+1)+i_2 \bar{\mu}_m} \\ &+ \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{i_1=\bar{\mu}_l}^{\bar{\mu}_{l+1}-2} \sum_{i_2=\bar{\nu}_s}^{\bar{\nu}_{s+1}-2} E_{i_1+i_2 \bar{\mu}_m, i_1+\bar{\mu}_m i_2+\bar{\mu}_m+1}. \end{aligned}$$

□

Observação 3.13. Note que o teorema anterior mostra que:

$$\rho_{\mu, \nu}(J_\mu(a) \otimes J_\nu(b)) \neq \rho_{\nu, \mu}(J_\nu(b) \otimes J_\mu(a)).$$

inclusive no caso $\mu = \nu > 1$ e $a \neq b$. De fato, temos que:

$$\begin{aligned} \rho_{\mu,\nu}(J_\mu(a) \otimes J_\nu(b)) &= ab \sum_{i=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\nu-1} E_{i+\mu k, i+\mu k} + b \sum_{i=0}^{\mu-2} \sum_{k=0}^{\nu-1} E_{i+\mu k, i+\mu k+1} \\ &\quad + a \sum_{i=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\nu-2} E_{i+\mu k, i+\mu k+\mu} + \sum_{i=0}^{\mu-2} \sum_{k=0}^{\nu-2} E_{i+\mu k, i+\mu k+\mu+1}. \end{aligned}$$

Além disso, temos o seguinte teorema

Teorema 3.14 ([FNZ24]). *Sejam $p, q \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$.*

1. *Se $ab \neq 0$,*

$$\rho_{p,q}(J_p(a) \otimes J_q(b)) \smile \oplus_{k=1}^{\min\{p,q\}} J_{p+q-2k+1}(ab).$$

2. *Se $a \neq 0$,*

$$\rho_{p,q}(J_p(a) \otimes J_q(0)) \smile \oplus_{k=1}^p J_q(a).$$

3. *Se $b \neq 0$,*

$$\rho_{p,q}(J_p(0) \otimes J_q(b)) \smile \oplus_{k=1}^q J_p(b).$$

4.

$$\rho_{p,q}(J_p(0) \otimes J_q(0)) \smile \oplus_{k=1}^{\min\{p,q\}-1} (J_k(0) \oplus J_k(0)) \oplus_{k=1}^{|p-q|+1} J_{\min\{p,q\}}(0).$$

Prova. O resultado decorre do Teorema de Aitken, Roth e Brualdi ver [[Ait35] Teorema 4.6], [[Rot34], [Bru85]] $\square$

3.2 Contração-dilatação universal

Nesta seção, nos mergulhamos na maior propriedade da aplicação *produto tensorial* ρ_{PT} com respeito de alguma outra aplicação de contração-dilatação universal ρ_F . E no caso $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$ toma lugar a aplicação de contração-dilatação universal $\rho_{F_{UN}}$. Apresentamos também o operador média, uma ferramenta que estabelece a conexão entre a aplicação de contração-dilatação ρ_F e a aplicação *produto tensorial*.

A seguir consideraremos o caso $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$ e como é a aplicação de contração-dilatação no conjunto $\text{Mat}(\mathbb{A})$.

Definição 3.15. *Se $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$ e $F_{UN} : \mathbb{Z}^l \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função bijetiva a aplicação de contração-dilatação dada pela função F_{UN} é definida por:*

$$\rho_{F_{UN}}(T) := \sum_{\vec{i}, \vec{j} \in \mathbb{Z}^l} T_{\vec{i}, \vec{j}} E_{F_{UN}(\vec{i}), F_{UN}(\vec{j})}.$$

Vamos chamar a aplicação $\rho_{F_{UN}}$ como aplicação de contração-dilatação universal

A aplicação recentemente definida vai ser de utilidade quando $\mathbb{A}$ é um conjunto infinito e poder extrair algumas características segundo seja o caso. Consideremos $\mathbb{A}$ um conjunto retangular como foi definido em 3.1. Se $\mathbb{A}$ é um conjunto finito, junto com a aplicação de permutação definida na equação 2.7 temos o seguinte resultado que caracteriza a aplicação *produto tensorial* ρ_{PT} .

Teorema 3.16 ([FNZ24]). *Seja $\mathbb{A}$ um conjunto retangular finito, e $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função injetiva, então a aplicação ρ_F é semelhante ao produto tensorial ρ_{PT} .*

Prova. Sejam $n_1, n_2, \dots, n_l$ inteiros positivos, $\mathbb{A}_i = \{0, \dots, n_i - 1\}$ onde $i = 1, \dots, l$. $\mathbb{A}$ é retangular, portanto $\mathbb{A} = \prod_{i=1}^l \mathbb{A}_i$. Sejam F e F_{PT} , sabemos que F_{PT} é injetiva e por hipótese F também é, por outra parte $F_{PT}(\mathbb{A}) = \{0, \dots, n_1 n_2 \dots n_l - 1\}$, e vamos assumir sem perda de generalidade que $F(\mathbb{A}) = F_{PT}(\mathbb{A})$, por tanto, existe uma permutação $\gamma : F(\mathbb{A}) \rightarrow F_{PT}(\mathbb{A})$ tal que $F_{PT} = \gamma \circ F$. Agora vamos considerar a matriz $U \in \rho_{PT}(\text{Mat}(\mathbb{A}))$, $U = \sum_{\bar{i} \in \mathbb{A}} E_{\gamma \circ F(\bar{i}), F(\bar{i})}$ e notemos que:

$$\begin{aligned} U \rho_F(T) U^{-1} &= \left(\sum_{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \in \mathbb{A}} E_{\gamma \circ F(\bar{k}), F(\bar{k})} T_{\bar{i}, \bar{j}} E_{F(\bar{i}), F(\bar{j})} \right) U^{-1} \\ &= \left(\sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{j}} E_{\gamma \circ F(\bar{i}), F(\bar{j})} \right) U^{-1} \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{j}} E_{\gamma \circ F(\bar{i}), F(\bar{j})} E_{F(\bar{k}), \gamma \circ F(\bar{k})} \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{A}} T_{\bar{i}, \bar{j}} E_{\gamma \circ F(\bar{i}), \gamma \circ F(\bar{j})} \\ &= \rho_{PT}(T) \end{aligned}$$

□

O teorema anterior nos fornece uma forma para caracterizar a aplicação produto tensorial ρ_{PT} no caso $\mathbb{A}$ um conjunto retangular finito, porém faz sentido questionar-nós se pode-se estabelecer uma caracterização análoga para a aplicação $\rho_{F_{UN}}$ apresentada na Definição 3.15.

Definição 3.17. *Seja $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$ e $T \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ dizemos que T tem suporte finito se existe $\bar{i} \in \mathbb{A}$ tal que $T_{\bar{k}, \bar{l}} = 0$ para todo par $(\bar{k}, \bar{l})$ satisfazendo um dos seguintes casos:*

- $\bar{k} \prec \bar{i}$ e $\bar{l} \prec \bar{i}$.
- $\bar{k} \prec \bar{i}$ e $\bar{i} \prec \bar{l}$.

- $\bar{i} \prec \bar{k}$ e $\bar{l} \prec \bar{i}$.
- $\bar{i} \prec \bar{k}$ e $\bar{i} \prec \bar{k}$.

A definição anterior básicamente diz-nos que T tem *suporte finito* se existe uma submatriz quadrada finita tal que todas as entradas fora de tal submatriz são nulas.

Se considerarmos $P \subset \text{Mat}(\mathbb{A})$, $F := \{T \in \text{Mat}(\mathbb{A}) \mid T \text{ tem suporte finito}\}$ então temos o seguinte corolário do Teorema 3.16

Corolário 3.18. *Seja $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$ e $F_{UN} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma bijeção. Então $\rho_{F_{UN}} \upharpoonright_P$ é similar à ρ_{PT} .*

Prova. Consideremos a submatriz finita de T , Q tal que todas as entradas fora de Q são nulas, e consideremos $F_{UN} \upharpoonright_R$ onde R é o conjunto que indexa Q , e o resultado segue de 3.16. $\square$

A seguir, introduziremos o operador de média, que nos permitirá caracterizar a aplicação ρ_{PT} .

Definição 3.19. *Dada uma função $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ fixa. Definimos o operador de média:*

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Mat}(\mathbb{A}) &\longrightarrow \text{Mat}(\mathbb{A}) \\ T &\longmapsto \Psi(T) := \text{Id} * T * \text{Id}. \end{aligned}$$

Teorema 3.20 ([FNZ24]). *Seja $\mathbb{A}$ um conjunto retangular finito, e $F : \text{Mat}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ então a aplicação de contração-dilatação ρ_F , é uma composição do operador de média Ψ , e uma aplicação de contração-dilatação semelhante a aplicação produto tensorial ρ_{PT} .*

Prova. Tomemos $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$, de acordo com a Proposição 2.31 temos:

$$\Psi(T)_{\bar{i}, \bar{j}} = \sum_{\substack{\bar{m} \sim_{F\bar{i}} \\ \bar{l} \sim_{F\bar{j}}} T_{\bar{m}, \bar{l}}. \quad (3.8)$$

. Seja $T \in \Psi(\text{Mat}(\mathbb{A})) \cap \text{Ker} \rho_F$, então $T = \Psi(Q)$ para algum $Q \in \text{Mat}(\mathbb{A})$ e $\rho_F(T) = 0$, da equação 3.8 e do Teorema 2.32 obtemos que T é a matriz nula em $\text{Mat}(\mathbb{A})$ portanto $\rho_F|_{\text{Im}(\Psi(\text{Mat}(\mathbb{A})))}$ é injetiva, pelo Teorema 3.16 $\rho_F|_{\text{Im}(\Psi(\text{Mat}(\mathbb{A})))}$ é semelhante á ρ_{PT} . $\square$

Corolário 3.21. *Se $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$ e $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ então ρ_F é uma composição do operador de média e à aplicação de contração-dilatação universal.*

Prova. Neste caso, $\rho_F|_{\text{Im}(\Psi(\text{Mat}(\mathbb{A})))}$ é semelhante à $\rho_{F_{UN}}$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [Ait35] AC Aitken. The normal form of compound and induced matrices. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):354–376, 1935.
- [Bru85] Richard A Brualdi. Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products. *Linear Algebra and its Applications*, 71:31–47, 1985.
- [BS05] Christian F Beckmann and Stephen M Smith. Tensorial extensions of independent component analysis for multisubject fmri analysis. *Neuroimage*, 25(1):294–311, 2005.
- [C⁺02] Pierre Comon et al. Tensor decompositions: state of the art and applications. In *Institute of Mathematics and its Applications conference series*, volume 71, pages 1–24, 2002.
- [FNZ24] Vyacheslav Futorny, Mikhail Neklyudov, and Kaiming Zhao. Matrix stretching. *Open Mathematics*, 22(1):20240031, 2024.
- [Gib84] JW Gibbs. *Elements of Vector Analysis: Arranged for the Use of Students in Physics*. Morehouse & Taylor, 1884.
- [Gra18] Alexander Graham. *Kronecker products and matrix calculus with applications*. Courier Dover Publications, 2018.
- [Hac12] Wolfgang Hackbusch. *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, volume 42. Springer, 2012.
- [Hit27] Frank L Hitchcock. The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products. *Journal of Mathematics and Physics*, 6(1-4):164–189, 1927.
- [HPS83] Harold V Henderson, Friedrich Pukelsheim, and Shayle R Searle. On the history of the kronecker product. *Linear and Multilinear Algebra*, 14(2):113–120, 1983.
- [RLC00] MMG Ricci and Tullio Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54(1):125–201, 1900.

- [Rot34] W. E. Roth. On direct product matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(6):461 – 468, 1934.
- [Syl09] James Joseph Sylvester. *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, volume 3. University Press, 1909.
- [Voi98] W. Voigt. *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung*. Von Veit, 1898.
- [Whi38] Hassler Whitney. Tensor products of Abelian groups. *Duke Mathematical Journal*, 4(3):495 – 528, 1938.