

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

UM PRINCÍPIO VARIACIONAL COM APLICAÇÕES EM
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E ANÁLISE

Thiago Ferreira Cacao

MANAUS

2024

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

**UM PRINCÍPIO VARIACIONAL COM APLICAÇÕES EM
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E ANÁLISE**

por

Thiago Ferreira Cacau

sob a orientação do

Prof. Dr. Alireza Khatib

MANAUS
2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C118p	Cacau, Thiago Ferreira Um princípio variacional com aplicações em equações diferenciais parciais e análise / Thiago Ferreira Cacau . 2024 112 f.: 31 cm. Orientador: Alireza Khatib Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas. 1. Princípio variacional. 2. Equações elípticas semilineares. 3. Ponto fixo. 4. Ponto crítico. I. Khatib, Alireza. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título
-------	---

Esta dissertação é dedicada aos meus pais
Edemilson Cacao de Sousa e Fátima Gracilene Ferreira Cacao

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela saúde e força que me concedeu para superar as dificuldades.

Agradeço aos meus pais, Edemilson Cacao de Sousa e Fátima Gracilene Ferreira Cacao, e à minha irmã, Amanda Ferreira Cacao, por tudo que me ensinaram, pelo amor, pela confiança e pelo incentivo que me deram para seguir meus sonhos. O amor que vocês têm por mim é o que me estimula a lutar e vencer todos os dias.

Agradeço ao meu avô Samuel Soares Sousa por sempre me dar forças e me apoiar nos estudos.

Agradeço aos meus sobrinhos recém-nascidos Samuel Cacao Garcia e Isaac Cacao Garcia por chegarem nesse mundo iluminando nossa família com paz e amor.

Ao meu mentor e amigo, Professor Dr. Alireza Khatib, a minha mais profunda gratidão pelos conselhos, pela dedicação incansável, pela compreensão inabalável e pela fé em minhas capacidades.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática do ICE-UFAM. Em particular à Professora Dra. Somayeh Mousavinasr e ao Professor Dr. Thiago Rodrigo Alves pelas valiosas observações e correções.

Agradeço ao meu grande amor, Vitoria Gabrielle Silva Saraiva Leão, pelo amor, carinho e apoio de todos os dias.

Agradeço aos meus amigos Jamile Ibernnon, Jardel Zidanny, Raione Souza e Thiago Leão por serem os melhores amigos que uma pessoa poderia desejar.

Agradeço aos meus amigos do mestrado por serem as melhores pessoas que tive o prazer de conhecer na pós-graduação. Em particular, ao meu amigo Vinícius do Rosário das Chargas, pela amizade, o apoio e pelas incríveis playlists tocadas em nossos estudos.

Agradeço à FAPEAM pelo apoio financeiro durante o mestrado.

*Trabalho duro é inútil para aqueles
que não acreditam em si mesmos.*

-Naruto Uzumaki

RESUMO

Este trabalho explora uma abordagem variacional que permite a aplicação da teoria do ponto crítico dentro de subconjuntos convexos e fechados adequados de um espaço de Banach, a fim de identificar pontos críticos para o espaço todo. Este princípio possui diversas aplicações em Equações Diferenciais Parciais (EDPs) e Análise Não-Linear, fornecendo uma perspectiva alternativa e generalizando resultados, como os da teoria do ponto fixo.

Palavras Chaves: Princípio Variacional, Equações Elípticas, Ponto Fixo, Teoria do Ponto Crítico.

ABSTRACT

This work presents a comprehensive variational principle that allows the application of critical point theory within proper convex and closed subsets of a Banach space to identify critical points for the entire space. This principle has various applications in both local and nonlocal Partial Differential Equations (PDEs) and generalizing several results in nonlinear analysis, including fixed point theory and the principle of symmetric criticality.

Keywords: Variational Principle, Elliptic Equations, Fixed Point, Critical Points Theory.

Lista de Símbolos

X^*	Dual do espaço X ;
$B_r(a)$	Bola centrada em a com raio r ;
B_1	Bola unitária de centro 0 e raio 1;
$\partial B_r(a)$	Fronteira da bola centrada em a com raio r ;
∂B_1	Fronteira da bola unitária centrada em 0 e raio 1;
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto Ω ;
$\sigma(X, X^*)$	Topologia Fraca;
$\sigma(X^*, X)$	Topologia Fraca-Estrela;
$u_n \longrightarrow u$	Convergência forte (em norma);
$u_n \xrightarrow{w} u$	Convergência fraca;
$u_n \xrightarrow{w^*} u$	Convergência fraca-estrela;
$u_n \longrightarrow u$ q.t.p em Ω	Convergência em quase todo ponto x em Ω ;
q.t.p	Quase todo Ponto;
$ U $	Medida de $U \subset \mathbb{R}^n$;
2^X	Conjunto das partes de X ;
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$	Gradiente de u ;
$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u ;
$C^1(X, \mathbb{R})$	Espaço das funções continuamente diferenciáveis de X em $\mathbb{R}$;
$C(\overline{U})$	Espaço das funções contínuas;
$C^k(\overline{U})$	Espaço das funções k-vezes diferenciáveis;
$C_0^\infty(U)$	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em U ;
$L^p(\Omega)$	Espaço de Lebesgue de funções p-integráveis em Ω ;
$L_{loc}^p(U)$	Espaço das funções localmente integráveis em U ;
$p^* = \frac{np}{n-p}$	Expoente Crítico de Sobolev.

Sumário

Introdução	10
1 Análise Convexa	12
1.1 Função Convexa	13
1.2 Função Semicontínua Superior e Inferior	16
1.3 Subdiferencial de uma Função Convexa	18
1.4 Gâteaux-diferenciabilidade e Derivada Direcional de Clarke	25
1.5 Aplicação Multi-Valor e Aplicação Dualidade Normalizada	34
2 O Princípio Variacional	41
2.1 Ponto Crítico	41
2.2 Teorema do Passo da Montanha	45
2.3 Princípio Variacional	52
3 Aplicações	68
3.1 Equação Elíptica Semilinear	68
3.2 Equação Elíptica Semilinear Não-Homogênea	76
3.3 Pontos Críticos de Funções Localmente Lipschitziana em Subconjuntos Convexos	78
3.4 Ponto Fixo de uma Aplicação Multivalor	84
A	89
A.1 Espaço Normado, Espaço de Banach	89
A.2 Espaço de Hilbert	90
A.3 Teoremas de Hahn-Banach	91
A.4 Espaços Reflexivos	92
A.5 Espaços Vetoriais Topológicos	93
A.6 Topologia Fraca	93

<i>SUMÁRIO</i>	9
B	96
B.1 Noções Básicas de Espaço de Sobolev	96
Referências Bibliográficas	110

Introdução

O cálculo variacional é um ramo da matemática que estuda máximos e mínimos de funcionais em espaços de Banach (geralmente espaço de funções). Um caso particular do cálculo variacional é visto no curso de cálculo diferencial, quando investigamos máximos e mínimos de funções de uma variável real. Seu início é associado ao famoso problema da braquistócrona, proposto por Johann Bernoulli em 1696, que consistia em encontrar o caminho de curva mais rápida para uma partícula se mover entre dois pontos sob a influência da gravidade. Matemáticos renomados, como Isaac Newton, Jacob Bernoulli e Gottfried Leibniz, foram atraídos pelo problema, levando ao desenvolvimento de técnicas matemáticas que seriam as bases do cálculo variacional. Esse campo evoluiu no século XX, com importantes descobertas de matemáticos como Ivar Ekeland, famoso pelo "Princípio Variacional de Ekeland [11]", que generaliza a condição de compacidade de Palais-Smale, uma ferramenta poderosa em otimização e análise não-linear, permitindo a aproximação de mínimos em problemas variacionais complexos. Ralph Tyrrell Rockafellar fez descobertas fundamentais que estabeleceram uma ponte entre a análise convexa e o cálculo variacional, principalmente através do uso de aplicações de dualidade e subdiferenciais. Seu livro "Convex Analysis [22]" é uma referência clássica no campo e introduziu muitos conceitos e técnicas que são agora ferramentas padrão na teoria da otimização. Francis Clarke, por sua vez, fez descobertas significativas no desenvolvimento do cálculo subdiferencial e no estudo de problemas não-suaves no cálculo de variações. Sua teoria da análise não-suave, vista em [9], estende a análise clássica para funções que não são necessariamente diferenciáveis.

A busca pela existência de soluções abrangem vários problemas na matemática. No âmbito das Equações Diferenciais Parciais isso é equivalente a encontrar um ponto crítico de um operador funcional utilizando princípios variacionais. Apresentaremos uma abordagem variacional proposto por Abbas Moameni em [19], que propõe o seguinte problema a ser resolvido: Sejam X um espaço de Banach e $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$. Considere K um subconjunto convexo e fechado de X .

Suponha que Ψ é Gâteaux-diferenciável em K , e denote por Ψ' o Gâteaux-diferencial de Ψ . Dada uma função $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, o problema é encontrar $u_0 \in K$ tal que

$$\Psi'(u_0) = \varphi'(u_0).$$

Vamos explorar diversas maneiras de resolver esse problema, abrangendo desde soluções específicas até abordagens mais gerais. Além disso, discutiremos como tornar essas soluções ainda mais amplas e aplicáveis a diferentes contextos. O princípio variacional abre caminho para uma vasta gama de aplicações em problemas de EDPs e Análise.

No capítulo 1, abordaremos conceitos básicos de análise convexa como funções convexas, semicontinuidade, subdiferenciabilidade, diferenciabilidade de Gâteaux e derivada direcional generalizada (derivada direcional de Clarke). Além disso, serão explorados resultados importantes de espaços de Sobolev e aplicações ditas Dualidade Normalizadas.

No capítulo 2, abordaremos conceitos de Análise Não-Linear. Começaremos com a definição de ponto crítico para funções não-diferenciáveis e seus resultados principais. Em seguida, veremos o famoso Teorema do Passo da Montanha e sua generalização, que é uma ferramentas poderosas para encontrar soluções não-triviais em equações diferenciais. Por fim, apresentaremos o Princípio Variacional, que é o assunto principal dessa dissertação que fornece um método alternativo para encontrar soluções para os problemas propostos.

O Capítulo 3, será composto por algumas aplicações de Equações Diferenciais Parciais e Análise, tais como o Equações Elípticas Semilineares Côncavo-Convexo e Equações Elípticas Não-Homogêneas. Por último, veremos o estudo da Teoria do Ponto Fixo e de Pontos Críticos de Funções Localmente Lipschitziana em subconjuntos Convexos e Fechados.

No apêndice, serão apresentados alguns resultados de Análise Funcional que serão frequentemente utilizados ao longo do nosso estudo.

Capítulo 1

Análise Convexa

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns resultados relevantes da teoria da análise convexa que serão úteis ao longo do nosso estudo. O principal espaço vetorial topológico com o qual iremos trabalhar será o espaço localmente convexo, conhecido por sua propriedade de permitir a definição de seminormas em seus elementos. Sua estrutura permite estabelecer tanto o teorema da categoria de Baire quanto o teorema de Hahn-Banach, tornando-o especialmente útil na análise funcional.

Sejam X um espaço vetorial topológico localmente convexo (ou simplesmente, espaço localmente convexo), X^* o seu dual topológico e denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o pareamento bilinear entre X^* e X . A topologia fraca em X será denotada por $\sigma(X, X^*)$ e a topologia fraca-estrela em X^* será denotada por $\sigma(X^*, X)$.

Antes de avançarmos, vamos estabelecer alguns conceitos básicos importantes que serão fundamentais daqui pra frente.

Seja a função $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\Psi) &= \{u \in X : \Psi(u) < +\infty\} \\ \text{Epi}(\Psi) &= \{(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \Psi(u) \leq \lambda\} \end{aligned}$$

chamados de Domínio efetivo de Ψ e Epígrafo de Ψ , respectivamente.

Definição 1.1 (Hiperplano Fechado [7]). *Dado $u^* \in X^*$ e $\alpha, k \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\mathcal{H} := \{(u, t) \in X \times \mathbb{R} : \langle u^*, u \rangle + kt = \alpha\}$$

é dito hiperplano fechado em $X \times \mathbb{R}$. Além disto,

- i) Se $k \neq 0$, então dizemos que o hiperplano fechado $\mathcal{H}$ é dito não-vertical e é definido por $\mathcal{H} = \{(u, t) \in X \times \mathbb{R} : \langle u^*, u \rangle + k = t\}$ (para algum outro $k \in \mathbb{R}$ e $u^* \in X^*$).*

ii) Se $k = 0$, então dizemos que o hiperplano fechado $\mathcal{H}$ é vertical e é definido por $\mathcal{H} = \{(u, t) \in X \times \mathbb{R} : \langle u^*, u \rangle = \alpha\}$.

Um Hiperplano não-vertical $\mathcal{H}$ em $X \times \mathbb{R}$ é dito Hiperplano de Suporte para $Epi(\Psi)$ no ponto $(u_0, \Psi(u_0))$ se $(u_0, \Psi(u_0)) \in \mathcal{H}$ e $Epi(\Psi)$ está contido em um dos subespaços fechados de $\mathcal{H}$. Neste caso, $\mathcal{H}$ tem a forma

$$\mathcal{H} = \{(u, t) \in X \times \mathbb{R} : \langle u^*, u - u_0 \rangle + \Psi(u_0) = t\}.$$

Além disto,

$$Epi(\Psi) \subset \{(u, t) \in X \times \mathbb{R} : \langle u^*, u - u_0 \rangle + \Psi(u_0) \leq t\}.$$

1.1 Função Convexa

A função $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dita convexa se

$$\Psi(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha \Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v), \quad (1.1)$$

para todo $u, v \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Observação 1.2. Se $u \neq v$, então desigualdade é estrita e Ψ é chamada de estritamente convexa.

Se a função Ψ for convexa, podemos mostrar por indução que, para cada elemento $u_1, u_2, \dots, u_n \in X$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ com $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, tem-se

$$\Psi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \Psi(u_j).$$

Além disto se $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa, então

$$\frac{\Psi(t_2) - \Psi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\Psi(t_3) - \Psi(t_1)}{t_3 - t_1} \leq \frac{\Psi(t_3) - \Psi(t_2)}{t_3 - t_2}, \quad (1.2)$$

para $t_1 < t_2 < t_3$ tal que $t_1, t_2, t_3 \in Dom(\Psi)$.

Seja A um subconjunto de X . O conjunto denotado por

$$co(A) := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j : \alpha_j \geq 0, u_j \in A (j = 1, \dots, n), \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \right\}$$

é chamado de envoltória convexa. Além disto, $co(A)$ é o menor convexo que contém A .

Proposição 1.3 ([4][7][12]). *Seja $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Então*

- (a) *Se Ψ é convexa, então $Dom(\Psi)$ é convexo.*
- (b) *Ψ é convexa se, e somente se, $Epi(\Psi)$ é um conjunto convexo.*
- (c) *Se $\Psi_1, \Psi_2 : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ são convexas, então $\Psi_1 + \Psi_2$ é convexa.*
- (d) *Seja a família $(\Psi_j)_{j \in I}$ de funções convexas, então $\Psi(u) = \sup_{j \in I} \Psi_j(u)$, para todo $u \in X$, é convexa.*

Demonstração. Para provar o item (a), sejam $u, v \in Dom(\Psi)$, então $\Psi(u) < +\infty$ e $\Psi(v) < +\infty$. Como Ψ é convexa, então para todo $\alpha \in [0, 1]$ segue

$$\Psi(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v) < +\infty.$$

Portanto, $\alpha u + (1 - \alpha)v \in Dom(\Psi)$. O que prova $Dom(\Psi)$ é convexo.

Para provar o item (b), sejam $(u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2) \in Epi(\Psi)$, então temos $\Psi(u_1) \leq \lambda_1$ e $\Psi(u_2) \leq \lambda_2$. Logo, para todo $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$\Psi(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha\Psi(u_1) + (1 - \alpha)\Psi(u_2) \leq \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2.$$

Portanto,

$$\alpha(u_1, \lambda_1) + (1 - \alpha)(u_2, \lambda_2) = (\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2, \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2) \in Epi(\Psi),$$

isto prova que $Epi(\Psi)$ é um conjunto convexo.

Reciprocamente, dado $u, v \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$, então temos duas possibilidades:

- Se $\Psi(u) = +\infty$ ou $\Psi(v) = +\infty$, então vale

$$\Psi(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v).$$

- Se $\Psi(u) < \infty$ e $\Psi(v) < \infty$, então $(u, \Psi(u)), (v, \Psi(v)) \in Epi(\Psi)$. Como $Epi(\Psi)$ é convexa, então

$$\alpha(u, \Psi(u)) + (1 - \alpha)(v, \Psi(v)) = (\alpha u + (1 - \alpha)v, \alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v)) \in Epi(\Psi).$$

Logo,

$$\Psi(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v),$$

o que prova que Ψ é convexa.

Para provar o item (c), sejam $u, v \in [\Psi \leq \alpha]$, então

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha u + (1 - \alpha)v) &\leq \alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v) \\ &\leq \alpha\lambda + (1 - \alpha)\lambda \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

Logo, $\alpha u + (1 - \alpha)v \in [\Psi \leq \lambda]$, provando assim que $[\Psi \leq \lambda]$ é convexa.

Para provar o item (d), note que, para cada $j \in I$ e $u \in X$, tem-se $\Psi_j(u) \leq \Psi(u)$. Portanto, para todo $u, v \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\Psi_j(\alpha u + (1 - \alpha)v) &\leq \alpha\Psi_j(u) + (1 - \alpha)\Psi_j(v) \\ &\leq \alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v).\end{aligned}$$

Assim, $\alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v)$ é cota superior do conjunto dos valores $\Psi_j(\alpha u + (1 - \alpha)v)$ para todo $j \in I$. Logo,

$$\Psi(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha\Psi(u) + (1 - \alpha)\Psi(v).$$

Isto prova que $\Psi(u) = \sup_{j \in I} \Psi_j(u)$, para todo $u \in X$, é uma função convexa. ■

Uma pergunta que podemos nos fazer é por que estamos considerando funções que permitem o valor $+\infty$? Seja o subconjunto $\mathcal{A} \subset X$, podemos associar a esse conjunto uma função

$$\delta_{\mathcal{A}}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \mathcal{A} \\ +\infty, & u \notin \mathcal{A} \end{cases} \quad (1.3)$$

chamada de função indicadora. A função indicadora é um exemplo de função que assume valores em $+\infty$. Observe que o subconjunto $\mathcal{A}$ é convexo se, e somente se, a função $\delta_{\mathcal{A}}$ é convexa. Portanto, o estudo dos conjuntos convexos se reduz ao estudo das funções convexas.

Lema 1.4 ([7]). *Seja a função $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, então existem as derivadas laterais de Ψ em algum ponto $t \in \text{Dom}(\Psi)$ e vale $\Psi'_-(t) \leq \Psi'_+(t)$. Ademais, se $t_1 < t_2$ tal que $t_1, t_2 \in \text{Dom}(\Psi)$, temos*

$$\Psi'_+(t_1) \leq \frac{\Psi(t_2) - \Psi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Psi'_-(t_2).$$

Demonstração. Seja $0 < h_1 < h_2$. Logo, para algum $t \in \text{Dom}(\Psi)$ tal que vale $t - h_2 < t - h_1 < t < t + h_1 < t + h_2$, temos, por (1.2):

$$\frac{\Psi(t) - \Psi(t - h_2)}{h_2} \leq \frac{\Psi(t) - \Psi(t - h_1)}{h_1} \leq \frac{\Psi(t + h_1) - \Psi(t)}{h_1} \leq \frac{\Psi(t + h_2) - \Psi(t)}{h_2}.$$

A função $h \mapsto \frac{\Psi(t + h) - \Psi(t)}{h}$ não aumenta quando $h \rightarrow 0^+$ e é limitada inferiormente, então o limite $\Psi'_+(t)$ existe.

Analogamente, a função $h \mapsto \frac{\Psi(t) - \Psi(t - h)}{h}$ não decresce quando $h \rightarrow 0^-$ e é limitada superiormente, então o limite $\Psi'_-(t)$ existe. Portanto, $\Psi'_-(t) \leq \Psi'_+(t)$

Agora, note que se $h > 0$ e $t_1 < t_2$ tal que $t_1, t_2 \in \text{Dom}(\Psi)$, temos

$$\Psi'_+(t_1) \leq \frac{\Psi(t_1 + h) - \Psi(t_1)}{h} \quad \text{e} \quad \Psi'_-(t_2) \geq \frac{\Psi(t_2) - \Psi(t_2 - h)}{h}.$$

Portanto, tomando $h = t_2 - t_1$, obtemos

$$\Psi'_+(t_1) \leq \frac{\Psi(t_2) - \Psi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Psi'_-(t_2).$$

■

Observação 1.5. Como a função $\psi : (0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(h) = \frac{\Psi(t + h) - \Psi(t)}{h}$ é crescente, então existe a derivada lateral $\Psi'_+(t)$. De fato, considere o conjunto dado por $\mathcal{K} = \{\psi(h) : h > 0\}$ que é limitado inferiormente e $z = \inf \mathcal{K}$, então existe $h_0 > 0$ tal que $z \leq \psi(h_0) \leq z + \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$. Note que $\psi((0, h_0)) \subset (z, \psi(h_0)) \subset (z, z + \varepsilon)$, o que implica em ψ é contínua à direita em 0 e z é esse limite. Portanto, segue que $\psi_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \psi(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(t + h) - \Psi(t)}{h} = \Psi'_+(t)$. Analogamente, podemos também provar que $\Psi'_-(t)$ existe.

1.2 Função Semicontínua Superior e Inferior

Definição 1.6 ([4]). A função $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dita

a) Semicontínua superior, se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$[\Psi < \lambda] := \{u \in X : \Psi(u) < \lambda\} \tag{1.4}$$

é aberto.

b) *Semicontínua inferior*, se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$[\Psi \leq \lambda] := \{u \in X : \Psi(u) \leq \lambda\} \quad (1.5)$$

é fechado.

Propriedades:

i) Ψ é semicontínua superior se, e somente se, dado $u \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_u \subset X$ em u tal que $\Psi(v) \leq \Psi(u) + \varepsilon$ para todo $v \in V_u$. Em particular, para todo $(u_n) \subset V_u$ tal que $u_n \rightarrow u$ temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \leq \Psi(u).$$

ii) Ψ é semicontínua inferior se, e somente se, dado $u \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_u \subset X$ em u tal que $\Psi(u) - \varepsilon \leq \Psi(v)$ para todo $v \in V_u$. Em particular, para todo $(u_n) \subset V_u$ tal que $u_n \rightarrow u$ temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \geq \Psi(u).$$

iii) Se Ψ_1 e Ψ_2 é semicontínua inferior (ou semicontínua superior), então a soma $\Psi_1 + \Psi_2$ é semicontínua inferior (ou semicontínua superior).

Observação 1.7. *Algumas observações importantes que merecem destaque:*

1. Ψ é contínua se, somente se, Ψ é semicontínua inferior e superior;
2. Ψ é semicontínua inferior se, somente se, $-\Psi$ é semicontínua superior;
3. Ψ é fracamente semicontínuas inferiores (resp., fracamente semicontínuas superiores) quando a sequência $(u_n) \subset \sigma(X, X^*)$ converge para $u \in X$ no item (ii) (resp., no item i) nas propriedades.

Proposição 1.8 (Adaptado de [7]). *A função $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínua inferior (resp. fracamente semicontínua inferior) se, e somente se, $\text{Epi}(\Psi)$ for fechado (resp. fracamente fechado) em $X \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(u_n, \lambda_n) \in \text{Epi}(\Psi)$ e $(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ tal que $(u_n, \lambda_n) \rightarrow (u, \lambda)$. Como $(u_n, \lambda_n) \in \text{Epi}(\Psi)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto implica $\Psi(u_n) \leq \lambda_n$. Logo,

$$\Psi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda.$$

Portanto, $(u, \lambda) \in \text{Epi}(\Psi)$, o que implica que Ψ é fechado em $X \times \mathbb{R}$.

Reciprocamente, dado $u_0 \in X$ e a sequência $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \rightarrow u$. Suponha, por absurdo, que Ψ não é semicontínua inferior em u_0 . Isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi(u_0) > \lambda > \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n).$$

Logo, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ de tal modo que

$$\Psi(u_{n_k}) \leq \lambda < \Psi(u_0).$$

Então, $(u_{n_k}, \lambda) \in \text{Epi}(\Psi)$. Mas isso é uma contradição, pois como $u_n \rightarrow u$ e $\text{Epi}(\Psi)$ é fechado em $X \times \mathbb{R}$, temos $(u_0, \lambda) \in \text{Epi}(\Psi)$, implicando em $\Psi(u_0) \leq \lambda$. ■

Corolário 1.9 ([12]). *Toda função $\Psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ semicontínua inferior e convexa permanece semicontínua inferior quando X é munido com a topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.*

Demonstração. O $\text{Epi}(\Psi)$ é convexo e fechado, pois Ψ é semicontínua inferior e convexa (Proposição 1.8). Logo é $\sigma(X, X^*)$ -fechado, pois todo conjunto convexo e fechado é $\sigma(X, X^*)$ -fechado. ■

1.3 Subdiferencial de uma Função Convexa

A definição de subdiferenciabilidade é uma generalização da definição de diferenciabilidade para funções convexas que podem não ser diferenciáveis em todos os pontos. O subdiferencial fornece um conjunto de todas as possíveis inclinações das retas tangentes à função em um ponto dado, mesmo quando a função não é diferenciável nesse ponto.

Seja a função convexa $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $u^* \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que Ψ domina a função afim $u \mapsto \langle u^*, u \rangle - \lambda$, se $\langle u^*, u \rangle - \lambda \leq \Psi(u)$ para todo $u \in \text{Dom}(\Psi)$. Além disto, λ é uma cota superior para a função $u \mapsto \langle u^*, u \rangle - \Psi(u)$ e vale $\langle u^*, u \rangle - \Psi(u) \leq \lambda$.

Definição 1.10 (Função Conjugada [4][7]). *Seja a função convexa $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. A função $\Psi^* : X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por*

$$\Psi^*(u^*) = \sup \{ \langle u^*, u \rangle - \Psi(u) : u \in \text{Dom}(\Psi) \} \quad (1.6)$$

é chamada de função conjugada de Ψ .

Note que a função Ψ^* é convexa e semicontínua inferior em X^* . De fato, seja o ponto $u \in \text{Dom}(\Psi)$ fixado, então definimos a função afim $\Psi_u(u^*) = \langle u^*, u \rangle - \Psi(u)$ que é convexa e contínua (e portanto semicontínua inferior). Logo $\text{Epi}(\Psi_u)$ é convexa e fechada. Como $\text{Epi}(\Psi^*) = \bigcap_{u \in \text{Dom}(\Psi)} \text{Epi}(\Psi_u)$ é convexa e fechada, isto prova que Ψ^* é convexa e semicontínua inferior.

Observação 1.11. A desigualdade $\langle u^*, u \rangle - \Psi(u) \leq \Psi^*(u^*) \forall u \in \text{Dom}(\Psi), u^* \in X^*$ é conhecida como a *Desigualdade de Fenchel*, em homenagem ao matemático alemão Werner Fenchel.

Proposição 1.12 ([4][7]). *Suponha que a função $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, então $\Psi^* \not\equiv +\infty$.*

Demonstração. Seja $u_0 \in \text{Dom}(\Psi)$ e $\lambda_0 < \Psi(u_0)$, então temos que $(u_0, \lambda_0) \notin \text{Epi}(\Psi)$. Pela 2ª Forma Geométrica de Hahn-Banach, existe um hiperplano fechado H , dado por $H = \{(u, t) : \langle u^*, u \rangle + kt = \alpha\}$ que separa estritamente o conjunto $\text{Epi}(\Psi)$ (que é convexo e fechado) e o ponto (u_0, λ_0) . Logo,

$$\langle u^*, u \rangle + kt > \alpha > \langle u^*, u_0 \rangle + k\lambda_0,$$

para todo $(u, t) \in \text{Epi}(\Psi)$.

Por $\Psi \not\equiv +\infty$, temos

$$\langle u^*, u \rangle + k\Psi(u) > \alpha > \langle u^*, u_0 \rangle + k\lambda_0 \quad \forall u \in \text{Dom}(\Psi).$$

Em particular,

$$\langle u^*, u_0 \rangle + k\Psi(u_0) > \alpha > \langle u^*, u_0 \rangle + k\lambda_0,$$

o que implica que $k > 0$. Assim, para todo $u \in \text{Dom}(\Psi)$,

$$\left\langle -\frac{1}{k}u^*, u \right\rangle - \Psi(u) < -\frac{\alpha}{k},$$

o que prova $\Psi^*\left(-\frac{1}{k}u^*\right) < +\infty$. ■

Definição 1.13 (Função Biconjugada [4][7]). *Seja a função $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$. A função $\Psi^{**} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por*

$$\Psi^{**}(u) = \sup\{\langle u^*, u \rangle - \Psi^*(u^*) : u^* \in X^*\} \quad (1.7)$$

é chamada de função biconjugada de Ψ .

Da mesma forma de Ψ^* , a função biconjugada Ψ^{**} é convexa e semicontínua inferior.

Observação 1.14. Note que $\langle u^*, u \rangle - \Psi^*(u^*) \leq \Psi(u)$ para todo $u \in X$, então vale que $\Psi^{**}(u) \leq \Psi(u)$.

Proposição 1.15 (Fenchel-Moreau [4][7]). Suponha que a função $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, então $\Psi^{**} = \Psi$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes:

Caso particular: Suponhamos que $\Psi \geq 0$. É claro que $\Psi^{**} \leq \Psi$ pela observação 1.14. Agora, para mostrar que $\Psi^{**} \geq \Psi$, vamos assumir, por absurdo, que existe $u_0 \in X$ tal que $\Psi^{**}(u_0) < \Psi(u_0)$, então $(u_0, \Psi^{**}(u_0)) \notin \text{Epi}(\Psi)$. Pela 2ª Forma Geométrica de Hahn-Banach, existe um hiperplano fechado que separa estritamente o conjunto $\text{Epi}(\Psi)$ e o ponto $(u_0, \Psi^{**}(u_0))$. Isto é, existe $u^* \in X^*$ e $k, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle u^*, u \rangle + kt > \alpha > \langle u^*, u_0 \rangle + k\Psi^{**}(u_0) \quad \forall (u, t) \in \text{Epi}(\Psi) \quad (1.8)$$

Então $k \geq 0$, pois se $k < 0$ e fazendo $t \rightarrow +\infty$, isto implicaria numa contradição.

Seja $\varepsilon > 0$. Pelo lado esquerdo de (1.8), temos

$$\langle u^*, u \rangle + (k + \varepsilon)\Psi(u) \geq \alpha \quad \forall u \in \text{Dom}(\Psi).$$

Assim,

$$\Psi^*\left(-\frac{u^*}{k + \varepsilon}\right) \leq -\frac{\alpha}{k + \varepsilon}.$$

Segue da definição de Ψ^{**} que

$$\begin{aligned} \Psi^{**}(u_0) &\geq \left\langle -\frac{u^*}{k + \varepsilon}, u_0 \right\rangle - \Psi^*\left(-\frac{u^*}{k + \varepsilon}\right) \geq \left\langle -\frac{u^*}{k + \varepsilon}, u_0 \right\rangle + \frac{\alpha}{k + \varepsilon} \\ &\implies \left\langle \frac{u^*}{k + \varepsilon}, u_0 \right\rangle + \Psi^{**}(u_0) \geq \frac{\alpha}{k + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Portanto, multiplicando a desigualdade acima por $k + \varepsilon$, temos

$$\langle u^*, u_0 \rangle + (k + \varepsilon)\Psi^{**}(u_0) \geq \alpha,$$

o que contradiz o lado direito de (1.8). Isto prova que $\Psi^{**} = \Psi$, para o caso $\Psi \geq 0$.

Caso geral: Seja $u_0^* \in \text{Dom}(\Psi^*)$, definimos a função

$$\Phi(u) = \Psi(u) - \langle u_0^*, u \rangle + \Psi^*(u_0^*),$$

então Φ é convexa, semicontínua inferior, $\Phi \not\equiv +\infty$ e $\Phi \geq 0$ pela Desigualdade de Fenchel. Pelo caso particular, temos $\Phi^{**} = \Phi$. Note que

$$\begin{aligned}\Phi^*(u^*) &= \sup_{u \in X} (\langle u^*, u \rangle - \Phi(u)) \\ &= \sup_{u \in X} (\langle u^*, u \rangle - \Psi(u) + \langle u_0^*, u \rangle - \Psi^*(u_0^*)) \\ &= \sup_{u \in X} (\langle u^* + u_0^*, u \rangle - \Psi(u) - \Psi^*(u_0^*)) \\ &= \Psi^*(u^* + u_0^*) - \Psi^*(u_0^*)\end{aligned}$$

e, da mesma maneira,

$$\Phi^{**}(u) = \Psi^{**}(u) - \langle u_0^*, u \rangle + \Psi^*(u_0^*).$$

Desde que $\Phi^{**} = \Phi$, segue $\Psi^{**} = \Psi$. ■

Definição 1.16 (Subgradiente [4][7]). *Sejam $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $u \in \text{Dom}(\Psi)$. Dizemos que $u^* \in X^*$ é subgradiente de Ψ em u se*

$$\langle u^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u),$$

para todo $v \in X$.

A coleção de todos os subgradientes de Ψ em u é denominada o *subdiferencial de Ψ em u* , e é representada por:

$$\partial\Psi(u) := \{u^* \in X^* : \langle u^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u), \forall v \in X\}.$$

Observação 1.17.

1. Se $u \notin \text{Dom}(\Psi)$, então $\partial\Psi(u) = \emptyset$;
2. Se $\partial\Psi(u) \neq \emptyset$, então Ψ é dita *subdiferenciável em u* ;
3. Uma função Ψ *subdiferenciável* é convexa e semicontínua inferior em um subconjunto aberto e convexo $D \subset \text{Dom}(\Psi)$. De fato, sejam $u_1, u_2 \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$, então $u := \alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 \in D$ e para $u^* \in \partial\Psi(u)$, temos

$$\Psi(u_1) \geq \Psi(u) + \langle u^*, u_1 - u \rangle \quad \text{e} \quad \Psi(u_2) \geq \Psi(u) + \langle u^*, u_2 - u \rangle.$$

Isto implica em $\alpha\Psi(u_1) + (1 - \alpha)\Psi(u_2) \geq \Psi(u) = \Psi(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2)$. Agora, para mostrar a semicontinuidade inferior, considere $u \in D$, V_u uma vizinhança de u em

D e $u^* \in \partial\Psi(u)$. Então, temos

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in V_u.$$

Isto implica em $\liminf_{v \rightarrow u} \Psi(v) \geq \Psi(u)$.

Exemplo 1.18. Seja função valor absoluto $\Psi(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\partial\Psi(x) = \{1\}$, $x > 0$ e $\partial\Psi(x) = \{-1\}$, $x < 0$. Agora, se $c \in \partial\Psi(0)$, então a desigualdade $\Psi(y) = |y| \geq cy \ \forall y$ é satisfeita se, e somente se, $c \in [-1, 1]$. Assim, um subdiferencial não necessariamente possui um único valor.

Exemplo 1.19. Seja $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Psi(x) = \frac{1}{2}x^2$, temos $\Psi(y) - \Psi(x) \geq \Psi'(x)(y - x)$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$. De fato, essa desigualdade é trivialmente verdadeira quando $y = x$. Para o caso $y \neq x$, temos

$$\begin{aligned} \Psi(y) - \Psi(x) - \Psi'(x)(y - x) &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - x(y - x) \\ &= \frac{1}{2}(y^2 - x^2) - x(y - x) \\ &= \frac{1}{2}(y - x)(y + x) - x(y - x) \\ &= \frac{1}{2}(y - x)^2 \geq 0 \quad \forall y. \end{aligned}$$

Proposição 1.20 (Adaptado de [12]). O conjunto $\partial\Psi(u)$ é convexo e $\sigma(X^*, X)$ -fechado, para todo $u \in \text{Dom}(\Psi)$.

Demonstração. Dados $u^*, v^* \in \partial\Psi(u)$ e $\alpha \in [0, 1]$, então $\alpha u^* + (1 - \alpha)v^* \in X^*$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \alpha u^* + (1 - \alpha)v^*, v - u \rangle &= \alpha \langle u^*, v - u \rangle + (1 - \alpha) \langle v^*, v - u \rangle \\ &\leq \alpha(\Psi(v) - \Psi(u)) + (1 - \alpha)(\Psi(v) - \Psi(u)) \\ &= \Psi(v) - \Psi(u). \end{aligned}$$

para todo $v \in X$. Portanto, $\alpha u^* + (1 - \alpha)v^* \in \partial\Psi(u)$, o que prova $\partial\Psi(u)$ é convexo.

Para mostrar que é fechado na topologia (X^*, X) , suponha que $(u_n^*) \subset \partial\Psi(u)$ seja uma sequência e que $u^* \in X^*$ tal que $u_n^* \xrightarrow{w^*} u^*$. Isso implica que $\langle u_n^*, w \rangle \rightarrow \langle u^*, w \rangle$ para todo $w \in X$. Logo, como $u_n^* \in \partial\Psi(u)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\langle u_n^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u) \quad \forall v \in X.$$

Escolhendo $w = v - u$ e tomando o limite de quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\langle u^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u) \quad \forall v \in X.$$

Isso mostra que $u^* \in \partial\Psi(u)$. Portanto, $\partial\Psi(u)$ é $\sigma(X^*, X)$ -fechado. ■

Proposição 1.21 ([7][12]). *Sejam as funções convexas $\Psi, \Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:*

$$\partial(\alpha\Psi) = \alpha\partial(\Psi) \tag{1.9}$$

$$\partial(\Psi + \Phi) \supset \partial\Psi + \partial\Phi. \tag{1.10}$$

Além disto, suponha que exista $u \in \text{Dom}(\Psi) \cap \text{Dom}(\Phi)$ onde Ψ é contínua, então

$$\partial(\Psi + \Phi) = \partial\Psi + \partial\Phi.$$

Demonstração. Concentraremos nossa atenção na segunda parte do teorema, pois esta apresenta uma solução não trivial. Mostraremos que dado $u^* \in \partial(\Psi + \Phi)(u)$ podemos decompor $u^* = u_1^* + u_2^*$, onde $u_1^* \in \partial\Psi(u)$ e $u_2^* \in \partial\Phi(u)$. Sejam $u^* \in \partial(\Psi + \Phi)(u)$ e $u \in \text{Dom}(\Psi) \cap \text{Dom}(\Phi)$, segue que

$$\langle u^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) + \Phi(v) - (\Psi(u) + \Phi(u)) \tag{1.11}$$

para todo $v \in X$.

Considere os conjuntos convexos em $X \times \mathbb{R}$:

$$C_1 := \{(v, \lambda) : \Psi(v) - \Psi(u) - \langle u^*, v - u \rangle \leq \lambda\};$$

$$C_2 := \{(v, \lambda) : \lambda \leq \Phi(u) - \Phi(v)\}.$$

Pela desigualdade (1.11), implica que os conjuntos C_1 e C_2 têm pontos em comuns em suas fronteiras. Considere a função $\psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\psi(v) = \Psi(v) - \Psi(u) - \langle u^*, u - v \rangle.$$

Note ψ é contínua e convexa, então C_1 é convexa com $\text{int}(C_1) \neq \emptyset$, pois temos $(u, \psi(u)) \in \text{int}(C_1)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_\varepsilon \subset X$ em u de tal modo que $|\psi(v) - \psi(u)| < \varepsilon \Rightarrow \{(v, \psi(u) + \varepsilon) : v \in V_\varepsilon\} \subset C_1$, portanto $\text{int}(C_1) \neq \emptyset$. Logo existe um hiperplano afim $\mathcal{H}$ fechado que separa estritamente os conjuntos $\text{int}(C_1)$ e C_2 .

O hiperplano afim não pode ser vertical, pois sua projeção em X separa $\text{int}(\text{Dom}(\Psi))$ e $\text{Dom}(\Phi)$. No entanto, isso é impossível porque $u \in \text{int}(\text{Dom}(\Psi)) \cap \text{Dom}(\Phi)$. Portanto, existe $v^* \in X^*$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H} = \{(v, t) \in X^* : \langle v^*, v \rangle + k = t\}$.

Assim, podemos escrever a separação como:

$$\Phi(u) - \Phi(v) \leq \langle v^*, v \rangle + k \leq \Psi(v) - \Psi(u) - \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in X.$$

Tomando $v = u$ e $k = -\langle v^*, u \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \langle -v^*, v - u \rangle &\leq \Phi(v) - \Phi(u); \\ \langle v^* + u^*, v - u \rangle &\leq \Psi(v) - \Psi(u). \end{aligned}$$

Portanto, $-v^* \in \partial\Phi(u)$ e $v^* + u^* \in \partial\Psi(u)$. Logo, temos a decomposição desejada $u^* = \underbrace{u^* + v^*}_{u_1^*} + \underbrace{(-v^*)}_{u_2^*}$. ■

Proposição 1.22 ([7]). *Seja $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa e $\Psi \not\equiv +\infty$, então $u^* \in \partial\Psi(u)$ se, e somente se, $\Psi(u) + \Psi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle$.*

Demonstração. Dado $u^* \in \partial\Psi(u)$, então temos que $\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle$ para todo $v \in X$. Logo,

$$\begin{aligned} \Psi^*(u^*) &= \sup_{v \in X} \left(\langle u^*, v \rangle - \Psi(v) \right) \\ &\leq \sup_{v \in X} \left(\langle u^*, v \rangle - \Psi(v) - \langle u^*, v - u \rangle \right) = \langle u^*, u \rangle - \Psi(u). \end{aligned}$$

Como, por definição, temos que $\Psi^*(u^*) \geq \langle u^*, u \rangle - \Psi(u)$, segue que $\Psi(u) + \Psi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle$. Reciprocamente, suponha que $\Psi(u) + \Psi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle$ seja satisfeito, então

$$\langle u^*, u \rangle - \Psi(u) = \Psi^*(u^*) \geq \langle u^*, v \rangle - \Psi(v) \quad \forall v \in X.$$

Logo,

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle,$$

obtendo assim $u^* \in \partial\Psi(u)$. ■

Corolário 1.23 ([12][19]). *Se a função Ψ é convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv \infty$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$a) \Psi(u) + \Psi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle;$$

$$b) \ u^* \in \partial\Psi(u);$$

$$c) \ u \in \partial\Psi^*(u^*).$$

Demonstração. A implicação do item (a) para o item (b) decorre da proposição 1.22 acima.

Para demonstrar a implicação do item (b) para o item (c), observe que, se $u^* \in \partial\Psi(u)$, então $\langle u^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u)$ para todo $v \in X$. Note que $\Psi \not\equiv +\infty$, então pela definição de Ψ^* , temos $\Psi(u) - \langle u^*, u \rangle \leq \Psi(v) - \langle u^*, v \rangle \leq -\Psi^*(u^*)$. Logo,

$$\Psi(u) + \Psi^*(u^*) \leq \langle u^*, u \rangle$$

Como $\Psi^{**} = \Psi$ (pela proposição 1.15), temos

$$\Psi^{**}(u) + \Psi^*(u^*) \leq \langle u^*, u \rangle.$$

Trivialmente $\langle u^*, u \rangle \leq \Psi^{**}(u) + \Psi^*(u^*)$, logo segue que $\Psi^{**}(u) + \Psi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle$. Portanto, pelo item anterior, $u \in \partial\Psi^*(u^*)$.

Para provar a última implicação, do item (c) para o item (a), observe que, como $u \in \partial\Psi^*(u^*)$, seguindo os mesmo passos do item anterior, temos $\langle u^*, u \rangle = \Psi^{**}(u) + \Psi^*(u^*)$. Como $\Psi^{**} = \Psi$ (proposição 1.15), segue $\langle u^*, u \rangle = \Psi(u) + \Psi^*(u^*)$. ■

1.4 Gâteaux-diferenciabilidade e Derivada Direcional de Clarke

Sejam $U \subset X$ aberto e a função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. A derivada direcional à direita, a derivada direcional à esquerda e a derivada direcional (bilateral) de φ em um ponto $u \in U$ na direção $v \in X$, $v \neq 0$, são dadas por

$$\varphi'_+(u; v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} \quad (1.12)$$

$$\varphi'_-(u; v) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} \quad (1.13)$$

$$\varphi'(u; v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} \quad (1.14)$$

se os limites existirem.

Dizemos que φ é Gâteaux-diferenciável (ou simplesmente G-diferenciável) em u na direção v , se existir um funcional em X^* , denotado por $\varphi'(u)$, tal que $\varphi'(u; v) = \langle \varphi'(u), v \rangle$

para todo $v \in X$. Com isso, chamamos $\varphi'(u)$ de Gâteaux-diferencial (ou simplesmente G-diferencial) em u .

Observação 1.24.

- i) Se φ for G-diferenciável em u para todo $v \in X$, dizemos simplesmente que φ é G-diferenciável em u . E se φ for G-diferenciável em qualquer $u \in U$, dizemos simplesmente que φ é G-diferenciável em U .
- ii) Dado $u \in U$, o funcional linear e contínuo $\varphi'(u; \cdot) \in X^*$ é homogênea positiva, sublinear e $-\varphi'(u; v) = \varphi'(u; -v)$ para todo $v \in X$.

Note que é interessante que a função φ seja convexa, pois os limites (1.12) e (1.13) sempre existirão. Vamos examinar alguns resultados que levam em conta a importância de φ ser convexa.

Lema 1.25. *Seja $U \subset X$ aberto e convexo e a função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa. Para cada $u \in \text{Dom}(\varphi)$ e $u^* \in X^*$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $u^* \in \partial\varphi(u)$;
- b) $\langle u^*, v \rangle \leq \varphi'_+(u; v)$, para todo $v \in X$;
- c) $\varphi'_-(u; v) \leq \langle u^*, v \rangle \leq \varphi'_+(u; v)$, para todo $v \in X$.

Demonstração. Para demonstrar a implicação do item (a) para o item (b), considere $u^* \in \partial\varphi(u)$, então $\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle$, $\forall v \in U$. Logo, para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \varphi(u + tv) - \varphi(u) &\geq t \langle u^*, v \rangle \\ \implies \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} &\geq \langle u^*, v \rangle. \end{aligned}$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$, implica que $\varphi'_+(u; v)$ existe (pela convexidade da φ) e $\langle u^*, v \rangle \leq \varphi'_+(u; v)$ para todo $v \in X$.

Para provar a implicação do item (b) para o item (c), observe que $\varphi'_-(u; v) = -\varphi'_+(u; -v)$ e $-\varphi'_+(u; -v) \leq \langle u^*, v \rangle$ para todo $v \in X$.

Para provar a última implicação, do item (c) para o item (a), note que, como φ é convexa, então a função $t \mapsto \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t}$ é crescente para todo $t > 0$ suficientemente pequeno. Note que $\langle u^*, v \rangle \leq \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t}$ para todo $t > 0$ desde que $\langle u^*, v \rangle \leq \varphi'_+(u; v)$ pelo lema 1.4. Tomando $t = 1$ e $w = v + u$, temos

$$\langle u^*, w - u \rangle \leq \varphi(w) - \varphi(u).$$

Isto prova que $u^* \in \partial\varphi(u)$. ■

Proposição 1.26 (Adaptado [7]). *Seja $U \subset X$ aberto e convexo, e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa. Se φ é G -diferenciável em $u \in \text{Dom}(\varphi)$, então $\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$.*

Demonstração. Seja $u^* \in \partial\varphi(u)$, então segue do lema 1.25 que

$$\varphi'_-(u; v) \leq \langle u^*, v \rangle \leq \varphi'_+(u; v)$$

para todo $v \in X$. Como φ seja G -diferenciável em u , temos $\varphi'_-(u; v) \leq \langle u^*, v \rangle \leq \varphi'_+(u; v)$ para todo $\forall v \in X$, o que implica em $\varphi'(u) = u^*$. Portanto, $\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$. ■

Corolário 1.27 ([12]). *Seja $U \subset X$ aberto e convexo e seja a função $\varphi : U \rightarrow (-\infty, \infty]$ G -diferenciável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) φ é convexa;
- b) $\varphi'(u) \in \partial\varphi(u) \quad \forall u \in U$.

Demonstração. A implicação do item (a) para o item (b) segue diretamente da proposição 1.26.

Para demonstrar a implicação inversa do item (b) para o item (a), dados $u, v \in U$, temos $u + \alpha(v - u) \in U$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, por hipótese,

$$\varphi(u) \geq \varphi(u + \alpha(v - u)) + \langle \varphi'(u + \alpha(v - u)), \alpha(u - v) \rangle \quad (1.15)$$

e

$$\varphi(v) \geq \varphi(u + \alpha(v - u)) + \langle \varphi'(u + \alpha(v - u)), (1 - \alpha)(u - v) \rangle \quad (1.16)$$

Portanto, multiplicando (1.15) por $(1 - \alpha)$ e (1.16) por α , e somando ambos, temos que φ é convexa. ■

Vamos agora explorar uma forma mais geral de derivada direcional, apresentada de maneira completa por Frank Clarke em [9]. Alguns dos resultados discutidos aqui podem ser encontrados com mais detalhes nas referências citadas abaixo.

Definição 1.28 ([8][9][10][18]). *Sejam X espaço de Banach, $U \subset X$ aberto e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana.*

1. A Derivada Direcional de Clarke da φ em $u \in U$ na direção $v \in X$, $v \neq 0$, é dada por

$$\varphi^0(u; v) = \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + tv) - \varphi(w)}{t}. \quad (1.17)$$

2. O Subdiferencial de Clarke da φ em $u \in U$ é o subconjunto de X^* definido por:

$$\partial_c \varphi(u) = \{u^* \in X^* : \langle u^*, v \rangle \leq \varphi^0(u, v) \ \forall v \in X\}. \quad (1.18)$$

Observação 1.29.

i) A derivada direcional de Clarke pode ser dada também por

$$\varphi^0(u; v) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(u + h + tv) - \varphi(u + h)}{h}.$$

ii) Sejam $u \in U$ e $v \in X$ fixados. Considere que a função φ seja localmente Lipschitziana em uma bola aberta de centro u e raio $\delta > 0$. A definição (1.17) pode ser interpretada como:

$$\varphi^0(u; v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|w - u\| < \varepsilon \delta} \sup_{0 < t < \varepsilon} \frac{\varphi(w + tv) - \varphi(w)}{t}.$$

iii) Por questão de simplicidade, denotaremos a derivada direcional à direita por $\varphi'(u; v)$. Isto é,

$$\varphi'(u; v) := \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t}.$$

Teorema 1.30 ([8][9][10][18]). Seja $U \subset X$ aberto e função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana em $u \in U$. Então

- a) A função $\varphi^0(u; \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea positiva e sublinear (portanto, convexa). Além disto, $\varphi^0(u; -v) = (-\varphi)^0(u; v) \ \forall v \in X$ e $|\varphi^0(u; v_1) - \varphi^0(u; v_2)| \leq K\|v_1 - v_2\|$ para todo $v_1, v_2 \in X$ e $K > 0$ sendo a constante de Lipschitz dependendo da vizinhança em u ;
- b) Seja $u \in U$, então o subdiferencial de Clarke da φ em u é não-vazio, convexa e $\sigma(X^*, X)$ -compacto em X^* ;
- c) $\varphi^0(u; v) = \max \{ \langle u^*, v \rangle : u^* \in \partial_c \varphi(u) \ \forall v \in X \}$.
- d) $\varphi^0(\cdot; \cdot) : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superior;

- e) Se φ é G -diferenciável em u , então $\varphi'(u) \in \partial_c \varphi(u)$. Além disto, se $\varphi' : X \rightarrow X^*$ for contínua, então $\partial_c \varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$;
- f) Quando φ é convexa em U (e ainda sendo localmente Lipschitziana em u), então o subdiferencial de Clarke $\partial_c \varphi(u)$ coincide com o subdiferencial clássico $\partial \varphi(u)$ em u ;
- g) $-\varphi^0(u; v) \leq (-\varphi)^0(u; v)$ para todo $u \in U$ e $v \in X$.

Demonstração.

- a) O fato da função $\varphi^0(u; \cdot)$ ser homogênea positiva e sublinear, seguem de que: dados $\lambda > 0$ e $v_1, v_2 \in X$, então

$$\begin{aligned} \varphi^0(u; \lambda v) &= \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + t(\lambda v)) - \varphi(w)}{t} = \lambda \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ s \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + sv) - \varphi(w)}{s} = \lambda \varphi^0(u; v); \\ \varphi^0(u; v_1 + v_2) &= \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + t(v_1 + v_2)) - \varphi(w)}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + tv_2 + tv_1) - \varphi(w + tv_2)}{t} + \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + tv_2) - \varphi(w)}{t} \\ &= \varphi^0(u; v_1) + \varphi^0(u; v_2). \end{aligned}$$

Agora, para mostrar última parte, basta observar que, para todo $v \in X$:

$$\begin{aligned} \varphi^0(u; -v) &= \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + t(-v)) - \varphi(w)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{(-\varphi)(w - tv + tv) - (-\varphi)(w - tv)}{t} \\ &= (-\varphi)^0(u; v). \end{aligned}$$

Por fim, dados $v_1, v_2 \in X$, segue da definição e que φ é localmente Lipschitziana na vizinhança de u :

$$\begin{aligned} \varphi(w + tv_1) - \varphi(w) &= \varphi(w + tv_1) - \varphi(w + tv_2) + \varphi(w + tv_2) - \varphi(w) \\ &\leq K\|v_1 - v_2\|t + \varphi(w + tv_2) - \varphi(w), \end{aligned}$$

com w próximo de u e $t > 0$ suficientemente pequeno. Logo, temos

$$\varphi^0(u; v_1) \leq K\|v_1 - v_2\| + \varphi^0(u; v_2).$$

Analogamente,

$$\varphi^0(u; v_2) \leq K\|v_1 - v_2\| + \varphi^0(u; v_1).$$

Portanto,

$$|\varphi^0(u; v_1) - \varphi^0(u; v_2)| \leq K\|v_1 - v_2\|.$$

b) Sabemos, pelo item (a) que $\varphi^0(u; \cdot)$ é homogênea positiva e sublinear. Observe os seguintes casos:

- Se $\varphi^0(u; v) = 0$ para todo $v \in X$, então $0 \in \partial_c \varphi(u)$.
- Se existir $v \in X$ tal que $\varphi^0(u; v) \neq 0$, então definimos o funcional linear $\psi : [v] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\psi(\lambda v) = \lambda \varphi^0(u; v)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideramos dois casos excludentes:
 - Se $\lambda > 0$, então $\psi(\lambda v) = \lambda \varphi^0(u; v) = \varphi^0(u; \lambda v)$;
 - Se $\lambda \leq 0$, então

$$\begin{aligned} \psi(\lambda v) &= -(-\lambda) \varphi^0(u; v) \\ &= -\varphi^0(u; -\lambda v) + \varphi^0(u; 0) \\ &= -\varphi^0(u; -\lambda v) + \varphi^0(u; -\lambda v + \lambda v) \\ &\leq -\varphi^0(u; -\lambda v) + [\varphi^0(u; -\lambda v) + \varphi^0(u; \lambda v)] = \varphi^0(u; \lambda v). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Extensão de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\tilde{\psi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\psi}(v) = \varphi^0(u; v) \text{ e } \tilde{\psi}(w) \leq \varphi^0(u; w) \quad \forall w \in X.$$

Usando o fato que $|\varphi^0(u; w)| \leq K\|w\| \quad \forall w \in X$, isto implica $\tilde{\psi} \in X^*$, e consequentemente, $\tilde{\psi} \in \partial_c \varphi(u)$.

O fato de que o conjunto $\partial_c \varphi(u)$ ser convexo é similar o que foi feito na proposição 1.20. Agora, nos resta provarmos $\sigma(X^*, X)$ -compacidade de $\partial_c \varphi(u)$ em X^* . Com efeito, seja a sequência $(u_n^*) \subset \partial_c \varphi(u)$ e $u^* \in X^*$ tal que $u_n \rightarrow u$. Desde que $\langle u_n^*, v \rangle \leq \varphi^0(u; v)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v \in X$, temos

$$\langle u^*, v \rangle \leq \varphi^0(u; v),$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $u^* \in \partial_c \varphi(u)$, sendo assim $\sigma(X^*, X)$ -fechado em X^* (pois é fechado e convexo).

Note que, dado $u^* \in \partial_c \varphi(u)$, temos $|\langle u^*, v \rangle| \leq |\varphi^0(u; v)| \leq K\|v\| \quad \forall v \in X$, onde $K > 0$ é a constante de Lipschitz dependendo de uma vizinhança de u . Logo,

$$\|u^*\| = \sup_{v \in X} \left\langle u^*, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \leq K.$$

Assim o conjunto $\partial_c \varphi(u)$ é $\sigma(X^*, X)$ -fechado e limitado, então (pelo Teorema de Banach-Alaoglu) $\partial_c \varphi(u)$ é $\sigma(X^*, X)$ -compacto em X^* .

c) Suponha, por absurdo, que existe $v \in X$ tal que

$$\varphi^0(u; v) > \max\{\langle u^*, v \rangle : u^* \in \partial_c \varphi(u)\}. \quad (1.19)$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\tilde{\psi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ (como visto no item anterior) tal que $\langle \tilde{\psi}, v \rangle = \varphi^0(u; v)$. Como $\varphi^0(u; w) \leq K\|w\| \quad \forall w \in X$, então $\tilde{\psi} \in X^*$. Portanto, $\tilde{\psi} \in \partial_c \varphi(u)$, o que contraria (1.19).

d) Sejam $(u_n, v_n) \subset U \times X$ e $(u, v) \in U \times X$ tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela definição de limite superior, existe $w_n \in U$ e $t_n > 0$ tal que

$$\|w_n - u_n\| + t_n < 1/n \quad \text{e} \quad \varphi^0(u_n; v_n) \leq t_n^{-1} (\varphi(w_n + t_n v_n) - \varphi(w_n)) + 1/n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi^0(u_n; v_n) - 1/n &\leq t_n^{-1} (\varphi(w_n + t_n v) - \varphi(w_n)) + t_n^{-1} (\varphi(w_n + t_n v_n) - \varphi(w_n + t_n v)) \\ &\leq t_n^{-1} (\varphi(w_n + t_n v) - \varphi(w_n)) + K\|v_n - v\|, \end{aligned}$$

onde $K > 0$ é a constante de Lipschitz em vizinhança de u . Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi^0(u_n; v_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(w_n + t_n v) - \varphi(w_n)}{t_n} = \varphi^0(u; v).$$

e) A primeira parte é óbvia, pois $\varphi'(u; v)$ existe para todo $v \in X$. Segue que

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \varphi'(u; v) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} \leq \varphi^0(u; v) \quad v \in X.$$

Agora, sejam w pertencente a vizinhança de u e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Definimos a função $\psi : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) = \varphi(w + tv) \quad \forall v \in X$. A função ψ é diferenciável em $(0, \varepsilon)$ e vale $\psi'(t) = \langle \varphi'(w + tv), v \rangle$ para todo $t \in (0, \varepsilon)$. Logo, pelo

Teorema do Valor Médio, existe $t^* \in (0, \varepsilon)$ tal que

$$\frac{\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)}{\varepsilon} = \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(0)}{\varepsilon} = \psi'(t^*) = \langle \varphi'(w + t^*v), v \rangle.$$

Portanto, pela continuidade do G-diferencial de φ , temos

$$\limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)}{\varepsilon} = \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \langle \varphi'(w + t^*v), v \rangle. \quad (1.20)$$

Portanto, $\varphi^0(u; v) = \langle \varphi'(u), v \rangle$. Assim, se $u^* \in \partial_c \varphi(u)$, então $\langle u^*, v \rangle \leq \langle \varphi'(u), v \rangle \implies \langle u^* - \varphi'(u), v \rangle \leq 0$. Logo, $\varphi'(u) = u^*$.

f) É claro que $\partial \varphi(u) \subset \partial_c \varphi(u)$. Por outro lado, pela convexidade de φ e pelo fato de φ ser localmente Lipschitziana na vizinhança de u , mostraremos que $\varphi^0(u; v) \leq \varphi'_+(u; v)$, o que será suficiente para provar que $\partial_c \varphi(u) \subset \partial \varphi(u)$. Com efeito, fixamos $u \in U$ e $\delta > 0$ de modo que φ seja localmente Lipschitziana na bola aberta $B_\delta(u)$ com $K > 0$ sendo a constante de Lipschitz. Usando a convexidade de φ , temos

$$\begin{aligned} \varphi^0(u; v) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|w-u\| < \delta\varepsilon} \sup_{0 < t < \varepsilon} \frac{\varphi(w + tv) - \varphi(w)}{t} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|w-u\| < \delta\varepsilon} \frac{\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)}{\varepsilon} \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

Como φ é localmente Lipschitziana, temos

$$\left\| \frac{\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)}{\varepsilon} \right\| \leq 2K\|w - u\| \leq 2\delta K. \quad (1.21)$$

Logo, temos

$$\varphi^0(u; v) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)}{\varepsilon} + 2K\delta = \varphi'(u; v) + 2K\delta.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, segue

$$\varphi^0(u; v) \leq \varphi'(u; v) \quad \forall v \in X.$$

Isso é suficiente, pois se $u^* \in \partial_c \varphi(u)$, segue que

$$\langle u^*, v \rangle \leq \varphi^0(u; v) \leq \varphi'(u; v) \leq \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} \quad \forall v \in X.$$

Tomando $t = 1$ e $w = u + v$, temos $u^* \in \partial \varphi(u)$.

g) Para todo $u \in U$ e $v \in X$, temos

$$\begin{aligned} -\varphi^0(u; v) &= -\limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{1}{t} \left(\varphi(w + tv) - \varphi(w) \right) \\ &= \liminf_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{1}{t} \left((-\varphi)(w + tv) - (-\varphi)(w) \right) \\ &\leq (-\varphi)^0(u; v). \end{aligned}$$

■

Observação 1.31 ([18]). *Como visto no subdiferencial clássico, também é válido as seguintes propriedades para o subdiferencial de Clarke: Sejam $\Phi, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana e $\lambda > 0$, então*

$$\partial_c(\lambda\varphi)(u) = \lambda\partial_c\varphi(u);$$

$$\partial_c(\varphi + \Phi)(u) \subset \partial_c\varphi(u) + \partial_c\Phi(u).$$

Proposição 1.32 (adaptado de [18]). *Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana. Se $u \in U$ é um máximo ou mínimo local de φ , então $0 \in \partial_c\varphi(u)$.*

Demonstração. Seja $u \in U$. Suponha que u é mínimo local, então dado $v \in X$, existe $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $\varphi(u + tv) - \varphi(u) \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi^0(u; v) &= \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + tv) - \varphi(w)}{t} \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $0 \in \partial_c\varphi(u)$.

Analogamente, suponha que u é ponto de máximo local. Isto é, $\varphi(u) - \varphi(u + tv) \geq 0$, para todo $v \in X$ e $t > 0$ suficientemente pequeno. Logo,

$$\begin{aligned} (-\varphi)^0(u; v) &= \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w) - \varphi(w + tv)}{t} \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u) - \varphi(u + tv)}{t} \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $0 \in \partial_c((-\varphi)(u))$. Pela Observação 1.31, temos $0 \in \partial_c\varphi(u)$.

■

Teorema 1.33 (Teorema do Valor Médio de Lebourg [18]). *Sejam X espaço de Banach e U um subconjunto aberto de X e seja $u, v \in U$ tal que o segmento de reta $[u, v]$ está contido*

em U . Para toda função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana, existe $\xi \in [u, v] \setminus \{u, v\}$ e $z \in \partial_c \varphi(\xi)$ tal que $\varphi(v) - \varphi(u) = \langle z, v - u \rangle$.

Demonstração. Considere a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \varphi(u_t)$, onde $u_t = u + t(v - u)$. Note que g é localmente Lipschitziana, desde que φ também seja. Logo

$$\begin{aligned} g^0(t, s) &= \limsup_{\substack{r \rightarrow t \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{g(r + \lambda s) - g(r)}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{r \rightarrow t \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(u + (r + \lambda s)(v - u)) - \varphi(u + r(v - u))}{\lambda} \\ &\leq \limsup_{\substack{w \rightarrow u_t \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\varphi(w + \lambda s(v - u)) - \varphi(w)}{\lambda} \\ &= \varphi^0(u_t; s(v - u)), \end{aligned}$$

$\forall t \in (0, 1), \forall s \in \mathbb{R}$.

Agora, considere a função $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\theta(t) = \varphi(u_t) + t(\varphi(u) - \varphi(v))$. Note que $\theta(0) = \varphi(u) = \theta(1)$, então pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (0, 1)$ tal que c é ponto de máximo ou mínimo. Portanto, pelo corolário 1.32, $0 \in \partial_c \theta(c)$. Logo, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta^0(c; s) &= \limsup_{\substack{r \rightarrow c \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\theta(r + \lambda s) - \theta(r)}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{r \rightarrow c \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{g(r + \lambda s) - g(r) + \lambda s(\varphi(u) - \varphi(v))}{\lambda} \\ &= g^0(c, s) + s(\varphi(u) - \varphi(v)). \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\xi := u_c$, temos $s(\varphi(v) - \varphi(u)) \leq g^0(c; s) \leq \varphi^0(\xi; s(v - u))$. O que prova que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \in \langle \partial_c \varphi(\xi), v - u \rangle.$$

■

1.5 Aplicação Multi-Valor e Aplicação Dualidade Normalizada

Definição 1.34 (Aplicação Multi-valor). *Sejam X, Y espaço vetoriais topológicos.*

1. A aplicação $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$ é dita Multi-Valor se dado $u \in X$, $\mathcal{F}(u)$ é um subconjunto de Y . Denotamos por 2^Y o conjunto das partes de Y , e neste caso escrevemos

$$\mathcal{F} : X \longrightarrow 2^Y.$$

2. A aplicação Multi-Valor $\mathcal{F} : X \longrightarrow 2^Y$ é dita Valor-Único (ou Singleton) se para cada $u \in X$, o subconjunto $\mathcal{F}(u) \in 2^Y$ consiste de um único elemento.

Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 : X \longrightarrow 2^Y$ aplicações multivalor, então para cada $u, v \in X$ tal que $\mathcal{F}_1(u) \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}_2(v) \neq \emptyset$, definimos

$$\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v) = \{x + y : x \in \mathcal{F}_1(u) \text{ e } y \in \mathcal{F}_2(v)\}.$$

Se $\mathcal{F}_1(u) = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_2(v) = \emptyset$, então definimos

$$\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v) = \emptyset.$$

Exemplo 1.35. As aplicações $\partial\varphi, \partial_c\varphi : X \longrightarrow 2^{X^*}$ são multi-valor.

Definição 1.36. Sejam X espaço de Banach e $\mathcal{F} : X \longrightarrow 2^{X^*}$ uma aplicação multivalor. Dizemos que $\mathcal{F}$ é

- i) *Monótona*, se $\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0$, $u^* \in \mathcal{F}(u)$, $v^* \in \mathcal{F}(v) \quad \forall u, v \in X$;
- ii) *Estritamente monótona*, se $\langle u^* - v^*, u - v \rangle > 0$, $u^* \in \mathcal{F}(u)$, $v^* \in \mathcal{F}(v) \quad \forall u, v \in X$;
- iii) *Uniformemente monótona*, se existe uma função $\omega : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$, $\omega(0) = 0$, crescente e $\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq \omega(\|u - v\|)\|u - v\| \quad \forall u, v \in X$;
- iv) *Fortemente monótona* (ou também *K-fortemente monótona*), se existe $K > 0$ tal que $\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq K\|u - v\| \quad \forall u, v \in X$;
- v) *Paramonótona* se é monótona e para cada $u^* \in \mathcal{F}(u)$, $v^* \in \mathcal{F}(v)$ tem-se

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle = 0.$$

Implica que $u^*, v^* \in \mathcal{F}(u) \cap \mathcal{F}(v)$.

- vi) *Semicontínua superior* (resp. *Semicontínua inferior*) em $u_0 \in X$ se para cada conjunto aberto $O \subset X^*$ com $\mathcal{F}(u_0) \subset O$ (resp. $\mathcal{F}(u_0) \cap O \neq \emptyset$), existe um aberto U de u_0 em X tal que $\mathcal{F}(u) \subset O$ (resp. $\mathcal{F}(u) \cap O \neq \emptyset$) para todo $u \in U$.

Definição 1.37 ([7]). Seja a função contínua e estritamente crescente $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. Chamamos de aplicação dualidade com respeito a φ , a

aplicação $J_\varphi : X \longrightarrow 2^{X^*}$ definida por

$$J_\varphi(u) = \{u^* \in X^* : \langle u^*, u \rangle = \|u^*\| \|u\|, \|u^*\| = \varphi(\|u\|)\}. \quad (1.22)$$

Em particular, a aplicação dualidade que corresponde a $\varphi = I_d$ é chamada de Dualidade Normalizada, e denotada por:

$$J(u) = \{u^* \in X^* : \langle u^*, u \rangle = \|u^*\| \|u\|, \|u^*\| = \|u\|\}.$$

Note que $J_\varphi(u) \neq \emptyset \forall u \in X$. De fato, dado $u \in X$, definimos $v := \varphi(\|u\|)u \in X$. Pelo Teorema de Extensão de Hahn-Banach, existe $v^* \in X^*$ tal que $\|v^*\| = 1$ e $\langle v^*, v \rangle = \|v\|$. Então, $u^* = \varphi(\|u\|)v^* \in J_\varphi(u)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \|u^*\| &= \varphi(\|u\|)\|v^*\| = \varphi(\|u\|); \\ \langle u^*, u \rangle &= \langle v^*, v \rangle = \|v\| = \varphi(\|u\|)\|u\| = \|u^*\|\|u\|. \end{aligned}$$

Definição 1.38. *Seja a função contínua e estritamente crescente $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. A aplicação dualidade com respeito a φ , de $J_\varphi^* : X^* \longrightarrow 2^{X^{**}}$, é dada por*

$$J_\varphi^*(u^*) := \{u^{**} \in X^{**} : \langle u^{**}, u^* \rangle = \|u^{**}\| \|u^*\|, \|u^{**}\| = \varphi(\|u^*\|)\}.$$

Note que, quando X é reflexivo, temos que $X^{**} \equiv X$ e segue que

$$J_\varphi^*(u^*) = \{u \in X : \langle u^*, u \rangle = \|u^*\| \|u\|, \|u\| = \varphi(\|u^*\|)\}.$$

Lema 1.39 (adaptado de [7]). *A função $\psi : (0, +\infty] \rightarrow (0, +\infty]$ dada por $\psi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ é convexa.*

Demonstração. Considerando $0 \leq t_1 < t_2$, temos

$$\psi(t_2) - \psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \int_{\frac{t_1 + t_2}{2}}^{t_2} \varphi(s)ds \quad \text{e} \quad \psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) - \psi(t_1) = \int_{t_1}^{\frac{t_1 + t_2}{2}} \varphi(s)ds. \quad (1.23)$$

Como φ é uma função crescente, sabemos que $\varphi(s)$ é menor ou igual para $s \in [t_1, \frac{t_1 + t_2}{2}]$ do que $\varphi(s)$ para $s \in [\frac{t_1 + t_2}{2}, t_2]$. Isso implica que

$$\int_{\frac{t_1 + t_2}{2}}^{t_2} \varphi(s)ds \geq \int_{t_1}^{\frac{t_1 + t_2}{2}} \varphi(s)ds.$$

Assim, usando o fato da igualdade em (1.23) em ambos os lados, temos

$$\psi(t_2) - \psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \geq \psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) - \psi(t_1).$$

Portanto,

$$\psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{\psi(t_2) + \psi(t_1)}{2}.$$

Juntando a última desigualdade acima e o fato de que ψ é contínua (pois φ é contínua), temos que ψ é convexa. ■

Proposição 1.40 ([7]). *Seja J_φ uma dualidade correspondente a φ . Então, para todo $u \in X$:*

- a) $J_\varphi(u) = \partial\psi(\|u\|)$, onde $\psi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$. Em particular, se J for a dualidade normalizada, então $J(u) = \partial\left(\frac{1}{2}\|u\|^2\right)$;
- b) $J_\varphi(u)$ é monótona;
- c) $J_\varphi(\lambda u) = \frac{\varphi(\lambda\|u\|)}{\varphi(\|u\|)}J_\varphi(u)$, para todo $\lambda > 0$. Em particular, se J for a dualidade normalizada, então $J(\lambda u) = \lambda J(u)$.
- d) Seja J_{φ_1} e J_{φ_2} aplicações dualidade de φ_1 e φ_2 respectivamente, então

$$\varphi_2(\|u\|)J_{\varphi_1}(u) = \varphi_1(\|u\|)J_{\varphi_2}(u);$$

- e) Se X for reflexivo, então $\bigcup_{u \in X} J(u) = X^*$.

Demonstração.

- a) Seja $u^* \in J_\varphi(u)$, tomemos $v \in X$ tal que $\|v\| > \|u\|$. Como ψ é convexa (pelo lema 1.39, então

$$\|u^*\| = \varphi(\|u\|) = \psi'(\|u\|) \leq \frac{\psi(\|v\|) - \psi(\|u\|)}{\|v\| - \|u\|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi(\|v\|) - \psi(\|u\|) &\geq \|u^*\|(\|v\| - \|u\|) \\ &= \|u^*\|\|v\| - \langle u^*, u \rangle \\ &\geq \langle u^*, v - u \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, tomemos $\|v\| < \|u\|$. Assim,

$$\psi'(\|u\|) \geq \frac{\psi(\|u\|) - \psi(\|v\|)}{\|u\| - \|v\|}.$$

Portanto, $\forall v \in X$,

$$\psi(\|v\|) - \psi(\|u\|) \geq \langle u^*, v - u \rangle,$$

isto implica $u^* \in \partial\psi(\|u\|)$.

Reciprocamente, sejam $u^* \in \partial\psi(\|u\|)$ e $v \in X$ tal que $\|v\| = \|u\|$. Então,

$$\langle u^*, v - u \rangle \leq \psi(\|v\|) - \psi(\|u\|) = 0.$$

Logo,

$$\|u^*\|\|u\| = \sup_{v \in X} \langle u^*, v \rangle \leq \langle u^*, u \rangle.$$

Como, trivialmente, $\|u^*\|\|u\| \geq \langle u^*, u \rangle$, segue que $\langle u^*, u \rangle = \|u^*\|\|u\|$.

Agora, basta mostrar que $\|u^*\| = \varphi(\|u\|)$. Defina $v = t \frac{u}{\|u\|}$, $t > 0$. Logo

$$\begin{aligned} \psi(\|v\|) - \psi(\|u\|) = \psi(t) - \psi(\|u\|) &\geq \left\langle u^*, \frac{tu}{\|u\|} - u \right\rangle \\ &= \left(\frac{t}{\|u\|} - 1 \right) \langle u^*, u \rangle \\ &= (t - \|u\|) \|u^*\|. \end{aligned}$$

Note que

$$\|u^*\| \leq \frac{\psi(t) - \psi(\|u\|)}{t - \|u\|}; t > \|u\| \quad \text{e} \quad \|u^*\| \geq \frac{\psi(\|u\|) - \psi(t)}{\|u\| - t}; t < \|u\|.$$

Fazendo $t \rightarrow \|u\|$, temos

$$\|u^*\| = \psi'(\|u\|) = \varphi(\|u\|).$$

Portanto, $J_\varphi(u) = \partial\psi(\|u\|)$.

- b) Desde que ψ é Gâteaux-diferenciável, então $J_\varphi(u) = \partial\psi(\|u\|) = \{\psi'(\|u\|)\}$. Logo, dado $u^* \in J_\varphi(u)$, temos $\langle u^*, v \rangle = \frac{d}{dt} \psi(\|u + tv\|)|_{t=0} = \varphi(\|u\|)\|v\|$. Assim, sejam $u, v \in X$, $u^* \in J_\varphi(u)$, $v^* \in J_\varphi(v)$, temos

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle = \langle u^*, u \rangle + \langle v^*, v \rangle - \langle u^*, v \rangle - \langle v^*, u \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(\|u\|)\|u\| + \varphi(\|v\|)\|v\| - \varphi(\|u\|)\|v\| - \varphi(\|v\|)\|u\| \\
&= (\varphi(\|u\|) - \varphi(\|v\|))(\|u\| - \|v\|) \geq 0.
\end{aligned}$$

c) Dado $u^* \in J_\varphi(u)$ e $\lambda > 0$. Se $\alpha = \varphi(\lambda\|u\|)/\varphi(\|u\|)$, mostraremos que $\alpha u^* \in J_\varphi(\lambda u)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u^*, \lambda u \rangle &= \alpha \lambda \langle u^*, u \rangle = \alpha \lambda \|u^*\| \|u\| = \|\alpha u^*\| \|\lambda u\| \\
\|\alpha u^*\| &= \alpha \|u^*\| = \frac{\varphi(\lambda\|u\|)}{\varphi(\|u\|)} \varphi(\|u\|) = \varphi(\lambda\|u\|)
\end{aligned}$$

Então, $\alpha u^* \in J_\varphi(\lambda u)$.

Por outro lado, seja $v^* \in J_\varphi(\lambda u)$, mostraremos que $v^* = \alpha u^*$, onde $u^* \in J_\varphi(u)$. Com efeito, desde que $v^* \in J_\varphi(\lambda u)$, temos $\langle v^*, u \rangle = \|v^*\| \|\lambda u\|$, $\|v^*\| = \varphi(\|\lambda u\|)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|u^*\| \|u\| &= \langle u^*, u \rangle = \langle \alpha^{-1} \alpha u^*, u \rangle = \alpha^{-1} \langle \alpha u^*, u \rangle = \underbrace{\frac{\varphi(\|u\|)}{\varphi(\lambda\|u\|)}}_{\|v^*\|} \langle \alpha u^*, u \rangle \\
&\implies \|v^*\| \|u\| = \langle \alpha u^*, u \rangle.
\end{aligned}$$

Note que $\|\alpha u^*\| = \alpha \|u^*\| = \frac{\varphi(\|\lambda u\|)}{\varphi(\|u\|)} \|u^*\| = \|v^*\|$, portanto $v^* = \alpha u^* \in \alpha J_\varphi(u)$.

d) Seja $u^* \in J_{\varphi_1}(u)$, então vale que $\langle u^*, u \rangle = \|u^*\| \|u\|$, $\|u^*\| = \varphi_1(\|u\|)$. Definindo $\alpha = \varphi_2(\|u\|)/\varphi_1(\|u\|)$, mostraremos que $\alpha u^* \in J_{\varphi_2}(u)$. Com efeito,

$$\langle \alpha u^*, u \rangle = \alpha \langle u^*, u \rangle = \alpha \|u^*\| \|u\| = \|\alpha u^*\| \|u\|.$$

$$\|\alpha u^*\| = \alpha \|u^*\| = \frac{\varphi_2(\|u\|)}{\varphi_1(\|u\|)} \varphi_1(\|u\|) = \varphi_2(\|u\|).$$

Reciprocamente, $u^* \in J_{\varphi_2}(u) \implies \alpha^{-1} u^* \in J_{\varphi_1}(u)$.

e) Seja $u^* \in X^*$, onde $u^* \neq 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $u^{**} \in X^{**}$ tal que $\|u^{**}\| = 1$ e $\langle u^{**}, u^* \rangle = \|u^*\|$. Como X é reflexiva, então existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e $\langle u^*, u \rangle = \|u^*\|$.

Note que φ é uma função contínua e estritamente crescente, então assume todos os valores intermediários entre 0 e t para qualquer $t > 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$\|u^*\| = \varphi(t_0) = \varphi(t_0\|u\|).$$

Por outro lado, temos

$$\langle u^*, t_0 u \rangle = t_0 \langle u^*, u \rangle = t_0 \|u^*\| \|u\| = \|u^*\| \|t_0 u\|.$$

Segue que $u^* \in J(t_0 u)$. Portanto, $u^* \in \bigcup_{u \in X} J(u)$.

■

Capítulo 2

O Princípio Variacional

A teoria do ponto crítico para funcionais não diferenciáveis teve origem no trabalho de Chang [5]. Posteriormente, Szulkin [23] estendeu essa teoria para funções que não são necessariamente contínuas. Apresentaremos um contexto mais geral da teoria do ponto crítico para funcionais da forma $I = \Psi - \varphi$, com o intuito de ampliar os resultados obtidos por Szulkin e Chang. Neste contexto, discutiremos resultados relevantes visto no artigo de Szulkin, como o Lema da Deformação e o Teorema do Passo da Montanha Generalizado. Essas primeiras seções deste capítulo são baseados no livro do Moutreau e Panagiotopoulos [18] e no artigo do Szulkin [23].

2.1 Ponto Crítico

Seja X um espaço de Banach e $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior, com $\Psi \neq +\infty$. Seja $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitziana. Definimos o funcional I da seguinte forma:

$$I = \Psi - \varphi. \quad (H)$$

Definição 2.1 (Ponto Crítico [18][19][23]). *Seja X um espaço de Banach e I um funcional da forma (H). Dizemos que um ponto $u \in X$ é ponto crítico de I se satisfaz:*

- i) $u \in \text{Dom}\Psi$;
- ii) $\Psi(v) - \Psi(u) \geq \varphi^0(u; v - u) \quad \forall v \in X$.

Em particular, a definição acima unifica as definições de ponto crítico de Chang e Szulkin. Se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, então $\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle \varphi'(u), v - u \rangle \quad \forall v \in X$, o que equivale à definição clássica de ponto crítico de Szulkin. Agora se $\Psi = 0$, então $0 \geq \varphi^0(u; v - u) \quad \forall v \in X$, o que se reduz à definição de ponto crítico de Chang. Note também que, se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\Psi = 0$, temos a definição de ponto crítico amplamente estudada em cálculo.

Observação 2.2. *Seja a função indicadora δ_K com respeito a K , onde K é um subconjunto não-vazio de X . Note que se $u \in K$ é um ponto crítico de I , então $0 \geq \varphi^0(u; v-u) \quad \forall v \in X$. Essa observação será útil para uma aplicação futura no próximo capítulo.*

Proposição 2.3 (Adaptado de [19]). *Sejam X espaço de Banach e I um funcional da forma (H). Então, todo ponto de mínimo local de I é ponto crítico de I .*

Demonstração. Seja $u \in X$ um ponto de mínimo local de I . Usando o fato de Ψ ser convexa e tomando $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq I(u + t(v - u)) - I(u) &= \Psi(u + t(v - u)) - \Psi(u) - \left(\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u) \right) \\ &\leq t(\Psi(v) - \Psi(u)) - \left(\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u) \leq t(\Psi(v) - \Psi(u)) \quad \forall v \in X.$$

Dividindo ambos os lados por t e tomando o limsup com $t \rightarrow 0^+$, temos

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u)}{t} \leq \Psi(v) - \Psi(u) \quad \forall v \in X.$$

Então, segue do fato $\varphi^0(u, v - u) \geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left(\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u) \right)$ que

$$\varphi^0(u; v - u) \leq \Psi(v) - \Psi(u) \quad \forall v \in X.$$

Portanto, u é ponto crítico de I . ■

Um número $c \in \mathbb{R}$ é chamado de valor crítico se o conjunto $I^{-1}(c)$ contém um ponto crítico, é chamado de valor crítico. A partir deste ponto, adotaremos as seguintes notações:

$$\mathcal{M}(I) := \{u \in X : u \text{ é ponto crítico de } I\} \quad \mathcal{M}_c(I) := \{u \in \mathcal{M}(I) : I(u) = c\}$$

$$I_c := \{u \in X : I(u) \leq c\} \quad I^c := \{u \in X : I(u) \geq c\}$$

Definição 2.4 (Condição de compacidade de Palais-Smale [18][19][23]). *Dizemos que o funcional I da forma (H) satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ (em abrev, PS_c): Se para toda a sequência $(u_n) \subset X$ satisfazendo*

$$i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c;$$

$$ii) \quad \Psi(v) - \Psi(u_n) \geq \varphi^0(u_n; v - u_n) - \varepsilon_n \|v - u_n\| \quad \forall v \in X,$$

onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$, possui uma subsequência convergente. Ademais, se isso ocorrer para todo $c \in \mathbb{R}$, I é dita que satisfaz a condição de Palais-Smale (em abrev, PS).

Proposição 2.5 (adaptado de [23]). *Sejam I um funcional da forma (H) e $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo (i) e (ii) da condição PS_c . Se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, então $u \in \mathcal{M}_c(I)$. Em particular, $\mathcal{M}_c(I)$ é compacto em X .*

Demonstração. Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Como Ψ é semicontínua inferior, temos $\Psi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n)$. Logo, desde que a sequência $(u_n) \subset X$ satisfaça as hipóteses da condição PS_c , temos

$$\Psi(v) - \Psi(u_n) \geq \varphi^0(u_n; v - u_n) - \varepsilon_n \|v - u_n\| \quad \forall v \in X. \quad (2.1)$$

Então, segue do item (d) do Teorema 1.30, que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\varphi^0(u_n; v - u_n) + \Psi(v) + \limsup_{n \rightarrow \infty} -\Psi(u_n) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} -\varphi^0(u_n; v - u_n) + \Psi(v) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \\ &\leq -\varphi^0(u; v - u) + \Psi(v) - \Psi(u), \end{aligned}$$

o que implica que

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \varphi^0(u; v - u) \quad \forall v \in X.$$

Portanto, $u \in \mathcal{M}(I)$. Em particular, tomando $v = u$ em (2.1), temos

$$\begin{aligned} \Psi(u) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \\ &\leq \Psi(u) + \limsup_{n \rightarrow \infty} -\varphi^0(u_n; u - u_n) \\ &\leq \Psi(u) - \varphi^0(u; 0) \\ &\leq \Psi(u). \end{aligned}$$

Logo, $\Psi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) \leq \Psi(u)$, obtendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) = \Psi(u)$. Portanto, $I(u) = \Psi(u) - \varphi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(u_n) - \varphi(u_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c$. O que implica $u \in \mathcal{M}_c(I)$.

Agora, considere a sequência $(w_n) \subset X$. Para mostrar que $\mathcal{M}_c(I)$ é compacto, basta mostra que existe uma subsequência de (w_n) convergente. De fato, como $(w_n) \subset \mathcal{M}_c(I)$, então $I(w_n) = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e vale

$$\Psi(v) - \Psi(w_n) \geq \varphi^0(w_n; v - w_n) \quad \forall v \in X. \quad (2.2)$$

Note que a desigualdade (2.2) satisfaz a hipótese da condição PS_c com $\varepsilon_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe uma subsequência $(w_{n_j}) \subset (w_n)$ tal que $w_{n_j} \rightarrow w$. Pela primeira parte da demonstração, temos $w \in \mathcal{M}_c(I)$. ■

Lema 2.6 (Princípio Variacional de Ekeland [11]). *Sejam (X, d) espaço métrico completo e $\Pi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínua inferior, limitada inferiormente e $\Pi \not\equiv +\infty$. Dados $\delta, \gamma > 0$ e $x \in X$ com*

$$\Pi(x) \leq \inf_{z \in X} \Pi(z) + \delta,$$

então existe um ponto $y \in X$ tal que

- $\pi(y) \leq \pi(x); \quad d(x, y) \leq 1/\gamma;$
- $\pi(z) - \pi(y) \geq -\delta\gamma d(x, y) \quad \forall z \in X.$

Demonstração. Consulte o Teorema 1 em [11]. ■

Uma consequência imediata desse resultado é a proposição a seguir.

Proposição 2.7 (adaptado de [23]). *Seja I um funcional da forma (H) limitado inferiormente e que satisfaça a condição PS_c , então $c = \inf_{u \in X} I(u)$ é um valor crítico de I .*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in X$ tal que $I(w_n) \leq c + 1/n$. Logo, pelo lema 2.6 (com $\delta = 1/n$ e $\gamma = 1$), para cada w_n existe $u_n \in X$ tal que

- $I(u_n) \leq I(w_n) \leq c + 1/n; \quad \|u_n - w_n\| \leq 1;$
- $I(w) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|w - u_n\| \quad \forall w \in X.$

Logo, tomando $w = u_n + t(v - u_n)$ para $t \in (0, 1)$, $\forall v \in X$ e usando a convexidade de Ψ , temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n}t\|v - u_n\| &\leq I(u_n + t(v - u_n)) - I(u_n) \\ &= \Psi((1-t)u_n + tv) - \Psi(u_n) - \left(\varphi(u_n + t(v - u_n)) - \varphi(u_n)\right) \\ &\leq t(\Psi(v) - \Psi(u_n)) - \left(\varphi(u_n + t(v - u_n)) - \varphi(u_n)\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(u_n + t(v - u_n)) - \varphi(u_n) \leq t(\Psi(v) - \Psi(u_n)) \quad \forall v \in X.$$

Dividindo ambos os lados por t e tomando o limsup com $t \rightarrow 0^+$, temos

$$-\frac{1}{n}\|v - u_n\| + \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u_n + t(v - u_n)) - \varphi(u_n)}{t} \leq \Psi(v) - \Psi(u_n).$$

Então, segue do fato $\varphi^0(u, v - u) \geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u))$ que

$$\Psi(v) - \Psi(u_n) \geq \varphi^0(u_n; v - u_n) - 1/n \|v - u_n\| \quad \forall v \in X.$$

Pela condição PS_c , existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \rightarrow u$. Logo, pela proposição 2.5 temos $u \in \mathcal{M}_c(I)$. ■

2.2 Teorema do Passo da Montanha

Os pontos críticos do funcional $I = \varphi - \Psi$ não se restringem, necessariamente, a pontos mínimos. Na prática, a obtenção desses pontos se dá por meio do Teorema do Passo da Montanha. Nesta seção, apresentaremos a versão generalizada desse teorema e os meios necessários para sua demonstração.

Lema 2.8 ([18][23]). *Sejam I um funcional da forma (H) que satisfaça a condição PS_c e N uma vizinhança de $\mathcal{M}_c(I)$. Então para cada $\bar{\varepsilon} > 0$, existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ tal que, para todo $u_0 \in I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \setminus N$, existe $v_0 \in X$ satisfazendo*

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) < \varphi^0(u_0; v_0 - u_0) - 3\varepsilon \|v_0 - u_0\|. \quad (2.3)$$

Demonstração. Suponha que (2.3) seja falso. Então existem as sequências $(u_n) \subset X \setminus N$ e $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c$ e

$$\Psi(v) - \Psi(u_n) \geq \varphi^0(u_n; v - u_n) - 3\varepsilon_n \|v - u_n\| \quad \forall v \in X,$$

com $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Pela condição PS_c e proposição 2.5, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \rightarrow u \in \mathcal{M}_c(I)$. Então $u_{n_j} \in N$ para algum $n_j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o que contraria o fato de que $u_n \notin N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Definição 2.9 ([18][23]). *Uma família de aplicações $f : W \times [0, \bar{s}] \rightarrow X$, com $\bar{s} > 0$, é dita Deformação se $f \in C(W \times [0, \bar{s}], X)$ e $f(\cdot, 0) = Id_W(\cdot)$.*

Adotaremos a notação $f_s(\cdot) = f(\cdot, s)$ daqui pra frente, onde s representa um parâmetro.

Lema 2.10 (Lema da Deformação [18][23]). *Seja I um funcional da forma (H) satisfazendo a condição PS_c . Suponha que N é uma vizinhança de $\mathcal{M}_c(I)$ e $\bar{\varepsilon} > 0$ fixo. Então existe*

$\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ tal que, para cada conjunto compacto $A \subset X \setminus N$ com

$$c \leq \sup_{u \in A} I(u) \leq c + \varepsilon.$$

Podemos encontrar um conjunto fechado $W \supsetneq A$ e uma deformação $f_s : W \rightarrow X$ com $s \in [0, \bar{s}]$ tendo as seguintes propriedades:

- $\|u - f_s(u)\| \leq s \quad \forall u \in W,$
- $I(f_s(u)) - I(u) \leq 2s \quad \forall u \in W,$
- $I(f_s(u)) - I(u) \leq -2\varepsilon s \quad \forall u \in W \text{ com } u \in I^c,$
- $\sup_{u \in A} I(f_s(u)) - \sup_{u \in A} I(u) \geq -2\varepsilon s.$

Ademais, se $W_0 \subset X$ é um subconjunto fechado com $W_0 \cap \mathcal{M}(I) = \emptyset$, então W e f_s podem ser escolhidos tal que

$$I(f_s(u)) - I(u) \leq 0 \quad \forall u \in W \cap W_0.$$

Demonstração. Consulte o Teorema 3.1 em [18] ou a proposição 2.3 em [23].

■

Seja Z um espaço vetorial topológico e X espaço de Banach. A aplicação $f : Z \rightarrow X$ é dita limitada se $f(Z)$ é limitada em X .

Seja $C(Z, X)$ o conjunto de as aplicações de Z para X contínuas e limitadas. Sabemos que $C(Z, X)$ é Banach munido pela norma do sup.

Seja o funcional $I : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, então definimos $\Pi : C(Z, X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por $\Pi(f) = \sup_{t \in Z} I(f(t))$. A seguinte propriedade será válida para Π :

Lema 2.11 ([23]). *Se I é semicontínua inferior, então Π também é semicontínua inferior.*

Demonstração. Suponha que a sequência $(f_n) \subset C(Z, X)$ converge uniformemente para f . Logo, $I(f(t)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(f_n(t))$ para todo $t \in Z$. Portanto,

$$\Pi(f) = \sup_{t \in Z} I(f(t)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in Z} I(f_n(t)) \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \Pi(f_n).$$

■

Sejam X, Y Espaços Vetoriais Topológicos.

Definição 2.12. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ aplicações contínuas de X em Y . Uma homotopia entre f e g é uma família de aplicações contínuas $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tal que*

$$H(x, 0) = f(x) \quad e \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

Se existe uma homotopia entre f e g , dizemos que f e g são homotópicas e denotamos por $f \approx g$.

Observação 2.13. *Para simplificar a notação, definimos $H_t(x) := H(x, t)$ com $t \in [0, 1]$.*

Definição 2.14. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação e A um subespaço de X . A Homotopia $H_t(x) : A \longrightarrow Y$, com $0 \leq t \leq 1$, é dita homotopia parcial de f se $f|_A = H_t$. Quando $A = X$, dizemos que $H(\cdot, t)$ é homotopia de f . Ademais, o subespaço A é dito possuir a Propriedade de Extensão de Homotopia em X com respeito à Y se toda homotopia parcial $H_t : A \longrightarrow Y$ de f tem extensão $G_t : X \longrightarrow Y$ tal que $f = G_0$.*

Teorema 2.15 (Teorema do Passo da Montanha Generalizado (adaptado de [23])). *Sejam $X = X_1 \oplus X_2$ com $\dim X_1 < \infty$ e o funcional $I = \Psi - \varphi$ satisfazendo a condição PS_c . Suponha que*

- i) Existem as constantes $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tal que $I|_{\partial B_\rho \cap X_2} \geq \alpha$;*
- ii) Existem uma constante $r > \rho$ e $e \in X_2$ com $\|e\| = 1$ tal que $I|_{\partial Q} \leq 0$, onde $Q := \{u \in X_1 : \|u\| \leq r\} \oplus \{te : 0 \leq t \leq r\}$.*

Então I tem um valor crítico $c \geq \alpha$, caracterizado por

$$c = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{x \in Q} I(f(x)), \quad (2.4)$$

onde $\Gamma = \{f \in C(Q, X) : f|_{\partial Q} = Id_{\partial Q}\}$.

Demonstração. Suponha que c não é valor crítico, então $\mathcal{M}_c(I) = \emptyset$. Tomando $N = \emptyset$ e $\bar{\varepsilon} = c$, pelo Lema da Deformação 2.10, existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ satisfaz as condições estabelecidas pelo lema. Note que Γ não satisfaz $\alpha_s(f(\cdot)) \in \Gamma$ para todo $f \in \Gamma$, onde α é uma deformação. Portanto, ampliaremos Γ para satisfazer essa condição.

Considere o conjunto

$$\Gamma_1 := \{f \in C(Q, X) : f|_{\partial Q} \approx Id_{\partial Q} \text{ em } I_{c-\varepsilon/4} \text{ e } (I \circ f)|_{\partial Q} \leq c - \varepsilon/2\}.$$

Note que

- $\Gamma_1 \neq \emptyset$, pois $Id_Q \in \Gamma_1$;

- $\Gamma \subset \Gamma_1$. De fato, dado $f \in \Gamma$, então $f|_{\partial Q} = Id_{\partial Q}$ e $\partial Q \subset I_{c-\varepsilon/2}$. Logo, temos que $(I \circ f)|_{\partial Q} \leq c - \varepsilon/2$;
- $\alpha_s(f) \in \Gamma_1 \quad \forall f \in \Gamma_1$ e $\forall s \in [0, \bar{s}]$, onde $\bar{s} > 0$ suficientemente pequeno. De fato, aplicando o Lema da Deformação 2.10, com $A = f(Q)$ satisfazendo as condições do lema. Temos

– Para todo $x \in \partial Q$ tal que $c - \varepsilon \leq I(f(x)) \leq c - \varepsilon/2$, temos

$$I(\alpha_s(f(x))) \leq I(f(x)) - 2\varepsilon s \leq c - \varepsilon/2 - 2\varepsilon s < c - \varepsilon/2.$$

– Para todo $x \in \partial Q$ tal que $I(f(x)) < c - \varepsilon$, temos

$$I(\alpha_s(f(x))) \leq I(f(x)) + Ms < c - \varepsilon + 2s \leq c - \varepsilon/2.$$

E claramente, $\alpha_s(f) \approx f$ em $I_{c-\varepsilon/2}$, pois a homotopia entre essas aplicações é $H : \partial Q \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por $H(x, t) = \alpha(f(x), ts)$. Assim,

$$H(x, 0) = f(x) \text{ e } H(x, 1) = \alpha_s(f(x)).$$

Portanto, $\alpha_s(f) \in \Gamma_1$ para todo $f \in \Gamma_1$, pois $\alpha_s(f)|_{\partial Q} \approx f|_{\partial Q} \approx Id_{\partial Q}$ e $(I \circ \alpha_s(f))|_{\partial Q} \leq c - \varepsilon/2$.

Agora, definimos o valor crítico correspondente a Γ_1 como :

$$c_1 := \inf_{f \in \Gamma_1} \sup_{x \in \partial Q} I(f(x)).$$

Afirmamos que $c_1 = c$. De fato, obviamente $c_1 \leq c$ (pois $\Gamma \subset \Gamma_1$). Por outro lado, suponha que $c_1 < c$, então existe $f \in \Gamma_1$ tal que

$$c_1 \leq \sup_{x \in Q} I(f(x)) < c.$$

Desde que $f|_{\partial Q} \approx Id|_{\partial Q}$ em $I_{c-\varepsilon/4}$ e Q é homeomorfo a uma bola fechada euclidiana finita, então (pela Propriedade de Extensão de Homotopia) a aplicação $Id_{\partial Q}$ pode ser estendido para algum $g \in C(Q, X)$ tal que $\sup_{x \in Q} I(g(x)) < c$, o que contradiz a definição de c , pois $g \in \Gamma$.

Afirmamos que $\Gamma_1 \subset C(Q, X)$ é fechado com respeito a usual norma do sup (lembre-se que Q é compacto em X). De fato, sejam a sequência $(f_n) \subset \Gamma$ e $f \in C(Q, X)$ tal que

$f_n \rightarrow f$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$I(f_n(x)) \leq c - \varepsilon/2 \quad \forall x \in \partial Q.$$

Usando o Teorema do valor médio de Lebourg's 1.33 e a convexidade de Ψ , temos

$$\begin{aligned} I(tf_n(x) + (1-t)f(x)) &= \Psi(tf_n(x) + (1-t)f(x)) - \varphi(f(x) + t(f_n(x) - f(x))) \\ &\leq t\Psi(f_n(x)) + (1-t)\Psi(f(x)) - \varphi(f(x)) \\ &\quad + t\varphi^0(\xi f_n(x) + (1-\xi)f(x); f(x) - f_n(x)) \quad \forall x \in \partial Q \text{ e } \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

para algum $\xi \in (0, 1)$.

Desde que $f(\partial Q)$ seja compacto, então a sequência (f_n) converge para f uniformemente. Logo, pelo fato de φ ser localmente Lipschitziana, temos

$$I(tf_n(x) + (1-t)f(x)) \leq t\Psi(f_n(x)) + (1-t)\Psi(f(x)) - \varphi(f(x)) + K\|f_n(x) - f(x)\|,$$

onde $K > 0$ é a constante de Lipschitz.

Note que $\varphi(f_n(x)) \leq \varphi(f(x)) + K\|f_n(x) - f(x)\|$, então

$$\begin{aligned} I(tf_n(x) + (1-t)f(x)) &\leq t\Psi(f_n(x)) + (1-t)\Psi(f(x)) \\ &\quad + 2K\|f_n(x) - f(x)\| - t\varphi(f_n(x)) - (1-t)\varphi(f(x)) \\ &= tI(f_n(x)) + (1-t)I(f(x)) + 2K\|f_n(x) - f(x)\|, \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, 1]$ e $x \in \partial Q$.

Como I é semicontínua inferior, temos

$$I(f(x)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(f_n(x)) \leq c - \varepsilon/2 \quad \forall x \in \partial Q.$$

Logo, usando o fato de que $f_n \in \Gamma_1$, obtemos

$$\begin{aligned} I(tf_n(x) + (1-t)f(x)) &\leq tI(f_n(x)) + (1-t)I(f(x)) + 2K\|f_n(x) - f(x)\| \\ &\leq t(c - \varepsilon/2) + (1-t)(c - \varepsilon/2) + 2K\|f_n(x) - f(x)\| \\ &= c - \varepsilon/2 + 2K\|f_n(x) - f(x)\| \quad \forall x \in \partial Q. \end{aligned}$$

Como a sequência (f_n) converge uniformemente para f , então para todo $n \in \mathbb{N}$ suficiente-

mente grande, temos

$$I(tf_n(x) + (1-t)f(x)) \leq c - \varepsilon/2 \quad \forall x \in \partial Q.$$

Portanto, para todo $x \in \partial Q$ e $t \in [0, 1]$, temos $f_n|_{\partial Q} \approx f|_{\partial Q}$ em $I_{c-\varepsilon/4}$, onde a homotopia entre as aplicações é $H(x, t) = tf_n(x) + (1-t)f(x)$. Por transitividade,

$$f|_{\partial Q} \approx Id_{\partial Q} \text{ em } I_{c-\varepsilon/4}.$$

consequentemente, $f \in \Gamma_1$. Portanto, Γ_1 é fechado em $C(Q, X)$.

Considere a aplicação $\Pi : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por $\Pi(f) = \sup_{x \in Q} I(f(x))$. Note que

- Π é semicontínua inferior pelo lema 2.11;
- $c \leq \Pi(f) \leq c + \varepsilon$.

Pelo lema 2.6, existe $g \in \Gamma_1$ tal que

$$\Pi(g) - \Pi(f) \geq -\varepsilon \|g - f\|.$$

Logo,

$$-2\varepsilon s \geq \Pi(\alpha_s(f)) - \Pi(f) \geq -\varepsilon \|\alpha_s(f) - f\| \geq -\varepsilon s.$$

Está contradição prova que $\mathcal{M}_c(I) \neq \emptyset$.

Para concluir, provaremos a afirmação que $c \leq \alpha$. Como $I|_{\partial B_\rho \cap X_2} \geq \alpha$, é suficiente mostrar que se $x \in Q$, então $f(x) \in \partial B_\rho \cap X_2$.

Sejam as projeções $P_j : X \longrightarrow X_j$; $j = 1, 2$ associada a decomposição $X = X_1 \oplus X_2$. Para $x \in Y := X_1 \oplus \text{span}\{e\}$. Então $x \in x_1 + re$; $x_1 \in X_1$, $r \in \mathbb{R}$. Definimos a aplicação $h : Y \longrightarrow Y$ dada por

$$h(x_1 + re) = P_1(f(x_1 + re)) + \|P_2 f(x_1 + re)\|e.$$

Note que se $x \in \partial Q$, temos

$$h(x) = P_1(I_d(x)) + \|P_2 Id(x)\|e = P_1(x) + \|P_2(x)\|e = x_1 + \|\rho e\|e = x,$$

isto é, $h|_{\partial Q} = Id_{\partial Q}$.

Pela propriedade de Brower's degree, temos

$$\deg(h, \mathring{Q}, \rho e) = \deg(I_d, \mathring{Q}, \rho e) = 1. \quad (2.5)$$

Então existe $x \in Q$ tal que $P_1(f(x)) = 0$ e $\|P_2(f(x))\| = \rho$. obtendo assim $f(x) \in \partial B_\rho \cap X_2$. ■

Corolário 2.16 (Teorema do Passo da Montanha [18]). *Assumimos que I é um funcional da forma (H) satisfazendo a condição PS_c e as seguintes afirmações abaixo:*

- i) $I(0) = 0$;
- ii) existem $\alpha, \rho > 0$ tal que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
- iii) existe $e \in X$ com $\|e\| > \rho$ tal que $I(e) \leq I(0)$.

Então, I tem um valor crítico $c \geq \alpha$ caracterizado por

$$c = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{x \in [0,1]} I(f(x)),$$

onde $\Gamma = \{f \in C([0,1], X) : f(0) = 0 \text{ e } f(1) = e\}$ é os caminhos que conecta 0 e e .

Demonstração. Segue do Teorema 2.15 aplicando-o $X_1 = \emptyset$ e $Q = [0, e]$. ■

Corolário 2.17 (Adaptado de [23]). *Seja o funcional $I = \Psi - \varphi$ satisfazendo a condição PS_c . Se 0 é um mínimo local de I e se $I(e) \leq I(0) = 0$ para algum $e \neq 0$, então I tem um ponto crítico diferente de 0 e e . Em particular, se I tem dois mínimos locais, então I tem pelo menos três pontos críticos.*

Demonstração. Assumimos, sem perda de generalidade, que $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha, \rho > 0$ tal que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha > 0$. Note que $\|e\| > \rho$, pois $I(e) \leq I(0) = 0$. Pelo Teorema do Passo da Montanha 2.16, temos que I possui um ponto crítico diferente de 0 e e . Por outro lado, suponha que não existem α e ρ . Seja $\|e\| > r$ tal que $I|_{\overline{B}_r} \geq 0$ e $0 < \rho < r$. Pelo lema 2.6, tomando $Z := B_r$, $\Pi := I|_{\overline{B}_r}$, $\delta := 1/n^2$ e $\lambda = n$, e usando o fato de $\inf_{u \in \partial B_\rho} I(u) = 0$, existe uma sequência $(w_n) \subset \partial B_\rho$ e $(u_n) \subset \overline{B}_r$ tal que

- $0 \leq I(u_n) \leq I(w_n), \quad \|u_n - w_n\| < 1/n$;
- $I(z) - I(u_n) \geq -1/n \|z - u_n\| \quad \forall z \in \overline{B}_r$.

Escolhemos um n suficientemente grande tal que $u_n \in B_r$. Seja $v \in X$ e $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $z = tv + (1 - t)u_n \in B_r$. Como Ψ é convexa, então

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n}t\|v - u_n\| &\leq I(u_n + t(v - u_n)) - I(u_n) \\ &= t(\Psi(v) - \Psi(u_n)) - (\varphi(u_n + t(v - u_n)) - \varphi(u_n)). \end{aligned}$$

Dividindo em ambos os lados por t e tomando o limsup com $t \rightarrow 0^+$, temos

$$-\frac{1}{n}\|v - u_n\| + \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u_n + t(v - u_n)) - \varphi(u_n)}{t} \leq \Psi(v) - \Psi(u_n) \quad \forall v \in X.$$

Então, segue do fato $\varphi^0(u, v) \geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u))$ que

$$\Psi(v) - \Psi(u_n) \geq \varphi^0(u_n; v - u_n) - 1/n\|v - u_n\| \quad \forall v \in X.$$

Pela condição PS_c , existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \rightarrow u \in \partial B_\rho$. Portanto, $u \in \mathcal{M}_c(I)$ e $0 \neq u \neq e$. ■

2.3 Princípio Variacional

Nesta seção, exploraremos o princípio variacional apresentado no artigo "Critical Point Theory on Convex Subsets" por Abbas Moameni [19], que possui diversas aplicações. Este princípio nos permite encontrar pontos críticos em subconjuntos próprios fechados de um determinado espaço de Banach e ainda obter pontos críticos em relação a todo o espaço.

Sejam X um espaço de Banach, $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, e seja K um subconjunto convexo e fechado de X . Assumimos que Ψ é Gâteaux-diferenciável em K e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Consideremos o seguinte problema:

$$\text{Encontre } u_0 \in K \text{ tal que } \Psi'(u_0) = \varphi'(u_0). \quad (P1)$$

Por Ψ ser Gâteaux-diferenciável em K e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue que $\partial\Psi(u_0) = \{\Psi'(u_0)\}$ e $\partial\varphi(u_0) = \{\varphi'(u_0)\}$ respectivamente. Logo, podemos reformular o problema (P1) da seguinte forma:

$$\text{Encontre } u_0 \in K \text{ tal que } \partial\Psi(u_0) \cap \partial\varphi(u_0) \neq \emptyset.$$

Seja u_0 um ponto crítico do funcional $I = \Psi - \varphi$, então resulta, por definição, que $\Psi(v) - \Psi(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \forall v \in X$. Assim, obtemos que $\varphi'(u_0) \in \partial\Psi(u_0) = \{\Psi'(u_0)\}$,

e consequentemente $\Psi'(u_0) = \varphi'(u_0)$. No entanto, não temos garantia nenhuma que $u_0 \in K$, a menos que $K = X$.

Para contornar isso, definiremos a função Ψ restrita ao conjunto K , denotada Ψ_K , definida por

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} \Psi(u), & u \in K \\ +\infty, & u \notin K. \end{cases}$$

Desta forma, um ponto crítico do funcional $I_K := \Psi_K - \varphi$ garante que $u_0 \in K$, mas isso não assegura que $\varphi'(u_0) \in \partial\Psi(u_0)$, apenas $\varphi'(u_0) \in \partial\Psi_K(u_0)$. Vamos agora estabelecer condições adicionais para garantir que um ponto crítico do funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ seja a solução para o problema em questão.

Teorema 2.18. *Seja $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, e seja K um subconjunto convexo e fechado de X . Assumimos que Ψ é G -diferenciável em K e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se as seguintes condições valem:*

A) *O funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ tem um ponto crítico u_0 ;*

B) *Existe $v_0 \in K$ tal que $\Psi'(v_0) = \varphi'(u_0)$.*

Então u_0 é uma solução para o problema (P1). Isto é, $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.

Antes de provarmos o Teorema 2.18, examinaremos alguns lemas importantes que serão utilizados ao longo deste capítulo.

Lema 2.19. *Seja $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa e $\Psi \not\equiv +\infty$. Sejam $u_0, v_0 \in \text{Dom}(\Psi)$ e assumimos que para algum $w^* \in \partial\Psi(v_0)$ vale:*

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle w^*, v_0 - u_0 \rangle. \quad (2.6)$$

Então $w^ \in \partial\Psi(u_0)$. Em particular, se Ψ for G -diferenciável nos pontos u_0 e v_0 , então $\Psi'(u_0) = w^* = \Psi'(v_0)$.*

Demonstração. Seja $w^* \in \partial\Psi(v_0)$. Pela proposição 1.22, temos

$$\Psi(v_0) + \Psi^*(w^*) = \langle w^*, v_0 \rangle. \quad (2.7)$$

Logo, juntando (2.6) e (2.7), temos

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle w^*, v_0 - u_0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle w^*, v_0 \rangle - \langle w^*, u_0 \rangle \\
&= \Psi(v_0) + \Psi^*(w^*) - \langle w^*, u_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Psi(u_0) + \Psi^*(w^*) = \langle w^*, u_0 \rangle.$$

Portanto, $w^* \in \partial\Psi(u_0)$. Ademais, se Ψ for Gâteaux-Diferenciável em u_0 e v_0 , temos $\partial\Psi(u_0) = \{\Psi'(u_0)\}$ e $\partial\Psi(v_0) = \{\Psi'(v_0)\}$. Portanto, pela primeira parte da demonstração, temos $\Psi'(v_0) = w^* = \Psi'(u_0)$. ■

Lema 2.20. *Sejam X espaço de Banach e $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa. Assumimos que K é um subconjunto de X e, existem $u \in K$ e $u^* \in X^*$ tal que*

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

Se $u \notin \partial K$, então $u^ \in \partial\Psi(u)$.*

Demonstração. Como $u \notin \partial K$, então para cada $v \in X$, tem-se $tv + (1 - t)u \in K$ para algum $t > 0$ suficientemente pequeno. Portanto,

$$\Psi(tv + (1 - t)u) - \Psi(u) \geq \langle u^*, tv + (1 - t)u - u \rangle.$$

Usando a convexidade de Ψ , temos

$$t(\Psi(v) - \Psi(u)) \geq t \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in X.$$

Dividindo ambos os lados por t , segue que

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in X.$$

Portanto, $u^* \in \partial\Psi(u)$. ■

Lema 2.21. *Seja $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa e $\Psi \not\equiv +\infty$ e suponha que Ψ é subdiferenciável em $u, v \in X$. Se existem $u^* \in \partial\Psi(u)$ e $v^* \in \partial\Psi(v)$ com*

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle = 0,$$

então $u^*, v^* \in \partial\Psi(u) \cap \partial\Psi(v)$. Em particular, se Ψ for G -diferenciável em u e v com

$$\langle \Psi'(u) - \Psi'(v), v - u \rangle = 0.$$

então, $\Psi'(u) = \Psi'(v)$.

Demonstração. Sejam $u^* \in \partial\Psi(u)$ e $v^* \in \partial\Psi(v)$. Logo, pela proposição 1.22, temos

$$\Psi(u) + \Psi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle \quad (2.8)$$

$$\Psi(v) + \Psi^*(v^*) = \langle v^*, v \rangle, \quad (2.9)$$

respectivamente. Somando as igualdades (2.8) e (2.9), temos

$$\langle v^*, v \rangle + \langle u^*, u \rangle = \Psi(u) + \Psi^*(u^*) + \Psi(v) + \Psi^*(v^*). \quad (2.10)$$

Por outro lado, por hipótese, temos que

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle = \langle u^*, u \rangle + \langle v^*, v \rangle - \langle u^*, v \rangle - \langle v^*, u \rangle = 0.$$

Então

$$\langle u^*, u \rangle + \langle v^*, v \rangle = \langle u^*, v \rangle + \langle v^*, u \rangle. \quad (2.11)$$

Juntando as igualdades (2.10) e (2.11), temos

$$\Psi(u) + \Psi^*(u^*) + \Psi(v) + \Psi^*(v^*) = \langle u^*, v \rangle + \langle v^*, u \rangle.$$

Portanto,

$$\Psi(u) + \Psi^*(v^*) - \langle v^*, u \rangle + \Psi(v) + \Psi(u^*) - \langle u^*, v \rangle = 0.$$

Isto junto com o fato que

$$\Psi(u) + \Psi^*(v^*) - \langle v^*, u \rangle \geq 0, \quad \Psi(v) + \Psi(u^*) - \langle u^*, v \rangle \geq 0,$$

implica que ambos os termos são iguais a zero. Isto é,

$$\begin{aligned} \Psi(u) + \Psi^*(v^*) &= \langle v^*, u \rangle \\ \Psi(v) + \Psi(u^*) &= \langle u^*, v \rangle. \end{aligned}$$

Obtendo assim, pela proposição 1.22, que $v^* \in \partial\Psi(u)$ e $u^* \in \partial\Psi(v)$. Portanto, temos $u^*, v^* \in \partial\Psi(u) \cap \partial\Psi(v)$. Ademais, se Ψ for Gâteaux-diferenciável em u e v , temos

$\partial\Psi(u) = \{\Psi'(u)\}$ e $\partial\Psi(v) = \{\Psi'(v)\}$. Assim, pela primeira parte da demonstração, temos $\Psi'(v) \in \partial\Psi(u)$ e $\Psi'(u) \in \partial\Psi(v)$. Portanto, $\Psi'(u) = \Psi'(v)$. ■

Agora, com os pré-requisitos necessários já estabelecidos, podemos demonstrar o Teorema 2.18.

Prova do Teorema 2.18: Pela condição A, temos $u_0 \in \text{Dom}(\Psi_K)$ e

$$\Psi_K(v) - \Psi_K(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \quad \forall v \in X. \quad (2.12)$$

Por outro lado, pela condição B, existe $v_0 \in K$ tal que $\Psi'(v_0) = \varphi'(u_0)$. Logo, tomando $v = v_0$ em (2.12), segue

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle. \quad (2.13)$$

Note que Ψ é Gâteaux-diferenciável em v_0 , assim $\partial\Psi(v_0) = \{\Psi'(v_0)\}$. Segue da subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 e do fato que $\Psi'(v_0) = \varphi'(u_0)$,

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) - \Psi(v_0) &\geq \langle \Psi'(v_0), u_0 - v_0 \rangle \\ &= \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Juntando as equações (2.13) e (2.14), temos

$$\Psi(u_0) - \Psi(v_0) = \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle.$$

Assim, segue do lema 2.19 que $\varphi'(u_0) \in \partial\Psi(u_0)$. Portanto, $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$. ■

Substituiremos a condição B, no teorema 2.18, pela condição B1 a seguir. O objetivo dessa troca é buscar a solução mais geral possível para o problema (P1).

(Condição B1): Se $u_0 \in \partial K$, então pelo menos uma das seguintes condições é válida:

- i) Existem $v_0 \in K$ e uma aplicação paramonótona $M : X \longrightarrow 2^{X^*}$ com $M(u_0)$ singleton tal que

$$\varphi'(u_0) + M(u_0) \in \Psi'(v_0) + M(v_0).$$

- ii) Existem $v_0 \in K$ e uma aplicação paramonótona $M : X \longrightarrow 2^{X^*}$ com $M(0) = \{0\}$ tal que

$$\varphi'(u_0) \in \Psi'(v_0) + M(u_0 - v_0).$$

Demonstraremos que o resultado permanece válido sob essa nova condição. Com efeito, pela condição A, temos $u_0 \in \text{Dom}(\Psi_K)$ e $\Psi_K(v) - \Psi_K(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \forall v \in X$. Neste caso, temos

$$\Psi(v) - \Psi(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \quad \forall v \in K. \quad (2.15)$$

Analisaremos dois casos excludentes:

- Se $u_0 \notin \partial K$, então segue do lema 2.20 que $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.
- Se $u_0 \in \partial K$, então considere a condição B1-i). Neste caso, existe $v_0^* \in M(v_0)$ tal que

$$\varphi'(u_0) + M(u_0) = \Psi'(v_0) + v_0^*. \quad (2.16)$$

Pela subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 , temos

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) - \Psi(v_0) &\geq \langle \varphi'(u_0) + M(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle \\ &= \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle + \underbrace{\langle M(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.17)$$

pois M é paramonótona. Por (2.15), segue tomando $v = v_0$ que

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle \varphi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle.$$

Logo, segue de (2.17) que $\langle M(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle = 0$. Então, pelo lema 2.21 temos $M(u_0) = v_0^*$. Assim, por (2.16), temos $\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0)$. O que segue, pelo lema 2.19,

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0).$$

Agora, considere a condição B1-ii). Neste caso, existe $v_0^* \in M(u_0 - v_0)$ tal que

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0) + v_0^*. \quad (2.18)$$

Pela subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 , temos

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) - \Psi(v_0) &\geq \langle \varphi'(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle \\ &= \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle + \underbrace{\langle v_0^* - M(0), (u_0 - v_0) - 0 \rangle}_{\geq 0} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\geq \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle.$$

Por (2.15), segue tomando $v = v_0$ que

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle \varphi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle.$$

Logo, segue de (2.19) que $\langle v_0^*, u_0 - v_0 \rangle = 0$. Então, pelo lema 2.21 temos que $v_0^* = M(0) = 0$. Assim, por (2.18), temos $\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0)$. O que segue, pelo lema 2.19,

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0).$$

Observação 2.22. *Ressalto que o emprego da notação $M(u_0)$ e $M(0)$ como elemento neste caso configura um abuso de notação, com o objetivo de simplificar a demonstração. Outro ponto a se destacar é que se $M \equiv 0$, então a condição B1 retorna para B.*

Note que pelo lema 2.21, a aplicação $\partial\Phi$ é paramonótona se Φ for convexa. Vejamos o resultado a seguir.

Corolário 2.23. *Sejam $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, e seja K um subconjunto convexo e fechado de X . Assumimos que Ψ é G -diferenciável em K e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se as seguintes condições valem:*

A) *O funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ tem um ponto crítico u_0 ;*

B) *Se $u_0 \in \partial K$, então pelo menos uma das seguintes condições é válida:*

i) *Existem $v_0 \in K$ e uma função $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa e G -diferenciável em u_0 tal que*

$$\varphi'(u_0) + \Phi'(u_0) = \Psi'(v_0) + \partial\Phi(v_0).$$

ii) *Existem $v_0 \in K$ e uma função $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa com $\partial\Phi(0) = \{0\}$ tal que*

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0) + \partial\Phi(u_0 - v_0).$$

Então u_0 é uma solução para o problema (P1). Isto é, $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.

Demonstração. Pela condição A temos que o funcional I_K tem um ponto crítico u_0 , então $u_0 \in \text{Dom}(\Psi_K)$ e $\Psi_K(v) - \Psi_K(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \forall v \in X$. Note que

$$\Psi(v) - \Psi(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \quad \forall v \in K. \quad (2.20)$$

Analisaremos dois casos excludentes:

- Se $u_0 \notin \partial K$, então segue do lema 2.20 que $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.
- Se $u_0 \in \partial K$, então considere a condições (i). Neste caso, existe $v_0^* \in \partial\Phi(v_0)$ tal que

$$\varphi'(u_0) + \Phi'(u_0) = \Psi'(v_0) + v_0^*. \quad (2.21)$$

Pela subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 , temos

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) - \Psi(v_0) &\geq \langle \varphi'(u_0) + \Phi'(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle \\ &= \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle + \underbrace{\langle \Phi'(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.22)$$

pois $\partial\Phi$ é paramonótona. Por (2.20), segue tomando $v = v_0$ que

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle \varphi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle.$$

Logo, segue de (2.22) que $\langle \Phi'(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle = 0$. Então, pelo lema 2.21, temos $\Phi'(u_0) = v_0^*$. Assim, por (2.21), temos $\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0)$. Logo, pelo lema 2.19,

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0).$$

Agora, considere a condição (ii). Neste caso, existe $v_0^* \in \partial\Phi(u_0 - v_0)$ tal que

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0) + v_0^*. \quad (2.23)$$

Pela subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 , temos

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) - \Psi(v_0) &\geq \langle \varphi'(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle \\ &= \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle + \underbrace{\langle v_0^* - 0, (u_0 - v_0) - 0 \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por (2.20), segue tomando $v = v_0$ que

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle \varphi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle.$$

Logo, segue de (2.24) que $\langle v_0^* - 0, (u_0 - v_0) - 0 \rangle = 0$. Então, pelo lema 2.21, temos

$v_0^* = 0$. Assim, por (2.23), temos $\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0)$. Logo, pelo lema 2.19,

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0).$$

■

Corolário 2.24. *Sejam $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, e seja K um subconjunto convexo e fechado de X . Assumimos que Ψ é G -diferenciável em K e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se as seguintes condições valem:*

A) *O funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ tem um ponto crítico u_0 ;*

B) *Se $u_0 \in \partial K$, então pelo menos uma das seguintes condições é válida:*

i) *Existe $v_0 \in K$ e uma função $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa e G -diferenciável tal que*

$$\varphi'(u_0) + \Phi'(u_0) = \Psi'(v_0) + \Phi'(v_0).$$

ii) *Existe $v_0 \in K$ e uma função $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa e G -diferenciável com $\Phi'(0) = 0$ tal que*

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0) + \Phi'(u_0 - v_0).$$

Então u_0 é uma solução para o problema (P1). Isto é, $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.

Demonstração. Pela condição A temos que o funcional I_K tem um ponto crítico u_0 , então $u_0 \in \text{Dom}(\Psi_K)$ e $\Psi_K(v) - \Psi_K(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \forall v \in X$. Note que

$$\Psi(v) - \Psi(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \quad \forall v \in K. \quad (2.25)$$

Analisaremos dois casos excludentes:

- Se $u_0 \notin \partial K$, então segue do lema 2.20 que $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.
- Se $u_0 \in \partial K$, então considere a condições (i). Neste caso, existe $v_0 \in K$ e $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa e G -diferenciável tal que

$$\varphi'(u_0) + \Phi'(u_0) = \Psi'(v_0) + \Phi'(v_0). \quad (2.26)$$

Pela subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 , temos

$$\Psi(u_0) - \Psi(v_0) \geq \langle \varphi'(u_0) + \Phi'(u_0) - \Phi'(v_0), u_0 - v_0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle + \underbrace{\langle \Phi'(u_0) - \Phi'(v_0), u_0 - v_0 \rangle}_{\geq 0} \quad (2.27) \\
&\geq \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle,
\end{aligned}$$

Por (2.25), segue tomando $v = v_0$ que

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle \varphi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle.$$

Logo, segue de (2.27) que $\langle \Phi'(u_0) - \Phi'(v_0), u_0 - v_0 \rangle = 0$. Então, pelo lema 2.21, temos $\Phi'(u_0) = \Phi'(v_0)$. Assim, por (2.26), temos $\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0)$. Obtendo, pelo lema 2.19,

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0).$$

Agora, considere a condição (ii). Neste caso, existe $v_0 \in K$ e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e G-diferenciável com $\Phi'(0) = 0$ tal que

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0) + \Phi'(u_0 - v_0). \quad (2.28)$$

Pela subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 , temos

$$\begin{aligned}
\Psi(u_0) - \Psi(v_0) &\geq \langle \varphi'(u_0) - \Phi'(u_0 - v_0), u_0 - v_0 \rangle \\
&= \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle + \underbrace{\langle \Phi'(u_0 - v_0) - \Phi'(0), (u_0 - v_0) - 0 \rangle}_{\geq 0} \quad (2.29) \\
&\geq \langle \varphi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle,
\end{aligned}$$

Por (2.25), segue tomando $v = v_0$ que

$$\Psi(v_0) - \Psi(u_0) = \langle \varphi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle.$$

Logo, segue de (2.29) que $\langle \Phi'(u_0 - v_0), u_0 - v_0 \rangle = 0$. Então, pelo lema 2.21, temos $\Phi'(u_0 - v_0) = 0$. Assim, por (2.28), temos $\varphi'(u_0) = \Psi'(v_0)$. Obtendo, pelo lema 2.19,

$$\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0).$$

■

Observação 2.25. Note que se $\Phi \equiv 0$ no corolário acima, então retorna para a condição B do Teorema 2.18.

Consideremos agora o problema em um contexto mais geral. Nesta etapa, dispensaremos as hipóteses iniciais de que Ψ seja G-diferenciável e que $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Vejamos o seguinte problema.

Sejam X um espaço de Banach, $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior, com $\Psi \not\equiv +\infty$, e K um subconjunto convexo e fechado de X . Assumimos que $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitziana. Consideremos o seguinte problema:

$$\text{Encontre } u_0 \in K \text{ tal que } \partial_c \varphi(u_0) \cap \partial \Psi(u_0) \neq \emptyset. \quad (P2)$$

Teorema 2.26. *Seja $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, e seja K um subconjunto convexo e fechado de X . Assumimos que $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitziana e que as duas afirmações a seguir valem:*

A) *O funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ tem um ponto crítico u_0 . Isto é, $u_0 \in \text{Dom}(\Psi_K)$ e*

$$\Psi_K(v) - \Psi_K(u_0) \geq \varphi^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in X;$$

B) *Se $u_0 \in \partial K$, então pelo menos uma das seguintes condições é válida:*

i) *Existem $v_0 \in K$ e uma aplicação paramonótona $M : X \longrightarrow 2^{X^*}$ com $M(u_0)$ singleton tal que*

$$\{\partial_c \varphi(u_0) + M(u_0)\} \cap \{\partial \Psi(v_0) + M(v_0)\} \neq \emptyset.$$

ii) *Existem $v_0 \in K$ e uma aplicação paramonótona $M : X \longrightarrow 2^{X^*}$ com $M(0) = 0$ tal que*

$$\{\partial_c \varphi(u_0)\} \cap \{\partial \Psi(v_0) + M(u_0 - v_0)\} \neq \emptyset.$$

Então, u_0 é uma solução para o problema (P2). Isto é, $\partial_c \varphi(u_0) \cap \partial \Psi(u_0) \neq \emptyset$.

Demonstração. Por A), temos u_0 é ponto crítico de I . Ou seja, $u_0 \in \text{Dom}(\Psi_K)$ e

$$\Psi_K(v) - \Psi_K(u_0) \geq \varphi^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in K. \quad (2.30)$$

Analisaremos dois casos excludentes:

- Se $u_0 \notin \partial K$, então para cada $v \in X$, tomamos $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $tv + (1 - t)u_0 \in K$. Logo,

$$\Psi(tv + (1 - t)u_0) - \Psi(u_0) \geq \varphi^0(u_0; tv + (1 - t)u_0 - u_0).$$

Pela convexidade de Ψ , implica que

$$t(\Psi(v) - \Psi(u_0)) \geq \varphi^0(u_0; t(v - u_0)) \quad \forall v \in X.$$

Como $\varphi^0(u_0; \cdot)$ é homogênea positiva, temos

$$t(\Psi(v) - \Psi(u_0)) \geq t\varphi^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in X.$$

Dividindo ambos os lados por t , temos

$$\Psi(v) - \Psi(u_0) \geq \varphi^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in X.$$

Por outro lado, usando o fato que $\varphi^0(u_0; v) = \max\{\langle u^*, v \rangle : u^* \in \partial_c \varphi(u_0) \forall v \in X\}$, segue que

$$\begin{aligned} \Psi(v) - \Psi(u_0) &\geq \varphi^0(u_0; v - u_0) \\ &\geq \langle u_0^*, v - u_0 \rangle, \end{aligned}$$

para todo $v \in X$ e para algum $u_0^* \in \partial_c \varphi(u_0)$. Portanto,

$$\partial \Psi(u_0) \cap \partial_c \varphi(u_0) \neq \emptyset.$$

- Se $u_0 \in \partial K$, então considere a condição (i). Seja $u_0^* \in \partial_c \varphi(u_0)$ de tal modo que $u_0^* + M(u_0) \in \partial \Psi(v_0) + M(v_0)$. Logo, existe $v_0^* \in M(v_0)$ tal que

$$u_0^* + M(u_0) - v_0^* \in \partial \Psi(v_0).$$

Como $u_0^* \in \partial_c \varphi(u_0)$, segue de (2.30) que

$$\begin{aligned} \Psi(v) - \Psi(u_0) &\geq \varphi^0(u_0; v - u_0) \\ &\geq \langle u_0^*, v - u_0 \rangle \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela subdiferenciabilidade de Ψ em v_0 , temos

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) - \Psi(v_0) &\geq \langle u_0^* + M(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle \\ &\geq \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle + \underbrace{\langle M(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle. \end{aligned}$$

O restante da prova segue igual ao Teorema 2.18 usando a condição B1. A demonstração sob a condição (ii) segue o mesmo padrão. ■

Definição 2.27 (Condição de Invariância Pontual). *Sejam $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, K um subconjunto convexo e fechado de X e φ localmente Lipschitziana. Dizemos que a tripla (Ψ, K, φ) satisfaz a condição de invariância pontual se satisfaz a condição (i) ou (ii) do Teorema 2.26.*

Podemos generalizar o problema (P2) trocando a aplicação $\partial_c \varphi : X \rightarrow 2^{X^*}$ por um aplicação multivalor arbitrário $\mathcal{F} : X \rightarrow 2^{X^*}$. Logo, teríamos o seguinte problema a considerar:

$$\text{Encontre } u_0 \in K \text{ tal que } \partial\Psi(u_0) \cap \mathcal{F}(u_0) \neq \emptyset. \quad (P3)$$

Corolário 2.28. *Seja $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$, e seja K um subconjunto convexo e fechado de X . Assumimos que $\mathcal{F} : X \rightarrow 2^{X^*}$ é uma aplicação multivalor e que as seguintes condições valem:*

A) *Existem $u_0 \in K$ e $u_0^* \in \mathcal{F}(u_0)$ tal que*

$$\langle u_0^*, v - u_0 \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u_0) \quad \forall v \in K.$$

B) *Se $u_0 \in \partial K$, então a tripla (Ψ, K, φ) satisfaz a condição de invariância pontual.*

Então, u_0 é solução para o problema (P3). Isto é, $\partial\Psi(u_0) \cap \mathcal{F}(u_0) \neq \emptyset$.

Demonstração. Por A, existem $u_0 \in K$ e $u_0^* \in \mathcal{F}(u_0)$ tal que

$$\Psi(v) - \Psi(u_0) \geq \langle u_0^*, v - u_0 \rangle \quad \forall v \in K.$$

Analisaremos dois casos:

- Se $u_0 \notin \partial K$, segue do lema 2.20 que $u_0^* \in \partial\Psi(u_0)$.
- Se $u_0 \in \partial K$, usando o fato que (Ψ, K, φ) satisfaz a condição de invariância pontual e pelo Teorema 2.26, segue que $u_0^* \in \partial\Psi(u_0)$.

Portanto, $u_0 \in K$ e $u_0^* \in \partial\Psi(u_0) \cap \mathcal{F}(u_0)$. ■

Pontos críticos do funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ podem ser obtidos fazendo uso da proposição 2.7. Não é necessário que K seja convexo, mas devemos assumir algumas hipóteses adicionais sobre Ψ e φ .

Proposição 2.29. *Sejam $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$ e K um subconjunto fechado de X . Assumimos que $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e que as duas afirmações a seguir valem:*

- A) *O funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ é limitado inferiormente em K e existe $u_0 \in K$ com*

$$I_K(u_0) = \inf_{u \in K} I_K(u).$$
- B) *Se $u_0 \in \partial K$, então a tripla (Ψ, K, φ) satisfaz a condição de invariância pontual.*

Então u_0 é solução para $\partial\varphi(u_0) \cap \partial\Psi(u_0) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seguindo a mesma linha das demonstrações anteriores, analisaremos dois casos:

- Se u_0 não pertence à fronteira de K , então para todo $v \in X$, existe $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $tv + (1 - t)u_0 \in K$. Logo,

$$\Psi(tv + (1 - t)u_0) - \varphi(tv + (1 - t)u_0) = I(tv + (1 - t)u_0) \geq I(u_0) = \Psi(u_0) - \varphi(u_0).$$

Seja $u_0^* \in \partial\varphi(u_0)$, segue que

$$\begin{aligned} \Psi(tv + (1 - t)u_0) - \Psi(u_0) &\geq \varphi(tv + (1 - t)u_0) - \varphi(u_0) \\ &\geq \langle u_0^*, tv + (1 - t)u_0 - u_0 \rangle. \end{aligned}$$

Pela convexidade da Ψ , temos

$$t(\Psi(v) - \Psi(u_0)) \geq t \langle u_0^*, v - u_0 \rangle.$$

Dividindo ambos os lados por t , temos

$$\Psi(v) - \Psi(u_0) \geq \langle u_0^*, v - u_0 \rangle \quad \forall v \in X.$$

Então, $u_0^* \in \partial\Psi(u_0)$, o que implica em $u_0^* \in \partial\Psi(u_0) \cap \partial\varphi(u_0)$.

- Se u_0 pertence à fronteira de K , vamos analisar inicialmente a condição (i). Seja $u_0^* \in \partial\varphi(u_0)$, temos

$$u_0^* + M(u_0) \in \partial\Psi(v_0) + v_0^*.$$

para algum $v_0^* \in M(v_0)$. Logo, pela proposição 1.22, temos

$$\varphi(u_0) + \varphi^*(u_0^*) = \langle u_0^*, u_0 \rangle. \quad (2.31)$$

$$\Psi(v_0) + \Psi^*(u_0^* + M(u_0) - v_0^*) = \langle u_0^* + M(u_0) - v_0^*, v_0 \rangle. \quad (2.32)$$

Como $v_0 \in K$, segue

$$I(u_0) = \inf_{u \in K} I(u) \leq I(v_0).$$

Assim, temos

$$\Psi(u_0) - \varphi(u_0) \leq \Psi(v_0) - \varphi(v_0).$$

Substituindo $\varphi(u_0)$ e $\Psi(v_0)$ de (2.31) e (2.32) na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) - \langle u_0^*, u_0 \rangle + \varphi^*(u_0^*) &\leq \langle u_0^* + M(u_0) - v_0^*, v_0 \rangle \\ &\quad - \Psi^*(u_0^* + M(u_0) - v_0^*) - \varphi(v_0). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Fenchel (Observação 1.11), temos

$$\Psi(u_0) + \Psi^*(u_0^* + M(u_0) - v_0^*) \geq \langle u_0^* + M(u_0) - v_0^*, u_0 \rangle,$$

o qual juntando com (2.33) implica que

$$\begin{aligned} \Psi(u_0) + \Psi^*(u_0^* + M(u_0) - v_0^*) - \langle u_0^*, u_0 \rangle - \langle M(u_0) - v_0^*, v_0 \rangle \\ \leq \langle u_0^*, v_0 \rangle - \varphi^*(u_0^*) - \varphi(v_0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Simplificando a desigualdade acima, temos

$$\langle M(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle \leq \langle u_0^*, v_0 \rangle - \varphi^*(u_0^*) - \varphi(v_0). \quad (2.35)$$

Observe que o lado esquerdo da equação (2.35) é não negativo em decorrência da paramotocidade de M . Já o lado direito é não positivo, conforme a desigualdade de Fenchel. Diante disso,

$$\langle M(u_0) - v_0^*, u_0 - v_0 \rangle = \langle u_0^*, v_0 \rangle - \varphi^*(u_0^*) - \varphi(v_0) = 0. \quad (2.36)$$

Segue do lema 2.21 que $M(u_0) = v_0^*$. Isto junto com (2.34) e (2.36) implica em

$$\Psi^*(u_0^*) + \Psi(u_0) - \langle u_0^*, u_0 \rangle \leq 0.$$

Em vista da Desigualdade de Fenchel, que garante a não negatividade da última desigualdade, então segue $\Psi^*(u_0^*) + \Psi(u_0) = \langle u_0^*, u_0 \rangle$. Isto implica em $u_0^* \in \partial\Psi(u_0)$,

obtendo

$$u_0^* \in \partial\Psi(u_0) \cap \partial\varphi(u_0).$$

A demonstração sob a condição (ii) é similar.

■

Corolário 2.30. *Sejam $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, semicontínua inferior e $\Psi \not\equiv +\infty$ e K um subconjunto fechado de X . Assumimos que Ψ é G -diferenciável em K , $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e que as seguintes duas afirmações sejam válidas:*

A) O funcional $I = \Psi - \varphi$ é limitado inferiormente em K e existe $u_0 \in K$ com

$$I_K(u_0) = \inf_{u_0 \in K} I(u);$$

B) Existe $v_0 \in K$ tal que $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.

Então u_0 é solução para $\varphi'(u_0) = \Psi'(u_0)$.

Demonstração. A demonstração segue a mesma linha de raciocínio da proposição 2.29, considerando M identicamente nula.

■

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo, serão apresentadas algumas aplicações do princípio variacional abordado anteriormente, com ênfase em equações diferenciais parciais e em análise não-linear. As seções aqui apresentadas têm como base o artigo "Critical Point Theory on Convex Subsets", de Abbas Moameni [19], e outros trabalhos do mesmo autor. As seções dedicadas às equações diferenciais parciais discute sobre equações elípticas semilineares, tanto com termos côncavos-convexos quanto com termo não-homogêneo. O enfoque será aplicar o princípio estudado, propondo uma abordagem alternativa para a resolução dessas equações, além de expandir alguns resultados clássicos existentes na literatura. Já nas seções relacionadas à análise não-linear, abordaremos a teoria do ponto fixo no contexto variacional, bem como a teoria dos pontos críticos de funções localmente Lipschitziana em subconjuntos convexos.

3.1 Equação Elíptica Semilinear

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u + \mu|u|^{q-2}u & ; \quad x \in \Omega \\ u = 0 & ; \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado de classe C^2 , $\mu > 0$ e $1 < q < 2 < p$.

Este problema foi investigado por Ambrosetti, Brézis e Cerami em [1]. O trabalho demonstra, usando o método das soluções sub-super, que existe $\mu^* > 0$ tal que, para cada $0 < \mu \leq \mu^*$, o problema (3.1) tem uma solução positiva com p podendo ser arbitrariamente grande. Além disto, quando $p < 2^*$, onde $2^* = 2n/(n-2)$, as soluções do problema (3.1)

corresponde em pontos críticos do funcional Energia

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx,$$

definido em $H_0^1(\Omega)$ permitindo, portanto, a aplicação de um método variacional. Ademais, como mostrado Teorema 2.5 do trabalho, existe $\mu^* > 0$ tal que para $\mu \in (0, \mu^*)$, o problema admite infinitas soluções com energia negativa e infinitas soluções com energia positiva.

O objetivo aqui é mostrar a existência de pelo menos uma solução positiva, não-trivial, para valores arbitrários de p , fornecendo uma abordagem diferente utilizando o princípio variacional apresentado no capítulo anterior.

Teorema 3.1 (Resultado Principal [15]). *Assumimos que $1 < q < 2 < p$. Então existe $\mu^* > 0$ tal que para cada $\mu \in (0, \mu^*)$ o problema (3.1) tem pelo menos uma solução positiva $u_0 \in W^{2,n}(\Omega)$ com a energia negativa.*

Para provar o Teorema 3.1, serão necessários alguns resultados preliminares. Consideremos o espaço de Banach $X := H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_X := \|u\|_{H_0^1} + \|u\|_{L^p},$$

com as norma H_0^1 sendo a usual.

Note que se $u^* \in X^*$ e $u \in X$, então definimos o pareamento bilinear entre X^* e X por

$$\langle u^*, u \rangle := \int_{\Omega} u^*(x)u(x)dx.$$

Seja $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional Energia referente ao problema (3.1), isto é,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx.$$

Introduzindo as funções Ψ e φ , onde

$$\Psi(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad \varphi(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx,$$

temos que

$$I = \Psi - \varphi.$$

Proposição 3.2 ([24]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $2 < p < \infty$. O funcional $\bar{\varphi}(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx$ é de classe $C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ e*

$$\langle \bar{\varphi}'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos a existência do diferencial de Gâteaux. Seja $u, v \in L^p$ e considere a sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \rightarrow 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(u(x)) := \frac{|u(x) + t_n v(x)|^p - |u(x)|^p}{t_n} \quad \forall x \in \Omega.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} |f_n(u(x))| &= \frac{\left| |u(x) + t_n v(x)|^p - |u(x)|^p \right|}{t_n} \\ &= p \left| u(x) + t_n \lambda v(x) \right|^{p-1} |v(x)| \\ &\leq p \left(|u(x)| + |v(x)| \right)^{p-1} |v(x)|. \end{aligned}$$

Queremos fazer uso do Teorema da Convergência Dominada. Para isso, note que a sequência $f_n(u(x)) \rightarrow p|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)$ pontualmente. Além disto, essa sequência é dominada por uma função integrável, pois, desde que $u, v \in L^p(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} \left(|u| + |v| \right)^p dx \leq \int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} |v|^p dx < \infty.$$

Logo, pelo Teorema de Hölder, segue que

$$\int_{\Omega} \left(|u| + |v| \right)^{p-1} |v| dx \leq \left(\int_{\Omega} \left(|u| + |v| \right)^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

onde $1/p + (p-1)/p = 1$. Isso implica que

$$\left(|u| + |v| \right)^{p-1} |v| \in L^1(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\varphi}(u + t_n v) - \overline{\varphi}(u)}{t_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|u(x) + t_n v(x)|^p - |u(x)|^p}{t_n} dx \\ &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u(x) + t_n v(x)|^p - |u(x)|^p}{t_n} dx \\ &= p \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\langle \bar{\varphi}'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Agora, para mostrar a continuidade de $\bar{\varphi}'$, definimos a função $g(u) := p|u|^{p-2}u$. Assumimos que $u_n \rightarrow u \in L^p(\Omega)$. Pelo Teorema B.32 implica que $g(u_n) \rightarrow g(u) \in L^q(\Omega)$ com $q := p/(p-1)$. Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle \bar{\varphi}'(u_n) - \bar{\varphi}'(u), v \rangle| &= |\langle \bar{\varphi}'(u_n), v \rangle - \langle \bar{\varphi}'(u), v \rangle| \\ &= \left| \int_{\Omega} (p|u_n|^{p-2}u_n - p|u|^{p-2}u) v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |p|u_n|^{p-2}u_n - p|u|^{p-2}u| |v| dx \\ &= \int_{\Omega} |g(u_n) - g(u)| |v| dx \\ &\leq \|g(u_n) - g(u)\|_{L^q} \|v\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\bar{\varphi}'(u_n) - \bar{\varphi}'(u)\| = \sup_{\|v\|=1} |\langle \bar{\varphi}'(u_n) - \bar{\varphi}'(u), v \rangle| \leq \|g(u_n) - g(u)\|_{L^q} \rightarrow 0.$$

Assim, obtemos que $\bar{\varphi}'$ é contínua. ■

Note que Ψ é convexa. Para provar isso, utilizamos o fato de que, para funções $u, \bar{u} \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$, temos a seguinte desigualdade para função quadrática

$$|\nabla(\alpha u + (1 - \alpha)\bar{u})|^2 \leq \alpha |\nabla u|^2 + (1 - \alpha) |\nabla \bar{u}|^2.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha u + (1 - \alpha)\bar{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\alpha u + (1 - \alpha)\bar{u})|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\alpha |\nabla u|^2 + (1 - \alpha) |\nabla \bar{u}|^2) dx \\ &= \alpha \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + (1 - \alpha) \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^2 dx \\ &= \alpha \Psi(u) + (1 - \alpha) \Psi(\bar{u}). \end{aligned}$$

Para aplicar o princípio variacional estudado, definiremos o subconjunto K de X que seja convexo e fracamente fechado.

Lema 3.3 ([15]). *Seja $r > 0$ fixado, Então o conjunto*

$$K(r) := \{u \in X : \|u\|_{W^{2,n}} \leq r\}$$

é fracamente fechado em X .

Demonstração. Suponha que a sequência $(u_m) \subset K(r)$ e $u \in X$ tal que $u_m \xrightarrow{w} u$. Mostraremos que $u \in K(r)$. Como $(u_m) \subset K(r)$, temos que $\|u_m\|_{W^{2,n}} \leq r$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto concluímos que a sequência (u_m) é limitada em $W^{2,n}(\Omega)$. Logo, existe uma subsequência $(u_{m_j}) \subset (u_m)$ e $\bar{u} \in W^{2,n}(\Omega)$ tal que $u_{m_j} \xrightarrow{w} \bar{u}$. Logo, $u(x) = \bar{u}(x)$ q.t.p em Ω . Segue da semicontinuidade fraca da norma em $W^{2,n}(\Omega)$ que

$$\|u\|_{W^{2,n}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_m\|_{W^{2,n}} \leq r.$$

■

Lema 3.4 ([15]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e assumimos que $1 < q < 2 < p$. Sejam d_1 e d_2 as melhores constantes para as imersões $W^{2,n}(\Omega) \hookrightarrow L^{n(p-1)}(\Omega)$ e $W^{2,n}(\Omega) \hookrightarrow L^{n(q-1)}(\Omega)$, respectivamente, então*

$$\|\varphi'(u)\|_{L^n} \leq C_1 r^{p-1} + \mu C_2 r^{q-1}, \quad \forall u \in K(r),$$

onde $C_1 = d_1^{p-1}$ e $C_2 = d_2^{q-1}$.

Demonstração. Por definição de $\varphi'(u)$ e pelo Teorema de Representação de Riesz, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi'(u)\|_{L^n} &= \left\| |u|^{p-2}u + \mu |u|^{q-2}u \right\|_{L^n} \\ &\leq \left\| |u|^{p-2}u \right\|_{L^n} + \mu \left\| |u|^{q-2}u \right\|_{L^n} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u|^{n(p-2)} |u| \right)^{\frac{1}{n}} + \mu \left(\int_{\Omega} |u|^{n(q-2)} |u| \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^{n(p-1)} \right)^{\frac{p-2}{n(p-1)}} \left(\int_{\Omega} |u|^{n(p-1)} \right)^{\frac{1}{n(p-1)}} + \mu \left(\int_{\Omega} |u|^{n(q-1)} \right)^{\frac{q-2}{n(q-1)}} \left(\int_{\Omega} |u|^{n(q-1)} \right)^{\frac{1}{n(q-1)}} \\ &= \|u\|_{L^{n(p-1)}}^{p-1} + \mu \|u\|_{L^{n(q-1)}}^{q-1} \end{aligned}$$

Como $W^{2,n}(\Omega)$ é imerso compactamente em $L^{n(p-1)}(\Omega)$ e $L^{n(q-1)}(\Omega)$, então

$$\|\varphi'(u)\|_{L^n} \leq C_1 \|u\|_{W^{2,n}}^{p-1} + \mu C_2 \|u\|_{W^{2,n}}^{q-1}$$

Segue de $u \in K(r)$, que $\|\varphi'(u)\|_{L^n} \leq C_1 r^{p-1} + \mu C_2 r^{q-1}$.

■

Lema 3.5 ([15]). *Seja $1 < q < 2 < p$. Assumimos que C_1 e C_2 sejam dados no lema 3.4, então existe $\mu^* > 0$ com as seguintes propriedades:*

- a) *Para cada $\mu \in (0, \mu^*)$, existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ com $r_1 < r_2$ tal que $r \in [r_1, r_2]$ se, e somente se, $C_1 r^{p-1} + \mu C_2 r^{q-1} \leq r$.*
- b) *Para $\mu = \mu^*$, existe um e somente um $r > 0$ tal que $C_1 r^{p-1} + \mu C_2 r^{q-1} = r$.*
- c) *Para $\mu > \mu^*$, não existe $r > 0$ tal que $C_1 r^{p-1} + \mu C_2 r^{q-1} = r$.*

Observação 3.6. *Como o Espaço de Sobolev $W^{2,n}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^p(\Omega)$, obtemos que $X \cap W^{2,n}(\Omega) = H_0^1(\Omega) \cap W^{2,n}(\Omega)$. Também segue do corolário B.31 que $u \mapsto \|\Delta u\|_{L^n}$ é uma norma equivalente sob $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,n}(\Omega)$. Daqui pra frente, consideraremos esta norma, isto é,*

$$\|u\|_{W^{2,n}} = \|\Delta u\|_{L^n},$$

para todo $u \in W^{2,n}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

A proposição que será apresentada a seguir é uma versão adaptada do princípio variacional apresentado no Teorema 2.18 para o contexto do problema (3.1).

Proposição 3.7 ([15]). *Seja X espaço de Banach e K um subconjunto convexo e fracamente fechado em X . Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- A) *O funcional $I_K = \Psi_K - \varphi$ tem um ponto crítico $u_0 \in X$;*
- B) *Existe $v_0 \in K$ tal que $-\Delta v_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + \mu|u_0|^{q-2}$ no sentido fraco. Isto é,*

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \varphi'(u_0) w \, dx \quad \forall w \in X.$$

Então $u_0 \in K$ e é uma solução fraca para a equação $-\Delta u_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + \mu|u_0|^{q-2}$.

Demonstração. Por A), temos que u_0 é ponto crítico do funcional I_K . Então, segue da definição de ponto crítico, que $u_0 \in \text{Dom}(\Psi_K)$ e

$$\Psi_K(v) - \Psi_K(u_0) \geq \langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle \quad \forall v \in X.$$

Como $\langle \varphi'(u_0), v - u_0 \rangle = \int_{\Omega} \varphi'(u_0)(v - u_0) dx$, então segue que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \geq \int_{\Omega} \varphi'(u_0)(v - u_0) dx, \quad (3.2)$$

para todo $v \in K$.

Por B) existe $v_0 \in K$ tal que $-\Delta v_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + \mu|u_0|^{q-2}$ no sentido fraco. Isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \varphi'(u_0) w \, dx \quad \forall w \in X.$$

Tomando $w = u_0 - v_0$, temos

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla (u_0 - v_0) \, dx = \int_{\Omega} \varphi'(u_0) (u_0 - v_0) \, dx \quad \forall v \in X. \quad (3.3)$$

Substituindo $v = v_0$ em (3.2) e juntando com (3.3), temos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx \geq \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla (v_0 - u_0) \, dx.$$

Por outro lado, segue da convexidade de Ψ (veja o exemplo 1.19) que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 \, dx \geq \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla (u_0 - v_0) \, dx.$$

Logo, temos

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla (v_0 - u_0) \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla (v_0 - u_0) \, dx.$$

Isto implica em

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx = \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla (v_0 - u_0) \, dx.$$

Logo, fazendo uso de produtos notáveis, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0 - \nabla u_0|^2 \, dx = 0.$$

Portanto, $v_0 = u_0$ q.t.p em Ω . Obtendo assim $-\Delta u_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + \mu|u_0|^{q-2}$. ■

Demonstração do Teorema 3.1: Sabemos, pelo lema 3.5, que existe $\mu^* > 0$ tal que, para $\mu \in (0, \mu^*)$, existem $r_1, r_2 > 0$. Definimos

$$K := \{u \in K(r_2) : u(x) > 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega\}.$$

Finalmente definimos o funcional

$$I_K := \Psi_K - \varphi, \quad (3.4)$$

onde Ψ_K é a função Ψ restrita ao subconjunto K de X denotada Ψ_K , definida por

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} \Psi(u), & u \in K \\ +\infty, & u \notin K. \end{cases}$$

Para aplicar a proposição 3.7, vamos separar a demonstração em duas etapas:

- a) Mostrar que existe $u_0 \in K$ tal que $I_K(u_0) = \inf_{u \in X} I_K(u)$. Com efeito, definimos $\beta := \inf_{u \in X} I_K(u)$. Pela definição de Ψ_K , temos $I_K(u) = \infty$ para todo $u \notin K$. Logo, $\beta = \inf_{u \in K} I_K(u)$. Por outro lado, $W^{2,n}(\Omega) \xrightarrow{cpct.} L^t(\Omega)$, para todo $t > 1$ (corolário B.27). Logo, para constantes positivas C_1 e C_2 , temos

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{1}{p} \|u\|_{L^p}^p + \frac{\mu}{q} \|u\|_{L^q}^q \\ &\leq C_1 \|u\|_{W^{2,n}}^p + \mu C_2 \|u\|_{W^{2,n}}^q \\ &\leq C_1 r^p + \mu C_2 r^q \quad \forall u \in K. \end{aligned}$$

Como $\Psi(u) \geq 0$ para todo $u \in X$, temos $I_K(u) \geq -(C_1 r^p + C_2 r^q)$ para todo $u \in K$. Portanto, $\beta > -\infty$.

Seja a sequência $(u_m) \subset X$ tal que $I_K(u_m) \rightarrow \beta$. Então a sequência $(I_K(u_m))$ é limitada e podemos concluir, pela definição de I_K , que a sequência (u_m) é limitada em $W^{2,n}(\Omega)$. Logo, existe uma subsequência $(u_{m_j}) \subset (u_m)$ e $u_0 \in K$ tal que $u_{m_j} \xrightarrow{w} u_0$ em $W^{2,n}(\Omega)$ e $u_{m_j} \rightarrow u_0$ em X . Logo, $I_K(u_{m_j}) \rightarrow I_K(u_0) = \beta$. Portanto, u_0 é ponto crítico de I_K por ser um ponto mínimo.

- b) Mostrar que existe $v_0 \in K$ tal que $-\Delta v_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + \mu|u_0|^{q-2}u_0$. Com efeito, por método padrão, existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta v_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + \mu|u_0|^{q-2}u_0, \quad (3.5)$$

no sentido fraco. Observe que o lado direito da igualdade é um elemento em $L^n(\Omega)$. Portanto, de acordo com a definição de espaço de Sobolev, conclui-se que $v_0 \in W^{2,n}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Assim, temos que a igualdade (3.5) vale para q.t.p $x \in \Omega$.

Portanto, usando a Observação 3.6, temos

$$\|v_0\|_{W^{2,n}} = \|\Delta v_0\|_{L^n} = \|\varphi'(u_0)\|_{L^n}.$$

Pelo lema 3.4 e 3.5, temos

$$\|v_0\|_{W^{2,n}} \leq C_1 r^{p-1} + \mu C_2 r^{q-1} \leq r.$$

Portanto, $v_0 \in K(r_2)$.

Para finalizar esta etapa, basta verificar se $v_0 \geq 0$ q.t.p. Mas, isto é uma consequência do Princípio do Máximo e do fato que $-\Delta v_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + \mu|u_0|^{q-2}u_0 \geq 0$. Logo, $v_0 \in K$.

Portanto, com as condições da proposição 3.7 sendo satisfeitas, concluímos que u_0 é uma solução para o problema (3.1).

Para completa a demonstração, mostraremos que $I_K(u_0) < 0$. Tome $0 \neq e \in K$ e $t \in [0, 1]$, então $te \in K$. Logo,

$$\begin{aligned} I_K(te) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla te|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |te|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} |te|^q dx \\ &= t^q \left(\frac{t^{2-q}}{2} \int_{\Omega} |\nabla e|^2 dx - \frac{t^{p-q}}{p} \int_{\Omega} |e|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} |e|^q dx \right). \end{aligned}$$

Para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos $I_K(te) < 0$. Logo, $I_K(u_0) = \inf_{u \in X} I_K(u) < 0$. Portanto, u_0 é uma solução não-trivial e não-negativa. Usando a Princípio do Máximo Forte, temos que $u_0 > 0$ em Ω . ■

3.2 Equação Elíptica Semilinear Não-Homogênea

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u + f(x) & ; \quad x \in \Omega \\ u = 0 & ; \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado de classe C^1 , $2 < p$ e $f \in L^2(\Omega)$.

Nosso objetivo é usar a proposição 3.7 e provar a existência de pelo menos uma solução para o problema (3.6) para um p maior que o expoente crítico de Sobolev 2^* . O Problema (3.6) já foi estudado em [2] para p menor do que 2^* .

Teorema 3.8 (Resultado Principal [20]). *Seja $2 < p < p'$, onde $p' = (2n - 4)/(n - 4)$ para $n > 4$ e $p' = \infty$ para $n \leq 4$. Então existe $\lambda > 0$ tal que para $\|f\|_{L^2} < \lambda$ com $f \neq 0$, o problema (3.6) tem uma solução $u \in H^2(\Omega)$ não trivial.*

Demonstração. Seja o espaço de Banach $X := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional Energia referente ao problema (3.6), ou seja,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Introduzindo as funções Ψ e φ , onde

$$\Psi(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \varphi(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} f u dx,$$

temos que

$$I = \Psi - \varphi.$$

Definimos então o funcional $I_K := \Psi_K - \varphi$, onde Ψ_K é a função Ψ restrita ao subconjunto $K := K(r) = \{u \in X : \|u\|_{H^2} \leq r\}$.

Da mesma forma feita na problema anterior, para aplicar a proposição 3.7, vamos separar a demonstração em duas etapas:

- a) Mostrar que existe $u_0 \in K$ tal que $I_K(u_0) = \inf_{u \in X} I_K(u)$. Com efeito, definimos $\beta := \inf_{u \in X} I_K(u)$. Pela definição de Ψ_K , temos $I_K(u) = \infty$ para todo $u \notin K$. Logo, $\beta = \inf_{u \in K} I_K(u)$. Por outro lado, como $p < p' = (2n - 4)/(n - 4)$ para $n > 4$ e $p' = \infty$ para $n \leq 4$, então $2(p - 1) < 2n/(n - 4)$ para $n > 4$ e $p' = \infty$ para $n \leq 4$. Isto implica que $H^2(\Omega) \xrightarrow{cpct.} L^{2(p-1)}(\Omega)$ (veja a proposição B.26). Logo, para constantes positivas C_1 e C_2 , temos

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p + \int_{\Omega} f u dx \\ &\leq \frac{1}{p} \|u\|_{L^p}^p + \int_{\Omega} |f u| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{p} \|u\|_{L^p}^p + \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\ &\leq C_1 \|u\|_{H^2}^p + \lambda C_2 \|u\|_{H^2} \\ &\leq C_1 r^p + \lambda C_2 r. \end{aligned}$$

Como $\Psi(u) \geq 0$ para todo $u \in X$, temos $I_K(u) \geq -(C_1 r^p + C_2 r)$ para todo $u \in K$. Portanto, $\beta > -\infty$.

Seja a sequência $(u_m) \subset X$ tal que $I_K(u_m) \longrightarrow \beta$. Então a sequência $(I_K(u_m))$ é

limitada e podemos concluir, pela definição de I_K , que a sequência (u_m) é limitada em $H^2(\Omega)$. Logo, existe uma subsequência $(u_{m_j}) \subset (u_m)$ e $u_0 \in K$ tal que $u_{m_j} \xrightarrow{w} u_0$ em $H^2(\Omega)$ e $u_{m_j} \rightarrow u_0$ em X . Logo, $I_K(u_{m_j}) \rightarrow I_K(u_0) = \beta$. Portanto, u_0 é ponto crítico de I_K por ser um ponto mínimo.

- b) Basta mostrar que existe $v_0 \in K$ tal que $-\Delta v_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + f(x)$. Com efeito, por método padrão, existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta v_0 = |u_0|^{p-2}u_0 + f(x), \quad (3.7)$$

Observe que o lado direito da igualdade é um elemento em $L^2(\Omega)$. Portanto, de acordo com a definição de espaço de Sobolev, conclui-se que $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Assim, temos que a igualdade (3.7) vale q.t.p $x \in \Omega$. Portanto, usando a Observação 3.6, temos

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{H^2} = \|\Delta v_0\|_{L^2} = \|\varphi'(u_0)\|_{L^2} &= \||u_0|^{p-2}u_0 + f\|_{L^2} \\ &\leq \||u_0|^{p-2}u_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|u_0\|_{L^{2(p-1)}}^{p-1} + \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Como $H^2(\Omega)$ imerso compactamente em $L^{2(p-1)}(\Omega)$, onde $p < p' = (2n-4)/(n-4)$ para $n > 4$ e $p' = \infty$ para $n \leq 4$ e para $\|f\|_{L^2}$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{H^2} &\leq C_1 \|u_0\|_{H^2}^{p-1} + \lambda \\ &\leq C_1 r^{p-1} + \lambda. \end{aligned}$$

Pelo item (b) do lema 3.5, segue para $\mu = \lambda$ que existe um, e somente um, $r > 0$ tal que $C_1 r^{p-1} + \lambda = r$. Portanto, $v_0 \in K$. Usando a proposição 3.7, temos que u_0 é para o problema (3.6). ■

3.3 Pontos Críticos de Funções Localmente Lipschitziana em Subconjuntos Convexos

Sejam X espaço de Banach, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitziana, e K um subconjunto convexo e fechado de X . Esta seção investiga as condições sob as quais

os pontos críticos de φ em K também são pontos críticos de φ em X . Para tal, utiliza-se o método apresentado no capítulo anterior.

Sabemos que um ponto $u_0 \in X$ é ponto crítico de φ se $0 \in \partial_c \varphi(u_0)$ (corolário 1.32). Logo, observa-se que este problema se configura como um caso particular do princípio variacional, apresentado no capítulo anterior, quando a função convexa Ψ é identicamente nula. Usando a função indicadora δ_K com respeito a K , isto é

$$\delta_K = \begin{cases} 0, & \text{se } u \in K \\ +\infty, & \text{se } u \notin K \end{cases}$$

podemos reformular que u_0 é ponto crítico de φ em K se u_0 é ponto crítico do funcional $I_K := \delta_K + \varphi$. Assim, $u_0 \in \text{Dom}(\delta_K)$ e

$$\delta_K(v) - \delta_K(u_0) \geq (-\varphi)^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in X.$$

Observação 3.9. *Observe que, na desigualdade acima, quando $v \in K$, temos $0 \in \partial_c \varphi(u_0)$.*

O resultado a seguir demonstra que, para um espaço de Hilbert, é possível transformar pontos críticos de φ em K em pontos críticos de φ em X usando a Condição de Invariância de Schauder.

Proposição 3.10 (Condição de Invariância de Schauder [17][19]). *Seja H espaço de Hilbert e $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$. Seja K um subconjunto convexo e fechado em H , dizemos que o par (φ, K) satisfaz a condição de invariância de Schauder se*

$$(I_d - \varphi')(K) \subset K,$$

onde I_d é a aplicação identidade em H . Assim, se o par (φ, K) satisfaz a condição de invariância de Schauder, então os pontos críticos de φ em K são pontos críticos de φ em X .

O resultado acima pode ser entendido para espaço de Banach reflexivo.

Proposição 3.11 ([16]). *Seja X espaço de Banach reflexivo, K um subconjunto convexo e fechado e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana. Assumimos que*

$$(I_d - J^* \partial_c \varphi)(\partial K) \subset K,$$

onde J^* é a aplicação dualidade vista na definição 1.38. Então todo ponto crítico de φ em K são pontos críticos de φ em X .

Demonstração. Consulte o Teorema 4.5 em [16].

■

Definição 3.12 (Condição de Invariância Pontual Tipo I e II [19]). *Sejam X espaço de Banach, K subconjunto convexo e fechado em X e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana. Dado $u_0 \in K$, dizemos que*

- i) o par (φ, K) satisfaz a condição de invariância pontual tipo (I) em u_0 se existem $v_0 \in K$ e uma função $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, G -diferenciável em u_0 tal que*

$$\partial\Phi(v_0) \cap \left(\Phi'(u_0) - \partial_c\varphi(u_0) \right) \neq \emptyset.$$

- ii) o par (φ, K) satisfaz a condição de invariância pontual tipo (II) em u_0 se existem $v_0 \in K$ e uma função $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexa com $\partial\Phi(0) = \{0\}$ tal que*

$$\Phi'(u_0 - v_0) \cap \partial_c\varphi(u_0) \neq \emptyset.$$

Como resultado principal, vamos mostrar que as proposições 3.10 e 3.11 acima podem ser estendidas para espaço de Banach utilizando as condições de invariância pontual (I) ou (II).

Teorema 3.13 (Resultado Principal [19]). *Seja X um espaço de Banach, K seja um subconjunto convexo e fechado, e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitziana. O par (φ, K) satisfaz a condição de invariância pontual tipo (I) ou (II) se, e somente se, os pontos críticos de φ em K se tornam os pontos críticos de φ em X .*

Demonstração. Suponhamos que u_0 é ponto crítico de φ em K . Mostraremos que u_0 é ponto crítico de φ em X . Para isso, consideramos dois casos excludentes:

- Se $u_0 \notin \partial K$, então para todo $v \in X$, existe $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $tv + (1+t)u_0 \in K$. Note que a definição de ponto crítico do funcional $I_K = \delta_K + \varphi$ é dada por

$$\delta_K(v) - \delta_K(u_0) \geq (-\varphi)^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in X. \quad (3.8)$$

Assim, aplicando o ponto $tv + (1-t)u_0 \in K$ em (3.8), temos

$$\delta_K(tv + (1-t)u_0) - \delta_K(u_0) \geq (-\varphi)^0(u_0; tv + (1-t)u_0 - u_0) \quad \forall v \in X.$$

Como $\delta_K(u) = 0$ para todo $u \in K$, temos

$$0 \geq (-\varphi)^0(u_0; tv + (1-t)u_0 - u_0) \quad \forall v \in X,$$

o que implica em

$$0 \geq (-\varphi)^0(u_0; t(v - u_0)) \quad \forall v \in X.$$

Usando o fato que $\varphi^0(u_0; \cdot)$ é homogênea positiva e logo em seguida dividindo por t , temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq (-\varphi)^0(u_0; v - u_0) \\ &\geq -\varphi(u_0; v - u_0), \end{aligned}$$

implicando que

$$\varphi^0(u_0; v - u_0) \geq 0 \quad \forall v \in X.$$

Portanto, $0 \in \partial_c \varphi(u_0)$.

- Se $u_0 \in \partial K$, consideramos a condição de invariância pontual tipo (I) em u_0 . Então existem $v_0 \in K$ e uma função $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e G-diferenciável em u_0 tal que

$$\partial \Phi(v_0) \cap \left(\Phi'(u_0) - \partial_c \varphi(u_0) \right) \neq \emptyset.$$

Tomando $u_0^* \in \partial \Phi(v_0) \cap \left(\Phi'(u_0) - \partial_c \varphi(u_0) \right)$, segue de $u_0^* \in \left(\Phi'(u_0) - \partial_c \varphi(u_0) \right)$ que existe $w^* \in \partial_c \varphi(u_0)$ tal que

$$u_0^* = \Phi'(u_0) - w^*. \quad (3.9)$$

Usando o fato de que u_0 é ponto crítico de φ em K , segue que u_0 é ponto crítico do funcional $I_K = \delta_K + \varphi$. Assim, segue da definição de ponto crítico de I_K , que

$$\delta_K(v) - \delta_K(u_0) \geq (-\varphi)^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in X.$$

Em particular, temos

$$0 \geq (-\varphi)^0(u_0; v_0 - u_0).$$

Note que podemos fazer uso do fato que $(-\varphi)^0(u; v) = \varphi^0(u; -v)$ (item (a) do Teorema 1.30). Assim, temos

$$0 \geq \varphi^0(u_0; u_0 - v_0). \quad (3.10)$$

Como $w^* \in \partial_c \varphi(u_0)$ e usando a desigualdade acima (3.10), temos que

$$\langle w^*, u_0 - v_0 \rangle \leq \varphi^0(u_0; u_0 - v_0) \leq 0.$$

implicando em

$$\langle w^*, u_0 - v_0 \rangle \leq 0. \quad (3.11)$$

Assim, juntando a desigualdade (3.11) e a igualdade (3.9), temos

$$\begin{aligned} \langle w^*, u_0 - v_0 \rangle &= \langle \Phi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle - \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle \leq 0 \\ \implies \langle \Phi'(u_0), u_0 - v_0 \rangle &\leq \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle. \end{aligned}$$

Logo, segue de $\partial\Phi(u_0) = \{\Phi'(u_0)\}$ que

$$\begin{aligned} \langle u_0^*, v_0 - u_0 \rangle &\leq \langle \Phi'(u_0), v_0 - u_0 \rangle \\ &\leq \Phi(v_0) - \Phi(u_0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por outro lado, como $u_0^* \in \partial\Phi(v_0)$ e usando a desigualdade (3.12), temos

$$\begin{aligned} \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle &\leq \Phi(u_0) - \Phi(v_0) \leq \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle. \\ \implies \Phi(u_0) - \Phi(v_0) &= \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle. \end{aligned}$$

Usando a igualdade acima e o fato que $u_0^* \in \partial\Phi(v_0)$, então segue pelo lema 2.19 que $u_0^* \in \partial\Phi(u_0) = \{\Phi'(u_0)\}$. Isso implica que $u_0^* = \Phi'(u_0)$. Logo, pela igualdade (3.9), temos que $w_0^* = 0$. Consequentemente, $0 \in \partial_c\varphi(u_0)$.

Consideramos agora a condição de invariância pontual tipo (II). Então existem $v_0 \in K$ e uma função convexa $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\partial\Phi(0) = \{0\}$ tal que

$$\partial\Phi(u_0 - v_0) \cap \partial_c\varphi(u_0) \neq \emptyset.$$

Tomando $u_0^* \in \partial\Phi(u_0 - v_0) \cap \partial_c\varphi(u_0)$, segue de $u_0^* \in \partial\Phi(u_0 - v_0)$ e $\partial\Phi(0) = \{0\}$ que

$$\langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle \geq \Phi(u_0 - v_0) - \Phi(0) \geq \langle 0, u_0 - v_0 \rangle = 0. \quad (3.13)$$

Por outro lado, como u_0 é ponto crítico de φ em K , segue que u_0 é ponto crítico do funcional $I_K = \delta_K + \varphi$. Isto é,

$$\delta_K(v) - \delta_K(u_0) \geq (-\varphi)^0(u_0; v - u_0) \quad \forall v \in X.$$

Logo, tomando $v = v_0$ na desigualdade acima, temos

$$0 \geq (-\varphi)^0(u_0; v_0 - u_0).$$

Note que, como $u_0^* \in \partial_c \varphi(u_0)$ e usando o fato que $(-\varphi)^0(u; v) = \varphi^0(u; -v)$, temos

$$\langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle \leq \varphi^0(u_0; u_0 - v_0) \leq 0. \quad (3.14)$$

Logo, segue de (3.13) e (3.14) que

$$\langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle \leq \varphi^0(u_0; u_0 - v_0) \leq 0 \leq \Phi(u_0 - v_0) - \Phi(0) \leq \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle$$

Portanto,

$$\Phi(u_0 - v_0) - \Phi(0) = \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle.$$

Usando a igualdade acima e o fato que $u_0^* \in \partial \Phi(u_0 - v_0)$, então segue pelo lema 2.19 que $u_0^* \in \partial \Phi(0) = \{0\}$. Isso implica que $u_0^* = 0$. Portanto, $0 \in \partial_c \varphi(u_0)$.

Reciprocamente, se u_0 é ponto crítico de K , então tome $v_0 = u_0$ e $\Phi \equiv 0$. ■

Corolário 3.14 ([19]). *Sejam H um espaço de Hilbert, $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$ e K subconjunto convexo e fechado de X . A condição de invariância de Schauder implica na condição de invariância pontual tipos (I) e (II) em K .*

Demonstração. Seja $u_0 \in K$ arbitrário. Como (φ, K) satisfaz a condição de invariância de Schauder, então

$$(I_d - \varphi')(K) \subset K.$$

Mostraremos primeiro que isso implica na condição de invariância pontual tipo (I). Com efeito, note que $u_0 - \varphi'(u_0) = (I_d - \varphi')(u_0) \in K$, então tomamos $v_0 := u_0 - \varphi'(u_0)$ e definimos a função $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Phi(u) = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle$. Note que Φ é convexa e Gâteaux-diferenciável. De fato, dado $u \in X$ temos

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + tv) - \Phi(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \langle u + tv, u + tv \rangle - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2} \langle v, v \rangle + t \langle u, v \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} \langle v, v \rangle + \langle u, v \rangle \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in X. \quad (3.15)$$

Logo, usando a linearidade de Φ' e o fato que $v_0 = u_0 - \varphi'(u_0)$, concluímos por (3.15) que

$$\Phi'(u_0) - \Phi'(v_0) = \Phi'(u_0 - v_0) = \Phi'(\varphi'(u_0)) = \varphi'(u_0),$$

obtendo assim a versão da condição de invariância pontual do tipo (I) quando a função Φ é Gâteaux-diferenciável.

Note também, por (3.15), que mesma função Φ tem $\Phi'(0) = 0$ e $\Phi'(u_0 - v_0) = \Phi'(\varphi'(u_0)) = \varphi'(u_0)$, mostrando assim que a condição de invariância de Schauder implica na versão da condição de invariância pontual do tipo (II) quando a função Φ é Gâteaux-diferenciável. ■

Corolário 3.15 ([19]). *Seja X espaço de Banach reflexivo, K subconjunto convexo e fechado em X e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana. Se*

$$(I_d - J^* \partial_c \varphi)(\partial K) \subset K.$$

Então o par (φ, K) satisfaz a condição de invariância pontual tipo (II) em K .

Demonstração. Sejam $u_0 \in \partial K$ e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e semicontínua inferior definida por $\Phi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2$. Note que, pelo item (a) da proposição 1.40, temos que $J(u) = \partial(\frac{1}{2} \|u\|^2) = \partial\Phi(u)$, onde J é a aplicação dualidade normatizada (ver definição 1.37).

Assim, para cada $u^* \in \partial_c \varphi(u_0)$ e cada $w_0 \in J^*(u^*)$, definimos $v_0 := u_0 - w_0 \in K$. Logo, $u_0 - v_0 \in J^*(u^*)$. Por outro lado, como X é reflexivo, temos que $J^* = \partial\Phi^*$ onde Φ^* é a função conjugada de Φ (ver definição 1.10). Portanto, de $u_0 - v_0 = w_0 \in J^*(u^*) = \partial\Phi^*(u^*)$ implica que $u^* \in \partial\Phi(u_0 - v_0)$ pelo corolário 1.23. Portanto, $u_0^* \in \partial\Phi(u_0 - v_0) \cap \partial_c \varphi(u_0)$ o que implica em $\partial\Phi(u_0 - v_0) \cap \partial_c \varphi(u_0) \neq \emptyset$. Logo, obtemos a condição de invariância pontual do tipo (II). ■

3.4 Ponto Fixo de uma Aplicação Multivalor

Seja X um espaço topológico vetorial. Um aplicação multivalor $S : X \rightarrow 2^X$ é dita ter um ponto fixo se existe $u \in X$ tal que $u \in S(u)$. Esta seção, investiga uma conexão entre a teoria do ponto fixo para aplicações multivalor com o princípio variacional estudado. Ao combinar ambas teorias, obtemos um novo teorema que garante a existência de um ponto fixo para essa classe de aplicações. Como consequência, obtemos também um novo teorema.

Definição 3.16 ([6][19]). *Sejam X um espaço vetorial topológico, K um subconjunto não-vazio de X e $h : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $T : K \rightarrow 2^{X^*}$ é dito h -pseudo-monotóna (resp., h -demi-monótona), se para cada $u \in K$ e toda rede $(u_\alpha) \subset K$ tal que*

$u_\alpha \longrightarrow u$ (resp., $u_\alpha \xrightarrow{w} u$) com

$$\limsup_{\alpha} \left[\inf_{u^* \in T(u_\alpha)} \langle u^*, u_\alpha - u \rangle + h(u_\alpha) - h(u) \right] \leq 0,$$

temos que

$$\limsup_{\alpha} \left[\inf_{u^* \in T(u_\alpha)} \langle u^*, u_\alpha - v \rangle + h(u_\alpha) - h(v) \right] \geq \inf_{u^* \in T(u_\alpha)} \langle u^*, u - v \rangle + h(u) - h(v),$$

para todo $v \in K$.

Proposição 3.17 ([6]). *Sejam X um espaço vetorial topológico de Hausdorff, K subconjunto não-vazio em X . Se $T : K \longrightarrow 2^{X^*}$ monótona e contínua de uma topologia-fraca em K para a topologia fraca-estrela em X^* , então T é pseudo-monótona e demi-monótona.*

Demonstração. Seja uma rede $(u_\alpha)_{\alpha \in L} \subset K$ e $u \in K$ tal que $u_\alpha \longrightarrow u$ (resp., $u_\alpha \xrightarrow{w} u$). Por hipótese, T é monótona, então temos

$$\langle T(u_\alpha) - T(u), u_\alpha - u \rangle,$$

o que implica em

$$\langle T(u_\alpha), u_\alpha - u \rangle \geq \langle T(u), u_\alpha - u \rangle \quad \forall \alpha \in L.$$

Por outro lado, como T é contínuo, segue que, para algum $v \in K$ e $\varepsilon > 0$, existem $\beta_1, \beta_2 \in L$ com $|\langle Tu, u_\alpha - u \rangle| < \varepsilon/2$ para todo $\alpha \geq \beta_1$ e $|\langle Tu_\alpha - Tu, u - v \rangle| < \varepsilon/2$ para todo $\alpha \geq \beta_2$. Escolha $\beta_0 \in L$ com $\beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Tu_\alpha, u_\alpha - v \rangle &= \langle Tu_\alpha, u_\alpha - u \rangle + \langle Tu_\alpha, u - v \rangle \\ &\geq \langle Tu, u_\alpha - u \rangle + \langle Tu_\alpha, u - v \rangle \\ &= \langle Tu, u_\alpha - u \rangle + \langle Tu_\alpha, u - v \rangle - \langle Tu, u - v \rangle + \langle Tu, u - v \rangle \\ &= \langle Tu, u_\alpha - u \rangle + \langle Tu_\alpha - Tu, u - v \rangle + \langle Tu, u - v \rangle \\ &> -\varepsilon/2 - \varepsilon/2 + \langle Tu, u - v \rangle \quad \forall \alpha \geq \beta_0. \end{aligned}$$

Segue que $\limsup_{\alpha \in L} \langle Tu_\alpha, u_\alpha - v \rangle \geq -\varepsilon + \langle Tu, u - v \rangle$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, então

$$\limsup_{\alpha \in L} \langle Tu_\alpha, u_\alpha - u \rangle \geq \langle Tu, u - v \rangle.$$

Portanto, T é pseudo-monótona (resp., demi-monótona).

■

Teorema 3.18 ([6][20]). *Sejam X um espaço vetorial topológico de Hausdorff, K subconjunto convexo (não-vazio) e a função $h : K \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Seja $T : K \rightarrow 2^{X^*}$ h -pseudo-monótona (resp., h -demi-monótona) e semicontínua superior de $\text{co}(A)$ para a topologia fraca-estrela em X^* para cada subconjunto A finito de K . Ademais, assumimos que $T(u)$ é $\sigma(X^*, X)$ -compacto e convexo para cada $u \in K$. Suponhamos que existe um subconjunto compacto não-vazio (resp., $\sigma(X, X^*)$ -fechado e $\sigma(X, X^*)$ -compacto) Y de K e $v_0 \in Y$ tal que, para cada $u \in K \setminus Y$, tem-se*

$$\inf_{u^* \in T(u)} \langle u^*, u - v_0 \rangle + h(u) - h(v_0) > 0. \quad (3.16)$$

Então existe $u_0 \in Y$ e $u_0^* \in T(u_0)$ tal que

$$\langle u_0^*, u_0 - v \rangle \leq h(v) - h(u_0),$$

para todo $v \in K$.

Demonstração. Consulte o Teorema 7 em [6].

■

Teorema 3.19 (Resultado Principal [20]). *Sejam X espaço de Banach, K subconjunto (não-vazio) convexo e fechado em X . Definimos $T := J \circ (I_d - S) : K \rightarrow 2^{X^*} \setminus \{\emptyset\}$, onde $J : X \rightarrow 2^{X^*}$ aplicação dualidade normatizada e $S : K \rightarrow 2^K \setminus \{\emptyset\}$ uma aplicação multivalor. Então S tem um ponto fixo se, e somente se, o seguinte problema tem uma solução: Encontre $u_0 \in K$ e $u_0^* \in T(u_0)$ tal que*

$$\langle u_0^*, v - u_0 \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (3.17)$$

Demonstração. Suponha que S possui um ponto fixo $u_0 \in K$, ou seja, $u_0 \in S(u_0)$. Logo,

$$T(u_0) = J \circ (I_d - S)(u_0) = J(u_0 - S(u_0)) \ni J(u_0 - u_0) = J(0) = 0.$$

Tomando $u_0^* = 0$, temos $\langle u_0^*, v - u_0 \rangle = 0 \quad \forall v \in K$, obtendo assim uma solução para o problema (3.17).

Reciprocamente, assumimos que o problema (3.17) tem solução, isto é, existe $u_0 \in K$ e $u_0^* \in T(u_0)$ tal que $\langle u_0^*, v - u_0 \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$. Vamos mostrar que S tem um ponto fixo. Para tal, vamos usar o princípio variacional estudado. Note que, no corolário 2.28, a condição A é satisfeita com $\Psi \equiv 0$ e $\mathcal{F} = -T$.

Agora, vejamos se a condição B é satisfeita, isto é, se a tripla (Ψ, K, φ) satisfaz a condição de invariância pontual do tipo II. Primeiramente, note que, como $u_0^* \in T(u_0)$, existe $v_0 \in S(u_0)$ tal que $u_0^* \in J(u_0 - v_0)$.

Para S ter um ponto fixo, basta mostrar que $v_0 = u_0$. Suponhamos, por absurdo, $v_0 \neq u_0$. Então, segue da definição de J (ver definição 1.37) que

$$\langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle = \|u_0 - v_0\|^2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \|u_0^*\| = \|u_0 - v_0\| \neq 0, \quad (3.18)$$

desde que $u_0^* \in J(u_0 - v_0)$.

Definimos a função $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\Phi(u) = \frac{|\langle u_0^*, u \rangle|^2}{2\|u_0 - v_0\|^2}$. Note que

- Φ é convexa, pois, dado $tv + (1-t)u \in K$ com $u, v \in K$ e $t \in (0, 1)$, segue do fato $(tu + (1-t)v)^2 \leq tu^2 + (1-t)v^2$ que:

$$\begin{aligned} t\Phi(u) + (1-t)\Phi(v) - \Phi(tu + (1-t)v) &= \frac{t|\langle u_0^*, u \rangle|^2 + (1-t)|\langle u_0^*, v \rangle|^2 - |\langle u_0^*, tu + (1-t)v \rangle|^2}{2\|u_0 - v_0\|^2} \\ &= \frac{t|\langle u_0^*, u \rangle|^2 + (1-t)|\langle u_0^*, v \rangle|^2 - |t\langle u_0^*, u \rangle + (1-t)\langle u_0^*, v \rangle|^2}{2\|u_0 - v_0\|^2} \\ &\geq \frac{t|\langle u_0^*, u \rangle|^2 + (1-t)|\langle u_0^*, v \rangle|^2 - \left(t|\langle u_0^*, u \rangle| + (1-t)|\langle u_0^*, v \rangle|\right)^2}{2\|u_0 - v_0\|^2} \\ &\geq \frac{t|\langle u_0^*, u \rangle|^2 + (1-t)|\langle u_0^*, v \rangle|^2 - t|\langle u_0^*, u \rangle|^2 - (1-t)|\langle u_0^*, v \rangle|^2}{2\|u_0 - v_0\|^2} = 0. \end{aligned}$$

- $\partial\Phi(0) = \{0\}$ e $\partial\Phi(u_0 - v_0) = \{u_0^*\}$, pois como $\Phi(u_0 - v_0) = \frac{\|u_0 - v_0\|^2}{2}$, temos que $u_0^* \in J(u_0 - v_0) = \partial\Phi(u_0 - v_0)$. Por outro lado, dado $w^* \in \partial\Phi(u_0 - v_0) = J(u_0 - v_0)$ temos $\langle w^*, u_0 - v_0 \rangle = \|u_0 - v_0\|^2 = \langle u_0^*, u_0 - v_0 \rangle$. Obtendo assim $w^* = u_0^*$, desde que $u_0 - v_0 \neq 0$.

Assim, temos $u_0^* \in \mathcal{F}(u_0) \cap \left(\partial\Psi(v_0) + \partial\Phi(u_0 - v_0)\right)$, satisfazendo, portanto, a condição de invariância pontual do tipo (II). Logo, pelo corolário 2.28, temos $u_0^* \in \partial\Psi(u_0) \cap \mathcal{F}(u_0)$, obtendo assim $u_0^* = 0$, o que contradiz (3.18). Portanto, $v_0 = u_0$ provando que u_0 é um ponto fixo de S . ■

Corolário 3.20 ([6][20]). *Seja X espaço de Banach e $J : X \rightarrow 2^{X^*}$ aplicação dualidade normatizada. Seja K subconjunto (não-vazio) fechado convexo em X e $S : K \rightarrow 2^K \setminus \{\emptyset\}$ uma aplicação tal que $T := J \circ (I_d - S) : K \rightarrow 2^{X^*} \setminus \{\emptyset\}$ é semicontínua superior de K para a topologia-fraca estrela em X^* . Assumimos que T é demi-monótona e $T(u)$*

é $\sigma(X^*, X)$ -compacto e convexo para cada $u \in K$. Suponhamos T satisfaz (3.16) com $h = 0$, i.e., que existe um subconjunto compacto não-vazio (resp. $\sigma(X, X^*)$ -fechado e $\sigma(X, X^*)$ -compacto) Y de K e existe $v_0 \in Y$ tal que, para cada $u \in K \setminus Y$, tem-se

$$\inf_{u^* \in T(u)} \langle u^*, u - v_0 \rangle > 0.$$

Então S possui um ponto fixo.

Demonstração. Note que as hipóteses do corolário em questão são um caso particular do Teorema 3.18 quando $T = J \circ (I_d - S)$ e $h \equiv 0$. Ou seja,

$$\inf_{u^* \in T(u)} \langle u^*, u - v_0 \rangle > 0.$$

Logo, existe $u_0 \in Y \subset K$ e $u_0^* \in T(u_0)$ tal que

$$\langle u_0^*, v - u_0 \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Assim, segue do Teorema 3.19 que S possui um ponto fixo. ■

Corolário 3.21 ([20]). *Seja H espaço de Hilbert. Seja K um subconjunto (não-vazio) convexo, limitado e fechado de H . Seja $S : K \longrightarrow 2^K \setminus \{\emptyset\}$ uma aplicação não-expansiva, i.e.,*

$$\|u^* - v^*\| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in H, u \neq v, \forall u^* \in S(u), \forall v^* \in S(v).$$

Assumimos que $S(u)$ seja $\sigma(X, X^)$ -compacto e convexo para cada $u \in K$. Então S tem um ponto fixo.*

Demonstração. Note que a aplicação $T := I_d - S : K \longrightarrow 2^H$ é monótona. De fato, para $u^* \in S(u)$ e $v^* \in S(v)$, temos que

$$\langle u - u^* - v + v^*, u - v \rangle = \langle u - v, u - v \rangle - \langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq \|u - v\|^2 - \|u - v\| \|u^* - v^*\| \geq 0,$$

pois $\|u^* - v^*\| \leq \|u - v\|$. Sabemos que aplicações monótonas são de fato demi-monótona pela proposição 3.17. A semicontinuidade superior de T segue do fato que S é não-expansiva. Portanto, segue do corolário 3.20 que S tem um ponto fixo. ■

Observação 3.22. *O corolário 3.21 é uma extensão do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para aplicações multi-valor no Espaço de Hilbert.*

Apêndice A

Este capítulo é dedicado a uma revisão dos pré-requisitos para iniciar o estudo desta dissertação. Ele consiste em uma revisão dos conceitos e resultados de Análise Funcional, apresentando proposições e teoremas em forma de enunciados acompanhados de comentários, sem a necessidade de demonstrações detalhadas. No entanto, para uma compreensão mais aprofundada sobre os assuntos, sugiro ao leitor consultar as referências [3][4].

A.1 Espaço Normado, Espaço de Banach

Definição A.1 (Espaço Normado). *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). A função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita norma se satisfaz:*

- i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$;
- ii) *Se $\|x\| = 0 \implies x = 0$;*
- iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X \quad \lambda \in K$.
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (Desig. Triangular).

O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de Espaço Normado.

Observação A.2. *Se a observação (ii) for retirada, então $\|\cdot\|$ é chamada de seminorma.*

Definição A.3 (Operadores Lineares Contínuos). *Dizemos que $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são isomorfos (topologicamente) se existe um operador linear $T : X \rightarrow Y$ que é contínuo, invertível, e com a inversa T^{-1} contínua. Neste caso dizemos que T é isomorfismo (topológico).*

Proposição A.4. *Seja $T : X \rightarrow Y$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- i) T é contínua;

- ii) T é contínua em algum ponto de X . Em particular na origem;
- iii) $\sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ é limitada;
- iv) Existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Observação A.5. Quando T é linear, então vale

$$T \text{ é uniformemente contínua} \iff T \text{ é Lipschitziana} \iff T \text{ é contínua.}$$

Denotamos o conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y dado por

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{T : X \longrightarrow Y : T \text{ é linear e contínuo}\}$$

O conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial com as operações

$$(T + S)(x) := Tx + Ty;$$

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$$

O par $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado com a norma $\|T\|_\infty := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_Y$.

Definição A.6 (Espaço de Banach). *Seja X um espaço normado. X é dito Espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X é convergente.*

Proposição A.7.

- a) Todo espaço de dimensão finita é Banach.
- b) Se X é Banach e Y é um subespaço de X . Então, Y é fechado se, e somente se, Y for Banach.

A.2 Espaço de Hilbert

Definição A.8 (Produto Interno). *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ satisfazendo: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall x, y, z \in X$,*

- i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
- iii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$;

$$iv) \langle x, x \rangle \geq 0;$$

$$v) \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então a função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é uma norma.

Definição A.9 (Espaço de Hilbert). *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que X é um espaço de Hilbert se X for Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

Teorema A.10 (Teorema de Representação de Riesz). *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi \in H^*$, então existe $y_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \forall x \in H$. Além disto, $\|\varphi\| = \|y_0\|$.*

A.3 Teoremas de Hahn-Banach

Teorema A.11 (Teorema de Extensão de Hahn-Banach). *Seja X um espaço vetorial e a função $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:*

$$i) p(u + v) \leq p(u) + p(v) \quad \forall u, v \in X;$$

$$ii) p(\lambda u) = \lambda p(u) \quad \forall u \in X \text{ e } \forall \lambda > 0.$$

Seja $Y \subset X$ um subespaço vetorial e funcional linear $q : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) \leq p(x)$. Então, existe um funcional linear $\tilde{q} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(u) = \tilde{q}(u) \forall u \in Y$ e

$$q(u) \leq p(u) \quad \forall u \in X.$$

Corolário A.12. *Seja X um espaço normado e Y subespaço de X . Se $\varphi \in Y^*$, então existe $\bar{\varphi} \in X^*$ tal que*

$$i) \bar{\varphi}|_Y = \varphi;$$

$$ii) \|\bar{\varphi}\| = \|\varphi\|.$$

Corolário A.13. *Se $u \in X$ com $u \neq 0$. Então existe $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(u) = \|u\|$.*

Corolário A.14. *Se $X \neq \{0\}$, então $X^* \neq \{0\}$.*

Corolário A.15. *Se $X \neq 0$, então $\|u\| = \max\{|\varphi(u)| : \varphi \in X^* \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$.*

Proposição A.16. *Sejam X um espaço normado e M um subespaço próprio e fechado de X tal que $u_0 \in X \setminus M$. Então existe $\varphi \in X^*$ com $\|\varphi\| = 1$ tal que $\varphi|_M = 0$ e $\varphi(u_0) = \text{dist}(u_0, M) > 0$.*

Definição A.17 (Hiperplano afim). *Um hiperplano afim, denotado por $\mathcal{H}$, é um subconjunto de X definido da seguinte maneira:*

$$\mathcal{H} = \{u \in X : \varphi(u) = \alpha\},$$

onde φ é um funcional linear (não necessariamente contínuo) e $\alpha \in \mathbb{R}$. Podemos representar este hiperplano como $\mathcal{H} = [\varphi = \alpha]$. O hiperplano afim $\mathcal{H}$ é considerado fechado se, e somente se o funcional linear φ é contínuo.

Lema A.18. *Seja C (não-vazio) convexo e aberto de X . Suponha que $u_0 \notin C$, então existe um hiperplano fechado que separa C de u_0 .*

Teorema A.19 (1ª Forma Geométrica de Hahn-Banach). *Sejam A, B convexos não-vazios de X . Suponha que $A \cap B = \emptyset$. Se A é aberto, então existe um hiperplano $[\varphi = \alpha]$ fechado que separa A e B .*

Teorema A.20 (2ª Forma Geométrica de Hahn-Banach). *Sejam A, B convexos não-vazios de X . Suponha que $A \cap B \neq \emptyset$ com A fechado e B compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa estritamente A e B .*

A.4 Espaços Reflexivos

Todo espaço normado X pode ser mergulhado isometricamente em seu Bidual X^{**} através do mergulho canônico $J_X : X \rightarrow X^{**}$ tal que $J_X(u)(\varphi) = \varphi(u)$ para todo $u \in X$.

É fácil provar tais afirmações, pois note

- i) $J_X(u)$ está bem definida: Desde que $|J_X(u)(\varphi)| = |\varphi(u)| \leq \|\varphi\| \|u\|$, segue $J_X(u)$ é linear e contínuo;
- ii) J_X é linear e contínuo, pois $\|J_X(u)\| \leq \|u\|$ com $\|\varphi\| \leq 1$;
- iii) J_X é isometria, pois $\|J_X(u)\| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |J_X(u)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\varphi(u)| \stackrel{H.B}{=} \|u\|$.

Observação A.21.

- *Segue do Teorema do Núcleo e Imagem, que J_X é sobrejetiva se $\dim X < \infty$.*
- *Se X for normado não Banach, então J_X não pode ser sobrejetor, pois X^{**} é Banach (Logo, X não é isomorfo a X^{**}).*

A.5 Espaços Vetoriais Topológicos

Seja X um espaço vetorial real e τ uma topologia em X . Dizemos que o par (X, τ) é um espaço vetorial topológico se as operações algébricas

$$+ : X \times X \longrightarrow X \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$$

$$(u, v) \longmapsto u + v \quad (\lambda, u) \longmapsto \lambda u$$

são contínuas quando consideramos em $X \times X$ e em $\mathbb{K} \times X$ as respectivas topologias produto.

Tipos de espaços vetoriais topológicos mais comuns:

- i) X é localmente convexa se a origem possui uma base de vizinhanças convexas.
- ii) X é localmente limitada se a origem tem uma vizinhança limitada.
- iii) X é localmente compacta se a origem tem uma vizinhança com fecho compacto.
- iv) X é metrizável se τ contém alguma métrica d .
- v) X tem a propriedade de Heine-Borel se todo subconjunto fechado e limitado de X for compacto.

A.6 Topologia Fraca

A topologia fraca é uma ferramenta poderosa e essencial na análise funcional, permitindo estudar convergência, continuidade e compacidade. Devido ao amplo emprego ao longo deste trabalho, optei por realizar uma revisão de alguns pontos importantes e enunciar os principais teoremas.

Dado um espaço topológico X , almejamos estabelecer uma topologia em X que preserve a continuidade dos funcionais lineares que eram contínuos na topologia original. A topologia fraca oferece a vantagem de aumentar a compacidade à medida que se reduz o número de conjuntos abertos, simplificando assim o estudo de maximizações de funções.

Topologia Fraca $\sigma(X, X^*)$

Definição A.22. A topologia fraca no espaço normado X , denotada por $\sigma(X, X^*)$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares e contínuos $\varphi \in X^*$. Quando uma sequência (u_n) em X converge para u em X na topologia fraca, escrevemos $u_n \xrightarrow{w} u$.

Teorema A.23. *Seja X um espaço normado. Então*

a) *Se $\varphi \in X^*$, então $\varphi : (X, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.*

b) *Para cada $u_0 \in X$, os conjuntos da forma*

$$V_{\varphi_1, \dots, \varphi_n, u_0, \varepsilon} = \{u \in X : |\varphi_j(u) - \varphi_j(u_0)| < \varepsilon \ \forall j = 1, \dots, n\},$$

onde $\varphi_j \in X^$ para todo $j = 1, \dots, n$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de u_0 na topologia $\sigma(X, X^*)$.*

c) *Seja a sequência $(u_n) \subset X$. Então $u_n \xrightarrow{w} u_0$, se e somente se, $\varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u_0)$ para todo $\varphi \in X^*$.*

d) *$\sigma(X, X^*)$ é Hausdorff.*

e) *Se $u_n \longrightarrow u_0$, então $u_n \xrightarrow{w} u_0$.*

f) *Se $u_n \xrightarrow{w} u_0$, então $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitada e $\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$.*

g) *Se $u_n \xrightarrow{w} u_0$ em X e $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em X^* , então $\varphi_n(u_n) \longrightarrow \varphi(u_0)$ em $\mathbb{K}$.*

h) *A topologia fraca está contida na topologia da norma.*

i) *As topologias da norma e fraca coincidem se, e somente se, $\dim X < \infty$.*

j) *$X^* = (X, \sigma(X, X^*))^*$.*

Teorema A.24 (Teorema de Mazur). *Seja X um espaço normado e K um subconjunto convexo de X . Então o fecho de K na topologia da norma coincide com o fecho de K na topologia fraca. Isto, $\bar{K}^{\|\cdot\|} = \bar{K}^{\sigma(X, X^*)}$. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia da norma se, e somente se, é fechado na topologia fraca.*

Topologia Fraca-Estrela $\sigma(X^*, X)$

Definição A.25. *A topologia fraca-estrela no dual X^* do espaço normado X , denotada por $\sigma(X^*, X)$, é a topologia em X^* gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_X(X) := \{J_X(u) : u \in X\}$, isto é, pelas funções $\varphi \in X^* \mapsto J(u)(\varphi) = \varphi(u) \in \mathbb{K}$ onde $u \in X$. Quando uma sequência (φ_n) em X^* converge para $\varphi \in X^*$ na topologia fraca-estrela, escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.*

Teorema A.26. *Seja X espaço normado. Então*

a) *Para cada $u \in X$, $J(u) : (X^*, \sigma(X^*, X)) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.*

b) Para cada $\varphi_0 \in X^*$, os conjuntos da forma

$$W_{J,\varepsilon} = \{\varphi \in X^* : |\varphi(u_j) - \varphi_0(u_j)| < \varepsilon \ \forall j = 1, \dots, n\},$$

onde $u_j \in X$ para todo $j = 1, \dots, n$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de φ_0 na topologia $\sigma(X^*, X)$.

c) Seja (φ_n) uma sequência em X^* . Então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(u) \rightarrow \varphi(u)$ para todo $u \in X$.

d) A topologia fraca-estrela $\sigma(X^*, X)$ é Hausdorff.

e) Se $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$ em X^* , então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

f) Se X é Banach e $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ em X^* , então o conjunto $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado e $\|\varphi\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|$.

g) Se X é Banach, $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ em X^* e $u_n \rightarrow u$ em X , então $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ em $\mathbb{K}$.

h) Denotamos por $(X^*, \sigma(X^*, X))^*$ o espaço formado pelos funcionais lineares de X^* em $\mathbb{K}$ que são contínuos na topologia fraca-estrela. Então $J_X(X) = (X^* \sigma(X^*, X))^*$.

i) Em X^* , a topologia fraca-estrela $\sigma(X^*, X)$ está contida na topologia fraca $\sigma(X^*, X^{**})$.

j) As topologias fraca $\sigma(X^*, X^{**})$ e fraca-estrela $\sigma(X^*, X)$ coincidem em X^* se, e somente se, X é reflexivo.

Teorema A.27 (Teorema De Banach-Alaoglu-Bourbaki). Para todo espaço normado X , a bola unitária fechada $B_{X^*} = \{u^* \in X^* : \|u^*\| \leq 1\}$ é $\sigma(X^*, X)$ -compacta em X^* .

Apêndice B

B.1 Noções Básicas de Espaço de Sobolev

Apresentaremos um resumo de Espaços de Sobolev e dos principais lemas e proposições que são necessários para estudar as aplicações em Equações Diferenciais Parciais. Para um aprofundamento, recomendo consultar as referências [13][14] e complementar com as notas de aulas de EDP2 (versão 1.2) do Marcelo Furtado.

Antes de apresentarmos o Espaço de Sobolev, discutiremos os conceitos de Derivada Fraca e Espaço de Hölder.

Definição B.1 (Suporte Compacto [13][14]). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, definimos como suporte da função $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o conjunto*

$$\text{supp}(\varphi) = \{x \in U : \varphi(x) \neq 0\}.$$

Uma função φ é dita ter suporte compacto se conjunto $\text{supp}(\varphi)$ for compacto em $\mathbb{R}^n$.

Definição B.2 ([13][14]). *Definimos por $C_0^\infty(U)$ o conjunto das funções $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em U . Denominamos as funções $\varphi \in C_0^\infty(U)$ como função teste.*

Definição B.3 ([13][14]). *Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, é dito multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Sejam $u \in C_0^\infty$, definimos*

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Definição B.4 ([13][14]). *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos $D^k u := \{D^\alpha u : |\alpha| \leq k\}$ o conjunto de todas as derivadas de ordem k . Em particular,*

- para $k = 1$, temos $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cong \text{Vetor Gradiente};$

$$\bullet \text{ para } k = 2, \text{ temos } D^2u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1 x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n x_n} \end{bmatrix} \cong \text{Matriz Hessiana.}$$

Definição B.5 (Derivada Fraca [13][14]). *Sejam um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e um multi-índice α . Dizemos que v é a α -ésima derivada fraca de u se*

$$\int_U \varphi(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u(x)D^\alpha \varphi(x)dx$$

Para todo $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Denotaremos $D^\alpha u := v$.

A definição acima diz que a derivada fraca é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes.

Note que $D^\alpha u$ é unicamente determinado a menos de um conjunto de medida nula. De fato, suponha que v_1 e v_2 são α -ésimas derivadas fracas de $u \in L^1_{loc}(U)$. Então, $\int_U \varphi v_1 dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^\alpha \varphi dx = \int_U \varphi v_2 dx$. Logo, $\int_U (v_1 - v_2) \varphi dx = 0$, obtendo $v_1 = v_2$ q.t.p em U .

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Sabemos que o conjunto $C(\overline{U})$, munido com a norma $\|u\|_{C(\overline{U})} := \max_{x \in \overline{U}} |u(x)|$, para todo $u \in C(\overline{U})$, é um espaço de Banach.

De maneira geral, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que o conjunto $C^k(\overline{U})$ munido com a norma $\|u\|_{C^k(\overline{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})}$, para todo $u \in C^k(\overline{U})$, é espaço de Banach.

Definição B.6 (Função Hölder Contínua com Expoente γ [13]). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $0 < \gamma \leq 1$. Uma função $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \in C(\overline{U})$ é dita Hölder Contínua com expoente γ se existe $C > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad \forall x, y \in U.$$

Definição B.7. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto.*

a) *O quociente de Hölder de $u \in C(\overline{U})$ é definido por*

$$[u]_\gamma = \sup_{\substack{x, y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$

b) *Definimos o conjunto $C^{0,\gamma}(\overline{U}) := \{u \in C(\overline{U}) : [u]_\gamma < \infty\}$.*

Definição B.8 (Espaço de Hölder [13]). *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \leq 1$. O Espaço Hölder*

$C^{k,\gamma}(\overline{U})$ é definido por

$$C^{k,\gamma}(\overline{U}) := \{u \in C^k(\overline{U}) : [D^\alpha u]_\gamma < \infty \text{ para todo multi-índice } |\alpha| \leq k\}.$$

O espaço $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ consiste das funções u que são k -vezes continuamente diferenciável e cujas k derivadas são limitadas e Hölder contínuas com expoente γ .

Proposição B.9. *O espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ é Banach munido com a norma*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} := \|u\|_{C^k(\overline{U})} + \sum_{|\alpha| \leq k} [D^\alpha u]_\gamma$$

.

Definição B.10 ([13][14]). *Seja U aberto e limitado. Dizemos que U (ou ∂U) é de classe $C^{k,\gamma}$ se para cada $x_0 \in \partial U$, existe $B = B_r(x_0)$ e uma bijeção ψ de B em $A \subset \mathbb{R}^n$ tais que*

- i) $\psi(B \cap U) \subset \mathbb{R}_+^n$;
- ii) $\psi(B \cap \partial U) \subset \partial \mathbb{R}_+^n$;
- iii) $\psi \in C^{k,\gamma}(B), \psi^{-1} \in C^{k,\gamma}(A)$

Em particular, o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é de classe $C^{k,\gamma}$ se, e somente se, para cada ponto da sua fronteira possui uma vizinhança cuja a intersecção com ∂U é o gráfico de uma função de $n-1$ das coordenadas $x_1, \dots, x_n$ com essa função sendo de classe $C^{k,\gamma}$.

Definição B.11 (Espaço de Sobolev [13][14]). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k = \mathbb{N} \cup \{0\}$. O Espaço de Sobolev, denotado por $W^{k,p}(U)$ ¹, é definido sendo o espaço das funções $u \in L^p(U)$ tais que qualquer derivada fraca de u , até a ordem k , é uma função de $L^p(U)$. Isto é,*

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U) : D^\alpha u \in L^p(U) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}$$

Além disto, quando $p = 2$, denotaremos $H^k(U) := W^{k,2}(U)$.

Observação B.12. *Seja $1 \leq p \leq \infty$, então*

- i) $C_0^\infty(U) \subset W^{k,p}(U) \subset L^p(U)$.
- ii) *Para $k = 1$, temos $H^1(U) = \left\{ u \in L^2(U) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(U), \quad i = 1, \dots, n \right\}$.*

¹Pode-se escrever as notações $W^{k,p}(U)$ ou $W^{k,p}$ com tanto que esteja claro o conjunto que se está trabalhando.

iii) Para $k = 0$, temos $W^{0,p}(U) = L^p(U)$.

iv) Identificamos as funções em $W^{k,p}(U)$ em q.t.p. em U .

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ é um espaço normado munido com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\int_U \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & : 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & : p = \infty \end{cases}$$

Outras normas equivalente são dadas por:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p} \quad \text{e} \quad \|u\|_{W^{k,p}} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

É possível munir o espaço $H^k(U)$ com o produto interno

$$(u, v)_{H_k} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

Proposição B.13 (Propriedades de Derivada Fraca [13][14]). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e assumimos que $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$. Então*

a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo multi-índice α, β com $|\alpha|+|\beta| \leq k$

b) $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

a) Fixamos $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Então $D^\beta \varphi \in C_0^\infty(U)$, e então

$$\begin{aligned} \int_U D^\alpha u D^\beta \varphi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^{\alpha+\beta} \varphi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \varphi dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \varphi dx \end{aligned}$$

Portanto, $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco.

b) Considere $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Pela definição de derivada fraca, temos

$$\int_U (\lambda u + \mu v) D^\alpha \varphi = \lambda \int_U u D^\alpha \varphi + \mu \int_U v D^\alpha \varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(-1)^{|\alpha|} \int_U \varphi D^\alpha u + \mu(-1)^{|\alpha|} \int_U \varphi D^\alpha v \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v) \varphi,
\end{aligned}$$

para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Portanto, $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

■

Proposição B.14 ([13][14]). *O espaço $W^{k,p}(U)$ é Banach para $1 \leq p \leq \infty$ e Reflexivo para $1 < p < \infty$. O espaço $H^k(U)$ é Hilbert separável.*

Demonstração.

i) Seja $1 \leq p < \infty$ e (u_m) uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(U)$. Vamos mostrar que (u_m) converge em $W^{k,p}(U)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{W^{k,p}} < \varepsilon \quad \forall m, n > N_\varepsilon.$$

Assim, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$, temos

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{L^p} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{L^p}^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad \forall m, n > N_\varepsilon,$$

o que mostra que $(D^\alpha u_m) \subset L^p(U)$ é uma sequência de Cauchy. Sendo $L^p(U)$ completo, segue que $D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha$ em $L^p(U)$ para todo $|\alpha| \leq k$.

Considere $u := u_{(0,\dots,0)} \in W^{k,p}$, mostraremos que $D^\alpha u = u_\alpha$ para todo $|\alpha| \leq k$. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(U)$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \int_U u D^\alpha \varphi - \int_U u_m D^\alpha \varphi \right| \leq \int_U |u - u_m| |D^\alpha \varphi| \leq \|u - u_m\|_{L^p} \|D^\alpha \varphi\|_{L^q},$$

onde $1/p + 1/q = 1$. Então

$$\int_U u D^\alpha \varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_U u_m D^\alpha \varphi.$$

Por outro lado,

$$\left| \int_U u_\alpha \varphi - \int_U D^\alpha u_m \varphi \right| \leq \int_U |u_\alpha - D^\alpha u_m| |\varphi| \leq \|u_\alpha - D^\alpha u_m\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}.$$

Assim,

$$\int_U u_\alpha \varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_U D^\alpha u_m \varphi.$$

Portanto,

$$\int_U u D^\alpha \varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_U u_m D^\alpha \varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U (D^\alpha u_m) \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \varphi,$$

concluindo que $D^\alpha u = u_\alpha \in L^p(U)$. Portanto, $u \in W^{k,p}(U)$.

O Caso $p = \infty$ basta seguir o mesmo processo usando a norma $\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}$.

- ii) Vamos considerar somente o caso $k = 1$, porque os demais casos são análogos. Sabemos que o $E := L^p(U) \times L^p(U)$ é reflexivo. O operador $T : W^{1,p}(U) \rightarrow E$ definido por $Tu = (u, Du)$ é uma isometria. Como $W^{1,p}(U)$ é Banach, então $T(W^{1,p}(U))$ é um subespaço fechado de E . Segue que $T(W^{1,p}(U))$ é reflexivo. Consequentemente, $W^{1,p}(U)$ é reflexivo.
- iii) Vamos considerar somente o caso $k = 1$, porque os demais casos são análogos. Sabemos que $E = L^p(U) \times L^p(U)$ é separável. Portanto, $T(W^{1,p}(U))$ é também separável. Consequentemente, $W^{1,p}(U)$ é separável. Em particular, $H^1(U)$ é Hilbert separável

■

Definição B.15 ([13][14]). O espaço $W_0^{k,p}(U)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(U)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$. Isto é,

$$W_0^{k,p}(U) := \overline{C_0^\infty(U)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}.$$

Além disto, quando $p = 2$, denotaremos $H_0^k(U) := W_0^{k,2}(U)$.

Note que $u \in W_0^{k,p}(U)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m) \subset C_0^\infty(U)$ tal que $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}(U)$. Interpretamos $W_0^{k,p}(U)$ como conjuntos de funções $u \in W^{k,p}(U)$ tal que " $D^\alpha u = 0$ em ∂U " para todo $|\alpha| \leq k - 1$.

Definição B.16 (Imersão Contínua [13]). Sejam $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados tal que $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe um $C > 0$ tal que

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X,$$

para todo $u \in X$. Denotamos por $X \hookrightarrow Y$. Em outras palavras, dizer que X está imerso continuamente em Y é equivalente a dizer que a aplicação identidade $I_d : X \rightarrow Y$ é contínua.

Exemplo B.17. Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então, $C^{k+1}(\overline{U}) \hookrightarrow C^k(\overline{U})$. Assim, dado $u \in C^{k+1}(\overline{U})$, então vale

$$\|u\|_{C^k(\overline{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} \leq \sum_{|\alpha| \leq k+1} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} = \|u\|_{C^{k+1}(\overline{U})}.$$

Proposição B.18 ([13]). Se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \vartheta < \gamma \leq 1$, então

- a) $C^{k+1}(\overline{U}) \hookrightarrow C^k(\overline{U})$;
- b) $C^{k,\gamma}(\overline{U}) \hookrightarrow C^k(\overline{U})$;
- c) $C^{k,\gamma}(\overline{U}) \hookrightarrow C^{k,\vartheta}(\overline{U})$.

Além disto, se U for convexo, então

- d) $C^{k+1}(\overline{U}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{U})$;
- e) $C^{k+1}(\overline{U}) \hookrightarrow C^{k,\vartheta}(\overline{U})$.

Demonstração. O item (a) já foi provado no exemplo acima. Para (b), note que

$$\|u\|_{C^k(\overline{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k+1} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} \leq \|u\|_{C^k(\overline{U})} + \sum_{|\alpha| \leq k+1} [D^\alpha u]_\gamma = \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})},$$

para todo $u \in C^{k,\gamma}(\overline{U})$.

Para provar (c), sejam $u \in C^{k,\gamma}(\overline{U})$ fixo e α um multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Dados $x, y \in U$ com $0 < |x - y| < 1$, temos que

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\vartheta} \leq \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\gamma} \leq [D^\alpha u]_\gamma.$$

Por outro lado, se $|x - y| \geq 1$ então

$$\begin{aligned} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\vartheta} &\leq |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \\ &\leq |D^\alpha u(x)| + |D^\alpha u(y)| \\ &\leq 2\|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} \end{aligned}$$

Assim,

$$[D^\alpha u]_\vartheta \leq 2\|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} + [D^\alpha u]_\gamma,$$

onde se conclui que

$$\|u\|_{C^{k,\vartheta}(\overline{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|\alpha| \leq k} [D^\alpha u]_\vartheta$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| \leq k} [D^\alpha u]_\gamma + 2 \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} \\
&\leq \|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} + 2 \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| \leq k} [D^\alpha u]_\gamma \\
&= 3\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})}
\end{aligned}$$

o que verifica (c).

Suponha que U seja convexo e seja $u \in C^{k+1}(\bar{U})$. Dados $x, y \in U$ com $x \neq y$, e um multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para escrever

$$D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) = \nabla D^\alpha u(z)(x - y)$$

para algum $z \in \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$. Desse modo

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^1} \leq |\nabla D^\alpha u(z)| \leq c\|u\|_{C^{k+1}(\bar{U})}$$

e portanto,

$$\|u\|_{C^{k,1}(\bar{U})} = \|u\|_{C^k(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| \leq k+1} [D^\alpha u]_1 \leq c\|u\|_{C^{k+1}(\bar{U})},$$

provando assim o item (d). Para finalizar, segue das imersões contínuas abaixo que

$$C^{k+1}(\bar{U}) \hookrightarrow C^{k,1}(\bar{U}) \hookrightarrow C^{k,\vartheta}(\bar{U}),$$

provando assim a proposição. ■

Definição B.19 (Imersão Compacta [13]). *Sejam X e Y espaço de Banach tal que $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso compactamente em Y se:*

- a) $X \hookrightarrow Y$;
- b) *Toda sequência limitada em X é pré-compacta em Y . Isto é, se a sequência (u_n) é limitada em X , então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ convergente em Y .*

Proposição B.20 ([13]). *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \vartheta < \gamma \leq 1$, então*

- a) $C^{k,\gamma}(\bar{U}) \xrightarrow{cpct.} C^k(\bar{U})$
- b) $C^{k,\gamma}(\bar{U}) \xrightarrow{cpct.} C^{k,\vartheta}(\bar{U})$

Além disto, se U for convexo, então

$$\begin{aligned} c) \quad & C^{k+1}(\overline{U}) \xrightarrow{cpct.} C^k(\overline{U}) \\ d) \quad & C^{k+1}(\overline{U}) \xrightarrow{cpct.} C^{k,\vartheta}(\overline{U}). \end{aligned}$$

Demonstração. Para prova (a) mostraremos primeiro que $C^{0,\gamma}(\overline{U}) \xrightarrow{cpct.} C(\overline{U})$. Considerando então uma sequência $(u_n) \subset C^{0,\gamma}(\overline{U})$ tal que

$$\|u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \|u\|_{C(\overline{U})} + [u_n]_\gamma \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

precisamos verificar que existe uma subsequência convergente em $C(\overline{U})$. Seja o conjunto $\mathcal{A} := \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\overline{U})$ e observe que a inequação acima mostra que $\mathcal{A}$ é equilimitado (quando satisfaz a condição (i) do Teorema de Arzelá-Ascoli). Além disto, como $[u_n]_\gamma \leq M$, segue que

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq M|x - y|^\gamma \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \overline{U}.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$ dado, a condição (ii) do Teorema de Arzelá-Ascoli² se verifica para $\delta = (\varepsilon/M)^{\frac{1}{\gamma}}$. Isto é, a sequência (u_n) possui uma subsequência convergente em $C(\overline{U})$. Isto prova (a) quando $k = 0$.

Para o caso geral, se $(u_n) \subset C^{k,\gamma}(\overline{U})$ é uma sequência limitada, então existe uma subsequência de (u_n) , que denotaremos por (u_{n_j}) , tal que $u_{n_j} \rightarrow u \in C(\overline{U})$. Para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$,

$$\|u_n\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} = \|u_n\|_{C^k(\overline{U})} + \sum_{|\alpha| \leq k} [D^\alpha u_n]_\gamma \leq M.$$

Logo,

$$\|D^\alpha u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \|D^\alpha u_n\|_{C(\overline{U})} + [D^\alpha u_n]_\gamma \leq M.$$

Usando a primeira parte da demonstração e passando para subsequências se necessário, temos que $D^\alpha u_n \rightarrow \Psi_\alpha$ em $C(\overline{U})$. Como a convergência é uniforme devemos ter $\Psi_\alpha = D^\alpha u$. Desse modo, $u \in C^k(\overline{U})$ e

$$\|u_n - u\|_{C^k(\overline{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} \rightarrow 0,$$

o que prova (a).

²(Arzelá-Ascoli) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\mathcal{A} \subset C(\overline{U})$ um subconjunto satisfazendo:

- i) Existe $M > 0$ tal que $\|u\|_{C(\overline{U})} \leq M \quad u \in \mathcal{A}$;
- ii) dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall u \in \mathcal{A}, x, y \in \overline{U}$, vale $|x - y| < \delta \implies |u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

Então a sequência $(u_n) \subset \mathcal{A}$ possui uma subsequência convergente.

Para provar (b), note primeiramente que, se $u \in C^{k,\gamma}(\overline{U})$ e $x, y \in U$ com $x \neq y$, então

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\vartheta} = \left(\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\vartheta} \right)^{\frac{\vartheta}{\gamma}} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-\frac{\vartheta}{\gamma}}$$

de modo que, tomando o supremo, obtemos

$$[D^\alpha u]_{\vartheta} \leq c [D^\alpha u]_{\gamma}^{\frac{\vartheta}{\gamma}} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})}^{1-\frac{\vartheta}{\gamma}}.$$

Seja agora $(u_n) \subset C^{k,\gamma}(\overline{U})$ uma sequência limitada. Usando a letra (a) e passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que (u_n) converge em $C^k(\overline{U})$. Usando a estimativa acima obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{C^{k,\vartheta}(\overline{U})} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha(u_n - u_m)\|_{C(\overline{U})} + [D^\alpha(u_n - u_m)]_{\vartheta} \right) \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(u_n - u_m)\|_{C(\overline{U})}^{1-\frac{\vartheta}{\gamma}} \left(\|D^\alpha(u_n - u_m)\|_{C(\overline{U})}^{\frac{\vartheta}{\gamma}} + [D^\alpha(u_n - u_m)]_{\gamma}^{\frac{\vartheta}{\gamma}} \right). \end{aligned}$$

Os termos que aparecem entres parênteses acima são uniformemente limitados devido a limitação de (u_n) em $C^{k,\gamma}(\overline{U})$. Como u_n converge em $C^k(\overline{U})$ temos que, para todo multi-índice de ordem menor ou igual a k , $\|D^\alpha(u_n - u_m)\|_{C(\overline{U})} \rightarrow 0$, quando $n, m \rightarrow \infty$. Logo, a sequência (u_n) é Cauchy em $C^{k,\vartheta}(\overline{U})$, o que implica que $u_n \rightarrow u$ em $C^{k,\vartheta}(\overline{U})$, para alguma função $u \in C^{k,\vartheta}(\overline{U})$. Isto prova (b).

A demonstração dos itens (c) e (d) segue dos diagramas abaixo

$$\begin{aligned} C^{k+1}(\overline{U}) &\hookrightarrow C^{k,1}(\overline{U}) \xrightarrow{cpct.} C^{k,\gamma}(\overline{U}) \\ C^{k+1}(\overline{U}) &\hookrightarrow C^{k,1}(\overline{U}) \xrightarrow{cpct.} C^{k,\vartheta}(\overline{U}) \end{aligned}$$

e do fato de que a composição de um operador contínuo com um operador compacto é um operador compacto. ■

A seguir, apresentaremos algumas desigualdades importantes que merecem destaque nesta seção.

Proposição B.21 (Desigualdade de Gagliardo-Nierenberg-Sobolev [13][14]). *Se $1 \leq p < n$, então existe $C = C(n, p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

para todo $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consulte o Teorema 1, p.262 em [13]. ■

Proposição B.22 (Estimativa para $W_0^{1,p}$ [13][14]). *Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $1 \leq p < n$. Então, para todo $q \in [1, p^*]$, existe $C = C(n, p, q, |U|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(U)$.

Demonstração. Como visto na definição do espaço $W_0^{1,p}(U)$, o resultado vale para $q = p^*$. Para o caso em que $q \in [1, p^*)$ basta usar Hölder para obter

$$\int_U |u|^q \leq \left(\int_U |u| \right)^{q/p^*} |U|^{(p^*-q)/p^*},$$

então obtemos a imersão contínua $L^{p^*}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ para todo $q \in [1, p^*]$. Desse modo, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, temos

$$\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{L^{p^*}} \leq \overline{C} \|\nabla u\|_{L^p},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(U)$. ■

Corolário B.23 (Desigualdade de Poincaré [13][14]). *Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e $1 \leq p < n$. Então existe $C = C(n, p, |U|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(U)$.

Demonstração. A prova segue imediatamente da proposição B.22. ■

Observação B.24 ([13]). *Uma consequência da Desigualdade de Poincaré é que podemos definir a norma em $W_0^{1,p}(U)$ por*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} := \left(\int_U |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla u\|_{L^p} \quad (\text{B.1})$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(U)$. De fato, note que se $u \in W_0^{1,p}(U)$, então

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_0^{1,p}} &= \int_U |\nabla u|^p \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}}^p = \|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^p}^p + C^p \|\nabla u\|_{L^p}^p \\ &\leq \overline{C} \|\nabla u\|_{L^p}^p = \overline{C} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p. \end{aligned}$$

Note que $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$ uma norma em $W_0^{1,p}(U)$. Além disto, essa norma é equivalente $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$. Note que a expressão (B.1) não define uma norma em $W^{1,p}(U)$. De fato, basta notar que quando U é limitado, a função $u \equiv 1$ pertence à $W^{1,p}(U)$ mas $\|u\|_{W_0^{1,p}} = 0$.

Corolário B.25 ([13][14]). Se $1 \leq p < n$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, então vale a imersão $W_0^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ para todo $1 \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Segue imediatamente da Desigualdade de Poincaré e a Observação B.24. ■

Proposição B.26 (Desigualdade Geral de Sobolev [13][14]). Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $C^{0,1}(U)$. Suponha que $t^* = \frac{np}{n-kp}$, então

- a) Se $kp < n$, então $W^{k,p}(U) \hookrightarrow L^{t^*}(U)$.
- b) $W^{k,p}(U) \xrightarrow{cpct.} L^q(U)$, onde $1 \leq q < t^*$.
- c) Se $kp > n$, então $W^{k,p}(U) \hookrightarrow C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \gamma}(\overline{U})$, onde $\gamma = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil + 1 - \frac{n}{p}$, se $\frac{n}{p} \in \mathbb{Z}$ e $\gamma \in (0, 1)$, se $\frac{n}{p} \in \mathbb{Z}$ ($\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$ é o maior inteiro que é menor ou igual a $\frac{n}{p}$).
- d) $W^{k,p}(U) \xrightarrow{cpct.} C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \beta}(\overline{U})$, onde $\beta < \gamma$.

Demonstração. Consulte o Teorema 6 p.270 em [13]. ■

Corolário B.27 ([13]). $W^{k,n}(U) \hookrightarrow L^t$ e $W^{k,n}(U) \xrightarrow{cpct.} L^t$ para $t \geq 1$.

Demonstração. Suponha que $n > 1$ e considere $t \geq 1$ fixado. Usando a definição de Expoente Crítico de Sobolev obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (n - \varepsilon)^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{n(n - \varepsilon)}{n - (n - \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{n(n - \varepsilon)}{\varepsilon} = \infty.$$

Desse modo, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, devemos ter $(n - \varepsilon)^* > t$. Logo,

$$W^{k,n}(U) \hookrightarrow W^{1,n}(U) \hookrightarrow L^{(n-\varepsilon)^*}(U) \hookrightarrow L^t(U).$$

Por outro lado,

$$W^{k,n}(U) \hookrightarrow W^{1,n}(U) \hookrightarrow W^{1,(n-\varepsilon)}(U) \xrightarrow{\text{cpct.}} L^t(U),$$

e o resultado segue do fato da composição de um operador contínuo com um operador compacto ser compacto. ■

Seja a seguinte equação diferencial segunda ordem $Lu = f$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O operador diferencial L atua sobre funções $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, e tem a seguinte forma:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (\text{B.2})$$

com $a^{ij}, b^i, c : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

Exemplo B.28. *Suponha que $b^1 \equiv \dots \equiv b^n \equiv c \equiv 0$ e $a^{ij} = \delta_{ij}$. Nesse caso, a equação se torna a conhecida Equação de Poisson*

$$-\Delta u = - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} = f.$$

Em particular, quando $f \equiv 0$, temos a conhecida Equação de Laplace

$$-\Delta u = 0.$$

Observe que, se $u \in C^2(U)$, o Teorema de Schawarz nos assegura que $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Logo,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} (a^{ij}(x) + a^{ji}(x)) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u,$$

e podemos supor, sem perda de generalidade, que para cada $x \in U$ a matrix

$$A(x) := \begin{bmatrix} a^{11}(x) & \dots & a^{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1}(x) & \dots & a^{nn}(x) \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica.

Definição B.29 (Operador Elíptico [13]). *Dizemos que o operador L definido em (B.2) é elíptico no ponto $x \in U$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ é positiva. Isto é,*

se $\lambda(x)$ denota o menor autovalor de $A(x)$, então

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda(x) |\xi|^2 > 0.$$

para todo $\xi = (x_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. O operador é Elíptico em U se $\lambda > 0$ em U .

Definição B.30 (Operador Uniformemente Elíptico [13]). O operador L é dito uniformemente Elíptico em U se existe $\theta_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \theta_0$ para todo $x \in U$. Assim, vale a desigualdade

$$\xi A(x) \xi = \sum_{i,j}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta_0 |\xi|^2,$$

com $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposição B.31 ([14]). Assumimos que $U \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $C^{1,1}$. Considere operador $Lu = a^{i,j} u_{x_i x_j} + b^i(x) u_{x_i} + c(x) u$ uniformemente elíptico em U com os coeficientes em $a^{i,j} \in C(\overline{U})$ e $b^i, c \in L^\infty(U)$ com $i, j = 1, \dots, n$ e $c \leq 0$. Então existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \|Lu\|_{L^p} \quad (\text{B.3})$$

para todo $u \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U)$ com $1 < p < \infty$. Em particular, para $p \geq 2$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1 \|u\|_{W^{2,p}} \leq \|\Delta u\|_{L^p} \leq C_2 \|u\|_{W^{2,p}}$$

para todo $u \in W^{2,p}(U) \cap H_0^1(U)$.

Demonstração. A primeira parte da demonstração pode ser vista em [14] p. 242, lema 9.17. Para provar a última parte, basta observar que como $p \geq 2$, temos que $W^{2,p}(U) \cap H_0^1(U) = W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U)$. Portanto a existência de C_1 segue da primeira parte do lema acima e a existência do C_2 segue do fato que $W^{2,p}(U) \hookrightarrow L^p(U)$. ■

Teorema B.32. Sejam $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p, q < \infty$, $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $|g(x, u)| \leq c(1 + |u|^{p/q})$. Então, para todo $u \in L^p(\Omega)$, $g(\cdot, u) \in L^q(\Omega)$, o operador $A : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ definido por $u \mapsto g(x, u)$ é contínuo.

Demonstração. Consulte o Teorema A.2. em [24]. ■

Referências Bibliográficas

- [1] AMBROSETTI, A., BRÉZIS, H., CERAMI, G. **Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems**, J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.
- [2] BAHRI, A., BERESTYEKI, H. **A Perturbation Method in Critical Point Theory and Applications**, Trans Amer. Math. Soc, 267, 1-32.
- [3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D. e TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**, SBM. 2015
- [4] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, New York. Heidelberg London. Springer. Cop. 2011.
- [5] CHANG, K. C. **Variational Methods for Non-Differentiable Functionals and their Applications to Partial Differential Equations**, J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), 102-129.
- [6] CHOWDHURY, M.R.S., TAN, K.K. **Generalization of Ky Fan's Minimax Inequality with Applications to Generalized Variational Inequalities for Pseudo-Monotone Operators and Fixed Point Theorems**, J. Math. Anal. Appl. 204 (3) (1996) 910-929.
- [7] CIORANESCU. I. **Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems**. Springer Science & Business Media. 2012.
- [8] CLARKE, F. H. **A New Approach To Lagrange Multipliers**. Math. Oper. Res. 1 (1976): 165-174.
- [9] CLARKE, F. H. **Generalized gradients of Lipschitz functionals**, Advances in Mathematics 40 (1981), p. 52-67.
- [10] CLARK, F. H. **Optimization And Nonsmooth Analysis**. (1983).

- [11] EKELAND, I., **On the Variational Principle**, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.
- [12] EKELAND, I., TEMAM, R. **Convex Analysis and Variational Problems**. SIAM. 1999.
- [13] EVANS, L.C. **Partial Differential Equations**, 2nd Edition, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, American Mathematical Society, 2010.
- [14] GILBARG, D., TRUDINGER, N.S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Reprint of the (1998) edition. Classic in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2001).
- [15] KOUHESTANI, N., MOAMENI, A. **Multiplicity Results for Elliptic Problems with Super-Critical Concave and Convex Nonlinearities**, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 355 (12) (2017) 1236-1241.
- [16] MARANO, S.A., MOSCONI, J.N. **Critical points on closed convex sets vs. critical points and applications**, J. Convex Anal. 22 (4) (2015) 1107–1124.
- [17] MAWHIN, J. **Problèmes de Dirichlet Variationnels non Linéaires**, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1987.
- [18] MEREANI, D., PANAGIOTOPOULOS, P. D. **Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities**, Springer Science & Business Media, 2013.
- [19] MOAMENI, A. **Critical Point Theory on Convex Subsets with Applications in Differential Equations and Analysis**, J. Math. Pures Appl 141 (2020) 266-315.
- [20] MOAMENI, A. **A Variational Principle for Partial Differential Equations with a Hint of Convexity**, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 355 (12) (2017) 1236-1241.
- [21] MOAMENI, A., SALIMI, L. **Existence Results for a Super-Sritical Neumann Problem with a Convex-concave Non-linearity**, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 198 (4) (2019) 1165–1184.
- [22] ROCKAFELLER, R.T. **Convex Analysis**. Princeton University Press, 1997.
- [23] SZULKIN, A. **Minimax Principles for Lower Semicontinuous Functions and Applications to Nonlinear Boundary Value Problems**, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 3 (1986) no. 2, 77-109.

- [24] WILLEM, M. **Minimax Theorems**, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Edition 1, 1996.