UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Maycon de Castro Santana

Existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos para operadores weighted shifts

Manaus - AM

2025

Maycon de Castro Santana

Existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos para operadores weighted shifts

Dissertação apresentada como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves

Manaus - AM

2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S232e Santana, Maycon de Castro
Existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos para operadores weighted shifts / Maycon de Castro Santana. - 2025.
105 f. ; 31 cm.

Orientador(a): Thiago Rodrigo Alves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Manaus, 2025.

1. Análise funcional. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Dinâmica linear. 4. Operadores hipercíclicos. 5. Subespaços frequentemente hipercíclicos. I. Alves, Thiago Rodrigo. II. Universidade Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título

Maycon de Castro Santana

Existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos para operadores weighted shifts

Dissertação apresentada como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas.

Dissertação de Mestrado. Manaus - AM, 31 de Julho de 2025:

Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves
Orientador
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

Prof. Dr. Fernando Vieira Costa Júnior
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. Moacir Aloisio Nascimento dos Santos
Examinador Externo
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM)

Manaus - AM
2025

Dedicatória

À minha mãe, Maria Anunciação, por todo o amor, coragem e sacrifício. Aos meus irmãos, Maiclei, Manoelle e Marlon, com quem compartilho minha história, minha esperança e minhas maiores motivações. A todos que, de alguma forma, fizeram parte da minha caminhada e me ajudaram a realizar este sonho.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à minha mãe, Maria Anunciação, minha maior referência de força e coragem, pelo amor, pela criação, pelo cuidado, por todos os conselhos e ensinamentos. Foi com sua máquina de costura e uma imensa vontade de vencer na vida que ela sustentou nossa família e nos guiou pelo caminho do bem. Criou quatro filhos, enfrentando de perto as dificuldades da vida ribeirinha, sem nunca nos deixar faltar o essencial. Com ela aprendi a importância da humildade, da honestidade e do respeito.

À minha família: meus irmãos Maiclei, Manoelle e Marlon, pelos momentos que vivemos juntos desde a infância; meus sobrinhos Lorenzo e Lohan; minha tia Maria da Conceição, nossa primeira educadora, pelos conselhos e incentivos; meus primos Bruno, Elivelton, Eliana e Vanessa. Em especial, aos meus avós Eunice e Manoel, pelo amparo em diversas situações.

Ao meu orientador, professor Thiago Alves, por ter acreditado em mim, pela confiança, pelo incentivo e por tudo o que compartilhou comigo ao longo dessa caminhada.

Aos amigos da graduação Victor Grana, Micael, Rayanne, Franklin, Sabrina, Ocimara e Pâmela, por todos os momentos compartilhados.

Aos amigos que conheci em Manaus durante o mestrado: Vinicius Chagas, Samiles, Samir, Marcos Mota, Clenilton, Karolline, Thiago Cacau e Gustavo Souza, agradeço por cada conversa, incentivo e companhia ao longo da jornada.

Aos meus professores da graduação Deimer Aleans, Elizeu França, Lúcio Fábio, Silvina Martinez, João Raimundo e Fernando Soares.

Aos professores do mestrado, em especial Thiago Alves, Somayeh Mousavinasr, Cícero Mota e Inês Padilha.

Ao professor Marcus Marrocos, coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFAM, pela disponibilidade, atenção e pelo trabalho dedicado à gestão do programa.

À UFAM, por ter sido minha casa durante esses seis anos, da graduação ao mestrado. E à CAPES, pelo apoio financeiro que tornou possível essa etapa da minha trajetória.

"Nada vai te bater tão forte quanto a vida, e não importa o quão forte você consiga bater, mas sim o quanto você consegue apanhar e continuar seguindo em frente. O quanto é capaz de suportar as dores e, ainda assim, se manter firme no propósito de transformar a própria história. É assim que se vence."

(Rocky Balboa, 2006)

Resumo

SANTANA, M. **Existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos para operadores weighted shifts**. 2025. Dissertação de Mestrado – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus.

Nesta dissertação, estudamos critérios de existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos. Inicialmente, apresentamos resultados clássicos da análise funcional necessários ao desenvolvimento deste estudo. Em seguida, discutimos propriedades importantes a respeito da dinâmica de operadores hipercíclicos, com destaque para o Critério de Hiperciclicidade. Também introduzimos as noções de subespaços e operadores frequentemente hipercíclicos. O objetivo principal deste trabalho é o estudo detalhado dos resultados do artigo [33], que estabelece condições para a existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos em operadores *weighted shifts*. Ao final, construímos exemplos de operadores que satisfazem esses critérios.

Palavras-chave: Análise funcional, sistemas dinâmicos, dinâmica linear, operadores hipercíclicos, subespaços frequentemente hipercíclicos.

Abstract

SANTANA, M. **Existence and nonexistence of frequently hypercyclic subspaces for weighted shift operators**. 2025. Master's Dissertation – Institute of Exact Sciences, Federal University of Amazonas, Manaus.

In this dissertation, we study criteria for the existence and nonexistence of frequently hypercyclic subspaces. We begin by presenting classical results from functional analysis that are essential for the development of this study. Then, we discuss important properties related to the dynamics of hypercyclic operators, with emphasis on the Hypercyclicity Criterion. We also introduce the notions of frequently hypercyclic operators and frequently hypercyclic subspaces. The main goal of this work is to provide a detailed study of the results in [33], which establishes conditions for the existence and nonexistence of frequently hypercyclic subspaces for weighted shift operators. Finally, we construct examples of operators that satisfy these criteria.

Keywords: Functional analysis, dynamical systems, linear dynamics, hypercyclic operators, frequently hypercyclic subspaces.

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\|x\|$	módulo de x
$\\|\cdot\\|$	norma
$\mathrm{span}(S)$	subespaço gerado pelo conjunto S
$\ker(T)$	núcleo do operador T
$\mathrm{Im}(T)$	imagem do operador T
$T^n(x)$	iterada n-ésima do operador T sobre x
$\{T^n(x) : n \geq 0\}$	órbita de um operador T
ℓ_p	$\left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty\right\}, 1 \leq p < \infty$
c_0	espaço das sequências que convergem para zero
c_{00}	espaço das sequências eventualmente nulas
e_n	vetor $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ em que o 1 está na entrada n-ésima
$B(x; r)$	bola aberta de centro x e raio r
$L(X)$	espaço dos operadores lineares limitados em X
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	produto cartesiano do corpo $\mathbb{K}$ n vezes
X'	dual topológico de X
$\overline{X}$	fecho de X
$HC(T)$	conjunto de vetores hipercíclicos do operador T
$\mathrm{dens}(A)$	densidade natural de $A \subset \mathbb{N}_0$
$\underline{\mathrm{dens}}(A)$	densidade inferior de $A \subset \mathbb{N}_0$
$\overline{\mathrm{dens}}(A)$	densidade superior de $A \subset \mathbb{N}_0$
$\sim$	relação de equivalência
$\cong$	isomorfismo algébrico
$v(x)$	valoração da sequência $x \in \ell_p$
B_w	operador weighted shift com peso w

$G(k, C)$	conjunto de índices n tais que $\|B_w^n e_k\| \leq C$
$\widetilde{X}$	complexificação do espaço vetorial real X
$\widetilde{T}$	complexificação de um operador linear T
T'	adjunto do operador linear contínuo T
X/S	espaço quociente de X por S
$H(\Omega)$	espaço das funções holomorfas definidas no aberto Ω
$\{-1, 1\}^{\mathbb{N}_0}$	conjunto das sequências de sinais, com cada termo em $\{-1, 1\}$

Sumário

Introdução

A dinâmica linear é um ramo da análise funcional que estuda o comportamento das órbitas de vetores sob a ação de operadores lineares. Ao que tudo indica, os primeiros exemplos de operadores com órbita densa foram apresentados por Birkhoff [7] em 1929, MacLane [31] em 1952 e Rolewicz [42] em 1969, representando um marco importante para a área, que só se estabeleceu de fato a partir de 1982 com a tese de doutorado de C. Kitai [25]. Operadores com órbita densa passaram a ser chamados de *hipercíclicos*, e o interesse neles motivou a descoberta de resultados importantes, como o *Critério de Hiperciclicidade*. As primeiras versões desse critério foram apresentadas, de forma independente, por Kitai [25] e por Gethner e Shapiro [17]. O avanço da teoria levou a noções mais fortes, como a de *operadores frequentemente hipercíclicos*, que possuem órbita não apenas densa, mas que retorna com "frequência positiva" aos abertos do espaço. Vetores com órbitas desse tipo são chamados de *vetores frequentemente hipercíclicos*. Também foi estabelecido o *Critério de Hiperciclicidade Frequente*, proposto por Bayart e Grivaux [3, 2] e posteriormente aprimorado por Bonilla e Grosse-Erdmann [9].

Herrero [24] e Bourdon [12] provaram, de maneira independente, que operadores hipercíclicos em espaços de Banach possuem um subespaço denso onde cada vetor não nulo é hipercíclico. Em 1995, González e Montes [18] apresentaram um exemplo de operador em $H(\Omega)$ que possui um subespaço fechado de dimensão infinita cujos vetores não nulos são todos hipercíclicos. Esse tipo de subespaço é chamado de *subespaço hipercíclico*. Em 1996, Montes [37] foi o primeiro a apresentar um exemplo de operador que não admite subespaço hipercíclico, além de propor um critério suficiente para a existência desses subespaços. Posteriormente, González et al. [21] estabeleceram uma caracterização da existência de subespaços hipercíclicos, no contexto de espaços de Banach, para uma certa subclasse de operadores — a saber, os hereditariamente hipercíclicos — por meio de seu espectro. Um exemplo de operador em que todo vetor não nulo é hipercíclico foi construído por Read [41]. Um critério para a inexistência de subespaços hipercíclicos foi apresentado por León e Müller [28]. O interesse em operadores que admitem subespaços hipercíclicos motivou diversos outros resultados, sendo objeto de intensa investigação nos últimos anos. Prova disso, por exemplo, são os trabalhos [1, 20, 19, 6, 14, 26, 27, 39, 43, 40, 36, 34]. Um resultado importante nessa linha de pesquisa foi obtido por Quentin Menet [35], que estabeleceu uma condição necessária e suficiente para que operadores *weighted shifts* admitam subespaços hipercíclicos em ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, abrindo caminho para outras contribuições relacionadas a esse tipo de operador.

Recentemente, Bonilla e Grosse-Erdmann, em [8], introduziram a noção de *subespaço frequentemente hipercíclico*, ou seja, subespaços fechados de dimensão infinita nos quais todo vetor não nulo é frequentemente hipercíclico. Nesse trabalho, os autores apresentam condições suficientes para a existência desses subespaços, com base no critério de hiperciclicidade frequente. Embora tais resultados representem um avanço importante na teoria, a linha de pesquisa que estuda os operadores que admitem (ou não) subespaços frequentemente hipercíclicos ainda não foi amplamente explorada na literatura, configurando-se como um ramo promissor para investigação.

Ao longo dos quatro primeiros capítulos desta dissertação, desenvolvemos um estudo sobre a dinâmica de operadores hipercíclicos e frequentemente hipercíclicos em espaços de Banach, desde pré-requisitos, passando por propriedades básicas das órbitas hipercíclicas, pelo Critério de Hiperciclicidade, até os conceitos de hiperciclicidade frequente e critérios gerais para a existência de subespaços frequentemente hipercíclicos. Esse conteúdo serve de base para o objetivo principal, feito no último capítulo, que é a análise do artigo [33], de Quentin Menet, que trata de critérios de existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos para *weighted shifts*. As demonstrações presentes no artigo são, em geral, enxutas, com algumas afirmações apresentadas sem qualquer justificativa. Assim, uma das contribuições deste trabalho é fazer o detalhamento completo de cada uma delas, abrindo as contas e justificando cada argumento feito.

No Capítulo 1, apresentamos as definições e os resultados preliminares que servem de base para os capítulos seguintes. A maior parte dos teoremas são clássicos, e suas demonstrações podem ser encontradas nas referências indicadas. Entretanto, como não encontramos a demonstração de alguns resultados na literatura consultada, optamos por incluí-las para tornar a exposição mais completa.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da dinâmica de operadores hipercíclicos em espaços de Banach. Começamos definindo o conceito de operador hipercíclico e apresentando algumas de suas propriedades, como a inexistência desse tipo de operador em espaços de dimensão finita. Também discutimos resultados sobre a estrutura das órbitas hipercíclicas, incluindo sua independência linear. Encerramos o capítulo com um exemplo clássico de operador hipercíclico.

O terceiro capítulo aborda o Critério de Hiperciclicidade, tendo início com o Teorema da Transitividade de Birkhoff, que relaciona hiperciclicidade frequente e transitividade topológica. Desse teorema, provamos algumas consequências, sendo a principal delas a que afirma que satisfazer o Critério de Hiperciclicidade é suficiente para garantir a hiperciclicidade de um operador, sem que seja necessário construir um vetor hipercíclico. Ao final, incluímos outros resultados, como a conexidade do conjunto de vetores hipercíclicos.

O Capítulo 4 inicia-se com as noções de densidade para subconjuntos de $\mathbb{N}_0$. A ideia é motivar e introduzir os conceitos de operadores e subespaços frequentemente hipercíclicos, que são o foco deste capítulo. Também discutimos o Critério de Hiperciclicidade Frequente e finalizamos com uma condição suficiente para a não existência de subespaços frequentemente hipercíclicos.

Finalmente, no Capítulo 5, detalhamos os resultados do artigo [33] sobre critérios de existência e inexistência para subespaços frequentemente hipercíclicos. Organizamos este capítulo em duas partes. Na primeira, apresentamos um exemplo que fornece uma resposta positiva ao Problema 1, presente em [8]:

Existe um operador frequentemente hipercíclico que possui um subespaço hipercíclico, mas não um subespaço frequentemente hipercíclico?

Para isso, destacamos duas condições suficientes para a inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos, sendo a segunda específica para operadores weighted shifts. Na segunda etapa, o foco se volta para critérios que garantem a existência desses subespaços, também para weighted shifts. Finalizamos com a construção de um operador que satisfaz esses critérios.

1 Resultados Preliminares

Neste capítulo, reunimos definições e resultados importantes que serão utilizados ao longo do trabalho, servindo de base para as demonstrações e discussões nos próximos capítulos. Quando não apresentadas, as demonstrações dos teoremas enunciados podem ser encontradas nas referências citadas. Além disso, supomos que o leitor possui conhecimento prévio de Análise Real e Topologia Geral.

1.1 Espaços Métricos

Embora a teoria dos espaços métricos anteceda a topologia geral e, portanto, seus conceitos básicos já sejam presumidos como conhecidos, optamos por destacar nesta seção versões específicas de certas definições e teoremas que adotamos, bem como apresentar demonstrações de resultados que não foram encontrados na literatura clássica.

Lembre que um *espaço métrico* é um par (X, d), onde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função, denominada *métrica*, que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq (x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.1. Um espaço métrico X é dito ser *separável* se possui um subconjunto enumerável e denso.

Proposição 1.2. A respeito de um espaço métrico X, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) X é separável;

b) X possui uma base enumerável de conjuntos abertos para sua topologia;

c) X é um espaço de Lindelöf, ou seja, toda cobertura por abertos de X possui uma subcobertura enumerável.

Demonstração. Veja [29, Proposição 9.1.]. $\square$

Lema 1.3. Sejam X um espaço métrico sem pontos isolados e $D \subset X$ denso em X. Se F é um subconjunto finito de D, então $D \setminus F$ também é denso em X.

Demonstração. Vejamos que $D \setminus \{a\}$, com $a \in D$, continua denso em X. Sejam $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Caso $x \neq a$, tome $\delta = \min\{\varepsilon,\ \mathrm{d}(x,a)\}$. Como D é denso, existe $b \in B(x,\delta) \cap D$. Note que $\mathrm{d}(x,b) < \delta \leq \mathrm{d}(x,a)$, o que implica que $b \neq a$. Como $B(x,\delta) \subset B(x.\varepsilon)$, então $b \in B(x,\varepsilon) \cap (D \setminus \{a\})$. Isso prova que $x \in \overline{D \setminus \{a\}}$. Agora, suponha $x = a$. Como x não é um ponto isolado, existe $w \in B(x,\varepsilon)$ tal que $x \neq w$. Uma vez que $B(x,\varepsilon)$ é um conjunto aberto, existe $r > 0$ tal que $B(w,r) \subset B(x,\varepsilon)$. Tome $c = \min\{r,\ \mathrm{d}(w,a)\}$. Como D é denso, existe $b \in B(w;c) \cap D$. Como $\mathrm{d}(w,b) < c \leq \mathrm{d}(w,a)$, segue que $b \neq a$. Logo,

$$b \in B(w,r) \cap (D \setminus \{a\}) \ \subset \ B(x,\varepsilon) \cap (D \setminus \{a\}).$$

Em qualquer caso, $x \in \overline{D \setminus \{a\}}$, ou seja, $D \setminus \{a\}$ é denso em X para qualquer $a \in D$. Agora, seja $F \subset D$ um subconjunto finito com k elementos. Por indução em k, conclui-se que $D \setminus F$ é denso em X. □

Teorema 1.4 (Teorema da Categoria de Baire)**.** Seja M um espaço métrico completo. Então toda interseção enumerável de abertos densos é um subconjunto denso em M.

Demonstração. Veja [29, Proposição 7.19.]. □

Proposição 1.5. Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função contínua com imagem $f(X)$ densa em Y. Se D é denso em X, então $f(D)$ é denso em Y.

Demonstração. Sejam $y \in Y$ e $\varepsilon > 0$. Como $f(X)$ é denso em Y, existe $x \in X$ tal que $f(x) \in B(y;\varepsilon)$. Como f é contínua, $f^{-1}(B(y;\varepsilon))$ é um aberto de X contendo x. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(x;\delta) \subset f^{-1}(B(y;\varepsilon)).$$

Uma vez que D é denso em X, existe $w \in D$ tal que $w \in B(x;\delta)$. Da inclusão anterior, temos que $w \in f^{-1}(B(y;\varepsilon))$, o que implica que $f(w) \in B(y;\varepsilon)$. Isso mostra que para todo $y \in Y$ e todo $\varepsilon > 0$, a bola $B(y;\varepsilon)$ contém um ponto de $f(D)$. Logo, $f(D)$ é denso em Y. □

1.2 Espaços de Banach

Em um espaço vetorial, uma norma é uma função que associa a cada vetor do espaço um número real não negativo. Ademais, esta função goza de propriedades que permitem munir o espaço com uma métrica natural, abrindo caminho para o estudo de propriedades como a completude, que será o foco desta seção. A menos que seja indicado o contrário, todos os espaços vetoriais considerados terão como corpo escalar $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.6. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma *norma* em X é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| \geq 0, \quad e \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço normado*. Podemos definir a função distância $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Não é difícil verificar que essa função satisfaz as propriedades de uma métrica, garantindo que X se torne um espaço métrico. Além disso, um espaço normado completo na métrica induzida pela sua norma recebe o nome de *espaço de Banach*.

Proposição 1.7. Se X é um espaço normado de dimensão finita, então X é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [10, Proposição 1.1.6]. □

Proposição 1.8. Sejam X um espaço de Banach e $Y \subseteq X$ um subespaço fechado. Então Y é um espaço de Banach com a norma induzida de X.

Demonstração. Veja [10, Proposição 1.1.1]. □

Exemplo 1.9. Alguns exemplos de espaços de Banach são:

a) Seja $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. O espaço $\mathbb{K}^N$, munido de qualquer norma, é um espaço de Banach. De fato, como $\mathbb{K}^N$ possui dimensão finita, a Proposição 1.7 garante que este será Banach.

b) O espaço ℓ_p, com $p \in [1, \infty)$, consiste no conjunto de todas as sequências $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de escalares tais que a soma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

é finita. Equipado com a norma $\|\cdot\|_p$, ℓ_p é um espaço de Banach. Veja [10, Seção 1.4].

c) O espaço ℓ_∞ é o conjunto de todas as sequências limitadas de escalares $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, munido da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Esse espaço é de Banach. Veja [10, Seção 1.4].

d) O espaço c_0, que consiste no conjunto das sequências de escalares que convergem para zero. Esse espaço é um subespaço fechado de ℓ_∞ e, pela Proposição 1.8, também é um espaço de Banach. Veja [10, Exemplo 2.1.4].

Exemplo 1.10. O *espaço das sequências eventualmente nulas*, denotado por c_{00}, é definido como

$$c_{00} = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tal que } x_n = 0, \forall n \geq N \right\}.$$

Esse conjunto é subespaço de ℓ_p para qualquer $p \in [1, \infty]$, tornando-se assim um espaço normado. No entanto, c_{00} não é completo em nenhuma dessas normas, pois há sequências em c_{00} que convergem em ℓ_p, mas cujo limite não pertence a c_{00}. Assim, c_{00} não é um espaço de Banach. Veja [10, Exemplo 1.1.7].

Proposição 1.11. Seja $p \in [1, \infty)$. O subconjunto das sequências eventualmente nulas com coordenadas racionais (ou coordenadas em $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ se o corpo dos escalares for complexo) é enumerável e denso em ℓ_p.

Demonstração. Considere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Denotemos por E o conjunto das sequências eventualmente nulas com coordenadas racionais, isto é,

$$E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00} : x_n \in \mathbb{Q} \text{ para todo } n\}.$$

Note que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q}^n \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots).$$

Como $\mathbb{Q}^n \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$ é enumerável para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que E é união enumerável de enumeráveis e, portanto, enumerável.

Vejamos que E é denso em ℓ_p. Sejam $x = (x_n) \in \ell_p$ e $\varepsilon > 0$. Vamos construir um vetor $z \in E$ tal que $\|x - z\|_p < \varepsilon$. Como a soma $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge, então $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|^p \to 0$ quando $m \to \infty$. Tome $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Defina a sequência $y = (y_n)$ por

$$y_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } 1 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A respeito da norma do vetor $x - y$, note que

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para cada $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ existe um racional z_n tal que

$$|y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2N^{1/p}}.$$

Isso permite definir a sequência de coordenadas racionais

$$z = \{z_1, z_2, \ldots, z_N, 0, 0, \ldots\} \in c_{00}.$$

Note que

$$\|y - z\|_p^p = \sum_{n=1}^{N} |y_n - z_n|^p < \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon}{2N^{1/p}}\right)^p = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon^p}{2^p N} = N \cdot \frac{\varepsilon^p}{2^p N} = \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Ou seja,

$$\|y - z\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da desigualdade triangular, temos

$$\|x - z\|_p \leq \|x - y\|_p + \|y - z\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, o conjunto E das sequências eventualmente nulas com coordenadas racionais é denso em ℓ_p no caso real. No caso complexo, basta redefinir o conjunto E trocando $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, já que este é subconjunto enumerável e denso de $\mathbb{C}$, e repetir o argumento. Assim, também no caso complexo, o resultado vale. □

Proposição 1.12. Um espaço normado X é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em X é convergente. Ou seja, se para toda série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em X com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty,$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em X.

Demonstração. Veja [10, Proposição 10.1.4]. □

Proposição 1.13. Seja X um espaço vetorial normado não trivial. Então, nenhum ponto de X é isolado.

Demonstração. Veja [29, Exemplo 1.16]. □

Definição 1.14. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(e_n)_{n\geq 1} \subset X$ é uma *base de Schauder* se, para todo vetor $x \in X$, existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

isto é, a série converge para x na norma de X.

Definição 1.15. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(e_n)_{n\geq 1} \subset X$ é uma sequência básica em X se ela for uma base de Schauder do subespaço fechado*

$$M = \overline{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposição 1.16 (Funcionais coordenados associados a uma sequência básica)**.** *Seja X um espaço de Banach, e seja $(e_n)_{n\geq 1} \subset X$ uma sequência básica. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um funcional linear contínuo $e_n^* \in X'$ tal que, para todo vetor x na forma $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, temos*

$$e_n^*(x) = a_n.$$

Demonstração. É sabido que as aplicações

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \mapsto a_n \in \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N},$$

são funcionais lineares contínuos (veja [38, Corolário 8.4]). O Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.30) garante que esses funcionais podem ser estendidos continuamente a todo o espaço X. Assim, obtemos os funcionais $(e_n^*)_{n\geq 1}$. □

Proposição 1.17. *Seja X um espaço de Banach e $(e_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X. Então, toda subsequência de (e_n) constitui uma sequência básica em X.*

Demonstração. Veja [38, Proposição 10.1]. □

Teorema 1.18 (Teorema de Mazur)**.** *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma sequência básica.*

Demonstração. Veja [30, Theorem 1.a.5]. □

Em um espaço normado X, uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, com $x_n \in X$, é dita *incondicionalmente convergente* se a sua convergência não depende da ordem dos termos, isto é, se toda reordenação da série também converge e converge para o mesmo valor.

Uma definição equivalente (veja [11, Theorem 10.1.6]), mais operacional e comum, é a seguinte:

Definição 1.19. Seja X um espaço normado. Dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, com $x_n \in X$, é *incondicionalmente convergente* se, para toda escolha de sinais $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$$

também converge em X.

1.3 O Espaço de Sequências ℓ_p

O espaço de sequências ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$, será um ambiente de interesse ao longo desta dissertação. Nesta seção, reunimos algumas definições e propriedades adicionais que reforçam a compreensão da estrutura desse espaço.

Exemplo 1.20. Para $1 \leq p < \infty$, os vetores canônicos $(e_j)_{j\geq 1}$, definidos por

$$e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \quad \text{(com 1 na } j\text{-ésima posição)},$$

formam uma base de Schauder no espaço ℓ_p, também conhecida como *base canônica*. Assim, qualquer vetor $x = (x_n) \in \ell_p$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

ou seja, os coeficientes da série são justamente as coordenadas da sequência x.

Demonstração. Veja [10, Exemplo 10.3.3]. □

Definição 1.21. Considere o espaço ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. A *valoração* de um vetor não nulo $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$, denotada por $v(x)$, é definida como sendo

$$v(x) := \min\{j \geq 1 : x_j \neq 0\}.$$

Ou seja, $v(x)$ é o menor índice de coordenada não nula da sequência x.

Proposição 1.22. *Seja M um subespaço fechado de dimensão infinita de ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $k \geq 0$, existe um vetor $y \in M$ tal que a valoração de y satisfaz $v(y) > k$.*

Demonstração. Defina o conjunto

$$W_1 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in M : x_1 = 0\}.$$

Esse conjunto é um subespaço vetorial de M. Vejamos que W_1 tem dimensão infinita.

Suponha, por absurdo, que W_1 tem dimensão finita. Como M tem dimensão infinita, podemos tomar uma sequência $\{x^j\}_{j\geq 1}$ de vetores linearmente independentes (L.I) no conjunto complementar $M \setminus W_1 = \{x \in M : x_1 \neq 0\}$. Agora, considere a seguinte sequência de vetores em W_1:

$$z^1 := x^1 - \frac{x_1^1}{x_1^2} x^2,$$

$$z^2 := x^2 - \frac{x_1^2}{x_1^3} x^3,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$z^j := x^j - \frac{x_1^j}{x_1^{j+1}} x^{j+1}.$$

Observe que

$$z_1^j = x_1^j - \frac{x_1^j}{x_1^{j+1}} x_1^{j+1} = x_1^j - x_1^j = 0,$$

mostrando que $z^j \in W_1$ para todo j. Além disso, a sequência $\{z^j\}_{j\geq 1}$ é L.I, pois $\{x^j\}_{j\geq 1}$ é L.I. Isto contradiz a suposição de que W_1 tem dimensão finita. Logo, W_1 tem dimensão infinita. Agora, defina

$$W_2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in W_1 : x_2 = 0\},$$

Como W_2 é um subespaço de W_1 e W_1 tem dimensão infinita, podemos repetir o argumento anterior para concluir que W_2 tem dimensão infinita. Assim, continuamos esse processo indutivamente, definindo

$$W_{k+1} = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in W_k : x_{k+1} = 0\},$$

e usando o mesmo argumento para concluir que W_{k+1} tem dimensão infinita para todo $k \geq 1$. Dado que W_k tem dimensão infinita para qualquer $k \geq 1$, então ele contém vetores não nulos. Escolhendo um vetor qualquer $y \in W_k$ não nulo, temos por construção que suas primeiras k coordenadas são nulas, ou seja, $v(y) > k$. Como $W_k \subseteq M$, segue que y pertence a M, concluindo a prova. □

1.4 Operadores Lineares Limitados

Essencialmente, um operador linear é uma função entre espaços vetoriais que preserva a estrutura vetorial, isto é, respeita as operações fundamentais de soma e multiplicação por escalar. Mais precisamente, se X e Y são espaços normados, um operador linear é uma função $T : X \to Y$ tal que, para todos $x, y \in X$ e todo escalar λ, temos

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2);$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Não é difícil verificar que o conjunto de todos os operadores lineares de X em Y forma um espaço vetorial. Assim, se temos dois operadores lineares $S, T : X \to Y$, então sua soma $S + T$ também é um operador linear, assim como qualquer múltiplo escalar λT.

Vamos restringir nossa atenção à classe dos operadores lineares limitados, que se caracterizam por transformar qualquer conjunto limitado em outro também limitado, o que nos permitirá definir uma norma para esses operadores.

Definição 1.23. Sejam X e Y espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que um operador linear $T : X \to Y$ é *limitado* se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Não é difícil verificar que o conjunto dos operadores lineares e limitados de X em Y, denotado por $L(X,Y)$, forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Quando $Y = X$, escrevemos simplesmente $L(X)$ para denotar o espaço dos operadores lineares limitados de X em si mesmo. Além disso, no caso particular em que $Y = \mathbb{K}$, o espaço $L(X,\mathbb{K})$ é denotado por X', sendo chamado de *espaço dual* de X. Os elementos de X' são os chamados *funcionais lineares limitados* em X.

Proposição 1.24. Sejam X e Y dois espaços normados, e considere $T : X \to Y$ um operador linear. Então, T é limitado se, e somente se, T é contínuo.

Demonstração. Veja [10, Proposição 2.1.1]. □

Proposição 1.25. Sejam X e Y espaços normados. O espaço vetorial $L(X,Y)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $L(X,Y)$ é um espaço normado quando munido da norma
$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|.$$
2. Para todos $T \in L(X,Y)$ e $x \in X$, vale a desigualdade
$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|.$$
3. Se Y é um espaço de Banach, então $L(X,Y)$ também é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [10, Proposição 2.1.4]. □

Exemplo 1.26. Considere o espaço ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$. Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em ℓ_p, definimos os seguintes operadores de deslocamento ($shifts$):

- O operador *right shift* $S_R : \ell_p \to \ell_p$ é dado por
$$(S_R x)_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ x_{n-1}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$
Esse operador desloca os termos da sequência uma posição para a direita, inserindo um zero na primeira coordenada.
- O operador *left shift* $S_L : \ell_p \to \ell_p$ é dado por
$$(S_L x)_n = x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Esse operador desloca os termos da sequência uma posição para a esquerda, descartando a primeira coordenada.

É fácil verificar que S_R e S_L são lineares. Vamos provar que ambos são contínuos. Para S_R, sabemos que

$$\|S_R x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(S_R x)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Substituindo a definição de $S_R x$, obtemos

$$\|S_R x\|_p = \left(|0|^p + \sum_{n=2}^{\infty} |x_{n-1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

Assim, $\|S_R\| \leq 1$, o que garante que S_R é contínuo. Para S_L, temos

$$\|S_L x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(S_L x)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Substituindo a definição de $S_L x$, segue que

$$\|S_L x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

Portanto, $\|S_L\| \leq 1$, o que mostra que S_L também é contínuo. Logo, os operadores shifts à direita e à esquerda são operadores lineares e contínuos no espaço ℓ_p.

Proposição 1.27. *Sejam X, Y e Z espaços normados e sejam $T \in L(X,Y)$ e $S \in L(Y,Z)$. Então a composição $S \circ T : X \to Z$, definida por*

$$(S \circ T)(x) = S(T(x))$$

para todo $x \in X$, é um operador linear e contínuo, ou seja, $S \circ T \in L(X,Z)$.

Demonstração. É fácil ver que $S \circ T$ é linear. A continuidade segue do fato de que a composição de aplicações contínuas entre espaços métricos arbitrários é uma aplicação contínua. □

Definição 1.28. Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ um operador linear contínuo. O *adjunto* de T é o operador $T' : Y' \to X'$ definido por

$$T'(\varphi) = \varphi \circ T, \quad \text{para todo } \varphi \in Y'.$$

Definição 1.29. Seja X um espaço de Banach e seja $T : X \to X$ um operador linear contínuo. Dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um *autovalor* de T se existir um vetor não nulo $x \in X$ tal que

$$T(x) = \lambda x.$$

Neste caso, dizemos que x é um *autovetor* associado a λ.

1.5 Teorema de Hahn-Banach

Um dos teoremas mais importantes da Análise Funcional é o Teorema de Hahn-Banach, que assegura que um funcional linear contínuo definido em um subespaço de um espaço vetorial normado pode ser estendido a todo o espaço sem que sua norma seja alterada. Além dessa formulação, o teorema também possui versões geométricas que fornecem critérios para a separação de conjuntos convexos.

Teorema 1.30 (Teorema de Hahn-Banach, extensão de funcionais lineares)**.** *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e M um subespaço de X. Suponha que $\varphi : M \to \mathbb{K}$ seja um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $F : X \to \mathbb{K}$ que estende φ e que satisfaça $\|F\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Veja [10, Corolário 3.1.3]. □

Definição 1.31. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Um subconjunto $A \subset X$ é dito *convexo* se, para quaisquer $x, y \in A$ e para todo $t \in [0,1]$, tem-se

$$(1-t)x + ty \in A.$$

Teorema 1.32 (Teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica)**.** *Sejam A e B dois subconjuntos de um espaço normado X, ambos convexos, não vazios e disjuntos. Se A for um conjunto aberto, então existem um funcional $\varphi \in X'$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y), \quad \textit{para todos } x \in A \textit{ e } y \in B.$$

Demonstração. Veja [10, Teorema 3.4.8]. □

Teorema 1.33 (Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica)**.** *Sejam A e B dois subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos de um espaço normado E. Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e dois escalares $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ tais que:*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y), \quad \textit{para todos } x \in A \textit{ e } y \in B.$$

Demonstração. Veja [10, Teorema 3.4.9]. □

Corolário 1.34. *Seja X um espaço normado. Um subespaço vetorial M de X é denso em X se, e somente se, todo funcional linear contínuo que anula M também anula X.*

Demonstração. Veja [13, Corollary 1.8.].

□

Proposição 1.35. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$.*

a) *Se as funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ têm imagem densa, então $g \circ f$ também tem imagem densa.*

b) *Se $f : X \to Y$ é uma função contínua, com imagem densa, então λf tem imagem densa para todo escalar $\lambda \neq 0$.*

Demonstração. a) Como $g(Y)$ é denso em Z e $D = f(X)$ é denso em Y, aplicando a Proposição 1.5, temos que $g(D) = g(f(X))$ é denso em Z. Assim, $(g \circ f)(X)$ é denso em Z, o que conclui a demonstração do item (a).

b) Seja $y \in Y$. Como $f(X)$ é denso em Y, existe uma sequência $\{x_n\} \subset X$ tal que

$$f(x_n) \longrightarrow \frac{y}{\lambda} \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Como λf é contínua (pois f é contínua), segue que

$$\lambda f(x_n) \longrightarrow \lambda \cdot \frac{y}{\lambda} = y \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Ou seja,

$$\lambda f(x_n) \longrightarrow y \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Isso mostra que $\lambda f(X)$ é denso em Y. □

Observação 1.36. *O enunciado do item b) da proposição anterior pode ser generalizado via argumento indutivo da seguinte forma: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espaços vetoriais normados em $\mathbb{K}$ e seja $f_k : X_k \to X_{k+1}$ uma função contínua para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Se a imagem de f_k é densa em X_{k+1} para cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, então a composição $f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_1 : X_1 \to X_n$ é uma função contínua cuja imagem é densa em X_n.*

1.6 Espaço Quociente Vetorial

Definição 1.37. Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $S \subseteq X$ um subespaço vetorial. Define-se o *espaço quociente (vetorial)* X/S como o conjunto das classes laterais de S em X, isto é,

$$X/S = \{x + S : x \in X\},$$

onde $x + S = \{x + s : s \in S\}$. Em X/S, definimos as operações de adição e multiplicação por escalar, respectivamente, da seguinte maneira: dados $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$(x + S) + (y + S) := (x + y) + S, \quad \text{e} \quad \lambda(x + S) := (\lambda x) + S.$$

É fácil verificar que essas operações estão bem definidas (isto é, independem dos representantes escolhidos) e que tornam X/S um espaço vetorial.

Definição 1.38. Sejam X um espaço vetorial e $S \subseteq X$ um subespaço vetorial. Chamamos de *codimensão* de S em X a dimensão do espaço quociente X/S.

Lema 1.39. *Seja X um espaço de Banach separável e de dimensão infinita. Para qualquer subespaço de dimensão finita F de X, e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um subespaço fechado E de codimensão finita em X tal que para qualquer $x \in E$ e qualquer $y \in F$,*

$$\|x + y\| \geq \max\left(\frac{\|x\|}{2+\varepsilon}, \frac{\|y\|}{1+\varepsilon}\right).$$

Demonstração. Veja [23, Lemma 10.39]. □

Teorema 1.40 (Teorema dos Isomorfismos para Espaços Vetoriais)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Então existe uma aplicação linear e bijetora entre os espaços $X/\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(X)$.*

Demonstração. Veja [16, Teorema V.5.6.]. □

Usaremos a notação $X \cong Y$ para indicar dois espaços vetoriais X e Y são algebricamente isomorfos, ou seja, existe uma aplicação linear bijetora entre eles.

Lema 1.41. *Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita. Se $M, N \subset X$ são subespaços de codimensão finita, então $M \cap N$ também tem codimensão finita.*

Demonstração. Defina a aplicação

$$\varphi : X \to X/M \times X/N, \quad \varphi(x) = (x + M, x + N).$$

É fácil ver que φ é linear. Além disso, como $x + M = M \iff x \in M$, então

$$\begin{aligned}\ker(\varphi) &= \{x \in X : \varphi(x) = (0 + M, 0 + N)\}\\ &= \{x \in X : x + M = M \text{ e } x + N = N\}\\ &= \{x \in X : x \in M \text{ e } x \in N\}\\ &= M \cap N.\end{aligned}$$

Assim, $\ker(\varphi) = M \cap N$. Como $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq X/M \times X/N$ e o espaço $X/M \times X/N$ tem dimensão finita, então

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq \dim(X/M \times X/N) = \dim(X/M) + \dim(X/N).$$

Pelo Teorema 1.40, temos

$$X/(M \cap N) = X/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi) \subset X/M \times X/N.$$

Assim,

$$\dim(X/(M \cap N)) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq \dim(X/M) + \dim(X/N) < \infty.$$

Portanto, $M \cap N$ tem codimensão finita. □

Lema 1.42. *Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão infinita sobre $\mathbb{K}$. Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear injetora, então para todo subespaço $E \subseteq Y$ de codimensão finita, o subespaço $T^{-1}(E) \subseteq X$ também tem codimensão finita.*

Demonstração. Considere a projeção canônica

$$\pi : Y \to Y/E, \quad \pi(y) = y + E.$$

É fácil ver que π está bem definida e é linear. Além disso, π é sobrejetora pois todo elemento de Y/E é da forma $y + E$ para algum $y \in Y$. Considere a composição

$$\pi \circ T : X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\pi} Y/E.$$

É claro que $\pi \circ T$ é linear, o que implica, pelo Teorema 1.40, que $X/\ker(\pi \circ T) \cong \mathrm{Im}(\pi \circ T)$. Sabemos que $\pi(T(x)) = T(x) + E$. Disso, obtemos

$$\pi(T(x)) = 0 \iff T(x) + E = E \iff T(x) \in E,$$

o que implica que

$$\ker(\pi \circ T) = \{x \in X : \pi(T(x)) = 0\} = \{x \in X : T(x) \in E\} = T^{-1}(E).$$

Ou seja, $T^{-1}(E) = \ker(\pi \circ T)$. Logo,

$$X/T^{-1}(E) \cong \mathrm{Im}(\pi \circ T) \subseteq Y/E.$$

Portanto,

$$\dim(X/T^{-1}(E)) = \dim(\mathrm{Im}(\pi \circ T)) \leq \dim(Y/E) < \infty,$$

pois Y/E tem dimensão finita por hipótese. Isso prova que $T^{-1}(E) \subseteq X$ tem codimensão finita. □

1.7 Complexificação de Espaços e Operadores

Apesar de espaços vetoriais e operadores lineares serem frequentemente considerados sobre o corpo $\mathbb{R}$, em algumas situações é útil trabalhar no contexto dos números complexos. Para isso, podemos estender espaços vetoriais e operadores lineares sobre $\mathbb{R}$ para o caso complexo, por um processo chamado complexificação. Vejamos a seguir como isso ocorre.

Definição 1.43 (Complexificação de espaços reais)**.** Seja X um espaço vetorial real. A *complexificação* de X, denotada por $\widetilde{X}$, é definida como

$$\widetilde{X} = \{x + iy \colon x, y \in X\},$$

que também pode ser denotada por $X \oplus iX$. A *soma* de dois elementos $x_1 + iy_1$ e $x_2 + iy_2$ em $\widetilde{X}$ é definida da seguinte forma

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

A *multiplicação por escalar* de $x + iy \in \widetilde{X}$ por um escalar complexo $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ é definida como

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x),$$

que combina a parte real e a imaginária de acordo com as regras usuais de multiplicação de números complexos.

Proposição 1.44. *A complexificação $\widetilde{X}$ de um espaço vetorial real X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Para provar que $\widetilde{X}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, devemos verificar os axiomas de espaço vetorial. Como X já é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, a maioria das propriedades segue diretamente da estrutura herdada de X. A seguir, será detalhada apenas uma propriedade específica para maior clareza.

Distributividade da soma de escalares: Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $z = x + iy \in \widetilde{X}$. Mostraremos que $(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z$. Escrevendo $\lambda = a + ib$ e $\mu = c + id$, temos

$$(\lambda + \mu)z = [(a + c) + i(b + d)](x + iy).$$

Da definição da multiplicação por escalar em $\widetilde{X}$, obtemos

$$(\lambda + \mu)z = [(a + c)x - (b + d)y] + i[(a + c)y + (b + d)x]. \tag{1.1}$$

Calculando separadamente λz e μz, temos

$$\lambda z = (ax - by) + i(ay + bx), \quad \mu z = (cx - dy) + i(cy + dx).$$

Somando essas expressões,

$$\lambda z + \mu z = [(ax - by) + (cx - dy)] + i[(ay + bx) + (cy + dx)].$$

Distribuindo os termos,

$$\lambda z + \mu z = [(a + c)x - (b + d)y] + i[(a + c)y + (b + d)x].$$

Comparando com (1.1), concluímos que

$$(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z.$$

Não é difícil verificar que os demais axiomas seguem diretamente das operações já válidas em X e $\mathbb{C}$, completando a demonstração da proposição. □

Proposição 1.45. *Seja X um espaço vetorial normado real com norma $\|\cdot\|$. Então, sua complexificação $\widetilde{X} = X \oplus iX$ é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{C}$ quando munido da norma*

$$\|x + iy\|_{\widetilde{X}} := \sup\{\|\cos(\theta)x + \sin(\theta)y\| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad x, y \in X.$$

Demonstração. Veja [15, Section 2.1]. □

Definição 1.46 (Complexificação de operadores lineares)**.** Seja $T : X \to X$ um operador linear definido em um espaço vetorial real X. Considere a complexificação $\widetilde{X}$ de X. Então a *complexificação* $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ do operador T é definida por

$$\widetilde{T}(x + iy) = T(x) + iT(y),$$

onde $x, y \in X$. É fácil ver que a complexificação $\widetilde{T}$ é um operador linear em $\widetilde{X}$.

Proposição 1.47. *Seja X um espaço vetorial real. Se X é um espaço de Banach separável, então sua complexificação $\widetilde{X}$ é um espaço de Banach complexo separável.*

Demonstração. Veja [15, Section 2.1]. □

Exemplo 1.48. *A complexificação do espaço $\mathbb{R}^N$ é $\mathbb{C}^N$. Para demonstrar isso, definamos a aplicação Φ tal que*

$$\Phi : (x_1, \ldots, x_N) + i(y_1, \ldots, y_N) \in \widetilde{\mathbb{R}^N} \longmapsto (x_1 + i\, y_1, \ldots, x_N + i\, y_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Deve-se mostrar que Φ é um isomorfismo complexo. Não é difícil verificar que Φ é linear, bastando usar de modo apropriado as definições de soma e multiplicação por escalar impostas em $\widetilde{\mathbb{R}^N}$. Dedicaremos as próximas linhas para comprovar que Φ é bijetora.

A injetividade de Φ segue, pois, para um dado $z = (x_1, \ldots, x_n) + i(y_1, \ldots, z_N)$ em $\widetilde{\mathbb{R}^N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = 0 &\Longleftrightarrow (x_1 + i\, y_N, \ldots, x_N + i\, y_N) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_N = y_1 = \cdots = y_N = 0 \\ &\Longleftrightarrow z = 0. \end{aligned}$$

Por fim, visto que $\dim_{\mathbb{C}}(\widetilde{\mathbb{R}^N}) = N = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^N)$ e Φ é transformação linear injetora, conclui-se que Φ deve ser sobrejetora. Isto mostra o desejado.

2 Dinâmica de Operadores Hipercíclicos

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos da dinâmica de operadores hipercíclicos em espaços de Banach. Introduzimos a noção de operadores hipercíclicos, discutimos propriedades preservadas por conjugação e mostramos a inexistência de tais operadores em espaços de dimensão finita. Além disso, abordamos resultados importantes sobre a estrutura das órbitas hipercíclicas, incluindo sua independência linear, e finalizamos com um exemplo clássico de operador hipercíclico. As principais fontes utilizadas neste capítulo são [23, 4, 10, 15].

2.1 Definições e Propriedades Básicas

Por conveniência, sempre que nos referirmos a um operador $T : X \to X$, estaremos supondo implicitamente que $T \in L(X)$, ou seja, que T é um operador linear e contínuo em X.

Definição 2.1 (Órbita de um vetor sob um operador)**.** Sejam X um espaço vetorial e $T : X \to X$ um operador. Dado um vetor $x \in X$, a *órbita* de x em relação a T, denotada por $\mathrm{Orb}(x, T)$, é o conjunto dado por

$$Orb(x, T) = \{x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots\} = \{T^n(x) \colon n \in \mathbb{N}_0\}.$$

A dinâmica do operador T diz respeito ao comportamento das órbitas de seus vetores à medida que as iterações ocorrem. Em alguns casos, as órbitas convergem para zero; em outros, podem ser periódicas, se repetindo após um certo número de iterações. Dentre os diferentes comportamentos, há um em especial que nos interessa: quando a órbita de algum vetor se distribui de forma densa no espaço. Essa característica está relacionada ao conceito de operadores hipercíclicos, que definiremos a seguir.

Definição 2.2 (Operador hipercíclico)**.** Diz-se que um operador $T : X \longrightarrow X$ é *hipercíclico* se existir algum $x \in X$ cuja órbita em T é densa em X. Nesse caso, x é chamado *vetor hipercíclico* para T.

Grosso modo, um operador é hipercíclico quando, ao aplicá-lo repetidamente a um determinado vetor, é possível aproximar-se arbitrariamente de qualquer outro vetor do espaço.

Definição 2.3. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ dois operadores.

a) Dizemos que T é *quase-conjugado* a S se existir uma aplicação contínua $\phi : Y \to X$, com imagem densa, tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$.

b) Se além disso, ϕ for um homeomorfismo, então T é dito *conjugado* a S.

Observação 2.4. *A conjugação entre operadores é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Com efeito, note que

- Um operador $T : X \longrightarrow X$ é conjugado a si próprio pois a identidade $i : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo e $T \circ i = i \circ T$.
- Se $T : X \to X$ é conjugado a $S : Y \to Y$ por um homeomorfismo $\phi : Y \to X$, então $T \circ \phi = \phi \circ S$. Aplicando o homeomorfismo ϕ^{-1}, obtemos
$$\phi^{-1} \circ T \circ \phi = S \implies \phi^{-1} \circ T = S \circ \phi^{-1}.$$
Ou seja, S é conjugado a T por ϕ^{-1}.
- Suponha que $T : X \to X$ é conjugado a $S : Y \to Y$ pelo homeomorfismo $\phi_1 : Y \to X$ ($T \circ \phi_1 = \phi_1 \circ S$) e que S é conjugado a $Q : Z \to Z$ por $\phi_2 : Z \to Y$ ($S \circ \phi_2 = \phi_2 \circ Q$). Sabemos que a aplicação $\phi := \phi_1 \circ \phi_2$ é um homeomorfismo, pois é composição de homeomorfismos. Daí,
$$T \circ \phi = (T \circ \phi_1) \circ \phi_2 = \phi_1 \circ (S \circ \phi_2) = \phi_1 \circ (\phi_2 \circ Q) = \phi \circ Q.$$
Logo, T é conjugado a Q.

Isso significa que a relação de conjugação entre operadores é reflexiva, simétrica e transitiva, caracterizando-a como uma relação de equivalência. □

O resultado acima nos permite organizar os operadores em classes e estudar quais propriedades dinâmicas são comuns entre os elementos de cada uma. Assim, ao invés de estudar cada operador separadamente, podemos analisar um representante da classe e estender os resultados para todos os outros operadores conjugados a ele.

Definição 2.5. Dizemos que uma propriedade P é *preservada por conjugação* se vale o seguinte: Se um operador $T : X \to X$ possui a propriedade P, então todo operador $S : Y \to Y$, conjugado a T, também possui a propriedade P.

A seguir, destacamos propriedades importantes relacionadas aos operadores hipercíclicos.

Proposição 2.6. *A hiperciclicidade é preservada por conjugação.*

Demonstração. Sejam $T : X \longrightarrow X$ e $S : Y \longrightarrow Y$ operadores conjugados por um homeomorfismo $\phi : Y \to X$. Suponha que S seja hipercíclico. Então existe $y \in Y$ tal que $\overline{Orb(y, S)} = Y$. Faça $x = \phi(y) \in X$. Vejamos que $\overline{Orb(x, T)} = X$. Para isso, seja $U \subset X$ aberto, com $U \neq \emptyset$. Temos que $\phi^{-1}(U)$ é um aberto não-vazio de Y. Desde que a órbita de y em S seja densa, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $S^n(y) \in \phi^{-1}(U)$.

Como $T \circ \phi = \phi \circ S$, então $T^n \circ \phi = \phi \circ S^n$. Daí, $\phi(S^n y) = T^n(\phi(y)) \in U$. Tome $x = \phi(y) \in X$. Assim, $T^n(x) \in U$, o que implica que $Orb(x, T) \cap U \neq \emptyset$. Isto é, $\overline{Orb(x, T)} = X$. Logo, T é hipercíclico. $\square$

É natural perguntar se a hiperciclicidade pode ocorrer em todo espaço normado. No entanto, como veremos a seguir, a hiperciclicidade é uma característica exclusiva de espaços de dimensão infinita. Ou seja, em espaços de dimensão finita não existem operadores hipercíclicos. Para isso, primeiro enunciaremos um lema que nos permitirá fundamentar esse resultado.

Lema 2.7. (a) *Seja T um operador hipercíclico. Então seu adjunto T' não tem autovalores. De modo equivalente, todo operador $T - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, tem imagem densa.*

(b) *Seja T um operador hipercíclico em um espaço de Banach real. Então o adjunto $\widetilde{T}'$ de sua complexificação $\widetilde{T}$ não tem autovalores. Equivalentemente, todo operador $\widetilde{T} - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tem imagem densa.*

Demonstração. (a) Suponha, por absurdo, que existe um operador hipercíclico $T : X \to X$ tal que seu adjunto T' possui um autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existe um funcional $\varphi \in X'$, com $\varphi \neq 0$, satisfazendo $T'(\varphi) = \lambda\varphi$. Isso implica que $(T')^n(\varphi) = \lambda^n\varphi$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja x_0 um vetor hipercíclico para T. Por definição, $T'(\varphi)(x_0) = \varphi(Tx_0)$. Daí, segue que

$$(\lambda^n\varphi)(x_0) = (T')^n(\varphi)(x_0) = \varphi(T^n x_0), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, temos a igualdade

$$\{\varphi(T^n x_0) \colon n \in \mathbb{N}\} = \{\lambda^n \varphi(x_0) \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Note que a sequência $\{\lambda^n\varphi(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ será limitada se $|\lambda| \leq 1$ ou se $\varphi(x_0) = 0$, e caso $|\lambda| > 1$ e $\varphi(x_0) \neq 0$, teremos

$$|\lambda^n\varphi(x_0)| = |\lambda|^n \cdot |\varphi(x_0)| \longrightarrow \infty \quad \text{quando } n \to \infty,$$

ou seja, a sequência diverge. Em qualquer caso, o conjunto $\{\lambda^n\varphi(x_0) \colon n \in \mathbb{N}\}$ não é denso. Assim, como φ é sobrejetor (pois é não nulo), existe $b = \varphi(u) \in \mathbb{R}$ que não é aderente a $\{\varphi(T^n x_0) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Como a órbita de x_0 é densa em X, existe uma sequência $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\{T^n(x_0) \colon n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} y_k = u$. Isso implica, pela continuidade de φ, que $\lim_{k\to\infty} \varphi(y_k) = \varphi(u) = b$. Isto contradiz o fato de b não ser aderente a $\{\varphi(T^n x_0) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Logo, T' não possui autovalores.

Vejamos que vale a equivalência. Suponha que para algum $\lambda \in \mathbb{K}$, o operador $T - \lambda I$ não tem imagem densa. Pelo Corolário 1.34, isso ocorre se, e somente se, existir um $\varphi \in X'$, não nulo, que anula a imagem de $T - \lambda I$. Isto é, satisfaz $\varphi((T - \lambda I)(x)) = 0$, para todo $x \in X$. Note que

$$\begin{aligned} \varphi((T-\lambda I)(x)) = 0, \quad \forall x \in X \quad &\iff \quad (T-\lambda I)'(\varphi)(x) = 0, \quad \forall x \in X \\ &\iff \quad (T'-\lambda I')(\varphi) = 0 \\ &\iff \quad T'(\varphi) = \lambda\varphi \\ &\iff \quad T' \text{ possui autovalor.} \end{aligned}$$

Logo, T' não possuir autovalores equivale a afirmar que $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ é densa em X para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

(b) Seja $x_0 \in X$ um vetor hipercíclico de T. Suponha, por absurdo, que o adjunto $\widetilde{T}'$ da sua complexificação $\widetilde{T}$ tenha um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $\widetilde{T}'(\varphi) = \lambda\varphi$ para algum $\varphi \in \tilde{X}'$, $\varphi \neq 0$. Isso implica que $(\widetilde{T}')^n(\varphi) = \lambda^n\varphi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de adjunto, temos $\widetilde{T}'(\varphi)(x_0) = \varphi(\widetilde{T}x_0)$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\varphi(\widetilde{T}^n x_0) = (\widetilde{T}')^n(\varphi)(x_0) = (\lambda^n\varphi)(x_0).$$

Como $x_0 + i \cdot 0 \in \widetilde{X}$, temos $\widetilde{T}(x_0) = T(x_0)$, de onde segue $\widetilde{T}^n(x_0) = T^n(x_0)$. Assim,

$$|\varphi(T^n x_0)| = \left|\varphi(\widetilde{T}^n x_0)\right| = |\lambda|^n \, |\varphi(x_0)| \, . \tag{2.1}$$

Uma observação importante é que como $\varphi \neq 0$, existe $x_1 + i \cdot x_2 \in \widetilde{X}$, com $x_1 + i \cdot x_2 \neq 0$, tal que

$$\varphi(x_1 + i.x_2) = \varphi(x_1) + i \cdot \varphi(x_2) \neq 0.$$

Como pelo menos uma das partes, real ou imaginária, é não nula, então existe $y \in X$ tal que $\varphi(y) \neq 0$. Daí, $|\varphi(y)| > 0$. Dado $d > 0$, tome $z := d \cdot \frac{y}{|\varphi(y)|}$. Note que $|\varphi(z)| = d$, o que mostra que a função $|\varphi|$ assume todos os valores positivos em X. Por (2.1), temos que

$$\{|\varphi(T^n x_0)| : n \in \mathbb{N}\} = \{|\lambda|^n \, |\varphi(x_0)| : n \in \mathbb{N}\} \, . \tag{2.2}$$

Por argumento análogo ao que foi feito no item (a), temos que $\{|\lambda|^n \, |\varphi(x_0)| : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso no conjunto dos reais não negativos $\mathbb{R}^+$. Conforme observado, dado $d \in \mathbb{R}^+$, existe $z \in X$ tal que $|\varphi(z)| = d$. Por outro lado, como x_0 é um hipercíclico, existe uma sequência $(T^{n_k}x)_k$ em $\mathrm{Orb}(x_0, T)$ tal que $T^{n_k}(x_0) \longrightarrow z$, quando $k \to \infty$. Pela continuidade de φ, temos que $\varphi(T^{n_k}x) \longrightarrow \varphi(z)$, quando $k \to \infty$. Como a função módulo é contínua, temos

$$|\varphi(T^{n_k}x)| \longrightarrow |\varphi(z)| = d \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Portanto, $\{|\varphi(T^n x)| : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{R}^+$, o que contradiz (2.2). Logo, $\widetilde{T}'$ não tem autovalores. A verificação de que essa afirmação equivale a dizer que "todo operador $\widetilde{T} - \lambda I$, com $\lambda \in \mathbb{C}$, tem imagem densa" segue exatamente o mesmo raciocínio utilizado no item (a), aplicando-se agora ao espaço $\widetilde{X}$ e ao operador $\widetilde{T}$. Por isso, omitimos os detalhes. $\square$

Teorema 2.8. *Para todo $N \in \mathbb{N}$, não existe operador hipercíclico em $\mathbb{K}^N$.*

Demonstração. Seja $T : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ um operador. Prmeiro, suponha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Como todo operador linear $T : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ possui ao menos um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, segue que existe $x \in \mathbb{C}^N$, $x \neq 0$, tal que $T(x) = \lambda x$. Assim, o operador $T - \lambda I$ não é injetivo, e como estamos em dimensão finita, ele também não é sobrejetivo. Logo, a imagem de $T - \lambda I$ é um subespaço fechado próprio de $\mathbb{C}^N$, e portanto não é densa. Pelo Lema 2.7, T não pode ser hipercíclico.

Agora, suponha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pelo Exemplo 1.48, a complexificação de $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é da forma $\widetilde{T} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. Assim, de maneira semelhante ao que foi realizado no caso complexo, $\widetilde{T}$ possui algum autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, o que vai implicar que a imagem de $\widetilde{T} - \lambda I$ não é densa em $\mathbb{C}^N$. Assim, pelo Lema 2.7, o operador T não pode ser hipercíclico. □

Corolário 2.9. *Não existem operadores hipercíclicos em espaços normados de dimensão finita.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial normado de dimensão N sobre o corpo $\mathbb{K}$, e seja $T : V \to V$ um operador linear. Como V é de dimensão finita, existe um isomorfismo linear (e portanto um homeomorfismo) $\phi : V \to \mathbb{K}^N$. Defina o operador linear $S := \phi \circ T \circ \phi^{-1} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$. Como $S \circ \phi = \phi \circ T$, o operador T é conjugado a S por ϕ. Se T fosse hipercíclico, então, pela Proposição 2.6, o operador S também seria hipercíclico. Isso é um absurdo pois contraria o teorema anterior. Portanto, T não pode ser hipercíclico. □

Além de não existirem operadores hipercíclicos em espaços de dimensão finita, o comportamento das órbitas de operadores lineares nesses espaços é bastante restrito e amplamente compreendido. Conforme veremos no teorema a seguir, dado um operador linear T em $\mathbb{K}^N$, a órbita de qualquer vetor ou tende a zero, ou tende ao infinito em norma, ou é limitada dentro de um certo intervalo à medida que as iterações avançam. Antes, apresentemos o seguinte lema:

Lema 2.10. *Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_N^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{K}^N$. Se existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $|x_i^n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, então $\|x^n\| \to \infty$ para qualquer norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{K}^N$.*

Demonstração. Fixe a norma $\|\cdot\|_1$ em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Como $|x_i^n| \to \infty$, dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_i^n| > M, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Como $\|x^n\|_1 \geq |x_i^n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|x^n\|_1 \geq |x_i^n| > M, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Isto mostra que $\|x^n\|_1 \to \infty$. Como em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes, segue que para qualquer outra norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{K}^N$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x^n\| \geq C\|x^n\|_1.$$

Portanto, para qualquer norma em $\mathbb{K}^N$ também vale $\|x^n\| \to \infty$. □

Teorema 2.11. *Seja $T : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$, $N \in \mathbb{N}$, um operador linear. Então, para qualquer vetor $x \in \mathbb{K}^N$, uma das seguintes condições devem ser satisfeitas:*

1) *$T^n x \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$;*

2) *$\|T^n x\| \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$;*

3) *Existem $m, M > 0$ tais que $m \leq \|T^n x\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Conforme visto na Seção 1.7, todo operador $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ pode ser complexificado, o que nos permite tratá-lo como um operador em $\mathbb{C}^N$. Assim, é suficiente provar esta proposição para operadores em $\mathbb{C}^N$. Da Álgebra Linear, sabemos que existe uma base β de $\mathbb{C}^N$ tal que a matriz de T em β é uma matriz de Jordan, ou seja, possui a forma

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix},$$

onde cada bloco J_i é uma matriz de Jordan associada a um autovalor $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Cada J_i atua num subespaço invariante $V_i \subseteq \mathbb{C}^N$, de modo que $\mathbb{C}^N = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Dessa forma, o comportamento da sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$, para um vetor $x \in \mathbb{C}^N$, pode ser analisado separadamente em cada componente associada aos blocos.

Assim, para provar esse resultado, é suficiente considerar o caso em que T é representado por um único bloco de Jordan. Por exemplo, se $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, com $x_i \in V_i$, então

$$T^n x = J_1^n x_1 + J_2^n x_2 + \cdots + J_k^n x_k.$$

com $J_i^n x_i \in V_i$ para todo n. Se mostrarmos que $\|J_j^n x_j\| \to \infty$ para algum j, então a sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\|T^n x\| \to \infty$. Em casos onde a sequência $(J_i^n x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada ou converge para zero, um raciocínio análogo pode ser feito. Os detalhes serão omitidos para não deixar a demonstração longa demais. De qualquer forma, podemos supor, sem perda de generalidade, que T é dado por um único bloco de Jordan da forma

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$T^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda^{2-1} & \binom{2}{2}\lambda^{2-2} & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda^{2-1} & \binom{2}{2}\lambda^{2-2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda^{2-1} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda^2 & 2\lambda^{2-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & \binom{3}{2}\lambda^1 & \binom{3}{3}\lambda^0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & \binom{3}{2}\lambda^1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

e, em geral, para cada $n \geq N-1$, tem-se

$$T^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{N-1}\lambda^{n-N+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{N-2}\lambda^{n-N+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{N-3}\lambda^{n-N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

Se $x = 0$, então $T^n x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $T^n x \to 0$ quando $n \to \infty$. Agora, suponha que $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ seja um vetor não nulo. Aplicando T^n a x, vamos analisar os possíveis comportamentos da sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ de acordo com o valor de λ.

<u>Caso $|\lambda| > 1$:</u>

Seja x_k a última coordenada não nula de x. A k-ésima linha da matriz T^n, denotada por L_k, possui a forma

$$L_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{N-k}\lambda^{n-(N-k)} \end{bmatrix},$$

onde há $k-1$ zeros iniciais, seguidos pelas entradas

$$\lambda^n,\ n\lambda^{n-1},\ \binom{n}{2}\lambda^{n-2},\ \ldots,\ \binom{n}{N-k}\lambda^{n-(N-k)}.$$

A multiplicação da matriz T^n pelo vetor x na linha k fornece

$$(T^n x)_k = \langle L_k, x\rangle = 0x_1 + \cdots + \lambda^n x_k + n\lambda^{n-1}0 + 0 + \cdots + 0 = \lambda^n x_k.$$

Como $x_k \neq 0$ e $|\lambda| > 1$, segue que $|\lambda^n x_k| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo, pelo Lema 2.10, temos $\|T^n x\| \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Caso $|\lambda| < 1$:

Observe que todas as entradas da matriz T^n são da forma $\binom{n}{k}\lambda^{n-k}$, para algum $k \in \mathbb{N}_0$. Para cada $n \geq k$, com $k \in \mathbb{N}_0$ fixo, temos

$$\left|\binom{n}{k}\lambda^{n-k}\right| = \binom{n}{k}|\lambda|^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}|\lambda|^{n-k} \leq \frac{n^k}{k!}|\lambda|^{n-k}. \tag{2.3}$$

Defina $b_n := \frac{n^k}{k!}|\lambda|^{n-k}$ para cada n. Então

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^k}{n^k}\frac{|\lambda|^{n+1-k}}{|\lambda|^{n-k}} = \frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot |\lambda| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot |\lambda|.$$

Como

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \to 1 \quad \text{quando } n \to \infty,$$

conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 \cdot |\lambda| = |\lambda| < 1.$$

Desse modo, o Teste da Razão assegura que a série $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n^k}{k!}|\lambda|^{n-k}$ é absolutamente convergente e, por conseguinte, o seu termo geral deve convergir para zero. Isto comprova que

$$\frac{n^k}{k!}|\lambda|^{n-k} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo, por (2.3), obtemos

$$\binom{n}{k}|\lambda|^{n-k} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Assim, todas as entradas de $T^n x$ tendem a zero e, portanto, $T^n x \to 0$ quando $n \to \infty$.

Caso $|\lambda| = 1$:

Se $x = (x_1, 0, \ldots, 0)$ com $x_1 \neq 0$, então $T^n x = \lambda^n x$, e assim, $\|T^n x\| = \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como x é não nulo, basta definir $m = M = \|x\|$, de modo que $m, M > 0$ satisfazem $m \leq \|T^n x\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso contrário, existe alguma coordenada $x_K \neq 0$ com $1 < K \leq N$, e tal que $x_\nu = 0$ quando $\nu > K$. Assim, a primeira entrada de $T^n x$ é dada por

$$\langle L_1, x\rangle = \lambda^n x_1 + n\lambda^{n-1}x_2 + \cdots + \binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K, \quad 1 < K \leq N.$$

Observe que

$$\begin{aligned} |\langle L_1, x\rangle| &= \left|\lambda^n x_1 + n\lambda^{n-1}x_2 + \cdots + \binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K\right| \\ &= \left|\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K\left(\frac{\lambda^n x_1}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K} + \frac{n\lambda^{n-1}x_2}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K} + \cdots + 1\right)\right|. \end{aligned}$$

Como $|\lambda^{n-K+1}| = 1$, segue que

$$|\langle L_1, x\rangle| = \binom{n}{K-1}|x_K|\left|\frac{\lambda^n x_1}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K} + \frac{n\lambda^{n-1}x_2}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K} + \cdots + 1\right|.$$

Por outro lado, cada termo $\frac{\binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1}x_k}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K}$, com $1 \leq k < K$, é tal que

$$\left|\frac{\binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1}x_k}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K}\right| = \frac{\binom{n}{k-1}|x_k|}{\binom{n}{K-1}|x_K|}.$$

Além disso, vale:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{K-1}} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{(K-1)!(n-K+1)!}{n!} \\ &= \frac{(K-1)!(n-K+1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(K-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{(n-K+1)!}{(n-k+1)(n-k)\cdots(n-K+2)(n-K+1)!} \\ &= \frac{(K-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{(n-k+1)(n-k)\cdots(n-K+2)}. \end{aligned}$$

Donde, obtém-se $\frac{\binom{n}{k-1}|x_k|}{\binom{n}{K-1}|x_K|} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, para todo $1 \leq k < K$. Isso implica que

$$\left|\frac{\lambda^n x_1}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K} + \frac{n\lambda^{n-1}x_2}{\binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K} + \cdots + 1\right| \longrightarrow 1,$$

quando $n \to \infty$. Visto que $\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{K-1}|x_K| = \infty$, segue que

$$|(T^n x)_1| = |\langle L_1, x\rangle| = \left|\lambda^n x_1 + n\lambda^{n-1}x_2 + \cdots + \binom{n}{K-1}\lambda^{n-K+1}x_K\right| \longrightarrow \infty,$$

quando $n \to \infty$. Portanto, pelo Lema 2.10, concluímos que $||T^n x|| \to \infty$. Isso completa a demonstração.

$\square$

Proposição 2.12. *A órbita de qualquer vetor hipercíclico forma um conjunto linearmente independente.*

Demonstração. Sejam $T : X \to X$ um operador e $x \in X$ um vetor hipercíclico para T. Como $x \neq 0$, o conjunto $\{x\}$ é linearmente independente (LI). Suponha, por absurdo, que a órbita $\{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$ não seja LI. Então existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $\{x, Tx, \dots, T^N x\}$ é LI, mas $\{x, Tx, \dots, T^N x, T^{N+1}x\}$ é linearmente dependente. Assim, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{K}$ tais que

$$T^{N+1}x = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k T^k x. \tag{2.4}$$

Note que o subespaço $F = \operatorname{span}\{x, Tx, \cdots, T^N x\}$ é invariante. De fato, dado $v = \sum_{k=0}^{N} \beta_k T^k x \in F$, temos

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{k=0}^{N} \beta_k T^k x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \beta_k T^{k+1} x \\ &= \beta_0 T^1(x) + \cdots + \beta_{N-1} T^N(x) + \beta_N T^{N+1}(x), \end{aligned}$$

e, por (2.4), temos $\beta_N T^{N+1}(x) \in F$. Isso implica que $T(v)$ também pertence a F, garantindo a invariância desse subespaço. Desse fato, temos que $T^n x \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Isto é, $\operatorname{Orb}(x, T) \subset F \subset X$. Assim, $\operatorname{Orb}(x, T)$ é um subconjunto denso em F. Como consequência, a restrição $T|_F : F \to F$ é um operador hipercíclico, com vetor hipercíclico $x \in F$. Mas isso contradiz o Corolário 2.9, já que $\dim F < \infty$ e não existem operadores hipercíclicos em espaços de dimensão finita. Portanto, $\operatorname{Orb}(x, T)$ é um conjunto linearmente independente de X. $\square$

O fato de a órbita de um vetor hipercíclico ser linearmente independente mostra o quão complexa pode ser a dinâmica de operadores em espaços de dimensão infinita. Intuitivamente, é como se o operador T enviasse os vetores da órbita para "direções diferentes" a cada iteração, indicando uma desordem no comportamento da órbita.

2.2 Um Exemplo de Operador Hipercíclico

Nesta seção, apresentamos um exemplo de operador hipercíclico. Além de garantir a existência desse tipo de operador, o exemplo ajuda a compreender as condições que tornam a órbita de um vetor um conjunto denso, servindo como motivação para o Critério de Hiperciclicidade, que será abordado no capítulo seguinte.

Definição 2.13. Seja ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, o operador *scaled left shift* é dado por

$$T = \lambda S_L : \ell_p \to \ell_p,$$

onde S_L é o left shift dado por $S_L(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Assim,

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Já vimos no Exemplo 1.26 que o operador $S_L : \ell_p \to \ell_p$ é contínuo. Disso, temos que

$$\|T(x)\| = \|\lambda S_L(x)\| = |\lambda| \cdot \|S_L(x)\| \leq |\lambda| \cdot \|S_L\| \cdot \|x\|,$$

para todo $x \in \ell_p$, o que mostra que T é contínuo. Além diso, se $|\lambda| \leq 1$, então T não é hipercíclico. De fato, seja $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$. Note que

$$T^n x = \lambda^n (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T^n x\|_p = |\lambda|^n \left(\sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \leq |\lambda|^n \|x\|_p.$$

Como $|\lambda| \leq 1$, então $|\lambda|^n \leq 1$. Assim, $\|T^n x\|_p \leq \|x\|_p$. Logo, a órbita $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ é limitada e, portanto, não pode ser densa em ℓ_p. Portanto, T não é hipercíclico quando $|\lambda| \leq 1$.

No entanto, quando $|\lambda| > 1$, o comportamento de T permite construir vetores com órbitas densas em ℓ_p. Isto é o que veremos no exemplo a seguir:

Exemplo 2.14. Seja $T : \ell_p \to \ell_p$ definido por

$$T = \lambda S_L,$$

onde $|\lambda| > 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então T é hipercíclico.

Vamos verificar que isto de fato ocorre. Defina o operador $S : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{1}{\lambda}(0, x_1, x_2, \ldots).$$

Seja $w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. Dado $k \in \mathbb{N}$, note que

$$T^k(w) = \lambda^k (w_{k+1}, w_{k+2}, w_{k+3}, \ldots) \quad \text{e} \quad S^k(x) = \frac{1}{\lambda^k}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, w_1, w_2, \ldots). \tag{2.5}$$

Pela Proposição 1.11, existe um subconjunto $E = \{y^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, enumerável e denso em ℓ_p, formado por sequências eventualmente nulas. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos m_k como o maior índice com coordenada não nula de y^k. Isso faz sentido pois como $y^k \in c_{00}$, essa sequência é da forma

$$y^k = (y_1^k, \ldots, y_{m_k}^k, 0, 0, \ldots).$$

Por indução, podemos construir uma sequência n_k de naturais tal que, para qualquer $k > j \geq 1$, tenhamos

$$n_k \geq m_j + n_j \quad \text{e} \quad |\lambda|^{n_k} \geq |\lambda|^{n_j+k} \|y^k\|.$$

Assim, para $k > j \geq 1$, temos

$$\|S^{n_k}(y^k)\| = \frac{1}{|\lambda|^{n_k}} \|y^k\| \leq \frac{1}{|\lambda|^{n_j+k}} < \frac{1}{|\lambda|^k}. \tag{2.6}$$

Além disso, como $|\lambda|^{n_k} \geq |\lambda|^{n_j+k} \|y^k\|$, segue que

$$1 \geq \frac{|\lambda|^{n_j+k}}{|\lambda|^{n_k}} \|y^k\| = \frac{|\lambda|^{n_j} |\lambda|^k}{|\lambda|^{n_k}} \|y^k\| = |\lambda|^{n_j - n_k} |\lambda|^k \|y^k\|.$$

Dividindo por $|\lambda|^k$, para cada $k > j \geq 1$, temos

$$\frac{1}{|\lambda|^k} \geq |\lambda|^{n_j - n_k} \|y^k\|. \tag{2.7}$$

Defina o vetor $x := \sum_{k=1}^{\infty} S^{n_k}(y^k)$. Conforme observado em (2.6), dado $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=1}^{j} \|S^{n_k}(y^k)\| < \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{|\lambda|^k}.$$

Fazendo $j \to \infty$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|S^{n_k}(y^k)\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^k} < +\infty.$$

Ou seja, a série $\sum_{k=1}^{\infty} S^{n_k}(y^k)$ é absolutamente convergente. Como ℓ_p é Banach, pela Proposição 1.12 concluímos que $x := \sum_{k=1}^{\infty} S^{n_k}(y^k)$ é convergente em ℓ_p. Ou seja, $x \in \ell_p$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$T^{n_k}(x) = T^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{\infty} S^{n_j}(y^j)\right) = T^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} S^{n_j}(y^j) + S^{n_k}(y^k) + \sum_{m=k+1}^{\infty} S^{n_j}(y^j)\right).$$

Pela linearidade do operador T^{n_k}, obtemos

$$T^{n_k}(x) = T^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} S^{n_j}(y^j)\right) + T^{n_k}(S^{n_k}(y^k)) + T^{n_k}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} S^{n_j}(y^j)\right). \tag{2.8}$$

Observe que $T^{n_k}(S^{n_i} y^i) = 0$ para todo $i < k$. Isso ocorre pois

$$S^{n_i}(y^i) = \frac{1}{\lambda^{n_i}}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n_i \text{ zeros}}, y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{m_i}^i, 0, 0, \ldots).$$

Como $n_k \geq m_i + n_i$, segue que para cada $i < k$, vale

$$T^{n_k}(S^{n_i}y^i) = \frac{\lambda^{n_k}}{\lambda^{n_i}}(0,0,0,\ldots) = 0.$$

Donde,

$$T^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} S^{n_j}(y^j)\right) = \sum_{j=1}^{k-1} T^{n_k}S^{n_j}(y^j) = 0.$$

Por outro lado, como $T^{n_k}(S^{n_k}(y^k)) = y^k$, segue de (2.8) que

$$\begin{aligned}
T^{n_k}(x) &= y^k + T^{n_k}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} S^{n_j}(y^j)\right) \\
&= y^k + T^{n_k}\left(S^{n_{k+1}}(y^{k+1})\right) + T^{n_k}\left(S^{n_{k+2}}(y^{k+2})\right) + \cdots \\
&= y^k + S^{n_{k+1}-n_k}(y^{k+1}) + S^{n_{k+2}-n_k}(y^{k+2}) + \cdots \\
&= y^k + \sum_{j=k+1}^{\infty} S^{n_j-n_k}(y^j).
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$T^{n_k}(x) = y^k + \sum_{j=k+1}^{\infty} S^{n_j-n_k}(y^j).$$

Isso implica que

$$\left\|\sum_{j=k+1}^{\infty} S^{n_j-n_k}(y^j)\right\| = \left\|T^{n_k}(x) - y^k\right\|. \tag{2.9}$$

Note que

$$\left\|\sum_{j=k+1}^{\infty} S^{n_j-n_k}(y^j)\right\| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \|S^{n_j-n_k}(y^j)\| = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n_j-n_k}}\|y^j\| = \sum_{j=k+1}^{\infty} |\lambda|^{n_k-n_j}\|y^j\|.$$

Por (2.7), obtemos

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} |\lambda|^{n_k-n_j}\|y^j\| < \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^j}.$$

Além disso,

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^j} = \frac{\frac{1}{|\lambda|^{k+1}}}{1-\frac{1}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda|^{k+1}}\frac{|\lambda|}{|\lambda|-1} = \frac{1}{|\lambda|^k}\frac{1}{|\lambda|-1}.$$

Daí, e de (2.9), vale

$$\left\|T^{n_k}(x) - y^k\right\| < \frac{1}{|\lambda|^k}\frac{1}{|\lambda|-1} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Vejamos agora que $\mathrm{Orb}(T,x)$ é denso em ℓ_p. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{|\lambda|^m}\frac{1}{|\lambda|-1} < \varepsilon$ e defina o conjunto $I = \{n : n \geq m\}$. Considere a subsequência $y = \{y^j\}_{j \in I}$ de E. A Proposição 1.13 nos garante que ℓ_p não tem pontos isolados. Pelo Lema 1.3, a subsequência y continua sendo densa em ℓ_p pois foi retirada apenas uma quantidade finita de termos da sequência original E. Assim, dada uma sequência $z \in \ell_p$, existe $k \in I$ tal que $\|z - y^k\| < \varepsilon$. Como $k \geq m$, obtemos $\frac{1}{|\lambda|^k} \frac{1}{|\lambda|-1} < \varepsilon$. Assim, de (2.10), temos

$$\|T^{n_k}x - z\| \leq \|T^{n_k}x - y^k\| + \|y^k - z\| < \frac{1}{|\lambda|^k} \frac{1}{|\lambda| - 1} + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de $z \in \ell_p$ e de $\varepsilon > 0$, verifica-se assim que $\mathrm{Orb}(T, x)$ é um conjunto denso em ℓ_p. Portanto, T é um operador hipercíclico em ℓ_p.

3 Sobre o Critério de Hiperciclicidade

Iniciamos este capítulo com o Teorema da Transitividade de Birkhoff, que caracteriza a hiperciclicidade por meio da transitividade topológica. A partir dele, auferimos outros resultados, entre os quais se destaca o mais importante: o Critério de Hiperciclicidade, que permite verificar a hiperciclicidade de operadores sem a necessidade de construir explicitamente um vetor com órbita densa (veja o Exemplo 2.14, onde tal construção é realizada). Posteriormente, introduzimos os operadores *weighted shifts* e exibimos uma condição suficiente que garante sua hiperciclicidade, a qual se baseia no Critério de Hiperciclicidade. Ao final, incluímos ainda outros resultados importantes, como a conexidade do conjunto de vetores hipercíclicos. As definições e os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [4, 23].

3.1 Transitividade Topológica e o Critério de Hiperciclicidade

Começaremos apresentando uma caracterização clássica para operadores hipercíclicos.

Teorema 3.1 (Teorema da Transitividade de Birkhoff)**.** *Seja X um espaço de Banach separável e seja $T \in L(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é hipercíclico;*

(ii) *T é topologicamente transitivo; isto é, para cada par U, V de conjuntos abertos não vazios de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sejam U, V abertos não-vazios de X. Se y é hipercíclico em T, então $\mathrm{Orb}(y, T)$ é densa em X. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n y \in U$. Note que

$$\mathrm{Orb}(T^n y, T) = \mathrm{Orb}(y, T) \setminus \{y, Ty \cdots T^{n-1}(y)\}.$$

Ou seja, $\mathrm{Orb}(T^n y, T)$ é igual a $\mathrm{Orb}(y, T)$ menos uma quantidade finita de elementos. Uma vez que X não tem pontos isolados, pois é um espaço vetorial normado, segue do Lema 1.3 que $\mathrm{Orb}(T^n y, T)$ também é um conjunto denso de X. Ou seja, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(T^n y) \in V$. Como $T^n y \in U$, temos $T^m(T^n y) \in T^m(U)$. Logo, $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Denote por $HC(T)$ o conjunto de todos os vetores hipercíclicos de T. Como X é separável, pela Proposição 1.2, existe uma base enumerável $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ para a topologia de X. Vejamos que $HC(T) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$. Dado $x \in HC(T)$, fixe $j \in \mathbb{N}$. Como a sequência $(T^n(x))_{n\geq 0}$ é densa em X, para o aberto V_j existe um n_j tal que $T^{n_j}(x) \in V_j$. Daí, $x \in T^{-n_j}(V_j)$. Ou seja, $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j).$$

Assim, temos $HC(T) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$.

Agora, suponha que $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_j)$. Então para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$. Ou seja, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um n_j tal que $T^{n_j}(x) \in V_j$. Seja $U \subset X$ aberto não vazio. Como este subconjunto é união de abertos da base $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, podemos escolher um V_{j_0} tal que $V_{j_0} \subset U$. Pela condição que temos, haverá um $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_{j_0}}(x) \in V_{j_0} \subset U$, o que prova que a sequência $(T^n(x))_{n\geq 0}$ é densa em X. Ou seja, x é hipercíclico em T, o que prova que $x \in HC(T)$. Portanto, vale a igualdade $HC(T) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$.

Como T é contínuo e V_j é aberto para todo $j \in \mathbb{N}$, segue que cada $T^{-1}(V_j)$ é aberto. Isto implica que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$ é aberto, para todo $j \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$ é denso em X para cada $j \in \mathbb{N}$. Como X é Banach, pelo Teorema da Categoria de Baire (Teorema 1.4), temos que $HC(T) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$ é um conjunto denso em X e, portanto, não-vazio. Logo, existe $x \in HC(T)$, o que prova que T é hipercíclico.

Mostraremos, agora, que cada $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$ é denso em X. De fato, dado um aberto não-vazio $V \subset X$, como V_j é não-vazio, segue da transitividade topológica de T que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^m(V) \cap V_j \neq \emptyset.$$

Ou seja, existe $v \in V$ tal que $T^m(v) \in V_j$. Daí, $v \in T^{-m}(V_j)$, o que implica que $v \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)$. Assim, $V \cap \left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V_j)\right) \neq \emptyset$, o que mostra a densidade que queríamos. $\square$

Apesar de útil, a transitividade topológica nem sempre é fácil de ser verificada. O resultado a seguir, conhecido como Critério de Hiperciclicidade, oferece uma alternativa que, em muitos casos, torna mais simples verificar a hiperciclicidade, desde que certas condições sejam atendidas.

Definição 3.2 (Critério de Hiperciclicidade)**.** *Sejam X um espaço vetorial normado e $T \in L(X)$. Dizemos que T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade se existirem dois subconjuntos densos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset X$, uma sequência crescente de inteiros não negativos (n_k) e uma sequência de aplicações $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$ tais que:*

i) $T^{n_k}(x) \to 0$ *para todo* $x \in \mathcal{D}_1$;

ii) $S_{n_k}(y) \to 0$ *para todo* $y \in \mathcal{D}_2$;

iii) $T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y$ *para todo* $y \in \mathcal{D}_2$.

As funções S_{n_k} não precisam ser lineares nem contínuas. Quando (n_k) coincide com a sequência dos números naturais, isto é, $n_k = k$, e os subconjuntos $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ são iguais, o operador T satisfaz uma condição mais simples, conhecida como o *Critério de Kitai.*

Teorema 3.3. *Seja* $T \in L(X)$*, onde* X *é um espaço de Banach separável. Suponha que* T *satisfaça o Critério de Hiperciclicidade. Então* T *é hipercíclico.*

Demonstração. Suponha que T satisfaça o Critério de Hiperciclicidade. Mostraremos que T é topologicamente transitivo. Sejam U, V dois subconjuntos abertos não vazios de X. Pela densidade de $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, podemos escolher $x \in \mathcal{D}_1 \cap U$, $y \in \mathcal{D}_2 \cap V$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset U$. Assim, da condição *ii)* do Critério de Hiperciclicidade, a sequência $S_{n_k}(y)$ é tal que

$$\lim_{k\to\infty} x + S_{n_k}(y) = x \in U. \tag{3.1}$$

Da definição de convergência, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x + S_{n_k}(y) - x\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } k \geq k_1.$$

Ou seja, $x + S_{n_k}(y) \in \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset U$ para todo $k \geq k_1$. Além disso, das condições *i)* e *iii)*, temos

$$\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = \lim_{k\to\infty} T^{n_k} x + \lim_{k\to\infty} T^{n_k} S_{n_k}(y) = y \in V.$$

Como V é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset V$. Assim, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) - y\| < \delta, \quad \text{para todo } k \geq k_2.$$

Logo, $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) \in \mathrm{B}(y, \delta) \subset V$ para todo $k \geq k_2$.

Tome $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Então $x + S_{n_k}(y) \in U$ e $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) \in V$ para todo $k \geq k_0$. Ou seja, $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $k \geq k_0$. Isso prova que T é topologicamente transitivo e, portanto, é hipercíclico pelo Teorema 3.1 da Transitividade de Birkhoff. □

Como consequência do Critério de Hiperciclicidade, temos outro mais específico: o Critério de Godefroy–Shapiro. Este oferece uma forma alternativa de identificar operadores hipercíclicos baseada nas caracteristicas dos autovalores e autovetores do operador.

Corolário 3.4 (Critério de Godefroy–Shapiro)**.** *Seja* $T \in L(X)$*, onde* X *é um espaço de Banach separável. Suponha que* $\bigcup_{|\lambda|<1} \mathrm{Ker}(T - \lambda)$ *e* $\bigcup_{|\lambda|>1} \mathrm{Ker}(T - \lambda)$ *ambos geram um subespaço denso de* X*. Então* T *é hipercíclico.*

Demonstração. Mostraremos que T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade. Considere a sequência $n_k = k$, com $k \in \mathbb{N}$, e os subconjuntos

$$D_1 := \mathrm{span}\left(\bigcup_{|\lambda|<1} \mathrm{Ker}(T - \lambda) \right) \text{ e } D_2 := \mathrm{span}\left(\bigcup_{|\lambda|>1} \mathrm{Ker}(T - \lambda) \right).$$

Observe que D_2 é o subespaço gerado por autovetores de T associados a autovalores λ com $|\lambda| > 1$. Assim, se $y \in D_2$ é algum desses autovetores, então $T(y) = \lambda y$. Como $T^k(y) = \lambda^k y$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos definir $S_k(y) := \lambda^{-k} y$. Note que

$$T^k S_k(y) = T^k(\lambda^{-k} y) = \lambda^k \cdot \lambda^{-k} y = y.$$

No caso em que $y \in D_2$ tem a forma $y = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n$, onde cada $y_i \neq 0$ é um autovetor de T com autovalor λ_i, $|\lambda_i| > 1$, a definição de S_k pode ser estendida linearmente a essa combinação. Ou seja,

$$S_k(y) := a_1 \lambda_1^{-k} y_1 + \cdots + a_n \lambda_n^{-k} y_n. \tag{3.2}$$

Essa combinação é única, uma vez que os autovetores $\{y_i\}$ associados a autovalores $\{\lambda_i\}$, dois a dois distintos, formam um conjunto linearmente independente, o que torna cada aplicação S_k bem definida. Assim, ao aplicarmos T^k a $S_k(y)$, obtemos

$$T^k S_k(y) = T^k \left(a_1 \lambda_1^{-k} y_1 + \cdots + a_n \lambda_n^{-k} y_n \right).$$

Usando a propriedade $T(y_i) = \lambda_i y_i$ para cada y_i, obtemos

$$T^k S_k(y) = a_1 \lambda_1^k \cdot \lambda_1^{-k} y_1 + \cdots + a_n \lambda_n^k \cdot \lambda_n^{-k} y_n = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = y.$$

Portanto, $T^k S_k(y) = y$, o que satisfaz condição *iii*) do Critério de Hiperciclicidade. Note que como $|\lambda_i| > 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que $\lambda_i^{-k} \to 0$ quando $k \to \infty$. Isso implica que $a_i \lambda_i^{-k} y_i \to 0$ quando $k \to \infty$. Assim, de (3.2), obtemos

$$S_k(y) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty,$$

o que verifica a condição *ii*). Para verificar a condição *i*), considere um vetor $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \in D_1$, onde cada x_i é um autovetor de T, com $T(x_i) = \lambda_i x_i$ e $|\lambda_i| < 1$. Aplicando T^k a x, temos

$$T^k(x) = T^k(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) = a_1 \lambda_1^k x_1 + a_2 \lambda_2^k x_2 + \cdots + a_n \lambda_n^k x_n.$$

Como $|\lambda_i| < 1$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, segue que $\lambda_i^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Consequentemente, cada termo $a_i \lambda_i^k x_i$ também tende a zero quando $k \to \infty$. Como $T^k(x)$ é a soma finita de termos que tendem a zero, obtemos

$$T^k(x) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty,$$

o que verifica a condição *i*). Portanto, todas as condições do Critério de Hiperciclicidade foram verificadas, o que prova que T é hipercíclico. $\square$

3.2 Operadores Weighted Shifts

Nesta seção, introduziremos um tipo de operador em espaços de sequências que será importante nas discussões seguintes. Trata-se dos operadores *weighted shift*, que deslocam as coordenadas para trás e as multiplicam por pesos. Antes disso, é importante esclarecer que, de agora em diante, em qualquer resultado envolvendo weighted shifts, iniciaremos os vetores da base canônica de ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$, a partir de e_0. Ou seja,

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Desse modo, a primeira coordenada de uma sequência corresponderá à posição 0, a segunda à posição 1, e assim por diante. Utilizaremos a notação $(e_j)_{j \geq 0}$.

Definição 3.5. O operador *weighted shift* $B_w : \ell_p \to \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, é definido por

$$B_w(x_0, x_1, x_2, \dots) = (w_1 x_1, w_2 x_2, w_3 x_3, \dots),$$

onde $w = (w_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência limitada de reais positivos, chamada *sequência de pesos*. Ou seja,

$$B_w e_k = w_k e_{k-1} \quad \text{para } k \geq 1, \quad \text{e} \quad B_w e_0 = 0,$$

onde $(e_k)_{k \geq 0}$ é a base canônica de ℓ_p.

Observação 3.6. *Visto que $w = (w_n)_{n \geq 1}$ é limitada, tem-se $\|w\|_\infty := \sup_{n \geq 1} |w_n| < \infty$. Logo, dado $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell_p$, obtém-se*

$$\|B_w(x)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p |x_n|^p \leq \|w\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq \|w\|_\infty^p \|x\|_p^p. \tag{3.3}$$

Portanto, $B_w(x) \in \ell_p$, o que mostra que B_w está bem definido. Ademais, mostrou-se também por (3.3) que B_w é contínuo com $\|B_w\| \leq \|w\|_\infty$.

No resultado a seguir, utilizamos o Critério de Hiperciclicidade para obter uma condição suficiente que garante a hiperciclicidade de weighted shifts.

Teorema 3.7. *Seja B_w um operador weighted shift em ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$. Suponha que*

$$\limsup_{m \to \infty} \left(\prod_{k=1}^{m} w_k \right) = \infty.$$

Então B_w é hipercíclico.

Demonstração. Como $\limsup_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{m} w_k\right)=\infty$, existe uma subsequência crescente de índices $(m_k)_{k\geq 1}$ em $\mathbb{N}$ tal que

$$\prod_{j=1}^{m_k} w_j \geq (1+\|w\|_\infty)^{2k}, \quad \text{para todo } k\in\mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Além disso, podemos supor que (m_k) satisfaz $m_k > \max\{2k, m_{k-1}+1\}$ para todo $k\geq 2$. Note que $|w_i|\leq 1+\|w\|_\infty$ para cada i. Observe que, dividindo (3.4) por w_{m_k}, temos

$$\prod_{j=1}^{m_k-1} w_j = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} w_j}{w_{m_k}} \geq \frac{\left(1+\|w\|_\infty\right)^{2k}}{1+\|w\|_\infty} = \left(1+\|w\|_\infty\right)^{2k-1}. \tag{3.5}$$

Dividindo (3.5) por w_{m_k-1}, temos

$$\prod_{j=1}^{m_k-2} w_j = \frac{\prod_{j=1}^{m_k-1} w_j}{w_{m_k-1}} \geq \frac{\left(1+\|w\|_\infty\right)^{2k-1}}{1+\|w\|_\infty} = \left(1+\|w\|_\infty\right)^{2k-2}.$$

Prosseguindo assim, até dividir a última desigualdade resultante por w_{m_k-2k+1}, obtemos

$$\prod_{j=1}^{m_k-2k} w_j \geq (1+\|w\|_\infty)^{2k-2k} = (1+\|w\|_\infty)^0 = 1.$$

Ou seja,

$$\prod_{j=1}^{m_k-r} w_j \geq \left(1+\|w\|_\infty\right)^{2k-r}, \quad \text{para todo } 0\leq r\leq 2k. \tag{3.6}$$

Escolha $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que $n_k := m_k - k$. Tome $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2=c_{00}$ e defina $S_{n_k} := (S_w)^{n_k}$, onde

$$S_w(x_0,x_1,x_2,\dots) = \left(0,\ w_1^{-1}x_0,\ w_2^{-1}x_1,\ w_3^{-1}x_2,\ \dots\right).$$

Note que a condição $m_k > \max\{2k, m_{k-1}+1\}$ implica

$$n_{k+1} = m_{k+1}-(k+1) > n_k = m_k - k > k.$$

Ou seja, $(n_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência crescente e $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$.

Agora, verificaremos as condições referentes ao Critério de Hiperciclicidade. Para isso, considere

$$x = (x_0,x_1,x_2,\dots,x_{k_0},0,0,\dots)\in c_{00}.$$

Note que

$$B_w(x) = \left(w_1\,x_1, w_2\,x_2, w_3\,x_3,\dots,w_{k_0}\,x_{k_0},0,0,\dots\right).$$

Aplicando B_w novamente, temos

$$\begin{aligned} B_w^2(x) &= B_w\left(w_1x_1,\ w_2x_2,\ w_3x_3,\ \dots,\ w_{k_0}x_{k_0},\ 0,0,\dots\right) \\ &= \left(w_1w_2x_2,\ w_2w_3x_3,\ \dots,\ w_{k_0-1}w_{k_0}x_{k_0},\ 0,0,\dots\right). \end{aligned}$$

Aplicando mais uma vez,

$$B_w^3(x) = \Big(w_1 w_2 w_3 x_3,\ w_2 w_3 w_4 x_4,\ \ldots,\ w_{k_0-2} w_{k_0-1} w_{k_0} x_{k_0},\ 0, 0, \ldots\Big).$$

Via argumento indutivo, após n_k iterações, obtemos

$$\begin{aligned} B_w^{n_k}(x) &= \Big(w_1 w_2 \ldots w_{n_k}\, x_{n_k},\ w_2 w_3 \ldots w_{n_k+1}\, x_{n_k+1},\ w_3 w_4 \ldots w_{n_k+2}\, x_{n_k+2},\ \ldots\Big) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n_k} w_j\, x_{n_k},\ \prod_{j=2}^{n_k+1} w_j\, x_{n_k+1},\ \prod_{j=3}^{n_k+2} w_j\, x_{n_k+2},\ \ldots\right). \end{aligned}$$

Note que $B_w^{n_k}(x) = (0, 0, 0, \ldots) = 0$ para todo $n_k > k_0$, o que implica que

$$B_w^{n_k}(x) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Isso verifica a condição $i)$ do Critério de Hiperciclicidade.

Lembre que $(e_k)_{k\geq 0}$ denota a base canônica de ℓ_p e seja $i \in \mathbb{N}_0$ fixado. Assim,

$$S_w(e_i) = \Big(0, 0, \ldots, 0,\ \overbrace{w_{i+1}^{-1}}^{\text{posição } i+1}\ , 0, 0, \ldots\Big).$$

Vale a pena notar que, na expressão acima, convenciona-se a posição zero como a primeira coordenada do vetor. Agora, aplicando S_w ao vetor acima, temos

$$S_w^2(e_i) = S_w\Big(0, 0, \ldots, 0, w_{i+1}^{-1}, 0, 0, \ldots.\Big) = \Big(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ \underbrace{w_{i+1}^{-1} w_{i+2}^{-1}}_{\text{posição } i+2}, 0,\ 0,\ \ldots\Big).$$

Repetindo o processo, temos

$$S_w^3(e_i) = S_w\Big(0, \ldots, 0, w_{i+1}^{-1} w_{i+2}^{-1}, 0, 0, \ldots\Big) = \Big(0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ \underbrace{w_{i+1}^{-1} w_{i+2}^{-1} w_{i+3}^{-1}}_{\text{posição } i+3}, 0,\ 0,\ \ldots\Big).$$

Prosseguindo assim, obtemos

$$\begin{aligned} S_{n_k}(e_i) = S_w^{n_k}(e_i) &= \Big(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \overbrace{w_{i+1}^{-1} w_{i+2}^{-1} \cdots w_{i+n_k}^{-1}}^{\text{posição } i+n_k}, 0,\ 0,\ \ldots\Big) \\ &= \left(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \frac{w_1^{-1} w_2^{-1} \cdots w_i^{-1}}{w_1^{-1} w_2^{-1} \cdots w_i^{-1}}\, w_{i+1}^{-1} w_{i+2}^{-1} \cdots w_{i+n_k}^{-1},\ 0,\ 0,\ \ldots\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Note que

$$\Big\|S_{n_k}(e_i)\Big\|_p = \left|\frac{w_1 \ldots w_i}{w_1 \ldots w_i w_{i+1} w_{i+2} \ldots w_{i+n_k}}\right| = \frac{w_1 \ldots w_i}{w_1 \ldots w_i w_{i+1} w_{i+2} \ldots w_{i+n_k}}$$

e

$$w_1 \leq \|w\|_\infty, \quad w_2 \leq \|w\|_\infty, \quad \ldots, \quad w_i \leq \|w\|_\infty.$$

Disso, obtemos

$$w_1 w_2 \ldots w_i \leq \|w\|_\infty \|w\|_\infty \ldots \|w\|_\infty = (\|w\|_\infty)^i.$$

Assim,

$$\left\|S_{n_k}(e_i)\right\|_p \leq \frac{(\|w\|_\infty)^i}{w_1 \dots w_i w_{i+1} w_{i+2} \dots w_{i+n_k}}.$$

Como $n_k := m_k - k$, segue que

$$\left\|S_{n_k}(e_i)\right\|_p \leq \frac{(\|w\|_\infty)^i}{w_1 \dots w_i w_{i+1} w_{i+2} \dots w_{m_k-k+i}}.$$

Por outro lado, como $0 < k - i < 2k$ quando $k > i$, segue de (3.6) que

$$w_1 \dots w_i w_{i+1} w_{i+2} \dots w_{m_k-(k-i)} \geq \left(1 + \|w\|_\infty\right)^{2k-(k-i)} = \left(1 + \|w\|_\infty\right)^{k+i}$$

quando $k > i$. Invertendo esta desigualdade, obtemos

$$\frac{1}{w_1 w_2 \dots w_i w_{i+1} \dots w_{m_k-(k-i)}} \leq \frac{1}{(1 + \|w\|_\infty)^{k+i}}.$$

Assim,

$$\left\|S_{n_k}(e_i)\right\|_p \leq (\|w\|_\infty)^i \frac{1}{(1 + \|w\|_\infty)^{k+i}}.$$

Como $(1 + \|w\|_\infty)^{-k-i} \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que $\left\|S_{n_k}(e_i)\right\|_p \to 0$ quando $k \to \infty$. Ou seja,

$$S_{n_k}(e_i) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Dado $y \in c_{00}$, podemos escrever $y = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i e_i$ para algum M. Como S_{n_k} é linear, temos

$$S_{n_k}(y) = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i S_{n_k}(e_i).$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(y) = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i \lim_{k\to\infty} S_{n_k}(e_i) = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i \, 0 = 0,$$

conforme pede a condição *ii)* do Critério de Hiperciclicidade. Por fim, dado $y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in c_{00}$, note que $B_w^{n_k} S_{n_k}(y) = y$, o que verifica a condição *iii)*. Como c_{00} é denso em ℓ_p, concluímos assim que B_w satisfaz o Critério de Hiperciclicidade. Segue do Teorema 3.3 que B_w é hipercíclico. □

3.3 Sobre o Conjunto de Vetores Hipercíclicos

Nesta seção, reunimos dois importantes resultados que tratam da estrutura do conjunto de vetores hipercíclicos de um operador. O Teorema de Herrero–Bourdon garante a existência de um subespaço denso cujos vetores não nulos são hipercíclicos, seguido de um corolário que afirma a conexidade do conjunto de vetores hipercíclicos. Para tal, faremos uso do seguinte resultado.

Teorema 3.8 (Bourdon)**.** *Sejam X um espaço de Banach separável e $T \in L(X)$ um operador hipercíclico. Então, para qualquer polinômio não nulo p, o operador $p(T)$ tem imagem densa em X.*

Demonstração. Primeiro, considere o caso onde X é um espaço complexo. Se p é um polinômio constante não nulo, então existe $\gamma \neq 0$ tal que $p(z) = \gamma$ para todo z. Neste caso, a aplicação de p ao operador T resulta no operador $p(T) = \gamma I$, onde I é o operador identidade. Como I tem imagem densa, pois é sobrejetor, segue da Proposição 1.35 que $p(T) = \gamma I$ também tem imagem densa. Agora, suponha $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, com $a_N \neq 0$, $N \geq 1$, um polinômio não nulo com coeficientes complexos. O Teorema Fundamental da Álgebra garante a existência de pelo menos uma raiz complexa para este polinômio, que pode ser fatorado, em termos de suas raízes, por

$$p(z) = a_N(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_N),$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são as raízes do polinômio. Aplicando o polinômio ao operador T, temos

$$p(T) = a_N(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)\cdots(T - \lambda_N I).$$

Como T é hipercíclico, pelo Lema 2.7, para cada $k = 1, \dots, N$, o operador $T - \lambda_k I$ tem imagem densa. Além disso, pela Proposição 1.35, a composição desses operadores também tem imagem densa. Logo, $p(T)$ possui imagem densa.

Agora, se X é um espaço real, considere a complexificação $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ de T. Como T é hipercíclico, pelo Lema 2.7, temos que $\widetilde{T} - \lambda I$ tem imagem densa para qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Por argumento análogo ao que foi feito no caso complexo, segue que $p(\widetilde{T})$ possui imagem densa em $\widetilde{X}$ para qualquer polinômio complexo não nulo p. Considere um elemento arbitrário $u \in X$. Sabemos que $u = u + i0 \in \widetilde{X}$. Como $p(\widetilde{T})$ tem imagem densa, existe uma sequência $(v_n)_n \subset \widetilde{X}$ tal que

$$p(\widetilde{T})(v_n) \longrightarrow u \quad \text{em } \widetilde{X}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $v_n = x_n + iy_n$, onde $x_n, y_n \in X$. Assim,

$$p(\widetilde{T})(v_n) = p(T)(x_n) + ip(T)(y_n) \longrightarrow u + i0.$$

Sabemos que vale a convergência separada de suas partes real e imaginária

$$p(T)(x_n) \to u \quad \text{em } X$$

$$\text{e} \quad p(T)(y_n) \to 0 \quad \text{em } X.$$

A convergência $p(T)(x_n) \to u$ nos mostra que $p(T) : X \to X$ também possui imagem densa, concluindo a prova. □

O próximo resultado apresenta um subconjunto denso de vetores hipercíclicos para um operador hipercíclico T. Além disso, garante a existência de um subespaço invariante e denso cujos elementos, exceto o vetor nulo, são todos vetores hipercíclicos para T.

Teorema 3.9 (Herrero–Bourdon)**.** *Sejam X um espaço de Banach separável e $T \in L(X)$ um operador hipercíclico. Se $x \in X$ é um vetor hipercíclico para T, então*

$$\{p(T)x\colon p \text{ é um polinômio}\} \setminus \{0\}$$

é um conjunto denso de vetores hipercíclicos. Em particular, qualquer operador hipercíclico admite um subespaço invariante denso que consiste, exceto pelo vetor nulo, de vetores hipercíclicos.

Demonstração. Seja $x \in X$ um vetor hipercíclico para T. Note que

$$\{p(T)x : p \text{ é um polinômio}\} = \operatorname{span}\Big(\operatorname{Orb}(x, T)\Big).$$

Isso ocorre porque qualquer vetor $y \in \{p(T)x : p \text{ é um polinômio}\}$ é da forma

$$y = p(T)x = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k x \in \operatorname{span}\Big(\operatorname{Orb}(x, T)\Big).$$

Além disso, se $y \in \operatorname{span}\Big(\operatorname{Orb}(x, T)\Big)$, então existem escalares $a_0, a_1, \dots, a_m$ tais que

$$y = \sum_{k=0}^{m} a_k T^k x.$$

Defina o polinômio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$. Então, aplicando $p(T)$ em x, obtemos

$$p(T)x = a_0 x + a_1 T x + \cdots + a_m T^m x = y.$$

Assim, $y \in \{p(T)x : p \text{ é um polinômio}\}$, o que prova a igualdade. Além disso, o conjunto $M := \{p(T)x : p \text{ é um polinômio}\} = \operatorname{span}\left(\operatorname{Orb}(x, T)\right)$ é subespaço vetorial de X. Este é invariante para T pois se $y = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k x \in M$, então

$$T(y) = T\left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k x\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^{k+1} x.$$

Logo, $T(y)$ é uma combinação linear finita dos vetores $Tx, T^2x, \dots, T^{n+1}x$, o que significa que $T(y) \in \operatorname{span}\Big(\operatorname{Orb}(x, T)\Big) = M$. A relação $\operatorname{Orb}(x, T) \subset M \subset X$ nos mostra que M é denso em X.

Resta verificar que $M \setminus \{0\}$ é um conjunto de vetores hipercíclicos. Seja $y = p(T)x = \sum_{k=0}^{m} a_k T^k x \in M \setminus \{0\}$. Em particular, $p \neq 0$ e $p(T) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^k$. Além disso, dado $n \in \mathbb{N}_0$, temos

$$T^n y = T^n\left(\sum_{k=0}^{m} a_k T^k x\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^n(T^k x) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^{n+k} x.$$

Observe que ao aplicar $p(T)$ em $T^n x$, obtemos

$$p(T)(T^n x) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^k (T^n x) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^{n+k} x = T^n y.$$

Logo, $T^n y = p(T)(T^n x)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Ou seja,

$$\mathrm{Orb}(y, T) = \{T^n y \colon n \in \mathbb{N}_0\} = \{p(T)(T^n x) \colon n \in \mathbb{N}_0\} = p(T)\left(\mathrm{Orb}(x, T)\right).$$

Pelo Teorema 3.8, a imagem de $p(T)$ é densa em X. Como $\mathrm{Orb}(x, T)$ é densa em X, pela Proposição 1.5 temos que $\mathrm{Orb}(y, T)$ é densa em X. □

Uma propriedade topológica importante do conjunto de vetores hipercíclicos é a sua conexidade. Isso decorre como uma aplicação do resultado anterior, conforme mostra o corolário a seguir.

Corolário 3.10. *Seja $T \in L(X)$, onde X é um espaço de Banach separável. Então, o conjunto $HC(T)$ de vetores hipercíclicos para T é um subconjunto conexo de X.*

Demonstração. Seja $x \in HC(T)$. Vejamos que $M := \operatorname{span} \operatorname{orb}(x, T)$ tem dimensão maior que 1. De fato, se M tivesse dimensão 1, então o subespaço M seria gerado apenas pelo vetor x e a órbita de x sob T seria composta por múltiplos escalares de x. Isto é absurdo pois, pela Proposição 2.12, a órbita de x forma um conjunto linearmente independente de vetores. Ou seja, M tem dimensão maior que 1. Como M é conexo, pois é subespaço vetorial, segue que o conjunto $M \setminus \{0\}$ também é conexo.

Agora, suponha, por absurdo, que $HC(T)$ não é conexo. Então, existem abertos $A, B \subset HC(T)$ tais que

$$HC(T) = A \cup B, \quad \text{com} \quad A \cap B = \emptyset, \quad A, B \neq \emptyset.$$

Conforme visto na demonstração do Teorema 3.9, temos $M \setminus \{0\} \subset HC(T)$. Segue que

$$M \setminus \{0\} = (M \setminus \{0\} \cap A) \cup (M \setminus \{0\} \cap B).$$

Como A e B são disjuntos, temos

$$(M \setminus \{0\} \cap A) \cap (M \setminus \{0\} \cap B) = \emptyset.$$

Note que $(M \setminus \{0\} \cap A)$ e $(M \setminus \{0\} \cap B)$ são não vazios, pois $M \setminus \{0\}$ é denso pelo Teorema 3.9. Isto contradiz o fato de $M \setminus \{0\}$ ser conexo e, portanto, $HC(T)$ é necessariamente conexo. □

4 Hiperciclicidade Frequente: Operadores e Subespaços

Neste capítulo, introduzimos a noção de operadores e subespaços frequentemente hipercíclicos. A fim de tornar claro o sentido do termo "frequente" a ser considerado, começamos com os conceitos de densidade para subconjuntos de $\mathbb{N}_0$. A definição de operador frequentemente hipercíclico, conforme veremos na sequência, exige não apenas uma órbita densa, mas também uma condição adicional relacionada às interseções dessa órbita com os abertos do espaço. Em seguida, discutimos o *Critério de Hiperciclicidade Frequente*, utilizando-o para demonstrar uma condição suficiente para que um operador *weighted shift* seja frequentemente hipercíclico. Finalizamos com um resultado que estabelece uma condição suficiente para a inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos para um dado operador.

4.1 Densidades

Para um subconjunto finito $S \subset \mathbb{N}_0$, denotaremos por $\#S$ a cardinalidade de S. Uma maneira de medir a presença dos elementos de um subconjunto em $\mathbb{N}_0$ é por meio da densidade natural, que indica a proporção de seus elementos entre os N primeiros naturais, à medida que N cresce. Esta seção baseia-se nos livros [44, 32].

Definição 4.1. Seja $A \subset \mathbb{N}_0$. A *densidade natural* de A é dada por

$$\operatorname{dens} A := \lim_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap [0, N])}{N+1},$$

sempre que o limite existir.

A noção de densidade natural de um conjunto A ajuda a compreender como os elementos de A se distribuem em $\mathbb{N}_0$ e, também, qual é a frequência com que aparecem ao longo da sequência $(n)_{n\geq 0}$.

Exemplo 4.2. *A densidade natural do conjunto dos pares* $2\mathbb{N}_0 := \{0, 2, 4, 6, \dots\} \subset \mathbb{N}_0$ *é* $1/2$. *De fato, note que*

$$\frac{N}{2} \leq \#(2\mathbb{N}_0 \cap [0, N]) \leq \frac{N}{2} + 1 \qquad \textit{para cada } N \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que

$$\frac{N}{2(N+1)} \leq \frac{\#(2\mathbb{N}_0 \cap [0, N])}{N+1} \leq \frac{\frac{N}{2}+1}{N+1}.$$

Visto que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2(N+1)} = \frac{1}{2} = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{N}{2}+1}{N+1},$$

segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#(2\mathbb{N}_0 \cap [0,N])}{N+1} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\operatorname{dens} 2\mathbb{N}_0 = 1/2$.

Tenenbaum, em [44], apresenta a seguinte generalização desse resultado:

Exemplo 4.3. Sejam $a \in \mathbb{N}_0$ e $q \in \mathbb{N}$. Então o conjunto

$$A := a + q\mathbb{N}_0 = \{a + qn : n \in \mathbb{N}_0\}$$

possui densidade natural igual a $1/q$. Como consequência, segue que o conjunto dos números ímpares também tem densidade natural igual a $1/2$. Veja [44, Part III, Chapter III.1] para uma demonstração deste resultado.

Teorema 4.4 (Teorema dos Números Primos)**.** *Seja $\pi(x)$ a quantidade de primos menores do que ou iguais a x. Então*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1.$$

Demonstração. Veja [32, Teorema A.21]. □

Proposição 4.5. *A densidade natural do conjunto dos números primos é zero.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos números primos. Note que, para $N \geq 2$, temos

$$\#(\mathcal{P} \cap [0,N]) = \pi(N).$$

Como

$$\frac{\pi(N)}{N+1} = \frac{\pi(N)\ln N}{N} \cdot \frac{1}{\ln N} \cdot \frac{N}{N+1},$$

segue que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{\pi(N)\ln N}{N} \cdot \frac{1}{\ln N} \cdot \frac{N}{N+1}\right]. \tag{4.1}$$

Pelo Teorema 4.4, temos

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)\ln N}{N} = 1.$$

Além disso,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N}{N+1} = 1.$$

Assim, segue de (4.1) que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{N+1} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Portanto, concluímos que

$$\operatorname{dens}\mathcal{P} = \lim_{N\to\infty} \frac{\#(\mathcal{P}\cap[0,N])}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{N+1} = 0.$$

□

Ao contrário dos exemplos anteriores, existem subconjuntos $A \subset \mathbb{N}_0$ que não possuem densidade natural, ou seja, para os quais o limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#(A\cap[0,N])}{N+1}$$

não existe. Para lidar com esses casos, introduzimos as noções de densidade inferior e superior, que se caracterizam, respectivamente, por tomar os limites inferior e superior para

$$\frac{\#(A\cap[0,N])}{N+1}$$

quando $N\to\infty$. Esses conceitos ajudam a entender o comportamento de um subconjunto de $\mathbb{N}_0$, mesmo quando a densidade natural não existe.

Definição 4.6. Seja $A \subset \mathbb{N}_0$.

- A *densidade inferior* de A é dada por

$$\underline{\operatorname{dens}}A := \liminf_{N\to\infty} \frac{\#(A\cap[0,N])}{N+1}.$$

- A *densidade superior* de A é dada por

$$\overline{\operatorname{dens}}A := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A\cap[0,N])}{N+1}.$$

Quando $A \subset \mathbb{N}$, usamos $\liminf_{N\to\infty} \frac{\#(A\cap[1,N])}{N}$ para definir a densidade inferior de A. A mesma convenção será usada para a densidade superior, quando se trata de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Além disso, uma vez que a sequência $\left(\frac{\#(A\cap[0,N])}{N+1}\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ é limitada entre 0 e 1, todo subconjunto de $\mathbb{N}_0$ possui densidade inferior e densidade superior. No entanto, a densidade natural nem sempre existe, conforme veremos no seguinte exemplo:

Exemplo 4.7. *Considere o conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [10^k, 2\cdot 10^k - 1] \cap \mathbb{N}.$$

Então $\mathcal{A}$ não possui densidade natural, mas que possui densidade inferior igual a $1/9$ e densidade superior igual a $5/9$.

Demonstração. Sobre os intervalos da união que constitui o conjunto $\mathcal{A}$, observe que:

- Para $k = 0$, temos o intervalo $[1,\ 1]$, que contém apenas o número 1.
- Para $k = 1$, temos o intervalo $[10,\ 19]$. Todos os naturais desse intervalo começam com 1 e são formados por dois dígitos. A quantidade de elementos nesse caso é $19 - 10 + 1 = 10^1$.
- Para $k = 2$, temos o intervalo $[100,\ 199]$. Todos os naturais desse intervalo têm três dígitos, onde o primeiro deles é 1, e o total de elementos é $199 - 100 + 1 = 100 = 10^2$.

De modo geral, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, o intervalo $[10^k,\ 2 \cdot 10^k - 1]$ contém os números naturais com $k + 1$ dígitos cujo primeiro dígito é 1, e possui exatamente 10^k elementos. Assim, o conjunto $\mathcal{A}$ contém todos os naturais cujo primeiro dígito da representação decimal é igual a 1. Denote por $B(x) := \#(\mathcal{A} \cap [1, x])$ a quantidade de elementos de $\mathcal{A}$ menores ou iguais a x. Observe que $10^m - 1$ é o maior natural com m dígitos. Assim, $B(10^m - 1)$ representa a quantidade de elementos de $\mathcal{A}$ que pertencem aos blocos da forma $[10^k,\ 2 \cdot 10^k - 1]$ com $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. Ou seja,

$$B(10^m - 1) = \sum_{k=0}^{m-1} 10^k = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{m-1}.$$

Essa soma se trata de uma progressão geométrica de razão $r = 10$, com m termos, onde o primeiro termo é igual a 1. Assim,

$$\sum_{k=0}^{m-1} 10^k = \frac{10^m - 1}{10 - 1} = \frac{10^m - 1}{9}.$$

Ou seja,

$$\#(\mathcal{A} \cap [1, 10^m - 1]) = B(10^m - 1) = \frac{10^m - 1}{9}.$$

Disso, obtemos

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1,\ 10^m - 1])}{10^m - 1} = \frac{1}{9}, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Isso significa que a sequência $\left(\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1,N])}{N}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência constante igual a $\frac{1}{9}$. Logo,

$$\underline{\text{dens}}\mathcal{A} := \liminf_{N \to \infty} \frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \leq \frac{1}{9}.$$

Resta mostrar que $\frac{1}{9} \leq \underline{\text{dens}}\mathcal{A}$. Seja $N \in \mathbb{N}$, com $N \geq 10$. Temos dois casos a analisar. Primeiro, vamos supor que $N \notin \mathcal{A}$, ou seja, que $N \in [2 \cdot 10^k,\ 10^{k+1} - 1]$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $2 \cdot 10^k - 1 < N$, segue que

$$\mathcal{A} \cap [1, 2 \cdot 10^k - 1] \subseteq \mathcal{A} \cap [1, N].$$

Assim,

$$\#(\mathcal{A} \cap [1, N]) \geq \#(\mathcal{A} \cap [1, 2 \cdot 10^k - 1]) = \sum_{j=0}^{k} 10^j = \frac{10^{k+1} - 1}{9}.$$

Além disso, $N \leq 10^{k+1} - 1$, o que implica que

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \geq \frac{\frac{10^{k+1}-1}{9}}{N} \geq \frac{\frac{10^{k+1}-1}{9}}{10^{k+1}-1} = \frac{1}{9}.$$

Logo,

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \geq \frac{1}{9}.$$

Agora, suponha que $N \in \mathcal{A}$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N \in [10^k,\ 2 \cdot 10^k - 1]$. Sabemos que o número total de elementos de $\mathcal{A}$ até $10^k - 1$ é

$$\sum_{j=0}^{k-1} 10^j = \frac{10^k - 1}{9}.$$

Além disso, o número de elementos de $\mathcal{A}$ no intervalo $[10^k, N]$ é igual a $N - 10^k + 1$, já que todos os naturais nesse intervalo pertencem a $\mathcal{A}$. Assim,

$$\#(\mathcal{A} \cap [1, N]) = \frac{10^k - 1}{9} + (N - 10^k + 1).$$

Disso, obtemos

$$\#(\mathcal{A} \cap [1, N]) = \frac{10^k - 1 + 9(N - 10^k + 1)}{9}.$$

Isso implica que

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{10^k - 1 + 9(N - 10^k + 1)}{9} \right).$$

Note que podemos escrever

$$10^k - 1 + 9(N - 10^k + 1) = 10^k - 1 + 9N - 9 \cdot 10^k + 9 = 9N - 8 \cdot 10^k + 8.$$

Então

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{9N - 8 \cdot 10^k + 8}{9} = \frac{9N - 8 \cdot 10^k + 8}{9N}. \tag{4.2}$$

Como $N \geq 10^k - 1$, concluímos que $8N \geq 8 \cdot 10^k - 8$. Observe que

$$9N - N \geq 8 \cdot 10^k - 8 \implies 9N - 8 \cdot 10^k + 8 \geq N \implies \frac{9N - 8 \cdot 10^k + 8}{9N} \geq \frac{1}{9}.$$

Asssim, de (4.2), obtemos

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} = \frac{9N - 8 \cdot 10^k + 8}{9N} \geq \frac{1}{9}.$$

Portanto, mostramos que, para todo $N \in \mathbb{N}$, com $N \geq 10$, vale

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \geq \frac{1}{9}.$$

Disso, segue que

$$\underline{\text{dens}}\mathcal{A} := \liminf_{N \to \infty} \frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \geq \frac{1}{9}.$$

Como já havíamos demonstrado anteriormente que $\underline{\text{dens}}\mathcal{A} \leq \frac{1}{9}$, concluímos que

$$\underline{\text{dens}}\mathcal{A} = \frac{1}{9}.$$

Agora, a respeito da densidade superior de $\mathcal{A}$, note que o número $2 \cdot 10^m - 1$ é o maior número com $m+1$ dígitos que ainda tem o dígito inicial igual a 1. Isto é, o maior natural no intervalo $[10^m, 2 \cdot 10^m - 1]$. Assim, $B(2 \cdot 10^m - 1)$ representa a soma da quantidade de elementos nos blocos $[10^k, 2 \cdot 10^k - 1]$, para $k = 0, 1, \ldots, m$. Segue que

$$B(2 \cdot 10^m - 1) = \sum_{k=0}^{m} 10^k = \left(\sum_{k=0}^{m-1} 10^k\right) + 10^m = \frac{10^m - 1}{9} + 10^m.$$

Dividindo por $2 \cdot 10^m - 1$, temos

$$\frac{B(2 \cdot 10^m - 1)}{2 \cdot 10^m - 1} = \frac{\frac{10^m - 1}{9} + 10^m}{2 \cdot 10^m - 1}.$$

Observe que

$$\frac{\frac{10^m-1}{9} + 10^m}{2 \cdot 10^m - 1} = \frac{10^m - 1 + 9 \cdot 10^m}{9(2 \cdot 10^m - 1)} = \frac{10 \cdot 10^m - 1}{9(2 \cdot 10^m - 1)} = \frac{10^{m+1} - 1}{18 \cdot 10^m - 9}.$$

Logo,

$$\frac{B(2 \cdot 10^m - 1)}{2 \cdot 10^m - 1} = \frac{10^{m+1} - 1}{18 \cdot 10^m - 9}.$$

Isto é,

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, 2 \cdot 10^m - 1])}{2 \cdot 10^m - 1} = \frac{10^{m+1} - 1}{18 \cdot 10^m - 9}.$$

Isto implica

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, 2 \cdot 10^m - 1])}{2 \cdot 10^m - 1} = \lim_{m \to \infty} \frac{10^{m+1}/10^m - 1/10^m}{18 - 9/10^m} = \lim_{m \to \infty} \frac{10 - \frac{1}{10^m}}{18 - \frac{9}{10^m}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

Ou seja, a sequência $\left(\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1,N])}{N}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para $\frac{5}{9}$. Logo,

$$\overline{\text{dens}}\mathcal{A} := \limsup_{N \to \infty} \frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \geq \frac{5}{9}.$$

Resta mostrar que

$$\overline{\text{dens}}\mathcal{A} \leq \frac{5}{9}.$$

Seja $N \in \mathbb{N}$, com $N \geq 10$. Assim como foi feito na análise da densidade inferior, vamos considerar dois casos. Primeiro, suponha que $N \in \mathcal{A}$. Ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N \in [10^k, 2 \cdot 10^k - 1]$. Sabemos, por (4.2), que

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} = \frac{9N - 8 \cdot 10^k + 8}{9N}.$$

Como $N \leq 2 \cdot 10^k - 1$, obtemos $4N = 9N - 5N \leq 8 \cdot 10^k - 4$. Note que

$$\begin{aligned} 9N - 5N \leq 8 \cdot 10^k - 4 \quad &\iff \quad 9N - 8 \cdot 10^k + 4 \leq 5N \\ &\iff \quad 9N - 8 \cdot 10^k + 8 \leq 5N + 4. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\frac{9N - 8 \cdot 10^k + 8}{9N} \leq \frac{5}{9} + \frac{4}{9N}.$$

Logo,

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \leq \frac{5}{9} + \frac{4}{9N}. \tag{4.3}$$

Agora, se $N \notin \mathcal{A}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N \in [2 \cdot 10^k, 10^{k+1} - 1]$. Sabemos que

$$\#(\mathcal{A} \cap [1, N]) = \#(\mathcal{A} \cap [1, 2 \cdot 10^k - 1) = \sum_{j=0}^{k} 10^j = \frac{10^{k+1} - 1}{9}.$$

Assim,

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} = \frac{10^{k+1} - 1}{9N}. \tag{4.4}$$

Como $2 \cdot 10^k \leq N$, segue que $10^{k+1} = 10 \cdot 10^k \leq 5N$. Isso implica que

$$10^{k+1} - 1 \leq 5N - 1 < 5N + 4.$$

Assim,

$$\frac{10^{k+1} - 1}{9N} \leq \frac{5}{9} + \frac{4}{9N}. \tag{4.5}$$

Segue de (4.4) e (4.5) que

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \leq \frac{5}{9} + \frac{4}{9N}.$$

Daí, e de (4.3), concluímos que isso ocorre tanto quando $N \in \mathcal{A}$ quanto quando $N \notin \mathcal{A}$. Portanto, provamos que

$$\frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \leq \frac{5}{9} + \frac{4}{9N}, \quad \text{para todo } N \geq 10.$$

Ao tomarmos o limite superior quando $N \to \infty$, segue que

$$\overline{\operatorname{dens}}\, \mathcal{A} := \limsup_{N \to \infty} \frac{\#(\mathcal{A} \cap [1, N])}{N} \leq \frac{5}{9},$$

de onde se obtém que $\overline{\operatorname{dens}}\, \mathcal{A} = 5/9$. Como as densidades inferior e superior são distintas, $\mathcal{A}$ não possui densidade natural. □

4.2 Operadores Frequentemente Hipercíclicos

Mais do que apenas exigir que um operador possua um vetor com órbita densa, a noção de operador frequentemente hipercíclico pede que as interseções dessa órbita com cada conjunto aberto não vazio do espaço ocorram com frequência positiva, no sentido da densidade inferior. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 4.8. Seja X um espaço de Banach separável e de dimensão infinita. Um operador $T \in L(X)$ é dito ser *frequentemente hipercíclico* se existe um vetor $x \in X$ (chamado de vetor frequentemente hipercíclico) tal que para qualquer conjunto aberto não vazio $U \subset X$, o conjunto de índices $N(x, U) = \{n \geq 0 : T^n x \in U\}$ possui *densidade inferior* positiva.

No Teorema 3.3, apresentamos um critério suficiente para que um operador seja hipercíclico. Grosse-Erdmann e Peris, em [23], apresentam um resultado análogo para operadores frequentemente hipercíclicos, conhecido como *Critério de Hiperciclicidade Frequente*, cujo enunciado diz:

Teorema 4.9 (Critério de Hiperciclicidade Frequente)**.** *Sejam X um espaço de Banach separável de dimensão infinita e $T \in L(X)$. Dizemos que T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente se existe um subconjunto denso $X_0 \subset X$ e uma aplicação $S : X_0 \to X_0$ tal que, para todo $x \in X_0$:*

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T^n x$ *converge incondicionalmente,*

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S^n x$ *converge incondicionalmente,*

iii) $TSx = x$.

Nessas condições, T é frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Veja [23, Lemma 10.39]. □

O próximo teorema fornece uma condição necessária e suficiente sobre os pesos de um weighted shift $B_w : \ell_p \to \ell_p$ para garantir sua hiperciclicidade. Vale destacar que a suficiência da condição foi demonstrada por Bayart e Grivaux em [2], enquanto a necessidade foi estabelecida posteriormente por Bayart e Ruzsa em [5], por meio de técnicas envolvendo probabilidade e combinatória. No que segue, enunciaremos o resultado em sua forma geral, mas demonstraremos apenas a parte que assegura a suficiência da condição. Para isso, faremos uso do Critério de Hiperciclicidade Frequente.

Teorema 4.10. *Seja $B_w : \ell_p \to \ell_p$ um operador weighted shift, com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} |w_\nu|^p} < \infty$$

se, e somente se, B_w é frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Suponha que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} |w_\nu|^p} < \infty$. Seja $(e_n)_{n\geq 0}$ a base canônica de ℓ_p. Defina o conjunto

$$X_0 := \operatorname{span}\{e_n \,:\, n \geq 0\},$$

que é denso em ℓ_p. Considere o operador

$$S_w(x_0, x_1, x_2, \dots) = \Big(0,\ w_1^{-1}x_0,\ w_2^{-1}x_1,\ w_3^{-1}x_2,\ \dots\Big).$$

Seja $x \in X_0$. Então existe m tal que $x = \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j e_j$. Assim,

$$B_w^n x = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j B_w^n e_j.$$

Note que $B_w^n e_j = 0$ quando $n > j$. Assim,

$$B_w^n e_j = 0 \quad \forall\, n > m \geq j \implies B_w^n x = 0 \quad \forall\, n > m.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_w^n x = \sum_{n=1}^{m} B_w^n x.$$

Ou seja, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_w^n x$ se reduz a uma soma finita, o que a torna incondicionalmente convergente. Assim, a condição $i)$ do Critério de Hiperciclicidade Frequente é satisfeita.

Para comprovar a validade da condição $ii)$ do Critério de Hiperciclicidade Frequente, primeiro veremos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_w^n e_j$ é incondicionalmente convergente para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Para isso, sejam $j \in \mathbb{N}_0$, $(\varepsilon_n)_{n\geq 0} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente fixados. Vimos em (3.7) que

$$S_w^n(e_j) = \Big(0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, \overbrace{w_{j+1}^{-1} w_{j+2}^{-1} \dots w_{j+n}^{-1}}^{\text{posição } j+n},\, 0,\, 0,\, \dots\Big).$$

Ou seja,

$$\|S_w^n e_j\|_p^p = \left| \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n} w_{j+\nu}} \right|^p.$$

Pela hipótese, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \geq N_0 \implies \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{|\prod_{\nu=1}^{n} w_{j+\nu}|^p} < \varepsilon^p.$$

Note que se $M \geq N \geq N_0$, então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N}^{M} \varepsilon_n S_w^n e_j \right\|_p^p &= \sum_{n=N}^{M} \|\varepsilon_n S_w^n e_j\|_p^p = \sum_{n=N}^{M} \|S_w^n e_j\|_p^p \\ &= \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{|\prod_{\nu=1}^{n} w_{j+\nu}|^p} < \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Donde,

$$\left\|\sum_{n=N}^{M} \varepsilon_n S_w^n e_j\right\|_p < \varepsilon.$$

Ou seja, a sequência

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n S_w^n e_j\right)_{N\geq 1}$$

é de Cauchy e, portanto, convergente. Isso prova que $\sum_{n=0}^{\infty} S_w^n e_j$ é incondicionalmente convergente. Dado $x \in X_0$, existem um natural m e escalares $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tais que $x = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k e_k$. Note que, para qualquer $(\varepsilon_n)_{n\geq 0} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n S_w^n e_k &= \sum_{k=0}^{m} a_k \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n S_w^n e_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{N} a_k \varepsilon_n S_w^n e_k \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n S_w^n\left(\sum_{k=0}^{m} a_k e_k\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n S_w^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n S_w^n x.\end{aligned}$$

Logo, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n S_w^n x$ é convergente para qualquer escolha de sinais $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$, pois é soma finita de séries convergentes. Portanto, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_w^n x$ é incondicionalmente convergente, comprovando assim a condição *ii)* do Critério de Hiperciclicidade Frequente. A condição *iii)* também é verificada pois dado $x \in X_0$, temos $B_w\, S_w(x) = x$. Pelo Teorema 4.9, B_w é frequentemente hipercíclico.

Para a recíproca, veja [5, Theorem 4]. □

Definição 4.11. Sejam X um espaço de Banach separável e de dimensão infinita, $T \in L(X)$ e $M \subseteq X$ um subespaço fechado de dimensão infinita. Dizemos que:

a) M é um *subespaço hipercíclico* para T se todo $x \in M \setminus \{0\}$ é hipercíclico para T.

b) M é um *subespaço frequentemente hipercíclico* para T se todo $x \in M \setminus \{0\}$ é frequentemente hipercíclico para T.

Observação 4.12. *Seja $M \subseteq X$ um subespaço hipercíclico para $T \in L(X)$. Então, para todo $j \in \mathbb{N}$, o operador $T^j|_M : M \to X$ é injetor. Isso ocorre pois se $x \in \ker(T^j|_M)$, então $x \in M$ e $T^n x = 0$ para todo $n \geq j$. Assim, a órbita de x, dada por $\{x, Tx, T^2x, \ldots, T^jx\}$, é finita e portanto, não pode ser densa em X. Como $x \in M$, temos que $x = 0$. Isso prova que T^j é injetivo.*

O lema a seguir será útil em demonstrações posteriores. Ele fornece uma condição suficiente para garantir que um operador não admite subespaços frequentemente hipercíclicos.

Lema 4.13. *Para provar que um operador $T \in L(X)$ não possui nenhum subespaço frequentemente hipercíclico, é suficiente provar que cada subespaço fechado de dimensão infinita M contém um vetor x tal que a densidade superior de $\{n \geq 0 : \|T^n x\| \geq C\}$ é igual a 1 para algum $C > 0$, ou seja,*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{n \leq N : \|T^n x\| \geq C\}}{N+1} = 1.$$

Demonstração. Seja M um subespaço de dimensão infinita. Suponha que existe $x \in M$ tal que a densidade superior do conjunto $A := \{n \geq 0 : \|T^n x\| \geq C\}$ é igual a 1 para algum $C > 0$. Ou seja,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap [0, N])}{N+1} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{n \leq N : \|T^n x\| \geq C\}}{N+1} = 1.$$

Note que o vetor x é necessariamente não nulo, pois, se tivéssemos $x = 0$, então $T^n x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, teríamos $A = \emptyset$, o que implicaria que a densidade superior de A é zero, o que não pode ocorrer. Defina o conjunto

$$B := \mathbb{N}_0 \setminus A = \{n \geq 0 : \|T^n x\| < C\} = \{n \geq 0 : T^n x \in B(0; C)\}.$$

Note que $A \cup B = \mathbb{N}_0$ e $A \cap B = \emptyset$. Assim, dado $N \in \mathbb{N}$, temos que

$$\#(A \cap \{0, 1, \ldots, N\}) + \#(B \cap \{0, 1, \ldots, N\}) = N + 1.$$

Isso implica que

$$\frac{\#(A \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} + \frac{\#(B \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} = 1.$$

Logo,

$$\frac{\#(A \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} = 1 - \frac{\#(B \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1}$$

e, portanto, para cada $M \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sup_{N\geq M} \frac{\#(A \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} &= 1 + \sup_{N\geq M} \left(-\frac{\#(B \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1}\right) \\ &= 1 - \inf_{N\geq M} \left(\frac{\#(B \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{N\geq M} \frac{\#(A \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} + \lim_{M\to\infty} \inf_{N\geq M} \frac{\#(B \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} = 1.$$

Ou seja,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} + \liminf_{N\to\infty} \frac{\#(B \cap \{0, 1, \ldots, N\})}{N+1} = 1.$$

Pela hipótese, $\limsup\limits_{N\to\infty} \frac{\#(A\cap\{0,1,\ldots,N\})}{N+1} = 1$. Então

$$1 + \liminf_{N\to\infty} \frac{\#(B\cap\{0,1,\ldots,N\})}{N+1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{N\to\infty} \frac{\#(B\cap\{0,1,\ldots,N\})}{N+1} = 0.$$

Logo,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\#(B\cap[0,N])}{N+1} = 0.$$

Isto é, a densidade inferior do conjunto $B := \{n \geq 0 : T^n x \in B(0;C)\}$ é zero. Como $B(0;C)$ é um conjunto aberto, segue que x não é um vetor frequentemente hipercíclico de M. Isso conclui a demonstração. $\square$

5 Critérios de Existência e de Inexistência para Subespaços Frequetemente Hipercíclicos

Apresentamos neste capítulo o detalhamento dos resultados do artigo [33] de Quentin Menet, que trata de critérios de existência e inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos.

5.1 Inexistência de Subespaços Frequentemente Hipercíclicos

O objetivo desta seção é apresentar um exemplo que fornece uma resposta positiva à pergunta levantada por Bonilla e Grosse-Erdmann em [8, Problem 1], a saber:

Existe um operador frequentemente hipercíclico que possui um subespaço hipercíclico, mas não um subespaço frequentemente hipercíclico?

Para responder a essa pergunta, Quentin Menet apresenta, em [33], um critério suficiente para a inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos. Esse resultado leva a um segundo critério, particular para operadores weighted shifts. Ao longo desta seção, discutiremos ambos os critérios e, ao final, apresentaremos o exemplo mencionado no início.

Teorema 5.1. *Sejam X um espaço de Banach separável e de dimensão infinita e $T \in L(X)$. Se existe $C > 0$ tal que, para qualquer $K \geq 1$, qualquer subespaço fechado de dimensão infinita M de X, qualquer $x \in X$, existe $x' \in M$ tal que $\|x'\| \leq \frac{1}{K}$ e*

$$\sup_{k>K} \frac{\#\{n \leq k : \|T^n(x+x')\| \geq C\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K},$$

então T não possui subespaço frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Seja $\widetilde{M}$ um subespaço de X, fechado de dimensão infinita. Queremos mostrar que $\widetilde{M}$ não pode ser frequentemente hipercíclico para T. É claro que se $\widetilde{M}$ não for um subespaço hipercíclico para T, também não poderá ser frequentemente hipercíclico para T. Então sem perda de generalidade, vamos supor que $\widetilde{M}$ é subespaço hipercíclico para T. Assim, pela Observação 4.12, $T^j|_{\widetilde{M}} \colon \widetilde{M} \to X$ é injetivo para todo $j \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que existe um vetor $x \in \widetilde{M}$, não nulo, tal que

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{n \leq N : \|T^n x\| \geq C/2\}}{N+1} = 1.$$

Isso vai implicar, pelo Lema 4.13, que x não pode ser frequentemente hipercíclico. Para isso, serão construídas duas sequências: uma sequência de vetores $(x_n)_{n\geq 0} \subset \widetilde{M}$ e outra sequência crescente de índices $(k_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{N}_0$. Essas sequências deverão satisfazer $x_0 = 0$, $k_0 = 0$ e as seguintes propriedades:

i) $\|x_n\| \leq \dfrac{1}{n^2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, vale

$$\frac{\#\left\{j \leq k_n : \|T^j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\| \geq C\right\}}{k_n + 1} > 1 - \frac{1}{n^2}. \tag{5.1}$$

ii) Seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \leq k_{n-1}$ e cada $k \leq n-1$, $E_{k,j}$ é o subespaço fechado de codimensão finita associado ao subespaço $F_{k,j} = \operatorname{span}\Big\{T^j x_0, \ldots, T^j x_k\Big\}$ e a $\varepsilon = 1$, cuja existência é garantida pelo Lema 1.39. E vale

$$T^j x_n \in \bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j}, \quad \text{para todo } j \leq k_{n-1}. \tag{5.2}$$

Primeiro, vamos supor que existem tais sequências $(x_n)_{n\geq 0}$ e $(k_n)_{n\geq 0}$, satisfazendo as condições acima. Com essa suposição, daremos continuidade à demonstração. A verificação da existência dessas sequências será apresentada ao final.

Como $\|x_n\| \leq \dfrac{1}{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Como $\widetilde{M}$ é fechado e X é Banach, $\widetilde{M}$ é Banach pela Proposição 1.8. Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente, obtemos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \in \widetilde{M}$ pela Proposição 1.12.

A partir de agora denotaremos $x := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$J_n := \left\{j \leq k_n : \left\|T^j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| \geq C\right\}. \tag{5.3}$$

Mostraremos que para qualquer $j \in J_n$, vale que $\|T^j x\| \geq C/2$. Note que para $\ell \in \mathbb{N}$ fixo, temos

$$T^j\left(\sum_{k=1}^{\ell} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} T^j(x_k). \tag{5.4}$$

Como $\lim\limits_{\ell\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\ell} x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = x$ e T^j é contínuo, por (5.4), temos

$$T^j(x) = T^j\left(\lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} x_k\right) = \lim_{\ell\to\infty} T^j\left(\sum_{k=1}^{\ell} x_k\right) = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} T^j(x_k).$$

Assim, $T^j\left(x\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T^j(x_k)$. Isso implica que

$$\|T^j(x)\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} T^j(x_k)\right\|. \tag{5.5}$$

Divida a soma $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T^j x_k$ em duas parcelas

$$\sum_{k=1}^{\infty} T^j x_k = \sum_{k=1}^{n} T^j x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} T^j x_k.$$

Por construção, $F_{n,j}$=span $\{T^j x_0, T^j x_1, \dots, T^j x_n\}$. Assim, $\sum\limits_{k=1}^{n} T^j x_k \in F_{n,j}$.

De (5.2), temos

$$T^j x_m \in E_{k,j}, \quad \forall j \leq k_{m-1}, \ \forall k+1 \leq m. \tag{5.6}$$

Suponha que $n+1 \leq m$ (onde esse n é o índice fixo que separa as somas). Então, segue de (5.6) que, para $j \leq k_n$, temos $T^j x_m \in E_{n,j}$. Ou seja,

$$T^j x_m \in E_{n,j}, \quad \text{para todo } m \geq n+1.$$

Assim, como $E_{n,j}$ é um subespaço fechado, temos $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} T^j x_k \in E_{n,j}$. Defina

$$y' := \sum_{k=1}^{n} T^j x_k \in F_{n,j} \ \text{ e } \ y'' := \sum_{k=n+1}^{\infty} T^j x_k \in E_{n,j}.$$

Pela construção dos subespaços $E_{n,j}$ e $F_{n,j}$, onde usou-se o Lema 1.39, temos que

$$\|y' + y''\| \geq \max\left(\frac{\|y''\|}{3}, \frac{\|y'\|}{2}\right) \geq \frac{\|y'\|}{2}.$$

Logo,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} T^j x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} T^j x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} T^j x_k\right\| \geq \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n} T^j x_k\right\|. \tag{5.7}$$

Como $j \in J_n$, por definição temos, $\|T^j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\| \geq C$. Disso, obtemos

$$\frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} T^j x_k\right\| \geq \frac{C}{2}.$$

Logo, segue de (5.5) e (5.7) que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $j \in J_n$, temos

$$\|T^j x\| \geq \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n} T^j x_k\right\| \geq \frac{C}{2}. \tag{5.8}$$

Observe que

$$\begin{aligned} j \in J_n \implies & j \leq k_n \text{ e } \left\|\sum_{k=1}^{n} T^j x_k\right\| \geq C \\ \implies & j \leq k_n \text{ e } \|T^j(x)\| \geq \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n} T^j x_k\right\| \geq \frac{C}{2} \text{ por (5.8)} \\ \implies & j \in \left\{i \leq k_n \colon \|T^i x\| \geq \frac{C}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Isto mostra que $J_n \subseteq \left\{ j \leq k_n : \|T^j x\| \geq \dfrac{C}{2} \right\}$. Disso, obtemos

$$\# \left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\} \geq \# J_n,$$

o que implica que

$$\frac{\# \left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{k_n + 1} \geq \frac{\# J_n}{k_n + 1}. \tag{5.9}$$

De (5.1) e (5.3), obtemos

$$\frac{\# J_n}{k_n + 1} > 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Assim, temos

$$\frac{\# \left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{k_n + 1} > 1 - \frac{1}{n^2}. \tag{5.10}$$

Como

$$\left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\} \subset \{0, 1, \dots, k_n\},$$

e $n \leq k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, temos

$$\# \left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\} \leq k_n + 1,$$

o que implica

$$\frac{\# \left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{k_n + 1} \leq 1. \tag{5.11}$$

Por (5.10) e (5.11), obtém-se

$$1 - \frac{1}{n^2} < \frac{\# \left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{k_n + 1} \leq 1.$$

Disso, obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\# \left\{ j \leq k_n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{k_n + 1} = 1.$$

Ou seja, a sequência $\left(\frac{\# \left\{ j \leq n \colon \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tem uma subsequência que converge para 1. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, temos

$$0 \leq \frac{\# \left\{ 0 \leq j \leq n;\ \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{n + 1} \leq 1,$$

pois o numerador é menor ou igual do que $n + 1$, e maior ou igual do que zero. Logo, isso implica que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\# \left\{ j \leq n; \|T^j x\| \geq \frac{C}{2} \right\}}{n + 1} = 1.$$

Portanto, pelo Lema 4.13, T não possui subespaço frequentemente hipercíclico.

Agora, vamos provar que, de fato, a sequência $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \widetilde{M}$ e a sequência crescente de índices $(k_n)_{n\geq 0}$ existem. Comecemos com $x_0 = 0$ e $k_0 = 0$. Os termos x_n e k_n seguintes são determinados a partir dos seguintes passos.

(i) Passo $n = 1$ (determinando os termos x_1 e k_1):

Sejam $K := \max\{1^2, k_0\} = 1$, $M_1 := \widetilde{M}$ e $x := x_0 = 0$. A hipótese do teorema garante a existência de um vetor $x_1 \in M_1 = \widetilde{M}$, com $\|x_1\| \leq \frac{1}{1^2} = 1$, tal que

$$\sup_{k>K} \frac{\#\{n \leq k : \|T^n(x_0 + x_1)\| \geq C\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K}.$$

Como $K = 1$ e $x_0 = 0$, isso implica na existência de x_1 para o qual

$$\sup_{k>1} \frac{\#\{n \leq k : \|T^n(x_1)\| \geq C\}}{k+1} > 0.$$

A definição de supremo nos permite escolher $k_1 > 1$, tal que

$$\frac{\#\{j \leq k_1 : \|T^j(x_1)\| \geq C\}}{k_1+1} > 0.$$

Essa escolha é possível pois 0 não é cota superior do conjunto em questão.

(ii) Passo $n = 2$ (determinando os termos x_2 e k_2):

Para cada $0 \leq j \leq k_1$ e cada $0 \leq k \leq 1$, defina $F_{k,j} := \operatorname{span}\{T^j x_0, \ldots, T^j x_k\}$. Nesse caso, temos

$$F_{0,j} = \operatorname{span}\{T^j x_0\} = \{0\}, \text{ pois } x_0 = 0,$$
$$\text{e} \quad F_{1,j} = \operatorname{span}\{T^j x_0, T^j x_1\} = \operatorname{span}\{T^j x_1\}.$$

Sabemos, pelo Lema 1.39, que para cada subespaço $F_{k,j}$ e para cada $\varepsilon = 1$, existe um subespaço $E_{k,j} \subset X$, fechado de codimensão finita, tal que, para todos $x \in E_{k,j}$ e $y \in F_{k,j}$, vale

$$\|x + y\| \geq \max\left(\frac{\|x\|}{3}, \frac{\|y\|}{2}\right).$$

Defina

$$M_2 := \widetilde{M} \cap \bigcap_{j\leq k_1} T^{-j}\left(\bigcap_{k\leq 1} E_{k,j}\right).$$

É claro que M_2 é fechado. Observe, pelo Lema 1.41, que $\bigcap_{k\leq 1} E_{k,j}$ tem codimensão finita em X. Como $T^j|_{\widetilde{M}} \colon \widetilde{M} \to X$ é injetor, o Lema 1.42 garante que cada subespaço $(T^j|_{\widetilde{M}})^{-1}\left(\bigcap_{k\leq 1} E_{k,j}\right) = \widetilde{M} \cap T^{-j}\left(\bigcap_{k\leq 1} E_{k,j}\right)$ tem codimensão finita em $\widetilde{M}$. Novamente pelo Lema 1.41, o subespaço

$$M_2 := \widetilde{M} \cap \bigcap_{j\leq k_1} T^{-j}\left(\bigcap_{k\leq 1} E_{k,j}\right)$$

também tem codimensão finita em $\widetilde{M}$. Logo, M_2 tem dimensão infinita. Aplicando a hipótese do teorema para $K := \max\{2^2, k_1\}$, $M := M_2$ e $x := x_0 + x_1$, concluímos que existe um vetor $x_2 \in M_2$ tal que $\|x_2\| \leq \frac{1}{K}$, e que vale

$$\sup_{k>K} \frac{\#\{n \leq k : \|T^n(x_0 + x_1 + x_2)\| \geq C\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K}. \tag{5.12}$$

Como $K \geq 2^2$ e $x_0 = 0$, segue que $\|x_2\| \leq 1/2^2$, donde, (5.12) pode ser escrita como

$$\sup_{k>K} \frac{\#\{n \leq k : \|T^n(x_1 + x_2)\| \geq C\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K} \geq 1 - \frac{1}{2^2}.$$

Da definição de supremo, existe $k_2 > K = \max\{2^2, k_1\}$ (e portanto $k_2 > k_1$) tal que

$$\frac{\#\{j \leq k_2 : \|T^j(x_1 + x_2)\| \geq C\}}{k_2+1} > 1 - \frac{1}{2^2}.$$

Isso é garantido pois $1 - 1/2^2$ já não é cota superior para o conjunto em questão. Além disso, segue da definição de M_2 que

$$x_2 \in M_2 \subseteq \bigcap_{j \leq k_1} T^{-j}\left(\bigcap_{k \leq 1} E_{k,j}\right).$$

Logo, para todo $j \leq k_1$, temos

$$T^j x_2 \in \bigcap_{k \leq 1} E_{k,j}.$$

Assim, até este momento, verificamos que:

i) $\|x_2\| \leq \dfrac{1}{2^2}$;

ii) o termo k_2 satistaz

$$\frac{\#\{j \leq k_2 : \|T^j(x_1 + x_2)\| \geq C\}}{k_2+1} > 1 - \frac{1}{2^2};$$

iii) para todo $j \leq k_1$, temos

$$T^j x_2 \in \bigcap_{k \leq 1} E_{k,j}.$$

(*iii*) Caso geral (determinando os termos x_n e k_n):

Suponha que os termos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ e $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ já tenham sido construídos. Para cada $j \leq k_{n-1}$ e cada $k \leq n-1$, defina o subespaço

$$F_{k,j} := \text{span}\{T^j x_0, T^j x_1, \ldots, T^j x_k\} \subset X.$$

Tomando $\varepsilon = 1$, o Lema 1.39 assegura que, para cada $F_{k,j}$, existe um subespaço $E_{k,j} \subset X$, fechado de codimensão finita, tal que, para todos $x \in E_{k,j}$ e $y \in F_{k,j}$, vale

$$\|x + y\| \geq \max\left(\frac{\|x\|}{3}, \frac{\|y\|}{2}\right).$$

Defina

$$M_n := \widetilde{M} \cap \bigcap_{j \leq k_{n-1}} T^{-j} \left(\bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j} \right).$$

É claro que M_n é fechado. Observe, pelo Lema 1.41, que $\bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j}$ tem codimensão finita em X. Como $T^j|_{\widetilde{M}} : \widetilde{M} \to X$ é injetor, o Lema 1.42 garante que cada subespaço $(T^j|_{\widetilde{M}})^{-1} \left(\bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j} \right) = \widetilde{M} \cap T^{-j} \left(\bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j} \right)$ tem codimensão finita em $\widetilde{M}$. Novamente pelo Lema 1.41, o subespaço

$$M_n := \widetilde{M} \cap \bigcap_{j \leq k_{n-1}} T^{-j} \left(\bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j} \right)$$

também tem codimensão finita em $\widetilde{M}$. Logo, M_n tem dimensão infinita.

Aplicando a hipótese do teorema para $K := \max\{n^2, k_{n-1}\}$, $M := M_n$ e $x := \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k$, obtemos um vetor $x_n \in M_n$ tal que $\|x_n\| \leq \frac{1}{K}$ e

$$\sup_{k > K} \frac{\#\{j \leq k : \|T^j(x + x_n)\| \geq C\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K}. \tag{5.13}$$

Aqui, $x + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Como $K \geq n^2$, temos que $\|x_n\| \leq \frac{1}{n^2}$. Além disso, via justificativa análoga à que foi feita nos passos 1 e 2, segue de (5.13) que podemos escolher um $k_n > K \geq k_{n-1}$ tal que

$$\frac{\#\{j \leq k_n : \|T^j(\sum_{k=1}^{n} x_k)\| \geq C\}}{k_n + 1} > 1 - \frac{1}{n^2}. \tag{5.14}$$

Assim, verificamos a condição $i)$ das propriedades que supomos no início para $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq \widetilde{M}$ e $(k_n)_{n \geq 0}$. Para verificar a condição $ii)$ lembre-se que $x_n \in M_n$, e que por definição,

$$M_n \subseteq \bigcap_{j \leq k_{n-1}} T^{-j} \left(\bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j} \right).$$

Disso, temos que

$$x_n \in T^{-j} \left(\bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j} \right) = \bigcap_{k \leq n-1} T^{-j} \left(E_{k,j} \right), \quad \forall j \leq k_{n-1}.$$

Ou seja, para cada $j \leq k_{n-1}$, temos

$$T^j x_n \in \bigcap_{k \leq n-1} E_{k,j}.$$

E assim construímos recursivamente as sequências $(x_n)_{n \geq 0}$ e $(k_n)_{n \geq 0}$, satisfazendo as propriedades inicialmente consideradas. $\square$

Lema 5.2. *Seja B_w o operador weighted shift da Definição 3.5. Para quaisquer $x = (x_k)_{k \geq 0}$ e $x' = (x'_k)_{k \geq 0}$ em ℓ_p, e para todo $k \geq 1$, vale*

$$\frac{\#\{n \leq k : \|B_w^n(x + x')\| \geq 1\}}{k+1} \geq \frac{\#\{n \geq 0 : \|(x_k + x'_k) B_w^n e_k\| \geq 1\}}{k+1}.$$

Demonstração. Da definição de operador weighted shift, temos

$$B_w e_k = w_k e_{k-1}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Aplicando B_w novamente, obtemos

$$B_w^2 e_k = B_w(B_w e_k) = B_w(w_k e_{k-1}) = w_k B_w e_{k-1} = w_k w_{k-1} e_{k-2}, \quad \text{para } k \geq 2.$$

Aplicando B_w mais uma vez:

$$B_w^3 e_k = w_k w_{k-1} w_{k-2} e_{k-3}, \quad \text{para } k \geq 3.$$

Prosseguindo assim, obtemos

$$B_w^n e_k = \begin{cases} w_k w_{k-1} \ldots w_{k-n+1} e_{k-n}, & \text{se } k \geq n, \\ 0, & \text{se } k < n. \end{cases} \tag{5.15}$$

Ou seja, $B_w^n e_k$ será ou um múltiplo escalar não-nulo de algum e_m, ou o vetor nulo. Escrevamos

$$x + x' = \sum_{j \geq 0} (x_j + x'_j) e_j.$$

Aplicando B_w^n nesta soma, obtemos

$$B_w^n(x + x') = B_w^n \left(\sum_{j \geq 0} (x_j + x'_j) e_j \right).$$

Como B_w^n é linear, podemos escrever

$$B_w^n(x + x') = \sum_{j \geq 0} (x_j + x'_j) B_w^n e_j = \sum_{j \geq n} (x_j + x'_j) w_j w_{j-1} \cdots w_{j-n+1} e_{j-n}.$$

Defina

$$\lambda_j = w_j w_{j-1} \cdots w_{j-n+1}.$$

Assim, podemos reescrever

$$\begin{aligned} B_w^n(x + x') &= \sum_{j \geq n} (x_j + x'_j) \lambda_j e_{j-n} \\ &= (x_n + x'_n)\lambda_n e_0 + (x_{n+1} + x'_{n+1})\lambda_{n+1} e_1 + (x_{n+2} + x'_{n+2})\lambda_{n+2} e_2 + \cdots. \end{aligned}$$

Disso, obtemos

$$B_w^n(x + x') = \Big((x_n + x'_n)\lambda_n, (x_{n+1} + x'_{n+1})\lambda_{n+1}, (x_{n+2} + x'_{n+2})\lambda_{n+2}, \ldots \Big).$$

Ou seja, para cada $m \geq 0$, temos

$$(B_w^n(x + x'))_m = (x_{m+n} + x'_{m+n})\lambda_{m+n}.$$

Sabemos que $\lambda_{m+n} = w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}$. Substituindo, temos

$$(B_w^n(x+x'))_m = (x_{m+n} + x'_{m+n})w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}.$$

Assim, a norma é dada por

$$\|B_w^n(x+x')\| = \left(\sum_{m\geq 0}\left|(x_{m+n} + x'_{m+n})w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.16}$$

Visto que $B_w^n e_{m+n} = w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}e_m$, obtemos

$$(x_{m+n} + x'_{m+n})B_w^n e_{m+n} = (x_{m+n} + x'_{m+n})w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}e_m,$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\|(x_{m+n} + x'_{m+n})B_w^n e_{m+n}\| &= \|(x_{m+n} + x'_{m+n})w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}e_m\| \\ &= |(x_{m+n} + x'_{m+n})w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}|\|e_m\| \\ &= |(x_{m+n} + x'_{m+n})w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}|.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|(x_{m+n} + x'_{m+n})B_w^n e_{m+n}\|^p = |(x_{m+n} + x'_{m+n})w_{m+n}w_{m+n-1}\cdots w_{m+1}|^p.$$

Daí, e usando (5.16), obtemos

$$\|B_w^n(x+x')\| = \left(\sum_{m\geq 0}\|(x_{m+n} + x'_{m+n})B_w^n e_{m+n}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Faça $j := m+n$. Logo, para $m \geq 0$, tem-se $j \geq n$. Reescrevendo a soma acima, obtém-se

$$\|B_w^n(x+x')\| = \left(\sum_{j\geq n}\|(x_j + x'_j)B_w^n e_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.17}$$

É claro que, para cada $k \geq n$, vale

$$\sum_{j\geq n}\|(x_j + x'_j)B_w^n e_j\|^p \geq \|(x_k + x'_k)B_w^n e_k\|^p.$$

Isto implica

$$\left(\sum_{j\geq n}\|(x_j + x'_j)B_w^n e_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \|(x_k + x'_k)B_w^n e_k\|.$$

Daí, e de (5.17), obtemos

$$\|B_w^n(x+x')\| \geq \|(x_k + x'_k)B_w^n e_k\| \quad \text{para todo } k \geq n. \tag{5.18}$$

Assim, se $n \geq 0$ é tal que $\|(x_k + x'_k)B_w^n e_k\| \geq 1$, então por (5.15) e (5.18) deve ocorrer

$$n \leq k \quad \text{e} \quad \|B_w^n(x+x')\| \geq 1.$$

Isso garante a seguinte inclusão de conjuntos:

$$\{n \leq k : \|B_w^n(x+x')\| \geq 1\} \supseteq \{n \geq 0 : \|(x_k + x'_k)B_w^n e_k\| \geq 1\}.$$

Como consequência imediata de tal inclusão, vale

$$\#\{n \leq k : \|B_w^n(x+x')\| \geq 1\} \geq \#\{n \geq 0 : \|(x_k + x'_k)B_w^n e_k\| \geq 1\}.$$

Dividindo ambos os lados por $k+1$, alcançamos a desigualdade desejada:

$$\frac{\#\{n \leq k : \|B_w^n(x+x')\| \geq 1\}}{k+1} \geq \frac{\#\{n \geq 0 : \|(x_k + x'_k)B_w^n e_k\| \geq 1\}}{k+1}.$$

Isso conclui a demonstração. □

Apresentamos a seguir um critério para operadores *weighted shift* que, com base no comportamento da norma das iterações dos vetores da base canônica, garante a inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos.

Teorema 5.3. *Seja $B_w : \ell_p \to \ell_p$ um operador weighted shift, com $1 \leq p < \infty$. Suponha que existe uma sequência $(C_k)_{k\geq 0}$ de números positivos tal que $\sum_{k=0}^{\infty}(1/C_k)^p < \infty$ e que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\{n \geq 0 : \|B_w^n e_k\| \geq C_k\}}{k+1} = 1.$$

Então B_w não possui subespaços frequentemente hipercíclicos.

Demonstração. O Teorema 5.1 nos dá uma condição suficiente para mostrar que um operador não possui subespaço frequentemente hipercíclico. Faremos uso dele nessa demonstração. Sejam $K \geq 1$, $M \subset \ell_p$ um subespaço fechado de dimensão infinita e $x \in \ell_p$ um vetor arbitrário. Vamos construir um vetor $x' \in M$ que satisfaça $\|x'\| \leq \frac{1}{K}$ e que

$$\sup_{k>K} \frac{\#\{n \leq k : \|B_w^n(x+x')\| \geq 1\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K}.$$

Por hipótese,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\{n \geq 0 : \|B_w^n e_k\| \geq C_k\}}{k+1} = 1.$$

Isso nos garante a existência de k_0 tal que

$$\frac{\#\{n \geq 0 : \|B_w^n e_k\| \geq C_k\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K}, \quad \text{para todo } k \geq k_0. \tag{5.19}$$

Como estamos tomando $x \in \ell_p$, vale $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Isso implica que

$$\sum_{k=m}^{\infty} |x_k|^p \longrightarrow 0, \text{ quando } m \to \infty.$$

Assim, existe $k' \geq 0$ tal que $\sum\limits_{k=k'}^{\infty} |x_k|^p < \left(\frac{1}{2K}\right)^p$. Como a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1/C_k)^p$ é convergente por hipótese, segue que

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{C_k^p} \longrightarrow 0, \text{ quando } m \to \infty.$$

Daí, existe $k'' \geq 0$ tal que $\sum\limits_{k=k''}^{\infty} \frac{1}{C_k^p} < \left(\frac{1}{2K}\right)^p$. Tome $k_1 \geq \max(k', k'')$. Logo,

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} |x_k|^p < \left(\frac{1}{2K}\right)^p \quad \text{e} \quad \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{C_k^p} < \left(\frac{1}{2K}\right)^p,$$

o que implica

$$\left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \frac{1}{2K} \quad \text{e} \quad \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{C_k^p}\right)^{1/p} < \frac{1}{2K}. \tag{5.20}$$

Por conveniência, suponha também que $k_1 \geq \max(k_0, K+1)$.

Pela Proposição 1.22, existe um vetor não nulo y em M tal que $v(y) \geq k_1$. Ou seja, y tem todas as suas primeiras $k_1 - 1$ coordenadas iguais a zero. Defina o vetor $x' = \frac{1}{K} \cdot \frac{y}{\|y\|}$. Assim,

$$\|x'\| = \left\| \frac{1}{K} \cdot \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{1}{K} \cdot \frac{\|y\|}{\|y\|} = \frac{1}{K}.$$

Note que quando fazemos $x' = \frac{1}{K} \cdot \frac{y}{\|y\|}$, apenas multiplicamos as coordenadas de y pelo escalar $\frac{1}{K\|y\|}$, o que não alteram os índices onde y tem entradas não nulas. Ou seja, também temos que $v(x') \geq k_1$. Assim, $x' \in M$, com $\|x'\| = \frac{1}{K}$, e $x'_k = 0$ para $k < k_1$. Dados $a, b \in \ell_p$, sabemos que

$$\|a + b\|_p \geq \|a\|_p - \|b\|_p.$$

Assim,

$$\left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x'_k + x_k|^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x'_k|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x'\| - \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Como

$$\|x'\| = \frac{1}{K} \quad \text{e} \quad \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \frac{1}{2K},$$

segue que

$$\left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x'_k + x_k|^p\right)^{1/p} > \frac{1}{K} - \frac{1}{2K} = \frac{1}{2K}.$$

Usando (5.20), obtém-se

$$\left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x'_k + x_k|^p\right)^{1/p} > \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{C_k^p}\right)^{1/p}. \tag{5.21}$$

Afirmamos que existe um índice $\nu \geq k_1$ tal que

$$|x'_\nu + x_\nu| \geq \frac{1}{C_\nu}.$$

De fato, suponha, por contradição, que isso não seja verdade. Ou seja, $|x'_k + x_k| < \dfrac{1}{C_k}$ para todo $k \geq k_1$. Elevando à potência p, obtemos

$$|x'_k + x_k|^p < \frac{1}{C_k^p}.$$

Somando sobre todos os $k \geq k_1$, temos

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} |x'_k + x_k|^p \leq \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{C_k^p}.$$

Disso, obtemos

$$\left(\sum_{k=k_1}^{\infty} |x'_k + x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{C_k^p}\right)^{1/p},$$

o que contraria (5.21).

Agora, sabemos que $|x_\nu + x'_\nu| \geq 1/C_\nu$ para algum $\nu \geq k_1$. Além disso, dado $n \geq 0$, vale a igualdade $\|(x_\nu + x'_\nu)B_w^n e_\nu\| = |x_\nu + x'_\nu| \cdot \|B_w^n e_\nu\|$. Assim, temos

$$\|(x_\nu + x'_\nu)B_w^n e_\nu\| \geq \frac{1}{C_\nu}\|B_w^n e_\nu\|. \tag{5.22}$$

Segue de (5.22) que se $n \geq 0$ é tal que $\|B_w^n e_\nu\| \geq C_\nu$, então

$$\|(x_\nu + x'_\nu)B_w^n e_\nu\| \geq 1.$$

Ou seja,

$$\{n \geq 0 : \|B_w^n e_\nu\| \geq C_\nu\} \subseteq \{n \geq 0 : \|(x_\nu + x'_\nu)B_w^n e_\nu\| \geq 1\}.$$

Isso implica que

$$\#\{n \geq 0 : \|(x_\nu + x'_\nu)B_w^n e_\nu\| \geq 1\} \geq \#\{n \geq 0 : \|B_w^n e_\nu\| \geq C_\nu\}.$$

Logo,

$$\frac{\#\{n \geq 0 : \|(x_\nu + x'_\nu)B_w^n e_\nu\| \geq 1\}}{\nu + 1} \geq \frac{\#\{n \geq 0 : \|B_w^n e_\nu\| \geq C_\nu\}}{\nu + 1}.$$

Do Lema 5.2, temos

$$\frac{\#\{n \leq \nu : \|B_w^n (x + x')\| \geq 1\}}{\nu + 1} \geq \frac{\#\{n \geq 0 : \|(x_\nu + x'_\nu)B_w^n e_\nu\| \geq 1\}}{\nu + 1}.$$

Portanto,

$$\frac{\#\{n \leq \nu : \|B_w^n (x + x')\| \geq 1\}}{\nu + 1} \geq \frac{\#\{n \geq 0 : \|B_w^n e_\nu\| \geq C_\nu\}}{\nu + 1} \tag{5.23}$$

para algum $\nu \geq k_1$. Como escolhemos $k_1 \geq \max(k_0, K+1)$, o que implica que $\nu \geq k_0$, segue de (5.19) que

$$\frac{\#\{n \geq 0 : \|B_w^n e_\nu\| \geq C_\nu\}}{\nu+1} > 1 - \frac{1}{K}.$$

Daí e de (5.23), segue que

$$\frac{\#\{n \leq \nu : \|B_w^n(x+x')\| \geq 1\}}{\nu+1} > 1 - \frac{1}{K}.$$

Note que $\nu > K$ (pois $k_1 > K$). Logo,

$$\sup_{k>K} \frac{\#\{n \leq k : \|B_w^n(x+x')\| \geq 1\}}{k+1} > 1 - \frac{1}{K}.$$

Pelo Teorema 5.1, conclui-se que B_w não possui subespaço frequentemente hipercíclico. $\square$

Quentin Menet apresenta, em [35], a seguinte condição necessária e suficiente para que um weighted shift admita subespaço hipercíclico.

Teorema 5.4. *Seja $B_w : \ell_p \to \ell_p$ um operador weighted shift, com $1 \leq p < \infty$. Então B_w admite um subespaço hipercíclico se, e somente se,*

$$\sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq 0} \prod_{\nu=1}^{n} w_{k+\nu} \leq 1.$$

Demonstração. Veja [35, Theorem 3.3]. $\square$

Com base nos resultados que apresentamos, podemos agora construir um exemplo de operador que responde à pergunta levantada no início da seção:

Teorema 5.5. *Existe um operador weighted shift frequentemente hipercíclico que admite um subespaço hipercíclico, mas que não possui subespaço frequentemente hipercíclico.*

Demonstração. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros não negativos, com $a_0 = 1$. Defina a sequência de pesos $w = (w_k)_{k\geq 1}$ por

$$w_k = \begin{cases} 2, & \text{se } k \in [a_{2n}, a_{2n+1}) \text{ para algum } n \geq 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como w é limitada, o operador B_w está bem definido em ℓ_p. Aqui a notação $[a_{2n}, a_{2n+1})$ representa um intervalo de números inteiros, ou seja, o conjunto $\{a_{2n}, a_{2n}+1, \ldots, a_{2n+1}-1\}$. Assim, $\bigcup_{n=0}^{\infty}[a_{2n}, a_{2n+1})$ é o conjunto dos índices $k \geq 1$ em que $w_k = 2$. Para uma melhor compreensão a respeito da sequência w, note que

$$w = \Big(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k\in[a_0,a_1)}, \quad \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\in[a_1,a_2)}, \quad \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k\in[a_2,a_3)}, \quad \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\in[a_3,a_4)}, \quad \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k\in[a_4,a_5)}, \quad \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\in[a_5,a_6)}, \quad \ldots\Big).$$

Note que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, vale

$$\sum_{k\in[a_{2n},a_{2n+1})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} = \sum_{k=1}^{\alpha_n} \left(\frac{1}{2^{\alpha_0+\cdots+\alpha_{n-1}}2^k}\right)^p, \tag{5.24}$$

onde $\alpha_i := \#\Big([a_{2j}, a_{2j+1})\Big)$, e convenciona-se $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{-1} = 0$ (que aparece apenas no caso $n = 0$). Fixemos $N \in \mathbb{N}$, e somemos os termos da forma (5.24), variando $n = 0$ até $n = N$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \sum_{k\in[a_{2n},a_{2n+1})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{\alpha_n} \left(\frac{1}{2^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+k}}\right)^p \\ &= \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2^{3p}} + \frac{1}{2^{4p}} + \cdots + \frac{1}{2^{(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_N)p}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in[a_{2n},a_{2n+1})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right)^p < \infty. \tag{5.25}$$

Agora, considere o produto $\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)$. Podemos escrever

$$\prod_{\nu=1}^{k} w_\nu = \prod_{\nu\in S_k} w_\nu \cdot \prod_{\nu\notin S_k} w_\nu,$$

onde S_k é o conjunto de índices ν em $[1, k]$, onde $w_\nu = 2$. Assim, se $\nu \notin S_k$, temos $w_\nu = 1$. Se $k \geq a_{2n+1}$, então os fatores w_ν, com $\nu \in [a_{2n}, a_{2n+1})$, fazem parte do produto $\prod_{\nu=1}^{k} w_\nu$, pois satisfazem $\nu \leq k$. Como esses fatores são iguais a 2 e existem $a_{2n+1} - a_{2n}$ índices em $[a_{2n}, a_{2n+1})$, temos

$$\prod_{\nu=a_{2n}}^{a_{2n+1}-1} w_\nu = 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}.$$

Nessas condições, como o produto $\prod_{\nu=1}^{k} w_\nu$ contém pelo menos esses fatores, segue que

$$\prod_{\nu=1}^{k} w_\nu = \prod_{\nu\in S_k} w_\nu \geq 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}.$$

Logo, para qualquer $k \geq a_{2n+1}$, temos

$$\prod_{\nu=1}^{k} w_\nu \geq 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}.$$

Isso implica que

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} \leq \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}, \quad \text{para todo} \quad k \geq a_{2n+1}.$$

Em particular, como essa desigualdade vale para todos os $k \in [a_{2n+1}, a_{2n+2})$, obtemos

$$\sum_{k\in[a_{2n+1},a_{2n+2})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} \leq \sum_{k\in[a_{2n+1},a_{2n+2})} \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}.$$

Observe que o termo dentro do somatório $\sum_{k\in[a_{2n+1},a_{2n+2})} \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}$ não depende de k. Como a quantidade de índices que k assume no intervalo $[a_{2n+1}, a_{2n+2})$ é $a_{2n+2} - a_{2n+1}$, esse somatório pode ser reescrito como o produto dessa quantidade de índices pela constante dentro da soma. Ou seja,

$$\sum_{k\in[a_{2n+1},a_{2n+2})} \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p} = (a_{2n+2} - a_{2n+1}) \cdot \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p} = \frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}.$$

Então, para todo $n \geq 0$, temos

$$\sum_{k\in[a_{2n+1},a_{2n+2})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} \leq \frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}.$$

Isso nos dá

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in[a_{2n+1},a_{2n+2})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}. \tag{5.26}$$

Observe que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} = \sum_{k\in[a_0,a_1)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \sum_{k\in[a_1,a_2)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \sum_{k\in[a_2,a_3)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \cdots$$

Como a série acima é formada por termos positivos, a ordem com que as parcelas são somadas não afeta o fato de a série ser convergente ou divergente. Logo, podemos organizá-la separando as somas com índices pertencentes a intervalos da forma $[a_{2n}, a_{2n+1})$, daquelas com índices contidos em intervalos do tipo $[a_{2n+1}, a_{2n+2})$. Com isso, obtém-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} &= \left(\sum_{k\in[a_0,a_1)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \sum_{k\in[a_2,a_3)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \sum_{k\in[a_4,a_5)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \cdots \right) \\ &+ \left(\sum_{k\in[a_1,a_2)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \sum_{k\in[a_3,a_4)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \sum_{k\in[a_5,a_6)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \cdots \right).\end{aligned}$$

Isso nos permite escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in[a_{2n},a_{2n+1})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in[a_{2n+1},a_{2n+2})} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p}.$$

Segue de (5.25) e (5.26) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right)^p + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}. \tag{5.27}$$

Para que o operador B_w satisfaça as condições exigidas, a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ que consideraremos será a seguinte:

$$a_{2n} = 1 + n(n+1), \quad a_{2n+1} = 1 + (n+1)^2.$$

É fácil ver que se trata de uma sequência estritamente crescente, com $a_0 = 1$. Note que

$$\begin{aligned} a_{2n+1} - a_{2n} &= [1 + (n+1)^2] - [1 + n(n+1)] \\ &= (n+1)^2 - n(n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 - n \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} a_{2n+2} - a_{2n+1} &= [1 + (n+1)(n+2)] - \left[1 + (n+1)^2\right] \\ &= (n+1)(n+2) - (n+1)^2 \\ &= (n^2 + 3n + 2) - (n^2 + 2n + 1) \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{(2^{a_{2n+1} - a_{2n}})^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2^{n+1})^p}. \tag{5.28}$$

Se fizermos $b_n := \dfrac{n+1}{2^{p(n+1)}}$, então

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \frac{2^{p(n+1)}}{2^{p(n+2)}} = \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \frac{1}{2^p}.$$

Logo,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \frac{1}{2^p}.$$

Como o primeiro fator tende para 1, obtemos $L = \dfrac{1}{2^p}$. Como $p \geq 1$, temos $2^p \geq 2$ e, portanto, $L \leq \dfrac{1}{2}$. Como $L < 1$, o teste da razão garante que a série converge para qualquer $p \geq 1$. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{(2^{a_{2n+1} - a_{2n}})^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2^{n+1})^p} < \infty.$$

Agora, observe que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right)^p = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{pj}} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^p}\right)^j.$$

é uma série geométrica da forma $\sum_{j=1}^{\infty} r^j$, com $r = \frac{1}{2^p}$. Sabemos que $\sum r^j$ converge quando $|r| < 1$. Como $\frac{1}{2^p}$ é sempre menor que 1 para qualquer $p \geq 1$, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right)^p < \infty.$$

Segue de (5.27) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} (w_\nu)^p} < \infty.$$

Pelo Teorema 4.10, concluímos que B_w é frequentemente hipercíclico.

Dado $n \geq 1$, sabemos que $a_{2n+2} - a_{2n+1} = n+1$. Isso implica que $a_{2n+2} - 1 = a_{2n+1} + n$. Como todos os valores de k no intervalo $[a_{2n+1}, a_{2n+2})$ são tais que $w_k = 1$, segue que se $k_n = a_{2n+1}$, então

$$w_{k_n+1} = w_{k_n+2} = \cdots = w_{k_n+n} = 1.$$

Ou seja,

$$\prod_{\nu=1}^{n} w_{k_n+\nu} = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1.$$

Isso prova que, para qualquer $n \geq 1$, existe $k_n \geq 0$ tal que $\prod_{\nu=1}^{n} w_{k_n+\nu} = 1$. Donde,

$$\inf \left\{ \prod_{\nu=1}^{n} w_{k+\nu} : k \geq 0 \right\} \leq 1, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Logo, o conjunto

$$B = \left\{ \inf \left\{ \prod_{\nu=1}^{n} w_{k+\nu} \ : \ k \geq 0 \right\} \ : \ n \geq 1 \right\}$$

é limitado superiormente por 1. Portanto,

$$\sup B = \sup_{n\geq 1} \inf_{k \geq 0} \prod_{\nu=1}^{n} w_{k+\nu} \leq 1.$$

Daí, e pelo Teorema 5.4, segue que B_w admite um subespaço hipercíclico.

Agora, vamos definir a sequência C_l da seguinte forma:

$$C_l = 2^{a_{2n+1} - a_{2n}}, \quad \text{para } a_{2n+1} \leq l < a_{2n+3}.$$

A fim de esclarecer a definição, avaliemos os primeiros valores dos C_ls abaixo:

- Dado $l \in [a_1, a_3)$ e como $a_1 = 2$ e $a_3 = 5$, temos

  $$C_l = 2^{a_1 - a_0} = 2^{2-1} = 2.$$

  Ou seja, $C_2 = C_3 = C_4 = 2$.

- Dado $l \in [a_3, a_5)$ e devido a $a_3 = 5$ e $a_5 = 10$, segue que

  $$C_l = 2^{a_3 - a_2} = 2^{5-3} = 2^2 = 4.$$

  Ou seja, $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = 4$.

- Dado agora $l \in [a_5, a_7)$, visto que $a_5 = 10$ e $a_7 = 17$, obtemos

  $$C_l = 2^{a_5 - a_4} = 2^{10-7} = 2^3 = 8.$$

  Ou seja, $C_{10} = C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = 8$.

Os casos considerados acima ilustram o comportamento da sequência C_l em diferentes blocos $[a_{2n+1}, a_{2n+3})$; neste caso, para os primeiros três blocos. Em termos gerais, temos que para $l \in [a_{2n+1}, a_{2n+3})$, o termo C_l é dado por $C_l = 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}$, o que implica que

$$\frac{1}{C_l^p} = \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}.$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{l=a_1}^{\infty} \frac{1}{C_l^p} &= \sum_{l=a_1}^{a_3-1} \frac{1}{C_l^p} + \sum_{l=a_3}^{a_5-1} \frac{1}{C_l^p} + \sum_{l=a_5}^{a_7-1} \frac{1}{C_l^p} + \cdots \\ &= \sum_{l=a_1}^{a_3-1} \frac{1}{(2^{a_1-a_0})^p} + \sum_{l=a_3}^{a_5-1} \frac{1}{(2^{a_3-a_2})^p} + \sum_{l=a_5}^{a_7-1} \frac{1}{(2^{a_5-a_4})^p} + \cdots\end{aligned}$$

Assim, esta soma pode ser escrita como uma soma por blocos da seguinte forma

$$\sum_{l=a_1}^{\infty} \frac{1}{C_l^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=a_{2n+1}}^{a_{2n+3}-1} \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}.$$

Como existem $a_{2n+3} - a_{2n+1}$ termos em cada intervalo $[a_{2n+1}, a_{2n+3})$, a soma dentro do somatório pode ser reescrita como

$$\sum_{l=a_{2n+1}}^{a_{2n+3}-1} \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p} = (a_{2n+3} - a_{2n+1}) \cdot \frac{1}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}.$$

Isso mostra que

$$\sum_{l=a_1}^{\infty} \frac{1}{C_l^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+3} - a_{2n+1}}{(2^{a_{2n+1}-a_{2n}})^p}.$$

Da escolha de a_n, segue que

$$a_{2n+1} - a_{2n} = n + 1, \quad \text{e} \quad a_{2n+3} - a_{2n+1} = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n + 3.$$

Substituindo isso na soma, chega-se em

$$\sum_{l=a_1}^{\infty} \frac{1}{C_l^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(2^{n+1})^p}.$$

A convergência da série acima é garantida pelo teste da razão, de forma análoga à demonstração feita para a série (5.28), e a prova aqui será omitida. Assim, temos

$$\sum_{l=a_1}^{\infty} \frac{1}{C_l^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(2^{n+1})^p} < \infty.$$

Agora, fixe $n \geq 0$ e $l \geq a_{2n+1}$. Provaremos que

$$\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}\} \geq a_{2n}.$$

Para cada m natural, com $1 \leq m \leq a_{2n}$, escolha $r_m = l - a_{2n} + m$. Essa escolha faz sentido pois como $l \geq a_{2n+1} > a_{2n}$, temos $l - a_{2n} > 0$. Isso implica que

$$r_m = l - a_{2n} + m > m.$$

Além disso, como $l - r_m + m = a_{2n} \geq m$ implica $l - r_m \geq 0$, segue que $l \geq r_m$. Conforme visto em (5.15), temos

$$B_w^k e_l = \begin{cases} w_l w_{l-1} \cdots w_{l-k+1} e_{l-k}, & \text{se } l \geq k, \\ 0, & \text{se } l < k. \end{cases} \tag{5.29}$$

Segue assim que

$$B_w^{r_m} e_l = w_l \cdot w_{l-1} \cdots w_{l-r_m+1} e_{l-r_m} \quad (\text{ pois } l \geq r_m).$$

Substituindo $a_{2n} = l - r_m + m$, obtemos

$$B_w^{r_m} e_l = w_l \cdot w_{l-1} \cdots w_{a_{2n+1}} \cdots w_{a_{2n}} e_{a_{2n}-m}.$$

Reorganizando e destacando os fatores importantes:

$$B_w^{r_m} e_l = (w_l \cdot w_{l-1} \cdots w_{a_{2n+1}}) \cdot (w_{a_{2n+1}-1} \cdots w_{a_{2n}}) e_{a_{2n}-m}.$$

Note que a expressão $(w_{a_{2n+1}-1} \cdots w_{a_{2n}})$, da igualdade acima, é formada por $a_{2n+1} - a_{2n}$ fatores. Além disso, por construção, cada um deles é igual a 2. Ou seja,

$$w_{a_{2n+1}-1} \cdots w_{a_{2n}} = 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}.$$

Disso, temos

$$\|B_w^{r_m} e_l\| = |w_l \cdots w_{a_{2n+1}}||w_{a_{2n+1}-1} \cdots w_{a_{2n}}| \cdot \|e_{a_{2n}-1}\| \geq 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}.$$

Logo,

$$\|B_w^{r_m} e_l\| \geq 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}.$$

Como m varia de 1 até a_{2n}, obtemos pelo menos a_{2n} índices distintos, $k_1, k_2, \ldots, k_{a_{2n}}$, que satisfazem a desigualdade $\|B_w^{r_m} e_l\| \geq 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}$. Portanto,

$$\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}\} \geq a_{2n}.$$

Se l é escolhido de modo que $a_{2n+1} \leq l < a_{2n+3}$, então $C_l = 2^{a_{2n+1}-a_{2n}}$ e a expressão acima fica

$$\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\} \geq a_{2n}. \tag{5.30}$$

Como $a_{2n+1} \leq l < a_{2n+3}$ implica $l + 1 \leq a_{2n+3}$, segue que $\frac{1}{l+1} \geq \frac{1}{a_{2n+3}}$. Assim, de (5.30), obtemos

$$\frac{\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\}}{l+1} \geq \frac{\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\}}{a_{2n+3}} \geq \frac{a_{2n}}{a_{2n+3}}.$$

Logo,

$$\frac{\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\}}{l+1} \geq \frac{a_{2n}}{a_{2n+3}}, \tag{5.31}$$

sempre que $a_{2n+1} \leq l < a_{2n+3}$.

Decorre de (5.29) que se $k > l$, então $B_w^k e_l = 0$. Assim, o maior valor possível para k antes que $B_w^k e_l$ se torne nulo é $k = l$. Como $k \geq 0$, necessariamente temos

$$\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\} \leq l + 1.$$

Dividindo ambos os lados por $l + 1$, obtemos

$$\frac{\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\}}{l+1} \leq 1.$$

Daí e de (5.31), segue que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n+3}} \leq \frac{\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\}}{l+1} \leq 1, \tag{5.32}$$

sempre que $a_{2n+1} \leq l < a_{2n+3}$. Observe que

$$a_{2n} = 1 + n(n+1) \quad \text{e} \quad a_{2n+3} = 1 + (n+2)^2.$$

Assim,

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n+3}} = \frac{1 + n(n+1)}{1 + (n+2)^2} = \frac{1 + n(n+1)}{n^2 + 4n + 5}.$$

Dividindo o numerador e denominador por n^2, temos que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n+3}} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{n(n+1)}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4n}{n^2} + \frac{5}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{n+1}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}.$$

Daí, segue que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n+3}} \to 1 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Lembre que l e n estão relacionados de modo que $a_{2n+1} \leq l < a_{2n+3}$ (confira (5.32)). Desse modo, $n \to \infty$ quando $l \to \infty$. Segue assim de (5.32) e pelo Teorema do Confronto que

$$\frac{\#\{k \geq 0 : \|B_w^k e_l\| \geq C_l\}}{l+1} \to 1 \quad \text{quando } l \to \infty.$$

Concluímos assim, através do Teorema 5.3, que B_w não possui subespaço frequentemente hipercíclico. Isso completa a demonstração. □

5.2 Existência de Subespaços Frequentemente Hipercíclicos

Até agora, discutimos critérios que garantem a inexistência de subespaços frequentemente hipercíclicos. Mas será que esses subespaços de fato existem? E, se existem, em quais condições isso ocorre? Para responder a isso, nesta seção destacamos o Teorema 5.10, de Quentin Menet, que estabelece um critério suficiente para a existência desses subespaços. Também apresentamos um exemplo de operador *weighted shift* que satisfaz as condições desse teorema, confirmando, assim, a existência desses subespaços.

Antes de prosseguirmos, vejamos que, para os operadores *weighted shift* em ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$, a condição de satisfazer o Critério de Hiperciclicidade Frequente não é apenas suficiente, mas também necessária.

Teorema 5.6. *Seja B_w um operador weighted shift em ℓ^p, com $1 \leq p < \infty$. Então B_w é frequentemente hipercíclico se, e somente se, B_w satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente.*

Demonstração. Veja [22, Theorem 2]. □

Mais adiante, verificaremos uma condição suficiente para a existência de subespaços frequentementes hipercíclicos para um operador que satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente. Mas antes disso, apresentaremos um teorema e um lema que serão importantes para fundamentar a demonstração deste critério.

Teorema 5.7. Seja $(e_n)_{n\geq 1}$ uma sequência básica em um espaço de Banach X, e seja $(e_n^*)_{n\geq 1}$ a sequência de funcionais coordenados (veja Proposição 1.16) associados a (e_n). Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em X tal que

$$\delta := \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n^*\| \cdot \|e_n - f_n\| < 1,$$

então

1. $(f_n)_{n\geq 1}$ também é uma sequência básica em X;
2. para toda sequência de escalares $(a_n)_{n\geq 1}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge em X se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ converge em X;
3. os funcionais coordenados (f_n^*) associados a (f_n) satisfazem

$$\|f_n^*\| \leq \frac{1}{1-\delta} \cdot \|e_n^*\| \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Demonstração. Veja [23, Lemma 10.6]. □

Lema 5.8. Seja T um operador em um espaço de Banach separável X que satisfaz o Critério de Hipercriticidade Frequente. Seja $(e_n)_n$ uma sequência em X tal que

$$T^n e_j \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty, \quad \forall j \geq 1.$$

Então para qualquer sequência de escalares positivos $(\varepsilon_n)_n$ existem

- uma sequência densa $(y_n)_{n\geq 1}$ em X;
- uma sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ em X;
- conjuntos $E(l, j) \subset \mathbb{N}$, com $l \geq j \geq 1$, de densidade inferior positiva

tais que, para todo $j \geq 1$,

1. $\|f_j - e_j\| \leq \varepsilon_j$.
2. $\|T^n f_j - y_l\| \leq \dfrac{1}{2^l}$ para $n \in E(l,j),\ l \geq j$.
3. $\|T^n(f_j - e_j)\| \leq \dfrac{\varepsilon_j}{2^l}$ para $n \in E(l,j'),\ l \geq j',\ j' \neq j$.

Demonstração. Veja [8, Lemma 1]. □

O próximo resultado será utilizado para estabelecer um outro critério, específico para operadores weighted shift.

Teorema 5.9. *Seja X um espaço de Banach separável de dimensão infinita, e seja $T \in L(X)$. Suponha que T satisfaça o Critério de Hiperciclicidade Frequente. Se existirem um subespaço fechado de dimensão infinita $M_0 \subset X$ e um conjunto A de densidade inferior positiva tais que, para qualquer $x \in M_0$,*

$$T^n x \xrightarrow[n \in A]{n \to \infty} 0,$$

então T possui um subespaço frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Como $M_0 \subset X$ é fechado e de dimensão infinita, e X é Banach, então M_0 também é Banach. Pelo Teorema 1.18, existe uma sequência básica $(e_n) \subset M_0$. Seja (n_k) uma enumeração crescente de A. Pela hipótese, temos

$$T^{n_k} e_j \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{5.33}$$

Seja (e_n^*) a sequência de funcionais coordenados associados à base $(e_n) \subset M_0$, ou seja, $e_n^*(e_j) = \delta_{nj}$ (veja Proposição 1.16). Defina $K_n := \max(1, \|e_n^*\|)$ e tome

$$\varepsilon_j := \frac{1}{2^{j+1} K_j}.$$

Como T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente, pelo Lema 5.8 obtemos

- uma sequência densa $(y_n)_{n \geq 1} \subset X$,
- uma sequência $(f_n)_{n \geq 1} \subset X$
- e subconjuntos $E(l,j) \subset \mathbb{N}$ com densidade inferior positiva,

tais que

$$\|f_j - e_j\| \leq \frac{1}{2^{j+1} K_j}, \tag{5.34}$$

$$\|T^n f_j - y_l\| \leq \frac{1}{2^l}, \quad \text{para } n \in E(l,j),\ l \geq j, \tag{5.35}$$

$$\text{e} \quad \|T^n(f_j - e_j)\| \leq \frac{1}{2^{j+l} K_j}, \quad \text{para } n \in E(l,j'),\ l \geq j',\ j' \neq j. \tag{5.36}$$

Como $\|e_j^*\| \cdot \frac{1}{K_j} \leq 1$, por (5.34), temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j^*\| \cdot \|f_j - e_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j^*\| \cdot \frac{1}{2^{j+1}K_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Pelo Teorema 5.7, (f_n) é uma sequência básica em X. Além diso, como

$$\delta := \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j^*\| \cdot \|f_j - e_j\| \leq \frac{1}{2},$$

segue que

$$\frac{1}{1-\delta} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Logo, novamente pelo Teorema 5.7, temos

$$\|f_j^*\| \leq 2K_j, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{5.37}$$

Defina o espaço $M := \overline{\operatorname{span}}\{f_n : n \geq 1\}$. Claramente M é fechado e tem dimensão infinita. Vejamos que M é subespaço frequentemente hipercíclico para T. Defina

$$z = \sum_{j=1}^{N} a_j f_j,$$

com a condição de que existe $m \in \{1, ..., N\}$ tal que $a_m = 1$. Defina também

$$w = \sum_{j \leq N, j \neq m} a_j e_j,$$

ou seja, w é a mesma combinação linear de e_j, mas omitindo o índice m.

Fixe $l \geq m$ e $n \in E(l, m)$. Note que

$$T^n z - y_l = T^n f_m - y_l \; + \sum_{\substack{j \leq N \\ j \neq m}} a_j T^n(f_j - e_j) \; + \; T^n w.$$

Então,

$$\|T^n z - y_l\| \;\leq\; \|T^n f_m - y_l\| + \sum_{\substack{j \leq N \\ j \neq m}} |a_j| \, \|T^n(f_j - e_j)\| + \|T^n w\|.$$

Usando (5.35), onde $\|T^n f_m - y_l\| \leq \frac{1}{2^l}$, obtemos

$$\|T^n z - y_l\| \;\leq\; \frac{1}{2^l} + \sum_{\substack{j \leq N \\ j \neq m}} |a_j| \, \|T^n(f_j - e_j)\| + \|T^n w\|$$

Como $a_j = f_j^*(z)$, então $|a_j| \leq \|f_j^*\| \, \|z\|$. Usando esta desigualdade e (5.36), temos

$$\|T^n z - y_l\| \;\leq\; \frac{2}{2^l} + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^*\| \, \|z\| \, \frac{1}{2^{j+l}K_j} + \|T^n w\|.$$

Pela definição de K_j e por (5.37), obtemos

$$\|T^n z - y_l\| \ \leq \ \frac{2}{2^l} + \frac{2}{2^l}\,\|z\| + \|T^n w\| \qquad \text{para } z \in \operatorname{span}\{f_n : n \geq 1\}. \tag{5.38}$$

Agora, seja $\bar{z} \in M = \overline{\operatorname{span}}\{f_n\}$, $\bar{z} \neq 0$. Como (f_n) é uma sequência básica em X, podemos escrever

$$\bar{z} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j.$$

Como $\bar{z} \neq 0$, escolha m com $a_m \neq 0$ e, se necessário, suponha $a_m = 1$. Pela definição de M, existem combinações finitas

$$z_\nu = \sum_{j=1}^{N_\nu} a_{\nu,j}\, f_j \qquad (\nu \geq 1)$$

tais que $z_\nu \longrightarrow \bar{z}$ em X. Como os funcionais f_j^* são contínuos, temos

$$a_{\nu,j} = f_j^*(z_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} f_j^*(z) = a_j, \quad \text{para todo } j. \tag{5.39}$$

Em particular $a_{\nu,m} \to a_m = 1$ quando $\nu \to \infty$. Podemos assumir $a_{\nu,m} = 1$ para todo ν.

Para cada ν, defina

$$w_\nu := \sum_{\substack{j \leq N_\nu \\ j \neq m}} a_{\nu,j}\, e_j \in M_0.$$

Estenda $a_{\nu,j} = 0$ para $j > N_\nu$. Isso nos permite escrever

$$z_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} a_{\nu,j} f_j, \qquad w_\nu = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{\infty} a_{\nu,j} e_j.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
(w_\nu - z_\nu) - (w_\mu - z_\mu) &= \sum_{j\neq m} a_{\nu,j} e_j - \sum_j a_{\nu,j} f_j - \Big(\sum_{j\neq m} a_{\mu,j} e_j - \sum_j a_{\mu,j} f_j \Big) \\
&= \sum_{j\neq m} (a_{\nu,j} - a_{\mu,j}) e_j - \sum_j (a_{\nu,j} - a_{\mu,j}) f_j \\
&= \sum_{j\neq m} (a_{\nu,j} - a_{\mu,j})(e_j - f_j).
\end{aligned}$$

Disso, obtemos

$$\|(w_\nu - z_\nu) - (w_\mu - z_\mu)\| \ \leq \ \sum_{j\neq m} |a_{\nu,j} - a_{\mu,j}|\, \|e_j - f_j\|. \tag{5.40}$$

Como $a_{\nu,j} = f_j^*(z_\nu)$ e $a_{\mu,j} = f_j^*(z_\mu)$, então

$$a_{\nu,j} - a_{\mu,j} = f_j^*(z_\nu) - f_j^*(z_\mu) = f_j^*(z_\nu - z_\mu).$$

Assim,

$$|a_{\nu,j} - a_{\mu,j}| = |f_j^*(z_\nu - z_\mu)| \leq \|f_j^*\|\, \|z_\nu - z_\mu\|.$$

Disso, obtemos

$$\begin{aligned} |a_{\nu,j} - a_{\mu,j}| \, \|e_j - f_j\| &\leq (|a_{\nu,j} - a_{\mu,j}| + 1) \, \|e_j - f_j\| \\ &\leq |a_{\nu,j} - a_{\mu,j}| \|e_j - f_j\| + \|e_j - f_j\| \\ &\leq \|z_\nu - z_\mu\| \|f_j^*\| \|e_j - f_j\| + \|e_j - f_j\|. \end{aligned}$$

As desigualdades (5.34) e (5.37) justificam

$$(|a_{\nu,j} - a_{\mu,j}| + 1) \, \|e_j - f_j\| \leq \frac{\|z_\nu - z_\mu\|}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{\|z_\nu - z_\mu\| + \frac{1}{2}}{2^j}. \tag{5.41}$$

Note que (z_ν) é limitada pois converge em X. Então existe $M > 0$ tal que $\|z_\nu\| \leq M$ para todo ν. Assim,

$$\|z_\nu - z_\mu\| \leq \|z_\nu\| + \|z_\mu\| \leq 2M.$$

Tome $C := 2M + \frac{1}{2}$. Então de (5.41) temos

$$\|(a_{\nu,j} - a_{\mu,j})(e_j - f_j)\| \leq \frac{C}{2^j}.$$

Por (5.39), temos

$$(a_{\nu,j} - a_{\mu,j})(e_j - f_j) \xrightarrow[\nu,\mu\to\infty]{} 0 \quad \text{em } X, \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{\nu,\mu\to\infty} \sum_{j\neq m} (a_{\nu,j} - a_{\mu,j})(e_j - f_j) = \sum_{j\neq m} \lim_{\nu,\mu\to\infty} (a_{\nu,j} - a_{\mu,j})(e_j - f_j) = 0.$$

Ou seja

$$\sum_{j\neq m} \|(a_{\nu,j} - a_{\mu,j})(e_j - f_j)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \nu, \mu \to \infty.$$

Por (5.40), temos

$$\|(w_\nu - z_\nu) - (w_\mu - z_\mu)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \nu, \mu \to \infty.$$

Logo, $(w_\nu - z_\nu)$ é de Cauchy. Como X é Banach, toda sequência de Cauchy converge. Assim, existe $\bar{w} := \lim_{\nu\to\infty}(w_\nu - z_\nu) \in X$. Visto que M_0 é fechado, tem-se $\bar{w} \in M_0$.

Vamos aplicar (5.38) para z_ν e w_ν.

$$\|T^n z_\nu - y_l\| \leq \frac{2}{2^l} + \frac{2}{2^l}\|z_\nu\| + \|T^n w_\nu\|.$$

Tomando o limite $\nu \to \infty$, pela continuidade da norma, e lembrando que $z_\nu \to \bar{z}$ e $w_\nu \to w$, obtemos, para todo $l \geq m$ e $n \in E(l, m)$, o seguinte

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to\infty} \|T^n z_\nu - y_l\| &\leq \lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{2}{2^l} + \frac{2}{2^l}\|z_\nu\| + \|T^n w_\nu\| \right) \\ \implies \|T^n \bar{z} - y_l\| &\leq \frac{2}{2^l} + \frac{2}{2^l}\|z\| + \|T^n w\|. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Seja $B(y,\delta) = \{x \in X : \|x - y\| < \delta\}$ uma bola aberta. Como (y_l) é denso em X, existe $l \geq m$ tal que

$$\|y_l - y\| < \tfrac{\delta}{2}.$$

Podemos também escolher esse l de modo que

$$\tfrac{2}{2^l} + \tfrac{2}{2^l}\|z\| < \tfrac{\delta}{4}.$$

Por (5.33), temos

$$T^{n_k}w \xrightarrow[n_k \in A]{k\to\infty} 0.$$

Assim, existe K_0 tal que

$$\|T^{n_k}w\| < \tfrac{\delta}{4}, \qquad \text{para todo } k \geq K_0.$$

Para $n_k \in J(l,m) := \{n_k \in \mathbb{N} : k \in E(l,m)\}$ com $k \geq K_0$, de (5.42) obtemos

$$\|T^{n_k}\bar{z} - y_l\| \;\leq\; \tfrac{2}{2^l} + \tfrac{2}{2^l}\|z\| + \|T^{n_k}w\| < \tfrac{\delta}{4} + \tfrac{\delta}{4} = \tfrac{\delta}{2}.$$

Logo, para todo $n_k \in J(l,m)$, com $k \geq K_0$, temos

$$\|T^{n_k}\bar{z} - y\| \leq \|T^{n_k}\bar{z} - y_l\| + \|y_l - y\| < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

Ou seja,

$$T^{n_k}\bar{z} \in B(y,\delta) \quad \text{para todo } n_k \in J(l,m),\ k \geq K_0.$$

O conjunto $J(l,m)$ tem densidade inferior positiva pois $E(l,m)$ tem densidade inferior positiva. Note que

$$A := J(l,m) \cap [N_0,\infty) \subset N(\bar{z}, B(y,\delta)) \tag{5.43}$$

(Lembre-se da notação apresentada na Definição 4.8). Retirar finitos elementos não altera o $\liminf$, então A tem densidade inferior positiva. A inclusão (5.43) garante que $N(\bar{z}, B(y,\delta))$ também tem densidade inferior positiva. Isso mostra que $\bar{z}$ é frequentemente hipercíclico. Como $\bar{z}$ é arbitrário em $M \setminus \{0\}$, concluímos que M é um subespaço frequentemente hipercíclico. □

Com base no teorema anterior, Quentin Menet estabeleceu uma condição suficiente para a existência de subespaços frequentemente hipercíclicos para *weighted shifts*.

Teorema 5.10. *Seja $B_w : \ell_p \to \ell_p$, com $1 \leq p < \infty$, um weighted shift frequentemente hipercíclico. Defina*

$$G(k,C) := \{n \geq 0 : \|B_w^n e_k\| \leq C\}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad C > 0. \tag{5.44}$$

Se existirem uma sequência estritamente crescente $(k_l)_{l\geq 1}$ de inteiros não negativos e $C > 0$ tais que $\bigcap_{l\geq 1} G(k_l, C)$ tenha densidade inferior positiva, então B_w possui um subespaço frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Defina o subespaço $M_0 := \overline{\text{span}}\{e_{k_l} : l \geq 1\}$. Note que M_0 é fechado e tem dimensão infinita, pois contém a família $\{e_{k_l}\}_{l\geq 1}$, que é linearmente independente em ℓ_p. Sabemos, pela Proposição 1.17, que qualquer $x \in M_0$ é da forma

$$x = \sum_{l=1}^{\infty} x_{k_l} e_{k_l}.$$

Dado $n \geq 0$, via processo análogo ao que foi feito no Lema 5.2 para a verificação de (5.17), obtemos que

$$\|B_w^n x\|^p = \sum_{k_l \geq n} |x_{k_l}|^p \|B_w^n e_{k_l}\|^p. \tag{5.45}$$

Suponha que $n \in A := \bigcap_{l\geq 1} G(k_l, C)$. De (5.44), obtemos

$$\|B_w^n e_{k_l}\| \leq C \quad \text{para todo } l \geq 1.$$

Isso implica que

$$|x_{k_l}|^p \|B_w^n e_{k_l}\|^p \leq C^p |x_{k_l}|^p \quad \text{para todo } l \geq 1.$$

Assim,

$$\sum_{k_l \geq n} |x_{k_l}|^p \|B_w^n e_{k_l}\|^p \leq \sum_{k_l \geq n} |x_{k_l}|^p C^p = C^p \sum_{k_l \geq n} |x_{k_l}|^p.$$

Daí, e de (5.45),

$$\|B_w^n x\|^p \leq C^p \sum_{k_l \geq n} |x_{k_l}|^p. \tag{5.46}$$

Como $x \in M_0 \subset \ell_p$, a soma $\sum_{k_l \geq n} |x_{k_l}|^p$ converge. Logo, temos

$$\sum_{k_l \geq n} |x_{k_l}|^p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Portanto, para $x \in M_0$, segue de (5.46) que

$$\|B_w^n x\|^p \xrightarrow[n\in A]{n\to\infty} 0.$$

Pelo Teorema 5.6, B_w satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente. O conjunto $A := \bigcap G(k_l, C)$ tem densidade inferior positiva por hipótese. Portanto, pelo Teorema 5.9, B_w possui um subespaço frequentemente hipercíclico. $\square$

Finalmente, exibiremos um exemplo de weighted shift que admite um subespaço frequentemente hipercíclico. Sua construção, baseada na aplicação do Teorema 5.10 e na escolha adequada de uma sequência de pesos, será detalhada na demonstração do próximo teorema.

Teorema 5.11. *Para cada $1 \leq p < \infty$, existe um weighted shift $B_w : \ell_p \to \ell_p$ que admite um subespaço frequentemente hipercíclico.*

Demonstração. Seja
$$w = (4, 1^{a_1}, 4, 1^{a_2}, 4, 1^{a_3}, 4, 1^{a_4}, 4, \dots),$$
onde $a_n = 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e 1^{a_n} denota um bloco formado por a_n repetições do número 1. Ou seja,
$$w = (4, \underbrace{1, 1, 1}_{a_1=3}, 4, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}_{a_2=9}, 4, \underbrace{1, 1, 1, \dots}_{a_3=27}, \dots).$$
Vejamos que B_w admite um subespaço frequentemente hipercíclico. É claro que B_w está bem definido em ℓ^p pois w é limitada. Vamos analisar a série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} |w_\nu|^p}.$$
Note que suas 4 primeiras parcelas são
$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} \ = \ \frac{1}{4^p} + \frac{3^1}{4^p}.$$
A soma das parcelas de $k = 5$ até $k = 14$ é dada por
$$\underbrace{\frac{1}{4^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \cdots + \frac{1}{4^{2p}}}_{10 \text{ vezes}} \ = \ \frac{1}{4^{2p}} + \frac{3^2}{4^{2p}}.$$
De igual modo, a soma das parcelas de $k = 15$ até $k = 42$ fica
$$\underbrace{\frac{1}{4^{3p}} + \frac{1}{4^{3p}} + \cdots + \frac{1}{4^{3p}}}_{28 \text{ vezes}} = \frac{1}{4^{3p}} + \frac{3^3}{4^{3p}}.$$
Prosseguindo assim, obtemos
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} |w_\nu|^p} &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{3^1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{4^{2p}} + \frac{3^2}{4^{2p}}\right) + \left(\frac{1}{4^{3p}} + \frac{3^3}{4^{3p}}\right) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4^n)^p} + \frac{3^n}{(4^n)^p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4^n)^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(4^n)^p}. \end{aligned}$$
Logo,
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} |w_\nu|^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4^n)^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(4^n)^p}.$$
Podemos reescrever o primeiro somatório como
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^p}\right)^n.$$
Isto é, trata-se de uma série geométrica com razão $r = \frac{1}{4^p}$. Como $p \geq 1$, temos $4^p \geq 4$. Issso implica que $\frac{1}{4^p} \leq \frac{1}{4} < 1$. Logo, essa série converge por ser de razão estritamente menor do que 1. Agora, observe que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(4^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^p}\right)^n$$

também é uma série geométrica, com razão $r = \frac{3}{4^p}$. Como $p \geq 1$, temos $4^p \geq 4 > 3$. Isso implica que $\frac{3}{4^p} < 1$. Assim, a razão é estritamente menor do que 1, o que garante a sua convergência. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}(w_\nu)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4^n)^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(4^n)^p} < \infty,$$

e, pelo Teorema 4.10, o operador B_w é frequentemente hipercíclico.

Agora, vejamos que a sequência $a_n = 3^n$ satisfaz a desigualdade

$$3^{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

É claro que esta desigualdade vale para $n = 1$, pois $3^{1+1} = 9 \geq \sum_{k=1}^{1} 3^k + 2 = 5$. Como hipótese de indução, suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, vale

$$3^{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1).$$

Somando $3^{n+1} + 1$, obtemos

$$3^{n+1} + 3^{n+1} + 1 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1)\right) + 3^{n+1} + 1 = \sum_{k=1}^{n+1} 3^k + (n+2). \tag{5.47}$$

De $3 \cdot 3^{n+1} > 2 \cdot 3^{n+1}$, obtemos

$$3^{n+2} = 3 \cdot 3^{n+1} \geq 2 \cdot 3^{n+1} + 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Comparando com (5.47), temos que

$$3^{n+2} \geq \sum_{k=1}^{n+1} 3^k + (n+2).$$

Isso prova, por indução matemática, que

$$3^{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{5.48}$$

Recapitulando o teorema anterior: se existe uma sequência estritamente crescente $(k_l) \subset \mathbb{N}$ e um $C > 0$ tal que $\bigcap_{l \geq 1} G(k_l, C)$ tem densidade inferior positiva, então B_w possui um subespaço frequentemente hipercíclico.

Considere

$$k_n := \sum_{k=1}^{n} 3^k + n \quad \text{e} \quad C = 1.$$

É claro que (k_n) é uma sequência estritamente crescente de naturais. Defina o conjunto

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} G\left(k_n, 1\right).$$

Primeiro, vamos provar que

$$G\left(k_n, 1\right) = [0, 3^n] \cup [k_n + 1, \infty).$$

Vimos na demonstração do Lema 3.5 que

$$B_w^m e_k = \begin{cases} w_k w_{k-1} \dots w_{k-m+1} e_{k-m}, & \text{se } k \geq m, \\ 0, & \text{se } k < m. \end{cases} \tag{5.49}$$

Para simplificar a notação nas etapas seguintes, vamos denotar $k_n := \sum_{k=1}^{n} 3^k + n$. Note que se $m \in [0, 3^n]$, então $m \leq 3^n < k_n$ Assim, por (5.49), temos

$$B_w^m e_{k_n} = w_{k_n} w_{k_n - 1} \dots w_{k_n - m + 1} e_{k_n - m}.$$

Lembre que a sequência w se configura da seguinte forma

$$w = (4, \underbrace{1, \dots, 1}_{3^1 \text{ vezes}}, 4, \underbrace{1, \dots, 1}_{3^2 \text{ vezes}}, \dots, 4, \underbrace{1, \dots, 1}_{3^n \text{ vezes}}, \dots).$$

Perceba que o índice k_n corresponde exatamente ao último 1 do bloco de 3^n uns. Isto é, $w_{k_n} = 1$. Além disso, os índices $k_n - 1, k_n - 2, \dots, k_n - (m-1)$ ainda estão dentro do mesmo bloco, já que $m \leq 3^n$. Ou seja, $w_{k_n} w_{k_n-1} \cdots w_{k_n-m+1} = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$. Assim, $B_w^m e_{k_n} = 1 \cdot e_{k_n - m}$, o que implica que $\|B_w^m e_{k_n}\| = \|e_{k_n-m}\| = 1 \leq 1$. Logo, $m \in G(k_n, 1)$ para todo $m \in [0, 3^n]$, provando que $[0, 3^n] \subset G(k_n, 1)$. Agora, se $m \in \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \infty\right)$, então $m \geq k_n + 1$. Por (5.49), temos $\|B_w^m e_{k_n}\| = 0 \leq 1$. Daí, $\left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \infty\right) \subset G(k_n, 1)$. Portanto,

$$[0, 3^n] \cup \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \infty\right) \subseteq G\left(k_n, 1\right).$$

Para mostrar que $G(k_n, 1) \subseteq [0, 3^n] \cup [k_n + 1, \infty)$, é suficiente provar que qualquer $m \in (3^n, k_n]$ não pertence a $G(k_n, 1)$. Isso é o que faremos. Seja $3^n < m \leq k_n = \sum_{k=1}^{n} 3^k + n$. Neste caso, como $m \leq k_n$, por (5.49), temos

$$B_w^m e_{k_n} = w_{k_n} w_{k_n - 1} \dots w_{k_n - m + 1} e_{k_n - m}.$$

Já vimos que o índice k_n corresponde exatamente ao último 1 do bloco de 3^n uns. Então esse bloco começa no índice $k_n - 3^n + 1$. Assim, todo $j \in [k_n - 3^n + 1, k_n]$ é tal que $w_j = 1$. Como $3^n < m$, obtemos $k_n - m + 1 < k_n - 3^n + 1$. Isso significa que o intervalo $[k_n - m + 1, k_n]$ ultrapassa à esquerda o início do bloco 3^n, mostrando que o intervalo $[k_n - m + 1, k_n]$ contém pelo menos um índice j onde $w_j = 4$. Daí,

$$|w_{k_n} \dots w_{k_n - m + 1}| > 1 \Longrightarrow \|B_w^m e_{k_n}\| > 1 \Longrightarrow m \notin G(k_n, 1).$$

Logo,

$$G(k_n, 1) \subseteq [0, 3^n] \cup [k_n + 1, \infty),$$

o que nos leva a concluir que

$$G\left(k_n, 1\right) = [0, 3^n] \cup [k_n + 1, \infty).$$

Disso, temos que

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} G\left(\sum_{k=1}^{n} 3^k + n, 1\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left([0, 3^n] \cup \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \infty\right)\right).$$

A Desigualdade (5.48) torna os intervalos $\left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), 3^{n+1}\right]$ bem definidos. Vejamos que

$$A = [0, 3] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), 3^{n+1}\right].$$

Para facilitar, denote

$$B := [0, 3] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), 3^{n+1}\right] \quad \text{e} \quad G_n := [0, 3^n] \cup \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \infty\right).$$

Então $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ e o que queremos provar é que $A = B$. Seja $m \in A$. Então

$$m \in [0, 3^n] \cup \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \infty\right) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $n = 1$ temos $m \in [0, 3] \cup [5, \infty)$. Temos dois casos a analisar. Se $m \in [0, 3]$, então é claro que $m \in B$ pois o intervalo $[0, 3]$ está contido em B. Se $m \geq 5$, tome $n_0 \geq 2$ como sendo o menor natural que satisfaz

$$m < \sum_{k=1}^{n_0} 3^k + (n_0 + 1).$$

Note que

$$\sum_{k=1}^{n_0 - 1} 3^k + n_0 \leq m < \sum_{k=1}^{n_0} 3^k + (n_0 + 1). \tag{5.50}$$

Por outro lado, como $m \in A$, temos $m \in G_n$ para todo n. Em particular, para $n = n_0$, temos

$$m \in G_{n_0} = [0, 3^{n_0}] \cup \left[\sum_{k=1}^{n_0} 3^k + (n_0 + 1), \infty\right). \tag{5.51}$$

No entanto, de (5.50), temos que $m \notin \left[\sum_{k=1}^{n_0} 3^k + (n_0 + 1), \infty\right)$. Isso prova que $m \in \left[\sum_{k=1}^{n_0 - 1} 3^k + n_0, 3^{n_0}\right] \subseteq B$. Em qualquer caso, temos $m \in B$. Assim, $A \subseteq B$.

Agora, seja $m \in B$. De novo, temos dois casos. Suponha que $m \in [0, 3]$. Sabemos que $[0, 3] \subset [0, 3^n] \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $m \in A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. O segundo caso é quando $m \in \left[\sum_{k=1}^{n_0} 3^k + (n_0 + 1), 3^{n_0 + 1}\right]$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Nessa situação temos os seguintes subcasos:

- Se $n \leq n_0$, então

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1) \leq \sum_{k=1}^{n_0} 3^k + (n_0 + 1) \leq m,$$

ou seja, $m \in \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), \infty\right) \subset G_n$.

- Se $n > n_0$, como $m \leq 3^{n_0+1} \leq 3^n$, então $m \in [0, 3^n] \subset G_n$.

Assim, $m \in G_n$ para todo n, o que implica que $m \in A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Ou seja, $B \subseteq A$. Logo, $A = B$. Isto é,

$$A = [0,3] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), 3^{n+1} \right].$$

Por fim, vamos mostrar que a densidade inferior de A é positiva. Isto é,

$$\underline{\text{dens}} A = \liminf_{m \to \infty} \frac{\#(A \cap [0,m])}{m+1} > 0.$$

Dado $m \geq 9 = 3^2$, defina $n_m := \max \{ n \in \mathbb{N} : 3^{n+1} \leq m \}$. Defina também

$$A_m := [0,3] \cup \bigcup_{n=1}^{n_m} \left[\sum_{k=1}^{n} 3^k + (n+1), 3^{n+1} \right].$$

Como $A_m \subseteq A \cap [0,m]$, segue que

$$\#(A_m) \leq \#(A \cap [0,m]). \tag{5.52}$$

Observe que o último intervalo da união que define A_m possui cardinalidade menor ou igual que $\#(A_m)$ (pois está contido em A_m). Ou seja,

$$\#(A_m) \geq \# \left(\left[\sum_{k=1}^{n_m} 3^k + (n_m+1),\ 3^{n_m+1} \right] \right).$$

Lembre que se a e b são inteiros, então o número de inteiros no intervalo $[a,b]$ é $b - a + 1$. Daí,

$$\#(A_m) \geq 3^{n_m+1} - \left(\sum_{k=1}^{n_m} 3^k + (n_m+1) \right) + 1.$$

Como $(3^k)_k$ é uma progressão geométrica, segue que $\sum_{k=1}^{n_m} 3^k = \frac{3}{2}(3^{n_m} - 1)$. Daí,

$$\begin{aligned} \#(A_m) &\geq 3^{n_m+1} - \left(\frac{3}{2}(3^{n_m} - 1) + (n_m+1) \right) + 1 \\ &\geq 3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m} - 1) - (n_m+1). \end{aligned}$$

Comparando com (5.52), temos

$$3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m} - 1) - (n_m+1) \leq \#(A \cap [0,m]).$$

Disso, obtemos

$$\frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m} - 1) - (n_m+1)}{m+1} \leq \frac{\#(A \cap [0,m])}{m+1}. \tag{5.53}$$

Note que

$$m < 3^{n_m+2} = 3 \cdot 3^{n_m+1} \leq 3 \left(\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2) \right).$$

Ou seja, $m+1 \leq 3\left(\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2)\right)$. Assim,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1)}{\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2)} \leq \frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1)}{m+1}.$$

De (5.53), seque que

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1)}{\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2)} \leq \frac{\#(A \cap [0,m])}{m+1} \quad \forall m \geq 9. \tag{5.54}$$

Com relação ao numerador da fração

$$\frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1)}{\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2)}, \tag{5.55}$$

note que

$$\begin{aligned}
3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1) &= 3^{n_m} \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 3^{n_m} + \frac{3}{2} - n_m - 1 \\
&= 3^{n_m}\left(3 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - n_m - 1\right) \\
&= \frac{3}{2} \cdot 3^{n_m} + \left(\frac{1}{2} - n_m\right) \\
&= 3^{n_m}\left(\frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2} - n_m}{3^{n_m}}\right).
\end{aligned}$$

Já quanto ao denominado da fração (5.55), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2) &= \frac{3}{2}(3^{n_m+1} - 1) + (n_m+2) \\
&= \frac{3}{2} \cdot 3^{n_m+1} - \frac{3}{2} + n_m + 2 \\
&= 3^{n_m} \cdot \frac{9}{2} + \left(n_m + \frac{1}{2}\right) \\
&= 3^{n_m}\left(\frac{9}{2} + \frac{n_m + \frac{1}{2}}{3^{n_m}}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1)}{\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2)} = \frac{3^{n_m}\left(\frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2} - n_m}{3^{n_m}}\right)}{3^{n_m}\left(\frac{9}{2} + \frac{n_m + \frac{1}{2}}{3^{n_m}}\right)}.$$

Isso implica que

$$\lim_{n_m \to \infty} \frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1)}{\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2)} = \frac{3/2}{9/2} = \frac{1}{3}.$$

Para $m \to \infty$ temos $n_m \to \infty$. Assim, de (5.54), segue que

$$\frac{1}{3} \cdot \lim_{m \to \infty} \frac{3^{n_m+1} - \frac{3}{2}(3^{n_m}-1) - (n_m+1)}{\sum_{k=1}^{n_m+1} 3^k + (n_m+2)} \leq \liminf_{m \to \infty} \frac{\#(A \cap [0,m])}{m+1}.$$

Portanto,

$$\underline{\text{dens}}A = \liminf_{m\to\infty} \frac{\#(A \cap [0,m])}{m+1} \geq \frac{1}{9} > 0.$$

Logo, mostramos que a sequência $k_n := \sum_{k=1}^{n} 3^k + n$ e a constante $C = 1$ são tais que o conjunto $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} G(k_n, C)$ tem densidade inferior positiva. Pelo Teorema 5.10, concluímos que B_w possui um subespaço frequentemente hipercíclico. $\square$

Bibliografia

[1] Bayart, F. *Common hypercyclic subspaces*. Integral Equations and Operator Theory 53.4 (2005), pp. 467–476. ISSN: 0378-620X. DOI: 10.1007/s00020-004-1316-6 (ver p. 12).

[2] Bayart, F.; Grivaux, S. *Frequently hypercyclic operators*. Transactions of the American Mathematical Society 358.11 (2006), pp. 5083–5117. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.1090/S0002-9947-06-04019-0 (ver pp. 12, 63).

[3] Bayart, F.; Grivaux, S. *Hypercyclicité: le rôle du spectre ponctuel unimodulaire*. Comptes Rendus. Mathématique. Académie des Sciences, Paris 338.9 (2004), pp. 703–708. DOI: 10.1016/j.crma.2004.02.012 (ver p. 12).

[4] Bayart, F.; Matheron, E. *Dynamics of Linear Operators*. 179. Cambridge University Press, 2009 (ver pp. 31, 45).

[5] Bayart, F.; Ruzsa, I. Z. *Difference sets and frequently hypercyclic weighted shifts*. Ergodic Theory and Dynamical Systems (2013). DOI: 10.1017/etds.2013.77 (ver pp. 63, 65).

[6] Bès, J.; Conejero, J. A. *Hypercyclic subspaces in omega*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 316.1 (2006), pp. 16–23. ISSN: 0022-247X. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.04.083 (ver p. 12).

[7] Birkhoff, G. D. *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*. Comptes Rendus. Mathématique. Académie des Sciences, Paris 189 (1929), pp. 473–475 (ver p. 12).

[8] Bonilla, A.; Grosse-Erdmann, K. G. *Frequently hypercyclic subspaces*. Monatshefte für Mathematik 168.3-4 (2012), pp. 305–320. DOI: 10.1007/s00605-011-0369-2 (ver pp. 12, 14, 68, 89).

[9] Bonilla, A.; Grosse-Erdmann, K.G. *Frequently hypercyclic operators and vectors–Erratum*. Ergodic Theory and Dynamical Systems 29.6 (2009), pp. 1993–1994 (ver p. 12).

[10] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2015 (ver pp. 17–19, 21, 23, 25, 31).

[11] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. *Introduction to Functional Analysis*. Universitext. English translation of the 3rd Brazilian Portuguese edition of "Fundamentos de Análise Funcional". Cham, Switzerland: Springer, 2025. ISBN: 978-3-031-81790-8. DOI: 10.1007/978-3-031-81791-5 (ver p. 20).

[12] Bourdon, P. S. *Invariant manifolds of hypercyclic vectors*. Proceedings of the American Mathematical Society 118.3 (1993), pp. 845–847. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.2307/2160131 (ver p. 12).

[13] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2011 (ver p. 25).

[14] Chan, K. C.; Taylor, R. D. *Hypercyclic subspaces of a Banach space*. Integral Equations and Operator Theory 41.4 (2001), pp. 381–388. ISSN: 0378-620X. DOI: 10.1007/BF01202099 (ver p. 12).

[15] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P.; Montesinos, V.; Zizler, V. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics. New York: Springer, 2011. ISBN: 978-1-4419-7514-5 (ver pp. 30, 31).

[16] Garcia, A.; Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*. Brasil: Projeto Euclides, 2007 (ver p. 27).

[17] Gethner, R. M.; Shapiro, J. H. *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*. Proceedings of the American Mathematical Society 100 (1987), pp. 281–288. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.2307/2045959 (ver p. 12).

[18] González, L. B.; Montes-Rodríguez, A. *Non-finite dimensional closed vector spaces of universal functions for composition operators*. Journal of Approximation Theory 82.3 (1995), pp. 375–391. ISSN: 0021-9045. DOI: 10.1006/jath.1995.1086 (ver p. 12).

[19] González, L. B.; Moreno, M.; Salazar, J.; Prado-Bassas, J. *Hypercyclic subspaces for sequences of finite order differential operators*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 546.1 (2025), p. 13. ISSN: 0022-247X. DOI: 10.1016/j.jmaa.2025.129257 (ver p. 12).

[20] González, L. B.; Moreno, M.; Sánchez, J. F.; Fernández, G. M.; Seoane-Sepúlveda, J. *Construction of dense maximal-dimensional hypercyclic subspaces for Rolewicz operators*. Chaos, Solitons and Fractals 162 (2022), p. 6. ISSN: 0960-0779. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112408 (ver p. 12).

[21] González, M.; León-Saavedra, F.; Montes-Rodríguez, A. *Semi-Fredholm theory: hypercyclic and supercyclic subspaces*. Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series 81.1 (2000), pp. 169–189. ISSN: 0024-6115. DOI: 10.1112/S0024611500012454 (ver p. 12).

[22] Grosse-Erdmann, K. G. *Frequently hypercyclic operators: recent advances and open problems*. Advanced courses of mathematical analysis VI (2014), pp. 173–190 (ver p. 88).

[23] Grosse-Erdmann, K. G.; Manguillot, A. P. *Linear Chaos*. Universitext. Springer, 2011 (ver pp. 27, 31, 45, 63, 88).

[24] Herrero, D. A. *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*. Journal of Functional Analysis 99.1 (1991), pp. 179–190. ISSN: 0022-1236. DOI: 10.1016/0022-1236(91)90058-D (ver p. 12).

[25] Kitai, C. *Invariant closed sets for linear operators*. University of Toronto. Ph.D. thesis. (1982) (ver p. 12).

[26] León-Saavedra, F.; Montes-Rodríguez, A. *Linear structure of hypercyclic vectors*. Journal of Functional Analysis 148.2 (1997), pp. 524–545. ISSN: 0022-1236. DOI: 10.1006/jfan.1996.3084 (ver p. 12).

[27] León-Saavedra, F.; Montes-Rodríguez, A. *Spectral theory and hypercyclic subspaces*. Transactions of the American Mathematical Society 353.1 (2001), pp. 247–267. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.1090/S0002-9947-00-02743-4 (ver p. 12).

[28] León-Saavedra, F.; Müller, V. *Hypercyclic sequences of operators*. Studia Mathematica 175.1 (2006), pp. 1–18. ISSN: 0039-3223. DOI: 10.4064/sm175-1-1 (ver p. 12).

[29] Lima, E. L. *Espaços Métricos*. 6ª ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2020 (ver pp. 15, 16, 19).

[30] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*. Vol. 92. Springer Science & Business Media, 2013 (ver p. 20).

[31] MacLane, G. R. *Sequences of derivatives and normal families*. Journal d'Analyse Mathématique 2 (1952), pp. 72–87. ISSN: 0021-7670. DOI: 10.1007/BF02786968 (ver p. 12).

[32] Martinez, F. B.; Moreira, C.; Saldanha, N.; Tengan, E. *Teoria dos Números: Um Passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro*. 5th edition. Projeto Euclides. 2018. ISBN: 978-85-244-0447-4 (ver pp. 56, 57).

[33] Menet, Q. *Existence and non-existence of frequently hypercyclic subspaces for weighted shifts*. Proceedings of the American Mathematical Society 143.6 (2015). Published electronically on January 16, 2015, pp. 2469–2477. DOI: 10.1090/S0002-9939-2015-12444-6 (ver pp. 7, 8, 13, 68).

[34] Menet, Q. *Existence of common hypercyclic subspaces for the derivative operator and the translation operators*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM 113.2 (2019), pp. 487–505. ISSN: 1578-7303. DOI: 10.1007/s13398-017-0490-8 (ver p. 12).

[35] Menet, Q. *Hypercyclic subspaces and weighted shifts*. Advances in Mathematics 255 (2014), pp. 305–337. DOI: 10.1016/j.aim.2014.01.012 (ver pp. 12, 80).

[36] Menet, Q. *Hypercyclic subspaces on Fréchet spaces without continuous norm*. Integral Equations and Operator Theory 77.4 (2013), pp. 489–520. ISSN: 0378-620X. DOI: 10.1007/s00020-013-2096-7 (ver p. 12).

[37] Montes-Rodríguez, A. *Banach spaces of hypercyclic vectors*. Michigan Mathematical Journal 43.3 (1996), pp. 419–436. ISSN: 0026-2285. DOI: 10.1307/mmj/1029005536 (ver p. 12).

[38] Mujica, J. *Notas de Espaços de Banach*. IMECC - UNICAMP. Segundo semestre. 2012 (ver p. 20).

[39] Petersson, H. *Complemented hypercyclic subspaces*. Houston Journal of Mathematics 33.2 (2007), pp. 541–553. ISSN: 0362-1588 (ver p. 12).

[40] Petersson, H. *Hypercyclic subspaces for Fréchet space operators*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 319.2 (2006), pp. 764–782. ISSN: 0022-247X. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.06.042 (ver p. 12).

[41] Read, C. J. *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, 2: Hypercyclic operators*. Israel Journal of Mathematics 63 (1988), pp. 1–40 (ver p. 12).

[42] Rolewicz, S. *On orbits of elements*. Studia Mathematica 32 (1969), pp. 17–22 (ver p. 12).

[43] Seoane-Sepúlveda, J. B. *Explicit constructions of dense common hypercyclic subspaces*. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 43.2 (2007), pp. 373–384. ISSN: 0034-5318. DOI: 10.2977/prims/1201011786 (ver p. 12).

[44] Tenenbaum, G. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*. 1st. Vol. 46. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995 (ver pp. 56, 57).