

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

CONTROLE E ESTABILIZAÇÃO DO DUPLO PÊNDULO
INVERTIDO SOBRE UM CARRO

GISELE LIRA DA SILVA

MANAUS
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GISELE LIRA DA SILVA

CONTROLE E ESTABILIZAÇÃO DO DUPLO PÊNDULO
INVERTIDO SOBRE UM CARRO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS
2010

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAM

S586c Silva, Gisele Lira da

Controle e estabilização do duplo pêndulo invertido sobre um carro /
Gisele Lira da Silva. - Manaus, AM : UFAM, 2010.

101 f. : il. color. ; 30 cm

Inclui referências.

Dissertação (Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração:
Controle e automação de sistemas). Universidade Federal do Amazonas.
Orientador: Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho.

1. Sistemas difusos 2. Sistemas de controle inteligente I. Chaves Filho,
João Edgar (Orient.) II. Título

CDU (2007): 681.5(043.3)

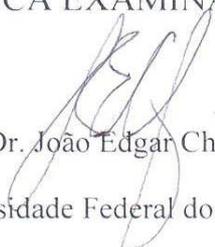
GISELE LIRA DA SILVA

**CONTROLE E ESTABILIZAÇÃO DO DUPLO PÊNDULO INVERTIDO
SOBRE UM CARRO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

Aprovado em 27 de agosto de 2010.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho
Universidade Federal do Amazonas



Prof. Dr.-Ing Vicente Ferreira de Lucena Junior
Universidade Federal do Amazonas



Prof. Dr. Flávio José Aguiar Soares

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas- IFAM

A minha mãe Maristela, irmã Sara, irmãos e em especial, ao meu sobrinho Lucas por me incentivarem de alguma forma a terminar este trabalho, pelo amor e carinho que me ofereceram, dedico-lhes esta conquista como gratidão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pelas vitórias alcançadas, pela força nos momentos difíceis, pelas bênçãos recebidas.

A minha mãe Maristela Lira e irmãos, Gilssara e Huemerson, pela compreensão, pelo amor, pela força nos momentos difíceis.

A meu orientador Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho, pelo acompanhamento, pelos ensinamentos, pela confiança no meu trabalho e pelas orações.

Aos meus professores doutores do PPGEE/UFAM, por acreditarem na minha capacidade.

Aos meus amigos e colegas do PPGEE/UFAM e CETELI que me ajudaram não somente com idéias, mas também com dedicação e força nos momentos difíceis, sempre compartilhando os bons e os maus momentos.

A Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Amazonas – FAPEAM, pela concessão de bolsa de estudos.

Aos meus amigos, Charles Melo, Antônio Santos, Nairon Viana, Ricardo Rosa e Orlewilson Maia pela força, companheirismo e por acreditarem em mim durante a difícil caminhada de estudos e dedicação ao mestrado.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização desta conquista, agradeço de coração não somente pelo título, mas por me tornarem uma pessoa melhor, mais forte e capaz de superar os obstáculos e dificuldades. Hoje, posso dizer que sou abençoada por Deus por ter o amor, a amizade, o carinho e o respeito de cada um vocês.

*Com a sabedoria se edifica a casa, e com
o entendimento ela se fortalece;*

Provérbios 24:3

RESUMO

O sistema mecânico sub-atuado duplo pêndulo invertido sobre um carro é um sistema complexo em termos da teoria de controle. O principal motivo de interesse de pesquisadores por este sistema é a dificuldade característica deste sistema em equilibrar duas hastes na vertical apenas com o movimento do carro. Apesar da evolução da teoria de controle ao longo dos anos, o desenvolvimento de um controlador robusto ainda é uma questão aberta. A fim de promover uma análise sobre as técnicas de controle existentes, considerando aspectos de eficiência e robustez, um estudo comparativo foi realizado e, a partir dele, foram escolhidas as mais eficientes para fazer parte do modelo proposto neste trabalho. Devido a dificuldade de padronização entre as diferentes leis de controle aplicadas ao sistema, o mesmo é modelado, linearizado e seus movimentos dinâmicos são estudados. Três técnicas de controle são projetadas para este sistema modelado, sendo elas regulador linear quadrático – LQR, controle por lógica *fuzzy* e controle por modo deslizante. Para este último aplicamos uma melhoria na função de chaveamento visando a atenuação do problema de *chattering*, utilizando a função de saturação. A estabilidade assintótica das superfícies de modo deslizante de cada um destes subsistemas é provada teoricamente usando o lema de Barbalat e a teoria de estabilidade de Lyapunov. Os resultados de simulações para o controle LQR e *fuzzy* aplicados ao sistema linearizado comprovam sua eficiência na estabilização do sistema, sendo que o controlador *fuzzy* possui uma melhor aproximação das variáveis de estado do ponto de equilíbrio, contudo, sua resposta é lenta. Os resultados com o controlador por modo deslizante apresentam também melhores resultados frente ao LQR, com uma resposta mais rápida. Os resultados com o controlador por modo deslizante hierárquico comprovam sua eficiência frente às incertezas do sistema e a função utilizada para atenuação do fenômeno de *chattering* mostrou-se eficaz.

Palavras chave: duplo pêndulo invertido, sistemas sub-atuados, regulador linear quadrático, lógica *fuzzy*, controle por modo deslizante hierárquico.

ABSTRACT

The sub-actuated mechanical system of the double inverted pendulum on a cart is a complex subject in the field of control theory. The main reason researchers have focus their attention on this system is its characteristic difficulty on balancing two rods in vertical only using the movement of the cart. Although the evolution of the control theory throughout the years, the development of a robust controller is still an open question. In order to provide a study on more efficient control techniques, considering aspects of efficiency and robustness, we performed a comparative study from which we chose the most appropriate to make part of the model presented in this work. Since there is no a common standard in the different control laws applied to the system, it is modeled, linearized and its dynamic movements are studied. Three control techniques are designed to this modeled system: linear quadratic regulator (LQR), fuzzy logic control and sliding mode control. To the last technique we applied an improvement in the switching function in order to decrease the effects of the chattering problem, using the saturation function. The asymptotic stability of the sliding mode surfaces in each one of these subsystems is proved theoretically using the Barbalat's lemma and the Lyapunov stability. The results of the simulations to the LQR and fuzzy control applied to the linearized system proved its efficiency in stabilizing the system, and the fuzzy controller as a better approximation of the state variables of the equilibrium point, however, their response is slow. The results with the sliding mode controller also present better results when compared to the LQR, with a faster response. The results with the hierarchical sliding mode controller proved its efficiency in face of the uncertainty of the system and the function used to decrease the effects of the chattering problem showed itself useful.

Key words: Double inverted pendulum, sub-actuated systems, linear quadratic regulator, fuzzy logic, hierarchical sliding mode control.

Lista de Figuras

Figura 3.1 – Sistema Duplo Pêndulo Invertido Sobre um Carro.....	26
Figura 3.2 – Diagrama de forças do subsistema carro	28
Figura 3.3 – Diagrama de forças do subsistema pêndulo inferior	28
Figura 3.4 – Diagrama de forças do subsistema pêndulo superior.....	29
Figura 3.5 – Movimento do sistema com força de atuação positiva	32
Figura 3.6 – Movimento do sistema com força de atuação negativa.....	32
Figura 4.1 – Modelo no Simulink do Controlador LQR.....	37
Figura 4.2 – Estabilização do subsistema carro sob ação do controlador LQR	38
Figura 4.3 – Estabilização do subsistema pêndulo inferior sob ação do controlador LQR	39
Figura 4.4 – Estabilização do subsistema pêndulo superior sob ação do controlador LQR ...	39
Figura 5.1 – Exemplo de função de pertinência	43
Figura 5.2 – Representação gráfica dos tipos de funções <i>fuzzy</i>	45
Figura 5.3 – Representação gráfica da operação de união em conjuntos <i>fuzzy</i>	47
Figura 5.4 – Representação gráfica da operação de interseção em conjuntos <i>fuzzy</i>	47
Figura 5.5 – Arquitetura de um sistema <i>fuzzy</i>	51
Figura 5.6 – Modelo no Simulink do controlador <i>fuzzy</i>	57
Figura 5.7 – Ação de controle <i>fuzzy</i> do sistema	57
Figura 5.8 – Deslocamento do carro sob ação do controlador <i>fuzzy</i>	58
Figura 5.9 – Deslocamento do pêndulo inferior sob ação do controlador <i>fuzzy</i>	59
Figura 5.10 – Deslocamento do pêndulo superior sob ação do controlador <i>fuzzy</i>	59
Figura 6.1 – Plano de Fases de Duas Estruturas do Sistema de Estrutura Variável	62
Figura 6.2 – Plano de Fases do Sistema de Estrutura Variável	63
Figura 6.3 – Função Sinal	65
Figura 6.4 – Plano de Fases do Sistema com Linha de Chaveamento.....	65
Figura 6.5 – Plano de Fase de um movimento Deslizante	66
Figura 6.6 – Fenômeno de <i>chattering</i>	69
Figura 6.7 – Método de Filippov	69
Figura 6.8 – Plano de Fase de um movimento deslizante com camada limite.....	73
Figura 6.9 – Modelo no Simulink do Controlador por Modo Deslizante Linear	79
Figura 6.10 – Ação de Controle do Controlador por Modo Deslizante Linear	79

Figura 6.11 – Deslocamento do carro sob ação do Controlador por Modo Deslizante Linear	80
Figura 6.12 – Deslocamento do pêndulo inferior sob ação do Controlador por Modo Deslizante Linear	81
Figura 6.13 – Deslocamento do pêndulo superior sob ação do Controlador por Modo Deslizante Linear	81
Figura 6.14 – Estrutura de Controle por Modo Deslizante Hierárquico	83
Figura 6.15 – Gráfico da função <i>Saturation</i>	85
Figura 6.16 – Modelo no Simulink do Controlador por Modo Deslizante Hierárquico com atenuação de <i>chattering</i>	87
Figura 6.17 – Ação de controle do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas	88
Figura 6.18 – Deslocamento do carro sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas	88
Figura 6.19 – Deslocamento do pêndulo inferior sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas	89
Figura 6.20 – Deslocamento do pêndulo superior sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas	89
Figura 6.21 – Ação de controle do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas	90
Figura 6.22 – Deslocamento do carro sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas.....	91
Figura 6.23 – Deslocamento do pêndulo inferior sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas.....	92
Figura 6.24 – Deslocamento do pêndulo superior sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas.....	92

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Parâmetros Físicos do Duplo Pêndulo Invertido Sobre um Carro.....	34
Tabela 5.1 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i>	45
Tabela 5.2 – Conjunto de Regras <i>fuzzy</i>	56
Tabela 6.1 – Parâmetros do Controlador por Modo Deslizante Hierárquico	87
Tabela 6.2 – Resultados de Desempenho dos Controladores.....	93

Lista de Abreviaturas e Siglas

CF	Controlador <i>Fuzzy</i>
DC	Deslocamento Máximo do Carro
DIPC	Duplo Pêndulo Invertido Sobre um Carro
DPI	Deslocamento Máximo do Pêndulo Inferior
DPS	Deslocamento Máximo do Pêndulo Superior
HSMC	Controle por Modo Deslizante Hierárquico
LQR	Regulador Linear Quadrático
LSMC	Controle por Modo Deslizante Linear
TCC	Tempo de Convergência do Carro
TCPI	Tempo de Convergência do Pêndulo Inferior
TCPS	Tempo de Convergência do Pêndulo Superior
TE	Tempo de Execução

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	13
1.1 OBJETIVO GERAL	16
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA	17
CAPÍTULO 3 - DUPLO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE UM CARRO	25
3.1. INTRODUÇÃO	25
3.2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA	26
3.3. LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA.....	31
3.4. ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA	31
CAPÍTULO 4 - CONTROLADOR LQR.....	33
4.1. INTRODUÇÃO	33
4.2. INTRODUÇÃO AO CONTROLE ÓTIMO QUADRÁTICO	34
4.3. FUNDAMENTOS DE REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	34
4.4. METODOLOGIA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	37
CAPÍTULO 5 - CONTROLADOR POR LÓGICA <i>FUZZY</i>	41
5.1. INTRODUÇÃO	41
5.2. FUNDAMENTOS DE LÓGICA <i>FUZZY</i>	42
5.3. METODOLOGIA DE CONTROLE POR LÓGICA <i>FUZZY</i>	54
CAPÍTULO 6 - CONTROLADOR POR MODO DESLIZANTE	60
6.1. INTRODUÇÃO	60
6.2. FUNDAMENTOS DO CONTROLADOR POR MODO DESLIZANTE	61
6.2.1. Descrição Formal de Controle por Modos Deslizantes	67
6.2.2. Propriedades de Modos Deslizantes	70
6.2.3. Existência do Modo Deslizante	72
6.2.4. Projeto de Lei de Controle por Modos Deslizantes.....	74
6.3. METODOLOGIA DE CONTROLE POR MODO DESLIZANTE	76
6.3.1. Controle por Modos Deslizantes Linear	76
6.3.2. Controle por Modo Deslizante Hierárquico	82
6.3.3. Análise Comparativa dos Resultados	93
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÃO	94
REFERÊNCIAS.....	97

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A evolução tecnológica nas diversas áreas da ciência, que envolve sistemas cada vez mais complexos com múltiplas entradas e múltiplas saídas, está presente cada vez mais no cotidiano do ser humano. Estes sistemas complexos necessitam de controladores altamente sofisticados, que garantam uma performance elevada principalmente em condições adversas de funcionamento. A teoria de controle convencional, que baseia-se na relação entrada-saída, limitam a ação de controle e não satisfazem os requisitos de sistemas complexos. A teoria moderna de controle foi então desenvolvida para lidar com este tipo de sistema e concentra-se no desenvolvimento de controladores robustos para suprir a demanda por sistemas mais precisos.

Como se sabe, os sistemas de controle reais são geralmente não lineares, mas dependendo do objetivo de controle esses sistemas podem ser aproximados a modelos lineares para que os métodos de controle convencionais possam ser utilizados. O método mais comum, que inclusive é a base de muitos controles aplicados aos modelos não lineares de sistemas, é a realimentação de estado. E ainda a técnica de otimização da realimentação de estados que é o regulador linear quadrático, mais conhecido por sua abreviação LQR.

Atualmente, os chamados controles inteligentes, utilizados principalmente para lidar com as incertezas de sistemas, ganhou força permitindo o avanço tecnológico, mas ainda são muito complexos para sistemas com um número elevado de variáveis de controle. Entre os métodos de controle inteligente mais conhecidos estão os controladores baseados na lógica *fuzzy* e os baseados em redes neurais.

Para sistemas mais complexos e com números elevados de variáveis de estado, com incertezas e sujeitos a distúrbios externos, que requerem robustez e eficiência, o método de controle mais utilizado é o modo deslizante que é baseado em estrutura variável.

Dentre estes sistemas complexos que demandam por controladores sofisticados, lançamento de foguetes, controle automático de avião, sistemas robóticos, sistemas de controle de temperatura e etc.

Muitos dos métodos de controle dos sistemas citados foram desenvolvidos anteriormente através de simulações em outros sistemas para verificação da eficiência dos mesmos. Um dos sistemas mais utilizados é o duplo pêndulo invertido sobre um carro.

O duplo pêndulo invertido é atualmente considerado como uma ferramenta de validação de novas leis e técnicas de controle por diversos pesquisadores da área de controle. Este sistema é um típico problema de controle por ser um sistema de múltiplas saídas, ou seja, diversas variáveis de estado, e apenas uma entrada de controle que o torna um sistema crítico a falhas. Além disso, é um sistema com fortes não linearidades em suas equações dinâmicas, que possui dinâmicas acopladas e incertezas paramétricas e está sujeito a distúrbios externos. Todas estas características o tornam um sistema ideal para validação de novos controles principalmente por ter um modelo dinâmico que pode ser obtido matematicamente. Inúmeros pesquisadores utilizaram e este sistema ao longo dos anos como esta ferramenta de validação e, atualmente, ainda é um problema de controle aberto.

Nos últimos anos encontramos diversos tipos de controladores com diversas leis de controle aplicados ao duplo pêndulo invertido sobre um carro inclusive com controladores híbridos, com duas ou mais técnicas de controle na literatura. Para este sistema, tanto controladores convencionais, baseados no modelo linear do duplo pêndulo invertido sobre um carro, quanto controladores modernos, baseado no modelo completo e não linear do sistema são encontrados.

Uma dificuldade encontrada na análise destes trabalhos foi a diferença matemática entre os modelos dinâmicos do duplo pêndulo invertido sobre um carro. Este problema dificulta a comparação dos resultados obtidos. Neste trabalho, utilizaremos um único modelo do sistema em suas formas linearizadas e não linearizadas para facilitar o processo de comparação de resultados. Além disso, encontramos diversos controles aplicados ao modelo linear e não linear do sistema, dentre eles, utilizaremos três para termos de comparação de resultado. Os três métodos de controle utilizados neste trabalho baseiam-se no regulador linear quadrático, lógica *fuzzy* e controle por estrutura variável com modos deslizantes. Por fim, o desenvolvimento de uma melhoria para o controle do sistema não linear.

A organização desta dissertação segue a seguinte seqüência:

- Introdução;
- Revisão da Literatura;
- Duplo Pêndulo Invertido Sobre um Carro;
- Controlador LQR;

- Controlador por Lógica *Fuzzy*;
- Controlador por Modo Deslizante;
- Conclusão;
- Referencias Bibliográficas.

No capítulo de revisão da literatura, os trabalhos referenciados concentram-se na abordagem de métodos de controle aplicados ao sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro. Neste, procurou-se avaliar o desempenho dos métodos de controle aplicado e, ainda, os mais utilizados atualmente visando a fundamentação da escolha dos métodos utilizados nesta dissertação.

No capítulo do duplo pêndulo invertido sobre um carro, obtemos as equações dinâmicas não lineares do sistema utilizando o método de Lagrange. Em seguida, linearizamos as equações dinâmicas do sistema, necessárias para os próximos capítulos. Por fim, realizou-se uma análise da dinâmica acoplada do sistema, identificando os possíveis movimentos sob a ação de uma força externa.

No capítulo do controlador LQR, abordamos a teoria de realimentação de estados e controle por malha-fechada para que, em seguida, o método de otimização LQR (regulador linear quadrático) seja descrito. Por fim, projetou-se e analisou-se a aplicação deste método de controle para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro.

No capítulo do controlador por lógica *fuzzy*, introduziu-se a lógica *fuzzy* com sua teoria de conjunto e propriedades. Em seguida, a arquitetura de sistema de inferência *fuzzy* é apresentada e suas etapas de fuzificação, base de regras e defuzificação são descritos. E então, uma metodologia de controle baseada em lógica *fuzzy* é aplicada e analisada para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro.

No capítulo do controlador por modo deslizante, a teoria de controle por estrutura variável é apresentada. Em seguida, o controle por estrutura variável utilizando superfície de deslizamento e função de chaveamento, assim chamado de modo deslizante, é descrito com suas propriedades. Para a implementação deste controlador no sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, utilizou-se uma metodologia baseada no modelo linear do sistema. E então, uma metodologia de controle baseada no modelo não linear é desenvolvida e melhorada com o objetivo de atenuar o fenômeno de *chattering*. Os resultados destes dois métodos de controle são apresentados e analisados.

Na conclusão os resultados de todos os métodos de controle aplicados ao duplo pêndulo invertido sobre um carro são analisados e comparados. As considerações finais sobre a dissertação são discutidas e apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

A seguir, detalharemos o objetivo geral e os objetivos específicos desse trabalho.

1.1 OBJETIVO GERAL

Pesquisar e comparar métodos de controle aplicados ao sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro visando à estabilidade do sistema.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Descrever as equações dinâmicas do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro;
- Investigar as técnicas de controle utilizadas no sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro;
- Avaliar o desempenho dos métodos de controle selecionados, enfatizando a aplicação ao modelo completo do sistema em sua forma não-linear e ainda, aproximando-se de uma aplicação real;
- Propor uma função para a melhoria do desempenho do controlador por modo deslizante visando à atenuação do problema de *chattering*.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

O interesse por sistemas sub-atuados cresce a cada ano, diversos pesquisadores na área de controle se utilizam deste tipo de sistema como uma ferramenta de validação de novas técnicas de controle, buscando o objetivo comum do sistema controlado. Tais sistemas possuem um número menor de entradas de controle que saídas a serem controladas, ou seja, possuem um número menor de atuadores que graus de liberdade (Dianwei *et al*, 2006). Esta característica inerente aos sistemas sub-atuados, diminui a tolerância a falhas dos atuadores do mesmo, tornando-os um problema de controle muito atrativo. Alguns exemplos deste tipo sistema encontrados na literatura são: Acrobot, TORA, sistemas *ball-beam*, sistemas de pêndulos invertidos, etc.

Como um típico sistema sub-atuado, o duplo pêndulo invertido sobre um carro é uma das ferramentas mais utilizadas para a validação das novas técnicas de controle linear e não-linear. Neste sistema, o carro move-se na horizontal, sendo este movimento a única força que atua no sistema. Por ter apenas uma entrada de controle e múltiplas saídas, que o classifica como um sistema SIMO e o torna crítico a tolerância a falhas. Outras características deste sistema que o tornam um problema de controle desafiador são: fortes não linearidades; dinâmicas acopladas; estrutura simples, que permite obter todas as equações dinâmicas do sistema; incertezas paramétricas, que, na prática, frequentemente são causados por perturbações externas e internas (Dianwei *et al*, 2007); alta instabilidade e complexidade matemática.

A maioria dos trabalhos em controle do duplo pêndulo invertido sobre um carro, concentram-se em dois problemas (Bogdanov, 2004): estabilização dos pêndulos na posição vertical e controle de balanço dos pêndulos na posição vertical. Algumas destas técnicas de controle baseiam-se no modelo linear do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, ou seja, o comportamento do sistema fica limitado a posições próximas a vertical, distanciando a dinâmica do sistema do comportamento real do mesmo. Sob essas condições, se um dos pêndulos assumir uma posição distante da posição vertical, o desempenho desses controladores mostra-se insatisfatório (Dianwei *et al*, 2006).

Devido às características mencionadas anteriormente, somente o controlador proporcional (P), da teoria clássica de controle, não pode estabilizar sistemas de pêndulos invertidos (Niemann e Poulsen, 2003). Desta forma, (Lin *et al*, 2002) projetou um controlador multi-PD para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro. O primeiro passo deste projeto é a linearização do sistema e então a formulação de um controlador PD para cada subsistema. A lei de controle do sistema é baseada na realimentação de estados que, a partir da função de transferência do sistema obtida com este método de controle, tem sua matriz de realimentação calculada pelo método da alocação de pólos. Os autores utilizaram dois experimentos de laboratório para testar a eficiência do método de controle proposto, o primeiro consiste em atingir o pêndulo superior com a mesma força lateral e, o segundo consiste em colocar a massa na extremidade do pêndulo superior. O tempo escolhido para a realização destes dois experimentos foi à metade do tempo total de execução do experimento. Apesar de ser simples e de fácil aplicação, este método de controle não apresentou nenhuma vantagem quando comparado com o controlador LQR.

Em (Niemann e Poulsen, 2003), um sistema duplo pendulo invertido sobre um carro é linearizado, mas são incluídos a dinâmica do sistema os distúrbios e variações paramétricas característicos do funcionamento do sistema real. Baseado neste modelo do sistema, um controlador por realimentação é projetado utilizando a síntese μ . As interações do controlador determinam as matriz de peso que otimizam a performance do sistema. Os resultados obtidos mostram a dificuldade de estabilização do sistema com este controlador, principalmente para a variável de posição angular do pêndulo superior.

Realizando um estudo sobre controles aplicados ao duplo pêndulo invertido sobre um carro, (Bogdanov, 2004) iniciou seu relatório técnico projetando um regulador linear quadrático (LQR) e a partir deste, utilizando a discretização das equações dinâmicas do sistema, projetou uma lei controle com a Equação de *Riccati* de Estado-Dependente (SDRE), que é considerada como uma extensão não linear para o LQR. Ainda com o objetivo de ampliar a aplicação de realimentação de estados para um faixa maior de estados iniciais do sistema, o autor utiliza um regulador ótimo com redes neurais (NN). Por fim, uma mistura deste último controle com os dois anteriores são aplicados ao sistema. Com base nos resultados apresentados, o regulador com redes neurais foi o método de controle empregado mais limitado na faixa de deflexão dos pêndulos, o método SDRE foi o que apresentou um melhor resultado referente ao faixa de deflexão. Verificando o resultado de simulações para os sistemas de controle com acréscimo da rede neural, pode-se constatar os mesmos não tiveram sua capacidade de tolerância a uma maior deflexão dos pêndulos aumentada.

Como se sabe, controlador LQR realiza a otimização da matriz de realimentação de estados através da minimização da função de custo. Então (Zare *et al*, 2009) desenvolveu um controle ótimo por programação não linear como um novo método de minimização da função de custo. Utilizando ferramentas matemáticas, definiu dois teoremas objetivando alcançar a minimização da função de custo, utilizando o modelo não linear do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro. A resposta do sistema ao controle foi satisfatória, similar ao controle LQR no modelo linear do sistema, mas a desvantagem deste método de controle é o elevado volume de cálculos envolvidos no projeto, podendo interferir em uma possível aplicação em tempo real.

Buscando novas soluções para controle do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, observa-se atualmente um aumento na utilização de sistemas de controle *fuzzy* pelos pesquisadores. No trabalho de (Jianqiang *et al*, 2000), a entrada de controle do sistema é um somatório do produto do grau de importância dinâmica pelo resultado da inferência *fuzzy* de cada módulo de regras de entrada simples (SIRM) de cada variável de estado. O grau de importância dinâmica é determinado de acordo com a situação de controle. No sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, o controle do ângulo superior tem a maior prioridade, seguido do ângulo do pêndulo inferior e, por fim, o controle da posição do carro. Os resultados apresentados mostram a estabilização do sistema com este método de controle, mas os autores não apresentam a estrutura de controle de forma clara e não descrevem o modelo matemático do sistema.

Ainda com relação ao controlador *fuzzy*, existe uma dificuldade de projeto do mesmo para sistemas com um número elevado de variáveis de estado, que é o caso do sistema em questão, utilizando exclusivamente a teoria de controle *fuzzy*. A quantidade de regras de controle com lógica fuzzy é determinada pela quantidade de parâmetros e número de variáveis de estado. Se para cada variável de estado do duplo pêndulo invertido sobre um carro tivermos n parâmetros, o número de regras fuzzy do controlador seria n^6 , aumentando o custo computacional do sistema impossibilitando uma aplicação em tempo-real (Sun e Sun, 2009).

Com o objetivo de tornar o projeto de controladores *fuzzy* mais simples para sistemas com múltiplas variáveis de controle, (Lei e Langari, 2000) dividiu o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro em dois subsistemas, ignorando o subsistema carro na estratégia de controle. Para cada subsistema foi projetado um controlador *fuzzy*, formando o nível inferior do método de controle hierárquico, num nível superior da estrutura, outro controlador fuzzy é projetado, mas com o objetivo de ajustar os pesos que multiplicarão a saída dos controladores do nível inferior. A lei de controle final deste controlador hierárquico é a somatória do

produto entre os pesos e a saída dos controladores *fuzzy* dos subsistemas. A desvantagem deste método de controle está na desconsideração do subsistema carro na estrutura de controle, comprovada pela limitação na faixa controlável da posição dos pêndulos.

Seguindo a mesma orientação do controlador anterior, (Tu *et al*, 2000) construiu uma estrutura hierárquica com múltiplos controladores *fuzzy* e múltiplas camadas de controladores *fuzzy*. A diferença entre este e o anterior está na incorporação de todas as variáveis de estado na estrutura de controle. Os controladores *fuzzy* são projetados todos com apenas duas entradas e uma saída, para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, então, a primeira camada é formada por três controladores *fuzzy*. As próximas camadas têm como entradas, a saída dos controladores da camada anterior, até que a última camada tenha apenas um controlador *fuzzy* com uma saída de controle. Os resultados comprovam a estabilização do sistema, mas tem a desvantagem de possuir muitos controladores *fuzzy*, que pode dificultar a aplicação do mesmo em tempo real.

Outra técnica de controle similar encontra-se em (Sun e Sun, 2009), que aplica o controle *fuzzy* em múltiplas etapas ao sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro. A metodologia emprega cinco controladores *fuzzy* cascadeados, onde o primeiro tem como entradas duas variáveis de estado do sistema e os demais recebem como entradas a saída do controlador *fuzzy* anterior e outra variável de estado. Este controlador *fuzzy* foi aplicado em controle de tempo real, apresentando muita oscilação. O problema encontrado nesta metodologia foi a seleção dos parâmetros do controlador pelo método de tentativa e erro.

Visando a simplificação do número de controladores *fuzzy* e a simplificação da quantidade de regras, (Fuyan *et al*, 1996 e Qiang-Rui *et al*, 2008) utilizaram a matriz de realimentação de estados otimizada para criar duas novas variáveis, que servirão de entrada para o controlador *fuzzy*, formadas pela composição das variáveis de estado do sistema original. No trabalho de (Fuyan *et al*, 1996) as variáveis de estado do sistema são usadas diretamente com a matriz de realimentação de estados, compondo a entrada erro E e a taxa de erro EC com 11 parâmetros para cada variável, sem apresentar resultados de simulações. Já no trabalho de (Qiang-Rui *et al*, 2008) três controladores *fuzzy* são projetados aplicando uma transformação na matriz de realimentação de estado diferente para cada subsistema do duplo pêndulo invertido sobre um carro. Mesmo com a redução do número de entradas no controlar de seis para dois, o número de regras de controle é quarenta e nove. Os testes realizados com este controlador demonstraram o peso desta quantidade de regras no custo computacional do controlador. Os resultados dos controladores apontam para um melhor desempenho do controlador que prioriza o subsistema pêndulo superior.

Modificando o tipo de método de controle *fuzzy*, (Shi e Zhong, 2003) utilizou o modelo Takagi-Sugeno (T-S) para estabelecer a matriz de realimentação de estados do controlador. O sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro linearizado é controlado via modelo T-S com otimização dos parâmetros pelo método ANFIS em (Sheng *et al*, 2008). Os dados da resposta dinâmica do controlador LQR são utilizados como dados de treinamento para o controlador ANFIS. As entradas são uma fusão das variáveis de estado, uma é o erro de rastreamento e a outra a taxa do erro de rastreamento. Os testes do controlador proposto incluem um sinal de distúrbio no pêndulo superior, apresentando um grande pico na dinâmica do sistema, mas não impedindo que o controlador dirija o sistema novamente para a estabilidade.

Com o intuito de aprimorar o desempenho do método de controle *fuzzy* para sistemas com incertezas paramétricas, como o duplo pêndulo invertido sobre um carro, (Ding *et al*, 2009) utiliza a mesma técnica de redução do número de entradas no controlador utilizadas por (Fuyan *et al*, 1996 e Qiang-Rui *et al*, 2008) associada uma otimização utilizando algoritmo genético. Os parâmetros escolhidos para serem otimizados são: os coeficientes de realimentação de estados, a largura e o centro das funções de pertinência do controlador *fuzzy*. Os coeficientes de realimentação de estado sempre são alvos de métodos de otimizações devido as imprecisões no modelo, mas a largura e o centro das funções de pertinência do controlador *fuzzy* tornou as curvas assimétricas, o que comparando com os trabalhos anteriores, nos indica que a oscilação apresentada nas curvas de resposta do deslocamento do carro que tal escolha não melhorou o desempenho do sistema e, ainda, que a estabilidade do pêndulo superior e inferior não foi comprovada.

Devido às características do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, principalmente, não linearidades, alta instabilidade e distúrbios externos, encontramos na literatura um poderoso método de controle de realimentação não linear, o controlador por modo deslizante que é baseado na teoria de controle de estrutura variável e é capaz de superar tais problemas.

Encontramos em (Wu *et al*, 2008) uma aplicação do controle por modo deslizante ao sistema real duplo pêndulo invertido sobre um carro. Neste, o modelo matemático linear do sistema é utilizado para o projeto das superfícies de deslizamento e os coeficientes de cada superfície são obtidos através de alocação de pólos do sistema com transformação linear. Os demais parâmetros do controlador são especificados pelo projetista. Um dos problemas deste método de controle é o fenômeno de *chattering*, caracterizado por fortes oscilações do sistema em torno da superfície de deslizamento. Para atenuar este fenômeno, (Wu *et al*, 2008) propôs

a substituição da função sinal que promove o chaveamento na lei de controle permitindo a alcançabilidade da superfície de deslizamento, por uma função contínua de aproximação. Os resultados apresentados demonstram uma boa performance da lei de controle, mas a oscilação persiste.

Uma abordagem semelhante a anterior realizada por (Huang *et al*, 2008), utiliza controlador por modo deslizante, onde os parâmetros do controlador são determinados pela matriz de realimentação de estados do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro transformado. A diferença está na otimização dos parâmetros do controlador, incluindo a matriz de realimentação de estados e os parâmetros da lei de alcance exponencial. Os resultados demonstram a eficiência da lei de controle na estabilização do sistema.

Em (Dianwei *et al*, 2006), uma metodologia de controle hierárquica com modo deslizante aplicada ao duplo pêndulo invertido sobre um carro. Neste, o sistema é dividido em três subsistemas, pêndulo superior, pêndulo inferior e o carro. Cada subsistema teve sua superfície deslizante projetada e as três formam o primeiro nível de superfícies de modo deslizante. Em seguida, o segundo nível de superfície de modo deslizante é projetado a partir da saída de todas as superfícies do primeiro nível. A análise de estabilidade requerida para este controlador é feita com base na teoria de Lyapunov e o teorema de Barbalat. O controlador projetado é testado no sistema sem distúrbios externos, apresentando curvas de estabilização similares aos sistemas de controle linearizados.

Em (Dianwei *et al*, 2006), uma estrutura hierárquica diferente para as superfícies de modo deslizante. Nesta estrutura, os níveis de superfícies de modo deslizante são formados por apenas duas superfícies de modo deslizante. Desta forma, para o duplo pêndulo invertido sobre um carro, o primeiro nível é selecionado como a superfície de modo deslizante de um dos subsistemas, o segundo nível é formado pela saída do primeiro nível com um fator de multiplicação e pela superfície de modo deslizante de um segundo subsistema com suas duas variáveis de estado e, por fim, o terceiro nível de superfícies formado pelas saídas do segundo nível com um fator de multiplicação e pela superfície de modo deslizante do último subsistema. Este controlador desenvolvido foi aplicado ao sistema com um acréscimo de incertezas com valores diferentes. Os resultados apresentam mais oscilações que o anterior antes da estabilização, como é de se esperar. Mas neste trabalho, a seqüência de escolhas dos subsistemas não foi apresentada e, como visto anteriormente, a ordem de prioridade de controle afeta a estabilidade do sistema.

Em (Yinxing *et al*, 2007), o controlador por modo deslizante chamado de incremental é projetado para estabilizar o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro. Nesta estrutura

de controle, o primeiro nível de superfícies de modo deslizante é composto pelas variáveis de estado de um dos subsistemas. Os próximos níveis são formados pela saída do nível anterior com outra variável de estado de outro subsistema. Este processo continua até que todas as variáveis de estado estejam incluídas na estrutura de controle. A novidade empregada aqui é a utilização do erro de rastreamento nas superfícies deslizantes. A análise de estabilidade de todas as superfícies deslizantes são provadas teoricamente pelo teorema de Lyapunov e Barbalat. O método de controle é eficiente e rápido na estabilização do sistema.

Ainda nesta mesma linha de controladores, (Mahjoub *et al*, 2009) utilizou as duas estruturas hierárquicas anteriores e acrescentou uma terceira estrutura, testando os resultados no sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro com o acréscimo de distúrbios com valores diferentes. A terceira estrutura hierárquica projetada é uma seqüência de superfícies de modo deslizante, sendo a primeira formada por duas das variáveis de estado do sistema e as demais formadas por uma variável do sistema e a saída do nível anterior de superfícies de modo deslizante. Para estas três estruturas foi acrescentado um compensador por modo deslizante a lei de controle final. Os parâmetros do controlador de modo deslizante das duas primeiras estruturas hierárquicas são constantes, mas a terceira estrutura tem seus parâmetros variáveis, ajustados de acordo com o estado atual das variáveis de estado do sistema. Como nos casos anteriores, a estabilidade é analisada por Lyapunov e teorema de Barbalat. A seqüência de escolha dos subsistemas também não foi descrita e, também como anteriormente, há severas oscilações no início da ação de controle, mas a estabilidade é alcançada. Dentre as três estruturas testadas, a segunda estrutura hierárquica de modo deslizante foi a que apresentou um valor mais elevado de deslocamento do carro e pêndulos, podendo significar uma demora na ação de controle.

O problema mais evidente no projeto do controlador por modo deslizante é a determinação dos seus parâmetros. Em (Ji-Chang e Ya-Hui, 1998), o controlador por modo deslizante *fuzzy* desacoplado é projetado. Os sistemas são divididos em dois subsistemas com metas de controle diferentes para cada subsistema. A lei de controle final é o controle baseado no controle SMC, a diferença entre este controlador e o SMC padrão está nas superfícies deslizantes. Apenas um dos subsistemas entra diretamente na lei de controle, o outro subsistema é incorporado a superfície deslizante do subsistema principal como uma função da superfície deslizante do subsistema secundário. A lei funciona bem para os sistemas pêndulo invertido sobre um carro e *Ball-beam*, que possuem apenas quatro variáveis de estado, mas para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, que tem seis variáveis de estado, somente o subsistema carro não foi incluído na lei de controle, apresentando um

resultado com muita oscilação, não retornando o carro a sua posição de origem. O método apresentou-se limitado.

Aprofundando este método de controle, (Chih-Min e Yi-Jen, 2005) projetaram um controlador por modo deslizante hierárquico *fuzzy* desacoplado. As superfícies dos demais subsistemas são acopladas a superfície de modo deslizante do subsistema principal através de fatores de acoplamento. Estes fatores de acoplamento são ajustados via lógica *fuzzy* de acordo com seu grau de importância na convergência da lei de controle, ou seja, na estabilidade do sistema. A vantagem deste método de controle para o desenvolvido por (Ji-Chang e Ya-Hui, 1998) é que este incorpora todas as variáveis de estado na lei de controle através das superfícies deslizantes, estendendo a aplicação do mesmo com robustez. Os resultados mostram uma boa velocidade de resposta do controlador, mesmo com distúrbios externos, quando comparado ao controle por modo deslizante *fuzzy* comum. O controle *fuzzy* converge para valores ótimos os coeficientes de acoplamento. Os resultados também apresentam muita oscilação, mas estabiliza os três subsistemas do duplo pêndulo invertido sobre um carro.

Os principais e mais utilizados sistemas de controle para estabilizar e rastrear o duplo pêndulo invertido sobre um carro, apresentados acima, foram analisados. Dentre as características mais buscadas em sistemas de controle para uma aplicação real destes está o tempo de resposta do sistema de controle e o custo computacional. Outra característica essencial que permite ou não sua aplicação em sistemas reais é a limitação do sistema de controle, que pode ser explicada pelo tipo de modelo no qual o sistema de controle é projetado: baseado no modelo linear do sistema ou baseado no modelo não linear do sistema. Neste sentido, fica claro que um sistema de controle que é projetado com base no modelo não linear do sistema a ser controlado tem maiores chances de ser utilizado com sucesso em sistemas reais, uma vez que os modelos linearizados limitam o comportamento dinâmico do sistema para uma região muito próxima do ponto de equilíbrio.

Um ponto chama atenção quando comparamos os diversos trabalhos revisados, que é heterogeneidade das equações dinâmicas do duplo pêndulo invertido sobre um carro. Isto dificulta a análise para efeitos de comparação entre os diversos controladores utilizados. Visando o desempenho dos controladores selecionados para esta análise, o sistema em questão estará padronizado em relação as equações dinâmicas e parâmetros.

CAPÍTULO 3

DUPLO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE UM CARRO

3.1. INTRODUÇÃO

O sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro é um problema clássico de controle utilizado por diversos pesquisadores de todo o mundo como uma poderosa ferramenta de validação de novas leis de controle baseadas tanto no modelo linear como no modelo não linear do sistema. Tal interesse por este sistema deve-se as suas características que, como um sistema mecânico sub-atuado, o número de graus de liberdade é maior que número entrada de controle, caracterizando-o como um sistema de simples entrada e múltiplas saídas (SIMO), torna a tolerância a falhas crítica deste sistema, além de suas dinâmicas servirem de base para execução de tarefas que envolvem balanço como a ação de caminhar e o lançamento de foguetes. As principais características do duplo pêndulo invertido sobre um carro são: não-linearidade, sistema multi-variável, dinâmicas acopladas, instabilidade elevada, complexidade matemática do modelo e incertezas.

A descrição real do modelo do sistema inclui as incertezas, que podem ser divididas em incertezas paramétricas e incertezas dinâmicas (Niemann e Polsen, 2003). As incertezas paramétricas referem-se a dificuldade ou impossibilidade de mensurar os parâmetros do sistema ou, ainda, a variação destes parâmetros em função do tempo. No sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro as principais incertezas paramétricas são as constantes de atrito de Coulomb. As incertezas dinâmicas podem ser: dinâmicas negligenciadas, ou seja, dinâmicas não modeladas como de rolamentos em sistemas que possuem esteiras, dinâmicas de alta frequência e etc; dinâmicas não lineares, presentes no sistema não linear através das funções seno e cosseno.

O sistema é composto por um carro que se move na horizontal e por duas hastes articuladas entre si e o carro. Os parâmetros do sistema visualizados na Figura 3.1 são: x é deslocamento horizontal do carro; M é massa do carro; m_1 é massa do pêndulo inferior; m_2 é a massa do pêndulo superior; θ_1 é o ângulo do pêndulo inferior em relação a vertical; θ_2 é o ângulo do pêndulo superior em relação a vertical; J_1 é o momento de inércia do pêndulo inferior; J_2 é o momento de inércia do pêndulo superior; L_1 é o comprimento do pêndulo

inferior; L_2 é o comprimento do pêndulo superior; l_1 é a distância de O_1 para o centro de massa do pêndulo inferior; l_2 é a distância de O_2 para o centro de massa do pêndulo superior; f_0 é o coeficiente de atrito do carro; f_1 é o coeficiente de atrito do pêndulo inferior; f_2 é o coeficiente de atrito do pêndulo superior; g é a aceleração da gravidade e; u é a força de controle.

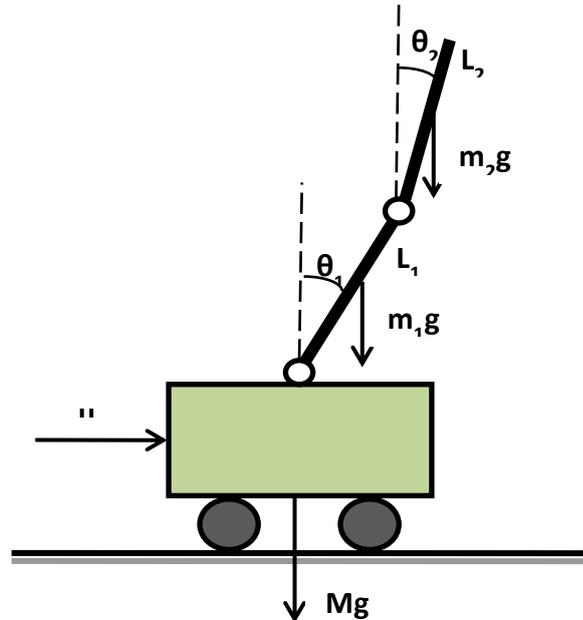


Figura 3.1 – Sistema Duplo Pêndulo Invertido Sobre um Carro.

3.2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

As equações dinâmicas do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro serão obtidas através do método de Lagrange. O método de Lagrange consiste na formulação das equações de energia cinética e energia potencial dos subsistemas para determinar as equações dinâmicas do sistema (Callinan, 2003). Para aplicar o método de Lagrange no sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro vamos considerar, na Figura 3.1, cada componente do sistema individualmente, ou seja, formularemos as equações de energia cinética e energia potencial para o carro, para o pêndulo inferior e para o pêndulo superior separadamente. Depois de obtida a energia cinética de cada componente do sistema, obtemos a energia cinética total do sistema com a soma das energias cinéticas de cada componente e, da mesma forma, obtemos a energia potencial total do sistema com a soma das energias potenciais de cada componente do sistema.

A energia cinética da componente carro é:

$$T_0 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad (3.1)$$

A energia potencial da componente carro é:

$$V_0 = 0 \quad (3.2)$$

A energia cinética da componente pêndulo inferior é:

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + m_1\dot{x}l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad (3.3)$$

A energia potencial da componente pêndulo inferior é:

$$V_1 = m_1gl_1 \cos \theta_1 \quad (3.4)$$

A energia cinética da componente pêndulo superior é:

$$T_2 = \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + m_2\dot{x}L_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2\dot{x}l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad (3.5)$$

$$+ m_2L_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

A energia potencial da componente pêndulo superior é:

$$V_2 = m_2gL_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2 \quad (3.6)$$

A energia cinética total do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro é, então, a soma de (3.1), (3.3) e (3.5), que resulta em:

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2(M + m_1 + m_2) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(J_1 + m_1l_1^2 + m_2L_1^2) \quad (3.7)$$

$$+ \dot{x}(m_1l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2L_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2(J_2 + m_2l_2^2)$$

$$+ m_2L_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

A energia potencia total do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro é, então, a soma de (3.2), (3.4) e (3.6), que resulta em:

$$V = m_1gl_1 \cos \theta_1 + m_2gL_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2 \quad (3.8)$$

Através da função de Lagrange (Callinan, 2003; Sweeney, 2004),

$$L = T - V \quad (3.9)$$

temos:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2(M + m_1 + m_2) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(J_1 + m_1l_1^2 + m_2L_1^2) \quad (3.10)$$

$$+ \dot{x}(m_1l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2L_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2(J_2 + m_2l_2^2)$$

$$+ m_2L_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_1gl_1 \cos \theta_1 - m_2gL_1 \cos \theta_1$$

$$- m_2gl_2 \cos \theta_2$$

Conforme o diagrama de forças do subsistema carro, Figura 3.2, podemos obter sua equação dinâmica como segue.

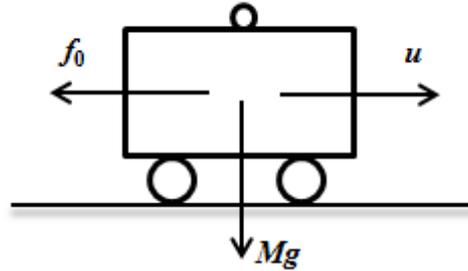


Figura 3.2 – Diagrama de forças do subsistema carro.

A equação de Lagrange para a variável de estado x é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = u - f_0 \dot{x} \quad (3.11)$$

onde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(M + m_1 + m_2) + m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (3.13)$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(M + m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_1(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 L_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_2(m_2 l_2 \cos \theta_2) \\ - \dot{\theta}_1^2(m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 L_1 \sin \theta_1) - \dot{\theta}_2^2(m_2 l_2 \sin \theta_2) = u - f_0 \dot{x} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Conforme o diagrama de forças do subsistema pêndulo inferior, Figura 3.3, podemos obter sua equação dinâmica como segue.

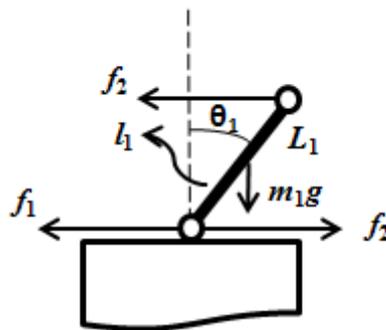


Figura 3.3 – Diagrama de forças do subsistema pêndulo inferior.

A equação de Lagrange para a variável de estado θ_1 é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(f_1 + f_2)\dot{\theta}_1 + f_2\dot{\theta}_2 \quad (3.15)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -\dot{x}m_1l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \dot{x}m_2L_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - m_2L_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_1gl_1 \sin \theta_1 \\ &\quad + m_2gL_1 \sin \theta_1 \\ &= -\dot{x}\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 (m_1l_1 + m_2L_1) - m_2L_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_1 (m_1l_1 \\ &\quad + m_2L_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \frac{1}{2}2\dot{\theta}_1(J_1 + m_1l_1^2 + m_2L_1^2) + \dot{x}m_1l_1 \cos \theta_1 + \dot{x}m_2L_1 \cos \theta_1 + m_2L_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \dot{\theta}_1(J_1 + m_1l_1^2 + m_2L_1^2) + \dot{x} \cos \theta_1 (m_1l_1 + m_2L_1) \\ &\quad + m_2L_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo (3.16) e (3.17) em (3.15), temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} \cos \theta_1 (m_1l_1 + m_2L_1) + \ddot{\theta}_1(J_1 + m_1l_1^2 + m_2L_1^2) + \ddot{\theta}_2m_2L_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_2L_1l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_1 (m_1l_1 + m_2L_1) = -(f_1 + f_2)\dot{\theta}_1 + f_2\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Conforme o diagrama de forças do subsistema pêndulo superior, Figura 3.4, podemos obter sua equação dinâmica como segue.

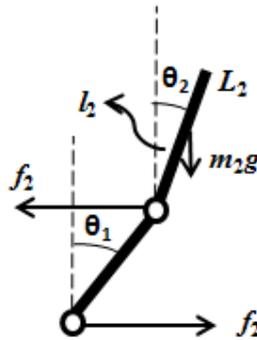


Figura 3.4 – Diagrama de forças do subsistema pêndulo superior.

Para a variável θ_2 , temos a seguinte equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = f_2\dot{\theta}_1 - f_2\dot{\theta}_2 \quad (3.19)$$

onde

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\dot{x}m_2l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2L_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2gl_2 \sin \theta_2 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dot{x}m_2l_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2(J_2 + m_2l_2^2) + m_2L_1\dot{\theta}_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) e (3.21) em (3.19), temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}m_2l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 (J_2 + m_2 l_2^2) - m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ - m_2 g l_2 \sin \theta_2 = f_2 \dot{\theta}_1 - f_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

As equações de Lagrange para o sistema podem ser reescritas na forma compacta de matrizes como:

$$\mathbf{H}[\ddot{x} \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2]^T + \mathbf{P}[\dot{x} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T + \mathbf{W} = \mathbf{Y}u \quad (3.23)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (m_0 + m_1 + m_2) & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & (m_2 l_2 \cos \theta_2) \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & (J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2) & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & (J_2 + m_2 l_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} f_0 & -\dot{\theta}_1 (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 & -\dot{\theta}_2 (m_2 l_2 \sin \theta_2) \\ 0 & f_1 + f_2 & m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - f_2 \\ 0 & -m_2 L_1 \dot{\theta}_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - f_2 & f_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \sin \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 L_1) \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

O modelo em espaço de estado do sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$, requer a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{x} = [x \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dot{x} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T \quad (3.28)$$

Desta forma, as equações dinâmicas do sistema são descritas como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(\mathbf{x}) + b_1(\mathbf{x})u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(\mathbf{x}) + b_2(\mathbf{x})u \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = f_3(\mathbf{x}) + b_3(\mathbf{x})u \end{cases} \quad (3.29)$$

onde $f_i(\mathbf{x})$ e $b_i(\mathbf{x})$ são as funções não lineares do sistema obtidas conforme:

$$f_1 = d_{11}c_1 + d_{12}c_2 + d_{13}c_3$$

$$f_2 = d_{21}c_1 + d_{22}c_2 + d_{23}c_3$$

$$f_3 = d_{31}c_1 + d_{32}c_2 + d_{33}c_3$$

$$b_1 = d_{11}$$

$$b_2 = d_{21}$$

$$b_3 = d_{31}$$

onde $C = \mathbf{P}[\dot{x} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T + \mathbf{W}$, c_i são os coeficientes das matrizes C e d_{ij} os coeficientes da matriz H^{-1} .

3.3. LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA

Como alguns dos métodos de controle baseiam-se no modelo linear do sistema, faz-se necessária a linearização do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro. A abordagem mais simples e usual na linearização deste sistema é a aproximação das funções não lineares a ao ponto de operação $\mathbf{x} = 0$.

Para este ponto de operação as funções não lineares do sistema em (3.23) são aproximadas para $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$. Assim, obtemos as seguintes matrizes linearizadas:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (M + m_1 + m_2) & (m_1 l_1 + m_2 L_1) & (m_2 l_2) \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) & (J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2) & m_2 L_1 l_2 \\ m_2 l_2 & m_2 L_1 l_2 & (J_2 + m_2 l_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 + f_2 & -f_2 \\ 0 & -f_2 & f_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\theta_1(m_1 l_1 + m_2 L_1) \\ -m_2 g l_2 \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

O sistema obtido é representado em espaço de estado como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.33)$$

3.4. ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA

Durante a ação de movimento do sistema, quando o carro desloca-se para a direita o deslocamento deste movimento é definido positiva, caso contrário, o mesmo será definido negativo. Considerando a origem dos pêndulos suas posições verticais, o movimento dos mesmos no sentido horário é definido positivo e no sentido anti-horário é definido negativo.

A dinâmica de movimento deste conjunto de subsistemas submetidos a uma força de controle é definida a seguir conforme Figura 3.5 e Figura 3.6.

Na Figura 3.5 podemos observar o movimento do duplo pêndulo invertido sobre um carro sob a ação de uma força de controle positiva. Nessa condição, o carro move-se no sentido da direita para esquerda. O movimento do carro aciona uma força no sentido contrário que atua no pêndulo inferior, isto torna o movimento deste definido negativo, ou seja, sentido anti-horário. E o movimento do pêndulo inferior aciona uma força no sentido contrário ao seu movimento atuando no pêndulo superior, tornando o seu movimento definido positivo, ou seja, sentido horário.

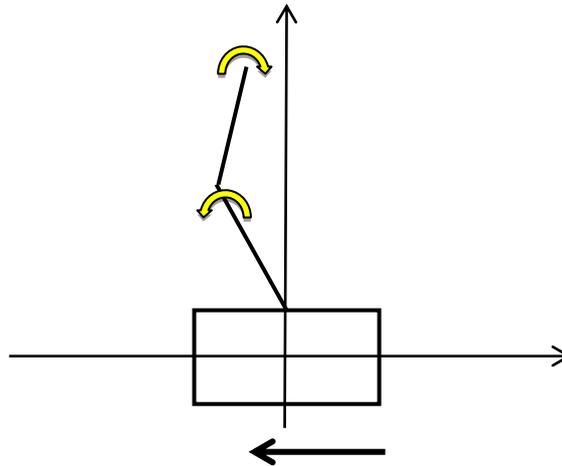


Figura 3.5 – Movimento do sistema com força de atuação positiva.

Na Figura 3.6 podemos observar o movimento do duplo pêndulo invertido sobre um carro sob a ação de uma força de controle negativa. Nessa condição, o carro move-se no sentido da esquerda para direita. O movimento do carro aciona uma força no sentido contrário que atua no pêndulo inferior, isto torna o movimento deste definido positivo, ou seja, sentido horário. E o movimento do pêndulo inferior aciona uma força no sentido contrário ao seu movimento atuando no pêndulo superior, tornando o seu movimento definido negativo, ou seja, sentido anti-horário.

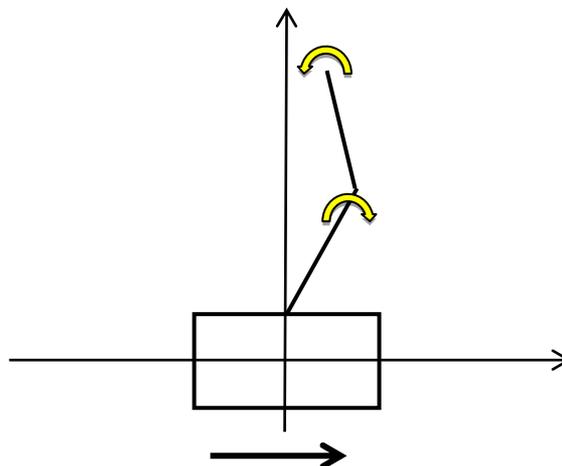


Figura 3.6 – Movimento do sistema com força de atuação negativa.

CAPÍTULO 4

CONTROLADOR LQR

4.1. INTRODUÇÃO

Após a modelagem matemática do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, o sistema de controle tem suas características incluídas no modelo do sistema, estendendo a idéia de modelagem. Como podemos observar na seção anterior, as equações dinâmicas do sistema possuem expressões matemáticas complexas com inter-relações complicadas entre os subsistemas. Estas características do modelo do sistema tornam a abordagem convencional da teoria de controle, baseada na relação de entrada-saída da função de transferência, uma tarefa tediosa de cálculos para a análise do sistema. A solução para este problema é a análise do sistema via variável de estado, mostrado na seção anterior, onde o sistema é representado por seis equações diferenciais de primeira ordem. Esta representação matricial do sistema simplifica a representação matemática do sistema sem aumentar a complexidade das equações.

A análise do sistema por variáveis de estado inclui a representação do sistema em espaço de estados, análise de controlabilidade e observabilidade do sistema e permite o projeto de controladores baseados na realimentação de estado, como o controle ótimo quadrático.

Nesta seção o modelo linear em espaço de estados do duplo pêndulo invertido sobre um carro das equações (3.31) a (3.42) é simplificado a fim de se obter as matrizes em valores reais e, a partir de então, realizar a análise de controlabilidade e observabilidade do sistema. Em seguida, o controle a malha fechada por alocação de pólos é implementado para que, enfim, o controle ótimo quadrático possa ser projetado para este sistema.

4.2. INTRODUÇÃO AO CONTROLE ÓTIMO QUADRÁTICO

Assegurar a estabilidade do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro utilizando o controle a malha fechada é uma questão central para o projeto de sistemas de controle ótimo quadrático. Para se alcançar a estabilidade do sistema, faz-se necessário definir estabilidade que, de acordo com (Dorf e Bishop, 2001), é uma medida de desempenho do sistema onde o sistema é considerado estável se todas as raízes da sua equação característica tiverem parte real negativa.

Os sistemas a serem controlados apresentam uma ou mais raízes de sua equação característica com parte real positiva ou nula. Para alcançar a condição de estabilidade, o método mais utilizado é a alocação de pólos, para pólos arbitrários especificados pelo projetista. Este método de controle possui o pré-requisito que o sistema tenha estados completamente controláveis.

4.3. FUNDAMENTOS DE REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Para analisar a controlabilidade do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, simplificaremos seu modelo matemático de acordo com as seguintes suposições:

- Cada pêndulo é um corpo rígido e não distorce durante o movimento;
- A força atua diretamente no carro sem atraso e sua magnitude é razão direta para a entrada do amplificador de potência;
- As forças de atrito são negligenciadas durante esta análise.

Os parâmetros do sistema duplo pêndulo invertido utilizados para a análise de estabilidade e controlabilidade do sistema estão descritos abaixo, na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros Físicos do Duplo Pêndulo Invertido Sobre um Carro.

M	1 kg	l_1	0.05 m
m_1	1 kg	l_2	0.05 m
m_2	1 kg	f_0	0.01
J_1	0.00083 kgm ²	f_1	0.007
J_2	0.00083 kgm ²	f_2	0.007
L_1	0.1 m	G	9.8m/s ²
L_2	0.1 m		

O sistema em espaço de estados após a substituição dos parâmetros é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 14.7196 & -1.6421 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -441.8844 & 147.4914 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 442.4743 & -343.9500 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7781 \\ -10.0134 \\ 3.3512 \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\text{index} = [x \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dot{x} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T.$$

A lei de controle de realimentação de estados é definida como abaixo:

$$u = -\mathbf{K}x \quad (4.3)$$

A primeira etapa do projeto de alocação de pólos é o teste de controlabilidade do sistema (4.1), que garante que todos os autovalores da matriz \mathbf{A} podem ser alocados arbitrariamente se a matriz de controlabilidade do sistema tiver um $rank = n$.

Para o sistema descrito em (4.1), a matriz de controlabilidade é definida como $Co = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B]$, resultando em:

$$Co = \begin{bmatrix} 0 & 0.7781 & 0 & -152.8960 & 0 & 81574 \\ 0 & -10.0134 & 0 & 4919 & 0 & -2.9771 \times 10^6 \\ 0 & 3.3512 & 0 & -5583.3 & 0 & 4.0969 \times 10^6 \\ 0.7781 & 0 & -152.8960 & 0 & 81574 & 0 \\ -10.0134 & 0 & 4919 & 0 & -2.9771 \times 10^6 & 0 \\ 3.3512 & 0 & -5583.3 & 0 & 4.0969 \times 10^6 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Para a matriz em (4.4), temos que $rank(Co) = 6$, logo, podemos dizer que o sistema é a estados completamente controláveis.

A segunda etapa para a alocação arbitrária de pólos é obter os coeficientes da equação característica do sistema $|sI - A| = s^6 + a_1s^5 - a_2s^4 - a_3s^3 + a_4s^2 + a_5s + a_6$, para o sistema (4.1) temos:

$$s^6 + (4.4409e - 015)s^5 - 134.1531s^4 - (2.9993e - 013)s^3 + (3019.2)s^2 + 0s + 0 = 0 \quad (4.5)$$

A terceira etapa é a escolha arbitrária de pólos, para o sistema duplo pêndulo sobre um carro, $Pa = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6]$, a partir deste, obtemos os coeficientes α_i do polinômio característico desejado, $s^6 + \alpha_1s^5 - \alpha_2s^4 - \alpha_3s^3 + \alpha_4s^2 + \alpha_5s + \alpha_6$

Com os dados de (4.6) e (4.5), podemos determinar a matriz de realimentação de como:

$$\mathbf{K} = [\alpha_6 - a_6 \quad \alpha_5 - a_5 \quad \alpha_4 - a_4 \quad \alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad (4.7)$$

onde $\mathbf{T} = \mathbf{CoM}$ é a matriz de transformação e \mathbf{M} é:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Como podemos observar na seção anterior, o método de alocação de pólos é arbitrária e depende da experiência do projetista para determinar os pólos e, conseqüentemente, a matriz de ganhos de realimentação de estados. Este método pode levar o sistema a uma estabilidade, mas pode não se a melhor resposta para o sistema a ser controlado. A fim de otimizar a função da matriz de ganhos de realimentação de estados, o regulador linear quadrático (LQR) surgiu utilizando o método de redução da função de custo quadrática pela equação de Riccati.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4.9)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz simétrica real constante e positiva e \mathbf{R} é uma matriz simétrica real constante definida positiva. As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} determinam a importância relativa do erro e do dispêndio de energia

Na função de custo quadrática (4.9), determinamos as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} de forma que a uma matriz \mathbf{P} definida positiva seja determinada a partir da equação de Riccati, definida a seguir:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Depois de determinada a matriz \mathbf{P} , a matriz de ganhos de realimentação de estados \mathbf{K} ótima é obtida como abaixo:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (4.11)$$

4.4. METODOLOGIA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Aplicando o regulador linear quadrático para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, selecionamos as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} de (Qing-Rui *et al*, 2008) como abaixo:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{R} = 0.01 \quad (4.13)$$

A matriz de ganhos de realimentação de estados obtida por (4.1), (4.11), (4.12) e (4.13):

$$\mathbf{K} = [200 \quad -1238.6 \quad 669.459 \quad 156.3017 \quad -31.0251 \quad -47.5357] \quad (4.14)$$

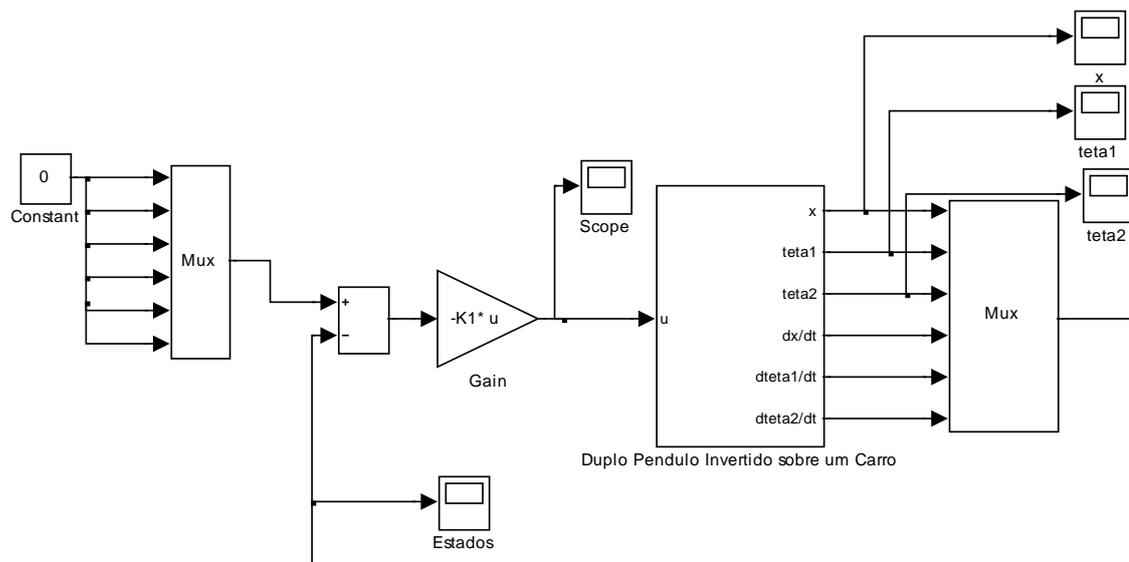


Figura 4.1 – Modelo no Simulink do Controlador LQR.

A Figura 4.1 mostra o diagrama em blocos da simulação do sistema no ambiente Matlab – Simulink. A resposta para o sistema (4.1) com a lei de controle de realimentação de estados utilizando a otimização regulador linear quadrático é apresentado abaixo.

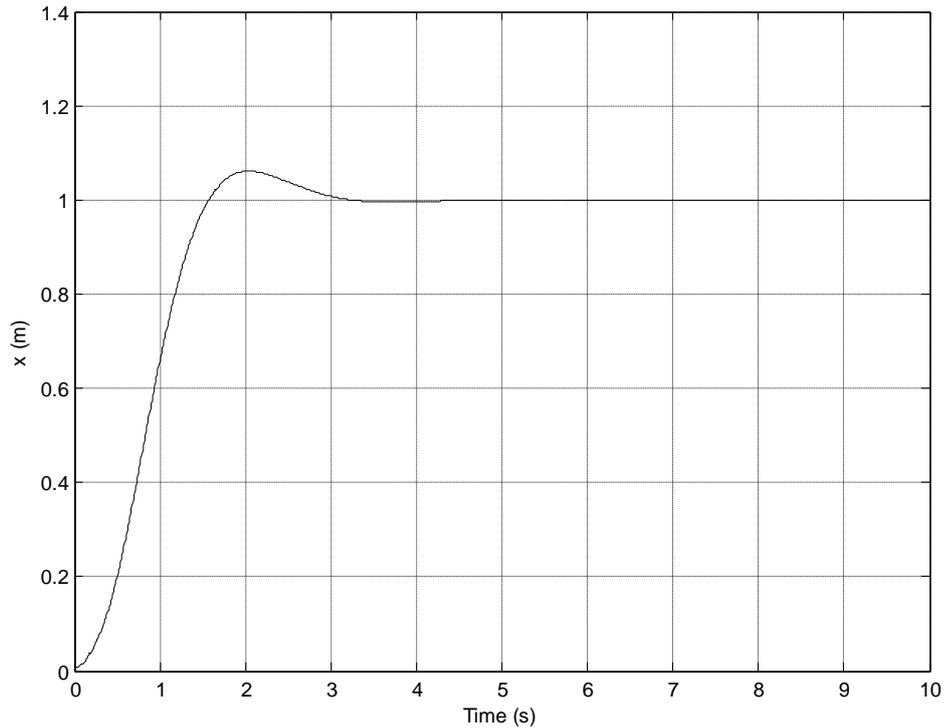


Figura 4.2 – Estabilização do subsistema carro sob ação do controlador LQR.

O gráfico da Figura 4.2, referente a posição do carro, mostra a estabilização do mesmo na posição 1m. Este ponto de parada do carro fora da origem deve-se ao fato da não utilização do erro de posição e taxa de erro, para corrigir o ponto de parada. Observando o objetivo de controle do duplo pêndulo invertido sobre um carro de equilibrar o pêndulo inferior e superior na posição vertical, a posição de parada do carro fora da origem não é importante, ou seja, não interfere no objetivo de controle. Mas, se considerarmos o comprimento do trilho que o carro pode se deslocar, não só a posição de parada do carro, como também os picos de deslocamento que o mesmo atinge podem ultrapassar os limites reais de movimento do carro.

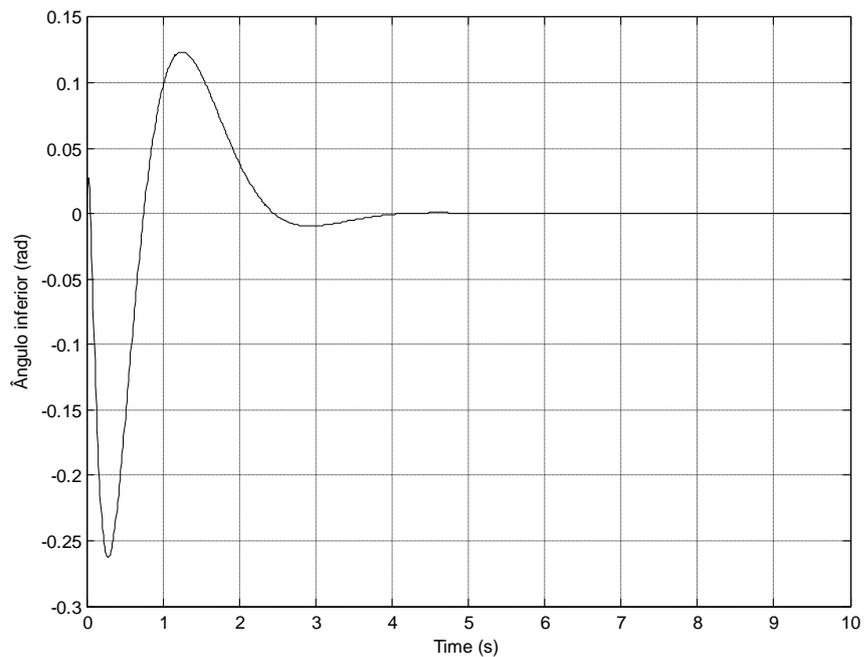


Figura 4.3 – Estabilização do subsistema pêndulo inferior sob ação do controlador LQR.

O gráfico da Figura 4.3, referente ao deslocamento angular do pêndulo inferior, mostra a estabilização do mesmo na origem. Considerando a posição angular medida em radianos, o deslocamento do pêndulo inferior ocorre em um intervalo entre $[-17 \quad 8.59]$ graus, ou seja, um deslocamento muito próximo a origem. Este comportamento do sistema é típico dos controladores baseados no modelo linear do sistema, limitando sua aplicação em modelos reais.

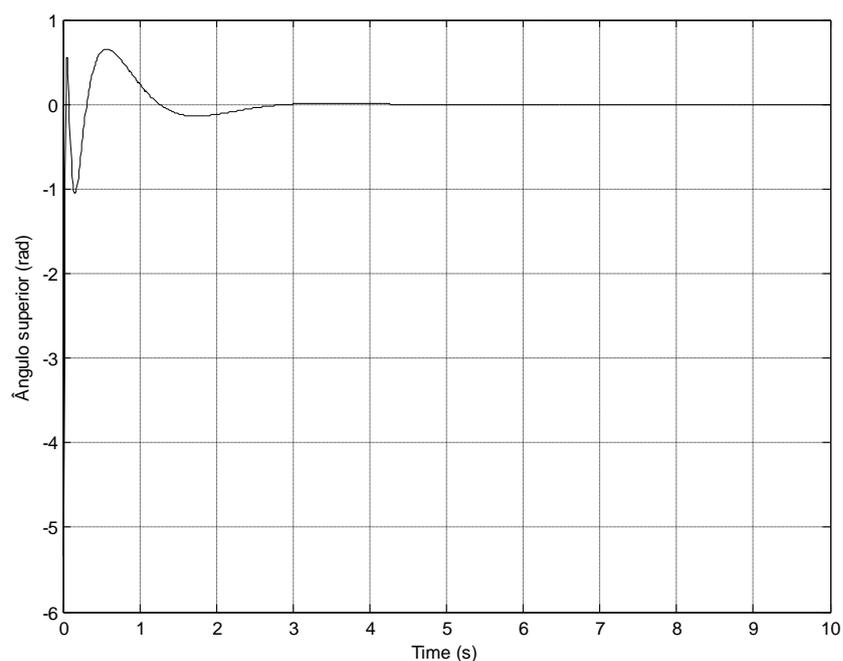


Figura 4.4 – Estabilização do subsistema pêndulo superior sob ação do controlador LQR.

O gráfico da Figura 4.4, referente ao deslocamento angular do pêndulo superior, mostra a estabilização do mesmo na origem. Diferentemente do gráfico anterior, o movimento angular deste pêndulo executa voltas completas em torno do seu eixo. A explicação para tal deve-se novamente a não utilização do erro de rastreamento e taxa de erro de rastreamento, indicando que o controlador estabiliza o sistema sem levar em consideração os limites físicos do sistema, mesmo que o pêndulo superior tenha, em certas posições, condições de executar voltas completas em torno do seu eixo.

CAPÍTULO 5

CONTROLADOR POR LÓGICA FUZZY

5.1. INTRODUÇÃO

A lógica *fuzzy* foi desenvolvida por Zadeh no ano de 1965 com o objetivo de representar as incertezas e conhecimentos não precisos. (Zadeh, 1965) apresentou a teoria de conjuntos *fuzzy* como uma forma de aproximação a classes de objetos encontrados no mundo físico real, uma vez que o processamento computacional era até então, baseados na lógica booleana. Na lógica booleana clássica, o raciocínio lógico é baseado em premissas e conclusões, onde uma conclusão verdadeira é representada pelo estado 1 e uma conclusão falsa é representado pelo estado 0, fornecendo um raciocínio aproximado para mundo físico real, mas em questões puramente lógicas muitas destas aproximações tornam-se incompletas. A lógica *fuzzy* é entendida como uma extensão da lógica booleana clássica, no sentido de que ela fornece uma forma de lidar com as incertezas e imprecisões no conhecimento do modelo. De forma mais objetiva, a lógica *fuzzy* captura as informações lingüísticas, ou não lógicas, e as transforma em dados numéricos, formato este compreendido e manipulável por computadores.

Os conjuntos *fuzzy* são uma interpretação do mundo real baseado no conhecimento que o projetista tem sobre este mundo real, onde os conjuntos *fuzzy* atribuem à classes de objetos, ou variáveis, graus de pertinência, através de funções de pertinência que variam entre zero e um. A utilização deste sistema baseado em conhecimento em sistemas de controle de loop-fechado melhora o desempenho, a confiabilidade e robustez do controlador, pela incorporação do conhecimento antes impossível de ser considerado em algoritmos de controle baseados no modelo analítico (Driankov *et al*, 1996). Esta característica da lógica *fuzzy* somada com sua capacidade de realizar inferências permite sua aplicação em diversas áreas como: sistemas especialistas, computação com palavras, raciocínio aproximado, linguagem natural, controle de processos, robótica, modelagem de sistemas parcialmente aberto, reconhecimento de padrões e processos de tomada de decisão.

Um controlador baseado em lógica *fuzzy* é composto de três partes. A primeira é responsável pela fuzzificação das variáveis de entrada, que converte as entradas de valor não

fuzzy em valores *fuzzy*. A segunda parte é a inferência *fuzzy* que contém a base de regras *fuzzy* do tipo IF...THEN. A terceira parte é a desfuzzificação que converte a ação de controle *fuzzy* em uma ação de controle não *fuzzy*.

No Japão, onde sistemas *fuzzy* são muito utilizados, o aumento da aplicação de lógica *fuzzy* em processos industriais ocorreu no ano de 1987 e, suas aplicações elétricas no ano de 1990 (Dote, 1995). Atualmente sistemas *fuzzy* são muito atrativos para engenheiros de todas as partes do mundo. As principais vantagens que os torna atrativos são:

- As inferências baseadas em regras são simples e poderosas;
- O controle *fuzzy* é uma tecnologia eficiente e de baixo custo para a automação industrial;
- O controlador *fuzzy* é de fácil compreensão para engenheiros e pessoas sem conhecimento matemático aprofundado;
- O controle *fuzzy* resolve facilmente problemas de controle não linear com linguagem pela introdução de conhecimento humano no controlador.

Contudo, apesar das vantagens apresentadas acima, os sistemas *fuzzy* apresentam alguns problemas descritos abaixo como:

- Uma rigorosa análise matemática de sistemas *fuzzy* ainda não foi bem desenvolvida.
- Os métodos de projeto de sistemas *fuzzy* não são bem desenvolvidos, em alguns casos métodos especiais são utilizados;
- Os problemas que podem ser resolvidos com lógica *fuzzy* ainda não foram delimitados.

5.2. FUNDAMENTOS DE LÓGICA FUZZY

Zadeh publicou em 1965 um trabalho pioneiro que utilizava a matemática para representar o mundo físico real, através de conjuntos *fuzzy*. Os conjuntos *fuzzy* definidos em (Zadeh, 1965) é uma classe de objetos com graus de pertinência contínuos. Estes conjuntos são representados por funções de pertinência que atribuem para cada objeto um grau de pertinência onde o universo de discurso, ou domínio, de cada objeto assumem valores entre zero e um. Estes conjuntos *fuzzy*, assim como em outros conjuntos matemáticos, têm estabelecidos noções de inclusão, união, interseção, complemento, relação, convexidade, etc.

Na teoria de conjuntos *fuzzy*, uma variável pode pertencer a um ou mais conjuntos e, em cada conjunto, esta mesma variável recebe um grau de pertinência específico, geralmente

este grau de pertinência é representado pela letra grega μ . A Figura 5.1 mostra um exemplo de fuzzificação de uma variável, este exemplo pode ser atribuído a uma variável entrada de medida de temperatura e as funções de pertinência atribuem ao valor de entrada um grau de pertinência dentro de um ou dois dos três conjuntos *fuzzy* intitulado por Baixa, Média e Alta. O eixo das abscissas representa o valor da medida de temperatura em graus Celsius. Estes graus de pertinência que são atribuídos a temperatura equivale a uma atribuição lingüística da temperatura medida. Por exemplo, um valor de temperatura de 16°C, equivale a dizer que a temperatura está entre baixa e média, ou invés de simplesmente definir a temperatura como ou baixa ou média. Com este simples exemplo podemos visualizar também a idéia de conhecimentos, ou experiência sobre o assunto. Neste caso, em que a variável temperatura é fuzzificada, a definição dos domínios de cada conjunto varia de acordo com a pessoa que os define, ou ainda de uma forma mais global, de acordo com a região em que a pessoa vive.

Mas o importante neste exemplo é a necessidade do projetista do conjunto no conhecimento sobre o grau de temperatura, para que possa classificá-las adequadamente. Para um valor de temperatura de 30°C, o grau de pertinência da variável no conjunto Alta seria $\mu(T) = 1$, sendo o grau de pertinência mais elevado para uma variável, isto significa que este valor de temperatura é considerado simplesmente como uma temperatura alta. A definição matemática para o grau de pertinência é:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{se, e somente se, } x \in A \\ 0 & \text{se, e somente se, } x \notin A \\ 0 < \mu(x) < 1 & \text{se } x \text{ pertence parcialmente a } A \end{cases} \quad (5.1)$$

Como podemos observar na equação (5.1), o intervalo de pertinência é $[0,1]$, onde 0 significa que o elemento não pertence a um determinado conjunto, 1 significa que o elemento pertence completamente ao conjunto, e valores entre 0 e 1 representam graus parciais de pertinência.

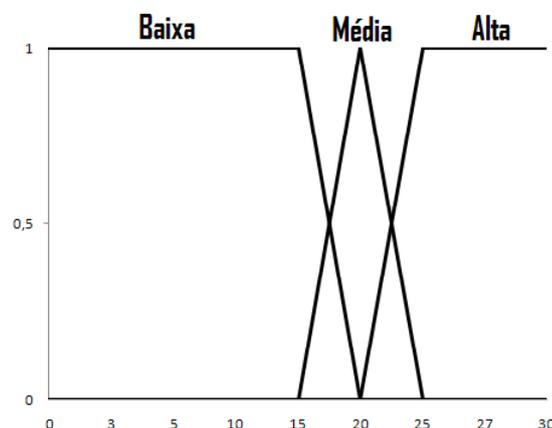


Figura 5.1 – Exemplo de função de pertinência.

Em relação às características dos conjuntos fuzzy acima representados, podemos dizer que:

- As temperaturas são classificadas como Baixa de $-\infty$ até 15°C ;
- De 15°C até 20°C , o grau de pertinência das temperaturas diminui no conjunto Baixa e cresce no conjunto Média;
- A única temperatura unicamente classificada como média é 20°C ;
- De 20°C a 25°C , o grau de pertinência da temperatura diminui no conjunto Média e cresce no conjunto Alta;
- De 25°C até ∞ , as temperaturas são classificadas como altas.

Como podemos observar na Figura 5.1, os subconjuntos *fuzzy* são definidos linguisticamente, ou seja, são classificados por nomes. Esta característica de conjuntos fuzzy é denominada por variável lingüística. Uma variável lingüística é representada por termos lingüísticos utilizados no mundo real como “mais ou menos”, “alto”, “não muito”, entre outros. A idéia principal da lógica *fuzzy* é quantificar estas variáveis lingüísticas atribuindo a elas um conjunto limitado de dados que melhor se encaixem nesta classificação. Por esta razão, uma mesma informação pode estar em dois ou mais subconjuntos *fuzzy*, mas com graus de pertinência diferentes. Este processo de classificação lingüística de um dado de entrada para uma variável lingüística é denominado de fuzificação.

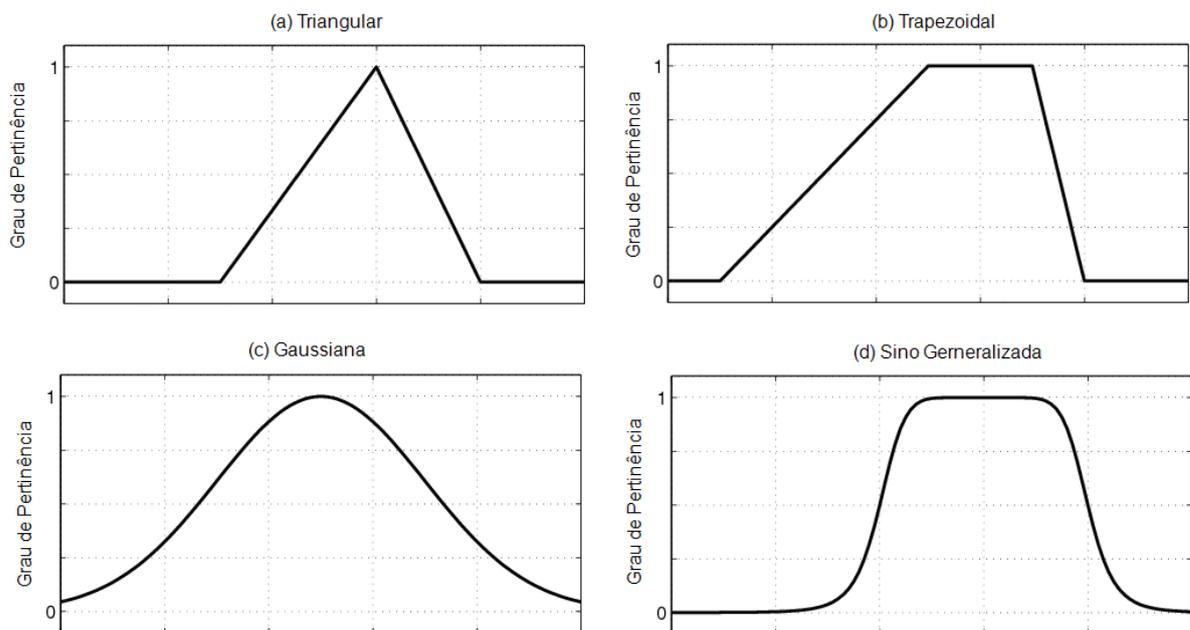
O primeiro passo para a construção de conjuntos *fuzzy* é a definição das variáveis lingüísticas que serão representadas por estas funções de pertinência. Estas variáveis classificarão o valor de entrada em uma ou mais funções de pertinência com graus de pertinência apropriados, ou seja, tenta modelar o valor de entrada no sentido das palavras, tomadas de decisão ou senso comum do ser humano. Alguns exemplos de variáveis lingüísticas utilizadas na nomeação dos conjuntos *fuzzy* são: alto, baixo, quente, frio, muito negativo, muito positivo, etc.

O segundo passo, após definido o tipo de função de pertinência, é a escolha da função de pertinência. Esta escolha vai depender do tipo de variável que se deseja fuzzyficar, da capacidade computacional disponível para o processamento da informação e da aplicação do sistema. As funções não lineares geralmente são mais eficientes para problemas complicados, mas a capacidade computacional exigida por elas é bem maior que a exigida pelas funções lineares. Algumas funções de pertinência mais utilizadas estão descritas na Tabela 5.1 abaixo.

Tabela 5.1 – Funções de pertinência *fuzzy*.

Função Triangular	$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$
Função Trapezoidal	$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$
Função Gaussiana	$\text{gaussmf}(x; a, b, c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$
Função Sino Generalizada	$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left \frac{x-c}{b}\right ^{2b}}$

A Figura 5.2 representa graficamente cada uma das funções de pertinência descritas acima, onde a letra (a) representa a função triangular, a letra (b) representa a função trapezoidal, a letra (c) representa a função gaussiana e a letra (d) representa a função sino generalizada.

Figura 5.2 – Representação gráfica dos tipos de funções *fuzzy*.

Após a construção dos conjuntos *fuzzy*, podemos definir as operações básicas destes conjuntos. Assim como na teoria clássica de conjuntos, os conjuntos *fuzzy* obedecem a certas propriedades e podem ser operados de diversas maneiras. Estas operações são de extrema importância para a construção de sistemas que utilizam a lógica *fuzzy*, pois os cálculos propostos são baseados nessas operações.

A definição matemática para a função de pertinência μ_F de um conjunto *fuzzy* F é uma função:

$$\mu_F: X \rightarrow [0,1] \quad (5.2)$$

onde $\mu_F(x) \in [0,1]$ e $x \in X$.

F é um conjunto *fuzzy* determinado por:

$$F = \{(x, \mu_F(x)) | x \in X\} \quad (5.3)$$

Assim como na teoria clássica de conjuntos, onde algumas operações são definidas, os conjuntos *fuzzy* também possuem operações que os fundamentam, a saber: *complemento*, *união* e *interseção*. Estas três operações são equivalentes as operações *negação*, *ou* e, respectivamente, na lógica booleana.

Considere dois conjuntos A e B em um universo de discurso X , de (5.3) podemos defini-los como:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}, \mu_A(x) \in [0,1] \quad (5.4)$$

$$B = \{(x, \mu_B(x)) | x \in X\}, \mu_B(x) \in [0,1] \quad (5.5)$$

As operações básicas e propriedades dos conjuntos *fuzzy* definidas por (Zadeh, 1965), estão definidas abaixo:

1. A operação de *complemento* dentro da teoria clássica de conjuntos é utilizada para representar os elementos deste conjunto que não pertencem a um subconjunto qualquer contido nele, equivalente a operação de *negação* na lógica booleana, pois pode ser interpretado como todos os elementos do conjunto que não estão contidos num subconjunto A qualquer deste conjunto. Estendendo este conceito para conjuntos *fuzzy*, os elementos estão contidos dentro do intervalo $[0,1]$. Considerando a Figura 5.1, temos que o complemento do subconjunto **Baixa** é o subconjunto **Alta**. Podemos escrever o complemento de conjuntos *fuzzy* como:

$$\mathbf{NOT} A = \neg A = \{(x, \mu_{\neg A}(x)) | x \in X \text{ e } \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)\} \quad (5.6)$$

2. A operação de *união* na teoria clássica de conjuntos é a associação entre dois subconjuntos, ou seja, representa todos os elementos que estão contidos no subconjunto A qualquer e no subconjunto B qualquer, que é equivalente a operação *ou* da lógica booleana, pois pode ser interpretado como o conjunto de elementos que estão contidos *ou* no subconjunto A ou no subconjunto B . Estendendo este conceito para conjuntos *fuzzy*, esta operação é realizada dentro do intervalo $[0,1]$. A Figura 5.2 representa graficamente a união entre os subconjuntos A e B pela região em cinza no

gráfico. A operação de união dos subconjuntos *fuzzy* A e B é definida matematicamente como:

$$A \text{ OR } B = A \cup B = \{(x, \max(\mu_A(x); \mu_B(x))) | x \in X\} \quad (5.7)$$

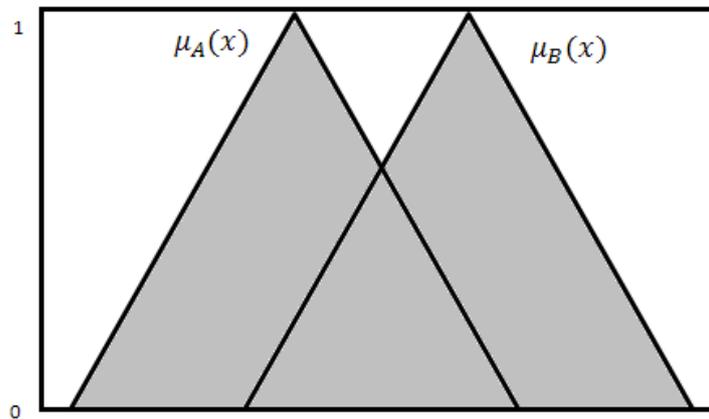


Figura 5.3 – Representação gráfica da operação de união em conjuntos *fuzzy*.

3. A operação de *interseção* é definida na teoria clássica de conjuntos como um conjunto de elementos comuns entre os subconjuntos A e B. Esta operação equivale a operação *e* na lógica booleana, pois pode ser interpretada como os elementos que pertencem ao subconjunto A *e* que também pertencem ao subconjunto B. Estendendo este conceito para a lógica *fuzzy*, esta operação ocorre dentro do intervalo [0,1]. A Figura 5.4 representa graficamente a interseção entre dois subconjuntos *fuzzy* através da região em cinza. A operação de interseção entre subconjuntos *fuzzy* é definido matematicamente como:

$$A \text{ AND } B = A \cap B = \{(x, \min(\mu_A(x); \mu_B(x))) | x \in X\} \quad (5.8)$$

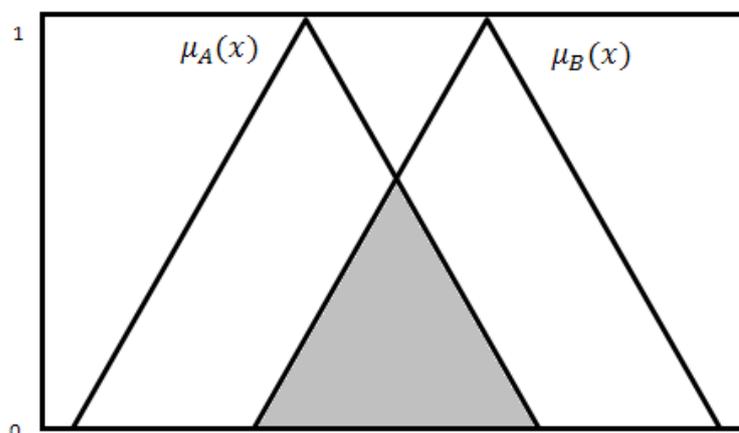


Figura 5.4 – Representação gráfica da operação de interseção em conjuntos *fuzzy*.

4. A operação de *igualdade* é definida matematicamente como:

$$A = B \leftrightarrow (\mu_A(x) = \mu_B(x)), \forall x \in X \quad (5.9)$$

5. A operação de *inclusão* é definida matematicamente como:

$$A \subseteq B \leftrightarrow (\mu_A(x) \leq \mu_B(x)), \forall x \in X \quad (5.10)$$

6. A operação de *diferença* entre os dois conjuntos é o que sobra da interseção desses conjuntos e é definida matematicamente da seguinte maneira:

$$A - B = \{(x, (\mu_{A \cap \neg B}(x))) | x \in X\} \quad (5.11)$$

7. A operação de *idempotência* é definida matematicamente como segue:

$$A \cup A = A \text{ e } A \cap A = A \quad (5.12)$$

8. Nas operações de *identidade*, sejam o conjunto *fuzzy* vazio \emptyset e o universo de discurso X e seus respectivos graus de pertinência 0 e 1, temos:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A \quad A \cap X = A \quad A \cup X = X \quad (5.13)$$

9. A operação de *absorção* é definida matematicamente como:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A \quad (5.14)$$

10. A *comutatividade* é a operação matemática definida como:

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A \quad (5.15)$$

11. Seja C um terceiro conjunto *fuzzy* definido como (5.3), a *associatividade* dos conjuntos *fuzzy* podem ser definidos matematicamente como:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (5.16)$$

12. A *distributividade* dos conjuntos *fuzzy* é definida como:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (5.17)$$

13. O *complemento duplo* é definido matematicamente como:

$$\neg(\neg A) = A \quad (5.18)$$

14. Além das operações acima descritas, a *lei transitiva* é outra operação que pode ser aplicada aos conjuntos, é definida como:

$$\text{Se } A \text{ e } B \text{ são } TM \text{ em } C \rightarrow A \text{ e } B \text{ são } TM \text{ em } C \quad (5.19)$$

15. E finalmente, Zadeh estendeu a *Lei de Morgan* para conjuntos *fuzzy* conforme abaixo:

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B \quad \neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B \quad (5.20)$$

Além dessas operações e propriedades acima descritas, pode-se definir um número de outras formas de combinações de conjuntos *fuzzy* e relações entre eles, como uma adição às operações de *união* e *interseção*.

O *produto algébrico* é uma dessas outras formas e é denotado por AB , definidos em termos das funções de pertinência de A e B pela seguinte relação:

$$\mu_{AB} = \mu_A \mu_B \quad (5.21)$$

onde $AB \subset A \cap B$.

A *soma algébrica* de A e B , outra operação algébrica em conjuntos *fuzzy*, é denotada por $A + B$ e definida por:

$$\mu_{A+B} = \mu_A + \mu_B \leq 1 \quad (5.22)$$

Como podemos ver em (5.22), a soma algébrica de dois conjuntos *fuzzy* só é significativa quando a condição $\mu_A(x) + \mu_B(x) \leq 1$ é satisfeita para todo x .

A *diferença absoluta* entre dois conjuntos *fuzzy* é denotada por $|A - B|$ e é definida por:

$$\mu_{|A-B|} = |\mu_A - \mu_B| \quad (5.23)$$

Combinação convexa de três conjuntos *fuzzy* arbitrários A , B e C , é denotada por $(A, B; C)$ e é definida por:

$$(A, B, C) = CA + \neg CB \quad (5.24)$$

ou, reescrevendo (5.24) em termos das funções de pertinência, temos:

$$\mu_{(A,B;C)}(x) = \mu_C(x)\mu_A(x) + [1 - \mu_C(x)]\mu_B(x), \quad x \in X \quad (5.25)$$

Uma propriedade básica da *combinação convexa* em (5.24) e (5.25) é definida por:

$$A \cap B \subset (A, B; C) \subset A \cup B \quad \text{para todo } C \quad (5.26)$$

Esta propriedade é uma conseqüência imediata das desigualdades abaixo:

$$\min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \leq \lambda\mu_A(x) + (1 - \lambda)\mu_B(x) \leq \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad x \in X \quad (5.27)$$

que são válidos para todo λ em $[0,1]$. Pode-se observar que se encontrarmos um conjunto *fuzzy* D que satisfaça $A \cap B \subset D \subset A \cup B$, então este conjunto é $D = (A, B; C)$.

A relação é definida com um conjunto de pares ordenados em conjuntos ordinários. Estendendo este conceito para o contexto de conjuntos *fuzzy*, uma *relação fuzzy* no universo de discurso X é um conjunto *fuzzy* no espaço do produto $X \times X$. Para exemplificar, consideremos uma relação denotada por $x \gg y$, $x, y \in R^1$, então, esta relação pode ser considerada como um conjunto A em R^2 , com função de pertinência, $\mu_A(x, y)$, tendo os seguintes valores representativos: $\mu_A(10,5) = 0$, dentre outros. Desta forma, podemos ter n -ésimas relações *fuzzy*, com funções de pertinência do tipo $\mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $x_i \in X$ e $i = 1, 2, \dots, n$.

Para os *conjuntos fuzzy induzidos por mapeamento*, seja T um mapeamento de X para um espaço Y e, sendo B um conjunto *fuzzy* em Y com função de pertinência $\mu_B(y)$, o

mapeamento inverso T^{-1} que induz a um conjunto *fuzzy* A em X , então a função de pertinência deste conjunto é definida como:

$$\mu_A(x) = \mu_B(y) \quad (5.28)$$

para todo x em X que seja mapeado por T em y .

Após as definições das operações e propriedades dos conjuntos *fuzzy*, o segundo passo para a construção de um sistema baseado em lógica *fuzzy* é a construção das regras *fuzzy*. As regras *fuzzy* são utilizadas para operar, de forma correta, os conjuntos *fuzzy*, com o objetivo de obter outros conjuntos como uma consequência dos anteriores. Este processo de criação das regras *fuzzy* parte de um raciocínio coerente com o que o projetista deseja manusear e obter. Este raciocínio pode ser dividido em duas partes: avaliar o antecedente da regra e aplicar o resultado consequente.

A forma de se expressar o conhecimento sobre os conjuntos *fuzzy* e o que se pretende obter é por meio de regras do tipo condição-ação. Essas condições formam um conjunto que descrevem as parcelas das possíveis saídas do processo e que estão associadas a uma ação que, no caso de um controle de temperatura por exemplo, irá controlar a temperatura de um ambiente a níveis desejados. Este conhecimento, representado na lógica *fuzzy* por meio de variáveis linguísticas associadas às entradas e/ou saídas do sistema.

As regras *fuzzy* são do tipo *se-então-senão*, que são frequentemente utilizadas em controladores *fuzzy*. Por exemplo:

se x é alto, então x é pesado

Nos casos em existem diversos variáveis a serem analisadas, outro operador pode ser incluído nas regras, ou seja, nos casos em que existam vários consequentes. No caso em que o operador utilizado como o elemento de ligação entre os consequentes seja *e* ou AND, o método de combinação escolhido deve garantir um resultado que não ultrapasse o valor de menor pertinência. No caso em que o operador utilizado como elemento de ligação entre os consequentes seja *ou* ou OR, o método de combinação escolhido deve garantir um resultado que não seja menor que o maior grau de pertinência.

Um importante passo para a construção de sistemas baseados em lógica *fuzzy* é a escolha do *modelo de inferência*. A *inferência fuzzy* é um processo que avalia as entradas, a partir das regras previamente definidas e das entradas de informações, para obter conclusões já definidas nos conjuntos *fuzzy*. Esta escolha envolve o tipo de problema a ser resolvido, para que se obtenha um melhor processamento das informações. O processo de *inferência fuzzy* inclui todas as partes que foram descritas anteriormente: conjuntos *fuzzy*, funções de pertinência, operações lógicas e as regras *fuzzy*.

Existem vários métodos de inferência, mas dois deles são os mais utilizados em sistemas de controle, o método tipo Mamdani e o método tipo Sugeno. Estes sistemas de inferência têm sido aplicados com sucesso em áreas como: controle automático, classificação de dados, análises decisão, sistemas experientes e visão computacional.

Devido a sua natureza multidisciplinar, os sistemas de *inferência fuzzy* são conhecidos por outros nomes, tal como sistemas de base de regras *fuzzy*, sistemas experientes *fuzzy*, modelagem *fuzzy*, memória associativa *fuzzy*, controlador por lógica *fuzzy* e simplesmente sistemas *fuzzy*.

O método de inferência *fuzzy* Mamdani é o mais comumente usado na metodologia *fuzzy* e está entre os primeiros sistemas de controle projetados utilizando a teoria de conjuntos *fuzzy*. Foi proposto pelo professor Ebrahim Mamdani da Universidade de Londres em 1975 como uma tentativa de controlar uma máquina a vapor e uma caldeira utilizando a síntese de um conjunto de regras de controle lingüístico obtido a partir de operadores humanos experientes. Seu método de inferência surgiu a partir de outro trabalho de Zadeh, que em 1973 publicou outro artigo onde desenvolveu um algoritmo *fuzzy* para sistemas complexos e processos de tomada de decisão.

O processo de raciocínio na construção desse sistema é dividido em quatro partes: fuzificação, avaliação das regras *fuzzy*, agregação das regras *fuzzy* e, defuzificação. As funções de pertinência neste método, assim como na entrada, são conjuntos *fuzzy*. Depois do processo de agregação de regras *fuzzy*, existe um conjunto *fuzzy* para cada variável de saída e que precisa passar pelo processo de defuzificação.

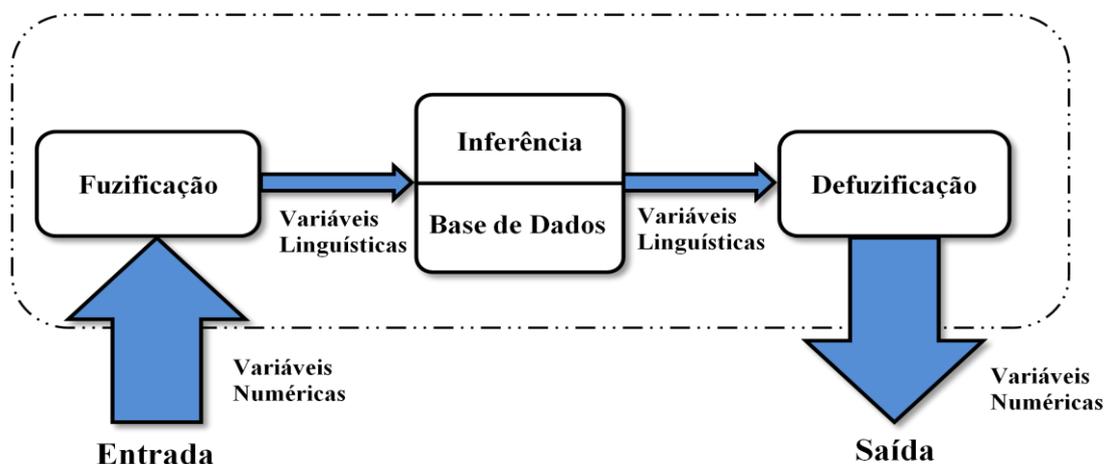


Figura 5.5 – Arquitetura de um sistema *fuzzy*.

Na Figura 5.5 temos a arquitetura de um sistema *fuzzy*. Como podemos observar, o fluxo de informação parte da esquerda para a direita e o sistema possui a entrada de variáveis numéricas e a saída, também de variáveis numéricas. Em sistema *fuzzy* as regras têm natureza paralela, o que é uma vantagem com relação a sistemas que alternam entre os modos baseados em pontos de interrupção, fazendo com que a lógica flua sem problemas de regiões onde o comportamento do sistema é dominado por uma regra ou por outra regra.

A arquitetura de um sistema *fuzzy* pode ser dividida em cinco partes: definição das variáveis de entrada, fuzificação das variáveis de entrada, seleção dos conjuntos de pertinência das variáveis saída do sistema, aplicação do processo de inferência utilizando a base de regras, e defuzificação. As etapas para o projeto de um sistema *fuzzy* como e exemplo da Figura 5.5, serão descritos abaixo.

A entrada da arquitetura são números medidos ou tomados, que devem estar contidos dentro de um intervalo pré-definido, essencial para a próxima etapa da arquitetura. Alguns exemplos de entradas de sistemas *fuzzy* são: a altura de uma pessoa, a tensão de entrada de um motor, uma nota de qualificação de serviço, etc.

O módulo de fuzificação é a etapa na qual as variáveis lingüísticas são definidas e com elas, suas funções de pertinência cujas mais usuais podem ser visualizadas na Figura 5.2. É nesta etapa que a análise do problema é realizada. Este módulo executa duas funções:

- Executa uma transformação escalar, mapeando os valores físicos das variáveis de estado (entrada) correntes do processo e a variável de saída do controlador para um universo de discurso *normalizado*, quando o domínio usado não é normalizado, a normalização da entrada e saída não são necessários;
- Executa o processo de fuzificação propriamente dito, que converte um ponto apropriado (*crisp*), que é o valor corrente de uma variável de estado em um conjunto *fuzzy*.

O módulo de base de dados e a base de regras fazem parte da base de conhecimento de um sistema de controle por lógica *fuzzy*. É este módulo que fornece a informação necessária para o bom funcionamento do módulo de fuzificação, o módulo de base de regras e o módulo de defuzificação. Estas informações são:

- Conjuntos *fuzzy*, representados pelas funções de pertinência, e definem o significado lingüístico das variáveis de estado do processo e também as variáveis de saídas de controlador;

- Os domínios físicos e suas normalizações complementares juntos com os fatores de normalização/desnormalização.

O módulo de base de regras, que também faz parte da base de dados, é formado por regra antecedente e regra conseqüente para cada regra. Nesta etapa, as proposições são definidas e depois examinadas paralelamente, não havendo necessidade de serem escritas em uma seqüência. O projeto da base de regras incluem os seguintes passos:

- Seleção dos estados e variáveis de saída do controlador;
- Seleção do conteúdo de regras antecedentes e de regra conseqüente;
- Seleção dos conjuntos de termos para os estados do sistema e para as variáveis de saída do controlador;
- Derivação do conjunto de regras.

As proposições ou regras podem ser condicionais ou não condicionais e são do tipo:

$$\begin{array}{ll} \textit{if W is Z then X is Y} & \textit{Proposição Condicional} \\ \textit{X is Y} & \textit{Proposição Não – Condicional} \end{array}$$

O módulo de inferência executa o cálculo de todos os valores da variável de saída do controlador baseado na contribuição de cada regra da base de regras. Nesta etapa, o método da implicação é utilizado para obter as regiões geradas por cada regra fuzzy. Existem dois operadores para o método de implicação: AND, com *min* (mínimo) ou com *prod* (produto) e; OR, com *max* (máximo) ou *probor* (OR probabilístico). Após a aplicação do método de implicação, uma região resultante de todas as regiões de cada regra é obtida pelo método da agregação. Este método calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente. O método de agregação é acumulativo, tornando verdadeira a afirmação feita anteriormente de que a ordem em que as regras são executadas, ou projetadas, é irrelevante. Existem três métodos de agregação comumente utilizados: *max* ou máximo, *probor* ou probabilidade OR e *sum* ou soma de cada conjunto de saída.

O módulo de defuzificação transforma as variáveis lingüísticas da saída da inferência em variáveis numéricas, ou variáveis físicas. É esta saída que será utilizada para um controle ou uma tomada de decisão. Este módulo executa as seguintes funções:

- Executa a defuzificação propriamente dita, convertendo o conjunto de valores de saída modificados para um valor apropriado;
- Executa a desnormalização, que mapeia os valores de saída obtidos pela inferência para um domínio físico, novamente, esta etapa só é necessária se o domínio utilizado for normalizado.

Os métodos de defuzificação da região final obtida do módulo de inferência mais conhecidos são: o cálculo do centróide, bissetriz, média de máximo (media do valor máximo da região de saída), maior do máximo e menor do máximo.

Atualmente, diversas pesquisas envolvendo lógica *fuzzy* são desenvolvidas por pesquisadores de todo o mundo. Dentre os países que mais utilizam a lógica *fuzzy* podemos citar em especial o Japão, por ser um dos países mais avançados em robótica e inteligência artificial, que utiliza em seu dia a dia industrial e comercializa produtos com esta tecnologia.

Apesar de algumas dificuldades de modelagem do sistema de inferência *fuzzy* citado inicialmente, atualmente a lógica *fuzzy* tem sido muito utilizada em combinação com diversos outros tipos de sistemas inteligentes, de controle e de otimização. Alguns exemplos destes sistemas são: redes neurais, algoritmos genéticos, ou ainda como uma otimização de sistemas de controle por modo deslizante.

5.3. METODOLOGIA DE CONTROLE POR LÓGICA FUZZY

Apesar da facilidade de entender e projetar controladores baseados na lógica *fuzzy* a utilização deste método de controle, em sua forma convencional, em sistemas multi-variáveis tem um grande problema conhecido como “explosão de regras”. Visto que o número de regras depende da quantidade de variáveis de entrada e do número de funções de pertinência de entrada e de saída, o número de regras necessárias para um sistema é obtido da seguinte relação:

$$N_R = x^n \quad (5.29)$$

onde N_R é o número de regras, x é a quantidade de conjuntos *fuzzy* e n é o número de entradas do sistema *fuzzy*.

Para sistemas de pêndulos invertidos articulados sobre um carro, onde o número mínimo de variáveis de estado em espaço de estado é quatro, considerando um número mínimo de cinco conjuntos *fuzzy*, a quantidade de regras atingiria um número de 625 regras. Para o duplo pendulo invertido sobre um carro que possui seis variáveis de estado em espaço de estados, utilizando a mesma quantidade de conjuntos *fuzzy*, teríamos a quantidade de 15625 regras *fuzzy*. Além da dificuldade de implementação, uma quantidade tal elevada de regras *fuzzy* aumentaria muito o custo computacional e tornaria inviável uma aplicação real do sistema de controle.

Para resolver o problema de “explosão de regras”, diversos autores como (Fuyan *et al*, 1996; Hong *et al*, 2007 e Qing-Rui *et al*, 2008) optaram por reduzir o número de entradas do controlado *fuzzy* utilizando uma composição das variáveis de estado de sistemas de pêndulos invertidos. E mais recentemente, (Sun e Sun, 2009) resolveu este mesmo problema com vários blocos de sistemas de controle *fuzzy* cascateados com duas entradas cada um.

Por simplicidade, um controlador *fuzzy* será projetado para o duplo pêndulo invertido sobre um carro pela composição das variáveis de estado em duas novas variáveis que servem de parâmetros de entrada.

A primeira etapa do projeto deste controlador *fuzzy* é a definição das variáveis de estado que irão compor cada variável de entrada do sistema de controle. O importante nesta escolha é poder definir conjuntos *fuzzy* que permitam englobar todas as variáveis de estado que compõem uma determinada variável de entrada. Assim sendo, o significado físico é a informação mais coerente para a definição das variáveis de entrada do sistema.

Para o duplo pêndulo invertido sobre um carro, observamos que as variáveis de estados podem ser divididas em dois parâmetros físicos: velocidade e posição. A primeira nova variável de entrada será uma composição das posições do sistema, conforme definido abaixo:

$$x_1 = a_1x + a_2\theta_1 + a_3\theta_2 \quad (5.30)$$

Seguindo o mesmo raciocínio da primeira, a segunda nova variável de entrada do sistema de controle será definida conforme abaixo:

$$x_2 = a_4\dot{x} + a_5\dot{\theta}_1 + a_6\dot{\theta}_2 \quad (5.31)$$

onde a_i é uma constante de ganho com $i = 1, \dots, 6$.

Definidas as variáveis de entrada do controlador, o próximo passo é a definição dos ganhos de cada variável de estado. Uma forma simples de determinar o valor desses ganhos é através da matriz de realimentação de estado definida em (4.3) e calculada pelo método do regulador linear quadrático, definido na seção 4.3, a fim de se obter um melhor resultado.

Substituindo a matriz de realimentação de estados ótima (4.14) nas equações (5.30) e (5.31) temos:

$$x_1 = 200x - 1238.6\theta_1 + 669.459\theta_2 \quad (5.32)$$

$$x_2 = 156.3017\dot{x} - 31.0251\dot{\theta}_1 - 47.5357\dot{\theta}_2 \quad (5.33)$$

Definindo o carro como variável principal a ser controlada, as equações (5.32) e (5.33) são transformadas para (5.34) e (5.35) respectivamente:

$$x_1 = x - 6.193\theta_1 + 3.3473\theta_2 \quad (5.34)$$

$$x_2 = \dot{x} - 0.1985\dot{\theta}_1 - 0.3041\dot{\theta}_2 \quad (5.35)$$

A última etapa do projeto deste controlador é a definição das funções de pertinência com seus universos de discurso para x_1 , x_2 e u , e a composição das regras *fuzzy*. Para este sistema, definiremos sete funções de pertinência, que dará um total de 49 regras de controle para o duplo pêndulo invertido sobre um carro. As sete funções de pertinência são triangulares e tem os seguintes significados lingüísticos: muito negativo (NB), médio negativo (NM), pequeno negativo (NS), zero (ZO), pequeno positivo (PS), médio positivo (PM) e muito positivo (PB). Na Tabela 5.2 temos a composição das regras de forma resumida.

Tabela 5.2 – Conjunto de Regras *fuzzy*.

x_2 x_1	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	ZO
NM	NB	NB	NM	NM	NS	ZO	ZO
NS	NB	NM	NM	NS	ZO	ZO	PS
ZO	NM	NS	NS	ZO	PS	PS	PM
PS	NS	ZO	ZO	PS	PM	PM	PB
PM	ZO	ZO	PS	PM	PM	PB	PB
PB	ZO	OS	PM	PB	PB	PB	PB

Abaixo está o modelo no *simulink* para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro sob a ação do controlar *fuzzy*, Figura 5.6.

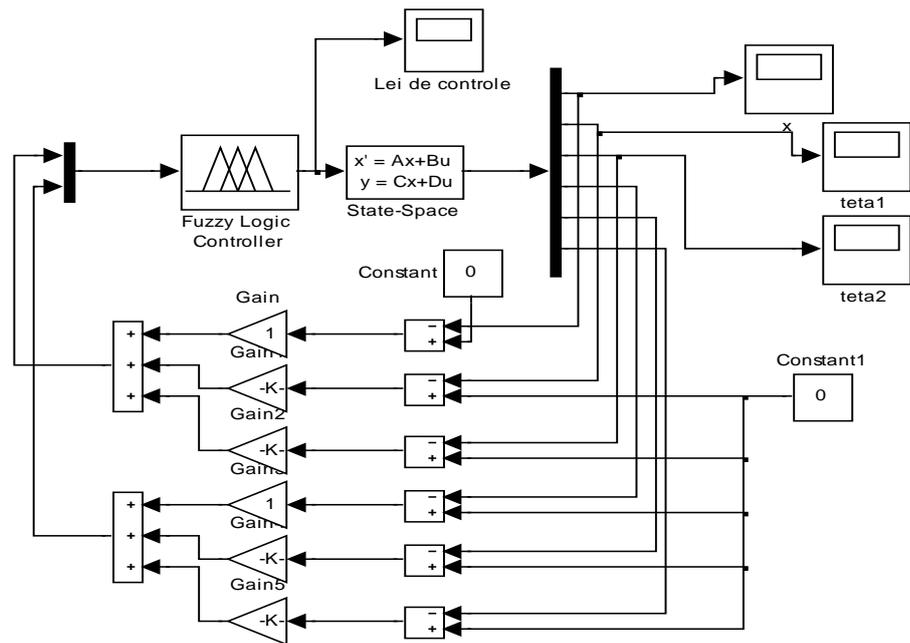


Figura 5.6 – Modelo no Simulink do controlador *fuzzy*.

Os resultados de simulações para o sistema da Figura 5.6 são mostrados nas figuras seguintes. Uma característica peculiar deste controlador é o elevado custo computacional que tem como consequência o lento processamento do mesmo.

A Figura 5.7 apresenta a ação do controlador por lógica *fuzzy*, que apresenta picos elevados no início de sua atuação e pequenos picos até por volta de 16s, tempo em que o sistema como um todo é estabilizado.

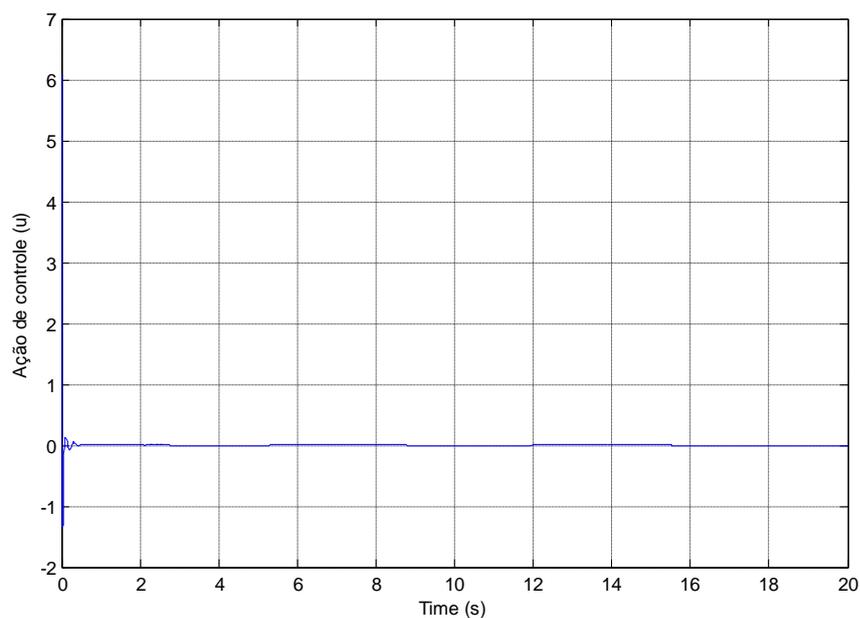


Figura 5.7 – Ação de controle *fuzzy* do sistema.

A Figura 5.8 apresenta o deslocamento do carro sob a ação do controlador por lógica *fuzzy*. A trajetória desta variável de estado é estabilizada em torno de 16s, mas apresenta variações muito pequenas, da ordem de 10^{-3} .

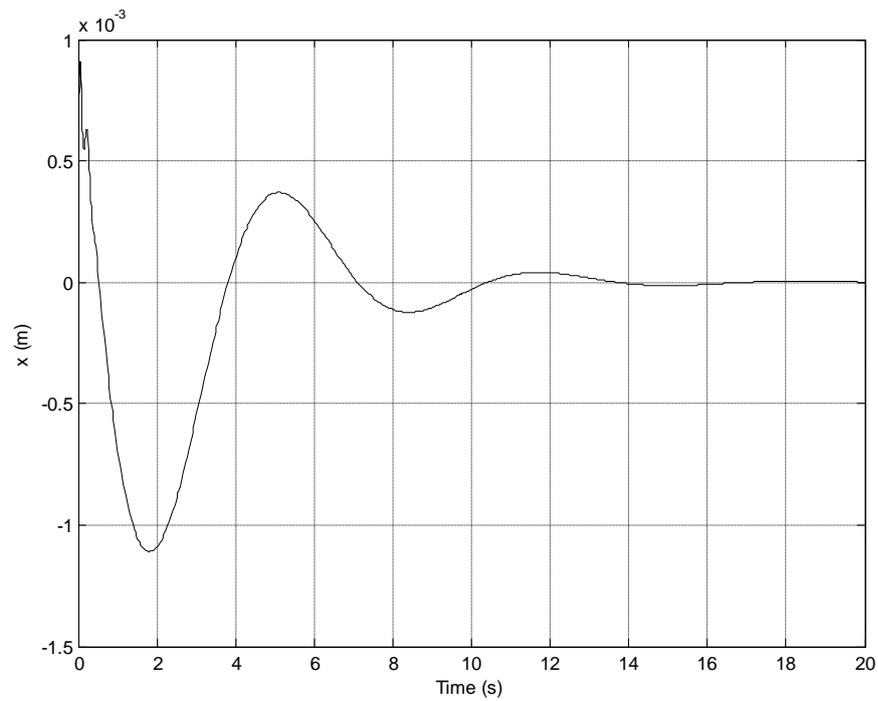


Figura 5.8 – Deslocamento do carro sob ação do controlador *fuzzy*.

A Figura 5.9 apresenta o movimento angular do pêndulo inferior sob a ação do controlador por lógica *fuzzy*. Esta variável é estabilizada em 9s, com variações também muito pequenas.

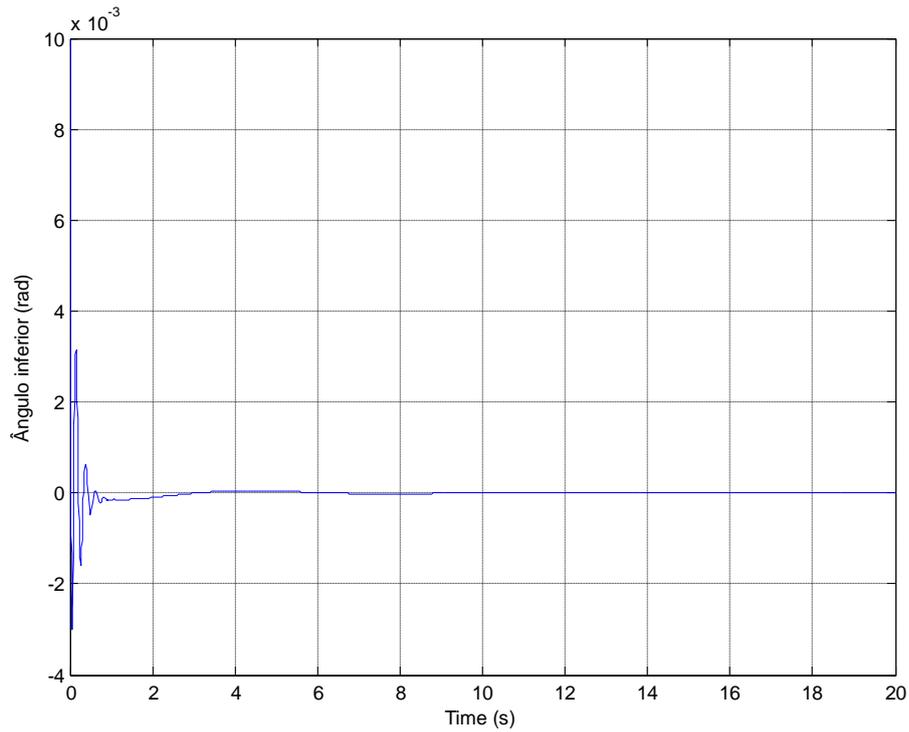


Figura 5.9 – Deslocamento do pêndulo inferior sob ação do controlador *fuzzy*.

A Figura 5.10 apresenta o deslocamento angular do pêndulo superior sob a ação do controlador por lógica *fuzzy*. Esta variável de estado estabiliza em 9s, com pequenas variações.

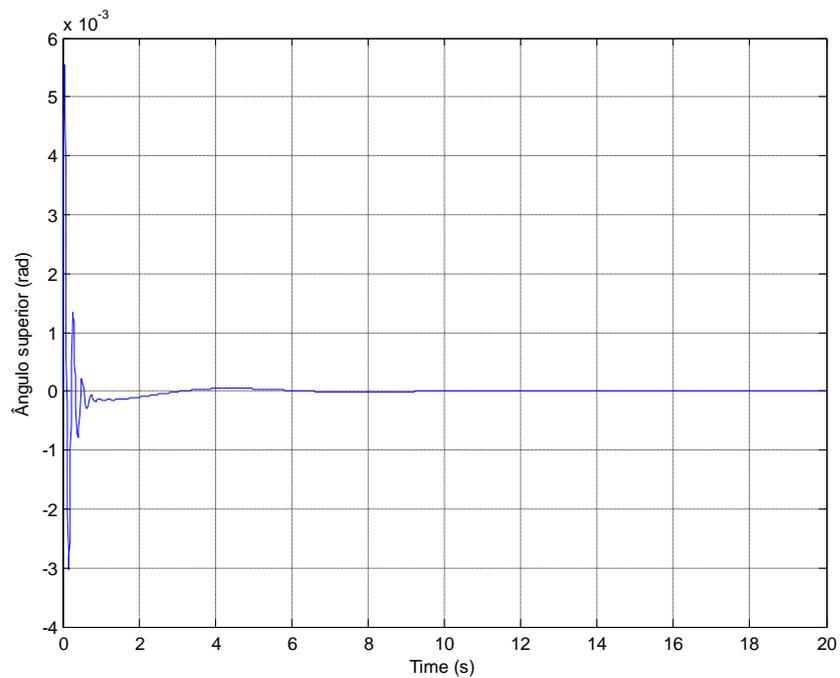


Figura 5.10 – Deslocamento do pêndulo superior sob ação do controlador *fuzzy*.

CAPÍTULO 6

CONTROLADOR POR MODO DESLIZANTE

6.1. INTRODUÇÃO

Historicamente a análise e o método de projeto para controladores por modo deslizante, começa com algumas publicações por volta do ano de 1930, estas possuem idéias semelhantes a este tipo de controlador (Utkin *et al*, 1999). Estas publicações apresentam a idéia de controle por vibração de Kulebakin, que utiliza realimentação descontínua e um chaveamento de alta frequência, características do controle por modo deslizante. Todos estes trabalhos foram desenvolvidos na antiga União Soviética.

Em 1955, Tsyarkin também da Rússia, publicou um trabalho sobre sistemas de controle utilizando a teoria de relé, que apresenta um funcionamento similar ao controle realizado por controladores por modo deslizante.

Mas foi em 1970 que Emelyanov e outros autores, da Rússia, publicaram um trabalho pioneiro sobre sistemas de controle utilizando a teoria de estrutura variável, que é a base para o desenvolvimento de controle por modo deslizante. Mas foi a partir da publicação do livro de Itkin em 1976 e da pesquisa de Utkin em 1977, publicados em inglês, que os sistemas de controle baseados em estrutura variável ultrapassaram as fronteiras da Rússia, tornando-se um assunto de interesse por pesquisadores de todo o mundo (Edwards e Spurgeon, 1998).

Sistemas de estrutura variável é um conjunto de subsistemas contínuos em conjunto com uma lógica de comutação adequada (Utkin, 1977). Em seu trabalho, Utkin define os modos deslizantes, suas propriedades e vantagens.

Um das principais características do sistema de controle por modos deslizantes é a natureza descontínua da ação de controle, que tem como termo adicional uma função de chaveamento, que leva a sistemas com diversas estruturas distintas a um movimento, que foi nomeado de modo deslizante em (Emelyanov, 1970 e; Itkins, 1976).

O controle por modos deslizantes atua no sistema a ser controlado levando as variáveis de estado a uma linha ou superfície de deslizamento que, uma vez alcançada, torna o desempenho do sistema insensível às incertezas do sistema e a distúrbios externos e essa é a principal vantagem deste sistema de controle. A eficiência e robustez deste sistema de

controle foram suficientes para torná-lo alvo de interesse de pesquisadores, com diversas publicações recentes da aplicação deste método de controle em sistemas não lineares de ordem elevada com incertezas (dinâmicas não modeladas e incertezas paramétricas).

Contudo, o controlador por modo deslizante apresenta como principal desvantagem o surgimento do fenômeno de *chattering*, consequência da função de chaveamento do sistema. Outro problema peculiar a aplicação deste método de controle a sistemas sub-atuados, como o duplo pêndulo invertido sobre um carro, é a dificuldade em projetar as superfícies deslizantes, pois os parâmetros das mesmas não podem ser obtidos diretamente pela condição de Hurwitz (Dianwei *et al*, 2006).

A teoria de controle por modos deslizantes pode ser encontrada no projeto de reguladores robustos, sistemas adaptativos, sistemas de rastreamento, observadores de estado, sistemas de detecção de falhas, dentre outros (Mahjoub *et al*, 2009). Devido a esta sua versatilidade, este controlador é utilizado em problemas diversos como controle automático de vôo, controle de motores elétricos, processos químicos, sistemas de estabilidade de helicópteros, sistemas espaciais, manipuladores robóticos e outras aplicações.

6.2. FUNDAMENTOS DO CONTROLADOR POR MODO DESLIZANTE

A diferença entre controladores baseados em sistemas de estrutura variável e os demais é a mudança na estrutura de controle, ou seja, mudar sempre que necessário para outra função continua de estados dentro de um conjunto de funções de estado projetadas. O problema do projeto de estrutura variável é a seleção dos parâmetros de cada estrutura e definir a lógica de comutação.

A complexidade desta mudança estrutural é justificável pela vantagem de extração das propriedades úteis de cada estrutura para compor o deslizamento desejado. Além desta vantagem, um sistema com estrutura variável pode apresentar novas propriedades que podem até não ser encontrada nas estruturas que o compõe, quando analisadas separadamente. Um exemplo bem simples disso são sistemas assintoticamente estáveis composto por estruturas em que nenhuma seja assintoticamente estável.

Para ilustrar esta vantagem de sistemas com estrutura variável, vamos considerar o seguinte sistema de segunda ordem:

$$\ddot{x} = u \quad (6.1)$$

Utilizando a lei de controle de realimentação de estados (4.3), temos:

$$u = -kx \quad (6.2)$$

onde k é um escalar estritamente positivo.

Vamos analisar o resultado do movimento em malha-fechada através do plano de fases, que é o gráfico da velocidade pela posição. Substituído (6.2) em (6.1) e multiplicando ambos os lados por \dot{x} , obtemos:

$$\dot{x}\ddot{x} = -k\dot{x}x \quad (6.3)$$

Integrando ambos os lados de (6.3), obtemos a relação entre a velocidade e a posição que precisamos para gerar o plano de fases:

$$\dot{x}^2 + kx^2 = c \quad (6.4)$$

onde c é a constante de integração e, neste caso, é estritamente positivo.

A constante k pode assumir duas estruturas definidas por $k = k_1$ e $k = k_2$, onde $0 < k_2 < 1 < k_1$.

O plano de fase das duas estruturas do sistema (6.1) é apresentado na Figura 6.1, (a) e (b), abaixo:

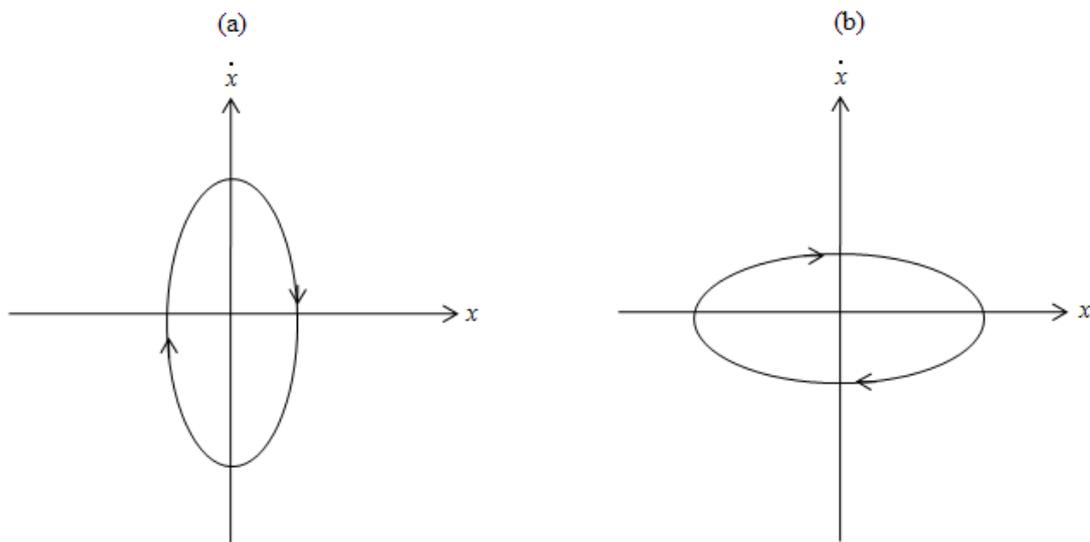


Figura 6.1 – Plano de Fases de Duas Estruturas do Sistema de Estrutura Variável.

O plano de fases das duas estruturas do sistema de estrutura variável representado na equação (6.1) possuem a forma de elipse, exceto para $k = 1$ onde assume a forma de um círculo de raio \sqrt{c} . As duas estruturas vistas separadamente não garantem a estabilidade assintótica do sistema da equação (6.1). Mas se analisarmos as propriedades dos dois planos de fase acima, podemos concluir que:

- O primeiro e o terceiro quadrantes do plano de fase da estrutura (a) faz em um percurso menor para atingir a origem do eixo vertical;
- O segundo e o quarto quadrantes do plano de fase da estrutura (a) faz em um percurso maior para atingir a origem do eixo horizontal;
- O primeiro e o terceiro quadrantes do plano de fase da estrutura (b) faz em um percurso maior para atingir a origem do eixo vertical, e;
- O segundo e o quarto quadrantes do plano de fase da estrutura (b) faz em um percurso menor para atingir a origem do eixo horizontal.

De posse dessas informações, podemos projetar uma lógica de chaveamento alternando entre essas duas estruturas de modo que a estabilidade assintótica do sistema (6.1) seja atingida. A seguinte lei de controle foi selecionada com base nessas informações:

$$u = \begin{cases} k_1 & \text{se } x\dot{x} \geq 0 \\ k_2 & \text{se } x\dot{x} < 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

A Figura 6.1 abaixo mostra o plano de fases do sistema da equação (6.1) após a implantação da lógica de chaveamento (6.5). Analisando a lógica de chaveamento, no primeiro e no terceiro quadrante a estrutura selecionada é a estrutura visualizada na Figura 6.1 (a) e no segundo e terceiro quadrante, a estrutura selecionada é a visualizada na Figura 6.1 (b). Devido a condição $k_1^2 > k_2^2$, a lógica de chaveamento selecionada leva o sistema à estabilidade assintótica, combinando as duas estruturas apresentadas. Observando a Figura 6.2, que mostra o plano de fases do sistema com controle de estrutura variável, vemos que sua forma lembra uma espiral e leva o sistema a uma estabilidade assintótica.

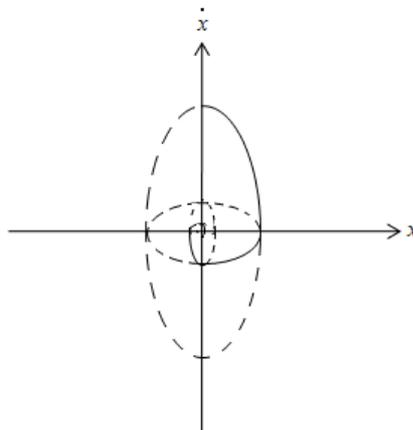


Figura 6.2 – Plano de Fases do Sistema de Estrutura Variável.

Analisando este exemplo de uma maneira mais formal, vamos considerar a seguinte função:

$$V(x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2 \quad (6.6)$$

do teorema de Pitágoras, esta função representa o quadrado da distancia do ponto (x, \dot{x}) para a origem no plano de fases ou ainda, da função candidata de Lyapunov, representa a energia do sistema.

Derivando (6.6) no tempo, temos:

$$\dot{V} = 2\dot{x}x + 2\ddot{x}\dot{x} \quad (6.7)$$

e substituindo (6.1) em (6.7), temos:

$$\dot{V} = 2\dot{x}(x + u) = \begin{cases} 2x\dot{x}(1 - \alpha_1) & \text{se } x\dot{x} > 0 \\ 2x\dot{x}(1 - \alpha_2) & \text{se } x\dot{x} < 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Por (6.7), notamos que a distância da origem é sempre negativa. Esta observação é semelhante à anterior feita de forma intuitiva. Novamente, comprovamos que a simples introdução da lógica de chaveamento entre as duas estruturas de controle, independente de serem ou não estáveis, produz uma estabilidade assintótica no sistema de malha-fechado obtido.

Baseado na teoria de estruturas de controle variada acima exemplificada, o controlador por modo deslizante será desenvolvido abaixo.

O controlador por modos deslizantes utiliza a mesma mudança estrutural, dentro de estruturas pré-definidas, na lei de controle. A diferença a introdução da superfície ou linha de chaveamento. É esta superfície de chaveamento que vai determinar que estrutura será utilizada em um dado ponto (x, \dot{x}) no plano de fases.

Para esclarecer o conceito de modo deslizante, consideremos o seguinte o mesmo sistema do exemplo anterior em (6.1). a lei de controle selecionada agora é dada por:

$$u = \begin{cases} -1 & \text{se } s(x, \dot{x}) > 0 \\ 1 & \text{se } s(x, \dot{x}) < 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

onde s é a função de chaveamento definida por:

$$s(x, \dot{x}) = mx + \dot{x} \quad (6.10)$$

onde m é um escalar positivo projetado. Neste caso, é a função de chaveamento (6.10) que definirá que estrutura de controle será usada no ponto (x, \dot{x}) no plano de fases.

Nos controladores por modos deslizantes, a lei de controle (6.9) é habitualmente definida como:

$$u = -\text{sign}(s) \quad (6.11)$$

Em (6.11) sign é a função sinal definida conforma abaixo (Ji-Chang e Ya-Hui, 1998), e visualizada na Figura 6.3.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

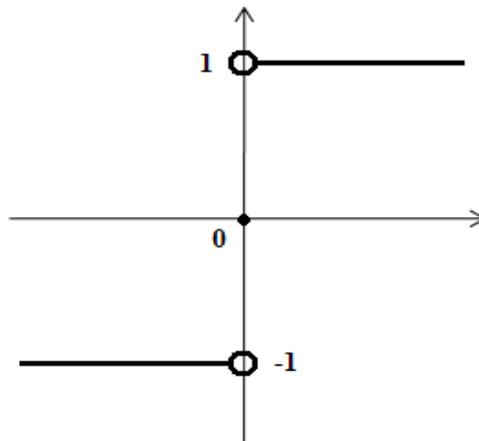


Figura 6.3 – Função Sinal.

A função sinal tem uma propriedade que será muito útil na análise estabilidade do controlador por modo deslizante, tal propriedade é definida como:

$$s \text{ sign}(x) = |s| \quad (6.13)$$

De posse da função de chaveamento em (6.10), a Figura 6.4 mostra graficamente o plano de fases para o sistema com valores maiores para \dot{x} no plano de fases. A linha pontilhada representa o conjunto de pontos para qual $s(x, \dot{x}) = 0$, neste caso a linha passa pela origem do gradiente $-m$.

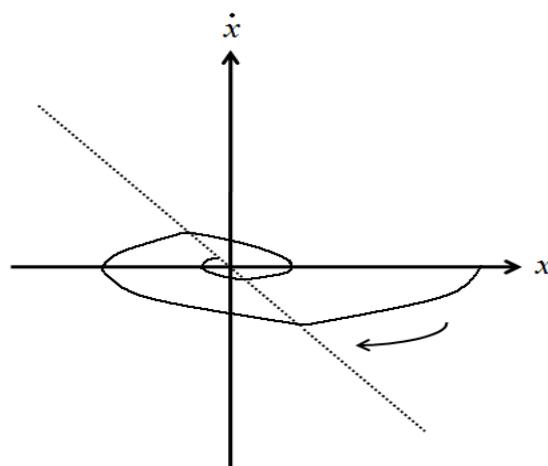


Figura 6.4 – Plano de Fases do Sistema com Linha de Chaveamento.

Os valores de \dot{x} satisfazem a inequação $m|\dot{x}| < 1$, logo:

$$s\dot{s} = s(m\dot{x} + \ddot{x}) = s(m\dot{x} - \text{sign}(s)) < |s|(m|\dot{x}| - 1) < 0 \quad (6.14)$$

ou, equivalentemente:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (6.15)$$

Isto nos leva a concluir que, quando $m|\dot{x}| < 1$ a trajetória do sistema em cada lado da linha pontilhada é dada como:

$$\mathcal{L}_s = \{(x, \dot{x}) : s(x, \dot{x}) = 0\} \quad (6.16)$$

e sempre apontam para a linha.

A frequência com que ocorre a mudança de estrutura de controle é alta e sempre que a trajetória do sistema cruzar a linha \mathcal{L} , ocorrerá este chaveamento. Esta frequência de chaveamento, que é refletida no movimento do sistema, é conhecida como *chattering*. Em uma situação ideal, se a frequência de chaveamento é infinita, então a trajetória do sistema, após atingir a linha \mathcal{L} , permanecerá sobre esta linha. Se o movimento permanece na linha \mathcal{L} , então a condição $s(x, \dot{x}) = 0$ é satisfeita e, é definida como:

$$\dot{x} = -mx \quad (6.17)$$

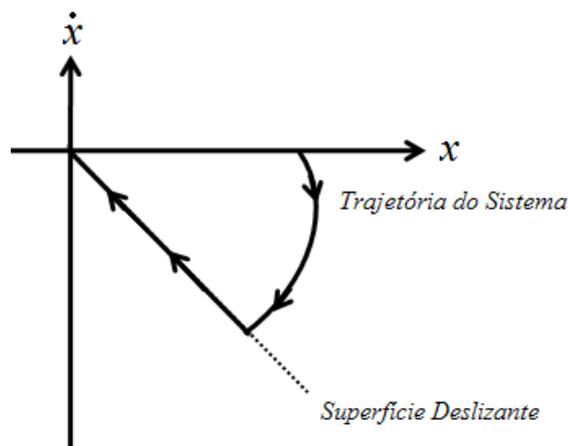


Figura 6.5 – Plano de Fase de um movimento deslizante.

A Figura 6.5 apresenta as trajetórias deslizando ao longo da linha \mathcal{L}_s em direção a origem. Este comportamento dinâmico é descrito como *modo deslizante ideal* ou *movimento deslizante ideal* e a linha \mathcal{L}_s é denominado como a *superfície de deslizamento*. A ação de controle no sistema de malha-fechada tem o objetivo de garantir que as condições dadas em (6.15) sejam satisfeitas, o que é suficiente para garantir que $s(x, \dot{x}) = 0$ seja satisfeito.

A condição imposta por (6.15) é mais frequentemente encontrada como em (6.17), e é conhecida como a *condição de alcançabilidade*.

$$s\dot{s} < 0 \quad (6.18)$$

Analisando o sistema de controle com estrutura variável com modos deslizantes a partir deste exemplo dado podemos afirmar que:

a lei de controle do sistema apenas garante que a *condição de alcançabilidade* seja satisfeita;

- a função de chaveamento com os seus parâmetros, neste exemplo m , determina a performance da resposta;
- e durante o movimento de deslizamento, o sistema comporta-se como um sistema de ordem reduzida, aparentemente independente do controlador.

Os exemplos acima comprovam as características que tornam o controlador por modos deslizantes atrativos. Nas seções anteriores, o sistema utilizado como base para os controladores era linear e as incertezas paramétricas foram desprezadas também por questões de linearidade. Em modos deslizantes, pode-se trabalhar tanto com o modelo linear quanto o não linear do duplo pêndulo invertido sobre um carro e, no segundo modelo, as incertezas paramétricas compatíveis podem ser incluídas nas equações dinâmicas do sistema sem perda de robustez e eficiência do controlador.

6.2.1. Descrição Formal de Controle por Modos Deslizantes

O projeto do controlador por modos deslizantes pode ser dividido em duas etapas que é a definição das superfícies de deslizamento e o projeto da lei de controle. O sistema de malha-fechada obtido sob a ação de controle pode ser dividido em duas fases: a fase de alcançabilidade, em que o controlador atua no sentido de forçar as trajetórias do sistema para a superfície de deslizamento, é nesta fase que o controlador é afetado pelos distúrbios externos, portanto o controlador deve ser projetado de forma que esta fase seja a menor possível e; a fase de deslizamento, em que as trajetórias do sistema já se encontram na superfície de deslizamento, nesta fase a função de chaveamento atua sobre o sistema de forma a mantê-lo na condição de deslizamento e é nesta fase que o sistema de controle torna-se insensível as variações paramétricas e distúrbios externos.

Em sistemas mecânicos, a utilização de sistemas de controle estrutura variável não induzem ao *movimento deslizante ideal*. A explicação para tal é óbvia, sistemas mecânicos reais apresentam problemas como atrasos e histerese, que conduzem a ocorrência do fenômeno de *chattering*, que é o cruzamento em alta frequência da superfície de deslizamento e ocorre na segunda fase da ação de controle. O aparecimento deste fenômeno é altamente

indesejável por exigir muito dos atuadores do sistema levando-os a desgastes desnecessários e muitas vezes a rompimentos dos mesmos.

Usualmente, tal situação é contornada pela modificação da ação de controle descontínua, forçando a permanência das trajetórias do sistema não mais para exatamente sobre a superfície de deslizamento, mas para uma pequena camada limitada sobre a superfície de deslizamento, sendo que esta pequena camada é determinada de forma arbitrária.

Considerando inicialmente um sistema linear invariante no tempo com m entradas, dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x, u) \quad (6.19)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com $1 \leq m \leq n$ e $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ é desconhecido mas limitado por algumas funções conhecidas do estado.

Sendo $s: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ uma função linear definida como:

$$s(x) = Sx \quad (6.20)$$

onde s é a função de chaveamento e $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui *rank* completo e S é um hiperplano definido por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\} \quad (6.21)$$

Definição 6.1. *Existe um tempo finito t_s , tal que a solução para (6.19) representada por $x(t)$ satisfaça:*

$$s(t) = 0 \quad \forall t \geq t_s$$

então, um *movimento deslizante ideal* é rastreado para todo $t \geq t_s$.

Se reescrevermos a equação de (6.19) em sistemas de malha-fechada o resultado será:

$$\dot{x}(t) = F(t, x) \quad (6.22)$$

onde a função $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é descontínua com relação ao vetor de estados.

Para a teoria clássica de controle, a solução da equação diferencial (6.22) é obtida utilizando a condição de Lipschitz, que garante a existência de uma única solução, onde existe um escalar L tal que:

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (6.23)$$

Porém, qualquer função que satisfaça a condição de Lipschitz é necessariamente contínua, impossibilitando sua utilização na teoria de estrutura variável. Logo, uma abordagem alternativa deve ser adotada. Mas se analisarmos pelo lado de sistemas físicos reais, o *movimento de deslizamento ideal* não é alcançável devido a imperfeições como: atrasos, histereses, dinâmicas não modeladas. Estas imperfeições causam um movimento na vizinhança da superfície de chaveamento, como visualizado na Figura 6.6.

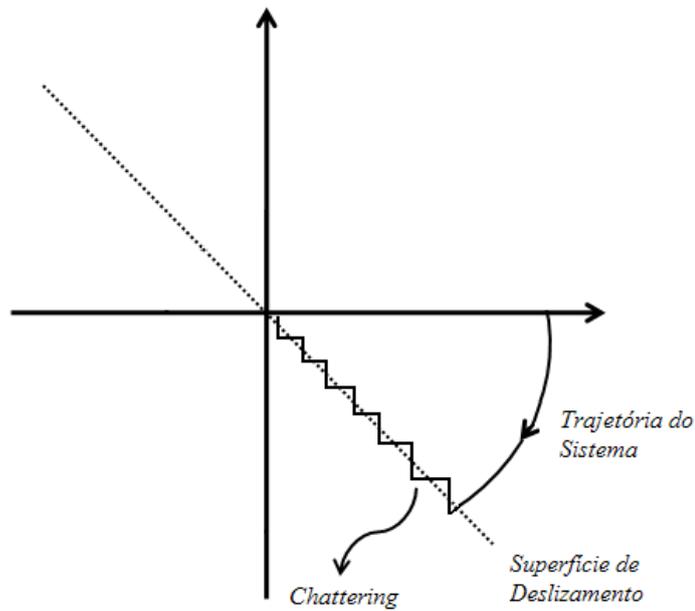


Figura 6.6 – Fenômeno de *chattering*.

O método usual para obter a solução para sistemas de controle com estrutura variável foi proposto por Filippov em 1994 (Edwards e Spurgeon, 1998). Neste método são apresentadas soluções para descrever o movimento do sistema durante o deslizamento, onde a solução das equações com função descontínua é obtida da aproximação do ponto de descontinuidade de pontos diferentes. Esta solução é interpretada geometricamente como a dinâmica “média” do sistema (Slotine e Li, 1991).

Para ilustrar o método de Filippov, vamos considerar x_0 como um ponto de descontinuidade na superfície de deslizamento S , $F_-(t, x_0)$ e $F_+(t, x_0)$ são os limites inferior e superior, respectivamente, de $F(t, x)$. Como x_0 é aproximado pelo lado oposto ao plano tangente de S em x_0 , então a solução é dada por:

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha)F_-(t, x) + \alpha F_+(t, x) \quad (6.24)$$

onde o escalar $0 < \alpha < 1$ é dado tal que o vetor

$$F_m = (1 - \alpha)F_- + \alpha F_+ \quad (6.25)$$

seja tangente a superfície S , conforme ilustrado na Figura 6.7.

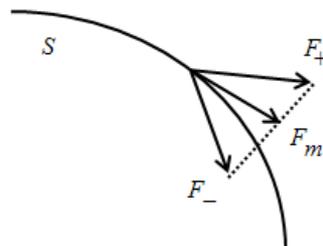


Figura 6.7 – Método de Filippov.

Este conceito é melhor abordado pelo método de *controle equivalente* proposto por (Utkin, 1977). De maneira geral, o controle equivalente é o controle necessário para manter o movimento de deslizamento ideal na superfície de deslizamento S .

Supondo que no sistema descrito pela equação (6.19) a função f desconhecida seja zero, então temos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6.26)$$

Da equação (6.20) e (6.21) temos que $Sx(t) = 0$, derivando esta equação no tempo temos $\dot{s}(t) = S\dot{x}(t) = 0$ para todo $t \geq t_s$, lembrando que t_s é o tempo necessário para que as trajetórias do sistema atinjam o movimento de deslizamento. Substituindo em (6.26), temos:

$$S\dot{x}(t) = SAx(t) + SBu(t) \quad \forall t \geq t_s \quad (6.27)$$

Supondo que a matriz S é tal que SB seja não singular, B tenha *rank* completo e S seja um parâmetro de projeto, temos a seguinte definição.

Definição 6.2. O controle equivalente u_{eq} de sistemas como os da equação (6.26), a única solução para a equação algébrica (6.27) é definida como:

$$u_{eq}(t) = -(SB)^{-1}SAx(t) \quad (6.28)$$

A substituição da lei de controle equivalente (6.28) no sistema da equação (6.26) torna o movimento deste sistema livre, ou seja, independente da ação de controle, equação (6.29). Isto comprova a afirmação feita anteriormente de que, sob a ação de controlador por modo deslizante, o sistema de comporta aparentemente livre do controlador durante o movimento deslizante.

$$\dot{x}(t) = (I - B(SB)^{-1}S)Ax(t) \quad \forall t \geq t_s, \text{ e } Sx(t_s) = 0 \quad (6.29)$$

onde $(I - B(SB)^{-1}S)$ é o operador projeção definido como

$$P_s = (I - B(SB)^{-1}S) \quad (6.30)$$

E deve satisfazer duas equações, a seguir

$$SP_s = 0 \quad \text{e} \quad P_s B = 0 \quad (6.31)$$

6.2.2. Propriedades de Modos Deslizantes

Entre as afirmações feitas anteriormente, uma delas diz que o sistema comporta-se como um sistema de ordem reduzida durante o movimento de deslizamento. A partir das deduções feitas sobre o controle equivalente, podemos comprovar a afirmação acima.

Proposição 6.1. *O movimento de deslizamento encontrado na equação (6.29) é de ordem reduzida e os auto-vetores associados aos auto-valores diferentes de zero do sistema de matriz (6.31), pertencem ao espaço nulo da matriz S .*

$$A_{eq} = (I - B(SB)^{-1}S)A \quad (6.32)$$

Prova. Desde que $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tenha *rank* completo, o m -ésimo estado do sistema (6.19) pode ser escrito como uma combinação linear dos outros $n - m$ estados. Isto faz com que o sistema dependa apenas das i -ésimas dinâmicas de estados, onde $i = 1, \dots, n - m$, ocorrendo a redução de ordem do sistema.

Se a matriz A_{eq} em (6.31) possuir um número de auto-valores maior que $n - m$ e, supondo que os auto-vetores correspondentes sejam todos distintos, então a matriz $V \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$, cujos elementos são os auto-vetores, deve satisfazer a duas proposições seguintes.

Proposição 6.2. A matriz de auto-vetores V satisfaz:

$$SV = 0 \quad \text{e} \quad \text{rank} [V \quad B] = n \quad (6.33)$$

Prova. Da Proposição 6.1, podemos provar a Proposição 6.2, considerando a solução

$$V\varphi_1 + B\varphi_2 = 0 \quad (6.34)$$

onde φ_1 e φ_2 são vetores com dimensões apropriadas. Multiplicando ambos os lados da equação por S e considerando $SV = 0$ proposto em (6.33), temos que $SB\varphi_2 = 0$, logo, $\varphi_2 = 0$ supondo que SB seja não-singular. Substituindo φ_2 na equação (6.34), temos que $\varphi_1 = 0$, logo, podemos afirmar que $[V \quad B]$ são linearmente independentes, ou seja, a $\text{rank} [V \quad B] = n$.

Observando a lei de realimentação de estados $u(t) = Kx(t)$, podemos reescrever a lei de controle equivalente da seguinte forma:

$$u_{eq}(t) = Kx(t) \quad (6.35)$$

onde $K = -(SB)^{-1}SA$, esta forma é frequentemente encontrada, visto que o controle por modo deslizante também trabalha com o sistema a malha fechada.

Considerando o sistema (6.19) e substituindo a função de incertezas desconhecidas por $D\xi(t, x)$, temos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t, x) \quad (6.36)$$

Onde $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ é uma matriz conhecida e a função $\xi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ é desconhecida e representa as incertezas ou distúrbios externos do sistema.

Supondo que a lei de controle aplicada ao sistema (6.36) induz ao movimento deslizante na superfície S mesmo com a presença de incertezas e distúrbios, então o controle equivalente necessário para manter o movimento seria dado por:

$$u_{eq}(t) = -(SB)^{-1}(SAx(t) + SD\xi(t, x)) \quad \forall t \geq t_s \quad (6.37)$$

Analisando a lei de controle (6.37) notamos que agora ela depende também das incertezas e distúrbios externos o que *na prática não pode ser realizado*.

Uma propriedade chave de sistemas de controle por modos deslizante é a *invariância* do sistema sob a influência de incertezas compatíveis durante a fase de movimento deslizante.

Teorema 6.1. *O movimento de deslizamento ideal é totalmente insensível as incertezas representadas pela função $\xi(t, x)$ na equação (6.36) se $\mathcal{R}(D) \subset \mathcal{R}(B)$, ou seja, se o intervalo de espaço da matriz D está contido no intervalo de espaço da matriz B .*

Prova. Substituindo a lei de controle equivalente (6.37) no sistema (6.36), o movimento deslizante deve satisfazer

$$\dot{x}(t) = P_s Ax(t) + P_s D \xi(x, t) \quad \forall t \geq t_s \text{ e } Sx(t_s) = 0 \quad (6.38)$$

onde P_s é definido por (6.30). Se a condição imposta no Teorema 6.1 é verdadeira, então existe uma matriz de transformação $R \in \mathbb{R}^{m \times l}$ que satisfaça a equação $D = BR$. Substituindo esta relação em (6.38) e levando em consideração (6.31) temos que $P_s D = P_s (BR) = (P_s B)R = 0$. Isto nos leva a conclusão que o movimento do sistema é de ordem reduzida, conforme (6.39)

$$\dot{x}(t) = P_s Ax(t) \quad \forall t \geq t_s \text{ e } Sx(t_s) = 0 \quad (6.39)$$

portanto, invariante as incertezas e distúrbios externos do sistema (6.36).

Outra importante definição necessária nesta Prova é referente as incertezas compatíveis.

Definição 6.3. *Qualquer incerteza descrita como em (6.36) onde a condição do Teorema 6.1 é satisfeita é descrita como incerteza compatível. Qualquer incerteza fora disso é denominada como incerteza incompatível.*

Esta propriedade de *invariância* dos sistemas de controle com estrutura variável o torna um controlador robusto e bastante utilizado em sistemas com incertezas e distúrbios externos.

6.2.3. Existência do Modo Deslizante

Podemos ver em (6.28) que o controle equivalente depende da superfície de chaveamento para que o movimento de deslizamento aconteça. Para que a mudança de estruturas ocorra, após as trajetórias do sistema atingirem a superfície de deslizamento, é necessário que esta superfície de deslizamento seja localmente atrativa, isto é, que ela possua um pequeno limite superior e inferior que garanta que as trajetórias do sistema tornem a

superfície de deslizamento, conforme Figura 6.8. Matematicamente, isto pode ser expresso como:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (6.40)$$

em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Onde a superfície de deslizamento deve ser:

$$\mathcal{D} = S \cap \Omega = \{x \in \Omega : s(x) = 0\}$$

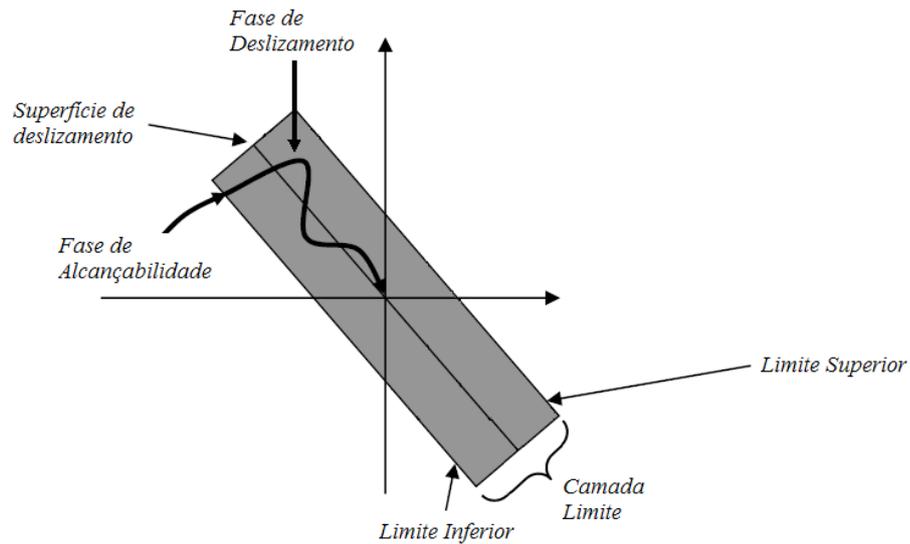


Figura 6.8 – Plano de Fase de um movimento deslizante com camada limite.

A expressão encontrada em (6.40) é representada mais usualmente pela seguinte critério:

$$\dot{s}s < 0 \quad (6.41)$$

Ambas as expressões dadas por (6.40) e (6.41) são denominadas como *condições de alcançabilidade*, que é a condição necessária para que as trajetórias do sistema atinjam a superfície de deslizamento. Em geral, a condição de alcançabilidade é satisfeita globalmente, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^n$. Reescrevendo a equação (6.41) temos,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s\dot{s} \quad (6.42)$$

e pode ser substituída pela função de Lyapunov para os estado s como:

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \quad (6.43)$$

Apenas as condições de alcançabilidade em (6.40) e (6.41) não garante que a superfície de deslizamento seja alcançada em um tempo finito. Logo, a seguinte condição deve ser satisfeita para que t_s seja finito. Esta condição é uma condição forte, que garante um

movimento de deslizamento ideal, e é conhecida como η -condição de alcançabilidade dada por:

$$\dot{s} \leq -\eta|s| \quad (6.44)$$

onde η é uma constante positiva pequena. Substituindo (6.44) em (6.42) temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta|s| \quad (6.45)$$

Integrando a equação (6.45) de 0 a t_s , temos:

$$|s(t_s)| - |s(0)| \leq -\eta t_s \quad (6.46)$$

De (6.46) e considerando a Definição 6.1, obtemos o tempo necessário para as trajetórias do sistema atingirem a superfície de deslizamento, como:

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (6.47)$$

6.2.4. Projeto de Lei de Controle por Modos Deslizantes

A estrutura de controle para sistemas com apenas uma entrada e incertezas, é descrito a seguir.

$$\dot{x}(t) = (A - A_d(t))x(t) + Bu(t) \quad (6.48)$$

onde $A_d(t)$ é uma matriz de incertezas variante no tempo. Em tal sistema é aplicado uma transformação de coordenadas para obter a *forma canônica controlável* do sistema, que é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

A facilidade de se usar a forma (6.49) é que a equação característica de A (6.50) é formado pela sua ultima linha e, através dele determinamos se A é estável ou não.

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \cdots + a_2 \lambda + a_1 = 0 \quad (6.50)$$

A matriz do sistema de ordem reduzida que rege o movimento de deslizamento é:

$$A_{11}^S = A_{11} - A_{12}M \quad (6.51)$$

Onde:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

e M é uma matriz linha cujos elementos são a última linha de (6.51), logo, de (6.49), sabemos que os coeficientes de M são os coeficientes da equação característica de (6.51), $\lambda^{n-1} + m_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + m_2\lambda + m_1 = 0$. A função de chaveamento adequada para tal sistema que garanta a estabilidade é uma função linear definida por:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i + x_n \quad (6.53)$$

e satisfaz a equação (6.21) se $S = [M \quad 1]$.

Reescrevendo (6.48) na forma regular, temos:

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \quad (6.54)$$

$$\dot{x}_n(t) = - \sum_{i=1}^n (a_i + \Delta_i(t)) x_i(t) + u(t) \quad (6.55)$$

Onde $\Delta_i(t)$ é uma incerteza compatível, isto é,

$$k_i^- < \Delta_i(t) < k_i^+ \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (6.56)$$

onde k_i^- e k_i^+ são escalares conhecidos.

A estrutura do controle comum é dada por:

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) \quad (6.57)$$

onde $u_l(t)$ é a lei de realimentação de estados, aqui conhecida como controle equivalente, e $u_n(t)$ é a lei de controle de chaveamento.

Derivando (6.53), temos:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_{i+1}(t) - \sum_{i=1}^n (a_i + \Delta_i(t)) x_i(t) + u(t) \\ &= -a_1 x_1(t) + \sum_{i=2}^n (m_{i-1} - a_i) x_i(t) - \sum_{i=1}^n (\Delta_i(t)) x_i(t) + u(t) \end{aligned} \quad (6.58)$$

Se a lei de controle equivalente linear for selecionada como:

$$u_l(t) = a_1 x_1(t) - \sum_{i=2}^n (m_{i-1} - a_i) x_i(t) \quad (6.59)$$

substituindo (6.59) em (6.57) e substituindo (6.57) em (6.58), obtemos:

$$\dot{s}(t) = - \sum_{i=1}^n (\Delta_i(t)) x_i(t) + u_n(t) \quad (6.60)$$

Se a lei de controle de chaveamento for selecionada como:

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n k_i x_i(t) - \eta \text{sign}(s) \quad (6.61)$$

onde

$$k_i = \begin{cases} k_i^- & \text{se } s x_i > 0 \\ k_i^+ & \text{se } s x_i < 0 \end{cases} \quad (6.62)$$

em η é um escalar pequeno e positivo.

Substituindo (6.62) em (6.60), temos:

$$\dot{s}(t) = \sum_{i=1}^n (k_i - \Delta_i(t)) x_i(t) - \eta \text{sign}(s) \quad (6.63)$$

multiplicando ambos os lados de (6.63) temos:

$$s \dot{s}(t) = \sum_{i=1}^n s x_i(t) (k_i - \Delta_i(t)) - \eta |s| \quad (6.64)$$

De acordo com a η -condição de alcançabilidade em (6.44) podemos estabelecer que:

$$s \dot{s}(t) = \sum_{i=1}^n s x_i(t) (k_i - \Delta_i(t)) - \eta |s| \leq -\eta |s| \quad (6.65)$$

simplificando (6.65), temos:

$$s \dot{s}(t) = \sum_{i=1}^n s x_i(t) (k_i - \Delta_i(t)) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (6.66)$$

A equação (6.66) estabelece a η -condição de alcançabilidade e garante que o movimento de deslizamento ocorra em um tempo finito.

6.3. METODOLOGIA DE CONTROLE POR MODO DESLIZANTE

6.3.1. Controle por Modos Deslizantes Linear

Como mencionado no início do capítulo, o maior problema do controle por modos deslizantes é o projeto dos parâmetros da superfície de chaveamento do controlador. Em termos de sistemas lineares, este problema pode ser interpretado como um problema de projeto da matriz de realimentação de estados estáticos para um subsistema em particular (Edwards e Spurgeon, 1998). Uma forma de tratar este problema é utilizando o método robusto de alocação de autovalores. Neste projeto, o controle por modos deslizantes deve satisfazer três condições à três condições: existência, estabilidade e controlabilidade.

Considerando o modelo linear do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro linearizado definido nas equações (4.1) e (4.2), onde (A, B) é comprovadamente controlável por (4.4). As superfícies de deslizamento para este projeto são definidas como:

$$s_i(x) = c_i^T x \quad i = 1, \dots, m \quad (6.67)$$

O primeiro passo para este projeto é a aplicação de uma transformação linear do sistema representado na forma regular, visando a redução de ordem do sistema. Este sistema, após a transformação linear, é expresso pela seguinte forma regular:

$$\dot{z}_1(t) = A_{11}z_1(t) + A_{12}z_2(t) \quad (6.68)$$

$$\dot{z}_2(t) = A_{21}z_1(t) + A_{22}z_2(t) + B_2u(t) \quad (6.69)$$

e a função de chaveamento escrita como:

$$s(t) = C_1z_1(t) + C_2z_2(t) \quad (6.70)$$

O sistema definido nas equações (6.68) e (6.69) são obtido por uma transformação de coordenadas através de uma matriz de transformação linear, tal que:

$$z(t) = Tx(t) \quad (6.71)$$

As matrizes sub-blocos nas equações (6.68) e (6.69) são obtidas a partir de (4.1) e (4.2) como:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad TB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Reescrevendo (6.70), temos:

$$z_2 = C_2^{-1}s - C_2^{-1}C_1z_1 \quad (6.73)$$

Substituindo (6.73) em (6.68) e (6.69) obtemos:

$$\dot{z}_1 = (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)z_1 + A_{12}C_2^{-1}s \quad (6.74)$$

$$\dot{z}_2 = (A_{21} - A_{22}C_2^{-1}C_1)z_1 + A_{22}C_2^{-1}s + B_2u \quad (6.75)$$

Diferenciando (6.70) em função do tempo, obtemos:

$$\dot{s} = C_1\dot{z}_1 + C_2\dot{z}_2 \quad (6.76)$$

e substituindo (6.74) e (6.75) em (6.76), temos:

$$\begin{aligned} \dot{s} = & C_1[(A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)z_1 + A_{12}C_2^{-1}s] + C_2[(A_{21} - A_{22}C_2^{-1}C_1)z_1 \\ & + A_{22}C_2^{-1}s + B_2u] \end{aligned} \quad (6.77)$$

Quando a trajetória do sistema atinge a superfície de deslizamento, $S = 0$ e $\dot{S} = 0$, obtemos o controle equivalente como:

$$u_{eq} = -(C_2B_2)^{-1}[(C_1A_{11} + C_2A_{21}) - (C_1A_{12} + C_2A_{22})C_2^{-1}C_1]z_1 \quad (6.78)$$

A matriz de realimentação de estados é calculada para as duas sub-matrizes A_{11} e A_{12} como $(A_{11} - A_{12}K)$, temos:

$$|\lambda I_{n-m}(A_{11} - A_{12}K)| = 0 \quad (6.79)$$

Analisando (6.74) e (6.79), obtemos que $C_2^{-1}C_1 = K$, ou, reescrevendo, $C_1 = C_2K$. As raízes da equação característica de (6.74) são os pólos desejados, ou seja, são os parâmetros da superfície de deslizamento do controlador. Neste caso, C_2 é uma matriz não-singular determinada pelo projetista.

Utilizando a lei de alcance exponencial $\dot{S} = -kS - \varepsilon \text{sgn}(S)$ e considerando o sistema inicial em $S = Cx$, temos:

$$\dot{S} = C\dot{x} = CAx + CBu = -kS - \varepsilon \text{sgn}(S)$$

e obtemos a lei de controle final do sistema expressada abaixo:

$$u = -(CB)^{-1}(CAx + kS + \varepsilon \text{sgn}(S)) \quad (6.80)$$

onde k e ε são constantes.

Para o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, selecionamos a matriz de transformação linear como expressada abaixo:

$$T = \begin{bmatrix} I_5 & -B_1(B_2)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

O sistema depois da transformação linear é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.2322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.988 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -88.0240 & 78.2240 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 880.2395 & -880.2395 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 442.4743 & -343.95 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3512 \end{bmatrix} u \quad (6.81)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -88.0240 & 78.2240 & 0 & 0 \\ 0 & 880.2395 & -880.2395 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0.2322 \\ -2.988 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

Especificando os pólos como $P = [-13; -2 + 2i; -2 - 2i; -6 + 6i; -6 - 6i]$, obtemos a seguinte matriz de realimentação de estados para o sistema de ordem reduzida, $K = [0.868 \quad -7.7708 \quad 5.5791 \quad 0.6455 \quad -0.2837]$. Selecionando C_2 conforme os pólos encontramos, temos os parâmetros das superfícies de deslizamento como: $C = [0.868 \quad -7.7708 \quad 5.5791 \quad 0.6455 \quad -0.2837 - 0.65]$. Os parâmetros da equação (6.80) foram especificados como $k = 0.5$ e $\varepsilon = 0.01$.

A Figura 6.9 mostra o modelo no simulink para o controlador por modo deslizante baseado na alocação de pólos.

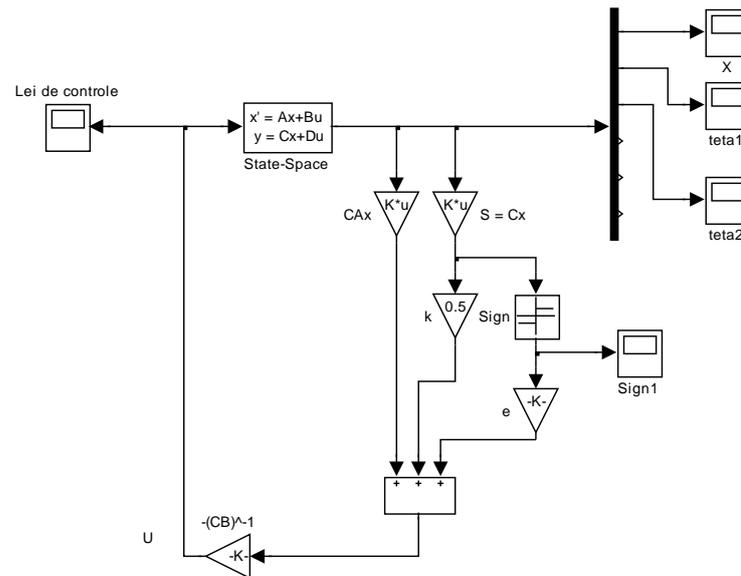


Figura 6.9 – Modelo no Simulink do Controlador por Modo Deslizante Linear.

A Figura 6.10 mostra o gráfico da ação de controle para o controlador por modo deslizante linear baseado na teoria de realimentação de estados e aplicada ao sistema linearizado do duplo pêndulo invertido sobre um carro. O sinal mostra um ruído que inicia em torno de 4.5s e continua até o final da simulação. Tal ruído se inicia quando a trajetória do subsistema carro aproxima-se do seu objetivo e aumenta a medida que os dois outros subsistemas também se aproximam da sua trajetória desejada.

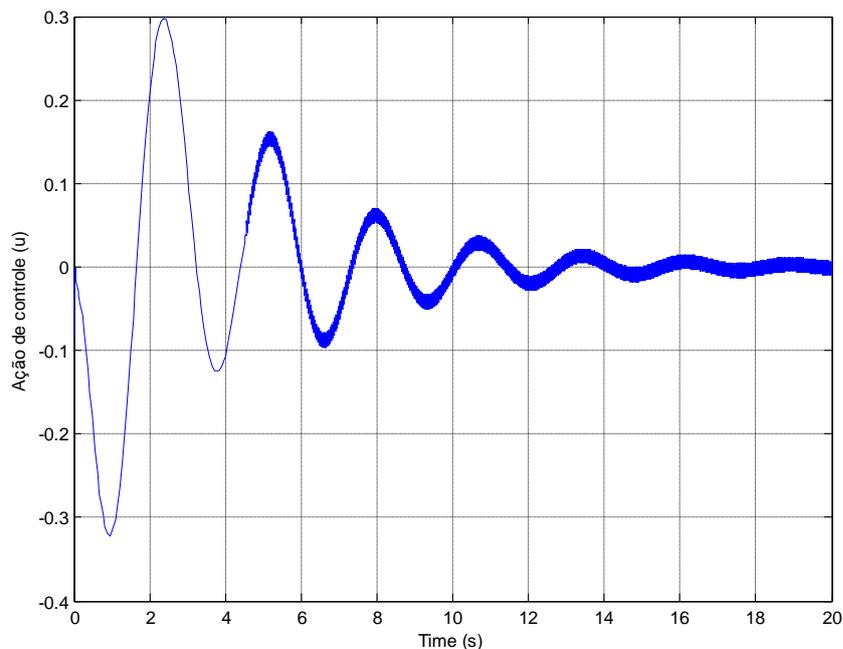


Figura 6.10 – Ação de controle do Controlador por Modo Deslizante Linear.

A Figura 6.11 apresenta o deslocamento do carro sob a ação de controle mostrada acima, do controlador por modo deslizante linear. Como podemos observar, a trajetória do carro atinge seu objetivo no tempo de 14s. Quando o deslocamento do carro sai da posição desejada, rapidamente o controlador o leva novamente a zero.

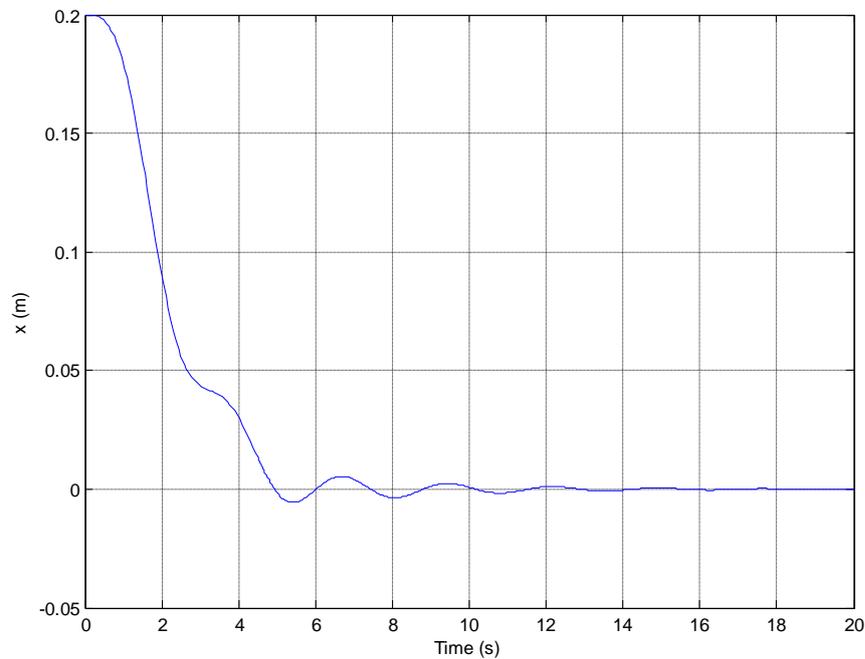


Figura 6.11 – Deslocamento do carro sob ação do Controlador por Modo Deslizante Linear.

A Figura 6.12 apresenta o deslocamento angular do pêndulo inferior sob a ação de controle do controlador por modo deslizante linear. Podemos observar que a posição angular do pêndulo inferior estabiliza no tempo de 18s e que a variação angular não ultrapassa 0.015rad, que é uma variação muito pequena.

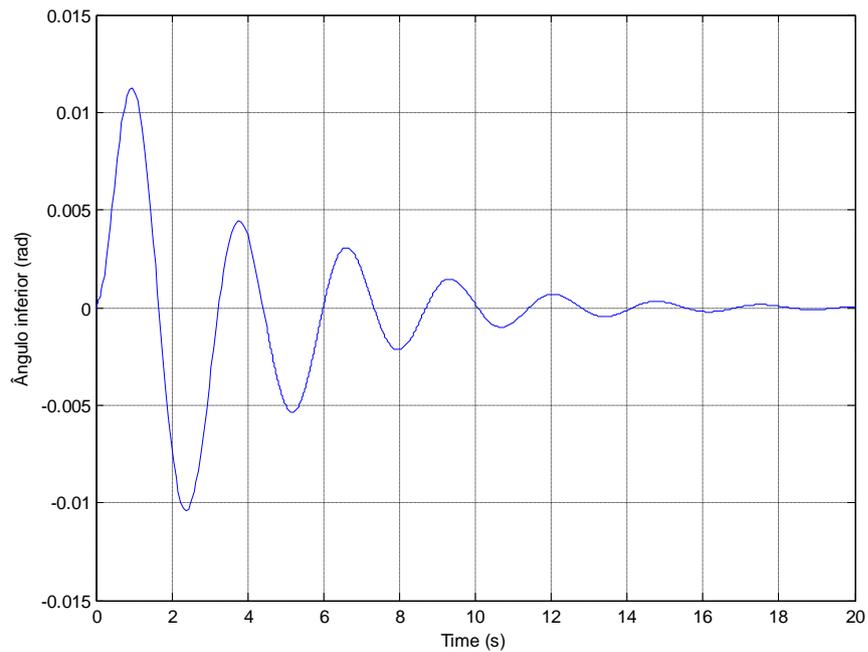


Figura 6.12 – Deslocamento do pêndulo inferior sob ação do Controlador por Modo Deslizante Linear.

A Figura 6.13 mostra o posicionamento angular do pêndulo superior sob a ação de controle do controlador por modo deslizante linear. O comportamento dinâmico desta variável de estado é semelhante a posição angular do pêndulo inferior. Aparentemente, os gráficos da posição angular do pêndulo inferior e superior apresentam muita variação, mas estas variações são muito pequenas, menores que 1° .

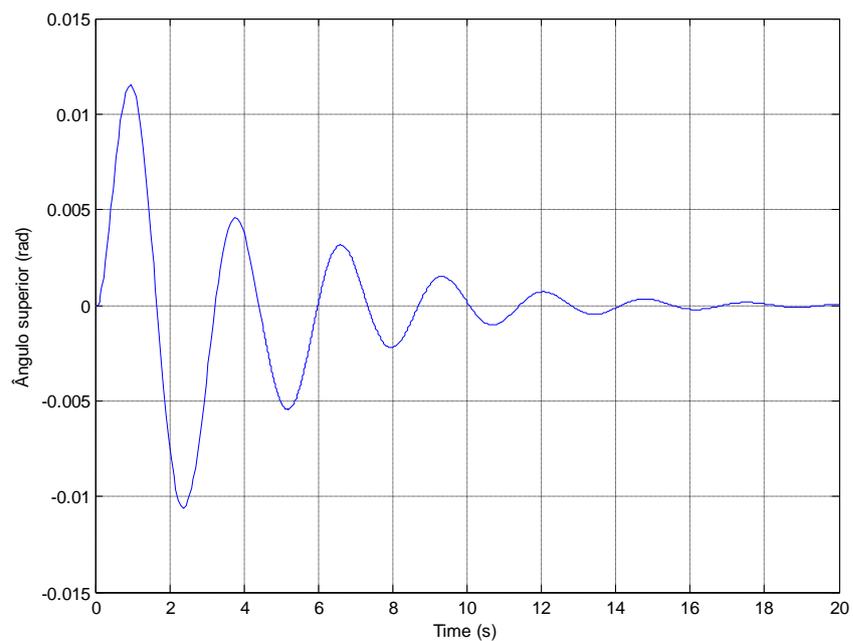


Figura 6.13 – Deslocamento do pêndulo superior sob ação do Controlador por Modo Deslizante Linear.

6.3.2. Controle por Modo Deslizante Hierárquico

A maioria dos controladores desenvolvidos para sistemas de pêndulos invertidos analisados baseiam-se no modelo linearizado do sistema em uma pequena vizinhança em torno da posição vertical. Ao considerarmos as severas não linearidades e as incertezas do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro, os métodos de controle projetados a partir do modelo linear apresentam um comportamento insatisfatório. A solução encontrada em diversos artigos é o projeto de controladores robustos insensíveis as variações paramétricas e as não linearidades do sistema e, a estimativa destas incertezas através de inteligência artificial. Os controladores que utilizam inteligência artificial são complexos e com custo computacional elevado.

Como visto na seção anterior, o controle por modo deslizante é um controlador robusto que utiliza superfícies deslizantes com o objetivo de trazer a dinâmica do sistema para a superfície deslizante e mantê-la ali. Para a sua aplicação em sistemas não lineares, a análise de estabilidade faz-se necessária e é baseada no teorema de estabilidade de Lyapunov, e, ainda, no lema de Barbalat.

Para sistemas sub-atuados, como o duplo pêndulo invertido sobre um carro, o projeto das superfícies de deslizamento não é apropriado, pois não se pode obter diretamente os parâmetros das superfícies de modo deslizante pelo método de Hurwitz. Muitos pesquisadores adotam o método de tentativa e erro para o desenvolvimento de tal controlador. Optamos então, pelo método de controle por modos deslizante com estruturas hierárquicas para projetar as superfícies de deslizamento e algumas estruturas podem ser encontradas em (Dianwei *et al*, 2006 e 2007), em (Yinxing *et al*, 2007) e em (Mahjoub *et al*, 2009), onde o sistema nominal é dividido em vários subsistemas e definida uma superfície de modo deslizante para cada subsistema.

Para este projeto de controle em questão, o sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro terá suas variáveis de estado reordenadas conforme mostrado abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} = f_i + b_i u \end{cases} \quad (6.83)$$

onde f_i e b_i são funções não lineares das variáveis de estado encontradas em (3.29).

A característica estrutural do sistema sob esta forma nominal é a composição de diversos subsistemas e para cada subsistema uma superfície de deslizamento é definida. O próximo passo agora é definir a estrutura hierárquica das superfícies de modo deslizante do controlador, aqui selecionada conforme Figura 6.9.

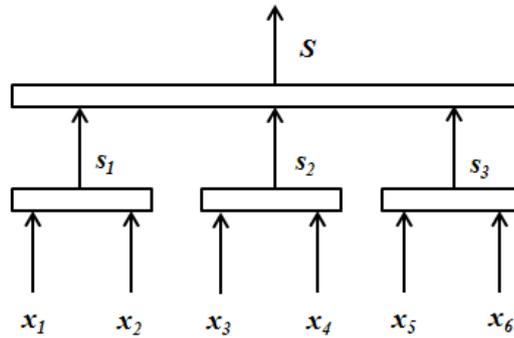


Figura 6.14 – Estrutura de Controle por Modo Deslizante Hierárquico.

]

As superfícies de modo deslizante são identificadas na Figura 6.14 como s_i com $i = 1, \dots, 3$, onde cada uma dessas camadas corresponde a um subsistema do duplo pêndulo invertido sobre um carro. Este é o primeiro nível de superfícies de modo deslizante. O segundo nível de superfície de modo deslizante é identificado pela camada como S , tendo como entrada a saída de todas as superfícies de modo deslizante do primeiro nível. Após definida a estrutura hierárquica das superfícies do controlador, um dos subsistemas, com sua posição e velocidade, é escolhida para compor a primeira superfície de modo deslizante. De forma semelhante, as demais superfícies de modo deslizante do primeiro nível são compostas, sempre com a posição e velocidade de um subsistema.

As superfícies de modo deslizante do i -ésimo subsistema para as variáveis (x_{2i-1}, x_{2i}) são definidas como:

$$s_i = c_i x_{2i-1} + x_{2i} \quad i = 1, \dots, n \quad (6.84)$$

onde c_i são constantes positivas.

Para três subsistemas, temos:

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 x_1 + x_2 \\ s_2 &= c_2 x_3 + x_4 \\ s_3 &= c_3 x_5 + x_6 \end{aligned}$$

Diferenciando s_i com respeito ao tempo t , temos:

$$\dot{s}_i = c_i \dot{x}_{2i-1} + \dot{x}_{2i} = c_i x_{2i} + f_i + b_i u \quad (6.85)$$

De (6.28), obtemos o controle equivalente dos i -ésimos subsistemas da estrutura de controle hierárquica da Figura 6.14 conforme abaixo:

$$u_{eqi} = -(c_i x_{2i} + f_i) / b_i \quad (6.86)$$

Da mesma forma, temos os controles equivalentes de cada subsistema como:

$$\begin{aligned} u_{eq1} &= -(c_1 x_2 + f_1) / b_1 \\ u_{eq2} &= -(c_2 x_4 + f_2) / b_2 \\ u_{eq3} &= -(c_3 x_6 + f_3) / b_3 \end{aligned}$$

O segundo nível da estrutura hierárquica das superfícies do controlador por modo deslizante é uma composição das três superfícies do primeiro nível e é definida como:

$$S = \sum_{i=1}^n a_i s_i \quad (6.87)$$

onde os parâmetros do controlador a_i são constantes.

Da equação (6.87) obtemos o segundo nível de superfícies de deslizamento da estrutura da Figura 6.14:

$$S = a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3$$

De (6.57), obtemos a lei de controle para a primeira camada desta estrutura de controle por modo deslizante hierárquico conforme abaixo:

$$u = u_{eqt} + u_{sm} \quad (6.88)$$

onde u_{sm} é a lei de controle de chaveamento da estrutura hierárquica de superfícies de modo deslizante do controlador.

A lei de controle equivalente total é obtida de (6.87):

$$u_{eqt} = \frac{a_1 b_1 u_{eq1} + a_2 b_2 u_{eq2} + a_3 b_3 u_{eq3}}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad (6.89)$$

De (6.43) obtemos a função de Lyapunov para a primeira camada de superfícies de modo deslizante do controlador conforme abaixo:

$$V(t) = S^2/2 \quad (6.90)$$

Diferenciando (6.90) em relação ao tempo t e considerando η -condição de alcançabilidade dada em (6.44) selecionamos:

$$\dot{S} = -kS - \eta \operatorname{sgn}(S) \quad (6.91)$$

onde k e η são constantes positivas.

Semelhantemente a (6.61), a lei de controle de chaveamento da estrutura hierárquica de superfície de modo deslizante deduzida de (6.89) e (6.91) como:

$$u_{sm}(t) = \dot{S}/(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \quad (6.92)$$

Após as definições de todas as equações envolvidas na lei de controle por modo deslizante hierárquico, composta pela a lei de controle equivalente final e a lei de chaveamento final é:

$$u = \frac{a_1 b_1 u_{eq1} + a_2 b_2 u_{eq2} + a_3 b_3 u_{eq3} - kS - \eta \operatorname{sgn}(S)}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad (6.93)$$

Com o objetivo de atenuar o fenômeno de *chattering* comum neste controlador, a função em u_{sm} , sgn , que é uma função sinal responsável pela comutação em torno do ponto de

operação onde se deseja estabilizar o sistema, será substituída pela função *saturation*, tornando esta mudança no sinal de controle mais suave.

$$\dot{S} = -kS - \eta \text{sat}(S) \quad (6.94)$$

onde a função *saturation*, como em Ji-Chang (1998), é:

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \text{sgn}(s) & \text{se } |s| \geq 1 \\ s & \text{se } |s| < 1 \end{cases} \quad (6.95)$$

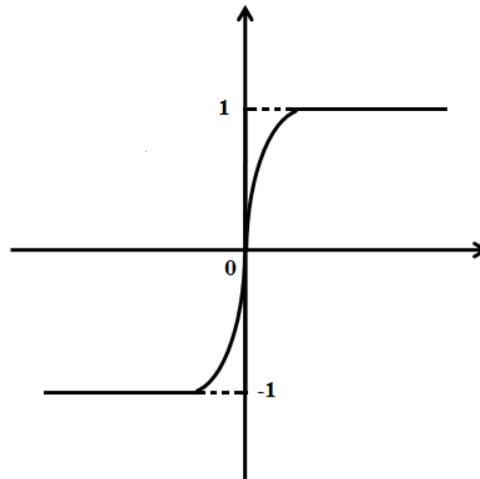


Figura 6.15 – Gráfico da função *Saturation*.

Substituindo (6.81) em (6.80), temos a lei de controle por modo deslizante hierárquico com atenuação do fenômeno de *chattering*:

$$u_a = \frac{a_1 b_1 u_{eq1} + a_2 b_2 u_{eq2} + a_3 b_3 u_{eq3} - kS - \eta \text{sat}(S)}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad (6.96)$$

Para as incertezas compatíveis, Definição 6.3, a lei de controle por modo deslizante hierárquica em (6.96) apresenta a propriedade de invariância do Teorema 6.1. Mas as incertezas em (3.29) são incompatíveis, de acordo com Definição 6.3. Logo, para tais incertezas, projetaremos de modo que a lei de controle total seja robusta. O compensador será concentrado e compensará as incertezas incompatíveis na última camada. Sua vantagem é que este método simplifica o projeto de controle. O compensador é projetado como:

$$u_c = \frac{a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad (6.97)$$

onde d_i são constantes que representam o valor máximo das incertezas incompatíveis.

A lei de controle final é:

$$u_f = u_a + u_c \quad (6.98)$$

A estabilidade do controlador será analisada a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov e o Lema de Barbalat.

Como terceira camada de superfície de modo deslizante depende das anteriores, faremos a análise de estabilidade da mesma e, por seguinte, das demais.

Diferenciando (6.90) com relação ao tempo, temos:

$$\dot{V}(t) = S\dot{S} = -kS^2 - \eta\alpha|S| \quad (6.99)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$.

Integrando ambos os lados da equação (6.99) temos:

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{V} d\tau &= \int_0^t (-kS^2 - \eta\alpha|S|) d\tau \\ V(0) - V(t) &= \int_0^t (kS^2 + \eta\alpha|S|) d\tau \\ V(0) &= V(t) + \int_0^t (kS^2 + \eta\alpha|S|) d\tau \end{aligned} \quad (6.100)$$

Da equação (6.100) podemos concluir que:

$$\int_0^t (kS^2 + \eta\alpha|S|) d\tau \leq V(0) < \infty \quad (6.101)$$

Isto é, $S \in L_\infty$.

Pelo Lema de Barbalat, encontrado em (Slotine e Li, 1991), se $kS^2 + \eta\alpha|S|$ quando $t \rightarrow \infty$, que significa que $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0$, então a superfície de modo deslizante da segunda camada é assintoticamente estável.

Derivando (6.87) temos:

$$\dot{S} = a_1\dot{s}_1 + a_2\dot{s}_2 + a_3\dot{s}_3 \quad (6.102)$$

e de (6.85) temos:

$$\dot{s}_3 = c_3\dot{x}_5 + \dot{x}_6 \quad (6.103)$$

onde \dot{x}_5 e \dot{x}_6 são velocidade e aceleração respectivamente, que são controladas pela força de controle e, portanto, pertencem a L_∞ . Logo,

$$s_3 \in L_\infty \quad (6.104)$$

Assim como em (6.84), as demais superfícies de modo deslizante da primeira camada pertencem L_∞ . Usando o Lema de Barbalat temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} s_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, comprovando que todas as superfícies de modo deslizante da primeira camada são assintoticamente estáveis.

Para atestar a eficiência do objetivo deste controlador, em atenuar o fenômeno de *chattering* causado pelas incertezas do sistema, os próximos gráficos mostram a resposta do sistema com a função *sgn* e com a função *sat*.

A Figura 6.16 mostra a implementação do controlador por modo deslizante hierárquico com atenuação de *chattering* pela substituição da função descontínua sinal pela função contínua saturação.

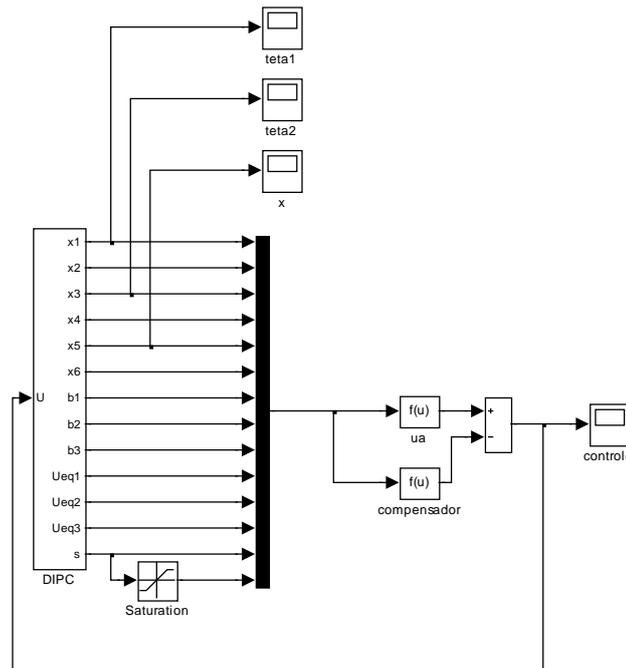


Figura 6.16 – Modelo no Simulink do Controlador por Modo Deslizante Hierárquico com atenuação de *chattering*.

A Figura 6.16 apresenta a ação de controle do controlador por modo deslizante hierárquico com atenuação do fenômeno de *chattering*.

Tabela 6.1 – Parâmetros do Controlador por Modo Deslizante Hierárquico.

HSMC – Modelo com compensador		
$c_1 = 223$	$a_2 = 0.2$	$d_1 = 0.6$
$c_2 = 15.85$	$a_3 = 0.28$	$d_2 = 0.4$
$c_3 = 0.71$	$k_3 = 1.8$	$d_3 = -0.26$
$a_1 = -0.01$	$\eta_3 = 0.03$	

Para o modelo onde as incertezas inerente ao sistema são desprezadas, os resultados gráficos mostram uma pequena diferença entre a implementação com atenuação de *chattering* e sem atenuação de *chattering*.

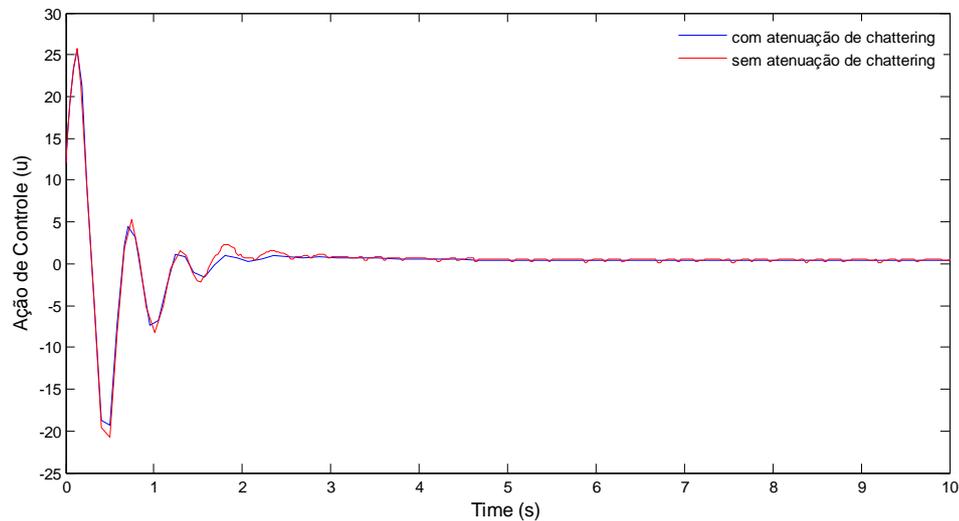


Figura 6.17 – Ação de controle do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas.

Como podemos observar na Figura 6.17, a ação de controle com atenuação do fenômeno de *chattering* atenua este fenômeno da ação de controle após as trajetórias do sistema atingirem a superfície de deslizamento.

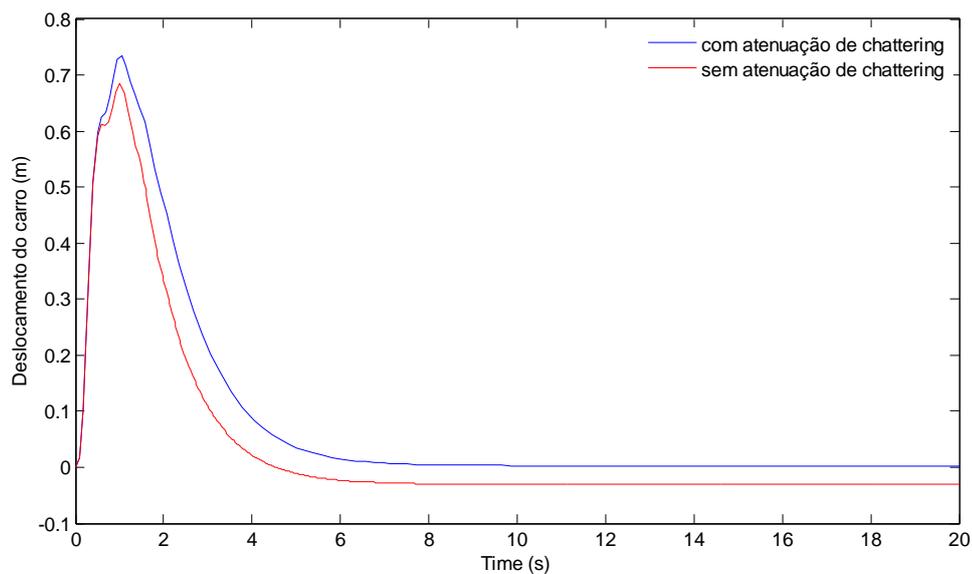


Figura 6.18 – Deslocamento do carro sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas.

Com atenuação do *chattering*, o deslocamento do carro visto na Figura 6.18 apresenta uma melhor aproximação da origem do sistema.

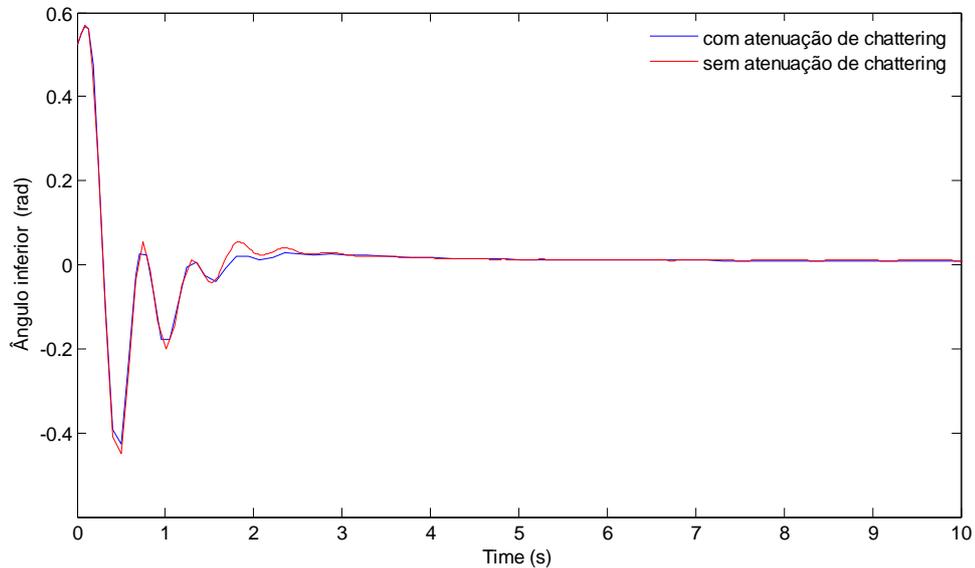


Figura 6.19 – Deslocamento do pêndulo inferior sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas.

A Figura 6.19 apresenta o deslocamento angular do pêndulo inferior com e sem atenuação de *chattering*, onde podemos observar uma redução nos picos de deslocamento do mesmo, ou seja, com redução de *chattering*, o deslocamento torna-se mais suave.

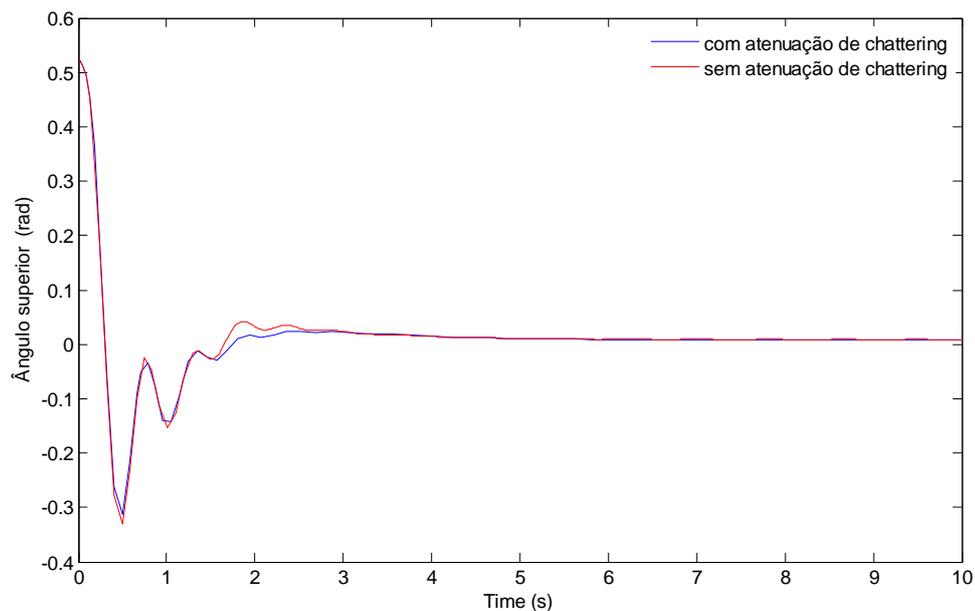


Figura 6.20 – Deslocamento do pêndulo superior sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico sem incertezas.

A Figura 6.20 apresenta o deslocamento angular do pêndulo superior com e sem atenuação de *chattering*, e, assim como na figura anterior, com redução de *chattering* o deslocamento torna-se mais suave.

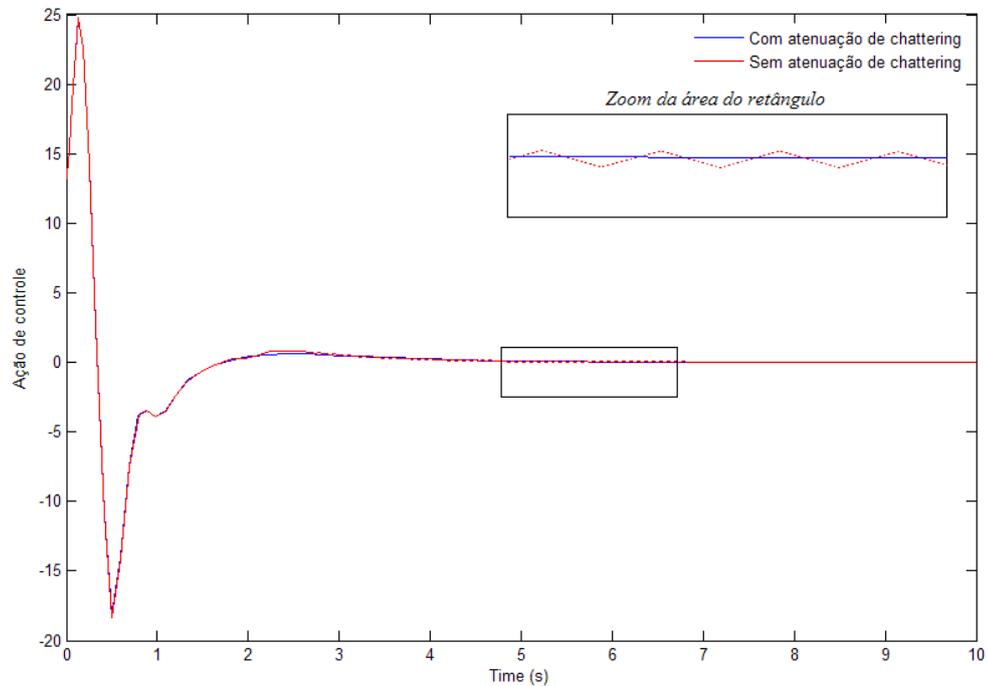


Figura 6.21 – Ação de controle do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas.

A Figura 6.21 mostra o deslocamento do carro sob a ação do controlador por modo deslizante hierárquico com e sem atenuação do fenômeno de *chattering* para o modelo com incertezas. Neste, observamos no zoom do retângulo sobre a curva que o fenômeno de *chattering* é completamente eliminado do sinal de controle.

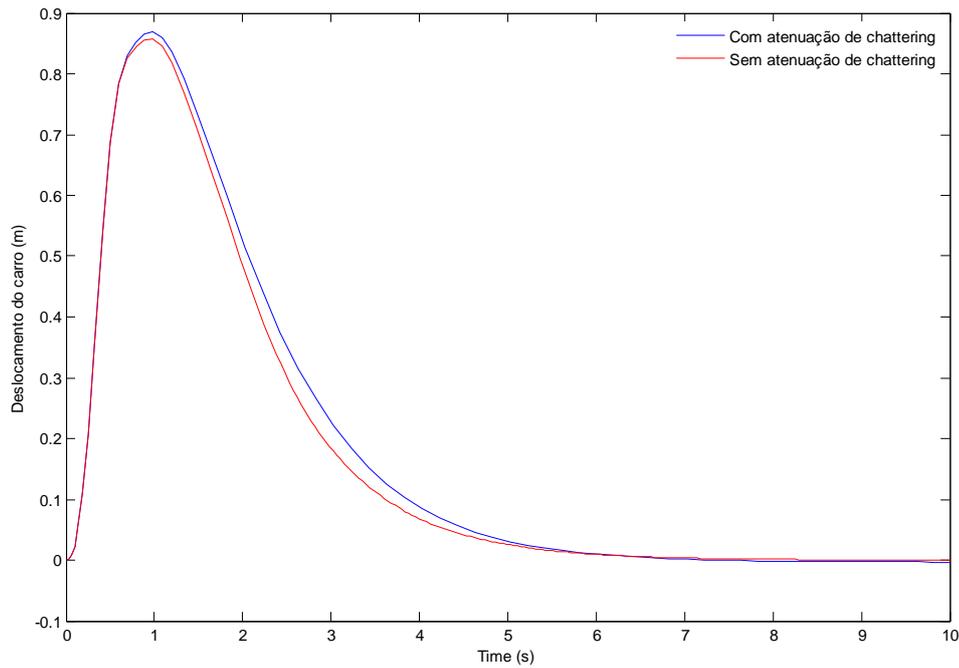


Figura 6.22 – Deslocamento do carro sob a ação do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas.

A Figura 6.22 mostra o deslocamento do carro sob ação do controlador por modo deslizante hierárquico com compensador. Pela característica da função utilizada para a atenuação do fenômeno de *chattering*, a mudança de superfície de chaveamento ocorre de forma suave, tornando mais lento o alcance do ponto de equilíbrio. Comparando com as demais variáveis de posição, a mudança inserida na lei de controle torna-se mais visível por receber diretamente a ação de controle.

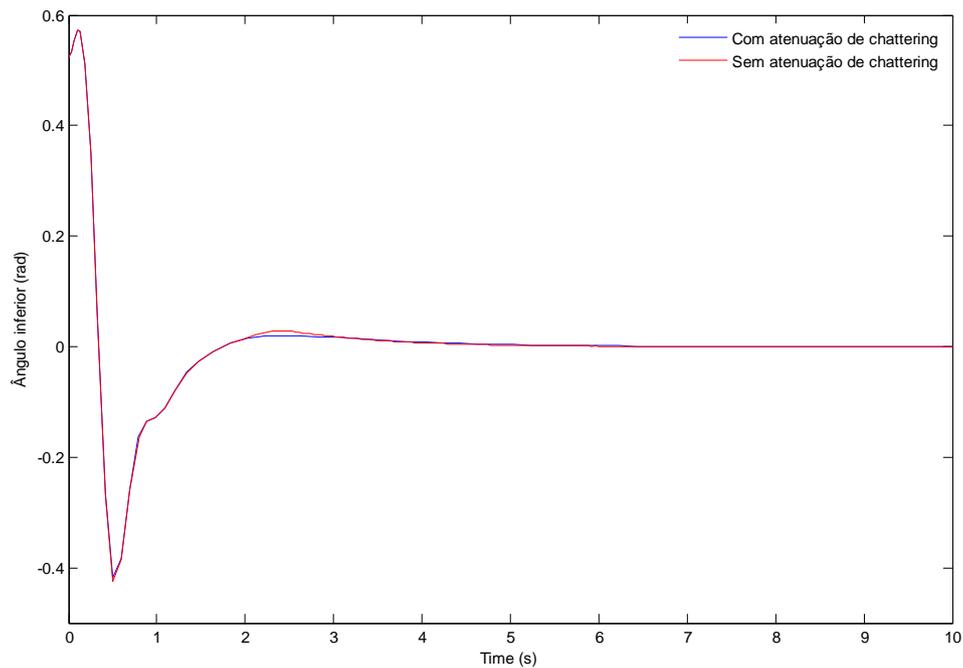


Figura 6.23 – Deslocamento do pêndulo inferior sob a ação do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas.

A Figura 6.23 apresenta o movimento angular do pêndulo inferior sob ação do controle por modo deslizante hierárquico com e sem atenuação do fenômeno de *chattering*, apresentando um movimento mais suave na convergência para o ponto de equilíbrio. A diferença entre o deslocamento com atenuação de *chattering* e sem é menor que no gráfico anterior, que deve-se ao fato do pêndulo inferior ser um subsistema sub-atuado.

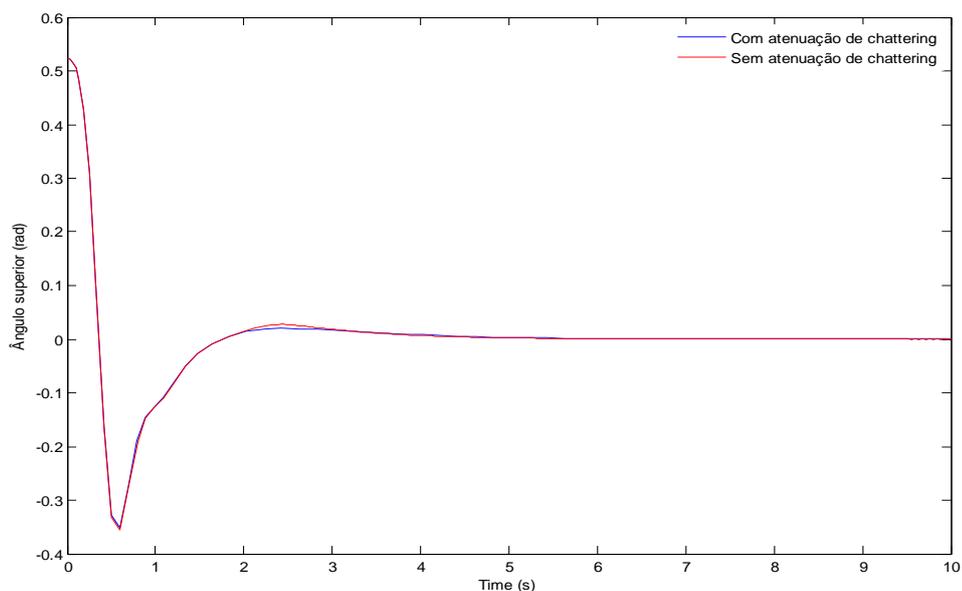


Figura 6.24 – Deslocamento do pêndulo superior sob a ação do controlador por modo deslizante hierárquico com incertezas.

A Figura 6.24 apresenta o movimento angular do pêndulo superior sob a ação do controlador por modo deslizante hierárquico com e sem atenuação do fenômeno de *chattering*, e como podemos observar, apresenta um movimento mais suave. E, semelhantemente ao gráfico anterior, o deslocamento com atenuação de *chattering* tem uma convergência mais lenta do que o deslocamento sem atenuação de *chattering*, mas não possui o mesmo pico inicial do pêndulo inferior devido as características dinâmicas do sistema como o acoplamento do pêndulo superior, que dificulta a ação de controle no pêndulo inferior.

6.3.3. Análise Comparativa dos Resultados

Os resultados de todos os controles aplicados ao sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro estão resumidos na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Resultados de Desempenho dos Controladores.

Resultados							
Método	TCC	DC	TCPI	DPI	TCPS	DPS	TE
LQR	4.35s	1.06m	4.14s	0.1235rad	3.87s	0.6526rad	10s
CF	18.92s	0.000906m	8.87s	0.01rad	11.81s	0.005542rad	20s
LSMC	16.78s	0.2m	19.51s	0.01126rad	19.53s	0.01152rad	20s
HSMC	7.799s	0.8701m	6.533s	0.5723rad	7.308s	0.5236rad	10s

Podemos observar a partir dos resultados que o controlador LQR por se tratar de um método de otimização baseado no modelo linear do sistema, apresenta os melhores resultados em relação ao tempo de convergência, mas não é capaz de controlar o sistema em seu modelo completo não linear. O controle CF apresenta um desempenho inferior ao LQR em relação ao tempo de execução do programa e tempo de convergência e apresenta os menores picos de deslocamento dos subsistemas, mas a maior desvantagem deste controle é o elevado custo computacional que dificulta uma aplicação de tempo real. O controle LSMC também apresenta elevados tempos de convergência e tempo de execução. O controle HSMC, que é baseado no modelo não linear completo do sistema apresentou um tempo de execução idêntico ao LQR, com tempos de convergência pouco superior ao mesmo (LQR) e inferior aos demais (CF e LSMC), não apresentou problemas de processamento e a atenuação do *chattering* obtida permite que este controle seja aplicado neste sistema em tempo real sem dificuldades.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Nos estudos realizados neste trabalho pudemos comprovar que os sistemas de controle baseados no modelo linear do duplo pêndulo invertido sobre um carro possuem uma clara limitação da faixa de deslocamento do pêndulo. Como vimos nos resultados apresentados no Capítulo 4, o regulador linear quadrático utiliza-se do erro de rastreamento para alcançar a estabilidade do sistema na origem (zero). Por se tratar de uma otimização da matriz de realimentação de estados, sua convergência ocorre em poucos segundos, menos que 5 segundos. Já os controladores que utilizam sistemas de controle inteligente como, como o baseado em lógica *fuzzy* apresentado no Capítulo 5, possuem um tempo de resposta elevado para a convergência dos mesmos, maior que o tempo desenvolvido pelo regulador linear quadrático. Além disso, o tempo de processamento das informações pelo controlador dificulta sua aplicação em sistemas de tempo real, elevando o custo computacional de sua aplicação. Por fim, outra desvantagem do controle baseado em lógica *fuzzy* é a dificuldade de projetar um controlador para sistemas com um número elevado de variáveis de estado que, mesmo com a redução do número de entradas do controlador, dificulta a definição das funções de pertinência com seus limites.

No Capítulo 6, o controle robusto por modo deslizante baseado no modelo linear do duplo pêndulo invertido sobre um carro tem seus parâmetros determinado também utilizando a matriz de realimentação de estados com a alocação de pólos. A vantagem deste método é a facilidade de obtenção destes parâmetros utilizando o critério de estabilidade de Hurwitz. A desvantagem é o ajuste manual dos pólos, que depende da experiência do projetista. Seu tempo de estabilização do sistema é elevado a primeira vista, mas considerando a grandeza de 10^{-3} , vemos que os deslocamentos angulares dos pêndulos são inferiores 1° .

Por se tratar de um sistema crítico e com incertezas no modelo, é recomendável que o sistema de controle desenvolvido para estabilizar o duplo pêndulo invertido sobre um carro possua as seguintes características: robustez para superar as incertezas do modelo; projeto simples, uma vez que o sistema possui seis variáveis de estado; tempo de resposta que permita sua aplicação em sistemas reais; baixo custo computacional, uma vez que o mesmo interfere também no tempo de resposta do controlador. Como explanado no Capítulo 6, o controle por

modo deslizante possui essas características. Mas para a aplicação no modelo não linear do sistema, os parâmetros do controlador não podem ser obtidos diretamente pelo critério de estabilidade de Hurwitz. Uma forma de simplificar o processo de projeto do controlador é a utilizando superfícies deslizantes hierárquicas, como visto na seção 6.3.2.

O projeto baseado no modelo não linear com todas as incertezas inerentes impossibilita o movimento de deslizamento ideal do sistema, provocando o fenômeno de *chattering*, muito prejudicial as partes físicas do sistema como, por exemplo, os atuadores. Visando a eliminação deste problema, os resultados apresentados na seção 6.3.2 apresentam duas situações: modelo não linear sem incertezas e com incertezas. Os resultados apresentam diferenças expressivas. Quando utilizamos o modelo sem incertezas, o *chattering* tem proporções menos quando comparados ao modelo com incertezas. Em ambos os casos, a função proposta para a eliminação deste problema é eficiente. Mas somente o controle por modo deslizante hierárquico não é suficiente para trazer o sistema para a origem quando inserimos as incertezas no modelo do sistema. Este problema deve-se ao fato de que a lei de controle equivalente, responsável por trazer o sistema para a origem, é baseada nas equações do sistema sem essas incertezas. Para solucionar este problema, um compensador foi projetado para levar as trajetórias do sistema para a origem. Os resultados apresentados com a incorporação deste compensador estabilizam o sistema na posição desejada, origem, com a atenuação do fenômeno de *chattering* permitindo uma aplicação real deste controlador desenvolvido.

O estudo do sistema duplo pêndulo invertido sobre um carro foi estudado com riqueza de detalhes, as incertezas paramétricas do sistema, antes desprezadas, foram incorporadas ao sistema. Os ajustes necessários nos parâmetros do controlador foram realizados. O sistema de controle por modo deslizante hierárquico com atenuação de *chattering* proposto nesta dissertação apresentou comportamento semelhante aos sistemas de LQR e por lógica fuzzy, que são baseados no modelo linear do sistema. Tal comportamento comprova sua robustez frente as não linearidades e incertezas do sistema. Sua única desvantagem é o ajuste dos seus parâmetros, que dependem da experiência do projetista e é realizado pelo método de tentativa e erro.

Como trabalhos futuros, a continuação deste trabalho no estudo de técnicas de ajuste dos parâmetros do controlador por modo deslizante para sistemas sub-atuados, com incertezas no modelo e não linearidades, que impedem a definição dos mesmos pelo critério de estabilidade de Hurwitz, faz-se necessário. Alguns trabalhos neste sentido foram desenvolvidos, mas os mesmos ajustam diretamente a superfície de chaveamento e não os

seus parâmetros. Neste sentido, deverão incluir uma investigação sobre a possibilidade de utilização de algoritmos genéticos para otimizar os parâmetros do controlador por modos deslizante, uma vez que os mesmos são muito eficientes no alcance de mínimos globais.

REFERÊNCIAS

BOGDANOV, Alexander. **Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart.***Technical Report CSE-04-006*, pp. 1-14, December-2004.

CALLINAN, Tim. **Artificial Neural Network identification and control of the inverted pendulum.** disponível em: http://www.eeng.dcu.ie/~brutonj/Reports/TCallinan_MEng_03.pdf, acessado em Outubro de 2008.

CHIH-MIN, Lin; YI-JEN, Mon. **Decoupled Control by Hierarchical Fuzzy Sliding-Mode Controller.***IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 13, No. 4, pp. 593-598, July-2005.

DIANWEI, Q.; JIANQIANG, Y.; DONGBIN, Z.; YINXING, H. **Hierarchical Sliding Mode Control for Series Double Inverted Pendulums System.***System Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 4977-4982, Beijing-China, October-2006.

DIANWEI, Qian; JIANQIANG, Yi; DONGBIN, Zhao. **Robust Control Using Sliding Mode for a Class of Under-Actuated Systems With Mismatched Uncertainties.** *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1449-1454, Roma-Italy, Abril-2007.

DING, C.-j.; DUAN, P.; ZHANG, M.-l.; ZHANG, Y.-f. **Double Inverted Pendulum System Control Strategy Based on Fuzzy Genetic Algorithm.***Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics*, pp. 1318-1323, Shenyang-China, August-2009.

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Sistemas de Controle Modernos.** 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 2001.

DOE, Yasuhiko. **Introduction To Fuzzy Logic.***Proceedings of the IEEE 21st International Conference on Industrial Electronics, IECON*, Vol. 1, pp. 50-56, 1995.

DRIANKOV, Dimiter; HELLENDORRN, Hans; REINFRANK, Michael.**An Introduction to Fuzzy Control .2.ed.** Berlin: Springer-Verlag, 1996.

EDWARDS, Christopher; SPURGEON, Sarah K. **Sliding Mode Control: Theory and Applications.** London: Taylor e Francis, 1998.

FUYAN, C.; GUOMIN, Z.; YOUSHAN, L.; ZHENGMING, X. **Fuzzy control of a double-inverted pendulum.***Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 79, No. 3, pp. 315-321, 1996.

HONG, L.; FENGYANG, D.; YING, G.; HUADONG, Y.; JINKAI, X. **Study on Fuzzy Control of Inverted Pendulum System in the Simulink Environment.***Proceedings of International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 937-942, 2007.

HUANG, W.; QI, Q.; HE, Q.; HUANG, Q.; ZHAO, Y.;XIAO, L. **Optimization of Sliding Mode Controller for Double Inverted Pendulum Based on Genetic Algorithm.***2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA*, pp. 1-5, 2008.

JIANQIANG, Yi; NAOYOSHI, Yubazaki; KAORU, Hirota.**Systematically Constructing Stabilization Fuzzy Controllers for Single and Double Pendulum Systems.***The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 1, pp. 263-268, 2000.

JI-CHANG, Lo; YA-HUI, Kuo. **Decoupled Fuzzy Sliding-Mode Control.***IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 3, pp. 426-435, August-1998.

LEI, Shuliang; LANGARI, Reza.**Hierarchical Fuzzy Logic Control of a Double Inverted Pendulum.***The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 2, pp. 1074-1077, 2000.

LIN, Y.-s.; QIAN, J.-x.; XUE, A.-k.; WANG, J.-h. **Simple Multi-PD Control Algorithm of Double Inverted Pendulum.** *Proceedings of IEEE TENCON'02*, Vol. 3, pp. 1428-1431, 2002.

MAHJOUB, Sonia; MNIF, Faïçal; DERBEL, Nabil. **Robust sliding mode control applied to double Inverted pendulum system.** *Intelligent Systems and Automation: 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation, CISA'09*, Vol. 1107, pp. 222-228, 2009.

NIEMANN, Henrik; POULSEN, Jesper Kildegaard. **Analysis and Design of Controllers for a Double Inverted Pendulum.** *Proceedings of the American Control Conference*, Vol. 4, pp. 2803-2808, 2003.

PERRUQUETTI, W.; BARBOT, J. P. **Sliding Mode Control in Engineering.** New York: Marcel Dekker Inc., 2002.

QI, Q.; HUANG, W.; ZHAO, Y.; HE, Q.; HUANG, Q.; XIAO, L. **System Identification of the Double Inverted Pendulum Based on Genetic Algorithm.** *2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA*, pp. 1-5, 2008.

QING-RUI, L.; WEN-HUA, T.; SUN, N.; CHONG-YANG, Z.; LING-HONG, Y. **Stabilization Control of Double Inverted Pendulum System.** *The 3rd International Conference on Innovative Computing Information and Control, ICICIC'08*, pp. 417-417, 2008.

SHENG, Q.; QING, Z.; GAO, X. Z.; SHUANGHE, Y. **ANFIS Controller for Double Inverted Pendulum.** *The IEEE International Conference on Industrial informatics, INDIN*, pp. 475-480, 2008.

SHI, Xiaoxia; ZHONG, Qiu hai. **The Mathematic Model for The Double Inverted Pendulum – Base on State Feedback and T-S Model.** *SICE Annual Conference*, Vol. 2, pp. 1457-1460, 2003.

SLOTINE, Jean-Jacques E.; LI, Weiping. **Applied Nonlinear Control.** New Jersey: Prentice Hall, 1991.

SUN, Qianlai; SUN, Zhiyi. **Application of Multistage Fuzzy Control to A Double Inverted Pendulum.** *IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA*, pp. 2027-2030, Christchurch-New Zealand, December-2009.

SWEENEY, Barry N. **Artificial Neural Network Identification and Control of the Inverted Pendulum.** Dublin: Dublin City University, School of Electronic Engineering, 2004. Dissertação de Mestrado.

TU, Kuo-Yang; LEE, Tsu-Tian; WANG, Wen-Jieh. **Design of a multi-layer fuzzy logic controller for multi-input multi-output systems.** *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 111, No. 2, pp. 199-214, 2000.

UTKIN, Vadim I. **Variable Structure Systems with Sliding Modes.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No. 2, pp. 212-222, April-1977.

UTKIN, Vadim I.; GULDNER, Jürgen; SHI, Jingxin. **Sliding Mode Control in Electromechanical Systems.** Londres: Taylor e Francis, 1999.

WU, Jun-feng; LIU, Chun-tao; DENG, Yong. **Variable Structure Control for Stabilizing Double Inverted Pendulum.** *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation, ICICTA*, Vol. 1, pp. 741-744, 2008.

YINXING, H.; JIANQIANG, Y.; DONGBIN, Z.; DIANWEI, Q. **Incremental Sliding Mode Controller for Large-Scale Underactuated System.** *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, pp. 87-92, London-UK, April-2007.

ZADEH, L. A. **Fuzzy Sets.** *Information and Control*, Vol. 8, pp.338-353, 1965.

ZARE, A.; BALOCHIAN, S.; ARVAN, M. R.; BALOCHIAN, H. **A New Optimal Control Approach for Double Inverted Pendulum on Cart (DIPC).** *2nd International Conference on Computer, Control and Communication*, pp. 1-6, 2009.