



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Análise Transitória de Sistemas de Ordem Fracionária: Identificação de
Sistemas baseada na Técnica de Sundaresan

Michel Wanderson de Souza Campos

MANAUS-AM

2024

Michel Wanderson de Souza Campos

Análise Transitória de Sistemas de Ordem Fracionária: Identificação de Sistemas
baseada na Técnica de Sundaresan

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas na linha de pesquisa Sistemas de Controle e Automação Modernos.

Orientador: Prof. Dr. Florido Antonio de Carvalho Ayres junior

MANAUS-AM

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C198a Campos, Michel Wanderson de Souza
Análise transitória de sistemas de ordem fracionária: Identificação de sistemas baseada na técnica de Sundaresan / Michel Wanderson de Souza Campos . 2024
73 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Florindo Antonio de Carvalho Ayres Junior
Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Identificação de sistemas de ordem fracionária. 2. Técnica de Sundaresan. 3. Mínimos quadrados fracionário. 4. Análise transitória de sistemas fracionários. I. Ayres Junior, Florindo Antonio de Carvalho. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título



Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

FOLHA DE APROVAÇÃO

Poder Executivo Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Faculdade de Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Av. General Rodrigo Octávio Jordão Ramos, nº 3.000 - Campus Universitário, Setor Norte - Coroado, Pavilhão do CETELI. Fone/Fax (92) 99271-8954 Ramal:2607. E-mail: ppgee@ufam.edu.br

MICHEL WANDERSON DE SOUZA CAMPOS

ANÁLISE TRANSITÓRIA DE SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA: IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS BASEADO NA TÉCNICA DE SUNDARESAN

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

Aprovada em 17 de dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior- Presidente
Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Júnior - Membro Titular 1 - Externo
Prof. Dr. Iury Valente de Bessa - Membro Titular 2 - Interno
Prof. Dr. Ozenir Farah da Rocha Dias - Membro Titular 3 - Interno
Prof. Dr. Walter Barra Júnior - Membro Titular 4 - Externo

Documento assinado eletronicamente

Manaus, 02 de dezembro de 2024.



Documento assinado eletronicamente por **Walter Barra Junior, Usuário Externo**, em 24/01/2025, às 14:19, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Tavares da Costa Júnior, Usuário Externo**, em 24/01/2025, às 22:36, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior, Professor do Magistério Superior**, em 27/01/2025, às 13:35, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ozenir Farah da Rocha Dias, Professor do Magistério Superior**, em 27/01/2025, às 16:06, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Iury Valente de Bessa, Professor do Magistério Superior**, em 27/01/2025, às 20:30, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2351507** e o código CRC **6EE40736**.

Av. Octávio Hamilton Botelho Mourão - Bairro Coroadó 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho,
Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181
CEP 69080-900 Manaus/AM - mestrado_engletrica@ufam.edu.br

Referência: Processo nº 23105.015428/2024-60

SEI nº 2351507

Criado por [31183646291](#), versão 2 por [31183646291](#) em 02/12/2024 13:47:35.

Dedico esta tese primeiramente a Deus pela oportunidade de chegar até aqui. Aos meus pais pelo incentivo ao estudo e a minha formação acadêmica. A minha esposa por toda paciência e apoio dado até aqui. Aos meus amigos de laboratório pelo apoio e ajuda e aos meus professores, nos quais tiveram fundamental importância na minha formação do mestrado e no doutorado ao longo desta jornada.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos os que contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço às agências de fomento que forneceram o suporte financeiro necessário para a execução deste estudo. Também estendo meus agradecimentos aos colegas e pesquisadores da nossa instituição, cujas discussões e sugestões foram fundamentais para o aprimoramento deste trabalho.

Agradeço, ainda, ao professor Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Jr. ao professor Dr. Renan Landau Paiva de Medeiros, ao professor Dr. Erwin Kaminski e ao professor Dr. Iury Bessa, cujo conhecimento e orientações foram essenciais para o desenvolvimento deste estudo. Finalmente, expresso minha gratidão aos meus familiares e amigos pelo apoio e incentivo constantes ao longo do processo de pesquisa.

"É muito melhor arriscar coisas grandiosas, alcançar triunfos e glórias, mesmo expondo-se a derrota, do que formar fila com os pobres de espírito que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem nessa penumbra cinzenta que não conhece vitória nem derrota."

(Theodore Roosevelt)

Resumo

Nesta tese, a técnica de Sundaresan para a modelagem de sistemas de ordem fracionária é investigada. Tal técnica baseia-se nos parâmetros de resposta transitória aplicados à modelagem de sistemas de segunda ordem inteira. Entretanto, a generalização dessa abordagem para sistemas de ordem fracionária apresenta desafios significativos. O principal obstáculo reside em um problema de convergência da derivada da resposta no domínio da frequência no ponto zero, o que impossibilita a aplicação direta da solução proposta por Sundaresan em seu artigo original para sistemas de ordem inteira ao caso de ordem fracionária. Adicionalmente, surgem dificuldades relacionadas às propriedades do produto e quociente da função de Mittag-Leffler, bem como às restrições de convergência de sua inversa. Como solução, esta tese propõe uma nova abordagem da técnica de Sundaresan adaptada ao caso de sistemas de ordem fracionária. É apresentada uma equação revisada para o ajuste dos parâmetros da função de transferência de sistemas fracionários de três termos, também denominados pseudo-segunda-ordem. A nova técnica baseada na abordagem de Sundaresan demonstrou-se eficaz na identificação dos parâmetros de sistemas de ordem não inteira a três termos, configurando-se como uma generalização da técnica clássica. Além disso, realizou-se um estudo comparativo para a identificação de sistemas fracionários a dois termos, ou pseudo-primeira-ordem. Os resultados evidenciaram que o método proposto é eficaz no ajuste de curvas para sistemas a dois termos, especialmente quando o coeficiente de amortecimento é considerado nulo no modelo a três termos. Portanto, o método proposto nesta tese estabelece-se como uma ferramenta eficiente para a identificação de sistemas de primeira e segunda ordem fracionária.

Palavras-chave: Identificação de Sistemas de Ordem Fracionária, Técnica de Sundaresan, Mínimos quadrados fracionário, Análise transitória de sistemas fracionários.

Abstract

In this thesis, Sundaresan's technique for modeling fractional-order systems is investigated. This technique is based on transient response parameters applied to the modeling of integer second-order systems. However, generalizing this approach to fractional-order systems presents significant challenges. The main obstacle lies in a convergence issue of the derivative of the response in the frequency domain at the zero point, which prevents the direct application of the solution proposed by Sundaresan in his original article for integer-order systems to the fractional-order case. Additionally, difficulties arise related to the properties of the product and quotient of the Mittag-Leffler function, as well as the convergence constraints of its inverse.

As a solution, this thesis proposes a new approach to Sundaresan's technique, adapted to fractional-order systems. A revised equation is presented for parameter adjustment of the transfer function of three-term fractional systems, also referred to as pseudo-second-order systems. The new technique, based on Sundaresan's approach, proved effective in identifying the parameters of fractional-order three-term systems, establishing itself as a generalization of the classical technique. Furthermore, a comparative study was conducted for the identification of fractional two-term systems, or pseudo-first-order systems. The results showed that the proposed method is effective in curve fitting for two-term systems, particularly when the damping coefficient is considered null in the three-term model. Therefore, the method proposed in this thesis is established as an efficient tool for identifying fractional first- and second-order systems.

Keywords: Fractional-Order Systems Identification, Sundaresan Technique, Fractional Least Squares, Transient Analysis of Fractional Systems.

Lista de Figuras

4.1	Fluxograma do algoritmo proposto	28
4.2	Exemplo de uma má aproximação da reta tangente	29
4.3	Exemplo de uma boa aproximação da reta tangente	29
4.4	Valores de m_1 para um dado valor fixo de $[\alpha, \zeta, \omega_n, t_i, t_m, M_i]$	31
5.1	Curva aproximada usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado	34
5.2	Resultados de identificação de ordem fracionária usando a técnica de mínimos quadrados por um sinal de entrada SBPA corrompido por ruído branco	35
5.3	Distribuição normal para o erro em LS e método modificado	36
5.4	Curva aproximada de ordem inteira usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado	37
5.5	Resultados de identificação de ordem fracionária usando a técnica de mínimos quadrados por um sinal de entrada PRBS corrompido por ruído branco	38
5.6	Distribuição normal do erro em Mínimos Quadrados e o Método Modificado	39
5.7	Curva aproximada de ordem inteira usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado	40
5.8	Resultados de identificação de ordem fracionária usando a técnica de mínimos quadrados por um sinal de entrada SBPA corrompido por ruído branco	41
5.9	Distribuição normal do erro para o Mínimos Quadrados e Método Modificado	41
5.10	Curva aproximada usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado	43
5.11	Identificação de ordem fracionária usando técnica de mínimos quadrados por sinal de entrada SBPA	43
5.12	Distribuição normal do erro por Mínimos Quadrados e método de modificação	44

6.1	Sistema de Tanque com nível de água (branco) e reservatório de água e bomba (azul)	47
6.2	Sistema de acionamento do sistema de tanque	48
6.3	Resultados de identificação de ordem fracionária pelo método proposto . .	49
6.4	Distribuição normal para método modificado para sistema de tanque . . .	50
7.1	Estrutura básica de um conversor DC-DC buck	51
7.2	Curva normalizada de resposta do sistema a um ciclo de trabalho de 25% .	53
7.3	Resultado da identificação do sistema conversor de potência DC-DC Buck utilizando o método proposto	54
7.4	Estudo de resíduo do erro médio quadrático	54
8.1	Curva Normalizada a entrada de 30% de potência térmica	60
8.2	Resultado da Identificação utilizando o Método Proposto Campos et al. (2024)	60

Lista de Tabelas

3.1	Análise qualitativa baseada no estudo de Kothari et al. (2019)	19
5.1	Valores Estimados para o Exemplo 1	36
5.2	Valores Estimados para o Exemplo 2	39
5.3	Valores Estimados para o Exemplo 3	42
5.4	Valores Estimados para o Exemplo 4	44
8.1	Análise Qualitativa baseada no estudo de Kothari et al. (2019)	57

Lista de Abreviaturas e Siglas

CF	<i>Cálculo Fracionário</i>
SBPA	<i>Sinal Binário Pseudo-Aleatório</i>
SFV	<i>Sinal de Frequência Variável</i>
RNA	<i>Rede Neural Artificial</i>
ED	<i>Evolução Diferencial</i>
AG	<i>Algoritmo Genético</i>
EMQ	<i>Erro Médio Quadrático</i>
MQ	<i>Mínimos Quadrados</i>
PID	<i>Proporcional-Integral-Derivativo</i>
EDA	<i>Evolução Diferencial Aprimorada</i>
APM	<i>Algoritmo Predador Marinho</i>
CEA	<i>Configuração Experimental do Aquecedor</i>
CLP	<i>Controlador Lógico Programável</i>

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Considerações Iniciais	1
1.2	Motivação	3
1.3	Objetivos	5
1.3.1	Objetivos Gerais	5
1.3.2	Objetivos Específicos	5
1.4	Organização do Trabalho	6
2	Identificação de Sistemas de Ordem Inteira via Método de Sundaresan	8
2.1	Identificação de Sistemas de Ordem Fracionária baseado na técnica de Mínimos Quadrados	11
2.2	Conclusão do Capítulo	14
3	Estado da Arte	15
3.1	Pesquisas no Campo de Identificação de Sistemas de Ordem Fracionária no Brasil e no Mundo	15
3.2	Conclusão do Capítulo	20
4	Identificação de Sistemas de Ordem Fracionária Baseada na Técnica de Sundaresan	21
4.1	Fórmula de Avaliação de λ em função dos parâmetros do sistema	22
4.2	Formulação da Equação da Identificação	23
4.3	Algoritmo para Utilização do Método Proposto	27
4.4	Questões de Convergência do Método Proposto	29
4.5	Conclusão do Capítulo	31

5	Exemplos Ilustrativos	33
5.1	Sistema de ordem fracionária subamortecido	33
5.2	Sistema de ordem inteira subamortecido	37
5.3	Sistema de ordem fracionária superamortecida	40
5.4	Sistema oscilatório de ordem fracionária	42
5.5	Conclusão do Capítulo	44
6	Aplicação em um Sistema Tanque	46
6.1	Hardware e Configuração do Sistema Tanque	46
6.2	Aquisição de Dados	48
6.3	Identificação do Sistema Tanque	48
6.4	Conclusão do Capítulo	50
7	Aplicação em um Conversor de Potência DC-DC Buck	51
7.1	Estrutura do Conversor de Potência DC-DC Buck	51
7.2	Aquisição de Dados	52
7.3	Identificação do Conversor DC-DC Buck	52
7.4	Conclusão do Capítulo	55
8	Trabalhos Relacionados e Discussões	56
8.1	Estudo do Novo Método de Identificação de Ordem Fracionária em Sistemas a Dois Termos ou Pseudo-Primeira-Ordem	58
8.1.1	Identificação de um Sistema Térmico	58
8.1.1.1	Protótipo Experimental Baseado em Temperatura	58
8.1.1.2	Processo de Identificação do Sistema Térmico utilizando o Método Proposto	59
8.2	Conclusão do Capítulo	61
9	Considerações finais	62
9.1	Conclusões	62
9.2	Recomendações para Trabalhos Futuros	63
	Referências Bibliográficas	64

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Segundo Monje et al. (2010), nas últimas décadas, o *Cálculo Fracionário* (CF) e suas aplicações em controle de realimentação, identificação de sistemas e processamento de sinais tornaram-se cada vez mais populares. De acordo com Mehta et al. (2019), vários sistemas do mundo real podem ser representados empregando modelos de ordem fracionária. Portanto, o CF é uma ferramenta excelente para representá-los com precisão devido ao seu alto grau de liberdade em comparação com o cálculo infinitesimal clássico ou sistemas de ordem inteira. Portanto, os sistemas de ordem fracionária generalizam os sistemas de ordem inteira .

Entretanto, como um sistema de ordem fracionária possui um maior grau de liberdade, a identificação paramétrica desses sistemas ainda é um desafio nos dias de hoje. A análise da resposta transitória de sistemas de ordem fracionária continua sendo um problema, como por exemplo, parâmetros como tempo de pico, overshoot e ponto de inflexão permanecem impossíveis devido ao conhecimento limitado da função inversa de Mittag-Leffler, que é objeto de pesquisa atualmente, como mostra Campos et al. (2024).

Kaslik and Sivasundaram (2014) diz que a principal propriedade dos sistemas de ordem não inteiras está fortemente ligada à dilatação da sua região de estabilidade para certos valores da ordem do sistema; isto possibilita ao sistema uma maior flexibilidade na sua modelagem e controle, agregando polos em regiões que, no caso inteiro, levariam à instabilidade.

Com tais características, os sistemas de ordem não inteira se tornaram uma das prin-

cipais fontes de pesquisa dentro da área de identificação e controle de sistemas. Sua aplicabilidade em sistemas reais encontrou desafios computacionais, uma vez que computar funções e derivadas de ordem fracionária requer cálculos complexos e capacidade de processamento elevada. Contudo, funções de aproximação são empregadas para a aproximação de funções de ordem fracionária a funções de ordem inteira, sem perda de generalização, como, por exemplo, a aproximação de Oustaloup e Rankel em Yüce et al. (2018). A aproximação de Oustaloup é utilizada quando: a precisão é prioridade, a faixa de frequência é bem definida e quando o hardware pode lidar com cálculos mais complexos. Já a aproximação de Rankel é utilizada quando a precisão não é prioridade e quando o hardware é limitado. Portanto, Oustaloup é usado para maior precisão, maior complexidade e ideal para sistemas mais exigentes, e Rankel é usado para aplicações mais simples, com menos exigência de precisão, ideal para sistemas embarcados com restrição de hardware em Baranowski et al. (2015).

Tais aproximações possibilitaram a sintetização de dinâmicas de ordem fracionária na prática, levando a identificações e controles cada vez mais precisos e sofisticados. Há algumas configurações possíveis quando se trata de modelagem e controle de sistemas no contexto de ordem fracionária e inteira. São elas:

- Modelagem do sistema em ordem inteira e controlador sintonizado em ordem inteira.
- Modelagem do sistema em ordem inteira e controlador sintonizado em ordem fracionária.
- Modelagem do sistema em ordem fracionária e controlador sintonizado em ordem inteira.
- Modelagem do sistema em ordem fracionária e controlador sintonizado em ordem fracionária.

Entretanto, em sistemas reais, sistemas são modelados mais precisamente quando empregamos o caso fracionário e, como consequência, controladores de ordem fracionária também possibilitam dinâmicas e performance mais flexibilizadas, conseguindo uma associação Controlador-Planta mais eficiente no sentido de estabilidade e desempenho segundo Chen et al. (2022).

Portanto, dentro do contexto de aplicabilidade dos sistemas fracionários, esta tese tem por objetivo o estudo de identificação de sistemas de ordem fracionária, no contexto da

técnica de Sundaresan, e será utilizada para identificar um sistema tanque e um conversor DC-DC abaixador de tensão (Buck), principalmente.

1.2 Motivação

Sundaresan-Krishnaswamy Sundaresan et al. (1978) desenvolveu uma técnica para identificação de sistemas baseada em resposta transitória e curva de reação. O método é usado para determinar os parâmetros de sistemas de segunda ordem atrasados e não atrasados no tempo e relaciona os parâmetros transitórios da curva com os parâmetros da função no domínio da frequência. Estes valores estão relacionados por duas equações: ao coeficiente de amortecimento e à frequência natural não amortecida. A principal vantagem desta técnica é que ela evita o uso direto de pontos de inflexão, mas apenas dos parâmetros da tangente em torno deste ponto de inflexão. O método também possui uma equação de ajuste para melhorar a precisão dos parâmetros de ajuste. A principal dificuldade na adaptação desta técnica a sistemas de ordem fracionária é que um dos parâmetros necessários para completar as duas equações do problema de ordem inteira não pode ser calculado. Este parâmetro m_1 é a área além da curva normalizada e o valor final da curva, então as equações de ordem inteira são obsoletas para esta situação. Além disso, no caso de ordem fracionária, a fórmula do ponto de inflexão se transforma em uma função inversa de Mittag-Leffler com parâmetros negativos, que não podem realmente ser calculados; portanto, é necessária uma equação que permita o ajuste dos parâmetros por métodos numéricos.

Esta tese apresenta um novo método para identificação de ordem fracionária, inspirando-se na técnica de Sundaresan comumente empregada para identificação de ordem inteira. O foco aqui é apresentar resultados para identificação de sistemas de ordem fracionária com três termos ou sistemas de pseudo-segunda ordem. Uma contribuição chave deste trabalho reside na aplicação de uma técnica baseada em transientes para identificar sistemas oscilatórios e não oscilatórios. Embora a maioria dos métodos de identificação de parâmetros dependa de mínimos quadrados ou abordagens difusas, uma desvantagem é a falta de insights sobre a dinâmica do sistema fornecidos por esses parâmetros. A principal motivação por trás do método proposto nesta tese é que os parâmetros ajustados não apenas possuem significância, mas também abrem caminhos para estudos adicionais,

como explorar o método inverso de Mittag-Leffler com parâmetros negativos e abordar problemas de resposta transitória em sistemas de ordem fracionária, incluindo equações para sobressinal e delineamento de regiões de sistemas subamortecidos, amortecidos e sobreamortecidos. Conforme destacado em Kothari et al. (2019), atualmente não existe nenhum método meta-heurístico baseado em resposta transitória na literatura existente. O principal obstáculo associado à abordagem apresentada surge da compreensão restrita da função inversa de Mittag-Leffler, particularmente quando se trata de parâmetros negativos essenciais para cálculos de pontos de inflexão. Para enfrentar desafios relacionados aos pontos de inflexão e ao parâmetro m_1 , esta tese apresenta uma nova fórmula para ajustar os parâmetros do sistema. Esta fórmula utiliza parâmetros transitórios aproximados obtidos através de uma análise gráfica da curva de reação ao degrau.

Esta tese também aborda um problema consequente das limitações do método de identificação proposto para sistemas de ordem fracionária, na qual aborda dois parâmetros de resposta transitória importantes para previsão de desempenho de sistemas fracionários a três termos ou pseudo-segunda-ordem, tais parâmetros são o tempo de pico e sobressinal, motivo de estudo nos dias atuais.

Atualmente, os trabalhos merecem destaque no enfoque de parâmetros de resposta transitória de sistemas fracionários, um deles é a obra de Merrich Merrikh-Bayat and Karimi-Ghartemani (2008). Este aborda uma equação analítica para o tempo de acomodação para sistemas de ordem fracionária na qual o mesmo aborda uma dedução no plano complexo através do teorema do contorno no plano de Argand-Gauss, utilizando o teorema de Watson para integração em torno da origem, levando a uma solução analítica para o problema do tempo de assentamento. Outro autor fez uma importante contribuição para as condições de existência de sobressinal em sistemas fracionários. Tavazoei Tavazoei (2012), em sua pesquisa, apresenta as condições suficientes para a existência de sobressinal em resposta ao degrau de sistemas fracionários. Nesta pesquisa, o autor parte da definição clássica de pontos de máximo e de mínimos globais e o teorema do valor final, fazendo uma expansão em integral para as condições de existência de sobressinal.

A maioria das técnicas clássicas que envolvem sistemas de ordem fracionária lida com derivadas fracionárias dos sinais de entrada-saída; às vezes, lidar com essas derivadas pode ser difícil. Como mencionado, algumas técnicas empregam funções moduladoras para evitar trabalhar com essas derivadas, mas tais aproximações são tratadas com restrições

de ordem indesejada. A técnica presente também não usa derivadas em contraste com o fato de que não há restrições para o sistema de ordem, mas emprega análise gráfica e a curva de reação da resposta ao degrau para ajustar os parâmetros do modelo de ordem fracionária por três termos ou pseudo-segunda ordem. A técnica também aborda alguns problemas abertos na literatura, como as propriedades do produto e do quociente da função de Mittag-Leffler e o problema de sua inversa. A técnica presente funciona para diferentes valores para a faixa de ordem do sistema de $0 < \alpha \leq 1$, tornando-se uma técnica de Sundaresan generalizada.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Gerais

Objetivos gerais – Formalizar uma nova técnica de identificação de sistemas de ordem fracionária através da técnica de Sundaresan-krisnaswamy que será aplicada na modelagem de um sistema Tanque e de um Conversor de potência DC-DC abaixador de tensão (Buck).

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar o estudo da técnica de Sundaresan clássico e entender a essência e principais vantagens do método.
- Desenvolver um método de identificação de ordem fracionária utilizando uma entrada escalonada bem conhecida (Degrau), por meio de análise de reação de curva e parâmetros gráficos auxiliares.
- Realizar o estudo da técnica de Sundaresan para o caso fracionário.
- Formular uma equação de ajuste fino dos parâmetros do sistema de pseudo-segunda ordem que possibilitem a técnica de Sundaresan para o caso não inteiro.
- Desenvolver testes simulados para avaliação da eficácia da técnica nos diferentes tipos de sistemas dinâmicos como criticamente amortecido, subamortecido e oscilatório bem como a situação para o caso de ordem inteira.

- Avaliar o desempenho do novo método em sistemas reais com corrupção de sinal com presença de não-linearidades.
- Realizar testes de comparação com a técnica utilizando Mínimos Quadrados para fins de comparação de método e Avaliar funções custo ISE e MSE, de modo a verificar a robustez do novo método proposto.

1.4 Organização do Trabalho

O restante desta tese está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: Apresenta uma breve introdução, a justificativa e os objetivos: gerais e específicos;
- Capítulo 2: Apresenta o estado da arte acerca da modelagem de sistemas de ordem fracionária bem como as técnicas de identificação usadas atualmente;
- Capítulo 3: Apresenta a identificação de Sistemas de Ordem inteira baseada na técnica de Sundaresan bem como o uso da técnica dos Mínimos Quadrados para sistemas de ordem fracionária;
- Capítulo 4: Apresenta a identificação para o caso fracionário baseada na técnica de Sundaresan bem como a equação de ajuste fino dos parâmetros do sistema de ordem fracionária a três termos;
- Capítulo 5: Apresenta os testes da nova técnica desenvolvida para os vários casos de sistemas dinâmicos;
- Capítulo 6: Apresenta a utilização do método em um sistema tanque para verificação da eficácia do método com corrupção de sinal e presença de não-linearidades;
- Capítulo 7: Apresenta a utilização do método em um conversor de potência DC-DC Buck para avaliação da técnica em sistemas de resposta rápida ou altas frequências;
- Capítulo 8: Apresenta a discussão e a contribuição da tese com outros trabalhos semelhantes na literatura atual e no cenário de identificação de sistemas de ordem fracionária;

- Capítulo 9: Apresenta as considerações finais desta tese bem como as sugestões para pesquisas futuras;

Capítulo 2

Identificação de Sistemas de Ordem Inteira via Método de Sundaresan

O domínio da identificação do sistema tornou-se parte integrante da engenharia de controle e automação. No entanto, os engenheiros muitas vezes não têm uma compreensão abrangente de todos os fenômenos físicos dentro de um sistema real, tendo normalmente acesso apenas aos sinais de entrada e saída. Os métodos de identificação do sistema abordam esses desafios através da identificação de caixa preta, eliminando a necessidade de compreender todos os fenômenos internos do sistema para modelagem. Numerosas técnicas para resolver o problema de identificação da caixa preta podem ser encontradas na literatura. No entanto, uma compreensão completa do comportamento do sistema é essencial para selecionar a estrutura e o estimador ideais para identificar um modelo de sistema, envolvendo a análise de sinais de entrada/saída, segundo Ljung (1999). Neste capítulo são mostrados os conceitos básicos para o estudo de identificação de sistemas de ordem fracionária e também é feito um estudo breve sobre a técnica empregada por Sundaresan-Krisnaswamy em seu artigo sobre identificação de sistemas de segunda ordem inteira e sua generalização através do método proposto.

Uma grande parte dos sistemas reais pode ser representada por um modelo de função de transferência de segunda ordem descrito a seguir:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.1)$$

onde ω_n é a frequência natural e ζ é o coeficiente de amortecimento.

Na prática, a maioria dos sistemas é modelada no domínio do tempo; por esta razão, é necessário apresentar a Equação (2.1) no domínio do tempo. Em particular, a transformada inversa de Laplace em (2.1) com um sinal degrau com magnitude M é mostrada abaixo, de acordo com Sundaresan et al. (1978):

$$g(t) = M \left(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right] + \cos \left[\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right] \right) \right) \quad (2.2)$$

Restringindo nossa atenção ao modelo da forma (2.1), nosso objetivo é fornecer um procedimento simples e eficaz para estimar os parâmetros de nossa estrutura por meio de um sinal de entrada escalonado. O método é baseado na técnica de Sundaresan, que se baseia na análise de resposta transitória da curva. Primeiro, o procedimento começa calculando a área entre o sinal de saída normalizado e o valor unitário final dado por (2.3):

$$m_1 = \int_0^T (1 - g(t)) dt \quad (2.3)$$

ressaltando que qualquer área além do valor final 1 (curva normalizada) é computada como negativa. De acordo com Sundaresan et al. (1978), outra maneira de calcular m_1 é na sua forma diferencial fornecida abaixo:

$$m_1 = - \left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad (2.4)$$

expandindo a Equação (2.4) para o modelo da Equação (2.1), temos:

$$\frac{d}{ds} G(s) = \frac{d}{ds} \left[\omega_n^2 (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^{-1} \right] = \omega_n^2 \frac{d}{ds} [s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2]^{-1} \quad (2.5)$$

e então:

$$\frac{d}{ds} G(s) = -\omega_n^2 (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^{-2} (2s + 2\zeta\omega_n) = -2\omega_n^2 (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^{-2} (s + \zeta\omega_n) \quad (2.6)$$

aplicando $s = 0$, temos:

$$\left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0} = -2\omega_n^2 (\omega_n^2)^{-2} (\zeta\omega_n) = -2\zeta\omega_n^{-1} \quad (2.7)$$

aplicando a definição:

$$m_1 = -\left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0} = -(-2\zeta\omega_n^{-1}) = 2\zeta\omega_n^{-1} \quad (2.8)$$

então:

$$m_1 = \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad (2.9)$$

a Equação (2.9) funciona como um ajuste dos parâmetros para uma melhor precisão na identificação.

Outro parâmetro transitório calculado é o ponto de inflexão. Uma expressão para o ponto de inflexão avaliado é dada pela equação abaixo:

$$\frac{d^2g(t_i)}{dt_i^2} = 0 \quad (2.10)$$

avaliando a segunda derivada de $g(t)$ na forma da Equação (2.2), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}g(t) &= -\zeta^2\omega_n^2 e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t) \right] \\ &+ 2\zeta\omega_n e^{\zeta\omega_n t} \left[\frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_d t) + \omega_d \sin(\omega_d t) \right] \\ &+ e^{\zeta\omega_n t} \left[\frac{\zeta\omega_d^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_d t) + \omega_d^2 \sin(\omega_d t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

simplificando a Equação acima, com $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$, temos:

$$-\left[\frac{\zeta^3}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \zeta\sqrt{1-\zeta^2} \right] \sin(\omega_d t) + \cos \omega_d t = 0 \quad (2.12)$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) &= \cos(\omega_d t) \\ \tan(\omega_d t) &= \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \\ t_i &= \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

O parâmetro t_m avaliado a partir da reta tangente sobre t_i , onde t_m é o valor do domínio onde o valor da amplitude da reta tangente é igual a 1:

$$t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 + 1} \right] \quad (2.14)$$

um parâmetro auxiliar λ é calculado em função desses parâmetros transitórios, dados por:

$$\lambda = M_i(t_m - m_1) \quad (2.15)$$

onde M_i é o valor da derivada de $g(t)$ no ponto $t = t_i$.

Segundo Sundaresan et al. (1978), avaliando (2.15), a dedução é dada pela equação abaixo:

$$\lambda = \frac{\arccos(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\left(-\frac{\zeta \arccos(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (2.16)$$

$$\omega_n = \frac{\arccos(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{(t_m - m_1)} \quad (2.17)$$

através de (2.16) e (2.17) podemos ajustar os parâmetros de (2.1) e ajustar para melhor precisão dos parâmetros por (2.9).

2.1 Identificação de Sistemas de Ordem Fracionária baseado na técnica de Mínimos Quadrados

Estabelecido um conjunto de dados de saída e entrada $y(t)$ e $u(t)$ de intervalo $[t_{\text{initial}}, t_{\text{final}}]$ de uma função de transferência proporcional dada por :

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k s^{k\alpha}} \quad (2.18)$$

com uma ordem conhecida $\alpha > 0$ e ordens de numerador e denominador conhecidas m e n e $R(s)$ sendo o sinal de entrada, temos:

$$\begin{aligned} G(s) \left[1 + \sum_{k=1}^n a_k s^{k\alpha} \right] &= \sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha} R(s) \\ G(s) + G(s) \sum_{k=1}^n a_k s^{k\alpha} &= \sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha} R(s) \\ G(s) + \sum_{k=1}^n a_k s^{k\alpha} G(s) &= \sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha} R(s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

aplicando a transformada inversa de Laplace, temos:

$$\begin{aligned} y(t) + \sum_{k=1}^n a_{k_c} D_t^{k\alpha} y(t) &= \sum_{k=0}^m b_{k_c} D_t^{k\alpha} u(t) \\ y(t) &= \sum_{k=0}^m b_{k_c} D_t^{k\alpha} u(t) - \sum_{k=1}^n a_{k_c} D_t^{k\alpha} y(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

o modelo de saída $y(t)$ é:

$$y(t) = \sum_{k=0}^m b_{k_c} D_t^{k\alpha} u(t) - \sum_{k=1}^n a_{k_c} D_t^{k\alpha} y(t) \quad (2.21)$$

Quando o método dos *Minimos Quadrados* (MQ) é utilizado para estimar um sistema de ordem fracionária, o sinal $u(t)$ pode ser um degrau, rampa ou impulso; quando esses sinais são usados, o método dos MQ não necessita de aproximações numéricas. Por outro lado, o método dos MQ é empregado com persistência de sinal em $u(t)$, como SBPA. Quando um sinal desse tipo é utilizado, é necessário calcular os regressores dos MQ através de aproximações numéricas como em Valério and da Costa (2013).

Por definição, o vetor $\boldsymbol{\theta}$ de ordem $(m + n + 1) \times 1$ é mostrado abaixo:

$$\boldsymbol{\theta} = \left[b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \right]^T \quad (2.22)$$

e o vetor $\boldsymbol{\varphi}$ de ordem $1 \times (m + n + 1)$ com derivadas fracionárias do conjunto de dados de entrada e saída:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \left[u(t) \quad {}_c D_t^\alpha u(t) \quad {}_c D_t^{2\alpha} u(t) \quad \dots \quad {}_c D_t^{m\alpha} u(t) \quad -{}_c D_t^\alpha y(t) \quad -{}_c D_t^{2\alpha} y(t) \quad \dots \quad -{}_c D_t^{n\alpha} y(t) \right] \quad (2.23)$$

As derivadas usadas na identificação fracionária são calculadas abaixo, segundo Pang et al. (2018).

$$\left({}^C D_{a+}^\mu (z - a)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda(z - a)^\alpha) \right) (t) = (t - a)^{\beta-\mu-1} E_{\alpha,\beta-\mu}(\lambda(z - a)^\alpha) \quad (2.24)$$

para $[\mu, \alpha, \beta, \lambda] \in \mathbf{C}$ e $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ e $Re(\beta) \neq 1$

Em particular, para $\alpha = \mu$:

$$\left({}^C D_{a+}^{\mu} (z-a)^{\beta-1} E_{\mu,\beta}(\lambda(z-a)^{\mu})\right)(t) = (t-a)^{\beta-1} E_{\mu,\beta-\mu}(\lambda(z-a)^{\mu}) + \frac{(t-a)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)} \quad (2.25)$$

com tal definição, podemos escrever a Equação 2.21 como:

$$\tilde{y}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{\theta} \quad (2.26)$$

a equação acima é chamada de regressão linear. Uma vez que a entrada envolve apenas impulso, sinais de degrau e rampa, então φ pode ser calculado; caso contrário, sinais como SBPA precisarão ser calculados por aproximação numérica.

O erro envolvendo os sinais é:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = y(t) - \varphi(t)\boldsymbol{\theta} \quad (2.27)$$

para encontrar os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, precisamos minimizar a função de custo abaixo:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{t_{\text{final}}} \varepsilon^2(t) dt \quad (2.28)$$

uma vez que $u(t)$ e $y(t)$ são amostrados com um tempo de amostragem T_s , a quantidade de amostras será:

$$p = 1 + \left\lfloor \frac{t_{\text{final}}}{T_s} \right\rfloor \quad (2.29)$$

o vetor de erro $p \times 1$ neste caso será:

$$\mathbf{E} = \left[\varepsilon(0) \quad \varepsilon(T_s) \quad \varepsilon(2T_s) \quad \dots \quad \varepsilon(t_{\text{final}}) \right]^{\top} \quad (2.30)$$

expandindo, resulta:

$$\mathbf{E} = \left[y(0) \quad y(T_s) \quad y(2T_s) \quad \dots \quad y(t_{\text{final}}) \right]^{\top} - \left[\varphi^T(0) \quad \varphi^T(T_s) \quad \varphi^T(2T_s) \quad \dots \quad \varphi^T(t_{\text{final}}) \right]^{\top} \boldsymbol{\theta} \quad (2.31)$$

e então:

$$\mathbf{E} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\theta} \quad (2.32)$$

onde \mathbf{y} é um vetor $p \times 1$ e Φ é uma matriz $p \times (m + n + 1)$. Queremos minimizar:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}^T \mathbf{E} \quad (2.33)$$

A solução de mínimos quadrados é dada por:

$$\boldsymbol{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (2.34)$$

2.2 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo é apresentada a identificação de sistemas baseado no método de Sundaresan, bem como suas equações de sintonia dos parâmetros para sistemas de segunda ordem inteira e de como é feito o procedimento para que se atinja tais equacionamentos. Também é apresentado o método baseado na técnica de MQ para o caso fracionário, na qual é amplamente empregado, explicitando o desenvolvimento do cálculo das derivadas fracionárias empregadas nos sinais de saída e entrada. A avaliação do método clássico de Sundaresan e suas principais características são fundamentais para a apresentação do método generalizado de Sundaresan proposto por Campos et al. (2024) em seu artigo e apresentado no capítulo a seguir.

Capítulo 3

Estado da Arte

3.1 Pesquisas no Campo de Identificação de Sistemas de Ordem Fracionária no Brasil e no Mundo

Vários artigos recentes abordaram o problema de identificar sistemas de ordem fracionária. Em Zhou et al. (2013), as definições de CF são usadas em um algoritmo geral para identificação fracionária de sistemas não lineares e instáveis no domínio do tempo. Mesmo com a adição de perturbações, obter um ajuste ótimo de 99,62% de precisão com sinal de excitação *Sinal Binário Pseudo Aleatório* (SBPA) e *Sinal de Frequência Variável* (SFV) ainda é possível.

Em Victor et al. (2013a), modelos de ordem fracionária são identificados com base em estruturas de tempo contínuo com modelos de diferenciação fracionária. Uma versão adaptada do modelo simplificado de uma variável instrumental refinada é proposta para estimar os parâmetros do modelo fracionário quando todas as ordens de diferenciação são consideradas conhecidas. Desta forma, uma abordagem ótima é escolhida com base no estimador de variável instrumental desenvolvido.

Recentemente, um novo método de estimação de pseudo-estado de sistemas de ordem fracionária foi proposto em Wang et al. (2023a). O método utiliza uma função moduladora que fornece uma fórmula integral algébrica para estimar os valores iniciais do pseudo-estado com base na forma canônica observável de Brunovsky. Então, o pseudo-estado pode ser calculado apenas usando o valor inicial estimado. Por comparação, dois exemplos foram empregados, nos observadores do tipo Luenberger e H_∞ , para mostrar as vantagens

do método proposto.

Em Wang et al. (2023b), utiliza-se uma abordagem de método paramétrico algébrico para criar um estimador robusto e não assintótico para modelos de pseudo-estado de ordem fracionária. O artigo investiga um problema de estimativa de derivada para uma classe de sistemas lineares de ordem fracionária. O método utiliza uma série de multiplicações e derivações após usar a transformada de Laplace no modelo de representação do espaço de pseudo-estado para eliminar condições iniciais desconhecidas, chamadas de aniquiladores. Após isso, a derivação matemática rigorosa deduz uma equação integral de entrada-saída quando retorna ao domínio do tempo. A equação derivada leva a fórmulas integrais algébricas, que, utilizando fórmulas fracionárias de Leibniz, permitem a estimativa não assintótica e robusta das derivadas fracionárias da saída do sistema. Além disso, uma análise de erro é realizada para casos discretos ruidosos para avaliar o desempenho do diferenciador proposto. Simulações numéricas também são apresentadas para demonstrar a eficácia do método.

Em Zhang et al. (2024), este estudo propõe um método de controle ativo de vibração para sistemas de tubulação usando um controlador *Proporcional-Integrativo-Derivativo* (PID) de ordem fracionária. O objetivo é suprimir a vibração da tubulação e reduzir os danos, o que pode levar ao desgaste acelerado do equipamento e à redução da eficiência e segurança do trabalho. A pesquisa começa estabelecendo um modelo matemático do sistema de tubulação distribuído usando análise de elementos finitos, permitindo um estudo eficaz de suas características. O método de identificação de parâmetros de domínio de tempo-frequência é então empregado para realizar a identificação do sistema da função de transferência de vibração entre o freio e o sensor, com otimização adicional dos parâmetros da função de transferência usando o algoritmo de otimização de enxame de partículas para melhorar a precisão. Posteriormente, um controlador PID de ordem fracionária é projetado usando o método de decomposição D, com parâmetros de controlador ótimos determinados. Resultados de simulação experimental e numérica demonstram que o algoritmo de identificação do sistema aprimorado aumenta significativamente a precisão da modelagem. Além disso, o controlador PID de ordem fracionária projetado reduz efetivamente o overshoot do sistema, o tempo de oscilação e o tempo de ajuste, diminuindo assim a resposta de vibração dos sistemas de tubulação.

Em Wang et al. (2021), este aborda a estimação de parâmetros para um sistema de

resposta ao impulso finito não linear de ordem fracionária afetado por ruído colorido. Identificar simultaneamente a ordem e os parâmetros de tais sistemas sob perturbações de ruído colorido representa um desafio significativo. Para mitigar o problema da estimação de parâmetros redundantes, a forma de saída do sistema pode ser representada como uma combinação linear de parâmetros desconhecidos por meio da separação de termos-chave. Um algoritmo iterativo baseado na busca de gradiente negativo, denominado algoritmo iterativo baseado em gradiente do modelo auxiliar de separação de termos-chave, é desenvolvido para esse fim. Um algoritmo iterativo baseado em gradiente multi-inovação do modelo auxiliar de separação de termos-chave é proposto para melhorar a precisão da estimação, aproveitando a teoria da multi-inovação. Resultados de simulação são fornecidos para demonstrar a eficácia dos algoritmos propostos.

Em Yu et al. (2022), algoritmos de identificação tradicionais para sistemas de ordem fracionária geralmente exigem informações precisas sobre as derivadas da função objetivo e os valores iniciais dos parâmetros, o que pode ser desafiador de obter em aplicações práticas. Para solucionar isso, o algoritmo de *Evolução Diferencial* (ED), conhecido por sua implementação simples e desempenho superior na resolução de problemas de otimização complexos multidimensionais é adequado para identificar sistemas de ordem fracionária. Um método aperfeiçoado chamado *Evolução Diferencial Aprimorada* (EDA) para identificação de sistemas de ordem fracionária é proposto para melhorar a precisão da solução e a velocidade de convergência. O algoritmo EDA incorpora a estratégia de movimento do *Algoritmo Predador Marinho* (APM) e a estratégia de mutação de seleção aleatória de um indivíduo da população ótima como vetor base. As informações de parâmetros de indivíduos mutados com sucesso são arquivadas durante o processo de iteração. O desempenho de precisão do algoritmo EDA proposto é verificado testando 13 conjuntos de funções unimodais e multimodais com algoritmos de otimização de alto desempenho. Além disso, o algoritmo EDA é aplicado para identificar os parâmetros de um sistema de ordem fracionária de um motor síncrono de ímã permanente por meio de simulação e experimentação, demonstrando a eficácia da metodologia proposta.

Em Ziubinski and Sierociuk (2015) é proposto um método para identificação paramétrica de perturbações coloridas de ordem fracionária. Perturbações coloridas são aquelas em que existe uma correlação dinâmica e não apenas um sinal aleatório. A técnica utiliza filtros de Kalman de ordem fracionária para sistemas de ordem fracionária com perturba-

ções estocásticas.

Em Caponetto et al. (2016) é apresentado um modelo de ordem fracionária para um sistema de aquecimento. Primeiro, é apresentado um procedimento de identificação em duas etapas. Um algoritmo de otimização multiobjetivo (Nelder-Mead simplex) é usado para identificar os parâmetros do modelo, ajustando a resposta em frequência (módulo e fase). Para este propósito, uma função objetivo que consiste na soma de dois termos, o módulo e os erros de fase, é minimizada.

Em Yusof et al. (2015) é apresentada a identificação de um sistema eletro-hidráulico por um modelo de ordem proporcional fracionária. Para este efeito, o algoritmo de Levenberg-Marquardt é usado para minimizar o custo associado ao erro entre os dados observados e previstos. As definições de Grunwald-Letnikov também são usadas para definir o modelo de ordem fracionária no algoritmo do solucionador.

Outras técnicas envolvendo redes neurais são utilizadas no estudo de sistemas caóticos, como em Coronel-Escamilla et al. (2022), onde a dinâmica de uma rede neural caótica é estudada utilizando a topologia de Hopfield, utilizando operadores fracionários comensuráveis e derivadas de ordem não inteira. O artigo apresenta um estudo comparativo entre diferentes configurações, usando derivadas inteiras e não inteiras separadamente e, em seguida, ambas com operadores conformes. Em seguida, uma ordem de variável fracionária no operador derivado é usada para comparar com uma ordem constante. Conclui-se que, quando a ordem do operador comensurável diminui, um atrator é gerado, e quando a ordem da derivada fracionária diminui, o sistema perde suas propriedades dinâmicas. Porém, quando mudamos o operador para ordem de variável fracionária, o sistema não perde sua dinâmica, mas ganha um comportamento mais caótico, sugerindo que o sistema é sensível às condições iniciais da ordem fracionária-variável, função de ordem variável e seu ponto de partida. Após os estudos comportamentais, os autores propuseram uma sincronização mestre-escravo completa usando a abordagem comensurável fracionada. Para esta tarefa, um controlador é projetado para obter ganhos ótimos usando o algoritmo de busca Cuckoo. Um trabalho semelhante desenvolvido por Viera-Martin et al. (2022a) utiliza a função de transferência tangente hiperbólica generalizada pela função Mittag-Leffler com ordem constante e variável para estudar a dinâmica não inteira da rede neural de Hopfield. O artigo apresenta resultados numéricos voltados ao controle para obtenção de novas dinâmicas caóticas de sistemas de ordem variável não inteira, essenciais para o

desenvolvimento de protocolos de comunicação segura, novos geradores de números aleatórios, sistemas de criptografia de imagens, etc. Em Viera-Martin et al. (2022b), *Rede Neural Artificial* (RNA) são estudadas usando cálculo fracionário e uma teoria é desenvolvida para resumir as principais características e aplicações em RNAs que possibilitaram projetar as duas técnicas estudadas em Coronel-Escamilla et al. (2022) e Viera-Martin et al. (2022a).

Técnicas baseadas em algoritmos metaheurísticos também têm sido utilizadas na identificação de ordem fracionária, como busca cuco em Kumar and Rawat (2015), ED Tang et al. (2012), Switching ED Zhu et al. (2012), ED composto Du et al. (2017) Du et al. (2018), enxame de partículas Mansouri et al. (2008) Gupta et al. (2014), colônia de abelhas Hu et al. (2018), vaga-lume Mousavi and Alfi (2018) e *Algoritmo Genético* (AG) Othman and Alsabawi (2013) Hao et al. (2015).

Uma revisão sistemática feita por Kothari et al. (2019) mostra um pouco do cenário da identificação de sistemas de ordem não inteira na tabela abaixo:

Tabela 3.1: Análise qualitativa baseada no estudo de Kothari et al. (2019)

Técnica	Subclasse	Vantagens	Desvantagens
Método da Matriz Operacional	<ul style="list-style-type: none"> - Funções de pulso em bloco Tang et al. (2015, 2012) - Ondas de Haar Li et al. (2015); Kothari et al. (2018a); Kothari (2024) - Funções de Walsh Kothari et al. (2018b) - Polinômios de Chebyshev Bhrawy and Alofi (2013) - Base de Legendre Ghanbari and Haeri (2010) - Regressão Kernel Li and Rosenfeld (2022) - Entropia de dispersão fracionária multivariada Zhang et al. (2021) - Função de matriz diferencial Ayazi et al. (2024); Ángela Sebastián Bargas et al. (2023) 	<ul style="list-style-type: none"> Abordagem algébrica, Menor complexidade, Estimação simultânea de todos os parâmetros, Estimação de atraso de tempo 	<ul style="list-style-type: none"> A estrutura da função de transferência deve ser conhecida
Método do Filtro de Variável de Estado baseado em Mínimos Quadrados	<ul style="list-style-type: none"> - Variável instrumental (IV) Cois et al. (2001) - IV com filtro linear A. Narang (2011) - IV refinado simplificado Malti et al. (2008); Victor et al. (2013b) - Otimização de ordem comensurável IV refinado (coosrivel) Victor et al. (2009) - Erro em variáveis Chetoui et al. (2012) - Correção de viés Yakoub et al. (2015) 	<ul style="list-style-type: none"> Estimação de atraso de tempo, Método recursivo 	<ul style="list-style-type: none"> Desenvolvido para modelos comensuráveis, Requer conhecimento prévio sobre a ordem fracionária desconhecida
Método de Realimentação por Relé	<ul style="list-style-type: none"> - Método no domínio da frequência Li and Chen (2014) - Método no domínio do tempo 	<ul style="list-style-type: none"> Estimação de atraso de tempo, Estimação rápida de parâmetros 	<ul style="list-style-type: none"> Alto erro de identificação
Método da Resposta ao Degrau	<ul style="list-style-type: none"> - Resposta ao degrau - Equação integral Ahmed (2015); Tavakoli-Kakhki et al. (2013); Tavakoli-Kakhki and Tavazoei (2014) - Resposta ao degrau em forma de S Tavakoli-Kakhki et al. (2010); Malek et al. (2013) 	<ul style="list-style-type: none"> Estimação de atraso de tempo, Cálculo direto de parâmetros 	<ul style="list-style-type: none"> Requer conhecimento prévio
Algoritmos Meta-Heurísticos	<ul style="list-style-type: none"> - Busca do Cuco Kumar and Rawat (2015) - Evolução diferencial (DE) Tang et al. (2012); Mehmood and Raja (2022) - DE com chaveamento Zhu et al. (2012) - Enxame de partículas Mansouri et al. (2008); Gupta et al. (2014) - Algoritmo Genético Othman and Alsabawi (2013); Hao et al. (2015) - Método de decomposição de Adomian He et al. (2022) - Resposta transitória 	<ul style="list-style-type: none"> Otimização determinística eficiente, Nenhum conhecimento prévio necessário, Convergência rápida 	<ul style="list-style-type: none"> Às vezes converge para mínimos locais, Efeitos adversos do ruído
Método de Resposta em Frequência	<ul style="list-style-type: none"> - Mínimos quadrados Adigintla et al. (2023) - Resposta ao impulso - Método de Levy Valério and Tejado (2015) - Conjunto de membresia Malti et al. (2008) 	<ul style="list-style-type: none"> Estimação de atraso de tempo, Nenhum conhecimento prévio 	<ul style="list-style-type: none"> Desenvolvido para modelos comensuráveis
Rede Neural	<ul style="list-style-type: none"> Rede Neural Hamdi et al. (2018) 	<ul style="list-style-type: none"> Arquitetura simples, Solução universal 	<ul style="list-style-type: none"> Natureza de caixa preta, Pode fornecer resultados errados sem razão aparente

Observa-se a existência de duas lacunas nos campos relacionados à identificação de ordem fracionária. A primeira foi parcialmente preenchida pelo estudo de Gude et al. (2023), que será discutido em detalhes posteriormente. A segunda lacuna refere-se à

aplicação de técnicas baseadas em resposta transitória no contexto dos Algoritmos Meta-Heurísticos. Esses algoritmos destacam-se, sobretudo, pela eficiência na otimização e pela rápida convergência. Diante desse cenário, esta tese tem como objetivo contribuir para o preenchimento dessa lacuna na literatura, apresentando as principais vantagens e implicações decorrentes dessa abordagem.

3.2 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo, foram discutidas as principais técnicas atualmente utilizadas na literatura para a identificação de sistemas dinâmicos de ordem fracionária. Observou-se que o método dos Mínimos Quadrados é amplamente empregado para a calibração de métodos paramétricos. Além disso, destaca-se o uso de Funções de Modulação para aproximação de funções complexas, como a função de Mittag-Leffler, a representações matemáticas menos complexas. No entanto, essas aproximações apresentam restrições específicas nos parâmetros utilizados, especialmente no contexto dos algoritmos Meta-Heurísticos, resultando em efeitos indesejáveis que comprometem, em certa medida, a robustez do método empregado.

Capítulo 4

Identificação de Sistemas de Ordem Fracionária Baseada na Técnica de Sundaresan

Esta secção apresenta os conceitos cruciais para a formulação da identificação de sistemas de ordem fracionária baseada na técnica de Sundaresan. A forma de ordem fracionária da Equação (2.1) é mostrada abaixo por (4.1).

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^{2\alpha} + 2\zeta\omega_n s^\alpha + \omega_n^2} \quad (4.1)$$

a resposta no domínio do tempo à entrada ao degrau de magnitude M da Equação (4.1) é mostrada abaixo para $0 < \alpha < 1$, de acordo com Merrikh-Bayat and Karimi-Ghartemani (2008):

$$g(t) = M \left(1 + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(- \left(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) t^\alpha \right) \right) \\ - M \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(- \left(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) t^\alpha \right) \right) \quad (4.2)$$

para $0 < \zeta < 1$ e a função $E_{\alpha, \beta}(z)$ é a função Mittag-Leffler a dois parâmetros, definição apresentada abaixo em (4.3), conforme Gorenflo et al. (2014).

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (4.3)$$

onde $\Gamma(z)$ é a função gama, definida por Valério and da Costa (2013) como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy \quad (4.4)$$

A função de Mittag-Leffler possui propriedades importantes ao se discutir sistemas dinâmicos. De acordo com Gorenflo et al. (2014), elas são:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) \quad (4.5)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1} + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z) \quad (4.6)$$

A fórmula do diferencial é uma consequência da definição da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros:

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^m [z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)] = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha) \quad (4.7)$$

para $m \geq 1$.

O problema de identificação de ordem fracionária começa quando calculamos o parâmetro m_1 na forma (2.4) avaliado abaixo:

$$\frac{dG(s)}{ds} = - \frac{\omega_n^2 (2\alpha s^{2\alpha-1} + 2\zeta\omega_n \alpha s^{\alpha-1})}{(s^{2\alpha} + 2\zeta\omega_n s^\alpha + \omega_n^2)^2} \quad (4.8)$$

a Equação (4.8) não converge para $s = 0$, para $0 < \alpha < 1$.

Outra forma é necessária para computar m_1 que possibilite a avaliação de λ com os valores de t_m e M_i na forma da equação (2.15).

4.1 Fórmula de Avaliação de λ em função dos parâmetros do sistema

Outra forma é necessária para possibilitar a avaliação de λ , aqui há duas possibilidades:

1. Considerar uma função Ψ tal que possibilitasse o calculo de λ através da equação abaixo:

$$\lambda = (t_m - m_1)M_i \approx t_m M_i + \Psi \quad (4.9)$$

aqui há algumas pertinências a serem consideradas:

- Modelar a função Ψ através de aproximações a funções simples com restrições nos valores dos parâmetros ou:
- Considerar Ψ como uma função parametrizada de resíduo da aproximação da Equação (4.9).

A solução por função parametrizada de resíduo é mais complexa de ser aplicada, porém, tem a vantagem de não trabalhar com restrições de parâmetros, o que é um efeito desejável.

2. Outra possibilidade foi avaliada, diferente da primeira opção, é considerar um parâmetro de calibre que consiste na mudança de sentido do parâmetro m_1 que era impossível de ser calculado, m_1 agora será um parâmetro de calibre para que a aproximação abaixo seja verdadeira:

$$\begin{aligned}\lambda &= (t_m - m_1)M_i \\ \lambda &\approx t_m M_i\end{aligned}\tag{4.10}$$

Aqui, a Equação (4.10) não deve ser interpretada como uma aproximação em torno de $m_1 = 0$, pois a essência da equação $\lambda = (t_m - m_1)M_i$ é uma comparação de áreas para que o fit das curvas coincida com a solução de mínimo global na equação de aproximação.

Por tal motivo, λ será desenvolvido através da aproximação:

$$\lambda \approx t_m M_i\tag{4.11}$$

4.2 Formulação da Equação da Identificação

Para calcular t_m e M_i primeiro precisamos calcular t_i . Expandindo a segunda derivada na forma de ordem fracionária de $g(t)$ em (4.2), o ponto de inflexão é dado por:

$$\frac{d^2 g(t_i)}{dt_i^2} = 0\tag{4.12}$$

analisando a equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2g(t)}{dt^2} &= \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{\alpha-3} E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{\alpha-3} E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

aplicando a definição do ponto de inflexão na Equação (4.13), temos:

$$\begin{aligned} &\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{\alpha-3} E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right) \\ &- \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{\alpha-3} E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

simplificando a equação acima, temos:

$$\begin{aligned} &(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right) \\ &= (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

e então:

$$\frac{E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right)}{E_{\alpha, \alpha-2} \left(-\omega_n t^\alpha \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right)} = \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad (4.16)$$

utilizando a hipótese de que:

$$E_{\alpha, \beta}(z_1) \cdot E_{\alpha, \beta}(z_2) \approx \gamma_p(\alpha, \beta) E_{\alpha, \beta}(z_1 + z_2) + \varepsilon \quad (4.17)$$

$$\frac{E_{\alpha, \beta}(z_1)}{E_{\alpha, \beta}(z_2)} \approx \gamma_q(\alpha, \beta) E_{\alpha, \beta}(z_1 - z_2) + \varepsilon \quad (4.18)$$

onde ε é o erro associado com a aproximação e $\gamma(\alpha, \beta)$ é um fator proporcional.

O lado direito da equação pode ser simplificado multiplicando o numerador e o denominador por $(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$, e a diferença pode simplificar o lado esquerdo nos argumentos dentro do parêntese. Assim, temos:

$$\gamma_q E_{\alpha, \alpha-2} \left(2\omega_n t^\alpha \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^2 \quad (4.19)$$

Aplicando a inversa da função de Mittag-Leffler em ambos os lados da equação, temos:

$$2\omega_n t^\alpha \sqrt{\zeta^2 - 1} = I_{\alpha, \alpha-2} \left[\frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2}{\gamma_q} \right] \quad (4.20)$$

portanto:

$$t_i \approx \left[\frac{1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} I_{\alpha, \alpha-2} \left[\frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2}{\gamma_q} \right] \right]^{\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon \quad (4.21)$$

onde $I_{\alpha, \beta}(z)$ é a função inversa de Mittag-Leffler e ε é o erro de aproximação.

A primeira tentativa de calcular a inversa da função de Mittag-Leffler foi feita por Hanneken and Narahari Achar (2014); em seu artigo, ele utiliza o teorema da inversa de Legendre para avaliar os coeficientes e transformá-los em uma série de potências finita. Tal metodologia é restrita à região de $0 < \alpha < 0.5$ e $\beta = [1, 2]$. Uma contribuição importante apareceu no trabalho de Sarumi et al. (2020), que utilizou aproximações globais de Padé para representar a função de Mittag-Leffler como uma função racional polinomial e calcular sua inversa. O método apresentou um bom desempenho e uma precisão superior em comparação com outros métodos, com uma região restrita de $0 < \alpha \leq 1$ e $\beta \geq \alpha$.

Contudo, a avaliação da inversa de Mittag-Leffler para parâmetros negativos $\beta < 0$ e $\beta < \alpha$ ainda é um assunto em aberto na literatura, por este motivo, os parâmetros M_i e t_m **serão explicitadas em função do parâmetro t_i , que será um parâmetro gráfico auxiliar.**

O parâmetro M_i é calculado pela seguinte definição:

$$M_i = \frac{df(t_i)}{dt_i} \quad (4.22)$$

sendo $f(\cdot)$ a função da reta tangente na qual para este caso no ponto de inflexão, temos $f(t_i) = g(t_i)$. Avaliando a Equação (4.22) resulta:

$$M_i = t_i^{\alpha-2} \left[E_{\alpha, \alpha-1}(\varphi) - \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^2 E_{\alpha, \alpha-1}(\theta) \right] \quad (4.23)$$

Para calcular o parâmetro t_m , é necessário estudar a equação da reta tangente abaixo:

$$\frac{df(t_i)}{dt_i} = \frac{f(t_m) - f(t_i)}{t_m - t_i} \quad (4.24)$$

onde $f(t_m) = 1$ por definição, e $M_i = \frac{df(t_i)}{dt_i}$, t_m está explícito abaixo:

$$t_m = t_i + \frac{1 - g(t_i)}{M_i} \quad (4.25)$$

então, avaliando a Equação 4.25, t_m fica explícito abaixo:

$$t_m = \mu(\varphi, \theta)t_i \quad (4.26)$$

onde:

$$\mu(\varphi, \theta) = \left[1 - \frac{E_{\alpha, \alpha}(\varphi) - (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 E_{\alpha, \alpha}(\theta)}{E_{\alpha, \alpha-1}(\varphi) - (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 E_{\alpha, \alpha-1}(\theta)} \right] \quad (4.27)$$

$$\varphi = -\omega_n t_i^\alpha \left(\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (4.28)$$

$$\theta = -\omega_n t_i^\alpha \left(\zeta - \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (4.29)$$

Com M_i e t_m , o parâmetro λ pode ser avaliado através da forma de aproximação em 4.11.

Devido ao conhecimento restrito da função inversa de Mittag-Leffler, calcular o ponto de inflexão é impossível porque, para $-2 < \beta < -1$ e $0 < \alpha < 1$, a função inversa de Mittag-Leffler não converge. A região de convergência, na verdade, é para $\{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha \leq 1, \beta \geq \alpha, (\alpha, \beta) \neq (1, 1)\}$, de acordo com Sarumi et al. (2020). Assim, a Equação 4.11 é expandido e apresentado abaixo:

$$\lambda - t_i^{\alpha-1} \left[E_{\alpha, \alpha-1}(\varphi) - E_{\alpha, \alpha}(\varphi) + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^2 (E_{\alpha, \alpha}(\theta) - E_{\alpha, \alpha-1}(\theta)) \right] = 0 \quad (4.30)$$

ou:

$$(t_m - m_1)M_i - t_i^{\alpha-1} \left[E_{\alpha, \alpha-1}(\varphi) - E_{\alpha, \alpha}(\varphi) + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^2 (E_{\alpha, \alpha}(\theta) - E_{\alpha, \alpha-1}(\theta)) \right] = 0 \quad (4.31)$$

onde m_1 é um parâmetro de calibre.

A equação denotada como (4.30) representa os valores dos parâmetros de ajuste $[\alpha, \zeta, \omega]$ essenciais para permitir a extensão da técnica convencional de Sundaresan. Esta transformação confere ao método proposto as características de uma técnica generalizada de Sundaresan.

A solução para ω_n na equação (4.30) pode ser obtida usando qualquer método numé-

rico, como o método de Bolzano em Bolzano (1980) ou o método de Newton-Raphson em Garrett (2015) usando valores para $[\alpha, \zeta, \lambda]$.

4.3 Algoritmo para Utilização do Método Proposto

Para melhor compreensão do método, ele pode ser resumido como:

- Passo 1: Normalize a curva de forma que seu valor final seja 1.
- Passo 2: Escolha t_i, t_m tal que se aproxime da linha tangente sob o ponto de inflexão da curva como nas figuras 4.2 e 4.3
- Passo 3: Escolha m_1 compatível com a área além da curva como valor inicial e calcule $\lambda = (t_m - m_1)M_i$, e procure por valores de $[\alpha, \zeta]$ que se aproxima do ajuste de erro mínimo, usando a eq.(4.30) e encontre a solução para ω_n usando o teorema de Bolzano ou outro método numérico.
- Passo 4: Varie o valor de m_1 em valores pequenos para uma melhor aproximação e repita o passo 3.
- Passo 5: Caso o erro seja ainda maior após os passos 3 e 4, varie os valores t_i, M_i e t_m para uma melhor precisão e repita o Passo 3 e 4 até que os valores ideais sejam alcançados.

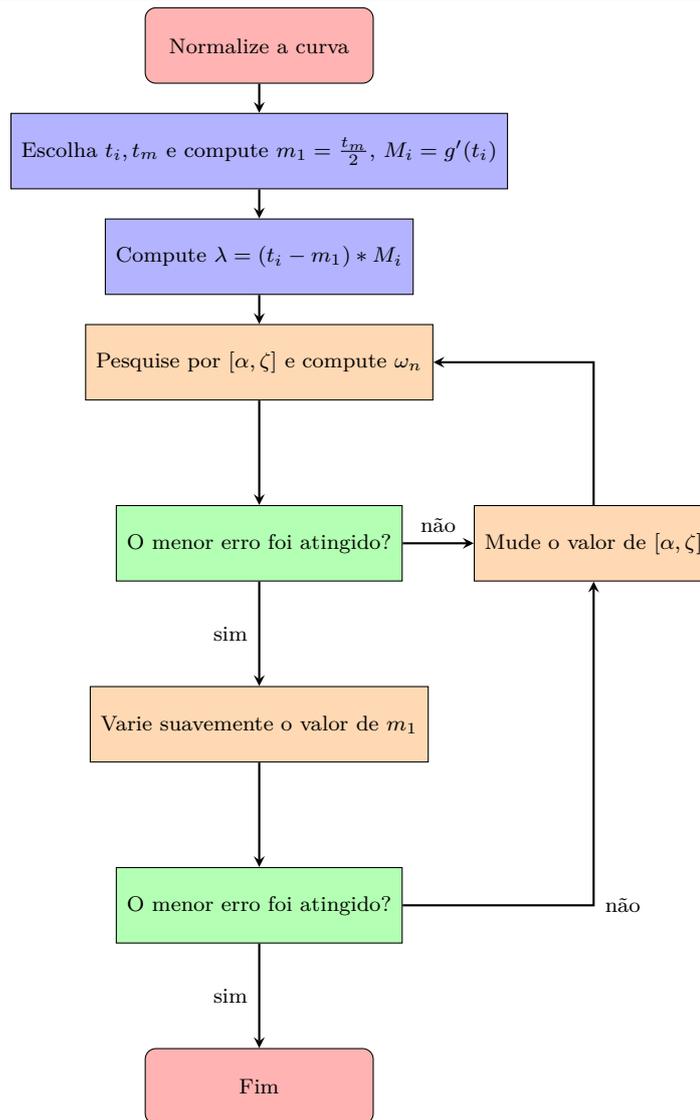


Figura 4.1: Fluxograma do algoritmo proposto

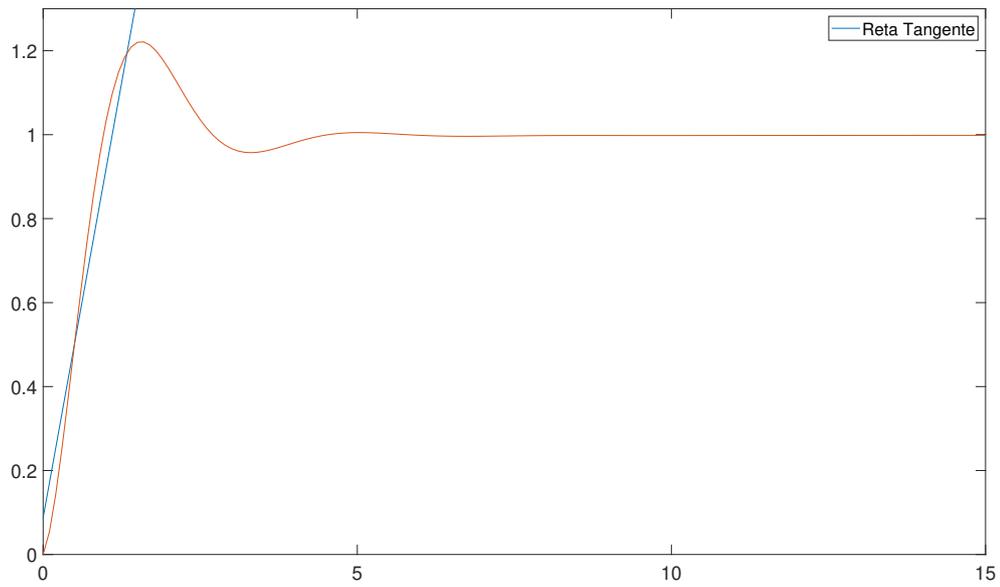


Figura 4.2: Exemplo de uma má aproximação da reta tangente

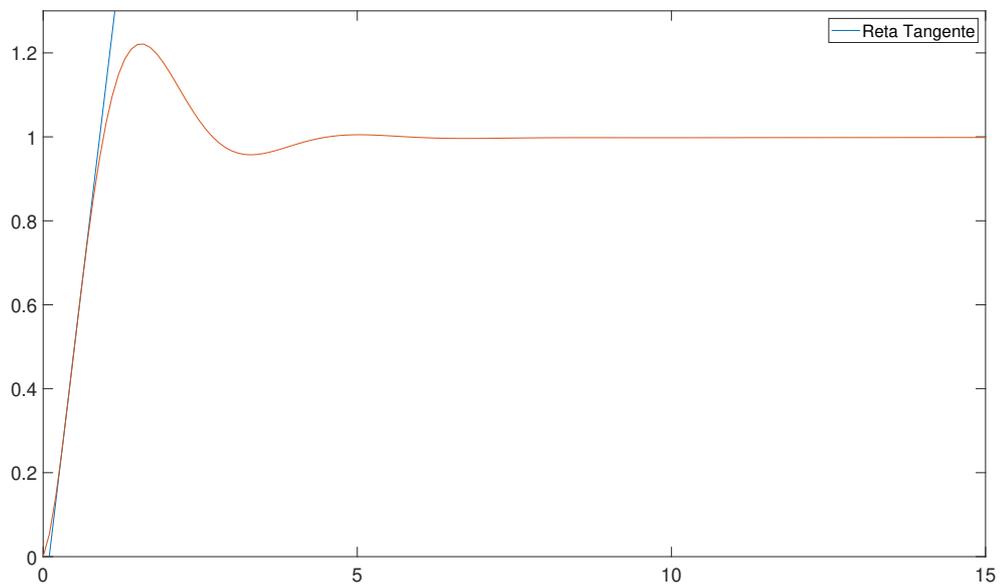


Figura 4.3: Exemplo de uma boa aproximação da reta tangente

4.4 Questões de Convergência do Método Proposto

O principal desafio associado ao caso de ordem fracionária é a utilização de valores aproximados de pontos de inflexão, decorrentes das limitações matemáticas da função

inversa de Mittag-Leffler. Em certos casos, os valores iniciais para $[\alpha, \zeta]$ podem não convergir para certos valores inicialmente escolhidos de m_1 , necessitando da seleção de valores alternativos para m_1 até que a convergência seja alcançada.

Atentando para a Equação (2.15), a técnica clássica de Sundaresan, o parâmetro m_1 governa um coeficiente importante na dedução dessa Equação; além disso, possibilita a aproximação do parâmetro ω_n por meio da Equação (2.9). O problema de generalizá-lo para os casos fracionários é que m_1 não pode ser deduzido, pois a Equação (4.8) não converge para $0 < \alpha < 1$. Devido a essa limitação, uma aproximação precisa ser feita, e então a Equação (4.11) surge como a solução para a não convergência da derivada na Equação (4.8). Assim, a equação permanece:

$$f(\alpha, \zeta, \omega_n) = t_i^{\alpha-1} \left[E_{\alpha, \alpha-1}(\varphi) - E_{\alpha, \alpha}(\varphi) + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^2 (E_{\alpha, \alpha}(\theta) - E_{\alpha, \alpha-1}(\theta)) \right] \quad (4.32)$$

e para que a aproximação seja possível, é necessário mudar o sentido de m_1 para um parâmetro de calibre.

O valor inicial de m_1 no método proposto pode ser a área além da curva tangente (geralmente um triângulo retângulo), e o valor final (unitário); como a curva está normalizada, a fórmula para o valor inicial é mostrada na equação a seguir:

$$m_{1o} = \frac{t_m}{2} \quad (4.33)$$

Os parâmetros t_i e t_m devem ser selecionados de acordo com o exemplo da linha tangente nas Figuras 4.2 e 4.3. Uma má escolha desses parâmetros resultará em uma aproximação ruim da linha tangente, conforme mostrado na Figura 4.2, enquanto uma boa aproximação resultará em uma linha tangente semelhante à da Figura 4.3.

Com esses parâmetros bem escolhidos, o projetista pode definir a escolha inicial de $[\alpha, \zeta]$ e a fórmula de aproximação na Equação (4.31) fornecerá um valor para ω_n . Em seguida, o projetista deve alterar, em pequenas quantidades, o valor real de m_1 inicialmente escolhido para melhorar a precisão do valor de ω_n . O projetista pode encontrar o valor ótimo de m_1 comparando o erro do ajuste da curva; se o erro diminuir com a variação de m_1 , continue até que ele pare de diminuir.

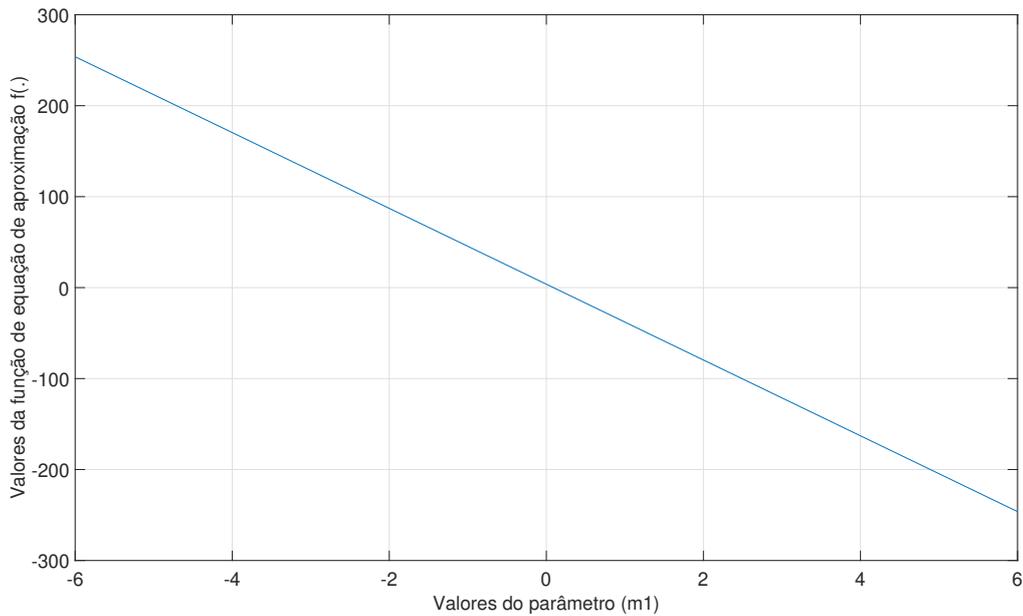


Figura 4.4: Valores de m_1 para um dado valor fixo de $[\alpha, \zeta, \omega_n, t_i, t_m, M_i]$

Vale ressaltar que, avaliando a Figura 4.4, existe somente um valor de m_1 que minimiza a equação (4.31). Analisando o comportamento da variação deste parâmetro dentro da equação de sintonia dos parâmetros no método proposto, este tem um comportamento de um coeficiente linear da equação de sintonia. Uma região para valores de m_1 na qual minimiza a função (4.31), dentre todos os testes feitos até a data desta tese, está no intervalo $[0, 2t_m]$.

4.5 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo é apresentado o método generalizado de Sundaresan para o caso de sistemas de ordem fracionária. É avaliado o procedimento para o equacionamento do caso fracionário bem como suas propriedades e o algoritmo para detalhamento da aplicação do método proposto para identificação de sistemas. É discutido os problemas de convergência da equação de sintonia e a solução para o valor inicial de m_1 para garantir a convergência para os valores na região de $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \zeta < 1$. O algoritmo explicita o passo a passo para a utilização do método proposto para identificar sistemas de ordem fracionária a três termos nas regiões de ordem e coeficiente de amortecimento. É discutido o parâmetro de calibre m_1 para que a equação de aproximação seja verdadeira. Portanto, o parâmetro de calibre m_1 tem propriedades de ser único para minimizar a função $f(.)$ e de coeficiente

linear na equação de sintonia dos parâmetros do método proposto. No próximo capítulo é apresentada as aplicações em ambiente simulado empregando o software de simulação numérica MATLAB para comprovação da robustez do método proposto.

Capítulo 5

Exemplos Ilustrativos

Nesta seção, alguns exemplos ilustrativos são dados para ilustrar a eficiência do método de identificação proposto. Os seguintes resultados foram obtidos com base no MATLAB¹. Para fins de comparação, o método dos MQ para identificação de ordem fracionária apresentado em Valério and da Costa (2013) também é empregado com um sinal de entrada SBPA. Aos sinais de entrada e saída são adicionados ruído branco (média igual a zero e variância igual a 1). Os dados dos exemplos deste Capítulo foram gerados através do software MATLAB segundo a função de transferência de ordem fracionária a três termos, para verificação da eficácia do método proposto.

5.1 Sistema de ordem fracionária subamortecido

Exemplo 1. Na ilustração inicial, observamos uma curva na Figura 5.1, representando a resposta ao degrau unitário de um sistema subamortecido no domínio do tempo. O sinal de saída normalizado é determinado usando a Equação (4.2). Para seguir o procedimento descrito na seção anterior, o primeiro passo envolve normalizar a curva; como o valor final é um, a etapa de normalização é desnecessária. Posteriormente, procedemos à escolha dos valores de t_i , t_m e M_i , que, neste caso, assumem os seguintes valores: $t_i = 1,17 \text{ s}$, $t_m = 2,2 \text{ s}$, $M_i = 0,4954 \text{ s}^{-1}$.

A próxima etapa é selecionar um valor adequado para m_1 que se alinhe ao tamanho do domínio; aqui, inicializamos com $m_1 = 1,1$, metade do valor de t_m , como descrito no

¹Para simular sistemas de ordem fracionária no MATLAB é necessário um complemento encontrado em <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/66323-fomcon-toolbox-for-matlab>, desenvolvido por Tepljakov et al. (2019)

algoritmo. Ao aplicar esses valores à Equação (4.31), é iniciada a busca heurística na região de $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \zeta < 1$ e um valor de convergência para ω_n é computado através de uma busca heurística utilizando o teorema de Bolzano. Logo após, é feito um ajuste no valor de m_1 , seguindo a etapa 4 da seção anterior, resultando em um ajuste de calibre com $m_1 = 2.999$ s. Iterando pelas etapas 2 e 3, um valor de erro mínimo é determinado e as figuras 5.1 e 5.3 são geradas.

Apesar de tentar valores diferentes para t_i e t_m , não foram encontrados valores ótimos que produzissem um erro inferior ao erro obtido anteriormente. Os resultados de identificação são os seguintes: $\alpha = 0,85$, $\zeta = 0,4$, $\omega_n = 0,9993$, rad/s. Os valores estimados são mostrados na tabela 5.2.

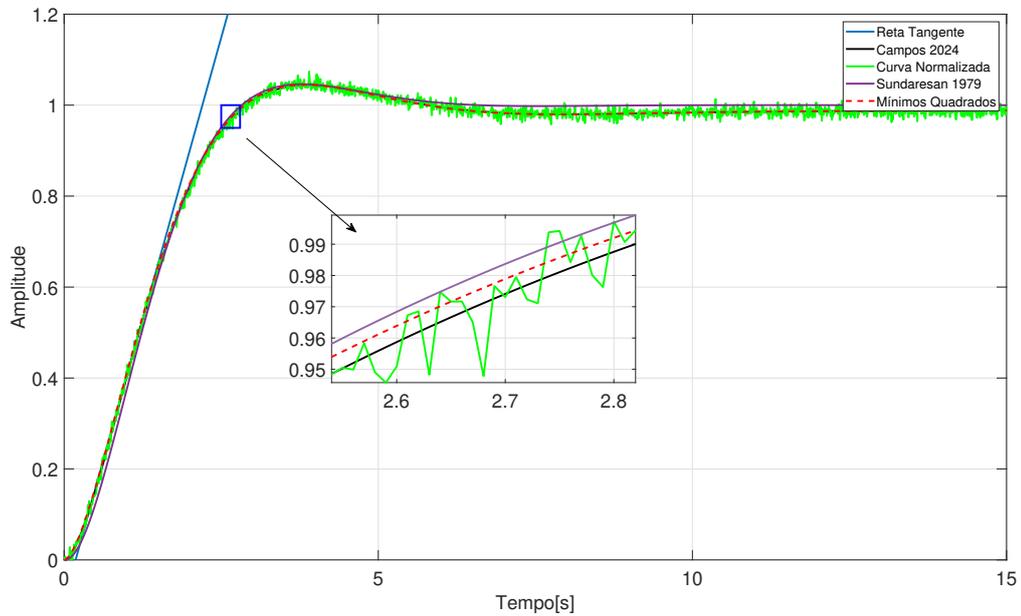


Figura 5.1: Curva aproximada usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado

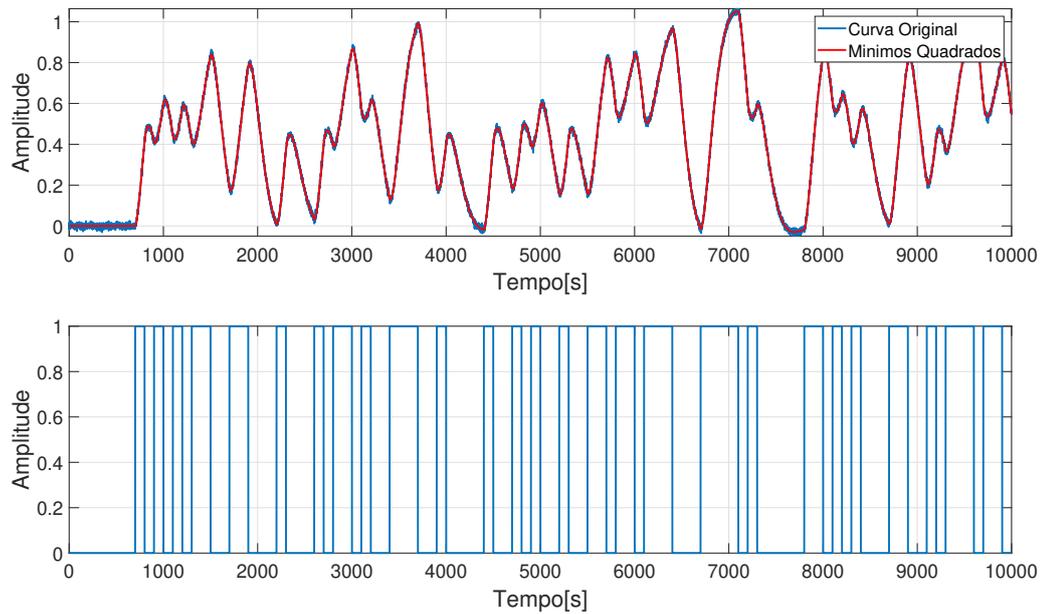


Figura 5.2: Resultados de identificação de ordem fracionária usando a técnica de mínimos quadrados por um sinal de entrada SBPA corrompido por ruído branco

Observando a Figura 5.1, podemos avaliar a eficácia da identificação de ordem fracionária usando a técnica dos Mínimos Quadrados. Este método necessita de um sinal de entrada característico que transmita respostas distintas de magnitude e frequência ao sistema real ao longo do tempo. Por isso, uma compreensão mais abrangente do sistema pode ser obtida explorando comportamentos excitantes e relaxantes. Mesmo quando afetados por ruído branco, os valores estimados de Mínimos Quadrados provaram ser ótimos no ajuste da curva quando submetidos a um sinal de entrada SBPA.

Embora o método proposto seja projetado especificamente para sinais degrau, o que oferece uma vantagem em termos de simplicidade em comparação aos sinais SBPA, ele ainda demonstra um excelente ajuste quando comparado à técnica de Mínimos Quadrados. Isso fica evidente ao examinar o *Erro Médio Quadrático* (EMQ) na figura abaixo, onde os valores permanecem aproximadamente consistentes em todo o domínio do tempo. Além disso, a distribuição do erro segue um padrão normal em ambos os casos, aderindo à característica exibida pelos sinais de erro durante os ajustes de ajuste ótimo.

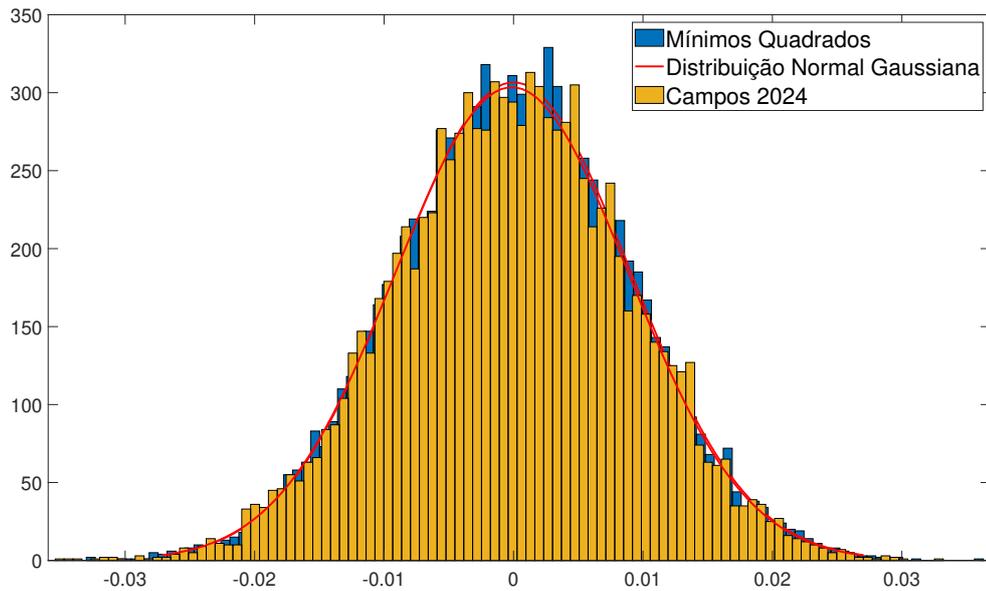


Figura 5.3: Distribuição normal para o erro em LS e método modificado

Parâmetro	Mínimos Quadrados	Campos(2024)
α	0.85	0.85
ω_n	1.006	0.9993
ζ	0.4005	0.4
MSE	$8.2303 \cdot 10^{-5}$	$8.1728 \cdot 10^{-5}$
ISE	72.2520	72.2813

Tabela 5.1: Valores Estimados para o Exemplo 1

Analisando a figura 5.3, é evidente que os resultados da abordagem sugerida se alinham estreitamente com os resultados do método MQ incorporando diferenças suaves, conforme ilustrado na Tabela 5.1. Neste cenário, um sinal de entrada intrincado é necessário para analisar o desempenho do método MQ, enquanto o método proposto emprega um sinal de passo simples para obter resultados comparáveis. Além disso, determinar as derivadas fracionárias do método MQ revela-se uma tarefa complexa, exigindo aproximações numéricas para a convolução do sinal e, assim, aumentando substancialmente as despesas computacionais.

Os resultados da simulação exibem um comportamento distinto ao utilizar ruído branco gerado aleatoriamente. Devido à natureza aleatória inerente do ruído, valores

de erro variados podem ser obtidos para os mesmos parâmetros do sistema identificados, porém aproximados. O modelo identificado é mostrado abaixo:

$$G(s) = \frac{0.99858}{s^{1.7} + 0.79943s^{0.85} + 0.99858} \quad (5.1)$$

5.2 Sistema de ordem inteira subamortecido

Exemplo 2. Outro exemplo é explorado, desta vez com um sistema subamortecido de ordem inteira na forma da Equação (2.1). Seguindo os passos apresentados anteriormente, nesta situação, os parâmetros escolhidos são: $t_i = 1,0725 \text{ s}$, $t_m = 2,648 \text{ s}$, $m_1 = 3,9320 \text{ s}$, $M_i = 0,4340 \text{ s}^{-1}$. Aplicando o método LS com sinal de entrada PRBS, os parâmetros calculados são $[\alpha, \zeta, \omega_n] = [1, 0.8, 1]$, e para o método proposto são $[\alpha, \zeta, \omega_n] = [1, 0.8001, 0.998]$.

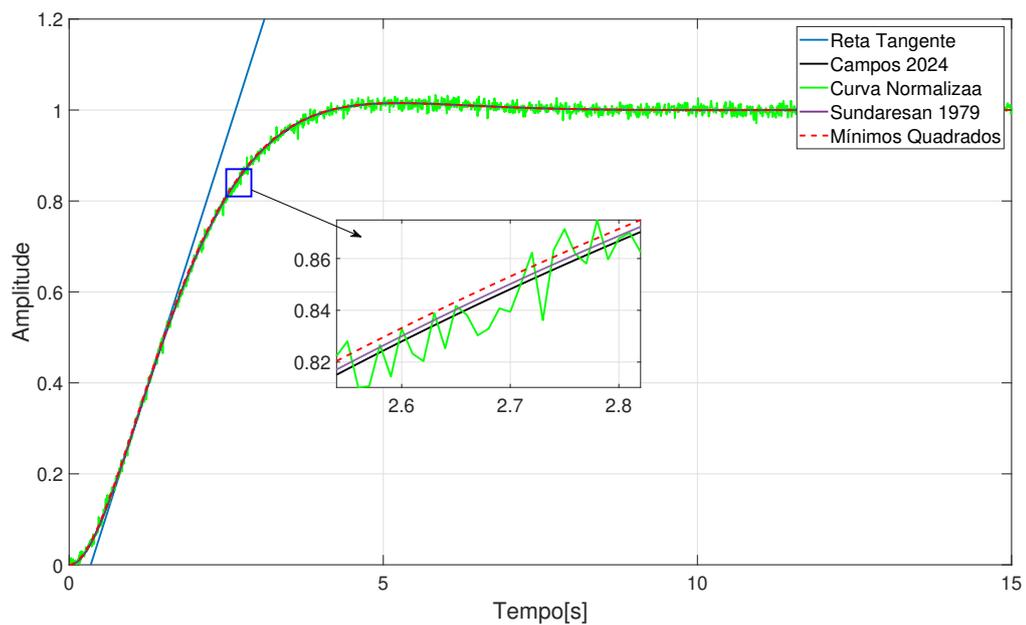


Figura 5.4: Curva aproximada de ordem inteira usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado

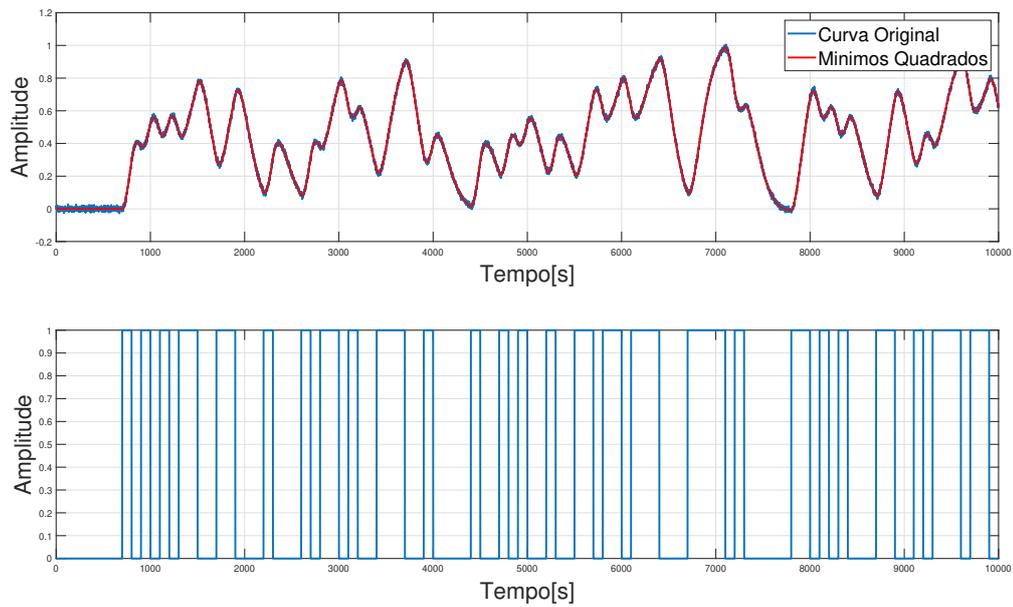


Figura 5.5: Resultados de identificação de ordem fracionária usando a técnica de mínimos quadrados por um sinal de entrada PRBS corrompido por ruído branco

No caso do exemplo de ordem inteira, tanto o método MQ quanto o método modificado alcançam excelentes ajustes. Ao observar as figuras abaixo, fica evidente que ambos os métodos apresentam desempenho comparável no processo de identificação, transformando efetivamente o método modificado em uma técnica Sundaresan mais generalizada para identificação. Ao examinar a distribuição do erro, ela se conforma a uma distribuição normal, com o método modificado apresentando uma magnitude menor no EMQ.

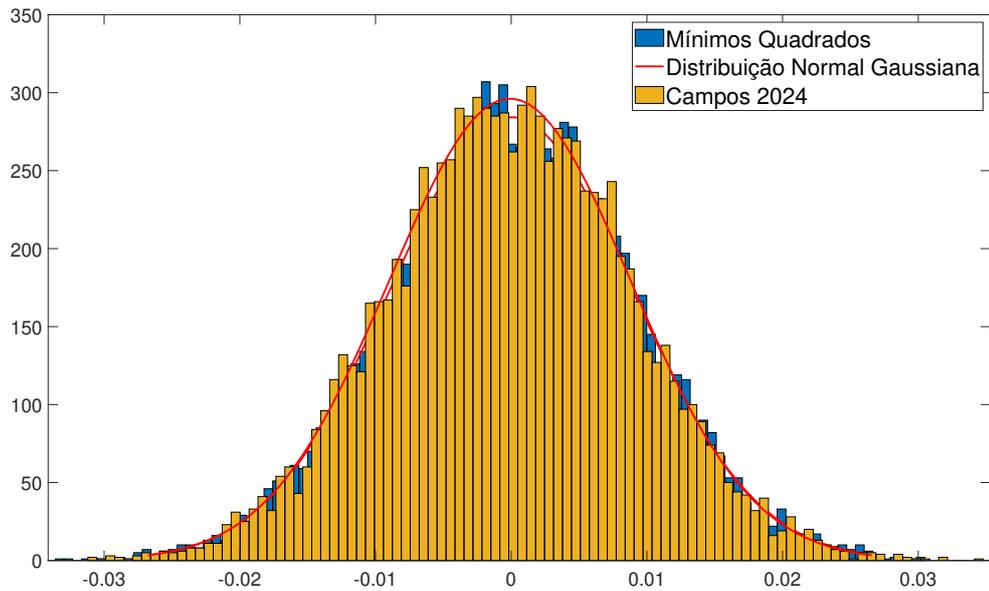


Figura 5.6: Distribuição normal do erro em Mínimos Quadrados e o Método Modificado

Parâmetros	Mínimos Quadrados	Campos(2024)
α	1	1
ω_n	1	1.0001
ζ	0.8	0.8
MSE	$8.0829 \cdot 10^{-5}$	$8.0251 \cdot 10^{-5}$
ISE	70.3197	71.7756

Tabela 5.2: Valores Estimados para o Exemplo 2

Ao analisar os resultados, conclui-se que o método proposto é eficaz para sistemas de ordem inteira, elevando-o a uma generalização da clássica Técnica de Sundaresan. Isto constitui uma visão significativa que contribui para as conclusões desta tese. Além disso, tanto o método MQ quanto a técnica clássica de Sundaresan demonstram resultados de ajuste ideais. Embora o método proposto apresente pequenas diferenças, ele mantém um forte alinhamento com a técnica clássica de Sundaresan, embora com um erro quadrático médio próximo. É crucial notar que o EMQ pode variar apesar dos valores idênticos nos exemplos devido à aplicação de ruído branco gerado aleatoriamente. O modelo identificado é mostrado abaixo:

$$G(s) = \frac{1.0005}{s^2 + 1.6004s + 1.0005} \quad (5.2)$$

5.3 Sistema de ordem fracionária superamortecida

Exemplo 3. A figura 5.7 mostra uma curva superamortecida de um sinal de saída não normalizado de um sistema. Nesta situação, é feita a normalização da curva, obtendo o valor final da resposta do sistema ou sua média no caso dos sinais de ruído, e então dividimos o sinal por este valor. Seguindo os passos da seção anterior, os parâmetros escolhidos nesta situação, a reta tangente foi a mais problemática de se encontrar, uma vez que não há realmente um ponto de inflexão explícito devido à falta de sobressinal da curva. Particularmente, foi necessário alterar o ponto de inflexão t_i e o valor de m_1 muitas vezes para chegar a um ajuste ótimo, anexando os valores finais de $t_i = 0,2$ s, $m_1 = 0,7610$ s, $t_m = 0,5$ s, $M_i = 2.0736$ s⁻¹. Portanto, os parâmetros calculados para o método LS são $[\alpha, \zeta, \omega_n] = [0.7, 0.5007, 3.0010]$ e para o método proposto $[\alpha, \zeta, \omega_n] = [0.7, 0.50000, 3.00000]$.

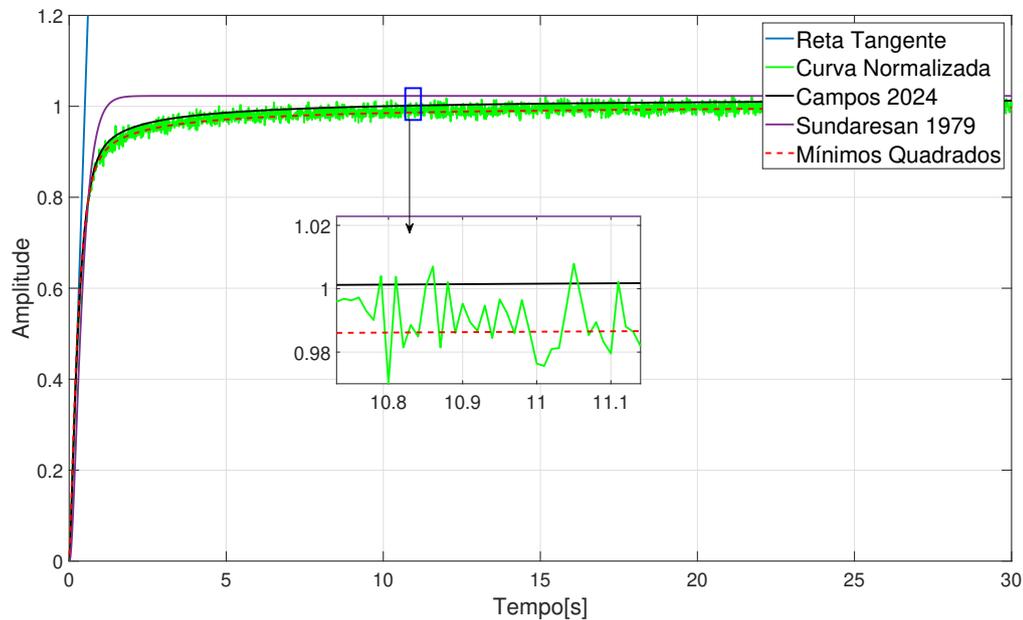


Figura 5.7: Curva aproximada de ordem inteira usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado

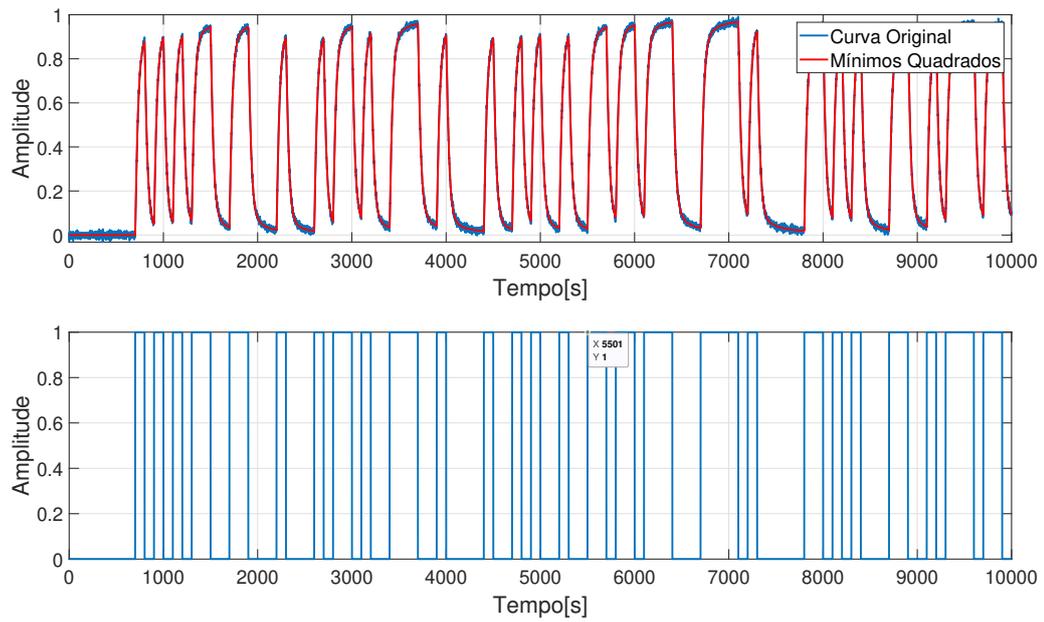


Figura 5.8: Resultados de identificação de ordem fracionária usando a técnica de mínimos quadrados por um sinal de entrada SBPA corrompido por ruído branco

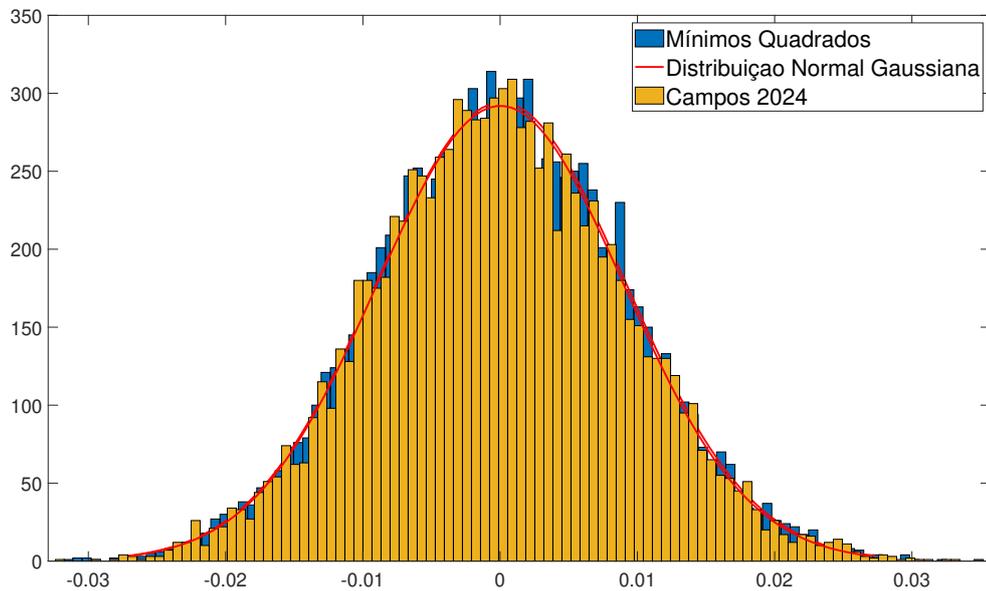


Figura 5.9: Distribuição normal do erro para o Mínimos Quadrados e Método Modificado

Parâmetro	Mínimos Quadrados	Campos(2024)
α	0.7	0.7
ω_n	3.0010	3.0000
ζ	0.5007	0.5
MSE	$8.0675 \cdot 10^{-5}$	$8.3504 \cdot 10^{-5}$
ISE	72.4713	72.5057

Tabela 5.3: Valores Estimados para o Exemplo 3

Neste caso, ambas as abordagens apresentam excelentes resultados de ajustamento. Mesmo para curvas sobreamortecidas, o método mostra-se eficaz no ajuste fino, seguindo o processo passo a passo descrito na seção anterior. O modelo identificado é mostrado abaixo:

$$G(s) = \frac{9}{s^{1.4} + 3s^{0.7} + 9} \quad (5.3)$$

5.4 Sistema oscilatório de ordem fracionária

Exemplo 4. Um sistema oscilatório de ordem fracionária apresenta um sinal de saída na Figura 5.10. Os valores dos parâmetros transitórios são $t_i = 0,1 \text{ s}$, $t_m = 0,8 \text{ s}$, $M_i = 1,3809 \text{ s}^{-1}$ e $m_1 = 1,5750 \text{ s}$. Aplicando esses valores no (4.31), os parâmetros são calculados e iguais a $[\alpha, \zeta, \omega_n] = [0.9, 0.1, 2.0002]$ e $[\alpha, \zeta, \omega_n] = [0.7, 0.1, 1,9999]$ para MQ e método proposto, o que é uma boa aproximação do valor original. O Modelo identificado é mostrado abaixo:

$$G(s) = \frac{3.9995}{s^{1.8} + 0.39997s^{0.9} + 3.9992} \quad (5.4)$$

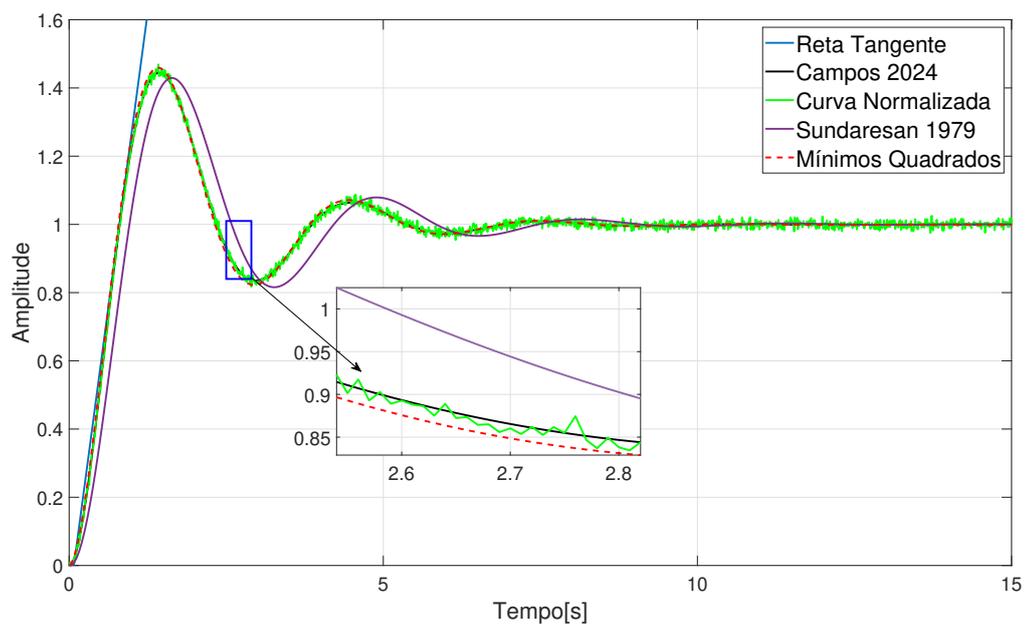


Figura 5.10: Curva aproximada usando o método clássico de Sundaresan, mínimos quadrados e o método modificado

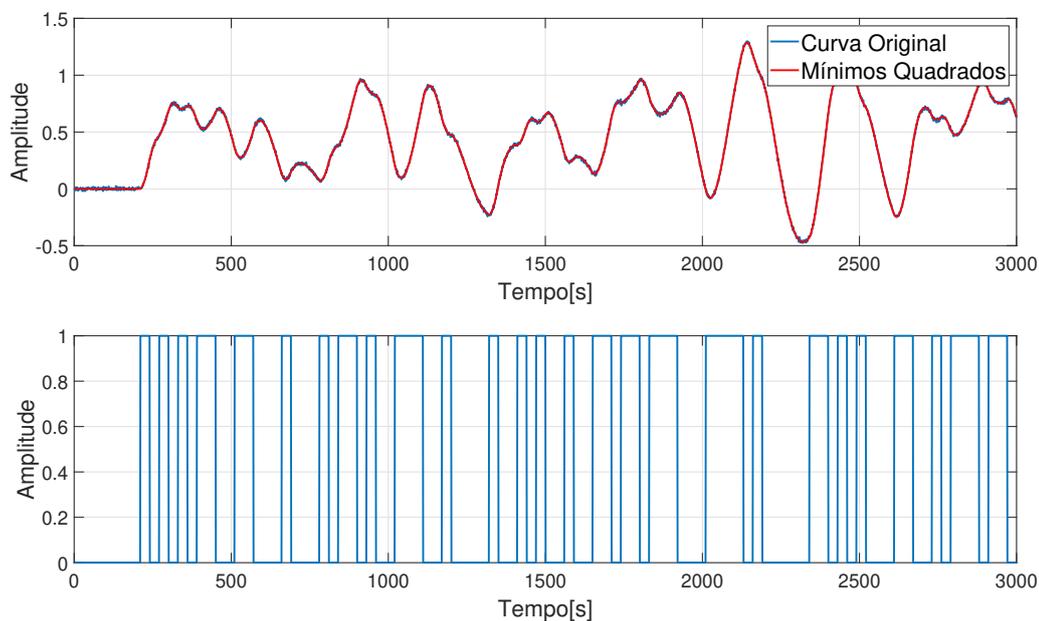


Figura 5.11: Identificação de ordem fracionária usando técnica de mínimos quadrados por sinal de entrada SBPA

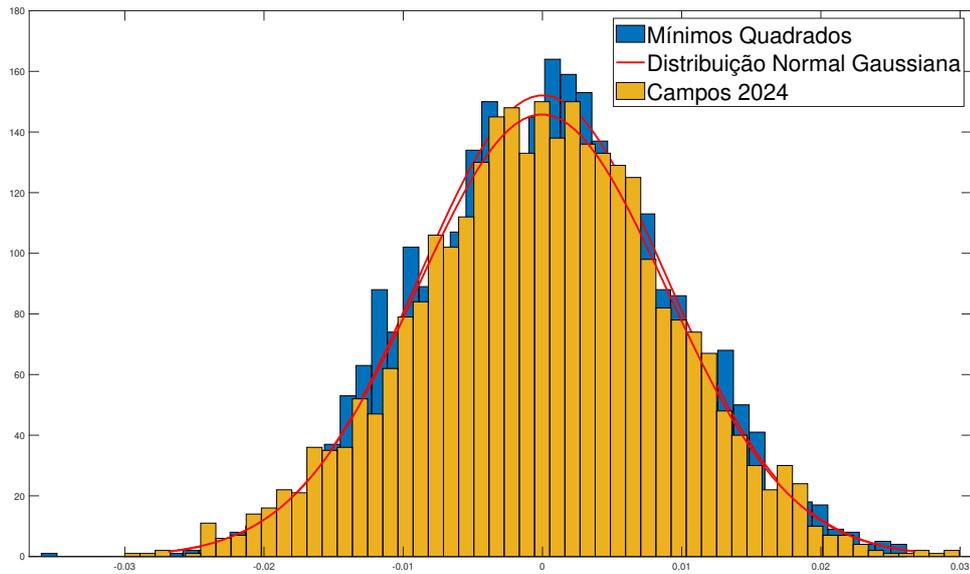


Figura 5.12: Distribuição normal do erro por Mínimos Quadrados e método de modificação

Parâmetro	Mínimos Quadrados	Método Modificado
α	0.9	0.9
ω_n	2.0002	1.9999
ζ	0.1	0.1
MSE	$8.2303 \cdot 10^{-5}$	$8.1728 \cdot 10^{-5}$
ISE	21.7830	21.8937

Tabela 5.4: Valores Estimados para o Exemplo 4

Analisando as figuras acima, concluímos que, diante de sistemas oscilatórios, o método proposto se comporta bem quando comparado ao método MQ, ressaltando ainda o estudo de resíduos que, em ambas as situações, há um padrão de distribuição normal, como esperado segundo a literatura de identificação de sistemas. Observando a tabela, é evidente que o método proposto é eficaz na modelagem de sistemas oscilatórios.

5.5 Conclusão do Capítulo

Em todos os cenários abordados nesta seção, a eficácia do método proposto é evidente quando comparada à identificação de ordem fracionária estabelecida utilizando MQ. A

adaptabilidade do método é confirmada por seu desempenho robusto em diversas situações, incluindo subamortecimento, sobreamortecimento, sistemas amortecidos, de ordem inteira e oscilatórios. De forma notável, o método proposto funciona como uma técnica de identificação generalizada que se aproxima da abordagem de Sundaresan. É relevante ressaltar que os valores médios dos erros quadráticos podem apresentar variações em decorrência do ruído branco aleatório gerado em cada simulação. No próximo capítulo, será apresentado o uso do método proposto em um sistema de tanque e em um conversor de potência DC-DC do tipo buck.

Capítulo 6

Aplicação em um Sistema Tanque

Nesta seção, um sistema tanque é estudado para teste de robustez do método proposto em sistemas reais com corrupção de sinal e presença de não-linearidades. Tal sistema apresenta uma evolução de sinal lenta em comparação com os exemplos aplicados na seção anterior, caracterizando uma resposta lenta, característico também de sistemas térmicos. Tal sistema é essencial para o estudo da eficácia do método proposto diante de valores de frequência natural não amortecida pequenos.

6.1 Hardware e Configuração do Sistema Tanque

A configuração, conforme ilustrado na Figura 6.1, é composta por um tanque primário destinado ao controle de nível, fabricado pela Alpina com capacidade total de 300 litros. Inclui dois tanques de água Fortlev complementares, cada um com capacidade para 310 litros, tubos roscados e conexões medindo $1\frac{1}{2}$ polegadas. O conjunto conta com válvulas esfera tipo VS com diâmetro nominal de 60 mm, e bomba centrífuga DANCOR modelo CAM-W10, com potência de 2HP, operando em rede trifásica a 220V.

A bomba é alimentada por um inversor de frequência WEG, especificamente o CFW08 (CFW080040S2024PSZ) versão 3.95, configurado em modo de controle escalar com referência de frequência proveniente de potenciômetro eletrônico (variando de 0 a 10V). Na prática, uma saída analógica do CLP foi conectada para cumprir a função de referência de frequência. Para evitar sobretensões do inversor, foi estabelecido um limite máximo de referência de 5V.

A instrumentação para a configuração está confinada a um transmissor de nível ul-

trassônico, o CLP Siemens, calibrado para uma saída de corrente variando de 4 a 20mA. Está configurado para operar dentro da seção circular do tanque principal que permanece invariante; o sensor não atinge o fundo cônico do tanque. Além disso, um rotâmetro é instalado a jusante da saída da bomba, proporcionando indicação visual da vazão volumétrica.

Os dispositivos de controle decorrem da incorporação de uma Bancada de Controle e Automação. O sistema Tanque está localizado no Laboratório de Sistemas Mecânicos e Controle da Faculdade de Tecnologia na Universidade Federal do Amazonas.



Figura 6.1: Sistema de Tanque com nível de água (branco) e reservatório de água e bomba (azul)

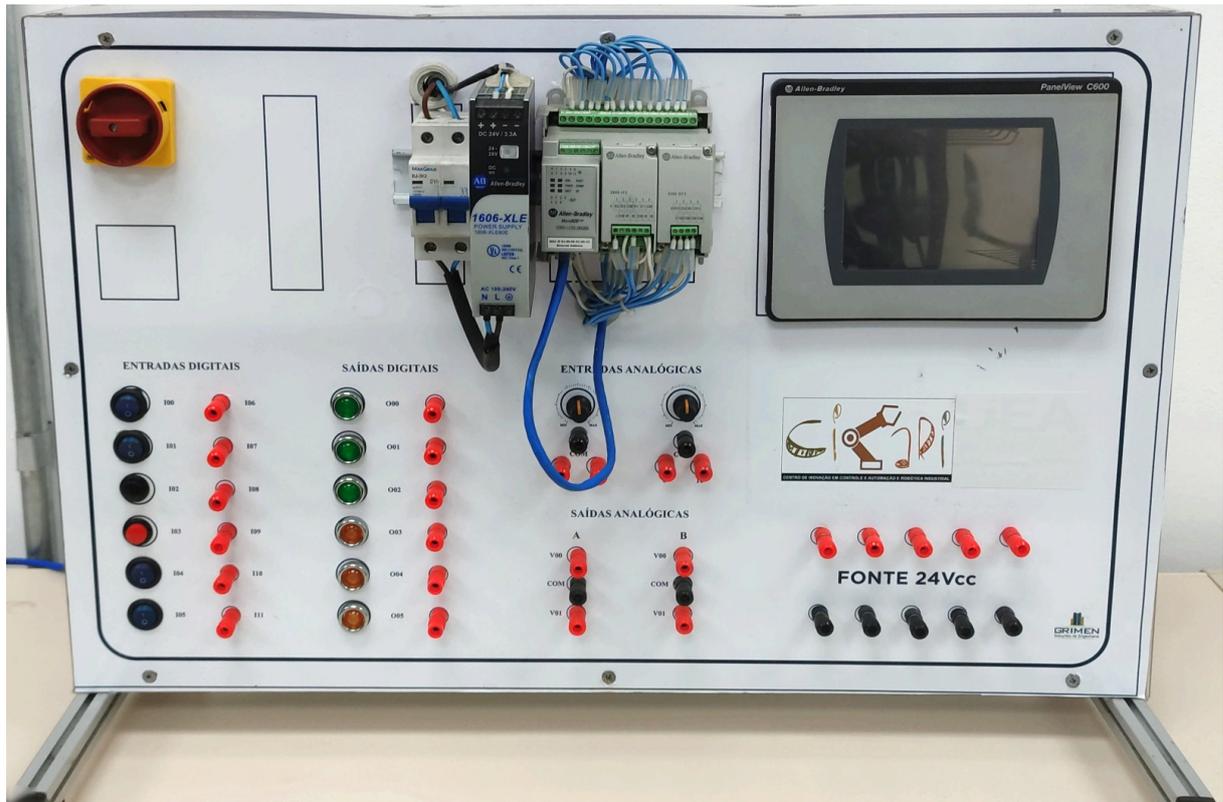


Figura 6.2: Sistema de acionamento do sistema de tanque

6.2 Aquisição de Dados

Os dados foram registrados por meio de um sistema de aquisição de dados, de fabricação Lynx, composto pelo gabinete modelo ADS 2002 SF 2034, o controlador de aquisição AC2122-VB e o módulo condicionador AI2161-VB. Este módulo condicionador possui 16 canais de entrada analógica, nos quais apenas 3 foram utilizados no presente estudo.

De forma adicional, para garantir a fidelidade dos dados experimentais, também foram coletados de forma independente, utilizando a função de tendência disponível no ambiente de programação do *Controlador Lógico Programável*. Portanto, foi necessário manter a conexão do CLP com o computador no modo online durante o processo de gravação dos dados.

6.3 Identificação do Sistema Tanque

Primeiramente, os parâmetros transitórios foram computados e iguais a: $t_i = 150 \text{ s}$, $t_m = 450 \text{ s}$, $M_i = 0.0022 \text{ s}^{-1}$. De acordo com o algoritmo, o valor inicial de m_1 é igual a me-

tade de t_m e igual a 225 s. Após a busca heurística sobre o ajuste ótimo dos parâmetros segundo o algoritmo proposto, os valores ótimos para $[\alpha, \zeta, \omega_n]$ são $[0.551, 0.0658, 0, 0425]$ e o valor final do parâmetro de calibre m_1 foi igual a 457 s. O erro quadrático médio para o método proposto foi igual a $E = 1.4541 \cdot 10^{-4}$.

Neste cenário, tal sinal de saída era do tipo não normalizado, o ganho natural do sistema real foi calculado para $k = 900$ determinar um ponto ótimo para a linha tangente, o que se mostrou um desafio devido à natureza criticamente amortecida da curva, conforme ilustrado no exemplo 3 da seção anterior. Os sinais de saída e entrada foram afetados por ruído, ocorrência comum em sistemas reais. Apesar dessas dificuldades, um valor ótimo para o tanque foi determinado com sucesso. Para restaurar a curva original não normalizada, ao final da identificação, é necessário devolver o ganho ao sistema na representação final.

Neste contexto, estabelecer um sinal SBPA condicional ideal prova ser mais desafiador do que um sinal ao degrau. Apesar da simplicidade de emprego de tal sinal, um ajuste ótimo foi alcançado, mesmo sem a necessidade de uso de derivadas de ordem fracionária, comum na modelagem de sistemas de ordem fracionária, provando a eficiência do método proposto. Abaixo, a função de transferência identificada é apresentada na Equação (6.1).

$$G(s) = 900 \frac{0.0018037}{s^{1.102} + 0.001s^{0.551} + 0.00118037} \quad (6.1)$$

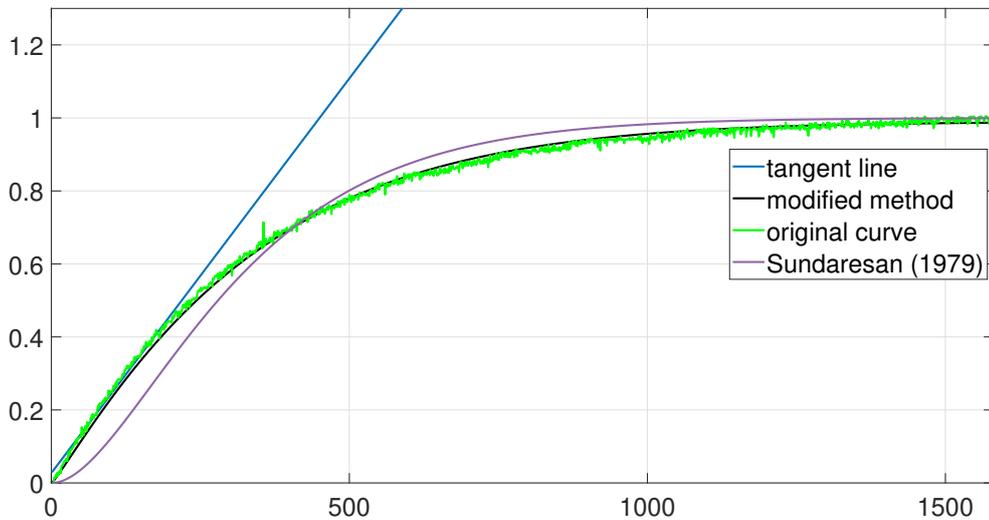


Figura 6.3: Resultados de identificação de ordem fracionária pelo método proposto

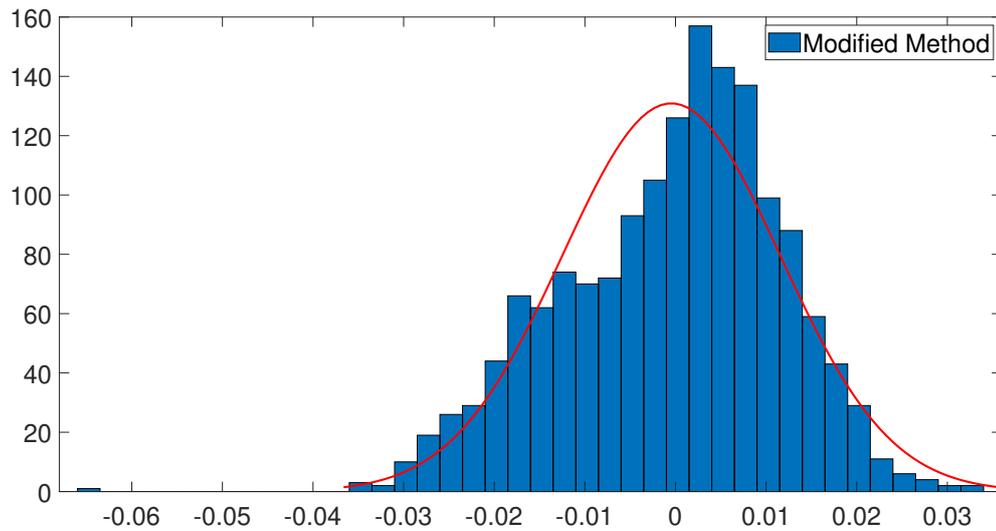


Figura 6.4: Distribuição normal para método modificado para sistema de tanque

6.4 Conclusão do Capítulo

Ao examinar os resultados, o método proposto alcança com sucesso um ajuste ideal da curva, mesmo na presença de ruído branco em um cenário de um sistema real para sinais de entrada e saída. A magnitude substancial de m_1 pode ser atribuída ao tamanho do sistema no domínio do tempo. É fundamental lembrar que este valor serve de calibre para aproximação da Equação (4.30), e consequentemente, a Equação (4.31), contribuindo para o ajuste para ω_n . A utilização do teorema de Bolzano para resolver a equação de sintonia do método proposto leva à obtenção de valores ótimos de parâmetros, demonstrando assim a eficácia do método de identificação proposto.

Capítulo 7

Aplicação em um Conversor de Potência DC-DC Buck

7.1 Estrutura do Conversor de Potência DC-DC Buck

O conversor de potência DC-DC Buck tem por objetivo reduzir a tensão de saída em comparação com a sua entrada, por este motivo, ele também é chamado de abaixador. O conversor Buck é construído colocando um filtro passa-baixa LC na saída do conversor básico (conjunto transistor-carga). Como consequência, um diodo é adicionado para proporcionar um caminho quando a chave é aberta e é polarizado reversamente no estado da chave fechada. O esquema abaixo representa essa configuração.

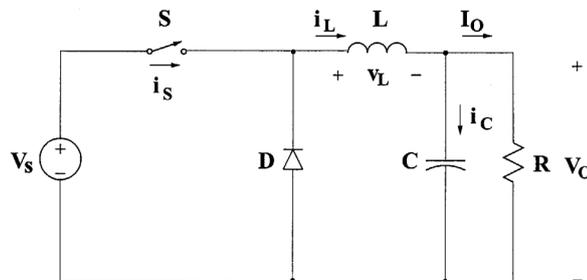


Figura 7.1: Estrutura básica de um conversor DC-DC buck

Foi usado no conversor os seguintes componentes:

- 1 IGBT IRGIB 10B60KDI
- 1 Diodo MUR460
- 1 Indutor de $12mH$
- 2 Capacitores Eletrolitico $2200\mu F$ $200V$]
- 2 Resistores de fio tubular 10Ω $100W$

7.2 Aquisição de Dados

Com o auxílio de dois divisores de tensão de $18k\Omega$ e $28k\Omega$, foi feito o interfaceamento do circuito com o computador responsável pelo processamento de dados com um ESP32. Os divisores de tensão auxiliaram no nivelamento de tensão entre o circuito e o ESP32. Este último se conecta ao computador através de uma porta serial USB, onde a mesma utiliza uma IDE programada em Python para armazenamento e processamento dos dados.

7.3 Identificação do Conversor DC-DC Buck

O circuito do conversor buck e seu hardware de controle foram configurados para que a saída seja função do ciclo de trabalho do transistor IGBT. A uma entrada de 25% do ciclo de trabalho, os dados da tensão de saída foram extraídos do sistema, formando a curva abaixo, já normalizada. Um conversor analógico-digital de 12 bits A/D foi utilizado entre o divisor de tensão e o ESP32 para condicionamento de sinal.

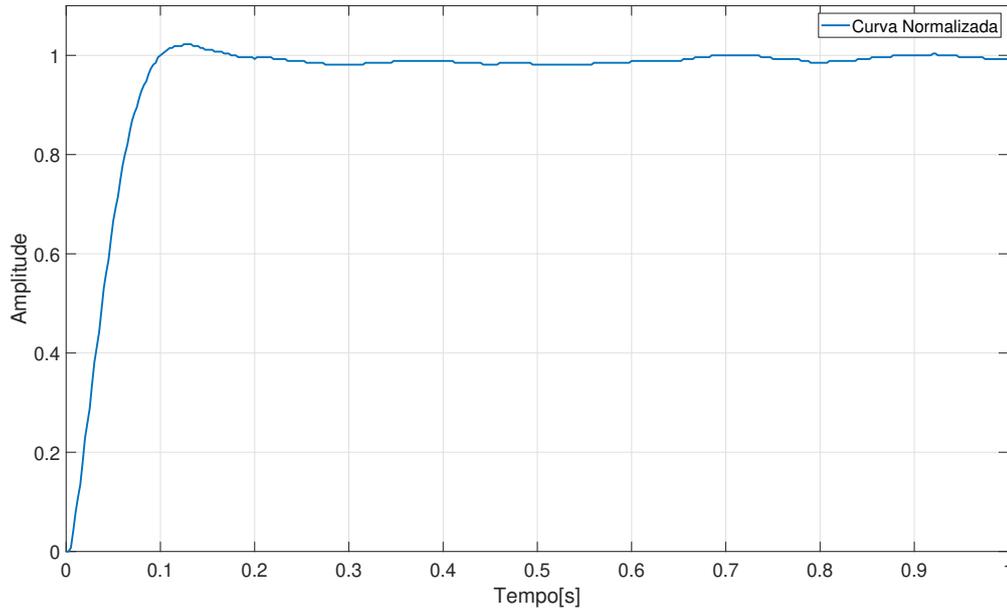


Figura 7.2: Curva normalizada de resposta do sistema a um ciclo de trabalho de 25%

Analisando a curva normalizada da resposta do sistema, é notável que o mesmo tem uma dinâmica rápida, esperado de conversores de potência DC-DC buck, portanto, é esperado que o valor da frequência natural não-amortecida também seja elevado.

Realizando os passos do algoritmo proposto, foram extraídos os valores $[t_i, t_m] = [0.0075, 0.074]$ para a formação da reta tangente. O valor inicial de m_1 foi de 0.0370 s. Com tais valores, M_i foi computado e igual a 14.4181 e o valor de $\lambda = 0.1499$.

Com essas informações, a busca heurística pode ser feita através do algoritmo proposto no Capítulo 4. Os valores ótimos foram encontrados pesquisando o mínimo do valor do erro médio quadrático. Os valores dos parâmetros identificados foram $[\alpha, \zeta, \omega_n] = [0.8, 0.35, 15.884]$ e o parâmetro de calibre m_1 teve valor final igual a 0.0636. O menor erro médio quadrático alcançado foi de $E = 8.0599 \times 10^{-5}$. Com os valores ótimos, a curva identificada pôde ser representada em conjunto com a reta tangente, mostrado na figura abaixo:

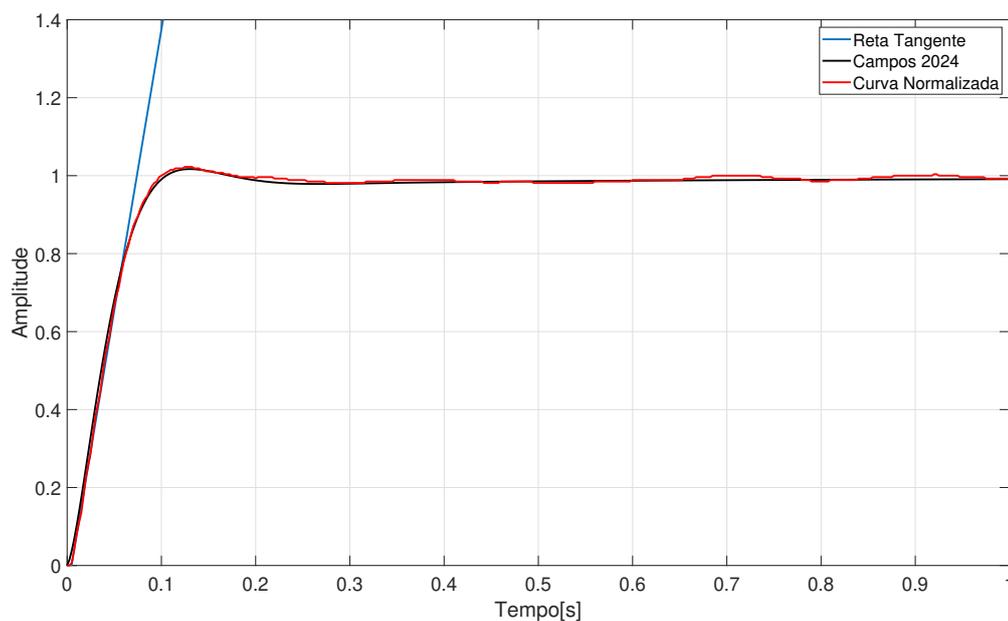


Figura 7.3: Resultado da identificação do sistema conversor de potência DC-DC Buck utilizando o método proposto

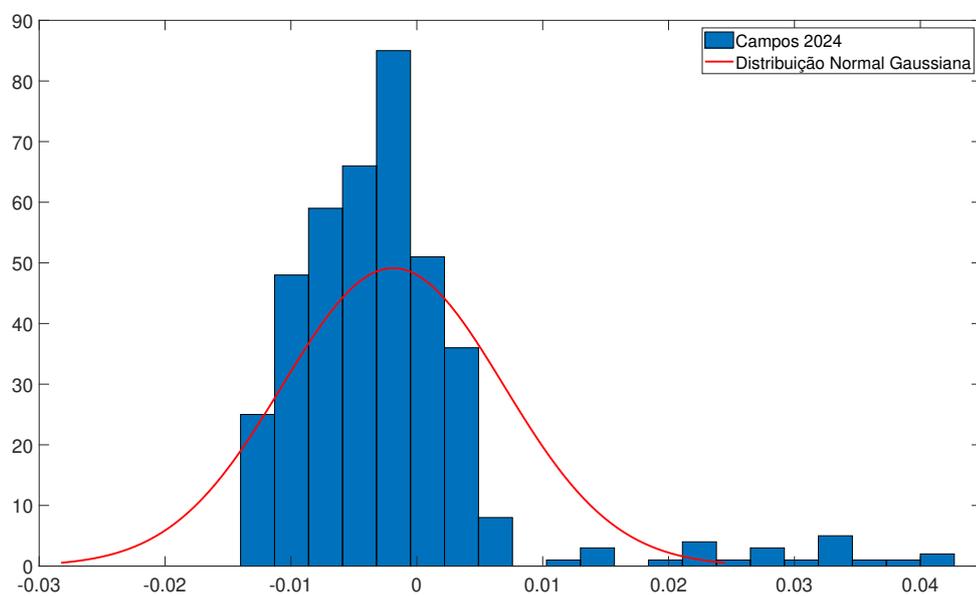


Figura 7.4: Estudo de resíduo do erro médio quadrático

Avaliando as Figuras 7.3 e 7.4, percebe-se que o método obteve êxito ao identificar o sistema conversor de potência, na qual apresentou uma dinâmica rápida em relação aos exemplos anteriores. Vale ressaltar que, analisando o estudo de resíduos, o mesmo não obteve um comportamento totalmente esperado pela distribuição normal por motivos

da presença de não-linearidades e condicionamento de sinal do conversor Buck, o que é esperado quando se trabalha com sistemas reais com flutuações de sinais.

O valor relativamente baixo do ponto de inflexão reflete o rápido comportamento do sistema, enquanto o grande valor de M_i reflete a rápida evolução do sinal durante sua subida, neste caso particular. Com a identificação de ordem fracionária completa, o modelo do sistema está pronto para ser usado na realização da configuração do controlador do conversor de potência Buck, na qual foge do escopo desta tese. Abaixo, a equação do modelo identificado é explícita:

$$G(s) = \frac{252.35}{s^{1.6} + 11.12z^{0.8} + 252.35} \quad (7.1)$$

7.4 Conclusão do Capítulo

O estudo da modelagem do conversor de potência DC-DC Buck permitiu ao método proposto o teste em dinâmicas relativamente rápidas para fins de robustez. O método se provou eficiente quando comparamos dinâmicas lentas como a do sistema tanque, onde se obteve valores da frequência natural não amortecida relativamente baixa, traduzindo o comportamento dinâmico da planta, quanto a dinâmicas rápidas como a do conversor de potência, permitindo ao método uma característica de grande mapeamento dos valores de ω_n em função dos valores que compõem a reta tangente. No próximo Capítulo, são discutidos assuntos relativos à literatura com relação a trabalho semelhante ao desta tese como a identificação pelo método empregado por Gude and García Bringas (2022).

Capítulo 8

Trabalhos Relacionados e Discussões

O estudo comparativo de Kothari et al. (2019) apresenta uma ampla gama de métodos dentro dos algoritmos meta-heurísticos. Entre essas técnicas, o método MQ é o mais comumente utilizado, servindo como principal ponto de comparação com o método proposto nesta tese. Os algoritmos meta-heurísticos oferecem uma otimização determinística e computacionalmente eficiente, sem exigir conhecimento prévio sobre o sistema, implicando em uma identificação de tipo caixa-preta. A rápida convergência é destacada como um benefício importante dessas técnicas.

Alguns pontos-chave podem ser destacados, como a ausência de necessidade de conhecimento prévio sobre derivadas de ordem fracionária dos sinais de entrada/saída, a dependência de métodos baseados na curva de resposta sem exigir conhecimento prévio sobre o sistema, e o desempenho satisfatório de identificação na presença de ruído, o que o distingue do método DE com base nas conclusões da tabela. Uma limitação do método proposto é a necessidade de análise gráfica do ponto de inflexão e do parâmetro t_m .

Essa abordagem fornece apenas valores aproximados e envolve o uso de outro parâmetro de aproximação, m_1 , devido à limitação da função inversa de Mittag-Leffler. Uma vez que essa inversa esteja bem definida, a limitação deste trabalho será eliminada, tornando-o uma ferramenta robusta para sistemas de identificação de ordem fracionária.

Vale mencionar que o trabalho de Gude et al. (2023) explora uma situação semelhante ao desta tese, aplicando as propriedades assintóticas da função de Mittag-Leffler para aproximar uma forma exponencial, com os parâmetros estimados pelo método MQ para ajuste dos parâmetros da curva. As duas principais semelhanças entre Gude et al. (2023) e o presente trabalho são que ambos os métodos requerem um estudo da curva de resposta

normalizada e aplicam uma busca meta-heurística para o ajuste dos parâmetros. As três principais diferenças entre Gude et al. (2023) e o presente trabalho são:

- O método investigado no presente trabalho é baseado na técnica clássica de Sundaresan e nunca foi apresentado anteriormente em uma forma generalizada;
- Gude et al. (2023) trabalha com valores de α entre $0.5 < \alpha < 1$, enquanto o método proposto é aplicável para $0 < \alpha < 1$;
- Gude et al. (2023) utiliza a propriedade monotônica da função de Mittag-Leffler para aproximar a uma função simples, empregando o método MQ para ajuste na identificação de parâmetros, enquanto o método atual não utiliza aproximações das funções de Mittag-Leffler.

Tabela 8.1: Análise Qualitativa baseada no estudo de Kothari et al. (2019)

Técnica	Subclasse	Vantagens	Desvantagens
Método da Matriz Operacional	<ul style="list-style-type: none"> - Funções de pulso em bloco Tang et al. (2015, 2012) - Ondas de Haar Li et al. (2015); Kothari et al. (2018a); Kothari (2024) - Funções de Walsh Kothari et al. (2018b) - Polinômios de Chebyshev Bhrawy and Alofi (2013) - Base de Legendre Ghanbari and Haeri (2010) - Regressão Kernel Li and Rosenfeld (2022) - Entropia de dispersão fracionária multivariada Zhang et al. (2021) - Função de matriz diferencial Ayazi et al. (2024); Ângela Sebastião Bargas et al. (2023) 	<ul style="list-style-type: none"> - Abordagem algébrica, Menor complexidade, Estimação simultânea de todos os parâmetros, - Estimação de atraso de tempo 	<ul style="list-style-type: none"> - A estrutura da função de transferência deve ser conhecida
Método do Filtro de Variável de Estado baseado em Mínimos Quadrados	<ul style="list-style-type: none"> - Variável instrumental (IV) Cois et al. (2001) - IV com filtro linear A. Narang (2011) - IV refinado simplificado Malti et al. (2008); Victor et al. (2013b) - Otimização de ordem comensurável IV refinado (coorsrivel) Victor et al. (2009) - Erro em variáveis Chetoui et al. (2012) - Correção de viés Yakoub et al. (2015) 	<ul style="list-style-type: none"> - Estimação de atraso de tempo, Método recursivo 	<ul style="list-style-type: none"> - Desenvolvido para modelos comensuráveis, Requer conhecimento prévio sobre a ordem fracionária desconhecida
Método de Realimentação por Relé	<ul style="list-style-type: none"> - Método no domínio da frequência Li and Chen (2014) - Método no domínio do tempo 	<ul style="list-style-type: none"> - Estimação de atraso de tempo, Estimação rápida de parâmetros 	<ul style="list-style-type: none"> - Alto erro de identificação
Método da Resposta ao Degrau	<ul style="list-style-type: none"> - Resposta ao degrau Gude et al. (2023) - Equação integral Ahmed (2015); Tavakoli-Kakhki et al. (2013); Tavakoli-Kakhki and Tavazoei (2014) - Resposta ao degrau em forma de S Tavakoli-Kakhki et al. (2010); Malek et al. (2013) 	<ul style="list-style-type: none"> - Estimação de atraso de tempo, Cálculo direto de parâmetros 	<ul style="list-style-type: none"> - Requer conhecimento prévio
Algoritmos Meta-Heurísticos	<ul style="list-style-type: none"> - Busca do Cuco Kumar and Rawat (2015) - Evolução diferencial (DE) Tang et al. (2012); Mehmood and Raja (2022) - DE com chaveamento Zhu et al. (2012) - Enxame de partículas Mansouri et al. (2008); Gupta et al. (2014) - Algoritmo Genético Othman and Alsabawi (2013); Hao et al. (2015) - Método de decomposição de Adomian He et al. (2022) - Resposta transitória Campos et al. (2024) 	<ul style="list-style-type: none"> - Otimização determinística eficiente, Nenhum conhecimento prévio necessário, Convergência rápida 	<ul style="list-style-type: none"> - Às vezes converge para mínimos locais, Efeitos adversos do ruído
Método de Resposta em Frequência	<ul style="list-style-type: none"> - Mínimos quadrados Adigintla et al. (2023) - Resposta ao impulso - Método de Levy Valério and Tejado (2015) - Conjunto de membresia Malti et al. (2008) 	<ul style="list-style-type: none"> - Estimação de atraso de tempo, Nenhum conhecimento prévio 	<ul style="list-style-type: none"> - Desenvolvido para modelos comensuráveis
Rede Neural	<ul style="list-style-type: none"> - Rede Neural Hamdi et al. (2018) 	<ul style="list-style-type: none"> - Arquitetura simples, Solução universal 	<ul style="list-style-type: none"> - Natureza de caixa preta, Pode fornecer resultados errados sem razão aparente

A tabela acima apresenta a atualização na literatura dos algoritmos Meta-Heurísticos no campo de resposta transitória com o método proposto e no campo de Método da Resposta ao degrau com o método de Resposta ao Degrau de Gude and García Bringas (2022). Vale ressaltar que, apesar de ambos os métodos de identificação de Campos et al. (2024) e Gude and García Bringas (2022) apresentarem como sinal dominante de

entrada o Degrau, o método de Gude não apresenta um algoritmo de busca, tal método emprega funções de modulação de aproximação da função de Mittag-Leffer para sintonia dos parâmetros, caracterizando um método analítico com restrição de região da ordem do sistema e o método proposto utiliza de um método de busca de mínimos globais através de busca heurística.

8.1 Estudo do Novo Método de Identificação de Ordem Fracionária em Sistemas a Dois Termos ou Pseudo-Primeira-Ordem

A aplicação apresentada no Capítulo 6 revela que o método tem desempenho satisfatório para regiões de ordem em torno de $\alpha = 0.5$. Como consequência desta aplicação, foram feitos testes para identificação de sistemas de ordem fracionária a dois termos ou pseudo-primeira-ordem. Analisando a Equação (2.9), para $\zeta = 0$, temos:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^{2\alpha} + \omega_n^2} \quad (8.1)$$

manipulando a equação acima, e considerando um ganho natural do sistema K , temos:

$$G(s) = \frac{K}{Ts^{2\alpha} + 1} \quad (8.2)$$

sendo $T = \frac{1}{\omega_n^2}$. A equação acima tem comportamento semelhante a uma função de pseudo-primeira-ordem para valores da ordem para $0 < \alpha \leq 0.5$.

8.1.1 Identificação de um Sistema Térmico

8.1.1.1 Protótipo Experimental Baseado em Temperatura

Esta seção apresenta a configuração experimental baseada em temperatura que será utilizada para demonstrar a eficácia e a aplicabilidade da arquitetura de hardware de controle proposta neste trabalho. A seção está dividida nas seguintes partes: primeiramente, descreve-se o protótipo de temperatura utilizado no estudo. Em seguida, fornece-se uma descrição detalhada do processo térmico que ocorre no protótipo. Por fim, analisa-se, em

detalhe, as possibilidades do processo térmico como um processo controlado reconfigurável, dado que pode ser configurado em três diferentes ajustes Gude and García Bringas (2022).

O equipamento denominado *Configuração Experimental do Aquecedor* (CEA) foi construído utilizando componentes simples, tornando este protótipo acessível. Suas características técnicas, bem como seu tamanho e peso, o tornam portátil e adequado para uso doméstico, o que é uma característica de grande relevância para experimentos no meio acadêmico. Este equipamento de laboratório foi projetado e construído no Laboratório de Sistemas de Medição e Controle e no Deusto Fablab, ambos pertencentes à Faculdade de Engenharia da Universidade de Deusto em Bilbao - Espanha, mais detalhes em Gude and García Bringas (2022).

8.1.1.2 Processo de Identificação do Sistema Térmico utilizando o Método Proposto

Os dados extraídos do sistema CEA são de uma entrada de potência térmica em porcentagem e a saída a temperatura em Celsius. A figura abaixo mostra a curva de resposta, a uma entrada de 30% de potência térmica, já normalizada e sua reta tangente.

Assumindo que o coeficiente de amortecimento é nulo e adotando o modelo da Equação (8.2), foi-se aplicado o algoritmo proposto no Capítulo 4. Inicialmente, foram calculados os valores de $[t_i, t_m, M_i] = [12.6, 70, 0.0143]$ e assumindo que, inicialmente, o valor de $m_1 = \frac{t_m}{2} = 35$ s, foram avaliados os testes para o menor EMQ na região de $0 < \alpha \leq 1$. Os resultados foram $[\alpha, \omega_n] = [0.4645, 0.0077]$, então um ajuste de calibre foi feito em m_1 para um melhor resultado; o menor EMQ foi atingido no valor de $E = 1.4754 \times 10^{-4}$ para um valor de m_1 de 52.34 s. O resultado da identificação é mostrado na Figura 8.2. O modelo identificado é mostrado na equação abaixo:

$$G(s) = \frac{1}{45.89s^{0.929} + 1} \quad (8.3)$$

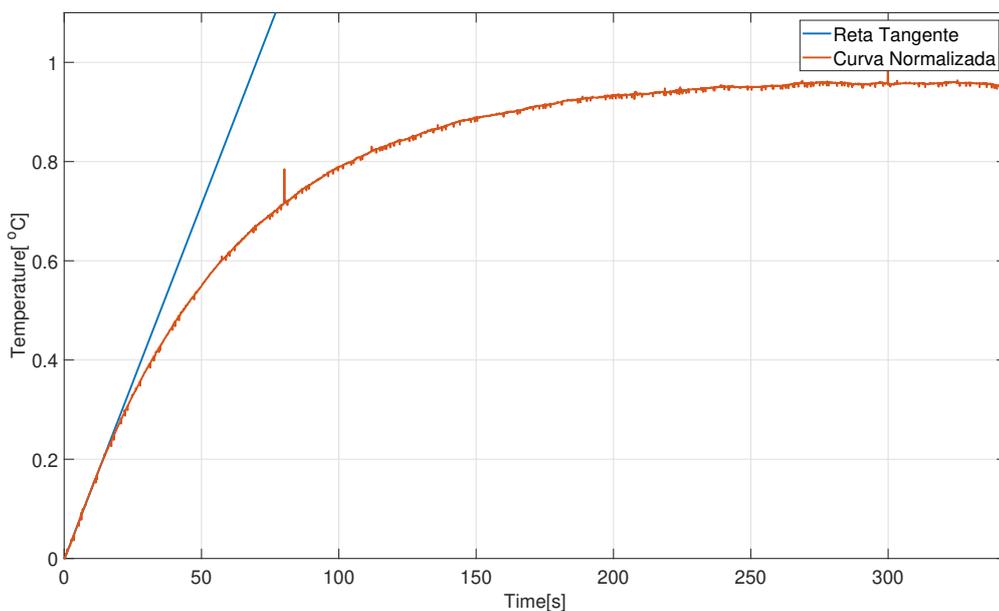


Figura 8.1: Curva Normalizada a entrada de 30% de potência térmica

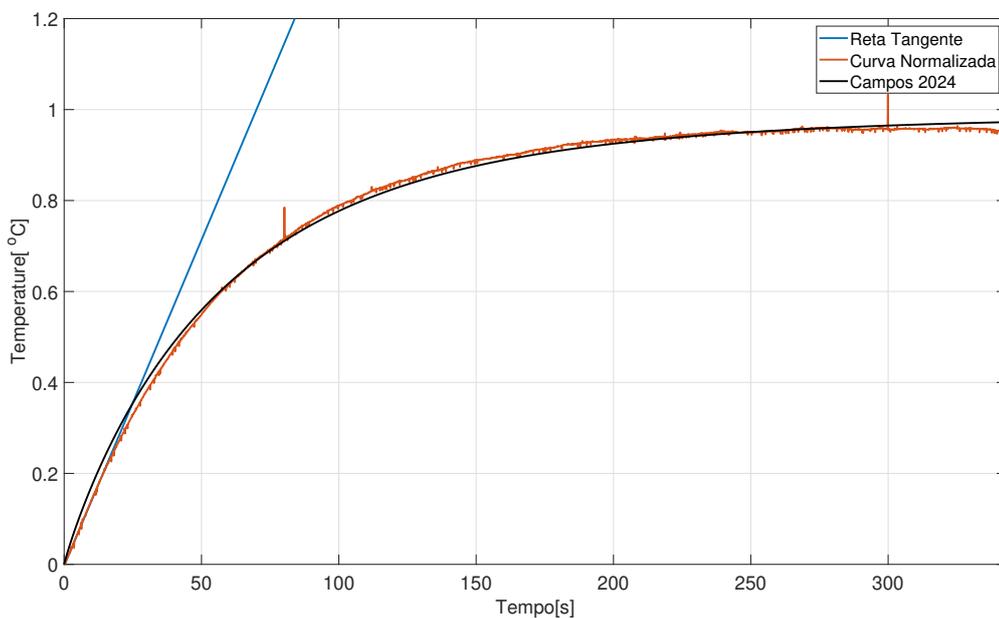


Figura 8.2: Resultado da Identificação utilizando o Método Proposto Campos et al. (2024)

Avaliando a figura acima, sob as condições da equação (8.2), concluímos que o método proposto tem uma performance considerável para identificação de sistemas de primeira ordem, conferindo ao método uma característica mais abrangente na decisão de identificação de sistemas de ordem fracionária em comparação ao método clássico de Sundaresan que trabalha apenas com sistemas de segunda ordem inteira.

Vale ressaltar que o método proposto não tem uma performance aceitável quando se empregam sistemas de ordem não-inteira com polos complexos conjugados em torno de $\alpha = 0.5$, ou seja, o método não tem mal ajuste quando se emprega uma estrutura como a mostrada abaixo:

$$G(s) = \frac{K}{(s^\alpha + j\omega_n)(s^\alpha - j\omega_n)} \quad (8.4)$$

o que também é uma representação de um sistema pseudo-primeira-ordem ou a dois termos, porém, com polos complexos conjugados.

8.2 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo, foram apresentados os trabalhos relacionados e as discussões que abrangem o método proposto no contexto da literatura atual sobre identificação de sistemas de ordem fracionária. Destaca-se o trabalho do pesquisador Professor Gude, que apresenta semelhanças com o método proposto. Além disso, foi apresentada a tabela modificada do estudo de Kothari et al. (2019), contendo a atualização dos resultados referentes ao método proposto e ao método de Gude.

Como consequência, discute-se a generalização do método proposto para sistemas de ordem fracionária a dois termos, também denominados pseudo-primeira-ordem. É demonstrado, por meio dos exemplos apresentados no Capítulo 6 e no sistema térmico, a eficácia do método na identificação de sistemas de primeira ordem quando se adota $\zeta = 0$. Contudo, também é discutido que, no caso fracionário, sistemas de pseudo-primeira-ordem com polos complexos conjugados não apresentam um desempenho satisfatório ao se empregar o método proposto.

Capítulo 9

Considerações finais

9.1 Conclusões

Uma abordagem modificada, derivada da Técnica de Sundaresan, foi introduzida para identificar sistemas de ordem fracionária usando três termos. Devido às restrições impostas pela função Inversa de Mittag-Leffler, torna-se necessário computar um parâmetro de calibre para validar a equação imposta para ajuste dos parâmetros. Comparando os exemplos descritos na Seção 5, é evidente que o método adaptado da técnica de Sundaresan funciona de forma eficaz para sistemas oscilatórios, subamortecidos e criticamente amortecidos. O método demonstra desempenho satisfatório mesmo na presença de corrupção de sinal. O parâmetro m_1 desempenha um papel de calibre para a Equação (4.31), possibilitando um melhor ajuste do valor de ω_n . O método se mostra bem-sucedido para ordens inteiras, como $\alpha = 1$, transformando-o assim em uma técnica generalizada de Sundaresan.

Além disso, em contraste com os mínimos quadrados parametrizados e as técnicas fuzzy, o método de identificação apresentado nesta tese oferece uma abordagem direta e simples para identificar sistemas de ordem fracionária por meio de pesquisa heurística, utilizando parâmetros gráficos e de aproximação, sem a necessidade do uso de definições de derivadas fracionárias.

Entretanto, o estudo apresentado nesta tese realizou também a generalização para identificação de sistemas de pseudo-primeira-ordem sob as condições apresentadas na Seção 8, na região em torno de $\alpha = 0.5$, uma vez que se considera o coeficiente de amortecimento nulo e polos reais. Contudo, foi observado que, ao trabalhar com modelos

de pseudo-primeira-ordem com polos conjugados complexos, o modelo não apresenta uma boa representação em comparação ao modelo clássico de pseudo-primeira-ordem quando empregamos o método proposto.

Portanto, o método proposto se provou eficiente na modelagem de sistemas de ordem fracionária a três termos ou pseudo-segunda ordem e a dois termos ou pseudo-primeira-ordem com polos reais e também na modelagem de sistemas de ordem inteira, garantindo a característica de generalização da técnica de Sundaesan clássica.

9.2 Recomendações para Trabalhos Futuros

- Investigar as restrições das funções inversas de Mittag-Leffler e desenvolver um método que torne possível a computação da função para valores a parâmetros negativos e $\beta < \alpha$.
- Investigar as propriedades do produto e do quociente das funções de Mittag-Leffer sob os mesmos termos α e β .
- Realizar a pesquisa de uma solução analítica para o problema de sintonia do método proposto.
- Investigar uma formula analítica para o tempo de pico e sobressinal em sistemas de ordem fracionária, na qual tem as mesmas restrições apresentadas nesta tese.

Referências Bibliográficas

- M. W. Campos, F. A. Ayres, I. V. de Bessa, R. L. de Medeiros, P. R. Martins, E. kaminski Lenzi, J. E. Filho, J. R. Vilchez, and V. F. Lucena, “Fractional-order identification system based on sundaresan’s technique,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 185, p. 115132, 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077924006842>
- K. Kothari, U. V. Mehta, and R. Prasad, “Fractional-order system modeling and its applications,” *Journal of Engineering Science and Technology Review*, vol. 12, no. 6, pp. 1–10, 2019.
- C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, *Fractional-order Systems and Control: Fundamentals and Applications*, 1st ed., ser. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag London, 2010.
- U. Mehta, K. Bingi, and S. Saxena, *Fractional Order Processes. Simulation Identification and Control*. CRC, 2019.
- E. Kaslik and S. Sivasundaram, “Differences between fractional- and integer-order dynamics,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1637, no. 1, pp. 479–486, 12 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4904613>
- A. Yüce, T. Dođruer, and N. Tan, “Analysis of numerical methods in fractional order control systems with time delay and large time coefficient,” *journal of new results in science*, vol. 7, no. 3, pp. 44–53, 2018.
- J. Baranowski, W. Bauer, M. Zagórowska, T. Dziwiński, and P. Piątek, “Time-domain oustaloup approximation,” in *2015 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2015, pp. 116–120.

- L. Chen, D. Xue, and X. Cui, “Modeling and control of irrational fractional-order system and its block diagram simulation,” in *2022 34th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2022, pp. 115–120.
- K. Sundaresan, C. Prasad, and P. Krishnaswamy, *Evaluating Parameters from Process Transients*. Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development, 1978.
- F. Merrikh-Bayat and M. Karimi-Ghartemani, *Some Properties of Three-Term Fractional Order System*. Fractional Calculus and Applied Analysis: An international Journal for Theory and Applications, 2008, vol. 3.
- M. S. Tavazoei, “Overshoot in the step response of fractional-order control systems,” *Journal of Process Control*, vol. 22, no. 1, pp. 90–94, 2012. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152411001983>
- L. Ljung, *System Identification: Theory for User*, 2nd ed. Prentice Hall, 1999.
- D. Valério and J. da Costa, *An Introduction to Fractional Control*, ser. Control, Robotics and Sensors Series. Institution of Engineering and Technology, 2013.
- D. Pang, W. Jiang, and A. U. K. Niazi, “Ractional derivatives of the generalized mittag-leffler functions,” *Advances in Continuous and Discrete Models* 2018, 2018.
- S. Zhou, J. Cao, and Y. Chen, “Genetic algorithm-based identification of fractional-order systems,” *Entropy*, vol. 15, no. 5, pp. 1624–1642, 2013. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1099-4300/15/5/1624>
- S. Victor, R. Malti, H. Garnier, and A. Outstaloup, *Parameter and differentiation order estimation in fractional models*. Elsevier Ltd., 2013.
- J.-C. Wang, D.-Y. Liu, D. Boutat, and Y. Wang, “An innovative modulating functions method for pseudo-state estimation of fractional order systems,” *ISA Transactions*, vol. 136, pp. 334–344, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001905782200605X>
- J.-C. Wang, D.-Y. Liu, D. Boutat, Y. Wang, and Z.-H. Wu, “Non-asymptotic and robust estimation for fractional order pseudo-state space model using an algebraic parametric

- method,” *Digital Signal Processing*, vol. 134, p. 103899, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200422005164>
- X. Zhang, S. Zhang, F. Xiong, L. Liu, L. Zhang, X. Han, H. Wang, Y. Zhang, and R. Ren, “System identification and fractional-order proportional–integral–derivative control of a distributed piping system,” *Fractal and Fractional*, vol. 8, no. 2, 2024. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2504-3110/8/2/122>
- J. Wang, Y. Ji, and C. Zhang, “Iterative parameter and order identification for fractional-order nonlinear finite impulse response systems using the key term separation,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 35, pp. 1562 – 1577, 2021. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:237976556>
- W. Yu, H. Liang, R. Chen, C. Wen, and Y. Luo, “Fractional-order system identification based on an improved differential evolution algorithm,” *Asian Journal of Control*, vol. 24, no. 5, pp. 2617–2631, 2022. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asjc.2675>
- P. Ziubinski and D. Sierociuk, “Fractional order noise identification with application to temperature sensor data,” in *2015 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 2015, pp. 2333–2336.
- R. Caponetto, F. Sapuppo, V. Tomasello, G. Maione, and P. Lino, “Fractional-order identification and control of heating processes with non-continuous materials,” *Entropy*, vol. 18, no. 11, 2016. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1099-4300/18/11/398>
- N. M. Yusof, N. Ishak, R. Adnan, M. Tajjudin, and M. H. F. Rahiman, “Identification of electro-hydraulic actuator system using commensurate fractional-order,” in *2015 IEEE Conference on Systems, Process and Control (ICSPC)*, 2015, pp. 157–161.
- A. Coronel-Escamilla, J. E. Solís-Pérez, J. F. Gómez-Aguilar, J. R. Razo-Hernández, A. A. Alderremy, and S. Aly, “Dynamics and synchronization of a fractional conformable neural network with power-law,” *The European physical journal. ST, Special topics*, vol. 231, no. 10, pp. 1771–1788, 2022.
- E. Viera-Martin, J. F. Gómez-Aguilar, J. E. Solís-Pérez, J. A. Hernández-Pérez, and V. H. Olivares-Peregrino, “Anti-synchronization of a m-hopfield neural network with

- generalized hyperbolic tangent activation function,” *The European physical journal. ST, Special topics*, vol. 231, no. 10, pp. 1801–1814, 2022.
- E. Viera-Martin, J. F. Gómez-Aguilar, J. E. Solís-Pérez, J. A. Hernández-Pérez, and R. F. Escobar-Jiménez, “Artificial neural networks: a practical review of applications involving fractional calculus,” *The European physical journal. ST, Special topics*, vol. 231, no. 10, pp. 2059–2095, 2022.
- M. Kumar and T. K. Rawat, “Optimal design of fir fractional order differentiator using cuckoo search algorithm,” *Expert Systems with Applications*, vol. 42, no. 7, pp. 3433–3449, 2015.
- Y. Tang, X. Zhang, C. Hua, L. Li, and Y. Yang, “Parameter identification of commensurate fractional-order chaotic system via differential evolution,” *Physics Letters A*, vol. 376, no. 4, pp. 457–464, 2012.
- W. Zhu, J. an Fang, Y. Tang, W. Zhang, and Y. Xu, “Identification of fractional-order systems via a switching differential evolution subject to noise perturbations,” *Physics Letters A*, vol. 376, no. 45, pp. 3113–3120, 2012.
- W. Du, Q. Miao, L. Tong, and Y. Tang, “Identification of fractional-order systems with unknown initial values and structure,” *Physics Letters A*, vol. 381, no. 23, pp. 1943–1949, 2017.
- W. Du, L. Tong, and Y. Tang, “Metaheuristic optimization-based identification of fractional-order systems under stable distribution noises,” *Physics Letters A*, vol. 382, no. 34, pp. 2313–2320, 2018.
- R. Mansouri, M. Bettayeb, T. Djamah, and S. Djennoune, “Vector fitting fractional system identification using particle swarm optimization,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 206, no. 2, pp. 510–520, 2008, includes Special issue on Modeling, Simulation, and Applied Optimization (ICMSAO-07).
- R. Gupta, S. Gairola, and S. Diwiedi, “Fractional order system identification and controller design using pso,” in *2014 Innovative Applications of Computational Intelligence on Power, Energy and Controls with their impact on Humanity (CIPECH)*, 2014, pp. 149–153.

- W. Hu, Y. Yu, and W. Gu, "Parameter estimation of fractional-order arbitrary dimensional hyperchaotic systems via a hybrid adaptive artificial bee colony algorithm with simulated annealing algorithm," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 68, pp. 172–191, 2018.
- Y. Mousavi and A. Alfi, "Fractional calculus-based firefly algorithm applied to parameter estimation of chaotic systems," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 114, pp. 202–215, 2018.
- M. Z. Othman and E. Alsabawi, "Fractional order systems identification based on genetic algorithms," *Journal of Engineering Science and Technology*, vol. Vol.8, pp. 713–722, 12 2013.
- D. Hao, D. Li, and Y. Liao, "Parameter identification of modified fractional zener model for thermorheological materials," *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 409, pp. 106–119, 2015.
- Y. Tang, H. Liu, W. Wang, Q. Lian, and X. Guan, "Parameter identification of fractional order systems using block pulse functions," *Signal Processing*, vol. 107, pp. 272–281, 2015, special Issue on ad hoc microphone arrays and wireless acoustic sensor networks Special Issue on Fractional Signal Processing and Applications. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168414001686>
- Y. Li, X. Meng, B. Zheng, and Y. Ding, "Parameter identification of fractional order linear system based on haar wavelet operational matrix," *ISA Transactions*, vol. 59, pp. 79–84, 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057815001937>
- K. Kothari, U. Mehta, and J. Vanualailai, "A novel approach of fractional-order time delay system modeling based on haar wavelet," *ISA Transactions*, vol. 80, pp. 371–380, 2018. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001905781830274X>
- K. Kothari, "Application of fractional calculus for parameter estimation of nonlinear wiener systems with time delay," *IEEE Access*, vol. 12, pp. 26 281–26 294, 2024.
- K. Kothari, U. Mehta, and J. Vanualailai, "Fractional-order models of time delay systems

- using walsh operational matrices,” in *2018 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, 2018, pp. 1555–1560.
- A. Bhrawy and A. Alofi, “The operational matrix of fractional integration for shifted chebyshev polynomials,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 26, no. 1, pp. 25–31, 2013. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965912000444>
- M. Ghanbari and M. Haeri, “Parametric identification of fractional-order systems using a fractional legendre basis,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 224, no. 3, pp. 261–274, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1243/09596518JSCE833>
- X. Li and J. A. Rosenfeld, “Fractional order system identification with occupation kernel regression,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 6, pp. 19–24, 2022.
- B. Zhang, P. Shang, and Q. Zhou, “The identification of fractional order systems by multiscale multivariate analysis,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 144, p. 110735, 2021. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077921000886>
- N. Ayazi, P. Mokhtary, and B. P. Moghaddam, “Efficiently solving fractional delay differential equations of variable order via an adjusted spectral element approach,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 181, p. 114635, 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077924001863>
- Àngela Sebastià Bargues, J.-L. Polo Sanz, I. García-Camacha Gutiérrez, and R. Martín Martín, “Practical implementation of optimal experimental design using the fractional-order fricke–morse bioimpedance model,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 170, p. 113374, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077923002758>
- O. Cois, A. Oustaloup, T. Poinot, and J.-L. Battaglia, “Fractional state variable filter for system identification by fractional model,” in *2001 European Control Conference (ECC)*, 2001, pp. 2481–2486.

- T. C. A. Narang, S.L. Shah, “Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, pp. 900–912(12), May 2011. [Online]. Available: <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-cta.2010.0718>
- R. Malti, S. Victor, A. Oustaloup, and H. Garnier, “An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 14 379–14 384, 2008, 17th IFAC World Congress. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016413017>
- S. Victor, R. Malti, H. Garnier, and A. Oustaloup, “Parameter and differentiation order estimation in fractional models,” *Automatica*, vol. 49, no. 4, pp. 926–935, 2013. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109813000277>
- S. Victor, R. Malti, and A. Oustaloup, “Instrumental variable method with optimal fractional differentiation order for continuous-time system identification,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 42, no. 10, pp. 904–909, 2009, 15th IFAC Symposium on System Identification. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S147466701638764X>
- M. Chetoui, R. Malti, M. Thomassin, M. Aoun, S. Najjar, A. Oustaloup, and M. N. Abdelkrim, “Eiv methods for system identification with fractional models,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, no. 16, pp. 1641–1646, 2012, 16th IFAC Symposium on System Identification. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S147466701538191X>
- Z. Yakoub, M. Chetoui, M. Amairi, and M. Aoun, “A bias correction method for fractional closed-loop system identification,” *Journal of Process Control*, vol. 33, pp. 25–36, 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152415001274>
- Z. Li and Y. Chen, “Identification of linear fractional order systems using the relay feedback approach,” in *2014 American Control Conference*. IEEE, 2014, pp. 3704–3709.
- S. Ahmed, “Parameter and delay estimation of fractional order models from step response,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 8, pp. 942–947, 2015, 9th IFAC

- Symposium on Advanced Control of Chemical Processes ADCHEM 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315011726>
- M. Tavakoli-Kakhki, M. Saleh Tavazoei, and A. Mesbahi, "Parameter and order estimation from noisy step response data," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 1, pp. 492–497, 2013, 6th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015348825>
- M. Tavakoli-Kakhki and M. Tavazoei, "Estimation of the order and parameters of a fractional order model from a noisy step response data 1," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 136, p. 031020, 05 2014.
- M. Tavakoli-Kakhki, M. Haeri, and M. Saleh Tavazoei, "Simple fractional order model structures and their applications in control system design," *European Journal of Control*, vol. 16, no. 6, pp. 680–694, 2010. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0947358010706956>
- H. Malek, Y. Luo, and Y. Chen, "Identification and tuning fractional order proportional integral controllers for time delayed systems with a fractional pole," *Mechatronics*, vol. 23, no. 7, pp. 746–754, 2013, 1. Fractional Order Modeling and Control in Mechatronics 2. Design, control, and software implementation for distributed MEMS (dMEMS). [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957415813000299>
- A. Mehmood and M. A. Z. Raja, "Fuzzy-weighted differential evolution computing paradigm for fractional order nonlinear wiener systems," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 159, p. 112160, 2022. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922003708>
- Y. He, J. Peng, and S. Zheng, "Fractional-order financial system and fixed-time synchronization," *Fractal and Fractional*, vol. 6, no. 9, 2022. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2504-3110/6/9/507>
- S. Adigintla, M. V. Aware, and N. Arun, "Fractional order transfer function identification of six-phase induction motor using dual-chirp signal," *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, vol. 11, no. 5, pp. 5183–5194, 2023.

- D. Valério and I. Tejado, “Identifying a non-commensurable fractional transfer function from a frequency response,” *Signal Processing*, vol. 107, pp. 254–264, 2015, special Issue on ad hoc microphone arrays and wireless acoustic sensor networks Special Issue on Fractional Signal Processing and Applications. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168414000954>
- S. E. Hamdi, M. Amairi, and M. Aoun, “Recursive set-membership parameter estimation of fractional systems using orthotopic approach,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 40, no. 15, pp. 4185–4197, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1177/0142331217744853>
- J. J. Gude, A. Di Teodoro, O. Camacho, and P. G. Bringas, “A new fractional reduced-order model-inspired system identification method for dynamical systems,” *IEEE Access*, vol. 11, pp. 103 214–103 231, 2023.
- R. Gorenflo, A. Kilbas, F. Mainardi, and S. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions Related Topics and Applications*. Springer, 2014.
- J. W. Hanneken and B. Narahari Achar, “Finite series representation of the inverse mittag-leffler function,” *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.
- I. O. Sarumi, K. M. Furati, and A. Q. Khaliq, “Highly accurate global padé approximations of generalized mittag-leffler function and its inverse,” *Journal of Scientific Computing*, vol. 82, no. 2, p. 46, 2020.
- B. Bolzano, “Rein analytischer beweis des lehrsatzes dass zwischen je zwey werthen, die ein entgegengesetztes resultat gewaehren, wenigstens eine reele wurzel der gleichung liege,” *Hist.Math*, pp. 156–185, 1980.
- S. Garrett, “Introductory numerical methods,” in *Introduction to Actuarial and Financial Mathematical Methods*. San Diego: Academic Press, 2015, ch. 13, pp. 411–463.
- A. Tepljakov, V. Vunder, E. Petlenkov, S. S. Nakshatharan, A. Punning, V. Kaparin, J. Belikov, and A. Aabloo, “Fractional-order modeling and control of ionic polymer-metal composite actuator,” *Smart Materials and Structures*, vol. 28, no. 8, p. 084008, jul 2019. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-665X/ab2c75>

J. J. Gude and P. García Bringas, “Proposal of a general identification method for fractional-order processes based on the process reaction curve,” *Fractal and Fractional*, vol. 6, no. 9, 2022. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2504-3110/6/9/526>