

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Carlos Velas de Vilhena Junior

Entropia da Informação Para Sistemas de Dois
Corpos

Orientador(a) : *Prof*^(a). *Dr*^(a). Angsula Ghosh

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos básicos para obtenção do título de Mestre em Física.

Manaus

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Entropia de Informação Para Sistemas de Dois Corpos

Carlos Velas de Vilhena Junior

Manaus

2013

Entropia de Informação Para Sistemas De Dois Corpos

Carlos Velas de Vilhena Junior

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Física,
área de concentração em Mecânica Estatística, e aprovada em sua forma final pelo

Departamento de Física da Universidade Federal do Amazonas.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora composta pelos seguintes professores:

Prof^(a). Dr^(a). Angsula Ghosh

Orientador

Banca Examinadora:

Angsula Ghosh

Presidente

Prof^(o). Dr^(o). Mircea Daniel Galiceanu

Dr^(o). Fransisco Dinóla Neto



AGRADECIMENTO

Agradeço à minha família, pelo apoio;
Agradeço a professora Angsula Ghosh, pela orientação, incentivo e dedicação a este trabalho; Agradeço em especial ao professor Puspitapallab Chaudhuri pela colaboração na pesquisa sendo muito importante na reta final do trabalho e também ao professor B.M. Pimentel(IFT-UNESP) pela sua contribuição na ordem e organização da esquemática do trabalho.

Agradeço aos meus professores e colegas que me ajudaram em minha formação;

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

“A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original”.

Albert Einstein

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Considerações Gerais	11
2	ENTROPIA DA INFORMAÇÃO	15
2.1	Informação e Entropia	15
2.2	Entropia da Shannon	20
2.2.1	Extensividade e Aditividade	22
2.3	Entropia de Tsallis	23
3	Sistema de Dois Corpos	27
3.1	Modelo de Moshinsky	27
3.2	Átomo de Positrônio	31
4	Resultados e Discursões: Modelo de Moshinsky	35
4.1	Entropia de Shannon : Espaço das Posições	36
4.2	Entropia de Shannon : Espaço dos Momentos	45
4.3	Princípio da incerteza BBM	53
4.4	Entropia de Tsallis : Espaço das posições	55

4.5	Entropia de Tsallis : Espaço dos momentos	61
4.6	Princípio da incerteza para entropia de Tsallis	68
5	Átomo de Positrônio	71
5.1	Entropia de Shannon : Espaço das Posições	71
5.2	Entropia de Shannon : Espaço dos Momentos	74
5.3	Princípio da incerteza BBM	76
5.4	Entropia de Tsallis : Espaço das posições	77
5.5	Entropia de Tsallis : Espaço dos momentos	80
6	Conclusão	83
A	Biografias	87
A.1	Claude Shannon	87
A.2	Constantino Tsallis	89
A.3	Marco Moshinsky	90

Lista de Figuras

4.1	Entropia de Shannon S_ρ^2 e S_ρ^1 para o espaço das posições no estado fundamental e para o primeiro estado excitado	41
4.2	Entropia de Shannon S_ρ^2 para o espaço das posições	43
4.3	Entropia de Shannon S_ρ^1 para o espaço das posições	44
4.4	Entropia de Shannon S_γ^2 e S_γ^1 para o espaço dos Momentos para os primeiros estados excitados	49
4.5	Entropia de Shannon S_γ^2 para o espaço dos momentos	52
4.6	Entropia de Shannon S_γ^1 para o espaço dos momentos	53
4.7	Entropia de Tsallis $S_\rho^1(q)$ e $S_\rho^2(q)$ para o espaço das posições utilizando o fator entrópico $q = 2$	58
4.8	Entropia de Tsallis $S_\rho^2(q)$ para o espaço das posições	60
4.9	Entropia de Tsallis $S_\rho^1(q)$ para o espaço das posições	61
4.10	Entropia de Tsallis $S_\gamma^2(q)$ e $S_\gamma^1(q)$ no espaço dos momentos no primeiro estado excitado para o fator entrópico $q = 2$	65
4.11	Entropia de Tsallis $S_\gamma^2(q)$ para o espaço dos momentos	67
4.12	Entropia de Tsallis $S_\gamma^1(q)$ para o espaço dos momentos	67
5.1	Entropia de Shannon S_ρ no espaço das posições.	72

5.2	Entropia de Shannon S_γ no espaço dos Momentos	76
5.3	Entropia de Tsallis $S_\rho(q)$ para o fator entropico $q=1.5$ no espaço das posições.	79
5.4	Entropia de Tsallis $S_\gamma(q)$ para o fator entrópico $q = 1.5$ no espaço dos Momentos	82
A.1	Claude Shannon	88
A.2	Constantino Tsallis	90

Lista de Tabelas

3.1	Algumas propriedades do átomo de Positrônio, comparativamente às do átomo de hidrogênio.	32
-----	--	----

Abstract

In this dissertation we present a detailed and analytical study of the information entropy using two formalisms. These formalisms are: Shannon entropy and Tsallis entropy. Shannon entropy obeys the principle of additivity, however the Tsallis entropy is non-additive. These entropies are applied to atomic models of Mochinsky and positronium, which are two-body systems. To determine the entropy, we utilize the wave functions and probability densities for both the atomic models. The Shannon entropy has a logarithmic dependence, while the Tsallis entropy has a dependency on the entropic factor “ q ”, known as the Tsallis entropic factor. In our work, entropies were calculated in the position space and also in the momentum space and also using the concept of the principle of Heisenberg inequality adapted for the information entropy. For the Shannon entropy, we have the Bialynicki, Birula, and Mycielski uncertainty principle, and Tsallis entropy we use pseudo-uncertainty. Finally we demonstrate graphically the behavior of the entropies of both the formalisms.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um estudo detalhado e analítico da entropia da informação usando dois formalismos. Estes formalismos são: entropia de Shannon e a entropia de Tsallis, a entropia de Shannon obedece o princípio da aditividade, já a entropia de Tsallis é conhecida como entropia não-aditiva. Essas entropias serão aplicadas nos modelos atômicos de Mochinsky e Positrônio, que são sistemas de dois corpos. Para determinar a densidade das entropias, nos utilizamos a função de onda e a densidade de probabilidade para ambos os modelos atômicos. A entropia de Shannon tem uma dependência logarítmica, enquanto a entropia de Tsallis tem uma dependência do fator entrópico “ q ”, conhecido como fator entrópico de Tsallis. Em nosso trabalho, as entropias foram calculadas nos espaços das posições e também no espaço dos momentos, com isso utilizamos o conceito do princípio da desigualdade de Heisenberg, adaptando para a entropia da informação. Para a entropia de Shannon, temos o princípio de incerteza de Bialynici, Birula, and Mycielski, para a entropia de Tsallis chamamos de pseudo-incerteza. Por fim demonstramos graficamente o comportamento das entropias de ambos os formalismos.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Gerais

Vivemos atualmente em uma era digital, convivendo com suas bênçãos e maldições, freqüentemente ignorando os fundamentos científicos que explicam e viabilizam o funcionamento de todos os dispositivos a nos rodear e servir. A teoria da informação, desenvolvida a partir da década de 1940, é um dos pilares da chamada Era Digital. A compreensão de seus conceitos favoreceu o desenvolvimento de aplicações jamais pensadas até então, e elevando ao nível de ciência a atividade de engenheiros e técnicos daquela época. Ainda, demonstrou formalmente como “quantizar” informação obtida de fontes contínuas, fornecendo as bases teóricas para a convergência digital, que no início do século XXI começa a se materializar. A teoria da informação também é importante pela influência que tem causado no pensamento científico desde então.

A teoria da informação: inicialmente destinada a resolver problemas de engenharia de telecomunicação, ganhou aceitação quase que imediata das comunidades tecnológica e acadêmica onde militava Claude Shannon[1], seu ator mais influente. Desde então, parece ter se tornado um modismo científico, tendo influenciado outras áreas como Física, Química, Biologia e Economia. A situação se propagou de tal forma que provocou a intervenção de Shannon poucos anos após a publicação de sua obra que causou tamanho furor. Shannon declarou-se surpreso com as repercussões da teoria, que estaria gerando contribuições significativas em outras áreas, mas alertou para o uso inconseqüente dos

conceitos e descobertas que poderiam advir do modismo. A advertência, como se sabe, não foi completamente eficaz, o que parece ter contribuído para o afastamento de Shannon da teoria. Obviamente, a interação da teoria da informação com outros saberes não é nem imprópria nem indesejável. De fato, tal interação tem produzido trabalhos interdisciplinares interessantes, inclusive no Brasil.

Não podemos esquecer que existe diversos tipos de formalismos de entropias, como a Entropia Kullback-Leibler[2] ou também conhecida como entropia relativa. A entropia relativa é sempre não negativa, satisfazendo a desigualdade de Gibbs[3]. Entropia de Hawking ou entropia de buraco negro é a entropia adquirida por um buraco negro. Se buracos negros não possuíssem entropia, seria possível violar a segunda lei da termodinâmica[4] jogando massa dentro de um buraco negro. A única maneira de satisfazer a segunda lei é admitir que os buracos negros possuem entropia, cujo aumento mais do que compensa a diminuição da entropia carregada pelo objeto que foi engolido. Usando a relação termodinâmica entre energia, temperatura e entropia, Hawking[5] foi capaz de formular a equação para entropia:

$$S_{BH} = \frac{k_b A}{4l_p^2} \quad (1.1)$$

onde k_b é a constante de Boltzmann, e $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ é o comprimento de Planck, sendo G a constante universal gravitacional, c a velocidade da luz e \hbar é a constante de Planck. A entropia de buraco negro é proporcional a sua área A . Constantino Tsallis[5] propôs um formalismo para entropia baseada nas leis da termodinâmica[4], inicialmente seu formalismo não envolvia a teoria da informação, seu trabalho foi desenvolvido para sistemas não-extensivos ou não-aditivos. Com o grande avanço na área acadêmica do uso da teoria de Tsallis, seu formalismo passou a ser aplicado em diversas áreas inclusive na informação[7], biologia[8], sistemas financeiros[9] e estudos sociais das populações[10]. Devido ao uso frequente do formalismo de Tsallis, hoje conhecemos este formalismo como estatística de Tsallis ou entropia de Tsallis[4]. A entropia de Shannon ou mesmo de Tsallis podem ser aplicadas em diversos sistemas das mais variadas áreas, nosso objetivo aqui é calcular as entropias explicitamente para o modelo de Moshinsky[11] e Positrônio[12], utilizando a função densidade de probabilidade dos átomos[13], no estado fundamental e para os primeiros estados excitados, utilizando os formalismo de Shannon e Tsallis. Analisar os gráficos das entropias e fazer o comparativo com a literatura.

A motivação para o estudo da teoria da informação, desenvolvida a partir da década de 1940[1], é um dos pilares da assim chamada era digital. A compreensão dos seus conceitos favoreceu o desenvolvimento de aplicações jamais pensadas até então, é elevando ao nível de ciência a atividade de engenheiros e técnicos daquela época. Ainda, demonstrou formalmente como “quantizar” informação obtida de fontes contínuas, fornecendo as bases teóricas para a convergência digital, que no início do século XXI começa a se materializar. A teoria da informação também é importante pela influência que tem causado no pensamento científico desde então. Aplicando assim a entropia da informação para o desenvolvimento científico tanto na área da computação como também na área da física estatística tendo vasta ramificação como por exemplo aplicações em Biologia, agricultura, sinais neuróticos[10] e sistema financeiros[10]. Com o grande avanço das tecnologias devemos dominar todos os aspectos desse avanço, e a entropia vem justamente nos ajudar até onde podemos evoluir sem perder as características dos sistemas reais e de laboratórios usados hoje nas grandes pesquisas desde o universo até as bolsas de valores. Assim temos condições propícias para uma abordagem bem ampla, bastando configurar a função de onda dos modelos de Moshinsky[11] e Positrônio[12], é assim obter a função de densidade de probabilidade para nosso problema.

Neste trabalho apresentaremos dois sistemas físicos que contêm dois corpos cada um, o primeiro sistema é o do modelo de Moshinsky que é puramente matemático desenvolvido por Marco Moshinsky[11] na década de 60, outro sistema a ser utilizado é o átomo de Positrônio que é puramente experimental prevista por Paul A.M. Dirac[14] em 1930. Esses dois sistemas serão os objetivos de trabalho de nossa dissertação. Vamos utilizar os conceitos de função de onda para resolver as funções de cada átomo para obtermos a função densidade de probabilidade que será de extrema importância no cálculo da entropia da informação. Apresentaremos os conceitos de entropia termodinâmica[4] e na informação[1], dentro do conceito de entropia da informação vamos dar ênfase a teoria de Shannon[1] e de Tsallis[7]. A teoria de Shannon carrega com si, o conceito de aditividade diferentemente da teoria de Tsallis onde a aditividade não é válida. A teoria de Tsallis se diferencia de Shannon não somente pelo fator de aditividade mas também pelo fator entrópico proposto de Tsallis em 1988, onde seu fator entrópico depende do sistema físico em questão. Os desenvolvimentos dos cálculos estão baseados principalmente na equação Schrödinger[15] para cada átomo, e nos polinômios de Legendre, Hermite, Laguerre e Ge-

genbauer[16]. O foco principal do nosso trabalho é as soluções analíticas das entropias aqui estudadas. O trabalho está dividido em capítulos nos quais vêm esclarecer cada passo que possamos utilizar no decorrer do trabalho para resolver o problema proposto da Entropia da Informação para Sistemas de Dois Corpos.

No capítulo 1 introduzimos nossos objetivos e motivação para realizar nosso trabalho. No capítulo 2 vamos abordar o conceito de entropia da informação, bem como o significado de informação e entropia na termodinâmica, na teoria da informação[1] e na mecânica estatística[4]. No capítulo 3 apresentamos os modelos de dois corpos[17]: Moshinsky[11] e Positrônio[12]. No capítulo 4 mostramos os cálculos referente ao modelo de Moshinsky. O capítulo 5 estão os resultados analíticos do modelo de Positrônio e no capítulo 6 nossas conclusões do trabalho.

Capítulo 2

ENTROPIA DA INFORMAÇÃO

2.1 Informação e Entropia

Informação, é um termo que vem sendo usado mais generalizado a partir da década de 50, já estando, inclusive, incorporado ao cotidiano das pessoas. É usado para significar mensagens, notícias, novidades, dados, conhecimento, literatura, símbolos, signos e, até mesmo, “dicas” e sugestões. A importância da informação é resumida por Sagan[18] em uma única frase: “informação e alimento [ar, aí compreendido] são as condições necessárias à sobrevivência do ser humano”. A informação, na verdade, é indispensável para toda e qualquer atividade humana, sendo, cada vez mais, vista como uma força importante e poderosa a ponto de dar origem a expressões como: sociedade da informação, explosão da informação, era da informação, indústria da informação, revolução da informação, sociedade da informação. A pesquisa sobre a entidade informação e seus impactos é efetuada em diferentes áreas e contextos: suas fronteiras ultrapassam o contexto humano e mesmo o social; perpassam¹ o animal e a máquina, sendo, até mesmo, uma categoria filosófica ou relacionada a categorias filosóficas como matéria, espaço, movimento, tempo e energia.

A palavra informação vem do latim “informare”: dar forma, pôr em forma ou aparência, criar, mas, também, representar, apresentar, criar, uma idéia ou noção algo que é colocado em forma, em ordem. Segundo Zeman[19], a informação é a colocação de alguns

¹1. Passa junto de ou ao longo de. 2. Passar, seguir uma direção.

elementos ou partes, materiais ou não, em alguma forma, em algum sistema classificado, ou seja, informação é a classificação de alguma coisa: símbolos e suas ligações em uma relação seja organização de órgãos e funções de seres vivos[8], de um sistema social[18] qualquer, de uma comunidade qualquer. A expressão da informação de um sistema tem por base, como se sabe, a fórmula matemática da entropia negativa.

Informação não é um termo exclusivamente matemático. É, também, filosófico, por estar ligado à qualidade da realidade material a ser organizada e sua capacidade de organizar, de classificar em sistema, de criar. Um objeto material determina suas qualidades relativas ao espaço, ao tempo, ao movimento e à sua organização qualidade esta que se manifesta como entropia negativa, isto é, informação. Se a massa mensura os efeitos da gravitação e da força de inércia e a energia mensura o movimento, a informação, em sentido quantitativo, mensura a organização do objeto material. A matéria está ligada não só às características referentes a espaço, tempo e movimento, mas também à característica da organização. Matéria, espaço, tempo, movimento e organização estão em conexão recíproca. Informação não é, na verdade, um conceito único, singular, mas, sim, uma série de conceitos conectados por relações complexas. Para definir informação, é necessário primeiramente analisar o amplo espectro de definições em que a informação pode se inserir, como propõe Dong[20]. No nível mais abrangente de definições, está o espectro filosófico, no qual são discutidas a causa final/causa fundamental, a natureza e a função da informação. Filósofos podem ter diferentes opiniões, mas, consensualmente, definem informação da forma mais abstrata. Nesta perspectiva, informação não é nem um tipo específico de objeto, nem tem nenhum conteúdo específico; é, simplesmente, o veículo de inter relações e interações entre objetos e conteúdos. Cabe até mesmo questionar, agora, se uma ciência da informação se ocupa realmente da informação. Qual seu real objeto de estudo? Se informação é aquilo que altera estruturas no interior de organismos e se a ciência da informação vem lidando fundamentalmente com o reempacotamento e a reembalagem de mensagens e com a disseminação “desse produto”, não será esse nome no mínimo inadequado para a práxis² e a teoria dessa área? Não se torna premente mudar o foco de suas atenções para a informação e não para seus simulacros, muitas vezes distorcidos e mutilados? É fundamental que a ciência da informação aproxime-se do fenômeno que pretende estudar o encontro da mensagem com o receptor, ou seja, a

²Atividade prática; ação exercício, uso.

informação, seu uso, implicações e conseqüências. Se informação é tudo aquilo que altera, transforma estruturas, então a informação é a mais poderosa força de transformação do homem. O poder da informação, aliado aos modernos meios de comunicação de massa, tem capacidade ilimitada de transformar culturalmente o homem, a sociedade e a própria humanidade como um todo. Embora a informação sempre tenha sido uma poderosa força de transformação, a máquina, o poder de reprodução e a capacidade de socialização deram uma nova dimensão a esse potencial. Em resumo, informação e comunicação constituem entidades complexas, dinâmicas, que extrapolam, na visão de muitos autores, os limites de uma teoria ou um modelo determinado. A informação científica e tecnológica é produto da prática histórica e social da sociedade moderna, usa os códigos de linguagem, símbolos e signos reconhecidos nessa sociedade e os canais de circulação de mensagens disponíveis no sistema de comunicação.

A informação é gerida da seguinte modelo :



onde estão presentes dados, informação é conhecimento.

- Os dados são qualquer fluxo entre fonte e destino
- A Informação está associada ao processo da informação
- O Conhecimento está associado ao processamento da informação

Tipos de Fontes :

Fonte Contínua: Associada ao sinal analógico.

Fonte Discreta: Associada ao sinal digital, transmite símbolos de um alfabeto fonte.

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs[4] foi formulada a mais de um século e, desde então, tem tido um sucesso notável para uma enorme variedade de sistemas. A entropia foi formulada termodinamicamente no século XIX por Clausius[4]. Posteriormente, Boltzmann e Gibbs desenvolveram a teoria da mecânica estatística, com a entropia ocupando um papel central. Eles associaram a idéia termodinâmica de entropia com uma

abordagem probabilística do sistema.

$$S = k_b \ln \omega_i \quad (2.1)$$

Onde k_b é uma constante de Boltzmann[4],³ ω_i é a quantidade de microestados. Esta equação, conhecida como o princípio de Boltzmann, é uma das expressões fundamentais da mecânica estatística.

Desde sua formulação original, existe o interesse em esclarecer se o princípio de Boltzmann deveria ser possível de derivar da dinâmica microscópica[17]. Já que refere-se a estados microscópicos, mas a implementação deste cálculo ainda não tem se logrado⁴. O conceito de entropia é de fundamental importância na termodinâmica, mecânica estatística[13] e teoria da informação[1]. Recentemente, estudos de sistemas físicos que envolvem a presença de efeitos não-extensivos têm despertado um grande interesse, principalmente porque tais sistemas não são convenientemente descritos pela mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. A presença de características não-extensivas é comum em sistemas astrofísicos, sistemas magnéticos e sistemas que apresentam evolução temporal da entropia.

A mecânica estatística[4] é a teoria básica subjacente à teoria fenomenológica da termodinâmica e tem como um dos seus objetivos explicar suas leis e resultados. A termodinâmica[4], por sua vez, sistematiza as leis empíricas sobre o comportamento térmico dos corpos macroscópicos e tira seus conceitos diretamente dos experimentos. Sua abordagem axiomática, baseada em postulados[4].

⊙ Existem estados de equilíbrio macroscópico (para sistemas simples), completamente caracterizados pela energia interna, volume e número de moles das espécies químicas que constituem o sistema.

⊙ Existe uma entropia S , função dos parâmetros extensivos do sistema, que é máxima no estado de equilíbrio.

⊙ A entropia é uma função contínua, diferenciável e monotonicamente crescente da energia. É aditiva (extensiva) sobre os sub sistemas constituintes.

³que sem perda de generalidade consideramos igual à unidade

⁴ obter, desfrutar, desfruir

⊙ A entropia se anula no Zero Absoluto.

A termoestatística de Boltzmann-Gibbs (B-G) constitui uma ferramenta poderosa para predições em sistemas usuais, mais precisamente quando vale a extensividade termodinâmica, isto é, nos casos em que as interações microscópicas podem ser desprezadas ou são de curto alcance e quando a memória microscópica é de curta duração ou não existe. A presença de forças de longo alcance causa modificações importantes na termodinâmica, muitas delas ainda não devidamente investigada. Por exemplo, o conceito de sistema isolado, essencial na teoria de Boltzmann-Gibbs, é uma idealização apropriada quando as interações forem de curto alcance e portanto decaindo rapidamente com a distância.

O conceito físico de entropia está relacionado tanto a um estado como a uma tendência[1]: no primeiro caso, ao grau de desorganização da matéria; no segundo, à tendência de desorganização de toda a matéria. A termodinâmica[4] afirma que a entropia[4] nunca diminui num sistema fechado, ou seja, seu grau de desorganização pode aumentar, mas jamais diminuir. Disto decorre que a entropia é um estado dinâmico que varia em função do seu estado inicial de organização da matéria e do tempo, caracterizando um processo irreversível. As inúmeras interpretações e conseqüência físicas e cosmológicas são abrangentes e profundas; entretanto, este trabalho impõe que apenas os aspectos que mais se relacionam com a teoria da informação sejam considerados, o que impõe abordar a entropia conforme pensada por Ludwig Boltzmann[4].

Boltzmann define a entropia em termos estatísticos dentro do um contexto mecânico. Como se sabe, a estatística estuda as propriedades de uma amostragem ou população, ou seja, de um conjunto finito de objetos. De fato, é impossível estudar as propriedades macroscópicas da matéria pelas características individuais de cada molécula. Assim sendo, a entropia que Boltzmann define é uma estatística sobre uma quantidade de matéria, ou seja, um número que descreve as moléculas coletivamente[13].

A abordagem de Boltzmann baseou-se numa proposição de Maxwell, conhecida como Lei da Distribuição da Velocidades[15]. A descrição do que aconteceria dentro de um recipiente repleto de gás fornece a explicação : as moléculas, partindo de um estado inicial organizado(supondo que fossem introduzidas no recipiente com mesma velocidade), começariam pouco a pouco exibir variações nas suas velocidades individuais em

decorrência das colisões entre elas até atingir um estado de desordem máxima. As velocidades que uma molécula pode assumir são infinitos, mesmo que a variação entre a menor e a maior delas seja infinita. Boltzmann propõe que o estado mais molecularmente desorganizado seria aquele em que a distribuição das velocidades fosse homogênea. É conveniente notar que é a distribuição das velocidades, e não a velocidades em si, que são homogêneas : velocidades homogêneas provocariam, ao contrário, uma distribuição igual de velocidades.

A proposição de Boltzmann resulta em equações integrais cuja resolução é impraticável(uma solução melhor apareceria mais tarde com Max Planck[21]). Segundo a teoria quântica[15], átomos[15] e moléculas[15] não se encontram em qualquer estado, mas somente em estado estáveis discretos, sendo que a transição de um estado para o outro envolve absorção e emissão de energia[13]. A contagem destes estados quantizados dá a medida da entropia do sistema. Ainda assim, a determinação precisa da entropia continua impraticável, o que levou ao desenvolvimento de métodos de cálculo aproximados, através da criação de amostras discretas de velocidade, ou seja, criando faixas de velocidades. É interessante notar que Shannon empregou princípios semelhantes na *Teoria Matemática da comunicação* quando formulou o método de transformação de sinais contínuos em discretos. Ele propõe a divisão do *continuum* de sinais num número grande, mas finito, de pequenas regiões às quais se aplicariam os mesmos cálculos dos sinais contínuos.

A entropia da informação está ligada a “desordem” de um sistema, sendo chamada de “desordem” o grau de aleatoriedade dos micro eventos do sistema. Então quanto maior o grau de aleatoriedade, maior será o valor da entropia, isto, significa um potencial maior da informação ou máximo de informação transmitida.

2.2 Entropia da Shannon

A Teoria da informação é uma ramificação da teoria de probabilidades introduzida por Claude Shannon[1] com a publicação do artigo ”The Mathematical Theory of Communication” em 1948, apresentando um novo modelo matemático para o estudo de sistemas de comunicação. Os principais objetivos de Shannon eram descobrir as leis que regulam os sistemas usados para comunicar e manipular a informação e definir medidas quantitativas

para a informação e para a capacidade de determinados sistemas transmitirem, armazenarem e processarem a informação. Uma das inovações mais importantes do modelo introduzido por Shannon, foi considerar os componentes de um sistema de comunicação (fontes de informação, canais de comunicação) como elementos probabilísticos.

Shannon propôs uma forma de medição quantitativa da informação fornecida por um evento probabilístico, baseada na tradicional expressão de entropia de Boltzmann(1896) presente na termodinâmica e física estatística. Foi Shannon quem primeiro relacionou entropia e informação. Em seu modelo de comunicação(fonte-canal-receptor) visto acima, a quantidade de informação transmitida em uma mensagem é função de previsibilidade da mensagem. A noção de entropia está ligada ao grau de desorganização existente na fonte de informação. Quanto maior a desordem, maior o potencial de informação desta fonte. Uma fonte que responda com uma única e mesma mensagem a toda e qualquer pergunta não transmite informação, já que não há redução de incerteza.

Segundo a teoria quântica, átomos e moléculas não se encontram em qualquer estado, mas somente em estados estáveis discretos, sendo que a transição de um estado para o outro envolve absorção e emissão de energia. A contagem destes estados quantizados dá a medida da entropia do sistema. Ainda assim, a determinação precisa da entropia continua impraticável, o que levou ao desenvolvimento de métodos de cálculos aproximados, através da criação de amostras discretas de velocidades, ou seja, criando faixas de velocidades. É interessante notar que Shannon empregou princípios semelhantes na Teoria Matemática da comunicação quando formulou o método de transformação de sinais contínuos em discretos. Ele propõe a divisão do continuum de sinais num número grande, mas finito, de pequenas regiões às quais se aplicariam os mesmos cálculos dos sinais contínuos. Como a motivação principal da teoria da matemática da comunicação era tecnológica, Shannon aborda o problema fundamental da transmissão de informação: garantir que a mensagem enviada seja recebida sem erros. Erros, segundo Shannon, são ocorrências fortuitas que causam interferências no canal da comunicação, podendo fazer com que os sinais sejam corrompidos. Ele propõe que o risco de corrupção de sinais numa mensagem seja mitigado pela inserção intencional de redundância: deveria ser adicionar sinais que permitissem identificar se a mensagem foi corrompida. Tais sinais deveriam ser calculados em função dos sinais previamente enviados, sendo que o receptor deveria realizar o mesmo cálculo

e, se a mensagem estiver íntegra, chega ao mesmo resultado. Shannon também propõe que seria possível elaborar um algoritmo de recuperação de erros, no que chamou de “codificação eficiente”.

Shannon propôs uma equação para calcular a entropia da informação, seu formalismo proporciona uma ligação com espaço das posições e dos momentos. No espaço discreto temos que :

$$S = -k_b \sum_{i=1}^W \omega_i \ln \omega_i, \quad (2.2)$$

onde se tem micro-estados i com probabilidade $\omega_i = \frac{1}{W}$, e k_b é a constante de Boltzmann.

Para o espaço das posições a entropia fica :

$$S_\rho = - \int \rho(r) \ln \rho(r) dr \quad (2.3)$$

para o espaço dos momentos a entropia fica :

$$S_\gamma = - \int \gamma(k) \ln \gamma(k) dk \quad (2.4)$$

As densidades de probabilidades $\rho(r)$ e $\gamma(k)$ são obtidas a partir das funções de ondas dos modelo de Moshinsky e Positrônio, tanto para posição como para momento. A entropia de Shannon esta associada o principio de incerteza BBM[15], que obedece a seguinte equação :

$$S_\rho + S_\gamma \geq D(1 + \ln(\pi)). \quad (2.5)$$

Definindo que D é a dimensão utilizada é π vale 3.14, esta relação estabelece um valor máximo que a entropia deve obedecer.

2.2.1 Extensividade e Aditividade

Os conceitos de aditividade e extensividade são diferentes. Se um sistema A tem uma dada quantidade associada $S(A)$ esta quantidade é *aditiva* em relação a lei de composição

particular, tomamos dois sistemas qualquer A e B, verifica-se que:

$$S(A + B) = S(A) + S(B), \quad (2.6)$$

onde o símbolo + no argumento de S refere-se à lei de composição. Isto é verdadeiro para a maior parte dos sistemas físicos de interesse sob a hipótese de poder desprezar as interações de elementos pertencentes a diferentes subsistemas. Em particular, não é verdadeiro para sistemas com interação de longo alcance onde as interações entre elementos que pertencem a subsistemas diferentes são comparáveis com as interações dentro de cada subsistema. No caso de N subsistemas diferentes, a relação a equação anterior se generaliza imediatamente da forma:

$$S\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N S(A_i). \quad (2.7)$$

Para caso especial de subsistemas iguais, $A_i = A$, se tem que

$$S\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = S(NA) = NS(A). \quad (2.8)$$

Por outro lado o conceito de *extensividade* se relaciona com a seguinte expressão

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S(N)|}{N} < \infty. \quad (2.9)$$

Um sistema extensivo tem um comportamento assintótico com números de subsistemas N tal que existe um fator de proporcionalidade finito entre $|S(N)|$ e N . Esta é uma condição mais fraca que a aditividade. Mais precisamente, aditividade em relação a uma dada lei de composição implica extensividade, onde $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(NA)}{N} = S(A)$. Portanto, se pode considerar que um sistema extensivo é assintoticamente aditivo.

2.3 Entropia de Tsallis

O formalismo não-extensivo tem sido objeto de intenso interesse de muitos autores e tem tido enorme sucesso na descrição de fenômenos complexos que, em geral, exibem

comportamentos do tipo lei de potência e tem tido muitas aplicações em várias disciplinas. Em particular, em sistemas dinâmicos dissipativos de baixa dimensionalidade, como por exemplo o mapa logístico no limiar do caos, sistemas dinâmicos conservativos de baixa dimensionalidade, sistemas Hamiltonianos de muitos corpos, sistemas quânticos (emaranhamento quântico), turbulência, sistemas sociais, financeiros e naturais. Assim podemos ver a grande aplicabilidade de Entropia de Tsallis[22]. Os temas científicos, nos quais ele tem pesquisados incluem:

- Fenômenos críticos e transições de fase em magnetismo[7].
- Celular autômatos, redes neurais e do caos[8].
- Genética e Imunologia, em particular, um modelo em espaço de configurações (referida como “modelo de Tsallis” na literatura)[8].
- Economia, onde colaborou na formulação e estudo de certos modelos microeconômicos que mereceu atenção nacionais e internacional[9].
- Fractais e aplicações na avaliação, como consultor regular da Petrobrás, dos reservatórios brasileiros de gasolina[].
- A psicologia cognitiva, envolvendo a comparação de recursos humanos memorização/aprendizagem de processos gerados por computador com redes neurais[18].

Tsallis[6] generalizou a termodinâmica de Boltzmann-Gibbs[4], sendo elaborada em 1988, que, até agora, tem motivada muitos artigos por vários países expressões como “a entropia de Tsallis[4]”, “estatística de Tsallis” e semelhantes, são hoje usados atualmente na literatura. Inspirado por sistemas multifractais, C. Tsallis propôs em 1988 a entropia generalizada[6], que tem a seguinte expressão matemática.

$$S(q) = k_b \frac{1 - \sum_{i=1}^W (\omega_i)^q}{q - 1} \quad (q \in \mathbb{R}) \quad (2.10)$$

Devemos lembrar que k_b é a constante de Boltzmann, W são os micro estados do sistema e R é o espaço real dos números reais. No limite que $q \rightarrow 1$, verifica-se que a entropia de Tsallis reduz-se à entropia de Shannon ou seja; o valor do índice entrópico é uma

característica do sistema, ou da classe de universalidade do sistema. Se acredita que o valor de q para um sistema específico deve ser determinado a priori da dinâmica microscópica. Isto tem como fundo a discussão sobre a origem dinâmica da mecânica estatística, e que, mesmo no formalismo de Boltzmann-Gibbs, ainda não é completamente compreendida.

Além disso, no formalismo não-extensivo surgem outros dois índices q ; o conjunto de índices é chamado de q -tripleto relacionados com a relaxação e a sensibilidade às condições iniciais.

O formalismo tem um sólido fundamento teórico, é um grande número de resultados analíticos entre os quais destacamos as propriedades da q -entropia: $S(q)$ é não-negativa, côncava (estabilidade termodinâmica), estável (experimentalmente robusta), apresenta um paralelo completo com termodinâmica[15], e teoremas q -invariantes[6], como o teorema H, a transformada de Legendre, o teorema de Ehrenfest, a igualdade de Pesin, entre muitos outros. Agora vamos calcular a entropia para $q \rightarrow 1$, Assim queremos demonstrar que a entropia de Tsallis retorna para entropia de Shannon.

$$S_1 = \lim_{q \rightarrow 1} k_b \frac{1 - \sum_{i=1}^W \omega_i (\omega_i)^{q-1}}{q-1} = \lim_{q \rightarrow 1} k_b \frac{1 - \sum_{i=1}^W \omega_i e^{((q-1) \ln \omega_i)}}{q-1} \quad (2.11)$$

e, expandido a exponencial em séries de potências de $(q-1)$ podemos concluir que :

$$S_1 = \lim_{q \rightarrow 1} k_b \frac{1 - \sum_{i=1}^W \omega_i (1 + (q-1) \ln \omega_i + \dots)}{q-1} = -k_b \sum_{i=1}^W \omega_i \ln \omega_i \quad (2.12)$$

Assim descrita na sua forma diferencial, temos que trata-la na sua forma integral, pois estamos interessados em todo o espectro contínuo. No espaço das posições temos :

$$S_\rho(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int d^D r | \rho(\vec{r}) |^q \right), \quad (2.13)$$

sendo que D é a dimensão, $\rho(\vec{r})$ é a densidade de probabilidade no espaço das posições e q o fator entrópico. No espaço dos momentos temos :

$$S_\gamma(p) = \frac{1}{p-1} \left(1 - \int d^D k | \gamma(k) |^p \right), \quad (2.14)$$

onde $\gamma(k)$ é a densidade de probabilidade no espaço dos momentos e p é o fator entrópico.

A entropia generalizada de Tsallis viola a aditividade (parte do terceiro postulado). Esta propriedade conduz a uma mecânica estatística generalizada cujo formalismo está

estruturado sobre dois objetos básicos: a forma entropica $S(q)$ e um valor médio generalizado para os observáveis. Nesse formalismo, a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs está contida na mecânica estatística generalizada como um caso particular. Mais precisamente, no limite $q \implies 1$ a termoestatística de Boltzmann-Gibbs é reobtida, onde q é um parâmetro característico presente na entropia de Tsallis.

Em particular, em sistemas dinâmicos dissipativos de baixa dimensionalidade, como por exemplo o mapa logístico no limiar do caos, sistemas dinâmicos conservativos de baixa dimensionalidade, sistemas Hamiltonianos de muitos corpos, sistemas quânticos (emaranhamento quântico), turbulência, sistemas sociais, financeiros e naturais.

Para a entropia de Tsallis utilizaremos a relação de pseudo-incerteza[23] considerando à não-extensividade da teoria.

$$\frac{[1 + (1 - p)S_\gamma(p)]^{1/2p}}{[1 + (1 - q)S_\rho(q)]^{1/2q}} \leq \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-n/4q} \left(\frac{\pi}{p}\right)^{n/4p}. [15]$$

A grande diferença entre as teorias de Shannon[1] e Tsallis[6] esta na propriedade da não- extensividade[23] por a entropia de Tsallis e trata como uma forma mais geral de se encontrar valores para entropia da informação à não aditividade[15] deve obedecer a seguinte pseudo-aditiva[23]:

$$\frac{S(q)(A + B)}{k_b} = \frac{S(q)(A)}{k_b} + \frac{S(q)(B)}{k_b} + (1 - q)\frac{S(q)(A)}{k_b}\frac{S(q)(B)}{k_b} \quad (2.15)$$

Esta relação é valida para dois sistemas estatisticamente independentes A e B, onde k_b é a constante de Boltzmann. Observa-se que $q < 1$, $q = 1$ e $q > 1$ correspondem, respectivamente, à entropia superaditiva (superextensiva), aditiva (extensiva) e subaditiva(subextensiva).

O índice entrópico q caracteriza o grau de não-extensividade (não-aditividade, ou ainda não-localidade) do sistema, e está intimamente relacionado à sua dinâmica microscópica.

Capítulo 3

Sistema de Dois Corpos

3.1 Modelo de Moshinsky

O grande interesse em estudar o modelo de Moshinsky se deve ao fato de ele se composto por duas partículas é poder ser solúvel de maneira analítica. Isso possibilita o estudo aprofundado deste átomo e seus resultados podem ser utilizados para o estudo dos átomos na física atômica de maneira mais realística sem utilizar os métodos aproximativos. Em um sistema de duas partículas interagindo, as correlações posição-momento coexistem com a correlações que emanam da simetria e do potencial de interpartículas. Este problema de separar as correlações está relacionado com o conhecimento de como cada uma influencia os outros. Alguns resultados já são bastantes interessantes com propriedades relacionadas ao modelo do modelo de Moshinsky, mas a grande maioria destes resultados são apenas para o estados fundamental. O emaranhamento do modelo de Moshinsky é bastante útil para o desenvolvimento de técnicas para o estudo de outros átomos, sendo que é necessário usar a aproximação de Hartree-Fock.

O modelo de Moshinsky consiste de dois elétrons do sistema em que as duas partículas com spins opostos estão ligados à origem de um potencial externo harmônico isotrópico[13]. Hamiltoniano de tal sistema é expresso por :

$$H = -\frac{1}{2}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}\lambda^2(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2}\omega^2(r_1 - r_2)^2$$

Onde r_1 e r_2 são respectivamente as coordenadas do centro de massa das partículas do sistema, λ é a frequência do potencial harmônico externo e ω é a frequência do potencial harmônico interno.

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_2)$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_2)$$

Fatorizamos o hamiltoniano da seguinte forma :

$$H = \left(-\frac{1}{2}\nabla_R^2 + \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \right) + \left(-\frac{1}{2}\nabla_r^2 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \right)$$

As autofunções do sistema são :

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Psi_N(R)\Psi_n(r)$$

Os autovalores são dados por :

$$E = \omega \left(N_R + \frac{1}{2} \right) + \Lambda \left(N_r + \frac{1}{2} \right)$$

Logo a solução normalizada do Hamiltoniano do sistema é dada por : Assim definiremos as autofunções para o modelo de Moshinsky, da seguinte maneira, para partícula (1) ou oscilador (1) definimos a função de onda no espaço das posições em coordenadas esféricas (R, Θ, Φ) , dada por:

$$\Psi(\mathbf{R})_{n,l,m} = \left(\frac{2n!(\omega)^{(l+D/2)}}{\Gamma(n+l+D/2)} \right)^{1/2} R^l e^{-\omega R^2} L_n^{l-1+D/2}(\omega R^2) Y_{l,m}(\Theta, \Phi) \quad (3.1)$$

Sendo (n, l, m) os números quânticos principais[15], n é o número quântico principal, l é número quântico azimutal e m é o número quântico associado ao spin. Definimos também o polinômio de Laguerre[16] dado por $L_n^{l-1+D/2}(\omega R^2)$, os harmônicos esféricos $Y_{l,m}(\Theta, \Phi)$ [16] e a função gamma[24] dada por $\Gamma(n+l+D/2)$ [21]. Representamos (R, Θ, Φ) como as posições para o oscilador (1). Definiremos a seguir a função de onda para a partícula (2) ou oscilador (2), que levará em conta a interação de acoplamento entre os osciladores (1) e (2).

$$\Psi(\mathbf{r})_{N,L,M} = \left(\frac{2N!(\Lambda)^{(L+D/2)}}{\Gamma(N+L+D/2)} \right)^{1/2} r^L e^{-\Lambda r^2} L_N^{L-1+D/2}(\Lambda r^2) Y_{L,M}(\theta_r, \phi_r) \quad (3.2)$$

Λ é o potencial de acoplamento entre os osciladores, sendo definido como, $\Lambda^2 = 2\lambda^2 + \omega^2$. Os termos (n, l, m) e (N, L, M) , são os números quânticos associados a cada oscilador é definida como:

A partir das funções de ondas obtidas acima, iremos definir a densidade de probabilidade para as partículas (1) e (2). No espaço (\mathbf{R}) , temos que a densidade é :

$$\rho(R) = |\Psi(\mathbf{R})_{n,l,m}|^2$$

sendo que

$$\rho(R) = N_{n,l}^2 R^{2l} e^{-\omega R^2} |L_n^{l+D/2-1}(\omega R^2)|^2 |Y_{l,m}(\Theta, \Phi)|^2. \quad (3.3)$$

$N_{n,l}$ é a constante de normalização para o espaço das posições em R , dada por :

$$N_{n,l} = \left(\frac{2n!(\omega)^{l+D/2}}{\Gamma(n+l+D/2)} \right)^{1/2}.$$

No espaço (\mathbf{r}) , temos que a densidade de probabilidade é :

$$\rho(r) = |\Psi(\mathbf{r})_{N,L,M}|^2,$$

sendo em sua forma geral.

$$\rho(r) = T_{N,L}^2 r^{2L} e^{-\Lambda r^2} |L_N^{L+D/2-1}(\Lambda r^2)|^2 |Y_{L,M}(\theta, \phi)|^2. \quad (3.4)$$

$T_{N,L}$ é a constante de normalização para o espaço das posições em r .

$$T_{N,L} = \left(\frac{2N!(\Lambda)^{L+D/2}}{\Gamma(N+L+D/2)} \right)^{1/2}.$$

Ressaltando que a densidade que utilizaremos é o produto das densidades de R e r . Logo teremos as densidade de probabilidade de forma que:

$$\rho_2(R, r) = \rho(R)\rho(r) \quad (3.5)$$

$$\rho_1(r) = \int \rho_2(R, r) d^3 R. \quad (3.6)$$

Para o espaço dos momentos vamos utilizar as transformadas de Fourier[6] entre posição e momento. Um formalismo generalizado da transformada em D-dimensões é dado por:

$$\mathbf{F}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int_{\mathbb{R}} f(\vec{r}) e^{-ik\vec{r}} d^D \vec{r} \quad (3.7)$$

Através da transformada de Fourier[24] obtemos a função de onda do modelo de Moshinsky no espaço (p, θ, ϕ) dos momentos.

$$\Psi(n, l, m)_{k, \theta, \phi} = \left(\frac{2n! (\omega)^{(-l-D/2)}}{\Gamma(n+l+D/2)} \right)^{1/2} k^l e^{-[(k^2)/(2\omega)]} L_n^{l-1+D/2} \left(\frac{k^2}{\omega} \right) Y_{l,m}(\theta_k, \phi_k). \quad (3.8)$$

Onde as mesmas grandezas definidas no espaço das posições são validas para o espaço dos momentos, definiremos a seguir a função de onda no espaço dos momentos para a partícula (2) ou oscilador (2), que levará em conta a interação de acoplamento entre os osciladores (1) e (2).

$$\Psi(N, L, M)_{K, \Theta, \Phi} = \left(\frac{2N! (\Lambda)^{-L-D/2}}{\Gamma(N+L+D/2)} \right)^{1/2} K^L e^{-(K^2)/(2\Lambda)} L_N^{L-1+D/2} \left(\frac{K^2}{\Lambda} \right) Y_{L,M}(\Theta_K, \Phi_K). \quad (3.9)$$

Em nosso trabalho fixamos um oscilador que chamamos de (1) em um determinado estado específico, é variamos o outro oscilador que chamamos de (2) assim podemos calcular o valor da entropia da informação utilizando os formalismo de Shannon e Tsallis. Com a função de onda conhecida podemos calcular a densidade de probabilidade que será fundamental para os cálculos. A partir da eq.(3.1), definimos a densidade de probabilidade no espaço (p, θ, ϕ) dos momentos.

$$\gamma(k) = B_{n,l}^2 k^{2l} e^{-\frac{k^2}{\omega}} |L_n^{l+D/2-1} \left(\frac{k^2}{\omega} \right)|^2 |Y_{l,m}(\theta_{(k)} \phi_{(k)})|^2, \quad (3.10)$$

sendo $B_{n,l}$ a constante de normalização da função de onda acima.

$$B_{n,l} = \left(\frac{2n!(\omega)^{-l-D/2}}{\Gamma(n+l+D/2)} \right)^{1/2}.$$

Agora definimos a densidade de probabilidade para o espaço (K, Θ, Φ) dos momentos.

$$\gamma(K) = J_{N,L}^2 K^{2L} e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \left| L_N^{L+D/2-1} \left(\frac{K^2}{\Lambda} \right) \right|^2 |Y_{L,M}(\Theta_{(K)} \Phi_{(K)})|^2 \quad (3.11)$$

$$J_{N,L} = \left(\frac{2N!(\Lambda)^{-L-D/2}}{\Gamma(N+L+D/2)} \right)^{1/2}.$$

3.2 Átomo de Positrônio

As primeiras especulações sobre a possibilidade da existência do Positrônio foram feitas por A. E. Ruark em 1945: A confirmação experimental da existência do Positrônio[12] coube a Deutsch[23] em 1951. Dependendo dos spins do pósitron e do elétron, o Positrônio pode ser formado em dois estados: um singlete, se os spins envolvidos são anti-paralelos (S_0), que é o para-Positrônio, representado pelo símbolo p -Ps e um tripleto, se seus spins são paralelos (S_1), o orto-Positrônio, representado pelo símbolo o -Ps.

$$\mathbf{e}^+ \uparrow + \mathbf{e}^- \downarrow \longrightarrow (\mathbf{e}^+ \uparrow \mathbf{e}^- \downarrow), p - Ps$$

$$\mathbf{e}^+ \uparrow + \mathbf{e}^- \uparrow \longrightarrow (\mathbf{e}^+ \uparrow \mathbf{e}^- \uparrow), o - Ps.$$

Em virtude do o -Ps possuir três possíveis números quânticos magnéticos ($m_l = +1, 0, -1$), enquanto que o p -Ps possui apenas um ($m_l = 0$), a probabilidade de formação do primeiro, é três vezes maior do que o segundo. Ou seja, a multiplicidade $(2S + 1)$ define o

peso estatístico de cada estado, assim de todos os átomos de Ps formados, 75 são de *o*-Ps e 25 de *p*-Ps.

Propriedades	Ps	H
Massa atômica	0.00110	1.0080
Massa reduzida	1/2	0.99946
Raio de Bohr	0.106	0.053
Carga	0	0
Potencial de Ionização	6.803	13.598
Afinidade eletrônica	0.2	0.75
Coefficiente de difusão $cm^2s^{-1} \times 10^5$	30	45
Magnetismo	Diamagnético	Paramagnético

Tabela 3.1: Algumas propriedades do átomo de Positrônio, comparativamente às do átomo de hidrogênio.

Em 1930 o cientista Paul A. M. Dirac[14] predisse, por motivos teóricos, que a cada tipo de partícula corresponde uma antipartícula (também designada pela ciência de antimatéria) com mesma massa, porém com carga elétrica contrária, e outras propriedades inversas. E em 1932 foi descoberto o pósitron, a antipartícula do elétron. Segundo a ciência, quando partícula e antipartícula (matéria e antimatéria) se juntam ou colidem entre si, aniquilam-se; suas massas se convertem em fótons de energia, embora a energia total seja equivalente à massa convertida ($E = mc^2$).

Metade matéria, metade antimatéria, os átomos de Positrônio estão sempre no limiar da própria aniquilação. Mas acaba de ser descoberta uma forma de fazer com que esses átomos instáveis durem muito mais, talvez o suficiente para criar um poderoso laser de raios gama. Todos os átomos da tabela periódica consistem de átomos com um núcleo de prótons, carregados positivamente, orbitados pelo mesmo número de elétrons, carregados negativamente. Mas o Positrônio (Ps) é muito diferente: ele é formado por um elétron e um anti-elétron (um pósitron) orbitando um ao redor do outro. Sendo a antimatéria do elétron, o pósitron tem carga positiva, como o próton - mas com apenas 0,0005 da sua massa. Mas esse sistema binário é muito instável: um átomo de Positrônio dura menos de um milionésimo de segundo, antes que o elétron e o pósitron se aniquilem, emitindo um

pulso de raios gama. Quando o Positrônio foi sintetizado pela primeira vez, os cientistas logo viram nele a ferramenta ideal para a criação de um laser de raios gama. Um laser de raios gama emitirá um feixe de alta energia e comprimento de onda muito curto, capaz de sondar estruturas tão pequenas quanto o núcleo de um átomo - o comprimento de onda dos lasers tradicionais é muito maior, o que limita sua resolução. O problema é manipular os átomos de Positrônio para que eles se auto destruam de forma controlada, criando um laser de raios gama, e não um pipocar de pulsos de raios gama aleatórios. Agora, uma equipe liderada por Christoph Keitel, do Instituto Max Planck[21], na Alemanha, afirmou que lasers comuns poderão ser usados para retardar a aniquilação dos átomos de Positrônio. Aniquilação controlada, Segundo os cientistas, o truque é tão simples quanto disparar sobre o átomo de Positrônio um pulso de laser com a energia exata para levar o átomo de Positrônio a um estado de energia mais elevado, no qual o elétron e o pósitron saltam para uma órbita que os coloca mais afastados um do outro. Com isso, a aniquilação será muito menos provável, fazendo com que o átomo híbrido de matéria e antimatéria tenha uma vida mais longa. Eventualmente os átomos de Positrônio podem perder energia, emitindo fótons e retornando ao estado de energia anterior. Contudo, a equipe calcula que a metade deles sobreviverá por 28 milionésimos de segundo, o que é 200 vezes mais do que a meia-vida de um átomo de Positrônio deixado por conta própria. Isto pode ser tempo suficiente para que os átomos de Positrônio formem um condensado de Bose-Einstein[28], um estado comumente chamado de “átomo artificial”, porque os bilhões de átomos nessa nuvem agem praticamente como se fossem um só. Assim, quando um deles se aniquilar, todo o restante seguirá o líder, emitindo um pulso de radiação laser feita de raios gama. A vantagem da proposta é que, ao contrário dos átomos normais, que precisam ser resfriados até quase o zero absoluto para formarem um condensado de Bose-Einstein, devido aos efeitos quânticos, átomos de Positrônio fazem o mesmo praticamente a temperatura ambiente. O hamiltoniano do átomo de Positrônio é expresso pela seguinte equação :

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2\mu} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{|r_1 - r_2|} \right)$$

onde μ representa a massa reduzida do átomo de Positrônio, dada pela relação :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Vamos aplicar os formalismo de Shannon e Tsallis no átomo de Positrônio[12] analisando seus valores e seus gráficos, iremos definir primeiramente a função de onda à ser utilizada no espaço das posições posteriormente definir a função de onda do espaço dos momentos.

A função de onda no espaço das posições é dada por :

$$\Psi_{n,l,m}(r) = N_{n,l} e^{-\frac{r}{2\lambda}} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+D-2} \left(\frac{r}{\lambda}\right) |Y_{l,m}(\Omega_D)| \quad (3.12)$$

sendo que $N_{n,l}$ constante de normalização da função de onda, D é a dimensão do sistema. A densidade de probabilidade geral do espaço das posições é dada por :

$$N_{n,l} = \lambda^{-\frac{D}{2}} \left(\frac{(n-l-1)!}{2\lambda(n+l+D-3)!} \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

A função de onda no espaço dos momentos será dado por :

$$\Psi_{n,l,m}(k) = X_{n,l}^2 \frac{(\lambda k)^l}{(1+\lambda^2 k^2)^{l+\frac{D+1}{2}}} C_{n-l-1}^{l+\frac{D-1}{2}} \left(\frac{1-\lambda^2 k^2}{1+\lambda^2 k^2} \right) Y_{l,m}(\Omega) \quad (3.14)$$

sendo que a constante $X_{n,l}$ é definida como ;

$$X_{n,l} = \left(\frac{(n-l-1)!}{2\pi(n+l+D-3)!} \right)^{1/2} 2^{2l+D} \Gamma \left(l + \frac{D-1}{2} \right) \lambda^{\frac{D+1}{2}} \quad (3.15)$$

sendo que $\Gamma \left(l + \frac{D-1}{2} \right)$ é a função Gamma[26]. Vamos definir o polinômio de Gegenbauer[24].

$$C_n^\alpha(x) = \frac{1}{n} (2x(n+\alpha-1)C_{n-1}^\alpha(x) - (n+2\alpha-2)C_{n-2}^\alpha(x)) \quad (3.16)$$

onde $Y_{l,m}(\Omega)$ é o harmônico esférico[16].

Capítulo 4

Resultados e Discursões: Modelo de Moshinsky

Neste capítulo vamos mostrar nossos resultados e algumas discussões em torno desses resultados obtidos. Vamos utilizar os formalismos de Shannon e Tsallis, aplicados no modelo de Moshinsky e Positrônio. Para utilizar ambos os formalismos definiremos as densidades de probabilidades que vamos usar. Para o modelo de Moshinsky vamos fixar o oscilador (1) e vamos variar o oscilador (2), desta maneira, temos duas densidades de probabilidades, logo, iremos ter duas entropias uma associada ao oscilador (1) e outra associada ao oscilador (2), sendo que estes osciladores estão interagindo através do potencial de acoplamento entre eles. Essas duas entropias que iremos obter será vista no espaço extensivo de Shannon e no espaço não-extensivo de Tsallis. A densidade associada ao oscilador (2), tem dependência no espaço R e r .

$$\rho_2(R, r) = \rho(R)\rho(r) \quad (4.1)$$

sendo que a densidade de probabilidade generalizada para o modelo de Moshinsky é expressa pelas equações;

$$\rho(R) = N_{n,l}^2 R^{2l} e^{-\omega R^2} | L_n^{l+D/2-1}(\omega R^2) |^2 | Y_{l,m}(\Theta, \Phi) |^2 \quad (4.2)$$

$$\rho(r) = T_{N,L}^2 r^{2L} e^{-\Lambda r^2} | L_N^{L+D/2-1}(\Lambda r^2) |^2 | Y_{L,M}(\theta, \phi) |^2 \quad (4.3)$$

A entropia de Shannon associada a densidade da equação (4) é dada por :

$$S_\rho^2 = - \int \rho_2(R, r) \ln \rho_2(R, r) d^3 R d^3 r \quad (4.4)$$

Para entropia de Tsallis vamos ter a seguinte equação :

$$S_\rho^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(R, r)|^q d^3 r d^3 R \right) \quad (4.5)$$

Para o acoplamento dos osciladores a densidade de probabilidade será :

$$\rho_1(r) = \int \rho_2(R, r) d^3 R \quad (4.6)$$

A entropia de Shannon associada a densidade $\rho_1(r)$, é dada por :

$$S_\rho^1 = - \int \rho_1(r) \ln \rho_1(r) d^3 r \quad (4.7)$$

Assim entropia de Tsallis será dada por :

$$S_\rho^1(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(r)|^q d^3 r \right) \quad (4.8)$$

4.1 Entropia de Shannon : Espaço das Posições

Antes de apresentar nossos resultados, vamos definir os números quânticos utilizados $X_i = (n, l, m)$ é $Y_j = (N, L, M)$, com X_i e Y_j sendo associados aos números inteiros de 0...10, feito desta maneira pode plotar os gráficos. Como exemplos temos para $X_0 = 0 = (0, 0, 0)$; $X_1 = 1 = (1, 0, 0)$; $X_2 = 2 = (2, 0, 0)$; $X_3 = 3 = (2, 1, 0)$; $X_4 = 4 = (2, 1, 1)$; $X_5 = 5 = (3, 0, 0)$ até $X_{10} = 10 = (3, 2, 2)$ para cada estado estará associado um número esta relação serve para Y_j . No decorrer de todo o trabalho iremos fixar um estado por exemplo $X_i = (n, l, m)$ é variar o outro estado $Y_j = (N, L, M)$.

Essa condições são expressas mais convinientemente sob a forma[15];

$$n = 1, 2, 3...$$

$$l = 0, 1, , 2...n - 1$$

$$m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l.$$

Nossa análise se inicia pelo estado fundamental do modelo de Moshinsky iremos vamos fixar o oscilador (1) no estado fundamental ($n = 0, l = 0, m = 0$) e variar oscilador (2) do estado ($N = 0, L = 0, M = 0$) até o estado ($N = 3, L = 2, M = 2$) então temos que :

$$\Psi_{0,0,0}(R) = \left[\frac{2\omega^{3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} e^{-\omega R^2/2} L_0^{1/2}(\omega R^2) Y_{0,0}(\Omega_R).$$

$$\Psi_{0,0,0}(r) = \left[\frac{2\Lambda^{3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} e^{-\Lambda r^2/2} L_0^{1/2}(\Lambda r^2) Y_{0,0}(\Omega_r).$$

Usando as propriedades do polinômio de Laguerre[26] e dos harmônicos esféricos[16] temos :

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m[\cos(\theta)] e^{im\phi}. \quad (4.9)$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+\alpha}{n-i} \frac{x^i}{i!} \quad (4.10)$$

Logo que a densidade de probabilidade para cada oscilador independente é:

$$\rho_2(R, r) = C^2 e^{-\omega R^2} e^{-\Lambda r^2},$$

Aplicando o formalismo de Shannon no estado fundamental de Moshinsky temos que:

$$S_\rho^2 = - \int \rho_2(R, r) \ln \rho_2(R, r) d^3 R d^3 r. \quad (4.11)$$

Algumas integrais que utilizamos nos decorrer do trabalho.

$$\int_0^\infty x^n e^{-\mu x} dx = n! \mu^{-n-1} \quad [n \text{ Re} > 0] \quad (4.12)$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad [a > 0, n = 0, 1, 2, \dots]. \quad (4.13)$$

Assim a entropia de Shannon será dada por :

$$S_\rho^2 = \frac{\pi^3 C^2}{(\omega \Lambda)^{3/2}} (3 - \ln C^2) = 7.689671978$$

A densidade de probabilidade para o acoplamento dos osciladores harmônicos[17] neste estado será:

$$\rho_1(r) = \int \rho_2(R, r) d^3 R$$

$$\rho_1(r) = \frac{\pi C^2}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\Lambda r^2}.$$

Logo a entropia S_ρ^1 será dada por :

$$S_\rho^1 = - \int \rho_1(r) \ln \rho_1(r) d^3 r. \quad (4.14)$$

Com auxílio das integrais[26] anteriores temos para a entropia ;

$$S_\rho^1 = \frac{\pi^3 C^2}{\sqrt{\omega \Lambda}} \left[\frac{3}{2} - \ln \left(\frac{\pi C^2}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \right) \right]. \quad (4.15)$$

Assim seu resultado analítico é :

$$S_\rho^1 = 3.432856381.$$

Agora vamos fixar o oscilador (1) no estado ($n = 0, l = 0, m = 0$) e variar o oscilador (2) para o estado ($N = 1, L = 0, M = 0$), logo a função de onda será dada por :

$$\Psi_{0,0,0}(R) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\omega^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\omega R^2/2}$$

$$\Psi_{1,0,0}(r) = \left(\frac{2\Lambda^{3/2}}{\Gamma(5/2)} \right)^{1/2} e^{-\Lambda r^2/2} L_1^{1/2}(\Lambda r^2) Y_{0,0}(\Omega_r),$$

sendo que os polinômios[16] são dados por :

$$L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1$$

$$Y_{0,0}(x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

Logo a densidade de probabilidade para cada oscilador independente referente a $\rho_2(R, r)$ será ;

$$\rho_2(R, r) = C^2 e^{-\omega R^2} e^{-\Lambda r^2} (-\Lambda r^2 + 3/2)^2$$

a entropia S_ρ^2 para o primeiro estado excitado do oscilador (2) então será dada por :

$$S_\rho^2 = 8.623322694.$$

Para o acoplamento dos osciladores harmônicos, no primeiro estado excitado a densidade de probabilidade $\rho_1(r)$ deve ser dada por :

$$\rho_1(r) = \int \rho_2(R, r) d^3 R$$

$$\rho_1(r) = \frac{\pi C^2}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\Lambda r^2} (-\Lambda r^2 + 3/2)^2$$

A entropia S_ρ^1 é dada pela equação abaixo.

$$S_\rho^1 = - \int \rho_1(r) \ln \rho_1(r) d^3 r \quad (4.16)$$

Logo seu valor quantitativo é :

$$S_\rho^1 = 4.366507100$$

Assim foi realizado os cálculos para diversos valores de (n, l, m) assim como (N, L, M) , sempre variando um conjunto de números quânticos é mantendo outro conjunto fixo. Próximo passo é fixarmos o oscilador (1) no estado $(n = 1, l = 0, m = 0)$ e variar o oscilador (2) do estado (N, L, M) .

Assim para $(n = 1, l = 0, m = 0)$ e $(N = 0, L = 0, M = 0)$, a função de onda será.

$$\Psi_{1,0,0}(R) = \left[\frac{2\omega^{3/2}}{\Gamma(9/2)} \right]^{1/2} e^{-\omega R^2/2} L_1^{1/2}(\omega R^2) Y_{0,0}(\Omega_R)$$

$$\Psi_{0,0,0}(r) = \left[\frac{2\Lambda^{3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} e^{-\Lambda r^2/2} L_0^{1/2}(\Lambda r^2) Y_{0,0}(\Omega_r)$$

Utilizando os valores dos polinômios:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m[\cos(\theta)] e^{im\phi} \quad (4.17)$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+\alpha}{n-i} \frac{x^i}{i!} \quad (4.18)$$

Assim da densidade de probabilidade é :

$$\rho_2(R, r) = C^2 e^{-\omega R^2} e^{-\Lambda r^2} (-\omega R^2 + 3/2)^2$$

Aplicando o formalismo de Shannon no estado excitado do primeiro oscilador de Moshinsky temos que:

$$S_\rho^2 = - \int \rho_2(R, r) \ln \rho_2(R, r) d^3 R d^3 r \quad (4.19)$$

Seu valor analítico calculado da equação anterior é:

$$S_\rho^2 = 8.623322697.$$

Para o acoplamento dos osciladores (1) e (2) obtemos a densidade $\rho_1(r)$ dada por :

$$\rho_1(r) = \int \rho_2(R, r) d^3 R$$

$$\rho_1(r) = \frac{\pi C^2}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\Lambda r^2}.$$

A entropia S_ρ^1 de Shannon, do acoplamento dos osciladores é :

$$S_\rho^1 = - \int \rho_1(r) \ln \rho_1(r) d^3 r \quad (4.20)$$

$$S_\rho^1 = - \frac{3\pi^3 C^2}{2(\omega\Lambda)^{3/2}} \ln \frac{3\pi C^2}{2\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} + \frac{9}{4} \frac{\pi^3 C^2}{(\omega\Lambda)^{3/2}}$$

Logo que a entropia S_ρ^1 tem como valor:

$$S_\rho^1 = 3.432856380$$

Utilizamos as seguintes propriedades de integração.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \ln(x) dx = \frac{1}{8a} (2 - \ln 4a - C_j) \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad [a > 0, n = 0, 1, 2, \dots] \quad (4.21)$$

Na equação acima, usamos o duplo fatorial[26]. A definição de duplo fatorial é dado por:

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \quad (4.22)$$

com n é o número inteiro. Para os primeiros estados excitados nos dois osciladores harmônicos temos que $(n = 1, l = 0, m = 0)$ é $(N = 1, L = 0, M = 0)$, a função de onda então será:

$$\Psi_{1,0,0}(R) = \left[\frac{2\omega^{3/2}}{\Gamma(9/2)} \right]^{1/2} e^{-\omega R^2/2} L_1^{1/2}(\omega R^2) Y_{0,0}(\Omega_R)$$

$$\Psi_{1,0,0}(r) = \left[\frac{2\Lambda^{3/2}}{\Gamma(9/2)} \right]^{1/2} e^{-\Lambda r^2/2} L_0^{1/2}(\Lambda r^2) Y_{0,0}(\Lambda r).$$

Assim da densidade de probabilidade $\rho_2(R, r)$ é :

$$\rho_2(R, r) = C^2 e^{-\omega R^2} e^{-\Lambda r^2} (-\omega R^2 + 3/2)^2 (-\Lambda r^2 + 3/2)^2.$$

Aplicando o formalismo de Shannon no modelo de Moshinsky temos que:

$$S_\rho^2 = - \int \rho_2(R, r) \ln \rho_2(R, r) d^3 R d^3 r. \quad (4.23)$$

Logo o valor analítico é :

$$S_\rho^2 = 9.556973405.$$

A entropia S_ρ^1 será dada por, lembrando que já definimos $\rho_1(r)$ no início deste capítulo:

$$S_\rho^1 = 4.366507099$$

Organizando todos os valores do oscilador (1), do estado ($n = 1, l = 0, m = 0$) e variando o oscilador (2) temos os resultados das entropias S_ρ^2 e S_ρ^1 , exibidas na figura abaixo, para o espaço das posições.

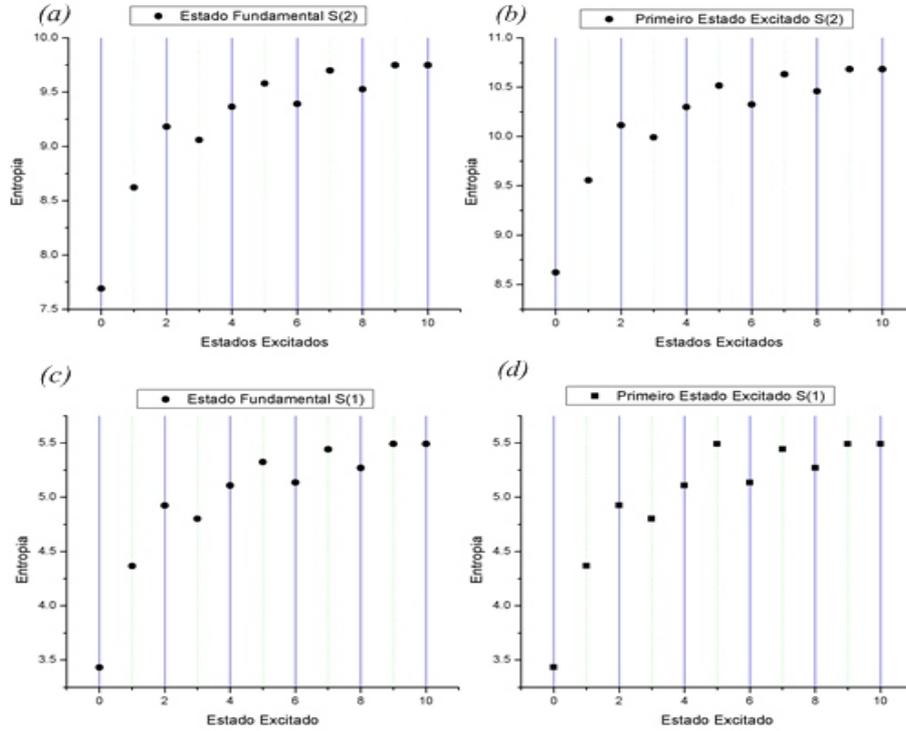


Figura 4.1: Entropia de Shannon S_ρ^2 e S_ρ^1 para o espaço das posições no estado fundamental e para o primeiro estado excitado

A figura 4.1 representa as entropias de Shannon S_ρ^2 e S_ρ^1 no espaço das posições, com base em nossa tabelas. A figura 4.1(a) e 4.1(b) representa a entropia S_ρ^2 de Shannon

respectivamente para o oscilador (1) no estado fundamental $(0, 0, 0)$ e no seu primeiro estado excitado $(1, 0, 0)$, variando o oscilador (2) do estado $(0, 0, 0)$ até o estado $(3, 2, 2)$. Este comportamento já foi observado em seu trabalho[11] para sistema de um elétron que descreve comportamento semelhante ao nosso modelo. Para cada estado mais excitado observamos o crescimento da entropia, mas verificamos um comportamento diferente para quando fixamos $(l = 1, m = 0)$ e variamos o valor de (n) . Observamos uma queda no valor quantitativo da entropia de Shannon S_ρ^1 e S_ρ^2 . Podemos observa tal fato na figura 4.1, comportamento semelhante para entropia S_ρ^2 e S_ρ^1 usando o formalismo de Shannon. Fazendo o comparativo com S_ρ^2 e S_ρ^1 notamos que a entropia na figura 4.1(a) e 4.1(b) é menor quantitativamente do que figura 4.1(c) e 4.1(d) no valor quantitativo, podemos atribuir tal fato ao potencial de acoplamento dos osciladores Λ por ser definido como a junção de ω e λ . Quando analisamos o estado $(l = 2, m = 0)$ e variamos o valor de (n) , observamos um comportamento semelhante ao já citado acima, com a queda no valor da entropia.

Nosso próximo ponto de análise será fixar o oscilador (1) no estado $(n = 2, l = 0, m = 0)$ e fixar o oscilador (2) no estado $(N = 0, M = 0, L = 0)$. A função de onda então será.

$$\Psi_{2,0,0}(R) = \left[\frac{4\omega^{3/2}}{\Gamma(9/2)} \right]^{1/2} e^{-\omega R^2/2} L_2^{1/2}(\omega R^2) Y_{0,0}(\Omega_R)$$

$$\Psi_{0,0,0}(r) = \left[\frac{2\Lambda^{3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} e^{-\Lambda r^2/2} L_0^{1/2}(\Lambda r^2) Y_{0,0}(\Omega_r).$$

Utilizando os valores de :

$$Y_{0,0}(\Omega_R) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{0,0}(\Omega_r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$L_2^{1/2}(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 - 5x + \frac{15}{4} \right)$$

Os procedimentos para determinar S_ρ^2 e S_ρ^1 são os mesmos do anterior modificando apenas alguns argumentos das integrais. Nosso próximo ponto de análise será fixar o oscilador (1) no estado $(n = 2, l = 1, m = 0)$ e fixar o oscilador do estado $(N = 0, M = 0, L = 0)$ até o estado $(3, 2, 2)$. A função de onda deste estado é dado por :

$$\Psi_{2,1,0}(R) = \left[\frac{4\omega^{5/2}}{\Gamma(9/2)} \right]^{1/2} R e^{-\omega R^2/2} L_2^{3/2}(\omega R^2) Y_{1,0}(\Omega_R)$$

$$\Psi_{0,0,0}(r) = \left[\frac{2\Lambda^{3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} e^{-\Lambda r^2/2} L_0^{1/2}(\Lambda r^2) Y_{0,0}(\Omega_r).$$

Dos harmônicos esféricos temos que :

$$Y_{1,0}(\Omega_R) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta_R$$

$$Y_{0,0}(\Omega_r) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

Os polinômios de Laguerre são dados por ;

$$L_2^{3/2}(\omega R^2) = \frac{1}{2} (\omega^2 R^4 - 7\omega R^2 + 35/4)$$

$$L_0^{1/2}(\Lambda r^2) = 1.$$

Definir as entropias S_ρ^1 e S_ρ^2 deste estado é semelhante aos estados anteriores. As integrais são semelhantes ao do estado anterior mudando somente o expoente do termo linear. Assim vamos obter diretamente os valores para a entropia de Shannon no espaço das posições para este estado. Iremos analisar os gráficos obtidos a partir da entropia de Shannon para o espaço das posições dos osciladores do modelo de Moshinsky.

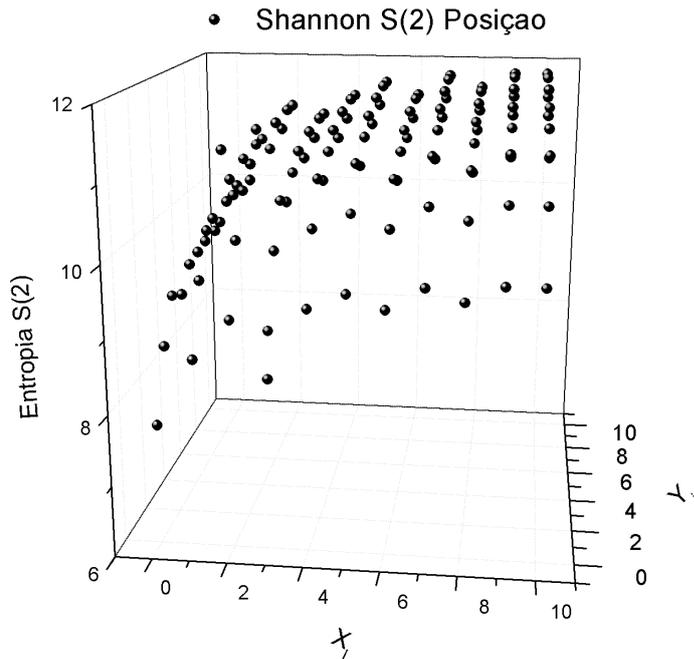


Figura 4.2: Entropia de Shannon S_ρ^2 para o espaço das posições

Na figura (4.2) a entropia S_ρ^2 no espaço das posições para $X_i = 0.3$ e $Y_j = 0.3$ são exibidas. Observamos o comportamento quantitativo similar ao estado fundamental e primeiro estado excitado das figuras 4.1(a) e 4.1(b). Com o crescimento de X_i e Y_j , observamos um aumento no valor de S_ρ^2 , o que a saturar com os altos valores de X_i e Y_j .

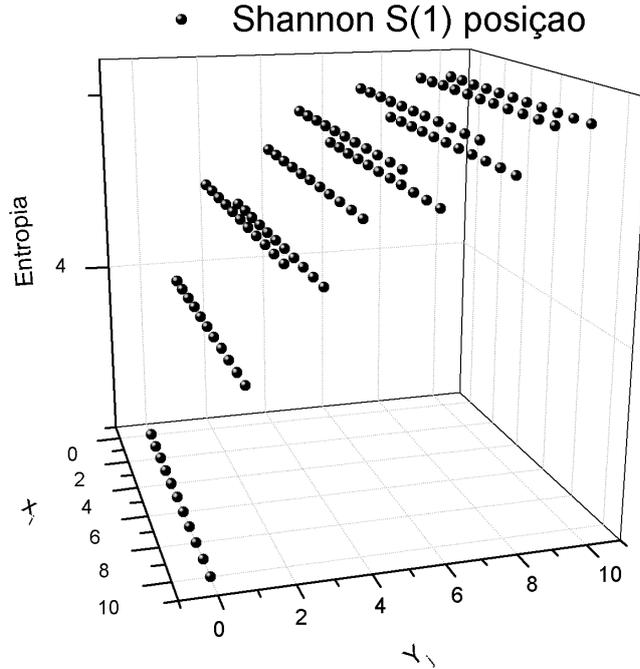


Figura 4.3: Entropia de Shannon S_ρ^1 para o espaço das posições

A entropia S_ρ^1 é considerada na figura (4.3) no espaço das posições para os valores idênticos de X_i e Y_j da figura(4.2). A entropia S_ρ^1 da figura (4.3) descreve uma trajetória equivalente ao do estado fundamental e primeiro estado excitado das figuras 4.1(c) e 4.1(d). Podemos ver que a entropia S_ρ^1 por não ter correlação quando comparada com S_ρ^2 , tem um crescimento muito menor[11] é esse crescimento depende que exclusivamente de N . Assim como S_ρ^2 satura para altos valores de X_i e Y_j , S_ρ^1 acompanha a mesma características da entropia S_ρ^2 . Na proxima seção vamos determinar a entropia de Shannon no espaço dos momentos.

4.2 Entropia de Shannon : Espaço dos Momentos

A função de onda geral para o modelo de Moshinsky no espaço dos momentos é dada por:

$$\Psi_{n,l,m}(k) = \left[\frac{2n!(\omega)^{-(l+D/2)}}{\Gamma(n+l+D/2)} \right]^{1/2} k^l e^{-k^2/2\omega} L_n^{l+D/2-1} \left(\frac{k^2}{\omega} \right) Y_{l,m}(\Omega_D) \quad (4.24)$$

$$\Psi_{N,L,M}(K) = \left[\frac{2N!(\Lambda)^{-(l+D/2)}}{\Gamma(N+L+D/2)} \right]^{1/2} K^L e^{-K^2/2\Lambda} L_N^{L+D/2-1} \left(\frac{K^2}{\Lambda} \right) Y_{L,M}(\Omega_D) \quad (4.25)$$

Vamos fazer o processo semelhante feito na secção anterior, iremos fixar o oscilador (1) no estado $(n = 0, l = 0, m = 0)$ e variar o oscilador (2) no $(N = 0, L = 0, M = 0)$. Assim a função de onda será :

$$\Psi_{0,0,0}(k) = \left[\frac{2\omega^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} \exp^{-\frac{k^2}{2\omega}} L_0^{1/2} \left(\frac{k^2}{\omega} \right) Y_{0,0}(\Omega_k)$$

$$\Psi_{0,0,0}(K) = \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} \exp^{-\frac{K^2}{2\Lambda}} L_0^{1/2} \left(\frac{K^2}{\Lambda} \right) Y_{0,0}(\Omega_K).$$

Sendo que os polinômios de Laguerre e os harmônicos esféricos são dados por :

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+\alpha}{n-i} \frac{x^i}{i!} \quad (4.26)$$

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m[\cos(\theta)] e^{im\phi}. \quad (4.27)$$

Logo a função de onda será dada por :

$$\Psi_{0,0,0}(k) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{2\omega^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} \exp^{-\frac{k^2}{2\omega}}$$

$$\Psi_{0,0,0}(K) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} \exp^{-\frac{K^2}{2\Lambda}}.$$

A densidade de probabilidade é dada por :

$$\gamma_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} e^{-\frac{K^2}{\Lambda}}.$$

Para determinar a entropia de Shannon no espaço dos momentos S_γ^2 , vamos utilizar algumas integrais definidas por:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty k^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} dk &= \frac{\omega}{4} \sqrt{\omega\pi} \\ \int_0^\infty K^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} dK &= \frac{\Lambda}{4} \sqrt{\Lambda\pi} \\ \int_0^\infty k^4 e^{-\frac{k^2}{\omega}} dk &= \frac{3\omega^2}{8} \sqrt{\omega\pi} \\ \int_0^\infty K^4 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} dK &= \frac{3\Lambda^2}{8} \sqrt{\Lambda\pi}\end{aligned}$$

Assim temos que a entropia será ;

$$S_\gamma^2 = - \int \gamma_2(k, K) \ln \gamma_2(k, K) d^3 k d^3 K \quad (4.28)$$

$$S_\gamma^2 = -\pi^3 C^2 (\omega\Lambda)^{3/2} \ln C^2 + 3\pi^3 C^2 (\omega\Lambda)^{3/2},$$

onde C é a constante de normalização.

$$S_\gamma^2 = 5.178707333$$

Para a entropia S_γ^1 temos que determinar primeiramente a densidade de probabilidade $\gamma_1(k)$, assim vamos ter:

$$\begin{aligned}\gamma_1(k) &= \int_0^\infty \gamma_2(k, K) d^3 K \\ \gamma_1(k) &= C^2 (\pi\omega)^{3/2} e^{-\frac{k^2}{\omega}}.\end{aligned}$$

Logo que S_γ^1 será

$$\begin{aligned}S_\gamma^1 &= - \int_0^\infty \gamma_1(K) \ln \gamma_1(kK) d^3 K \\ S_\gamma^1 &= -\pi^3 (\omega\Lambda)^{3/2} C^2 \ln [C^2 (\pi\omega)^{3/2}] + \frac{3}{2} \pi^3 (\omega\Lambda)^{3/2} C^2 \\ S_\gamma^1 &= 3.001333276\end{aligned}$$

Para o primeiro estado excitado ($n = 0, l = 0, m = 0$) ; ($N = 1, L = 0, M = 0$), a função de onda será :

$$\Psi_{0,0,0}(k) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left(\frac{2\omega^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right)^{1/2} e^{-\frac{k^2}{2\omega}} \quad (4.29)$$

$$\Psi_{1,0,0}(K) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(5/2)} \right]^{1/2} e^{-\frac{K^2}{2\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right). \quad (4.30)$$

A densidade de probabilidade é dada por :

$$\gamma_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)^2.$$

As integrais usadas para obter a entropia S_γ^2 são as mesmas já utilizadas nos casos anteriores mudando apenas o expoente das variáveis.

$$\int_0^\pi \sin \theta_k d\theta_k = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi_k = 2\pi$$

$$S_\gamma^2 = 6.112358059$$

A densidade de probabilidade $\gamma_1(K)$ é dada por :

$$\gamma_1(K) = C^2 (\pi\omega)^{3/2} e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)$$

$$S_\gamma^1 = 3.934983994$$

Os outros valores de S_γ^2 e S_γ^1 , vamos visualizar na figura que representa as entropias.

Vamos agora para oscilador (1) no estado ($n = 1, l = 0, m = 0$) e o oscilador (2) no estado ($N = 0, L = 0, M = 0$), assim a função de onda no espaço dos momentos em k será:

$$\Psi_{1,0,0}(k) = \left[\frac{2\omega^{-3/2}}{\Gamma(5/2)} \right]^{1/2} e^{-\frac{k^2}{2\omega}} L_1^{1/2} \left(\frac{k^2}{\omega} \right) Y_{0,0}(\Omega_k). \quad (4.31)$$

A função de onda no espaço dos momentos em K , é dada por :

$$\Psi_{0,0,0}(K) = \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right] e^{-\frac{K^2}{2\Lambda}} L_0^{1/2} \left(\frac{K^2}{\Lambda} \right) Y_{0,0}(\Omega_K) \quad (4.32)$$

Juntando as funções de ondas temos que :

$$\Psi_{1,0,0}(k) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{2\omega^{-3/2}}{\Gamma(5/2)} \right]^{1/2} e^{-\frac{k^2}{2\omega}} \left(-\frac{k^2}{\omega} + \frac{3}{2} \right) \quad (4.33)$$

$$\Psi_{0,0,0}(K) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} e^{-\frac{K^2}{2\Lambda}}. \quad (4.34)$$

Logo temos a densidade de probabilidade é :

$$\gamma_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(-\frac{k^2}{\omega} + \frac{3}{2} \right)^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}}.$$

Assim a entropia de Shannon para o espaço dos momentos é dada por :

$$S_{\gamma}^2 = - \int \gamma_2(k, K) \ln(\gamma_2(k, K)) dk^3 dK^3$$

Vamos utilizar as seguintes integrais:

$$I_1 = \int_0^{\infty} k^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(-\frac{k^2}{\omega} + \frac{3}{2} \right)^2 dk = 0.2349964007$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} k^4 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(-\frac{k^2}{\omega} + \frac{3}{2} \right)^2 dk = 0.3458710839$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} k^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(-\frac{k^2}{\omega} + \frac{3}{2} \right)^2 \ln \left(-\frac{k^2}{\omega} + \frac{3}{2} \right)^2 dk = 0.4112437013$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} K^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} dK = \frac{\Lambda}{4} \sqrt{\pi \Lambda}$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} K^4 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} dK = \frac{3\Lambda^2}{8} \sqrt{\pi \Lambda}$$

Então a entropia de Shannon para o espaço dos momentos S_{γ}^2 fica :

$$S_{\gamma}^2 = 6.112358052. \quad (4.35)$$

Agora vamos determinar a densidade de probabilidade $\gamma_1(K)$, utilizando as funções de ondas determinadas no início do estado.

$$\gamma_1(K) = 4\pi C^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} I_1$$

Logo a entropia S_{γ}^1 para o formalismo de Shannon será :

$$S_{\gamma}^1 = 3.001333273.$$

Em nossa análise fixamos o oscilador (1) no estado ($n = 1, l = 0, m = 0$) e variamos o oscilador (2), com isso obtemos a tabela abaixo, com todos os estados possíveis para o oscilador (2).

Na figura 4.4 representamos a entropia de Shannon S_{γ}^2 e S_{γ}^1 no espaço dos momentos. Observamos nas figuras 4.4(a) e 4.4(b), que a entropia de Shannon S_{γ}^2 cresce com os estados mais excitados. A entropia sofre uma queda quando há mudança no valor de (l), verificamos nos gráficos que quando fixamos (n, m) e variamos (l), a entropia tem

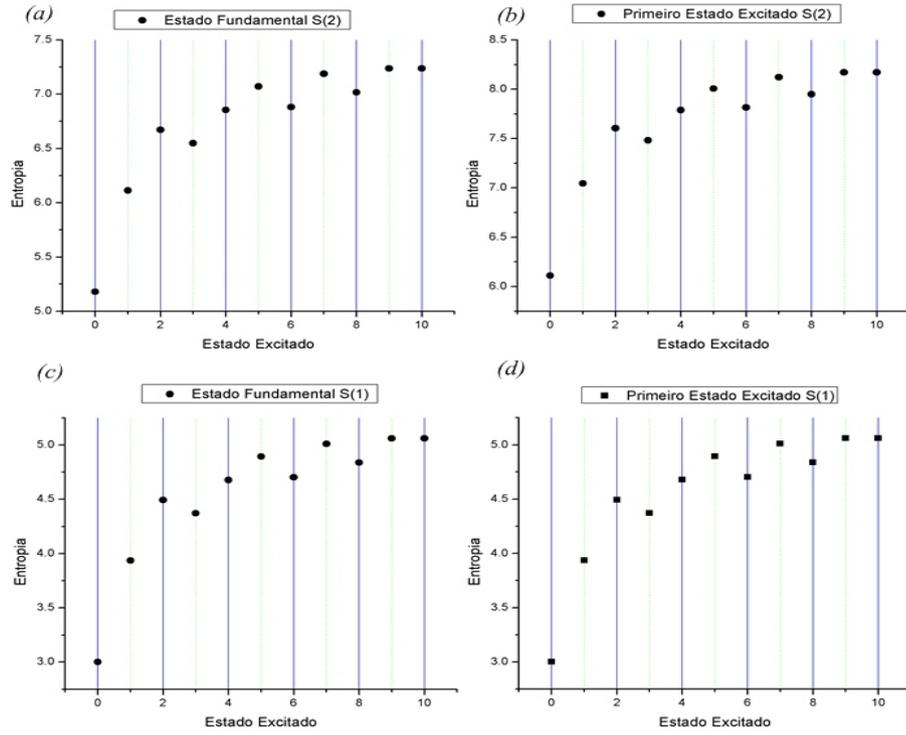


Figura 4.4: Entropia de Shannon S_γ^2 e S_γ^1 para o espaço dos Momentos para os primeiros estados excitados

uma queda em seu valor quantitativo[11], o mesmo fato ocorre para a entropia S_γ^1 na figura 4.4(c) e 4.4(d), a um decaimento no valor quantitativo da entropia, comparando S_γ^2 e S_γ^1 observamos um comportamento semelhante em sua entropias, sendo que a diferença entre elas esta na intensidade do valor de cada uma. S_γ^2 em todos os estados sempre tem um valor maior que S_γ^1 , tal fato nos diz que a entropia S_γ^2 esta possibilitando mais informação sobre nosso sistema que a entropia S_γ^1 , podemos ligar esta intensidade ao acoplamento realizado entre os osciladores representado na entropia S_γ^2 .

Para o proximo estado excitado vamos trabalhar com $(n = 2, l = 0, m = 0)$; $(N = 0, L = 0, M = 0)$ sendo a função de onda deste estado dada por :

$$\Psi_{2,0,0}(k) = \left[\frac{4\omega^{-3/2}}{\Gamma(7/2)} \right]^{1/2} e^{-\frac{k^2}{2\omega}} L_2^{1/2} \left(\frac{k^2}{\omega} \right) Y_{0,0}(\Omega_k) \quad (4.36)$$

$$\Psi_{0,0,0}(K) = \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right] e^{-\frac{K^2}{2\Lambda}} L_0^{1/2} \left(\frac{K^2}{\Lambda} \right) Y_{0,0}(\Omega_K). \quad (4.37)$$

Utilizando os polinômios de Laguerre definidos acima temos que :

$$L_2^{1/2} \left(\frac{p^2}{\omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p^4}{\omega^2} - \frac{5p^2}{\omega} + \frac{15}{4} \right)$$

$$L_0^\alpha(x) = 1$$

Aplicando os polinômios de Laguerre e os harmônicos esféricos temos que :

$$\Psi_{2,0,0}(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{4\omega^{-3/2}}{\Gamma(7/2)} \right]^{1/2} e^{-\frac{k^2}{2\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2} - \frac{5k^2}{\omega} + \frac{15}{4} \right) \quad (4.38)$$

$$\Psi_{0,0,0}(K) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(3/2)} \right]^{1/2} e^{-\frac{K^2}{2\Lambda}}. \quad (4.39)$$

Logo que a densidade de probabilidade $\gamma_2(k, K)$ desse estado será :

$$\gamma_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2} - \frac{5k^2}{\omega} + \frac{15}{4} \right)^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \quad (4.40)$$

A entropia de Shannon para o espaço dos momentos desta forma será :

$$S_\gamma^2 = - \int \gamma_2(k, K) \ln \gamma_2(k, K) dk^3 dK^3$$

$$S_\gamma^2 = 6.670707467.$$

A densidade de probabilidade $\gamma_1(K)$ é :

$$\gamma_1(K) = 4\pi C^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} I_1 \quad (4.41)$$

onde a integral I_1 é

$$I_1 = \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2} - \frac{5k^2}{\omega} + \frac{15}{4} \right)^2 dk = 1.174982004.$$

A entropia de Shannon S_γ^1 para o espaço dos momentos desta forma será :

$$S_\gamma^1 = - \int \gamma_1(K) \ln (\gamma_1(K)) d^3 K$$

$$S_\gamma^1 = 3.001333273.$$

Os demais valores de S_γ^2 e S_γ^1 , estão agrupados na figura a seguir que representa as entropias.

Vamos agora para o proximo estado excitado utilizando o formalismo de Shannon para o espaço dos momentos, para isso vamos fixar o oscilador (1) no estado ($n = 2, l = 1, m = 0$) e vamos variar os estados do oscilador (2), a função de onda para este novo estado.

$$\Psi_{2,1,0}(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{4\omega^{-5/2}}{\Gamma(9/2)} \right)^{1/2} k e^{-\frac{k^2}{2\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2} - \frac{7k^2}{\omega} + \frac{35}{4} \right) \cos\theta_k \quad (4.42)$$

$$\Psi_{1,0,0}(K) = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \left[\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(5/2)} \right]^{1/2}} e^{-\frac{K^2}{2\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right) \quad (4.43)$$

Assim nossa densidade de probabilidade será dada por, cujas as constantes são. Definimos que $C = AB$.

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi} \left[\frac{4\omega^{-5/2}}{\Gamma(9/2)} \right]^{1/2}}$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\Lambda^{-3/2}}{\Gamma(5/2)} \right)^{1/2}}$$

$$\gamma_2(k, K) = C^2 k^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left[\frac{k^4}{\omega^2} - \frac{7k^2}{\omega} + \frac{35}{4} \right]^2 \cos^2 \theta_k e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)^2$$

Para encontrar o valor da entropia vamos utilizar as seguintes integrais[10].

$$\int_0^\infty x^m \exp(-\beta x^n) dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{n\beta^\gamma} \quad ; \gamma = \frac{m+1}{n} \quad (4.44)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta_k \sin \theta_k d\theta_k = \frac{2}{3} \quad (4.45)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta_k \ln(\cos^2 \theta_k) \sin \theta_k d\theta_k = -\frac{4}{9} \quad (4.46)$$

Assim a entropia será dada por :

$$S_\gamma^2 = - \int \gamma_2(k, K) \ln(\gamma_2(k, K)) d^3 k d^3 K$$

$$S_\gamma^2 = 7.481685059.$$

Para a densidade de probabilidade $\gamma_1(K)$ temos que :

$$\gamma_1(K) = \int \gamma_2(k, K) d^3 k$$

$$\rho_1(k) = 2\pi C^2 I_1(h) I_1(\theta_h) e^{-\frac{k^2}{\Lambda}} \left(-\frac{k^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)^2$$

Sendo que ;

$$I_1(h) = 2.056218507.$$

$$I_1(\theta_h) = \frac{2}{3}$$

Assim a entropia de Shannon S_γ^1 do espaço dos momentos para o estado ($n = 2, l = 1, m = 0$) ; ($N = 1, L = 0, M = 0$) será :

$$S_\gamma^1 = - \int \gamma_1(K) \ln(\gamma_1(K)) d^3 K$$

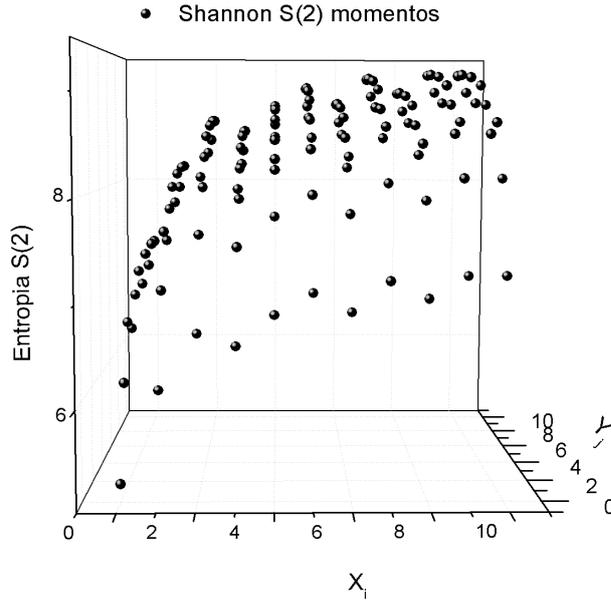


Figura 4.5: Entropia de Shannon S_γ^2 para o espaço dos momentos

$$S_\gamma^1 = 3.934983998.$$

Representamos na figura(4.5) a entropia de Shannon S_γ^2 do modelo de Moshinsky para o espaço dos momentos. Acompanhamos o crescimento da entropia em função dos números quânticos X_i e Y_j . O valor quantitativo de S_γ^2 na figura(4.5) é análogo ao estado fundamental e primeiro estado excitado das figuras 4.4(a) e 4.4(b). Como observado nas figuras 4.1(a) e 4.1(b), em que ambas as entropias crescem com X_i e Y_j , aqui na figura(4.5) também cresce com esse estados. Porém contemplamos que a entropia S_γ^2 no espaço dos momentos tem um valor menor que a entropia S_γ^2 do espaço dos momentos, essa característica se deve ao princípio da incerteza de Heisenberg[15].

A figura(4.6) simboliza a entropia S_γ^1 de Shannon no espaço dos momentos. Para entropia S_γ^1 vimos nas outras figuras, que a mesma tem um crescimento acentuado conforme aumentamos o valor de Y_j . Também observamos um valor quase que constante quando olhamos para o estado X_i . Podemos atribuir tal fenômeno, devido S_γ^1 não ter a correlação vista em S_γ^2 . O comportamento de S_γ^1 na figura(4.6) é familiar ao comportamento nas figuras 4.4(c) e 4.4(d).

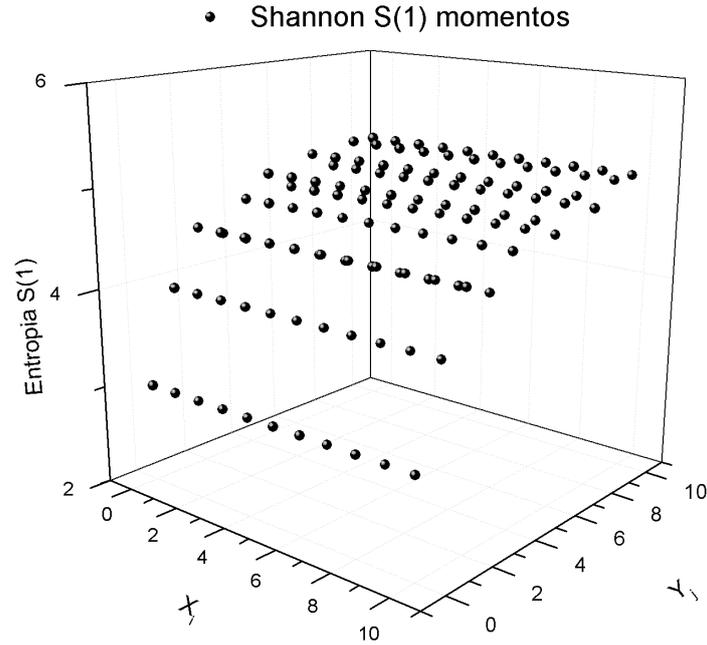


Figura 4.6: Entropia de Shannon S_γ^1 para o espaço dos momentos

4.3 Princípio da incerteza BBM

Vamos provar o princípio da incerteza BBM[27] no formalismo de Shannon. A desigualdade será dada abaixo:

$$S_\rho^1 + S_\gamma^1 \geq D[1 + \ln(\pi)] \quad (4.47)$$

$$S_\rho^2 + S_\gamma^2 \geq D[1 + \ln(\pi)]. \quad (4.48)$$

Para os valores das entropias iremos utilizar os valores dos gráficos. Tomando os valores S_ρ^1 e S_γ^1 , no estado fundamental dos osciladores (1) e (2), na equação(4.47), para $D=3$ e $\pi = 3.14$:

$$3.43 + 3.00 \geq 3(1 + \ln(\pi))$$

$$6.43 \geq 3(2.14)$$

$$6.43 \geq 6.42 \quad (4.49)$$

Façamos o principio da incerteza para S_ρ^2 e S_γ^2 , no estado fundamental dos osciladores (1) e (2):

$$\begin{aligned} 7.68 + 5.17 &\geq 3(1 + \ln(\pi)) \\ 12.85 &\geq 6.42 \end{aligned} \tag{4.50}$$

No estado fundamental para o oscilador (1) e (2), comprovamos que nossos resultados obedecem o principio da incerteza BBM[27]. Em nossa proxima analise fixamos o oscilador (1) no estado $(0, 0, 0)$ e o oscilador (2) no estado $(1, 0, 0)$. Logo temos que da equação(4.47) :

$$\begin{aligned} 4.36 + 3.93 &\geq 3(1 + \ln(\pi)) \\ 8.29 &\geq 3(2.14) \\ 8.29 &\geq 6.42 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Vamos para S_ρ^2 e S_γ^2 , nas mesmas condições acima.

$$\begin{aligned} 8.62 + 6.11 &\geq 3(1 + \ln(\pi)) \\ 14.73 &\geq 6.42 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Com os resultados das equações (4.49), (4.50), (4.51) e (4.52), comprovamos a veracidade dos nossos resultados, e observamos que acoplando as entropias S_ρ e S_γ , potencializamos o valor quantitativo das entropias.

4.4 Entropia de Tsallis : Espaço das posições

Nosso proximo passo será utilizar o formalismo de Constantino Tsallis, formalismo já mencionado no capítulo 2.3. Este formalismo leva em conta a não-extensividade, propriedade que nos permite expandir a entropia para sistema não lineares. Para isso vamos utilizar as funções de ondas citadas acima adequando apenas para a Entropia de Tsallis. Vamos usar fator entrópico descrito por Tsallis q , fator este presente em toda sua teoria.

A entropia de Tsallis no espaço das posições é determinada por :

$$S_{\rho}(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int d^D r | \rho r |^q \right).$$

No espaço dos momentos ela é da seguinte maneira :

$$S_{\gamma}(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int d^D k | \gamma(k) |^q \right).$$

Iniciaremos o estudo sobre o formalismo de Tsallis pelo estado fundamental $(0, 0, 0)$ do oscilador (1) e fixando o oscilador (2) no estado $(0, 0, 0)$ no espaço das posições, as funções de ondas que vamos utilizar são as mesmas das utilizadas na entropia de Shannon. Então a densidade de probabilidade será dada por:

$$\rho_2(R, r) = C^2 e^{-\omega R^2} e^{-\Lambda r^2}$$

A entropia de Tsallis será dada por :

$$S_{\rho}^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int | \rho_2(R, r) |^q d^3 r d^3 R \right) \quad (4.53)$$

$$S_{\rho}^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - C^{2q} \int_0^{\infty} e^{-\omega q R^2} d^3 R \int_0^{\infty} e^{-\Lambda q r^2} d^3 r \right)$$

Definindo o fator entrópico com $q = 2$. É utilizando as definições das integrais[24].

$$\int_0^{\infty} x^m \exp(-\beta x^n) dx = \frac{\gamma}{n\beta^{\gamma}} \quad ; \gamma = \frac{m+1}{n} \quad (4.54)$$

$$S_{\rho}^2(q) = 0.9988512875.$$

A densidade de probabilidade $\rho_1(r)$ é dada por :

$$\rho_1(r) = \frac{\pi C^2}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\Lambda r^2},$$

cujo valor da entropia $S_\rho^1(q)$ será :

$$\begin{aligned} S_\rho^1(q) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(r)|^q d^3r \right) \\ S_\rho^1(q) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \left(\frac{\pi C^2}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \right)^q \int_0^\infty e^{-\Lambda q r^2} d^3r \right) \\ S_\rho^1(q) &= 0.9488287361. \end{aligned}$$

Vamos agrupar os resultados do formalismo de Tsallis $S_\rho^1(q)$ e $S_\rho^2(q)$ no espaço das posições na figura que representará as entropias.

A proxima etapa em nosso estudo é fixar o oscilador (1) no seu estado excitado ($n = 1, l = 0, m = 0$) no espaço das posições do modelo de Moshinsky usando o formalismo de Tsallis, e variar o oscilador (2), semelhante como foi feito no formalismo de Shannon, logo temos a seguinte densidade de probabilidade.

$$\rho_2(R, r) = C^2 e^{-\omega R^2} e^{-\Lambda r^2} (-\omega R^2 + 3/2)^2$$

A entropia de Tsallis será dada por :

$$\begin{aligned} S_\rho^2(q) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(R, r)|^q d^3r d^3R \right) \tag{4.55} \\ S_\rho^2(q) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - C^{2q} \int_0^\infty (-\omega R^2 + 3/2)^{2q} e^{-\omega q R^2} d^3R \int_0^\infty e^{-\Lambda q r^2} d^3r \right) \end{aligned}$$

Da equação(4.54) temos que:

$$S_\rho^2(q) = 0.9992641061.$$

A densidade de probabilidade $\rho_1(r)$ é dada por :

$$\rho_1(r) = \int \rho_2(R, r) d^3R.$$

$$\rho_1(r) = \frac{\pi C^2}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\Lambda r^2}$$

A entropia $S_\rho^1(q)$ de Tsallis fica:

$$S_\rho^1(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(r)|^q d^3r \right)$$

$$S_\rho^1(q) = 0.9488287361.$$

Para o oscilador (1) o primeiro estado excitado ($n = 1, l = 0, m = 0$) e para o oscilador (2) no estado ($N = 1, L = 0, M = 0$), temos que a densidade de probabilidade será dada por:

$$\rho_2(R, r) = C^2 e^{-\omega R^2} e^{-\Lambda r^2} (-\omega R^2 + 3/2)^2 (-\Lambda r^2 + 3/2)^2$$

Da equação(4.55) temos que :

$$S_\rho^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(R, r)|^q d^3r d^3R \right) \quad (4.56)$$

Logo o resultado da entropia de Tsallis será :

$$S_\rho^2(q) = 0.9995285679.$$

Agora vamos utilizar a densidade de probabilidade $\rho_1(r)$ associada a este estado excitado, assim a entropia de Tsallis será :

$$S_\rho^1(q) = 0.9672184092.$$

Para este estado ainda podemos obter outras combinações, mas nosso interesse esta no valores da entropia sendo assim temos, a figura(4.7) representa esses valores obtidos.

Na figura 4.7 observamos a entropia de Tsallis $S_\rho^1(q)$ e $S_\rho^2(q)$ no espaço das posições. Na figura 4.7(a) observamos o gráfico de entropia de Tsallis $S_\rho^2(q)$. Para obter este gráfico fixamos o oscilador (1) no seu estado fundamental (0, 0, 0) e variamos o oscilador (2) do estado fundamental até sua estado excitado (3,2,2). Na figura 4.7(b) fixamos o oscilador (1) no seu estado (1, 0, 0) e variamos o oscilador (2) do estado fundamental até sua estado excitado (3,2,2) Utilizamos o fator entrópico $q = 2$. A figura 4.7(c) e 4.7(d) representam a entropia $S_\rho^1(q)$ de Tsallis nos estados fundamental e no primeiro estado excitado para o oscilador (1). Podemos observar que a entropia cresce para valores de (n, m) fixos, quando

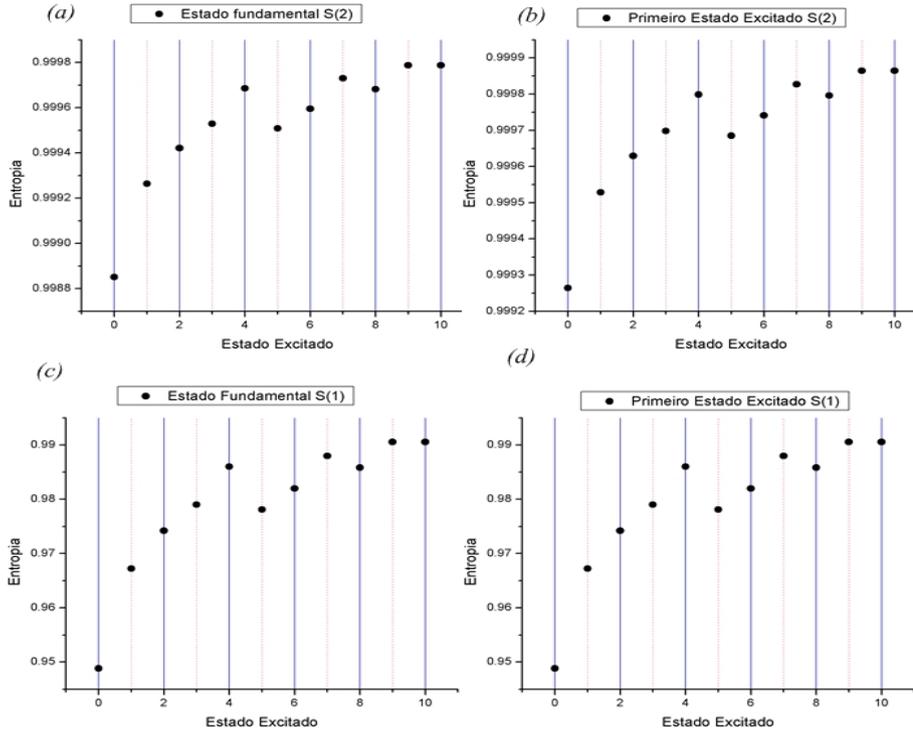


Figura 4.7: Entropia de Tsallis $S_\rho^1(q)$ e $S_\rho^2(q)$ para o espaço das posições utilizando o fator entrópico $q = 2$.

variamos o valor de (l) , a entropia decai em seu valor quantitativo, isso não significa uma mudança de fase.

Utilizando o formalismo de Tsallis no espaço das posições vamos fixar o oscilador (1) no seguinte estado $(n = 2, l = 0, m = 0)$ e variamos os estados do oscilador (2). A densidade de probabilidade $\rho_2(r, R)$ será :

$$\rho_2(r, R) = C^2 e^{-\omega R^2} \left(\omega^2 R^4 - 5\omega R^2 + \frac{15}{4} \right)^2 e^{-\Lambda r^2}$$

Usando novamente a definição da entropia no formalismo de Tsallis da equação 4.55, temos;

$$S_\rho^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(R, r)|^q d^3 r d^3 R \right). \quad (4.57)$$

Assim a entropia terá como valor :

$$S_\rho^2(q) = 0.9994210865$$

Para determinar a entropia $S_\rho^1(q)$ vamos precisar da densidade de probabilidade $\rho_1(r)$ na qual será :

$$\rho_1(r) = \int \rho_2(R, r) d^3 R$$

A entropia $S_\rho^1(q)$ de Tsallis fica:

$$S_\rho^1(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(r)|^q d^3r \right)$$

$$S_\rho^1(q) = 0.9488287361$$

Em seguida iremos apresentar o gráfico das entropias $S_\rho^1(q)$ e $S_\rho^2(q)$, usando o formalismo de Tsallis para obter seus resultados quantitativos.

Para o próximo estado excitado no formalismo de Tsallis temos o estado ($n = 2, l = 1, m = 0$), no espaço das posições a densidade de probabilidade é expressa por:

$$\rho_2(R, r) = C^2 R^2 e^{-\omega R^2} \left(\omega^2 R^4 - 7\omega R^2 + \frac{35}{4} \right)^2 \cos^2 \theta_R e^{-\Lambda r^2} \quad (4.58)$$

$$S_\rho^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(R, r)|^q d^3r d^3R \right) \quad (4.59)$$

Para resolver $S_\rho^2(q)$ vamos utilizar o seguinte integral:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-mx^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2m)^n} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \quad (4.60)$$

Logo que a entropia será :

$$S_\rho^2(q) = 0.9995286780$$

A densidade de probabilidade $\rho_1(r)$ será dada através da integração da probabilidade $\rho_2(R, r)$ deste estado.

$$\rho_1(r) = \frac{105 \pi C^2}{12 \omega^2} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\Lambda r^2} \quad (4.61)$$

$$S_\rho^1(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(r)|^q d^3r \right).$$

A entropia $S_\rho^1(q)$ de Tsallis é dada por:

$$S_\rho^1(q) = 0.9488287361.$$

Abaixo figura(4.8) apresentamos a entropia $S_\rho^2(q)$, para os estado n e N . Com todos os valores da entropia de $S_\rho^2(q)$, para todas as combinações possíveis em nossa analise.

Na figura(4.8) iremos abordar a entropia $S_\rho^2(q)$ de Tsallis no espaço das posições. Nesta figura apresentamos os resultados obtidos da entropia para o modelo de Moshinsky

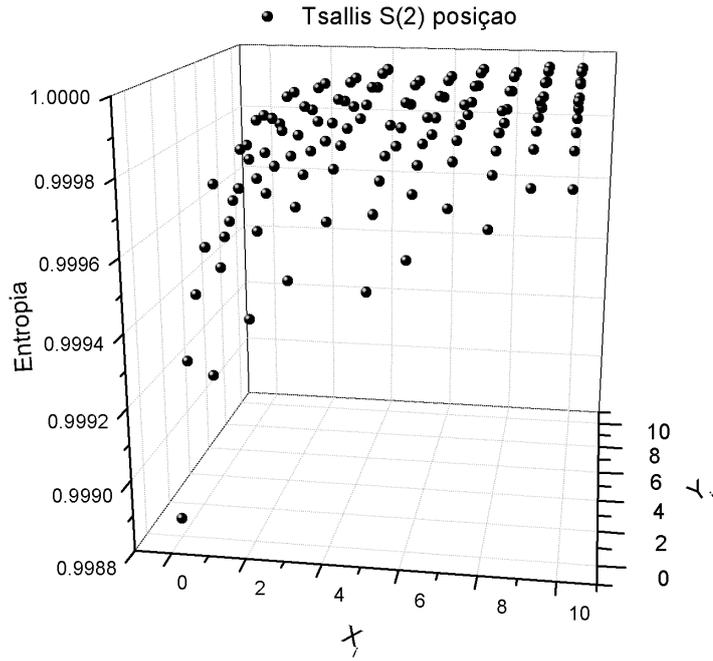


Figura 4.8: Entropia de Tsallis $S_{\rho}^2(q)$ para o espaço das posições

para diversos valores de X_i e Y_j . Para a entropia $S_{\rho}^2(q)$ verifica-se que ela cresce com os dois valores de X_i e Y_j , para cada valor maior de X_i , a entropia aumenta. Assim como para valores maiores de Y_j , ela também aumenta. Quando comparamos as figura(4.2) e figura(4.8), podemos ver claramente que a entropia em ambos os formalismos tem a mesma curvatura ou mesmos crescimentos.

Anunciaremos a entropia de Tsallis $S_{\rho}^1(q)$ através da figura(4.9) no espaço das posições. A priori a entropia $S_{\rho}^1(q)$ da figura(4.9) é similar a figura(4.3), mas quantitativamente observamos que $S_{\rho}^1(q)$ de Shannon é maior que $S_{\rho}^1(q)$ de Tsallis, isso para satisfazer o principio da pseudo-incerteza[23]. No trabalho de Yáñez[11] ele relata uma curvatura na entropia semelhante a curvatura obtido em nosso trabalho, sendo assim acreditamos é confiamos que nosso resultado para entropia de dois corpos esta corretamente de acordo com os trabalhos publicados em relação à este tema.

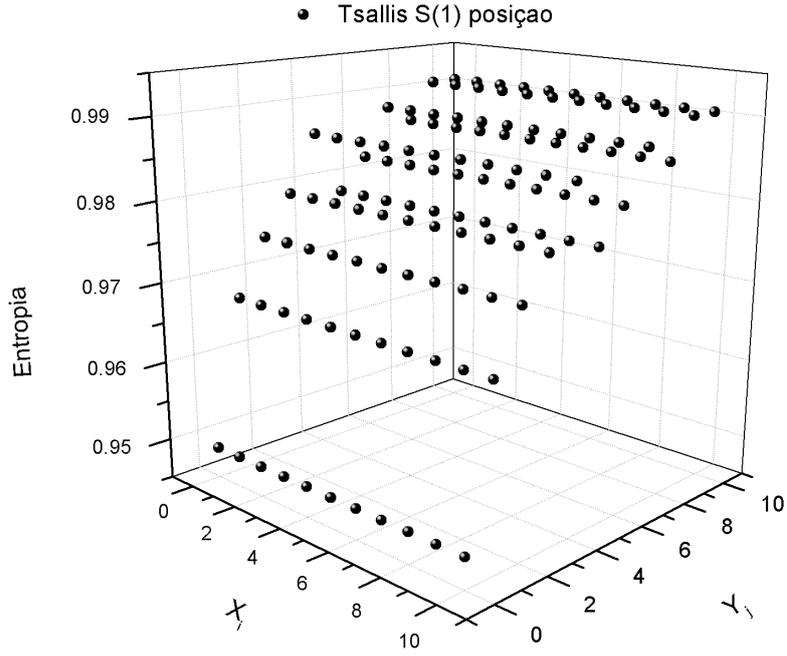


Figura 4.9: Entropia de Tsallis $S_\rho^1(q)$ para o espaço das posições

4.5 Entropia de Tsallis : Espaço dos momentos

Vamos analisar a entropia de Tsallis no espaço dos momentos, sendo que foi feita uma transformada de Fourier do mesmo modo que na entropia de Shannon. Então vamos iniciar o estudo da entropia de Tsallis no espaço dos momentos, pelo estado fundamental. A partir das funções de ondas podemos determinar as densidade de probabilidades, para o estado fundamental do oscilador (1) temos a densidade de probabilidade $\rho_2(k, K)$ dada por:

$$\rho_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} e^{-\frac{K^2}{\lambda}} \quad (4.62)$$

O formalismo de Tsallis é dada por :

$$S_\gamma^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(k, K)|^q d^3k d^3K \right) \quad (4.63)$$

$$S_\gamma^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - 16\pi^2 C^{2q} \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{qk^2}{\omega}} dk \int_0^\infty K^2 e^{-\frac{qK^2}{\lambda}} dK \right).$$

As entropias utilizadas são dadas por :

$$\int_0^{\infty} k^2 e^{-\frac{qk^2}{\omega}} dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\omega}{q}}$$

$$\int_0^{\infty} K^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} dK = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\Lambda}{q}}.$$

Logo a entropia será :

$$S_{\gamma}^2(q) = 0.9858515312.$$

A densidade de probabilidade $\rho_1(K)$ será :

$$\rho_1(K) = (\pi\omega)^{3/2} C^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \quad (4.64)$$

A entropia $S_{\gamma}^1(q)$ é dada por :

$$S_{\gamma}^1(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(K)|^q d^3K \right) \quad (4.65)$$

$$S_{\gamma}^1(q) = 0.9212166852$$

Tendo determinado as entropias $S_{\gamma}^1(q)$ e $S_{\gamma}^2(q)$ no estado fundamental utilizando o formalismo de Tsallis vamos para o proximo estado. Vamos agora fixar o oscilador (1) no estado (0,0,0) e o oscilador (2) no estado (1,0,0);

A densidade de probabilidade desse estado é $\rho_2(k, K)$.

$$\rho_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \quad (4.66)$$

A partir da densidade de probabilidade dada acima, vamos determinar a entropia $S_{\gamma}^2(q)$ compreendida pela equação abaixo.

$$S_{\gamma}^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(k, K)|^q d^3k d^3K \right) \quad (4.67)$$

$$S_{\gamma}^2(q) = 0.990936137.$$

Logo que a densidade de probabilidade $\rho_1(K)$ tem o seguinte formato :

$$\rho_1(K) = (\pi\omega)^{3/2} C^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)^2 \quad (4.68)$$

$$S_\gamma^1(K) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(K)|^q d^3K \right) \quad (4.69)$$

$$S_\gamma^1(q) = 0.9495294389.$$

As outras combinações iremos ver no gráfico das entropias de Tsallis $S_\gamma^1(q)$ e $S_\gamma^2(q)$.

Proximo passo vamos aplicar o formalismo de Tsallis para o primeiro estado excitado fixando o oscilador (1) no estado $(n = 1, l = 0, m = 0)$ e fixar o oscilador (2) no estado $(0, 0, 0)$, assim a densidade de probabilidade terá a seguinte forma:

$$\rho_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(-\frac{k^2}{\omega} + \frac{3}{2} \right)^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \quad (4.70)$$

Assim a entropia de Tsallis será:

$$S_\gamma^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(k, K)|^q d^3k d^3K \right). \quad (4.71)$$

Logo que seu resultado será dado por :

$$S_\gamma^2(q) = 0.9909361372.$$

Agora definindo $\rho_1(K)$, cujo seu valor é :

$$\rho_1(K) = 4\pi C^2 I_1(k) e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \quad (4.72)$$

Vamos utilizar algumas integrais definidas como :

$$I_1(k) = 0.07983831433$$

$$\int_0^\infty x^m \exp(-\beta x^n) dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{n\beta^\gamma} \quad \text{onde } \gamma = \frac{m+1}{n}.$$

Definimos também a função Gama :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n} \quad (4.73)$$

Assim a entropia será:

$$S_\gamma^1(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(K)|^q d^3K\right) \quad (4.74)$$

$$S_\gamma^1(q) = 0.9212166854$$

Nosso proximo objetivo é fixar o oscilador (1) no estado (2, 0, 0) e oscilador (2) no estado (0, 0, 0), a densidade de probabilidade deste estado será para a primeira combinação.

$$\rho_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2 - \frac{5k^2}{\omega} + \frac{15}{4}}\right)^2 e^{-\frac{K^2}{\lambda}} \quad (4.75)$$

Assim a entropia de Tsallis será dada por :

$$S_\gamma^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(k, K)|^q d^3k d^3K\right) \quad (4.76)$$

$$S_\gamma^2(q) = 0.9928696346$$

A densidade de probabilidade $\rho_1(K)$ é dada por :

$$\rho_1(K) = 4\pi C^2 e^{-\frac{K^2}{\lambda}} I_1(k) \quad (4.77)$$

a integral acima é :

$$I_1(k) = \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2 - \frac{5k^2}{\omega} + \frac{15}{4}}\right)^2 dk = 1.570181406$$

Logo que a entropia $S_\gamma^1(q)$ será:

$$S_\gamma^1(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_1(K)|^q d^3K\right) \quad (4.78)$$

$$S_\gamma^1(q) = 0.9212166853.$$

A seguir representamos os gráficos obtidos em nosso estudo para entropia de Tsallis no espaço dos momentos.

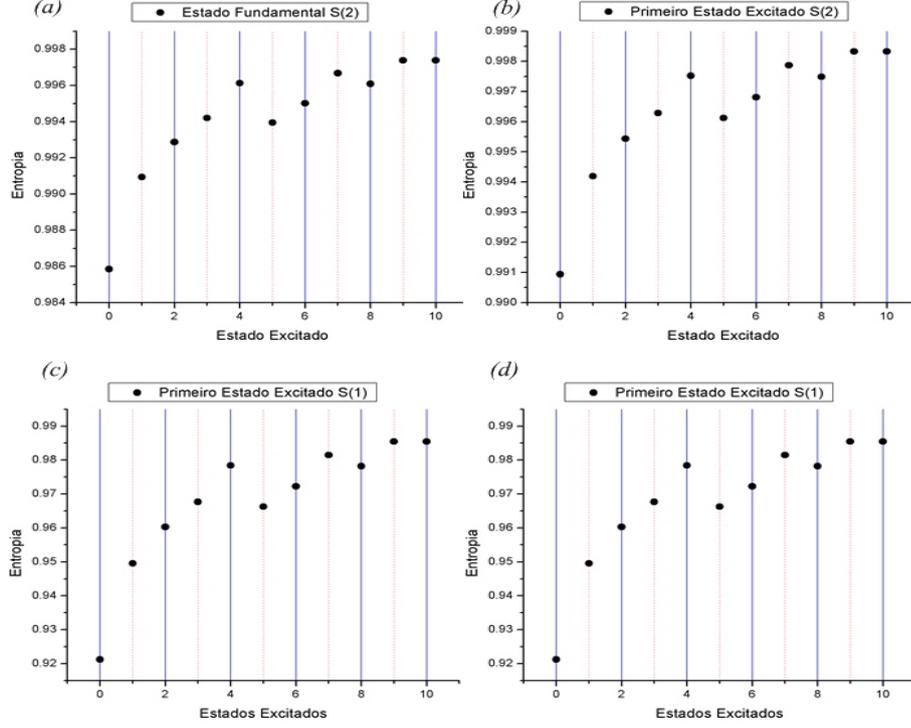


Figura 4.10: Entropia de Tsallis $S_\gamma^2(q)$ e $S_\gamma^1(q)$ no espaço dos momentos no primeiro estado excitado para o fator entrópico $q = 2$.

A figura 4.10 representa a entropia $S_\gamma^2(q)$ e $S_\gamma^1(q)$ de Tsallis no espaço dos momentos, para determinar este gráfico utilizamos o oscilador (1) fixado em seu estado fundamental é variamos o oscilador (2) do estado fundamental até o estado excitado (1,0,0) com $q = 2$. Fazendo um comparativo das figuras 4.10 com 4.7, visualizamos que a curva da entropia se comporta semelhante em todos os gráficos. Interessante notar que para ambas as figuras a entropia cresce até o estado ($l = 1, m = 1$) para ($n = 2$) e ($n = 3$) sendo que no estado seguinte ela decai em seu valor quantitativo, notamos também que o valor de $S_\gamma^2(q)$ é sempre maior que $S_\gamma^1(q)$ tanto no espaço dos momentos como no espaço das posições.

Agora vamos fixar o oscilador (1) no estado (2, 0, 0) e o oscilador (2) no estado (1, 0, 0), assim a densidade de probabilidade será dada por :

$$\rho_2(k, K) = C^2 e^{-\frac{k^2}{\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2} - \frac{5k^2}{\omega} + \frac{15}{4} \right)^2 e^{-\frac{K^2}{\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)^2 \quad (4.79)$$

$$S_\gamma^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int |\rho_2(k, K)|^q d^3k d^3K \right) \quad (4.80)$$

logo que a entropia será:

$$S_\gamma^2(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - 16\pi^2 C^{2q} \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{qk^2}{\omega}} \left(\frac{k^4}{\omega^2} - \frac{5k^2}{\omega} + \frac{15}{4} \right)^{2q} dk \int_0^\infty K^2 e^{-\frac{qK^2}{\Lambda}} \left(-\frac{K^2}{\Lambda} + \frac{3}{2} \right)^{2q} dK \right) \quad (4.81)$$

As integrais usadas aqui são da forma:

$$\int_0^\infty x^m \exp(-\beta x^n) dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{n\beta^\gamma} \quad \text{onde } \gamma = \frac{m+1}{n}.$$

Definimos também a função Gama[26]:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n} \quad (4.82)$$

$$S_\gamma^2(q) = 0.9954321097$$

Assim a entropia $S_\gamma^1(q)$ é dada por:

$$S_\gamma^1(q) = 0.9495294390.$$

Os gráficos das entropias são representados abaixo.

Na figura(4.11), representamos a entropia de Tsallis $S_\gamma^2(q)$ para o espaço dos momentos. Utilizamos o fator entrópico ($q = 2$), que caracteriza a entropia super-extensiva. Na entropia $S_\gamma^2(q)$ de Tsallis podemos ver que seu valor é muito menor que $S_\gamma^2(q)$ de Shannon para o modelo de Moshinsky. Porém, a característica da curva da entropia são semelhantes em ambos os formalismos das entropias. Um dos motivos de $S_\gamma^2(q)$ de Tsallis ser menor, deve-se ao fato de usarmos na entropia de Tsallis[28] o fator entrópico, pois quanto mais afastado o valor de q em relação ao número (1), os resultados tendem a se afastarem.

A figura(4.12), apresenta a entropia de Tsallis $S_\gamma^1(q)$ para o espaço dos momentos. Utilizamos o fator entrópico ($q = 2$), que caracteriza a entropia super-extensiva. A entropia $S_\gamma^1(q)$ de Tsallis tem um comportamento igual a entropia $S_\gamma^1(q)$ de Shannon. Observamos que em ambos formalismos $S_\gamma^1(q)$ cresce conforme aumentamos o valor de Y_j .

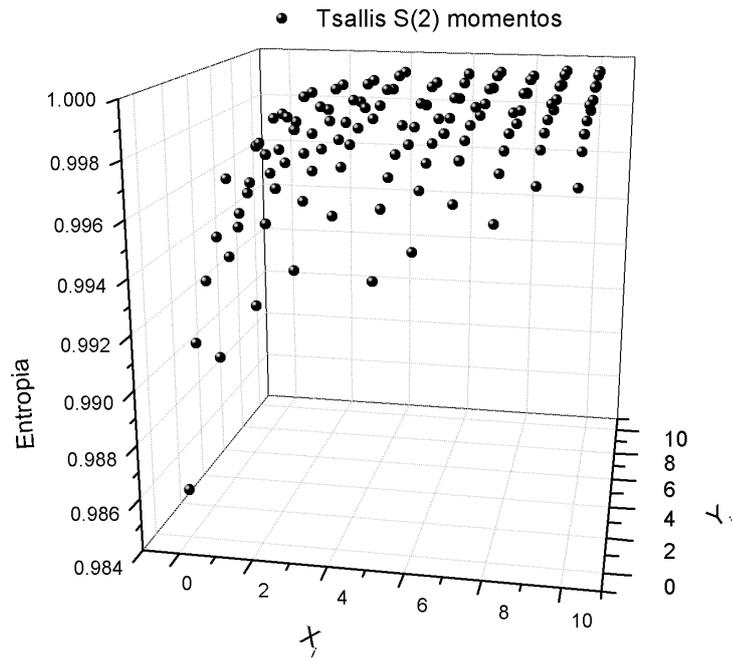


Figura 4.11: Entropia de Tsallis $S_\gamma^2(q)$ para o espaço dos momentos

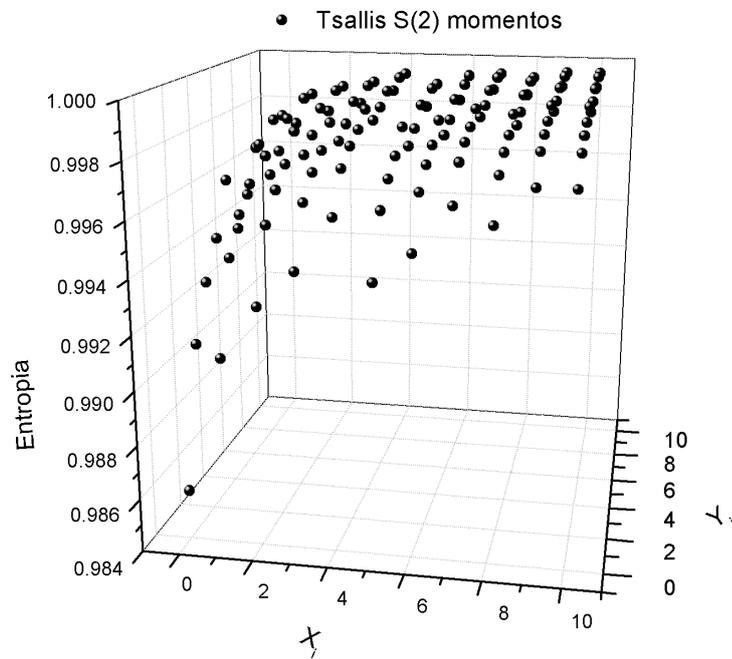


Figura 4.12: Entropia de Tsallis $S_\gamma^1(q)$ para o espaço dos momentos

As figuras (4.12) e (4.3) mostram esse comportamento, pois para valores de X_i a entropia cresce muito pouco, quase que não perceptível. Mas quando quando mudamos o valor de

Y_j , a entropia tem um ganho significativo em seu valor. Ao compararmos as duas figuras, verifica-se que a entropia $S_\gamma^1(q)$ de Shannon quantitativamente é maior que a entropia $S_\gamma^1(q)$ de Tsallis.

4.6 Princípio da incerteza para entropia de Tsallis

Vamos analisar o princípio da incerteza aplicada na entropia de Tsallis[23]. A definição do princípio da incerteza para o formalismo de Tsallis é dada pela relação.

$$\frac{[1 + (1 - q)S_\gamma(q)]^{1/2q}}{[1 + (1 - q)S_\rho(q)]^{1/2q}} \leq \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-n/4q} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{n/4q}. \quad (4.83)$$

Nossa análise inicia-se fixando o oscilador (1) e (2) no estado fundamental, aplicando o princípio da pseudo-incerteza[23] dado acima temos que $S_{\gamma,\rho}^2(q)$ será :

$$\frac{[1 + (1 - q)S_\gamma^2(q)]^{1/2q}}{[1 + (1 - q)S_\rho^2(q)]^{1/2q}} \leq \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-n/4q} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{n/4q} \quad (4.84)$$

Utilizamos o fator entrópico $q = 2$, $n = 0$ e tomando os valores dos resultados das entropias acima de Tsallis temos que:

$$\frac{[1 + (1 - 2)S_\gamma^2(q)]^{1/4}}{[1 + (1 - 2)S_\rho^2(q)]^{1/4}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-0/8} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{0/8} \quad (4.85)$$

$$\frac{[1 + (1 - 2)0.985]^{1/4}}{[1 + (1 - 2)0.999]^{1/4}} \leq 1 \quad (4.86)$$

$$\left(\frac{0.985}{0.999}\right)^{1/4} \leq 1 \quad (4.87)$$

$$0.996 \leq 1. \quad (4.88)$$

Logo concluímos que a entropia $S_\gamma^2(q)$ e $S_\rho^2(q)$ satisfazem o princípio da pseudo-incerteza de Tsallis[23]. Vamos comprovar que o princípio da pseudo-incerteza se aplica sobre $S_\rho^1(q)$ e $S_\gamma^1(q)$, da definição do princípio da pseudo-incerteza temos :

$$\frac{[1 + (1 - q)S_\gamma^1(q)]^{1/2q}}{[1 + (1 - q)S_\rho^1(q)]^{1/2q}} \leq \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-n/4q} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{n/4q} \quad (4.89)$$

$$\frac{[1 + (1 - 2)S_\gamma^1(q)]^{1/4}}{[1 + (1 - 2)S_\rho^1(q)]^{1/4}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-0/8} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{0/8} \quad (4.90)$$

$$\frac{[1 - 1.921]^{1/4}}{[1 - 1.967]^{1/4}} \leq 1 \quad (4.91)$$

$$0.987 \leq 1. \quad (4.92)$$

Comprovamos que nossos resultados estão de acordo com o principio de incerteza proposto por Tsallis, para o estado fundamental dos osciladores (1) e (2). Vimos que $S_\gamma^1(q)$ e $S_\gamma^2(q)$ obedecem fielmente o principio proposto, assim como $S_\rho^1(q)$ e $S_\rho^2(q)$. Iremos fazer mais um teste, para isso vamos fixar o oscilador (1) no estado (1, 0, 0) e o oscilador (2) no estado (0, 0, 0). Então vamos usar $n = 1$ e $q = 2$.

$$\frac{[1 + (1 - q)S_\gamma^2(q)]^{1/2q}}{[1 + (1 - q)S_\rho^2(q)]^{1/2q}} \leq \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-n/4q} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{n/4q} \quad (4.93)$$

$$\frac{[1 + (1 - 2)S_\gamma^2(q)]^{1/4}}{[1 + (1 - 2)S_\rho^2(q)]^{1/4}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/8} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/8} \quad (4.94)$$

$$\frac{[1 + (1 - 2)0.990]^{1/4}}{[1 + (1 - 2)0.999]^{1/4}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/8} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/8} \quad (4.95)$$

$$\frac{[1 - 1.990]^{1/4}}{[1 - 1.999]^{1/4}} \leq 1 \quad (4.96)$$

$$\left(\frac{0.990}{0.999}\right) \leq 1 \quad (4.97)$$

$$0.997 \leq 1. \quad (4.98)$$

Vamos aplicar o principio da pseudo-incerteza em $S_\rho^1(q)$ e $S_\gamma^1(q)$, assim temos que :

$$\frac{[1 + (1 - q)S_\gamma^1(q)]^{1/2q}}{[1 + (1 - q)S_\rho^1(q)]^{1/2q}} \leq \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-n/4q} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{n/4q} \quad (4.99)$$

$$\frac{[1 + (1 - 2)0.921]^{1/4}}{[1 + (1 - 2)0.948]^{1/4}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/8} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/8} \quad (4.100)$$

$$\frac{[1 - 1.921]^{1/4}}{[1 - 1.948]^{1/4}} \leq 1 \quad (4.101)$$

$$0.992 \leq 1. \tag{4.102}$$

Com os resultados acima comprovamos que a pseudo-incerteza de Tsallis, foi válida para nosso modelo em estudo.

Capítulo 5

Átomo de Positrônio

5.1 Entropia de Shannon : Espaço das Posições

Agora vamos aplicar o formalismo da entropia de Shannon no átomo de Positrônio[12], para cada estado específico. O primeiro estado a ser analisado é o estado fundamental.

Para o estado fundamental $(1, 0, 0)$ nossa função de onda[13] será dada pela equação(3.12).

$$\Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} \exp(-r/2).$$

Assim a densidade de probabilidade será :

$$\rho(r) = C^2 \exp(-r)$$

logo que a entropia será :

$$S_\rho = - \int \rho(r) \ln \rho(r) d^3\vec{r}$$

Assim a integral será resolvida da seguinte maneira, utilizando as integrais abaixo:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\mu x} dx = n! \mu^{-n-1} \quad , [Re \ \mu > 0]$$

logo que a entropia de Shannon para este estado será:

$$S_\rho = 8\pi C^2(3 - \ln(C^2))$$

$$S_\rho = 6.2241$$

Para o segundo estado excitado (2, 0, 0) utilizando o formalismo de Shannon a função de onda deste estado é;

$$\Psi(r) = C \left(1 - \frac{r}{4}\right) e^{-\frac{r}{4}}$$

Logo que a densidade de probabilidade é dada por :

$$\rho(r) = C^2 \left(1 - \frac{r}{4}\right)^2 e^{-\frac{r}{2}}$$

Utilizando as integrais definidas acima, temos que a entropia é ;

$$S_\rho = - \int C^2 \left(1 - \frac{r}{4}\right)^2 e^{-\frac{r}{2}} \ln C^2 \left(1 - \frac{r}{4}\right)^2 e^{-\frac{r}{2}} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

logo que

$$S_\rho = 10.1903.$$

Abaixo mostramos o gráfico da entropia de Shannon no espaço das posições para diversos estados excitados.

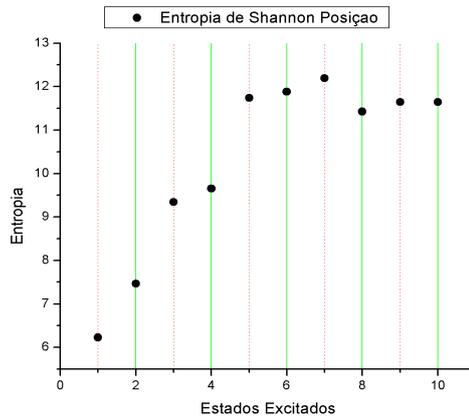


Figura 5.1: Entropia de Shannon S_ρ no espaço das posições.

O átomo de Positrônio é semelhante ao átomo de hidrogênio, sendo que o difere um do outro é a massa reduzida utilizada no átomo de Positrônio, em relação ao modelo

de Moshinsky, o Positrônio tem algumas diferenças em suas características. Na figura 5.1 temos o gráfico da entropia de Shannon S_ρ no átomo de Positrônio, no espaço das posições. Podemos observar que quantitativamente a entropia está sempre crescendo com relação aos primeiros estados. Do estado fundamental até o estado $(2, 1, 1)$ ou X_4 a entropia cresce semelhante a uma função linear, já do estado $(3, 2, 0)$ ou X_8 até o estado $(3, 2, 2)$ ou X_{10} ela tem um comportamento semelhante aos gráficos do modelo de Moshinsky. Por ter um curto período de vida o átomo de Positrônio pode apresentar algumas anomalias como uma grande desordem ou até mesmo uma variação nos valores da entropia.

5.2 Entropia de Shannon : Espaço dos Momentos

Como já definimos a função de onda para o espaço dos momentos sendo ela dada pela equação abaixo:

$$\Psi_{n,l,m}(k) = Z_{n,l}^2 \frac{(\lambda k)^l}{(1 + \lambda^2 k^2)^{l + \frac{D+1}{2}}} C_{n-l-1}^{l + \frac{D-1}{2}} \left(\frac{1 - \lambda^2 k^2}{1 + \lambda^2 k^2} \right) Y_{l,m}(\Omega) \quad (5.1)$$

sendo que a constante $Z_{n,l}$ é definida como ;

$$Z_{n,l} = \left(\frac{(n-l-1)!}{2\pi(n+l+D-3)!} \right)^{1/2} 2^{2l+D} \Gamma \left(l + \frac{D-1}{2} \right) \lambda^{\frac{D+1}{2}}. \quad (5.2)$$

Assim vamos definir o valor da entropia de Shannon para cada estado específico, similar ao espaço das posições.

Para o primeiro estado do átomo de Positrônio temos que :

$$\Psi_{1s}(k) = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{(1+k^2)^2}$$

com a função de onda definida acima podemos obter a densidade de probabilidade é:

$$\gamma_{1s}(k) = C^2 \frac{1}{(1+k^2)^4}.$$

A entropia de Shannon para o espaço dos momentos será:

$$S_\gamma = - \int \gamma_{1s}(k) \ln \gamma_{1s}(k) d^3 k$$

$$S_\gamma = -4\pi C^2 \ln C^2 \int_0^\infty \frac{k^2}{(1+k^2)^4} dk + 4\pi C^2 \int_0^\infty \frac{k^2}{(1+k^2)^4} \ln(1+k^2)^4 dp.$$

Para resolver as integrais acima, vamos utilizar as seguintes definições de integrais[26].

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(a+bx^\nu)^{n+1}} dx = \frac{1}{\nu a^{n+1}} \left(\frac{a}{b} \right)^{\mu/\nu} \frac{\Gamma(\frac{\mu}{\nu}) \Gamma(1+n - (\frac{\mu}{\nu}))}{\Gamma(1+n)} \quad [0 < \frac{\mu}{\nu} < n+1, a \neq 0, b \neq 0]$$

Para a outra integral usamos que [26]:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} \ln(\gamma+x)}{(\gamma+x)^{\nu}} dx = \gamma^{\mu-\nu} \mathbf{B}(\mu, \nu-\mu) [\psi(\nu) - \psi(\nu-\mu) + \ln \gamma] \quad [0 < \text{Re} \mu < \text{Re} \nu].$$

Assim a entropia de Shannon para o primeiro estado do átomo de positrônio será :

$$S_{\gamma} = 2.4218.$$

Para o segundo estado (2, 0, 0) do átomo de positrônio utilizando a entropia de Shannon temos que:

$$\Psi_{2s}(k) = \frac{16}{\pi} \frac{(1-4k^2)}{(1+4k^2)^3}.$$

Assim a densidade de probabilidade será dada:

$$\gamma_{2s}(k) = C^2 \frac{(1-4k^2)^2}{(1+4k^2)^6}.$$

A entropia para este estado será :

$$S_{\gamma} = - \int \gamma_{2s}(k) \ln \gamma_{2s}(k) d^3k$$

Para obter o resultado para este estado, temos que utilizar novamente das integrais definidas semelhantes ao do estado anterior;

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{(a+bx^{\nu})^{n+1}} dx = \frac{1}{\nu a^{n+1}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\mu/\nu} \frac{\Gamma(\frac{\mu}{\nu}) \Gamma(1+n - (\frac{\mu}{\nu}))}{\Gamma(1+n)} \quad [0 < \frac{\mu}{\nu} < n+1, a \neq 0, b \neq 0]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} \ln \gamma+x}{(\gamma+x)^{\nu}} dx = \gamma^{\mu-\nu} \mathbf{B}(\mu, \nu-\mu) [\psi(\nu) - \psi(\nu-\mu) + \ln \gamma] \quad [0 < \text{Re} \mu < \text{Re} \nu]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} \ln 1-x}{(1-x)^{1-\nu}} dx = \mathbf{B}(\mu, \nu) [\psi(\nu) - \psi(\mu+\nu)] \quad [\text{Re} \mu > 0, \text{Re} \nu > 0]$$

$$S_\gamma = 4.7836.$$

Reunindo os resultados para entropia de Shannon no espaço dos momentos, construímos o seguinte gráfico que representa a curvatura da entropia.

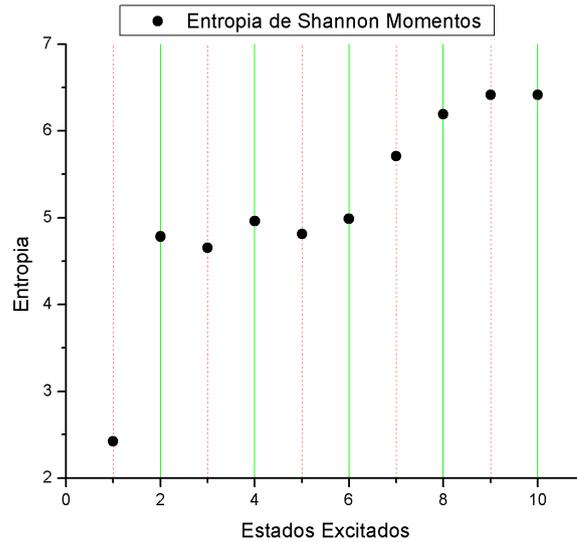


Figura 5.2: Entropia de Shannon S_γ no espaço dos Momentos

Na figura 5.2 calculamos a entropia de Shannon para o átomo de Positrônio no espaço dos momentos. Nessa figura observamos um comportamento semelhante ao da figura 5.1. Do estado $(3, 0, 0)$ até o estado $(3, 2, 2)$, temos uma curva de mesma características dos últimos estados da figura 5.1. A entropia de Shannon diminui sua intensidade quando comparamos o espaço dos momentos com o espaço das posições, isto ocorre também no átomo de Moshinsky, sendo assim uma característica entre as entropias mesmo em sistemas diferentes.

5.3 Princípio da incerteza BBM

Vamos aplicar o princípio da incerteza BBM[27] no átomo de Positrônio.

$$S_\rho + S_\gamma \geq D[1 + \ln(\pi)]. \quad (5.3)$$

Tomando os valores das entropias S_ρ e S_γ no estado $(1, 0, 0)$, a desigualdade BBM será:

$$6.22 + 2.42 \geq 3[1 + \ln(\pi)]$$

$$6.22 + 2.42 \geq 6.42$$

$$8.64 \geq 6.42. \quad (5.4)$$

Vamos agora aplicar o principio da incerteza BBM[27] no estado $(2, 0, 0)$.

$$7.46 + 4.78 \geq 6.42$$

$$12.24 \geq 6.42. \quad (5.5)$$

Vamos agora aplicar o principio da incerteza BBM[27] no estado $(2, 1, 0)$.

$$9.34 + 4.65 \geq 6.42$$

$$13.99 \geq 6.42. \quad (5.6)$$

O átomo de Positrônio obedece como vimos, o principio da incerteza BBM[27]. Observamos também que agrupando S_ρ e S_γ , a entropia aumenta com os estados mais excitados.

5.4 Entropia de Tsallis : Espaço das posições

Vamos agora aplicar o formalismo de Constantino Tsallis, cuja a entropia segue à não-extensividade, vamos determinar também o fator entrópico do formalismo. Iniciaremos nossa análise pelo primeiro estado. A função de onda que iremos utilizar é a mesma já determinada no formalismo de Claude Shannon, assim como a densidade de probabilidade.

O primeiro estado a ser analisado é o estado fundamental $(1, 0, 0)$, cujo a densidade de probabilidade é dada por:

$$\rho_{1s}(r) = C^2 e^{-r}$$

onde $C = \sqrt{\frac{1}{\pi}}(1/2)^{3/2}$.

A entropia de Tsallis no estado $(1, 0, 0)$ será:

$$S_\rho(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \rho_{1s}(r)^q d^3r \right)$$

$$S_\rho(q) = \frac{1}{q-1} (1 - 4\pi C^{2q} I_{1j})$$

$$I_{1j} = \int_0^\infty r^2 e^{-qr} dr$$

$$S_\rho(q) = 1.881794880.$$

Para o segundo estado $(2, 0, 0)$ temos que a densidade de probabilidade será dada por:

$$\rho_{2s}(r) = C^2 \left(1 - \frac{r}{2} \right)^2 e^{-r/2}$$

$$S_\rho(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \rho_{2s}(r)^q d^3\vec{r} \right)$$

$$S_\rho(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - 4\pi C^{2q} \int r^2 \left(1 - \frac{r}{2} \right)^{2q} e^{-\frac{qr}{2}} dr \right)$$

onde

$$I_{2j} = \int r^2 \left(1 - \frac{r}{2} \right)^{2q} e^{-\frac{qr}{2}} dr$$

$$S_\rho(q) = \frac{1}{q-1} (1 - 4\pi C^{2q} I_{2j})$$

$$S_\rho(q) = 1.916782322.$$

Em seguida iremos ao próximo estado excitado (2, 1, 0) cujo a densidade de probabilidade é dada por:

$$\rho_{2p_0}(r) = C^2 r^2 e^{-\frac{qr}{2}} \cos^2(\theta) \quad \text{onde} \quad C = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^5}}.$$

A entropia de Tsallis então será dada por :

$$S_\rho(q) = \frac{1}{q-1} (1 - 2\pi C^{2q} I_{3j} I_1(\theta))$$

$$I_{3j} = \int_0^\infty r^{2(q+1)} e^{-\frac{qr}{2}} dr$$

$$I_1(\theta) = \int_0^\pi \sin(\theta) \cos^{2q}(\theta)$$

$$S_\rho(q) = 1.976782322.$$

A partir das informações da entropia obtidas acima, plotamos o gráfico de Tsallis no espaço das posições para todos as combinações de estados estudados.

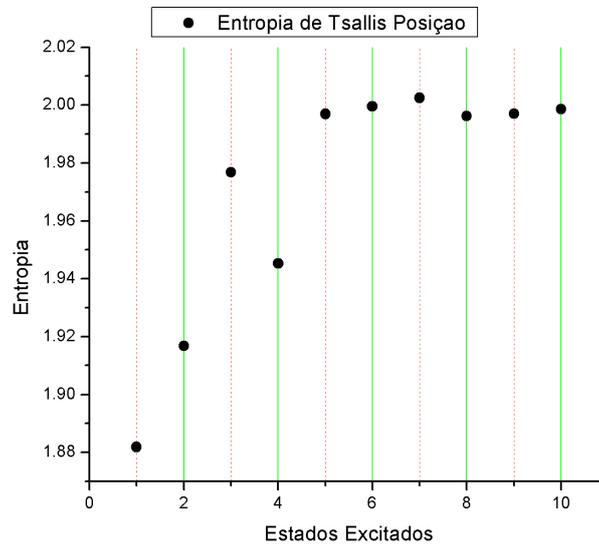


Figura 5.3: Entropia de Tsallis $S_\rho(q)$ para o fator entropico $q=1.5$ no espaço das posições.

Na figura 5.3 calculamos a entropia para o átomo de Positrônio no espaço das posições utilizando o fator entrópico $q = 1.5$. Na figura observamos que a entropia conserva as características das figuras 5.1 e 5.2, sendo que a mesma cresce e decai em estados comum

como (2,1,0). Único ponto que ficou fora das características foi o ponto (2,1,1) este fenômeno pode ser atribuído ao fator entrópico utilizado. O fator entrópico não tem um parâmetro definido, logo utilizamos o mais adequado ao cálculos do nosso sistema.

5.5 Entropia de Tsallis : Espaço dos momentos

Vamos definir a função de onda para o espaço dos momentos e em seguida obter as entropias usando o formalismo de Tsallis para cada estado do nosso sistema.

$$\Psi_{n,l,m}(k) = V_{n,l}^2 \frac{(\lambda k)^l}{(1 + \lambda^2 k^2)^{l + \frac{D+1}{2}}} C_{n-l-1}^{l + \frac{D-1}{2}} \left(\frac{1 - \lambda^2 k^2}{1 + \lambda^2 k^2} \right) Y_{l,m}(\Omega) \quad (5.7)$$

sendo que a constante $V_{n,l}$ é definida como ;

$$V_{n,l} = \left[\frac{(n-l-1)!}{2\pi(n+l+D-3)!} \right]^{1/2} 2^{2l+D} \Gamma \left(l + \frac{D-1}{2} \right) \lambda^{\frac{D+1}{2}}. \quad (5.8)$$

Para o estado (1,0,0) obtemos a seguinte densidade de probabilidade :

$$\gamma_{1s}(k) = C^2 \frac{1}{(1 + k^2)^4}.$$

Assim a entropia de Tsallis será ;

$$S_\gamma(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \gamma_{1s}(k)^q d^3k \right)$$

$$S_\gamma(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - 4\pi C^{2q} \int_0^\infty \frac{k^2}{(1+k^2)^{4q}} dk \right)$$

$$S_\gamma(q) = \frac{1}{q-1} (1 - 4\pi C^{2q} I_{1j})$$

$$S_\gamma(q) = 1.212223224.$$

Para o estado (2,0,0) obtemos a seguinte densidade de probabilidade :

$$\gamma_{2s}(k) = C^2 \frac{(1 - 4k^2)^2}{(1 + k^2)^6}$$

$$S_\gamma(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \gamma_{2s}(k)^q d^3k \right)$$

$$S_\gamma(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - 4\pi C^{2q} \int_0^\infty k^2 \frac{(1 - 4k^2)^{2q}}{(1 + 4k^2)^{6q}} dk \right)$$

$$S_\gamma(q) = 1.598428425.$$

Para o estado $(2, 1, 0)$ a densidade de probabilidade é dada por :

$$\gamma_{2p_0}(k) = C^2 \frac{k^2}{(1 + 4k^2)^6} \cos^2(\theta)$$

Logo que a entropia de Tsallis será dada pela seguinte forma:

$$S_\gamma(q) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \gamma_{2p_0}(k)^q d^3k \right)$$

$$S_\gamma(q) = \frac{1}{q-1} \left[1 - 2\pi C^{2q} \int_0^\infty \frac{k^{2(q+1)}}{(1 + 4k^2)^{6q}} dk \int_0^\pi \cos^{2q}(\theta) \sin(\theta) d\theta \right]$$

$$S_\gamma(q) = 1.691211631.$$

O gráfico da entropia de Tsallis no espaço do momentos é dado abaixo.

Na figura 5.4 calculamos a entropia de Tsallis para o átomo de Positrônio no espaço dos momentos utilizando o fator entrópico $q = 1.5$. Podemos fazer uma analogia com a entropia de Tsallis para o átomo de Moshinsky mesmo que o fator entrópico entre os dois modelos sejam diferentes. Fazendo essa analogia podemos perceber que nos estados mais externos ou mais excitados a entropia de Tsallis tem um comportamento diferente

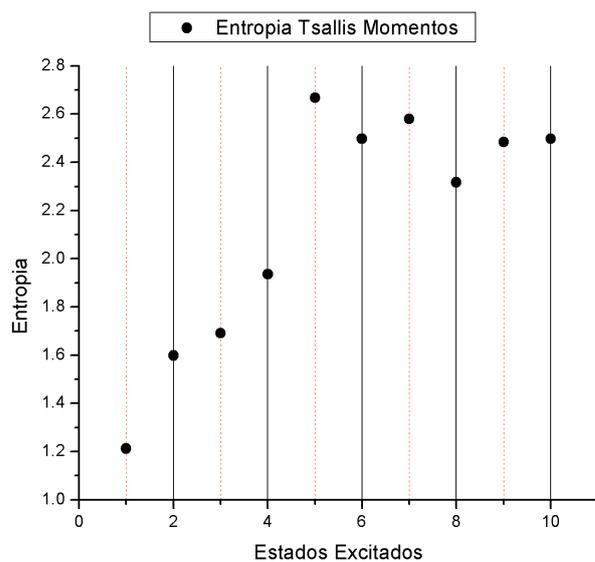


Figura 5.4: Entropia de Tsallis $S_\gamma(q)$ para o fator entrópico $q = 1.5$ no espaço dos Momentos

em ambos os modelos, apesar de alguns estados apresentarem características semelhantes em relação a curva da entropia. Da figura 5.4 percebemos a proximidade com os resultados[11], pois a entropia cresce e decai sucessivamente.

Capítulo 6

Conclusão

Nessa dissertação desenvolvemos os cálculos da entropia da informação utilizando formalismos extensivos[1] e não-extensivos[6] aplicado em sistemas de dois corpos[13], como o modelo de Moshinsky[11] e o átomo de Positrônio[12]. Primeiramente desenvolvemos as funções de ondas para cada modelo, assim encontrando as densidades de probabilidades para aplicar nos formalismo das entropias de Shannon e Tsallis. O formalismo da entropia de Shannon obedece o principio da extensividade onde podemos somar as entropias sem perder a dimensionalidade. Já o formalismo de Tsallis não obedece o principio da extensividade, sendo conhecida como entropia não-extensiva, este fato faz com que a entropia de Tsallis seja aplicada em sistemas não-lineares. A entropia em todos os casos considerados acima cresce conforme vamos crescendo os números quânticos (n, l, m) usados, que indica um aumento de quantidade da informação no sistema. A entropia de Shannon pode crescer até um valor máximo chamado de relação de incerteza BBM[15], esta relação é a soma dos valores das entropias (posição e momento), que não pode ultrapassar o valor mínimo, para se considerada extensiva, definido pela relação. Mostramos que os cálculos da entropia envolve funções geométricas e vários tipos de polinômios como Hermite, Laguerre, Gegenbauer e Legendre[16]. A entropia de Shannon tem uma dependência logarítmica e também terá uma dependência do potencial de acoplamento dos dois osciladores. O valor da entropia de Shannon cresce quanto menor for o potencial de ligação, pois assim os osciladores tem maior liberdade de vibração, com isso irá conter mais informação para o sistema. Devemos lembrar que quanto maior o grau de aleatoriedade maior será a informação contida no sistema físico em análise. Diferentemente do Shannon, a entropia de

Tsallis tem dependência de potência e também além da interação depende sobre o fator q que corresponde a medida da extensividade. No limite $q \rightarrow 1$ o resultado do Tsallis deve tender o resultado do Shannon. Comprovamos que aproximando o valor de (q) para 1, os valores de Tsallis, se aproximam dos valores de Shannon, é quando aumentamos o valor de (q) a entropia de Tsallis se distancia totalmente da entropia de Shannon, comprovando assim a relação entre os dois formalismos. A informação aumenta com o crescimento da entropia, quanto maior o valor da entropia maior será a informação obtida do sistema. S_p e S_γ nós dão quanta informação podemos ter quando o oscilador está acoplado ou não, logo o acoplamento dos osciladores tem uma influência direta na informação obtida. Analisando os gráficos podemos ver um comportamento bem próximo da entropia de Shannon e Tsallis para o modelo de Moshinsky, tanto no espaço das posições como no espaço dos momentos. Este comportamento foi observado por Yáñez em seu trabalho com o átomo de Hidrogênio[11]. Os gráficos do modelo de Moshinsky mostram uma variação na entropia quando fixamos o oscilador (1) e variamos o oscilador (2), esta variação ocorre quando variamos os números quânticos utilizados (n, l, m) , como consequência mudamos também os estados excitados, usados em nossas análises. Quando comparamos nossos resultados com os resultados de Yáñez[11], temos as mesmas características nos gráficos das entropias tanto para Shannon como para Tsallis[29]. Isto significa que a entropia pode ter vários formalismos mas sempre sua característica da curvatura será preservada não importa o sistema em estudo. No átomo de Positrônio encontramos um comportamento diferente em relação ao modelo de Moshinsky, esse fato se deve por o átomo de Positrônio ser um modelo muito sensível é ter um tempo de vida muito curto, mas ainda sim o resultado obtido é muito interessante pois verificamos nos gráficos que a entropia cresce, quase que semelhante ao átomo de hidrogênio[22], acreditamos que mesmo para sistemas diferentes de dois corpos a entropia tem um comportamento semelhante para as duas teorias utilizadas. No modelo de Moshinsky o comportamento da entropia é muito mais evidente quando comparado ao átomo de Positrônio. Em ambos os modelos a entropia de Shannon e Tsallis crescem quando fixamos os números quânticos (n, m) e variamos (l) . Sendo que os dois modelos de Moshinsky e Positrônio se mostraram bem interessantes para o estudo da entropia aplicando os modelos de Shannon e Tsallis. Enfim concluímos que estes modelos são protótipos para futuramente expandir o estudo da entropia para outros modelos com maiores interações elétron-elétron, assim vamos poder obter uma nova forma

de informação ou filtrar cada vez mais a informação contida nos códigos criptografados.

Apêndice A

Biografias

A.1 Claude Shannon

Claude Elwood Shannon nasceu em 30 de abril de 1916 em Petoskey, no estado de Michigan, Estados Unidos, e faleceu em 24 de fevereiro de 2001 de causas naturais. Passou seus primeiros 16 anos na pequena cidade de Gaylord, Michigan e frequentou a escola pública onde sua mãe foi professora de línguas e diretora. Seu interesse por objetos mecânicos se manifestou desde da infância, foram inúmeras as engenhocas que construiu para sua própria diversão, como um barco controlado por rádio e um telegrafo entre sua casa e a de um vizinho usando um par de fios de arame farpado que rodeava um pasto. Tinha gosto por jogos mentais, como a resolução de criptogramas, adquirido pela leitura de “O escaravelho dourado” de Edgar Allan Poe, e similares.

É interessante mencionar a breve interação Shannon com Alan Turing durante a segunda guerra mundial, bem como sua participação no *project X*, que foi um projeto secreto conduzido pelos Laboratórios Bell¹ para a criptografia da voz humana. Até então, eram utilizados métodos analógicos de distorção de ondas sonoras, o que era pouco eficaz por requerer apenas um ouvinte atento e paciente para entender o que se transmitia. O sistema X, ao contrário, trabalhava com a quantização de ondas sonoras, sendo que ao resultado deste processo seriam adicionados valores arbitrários determinados por uma “chave”, que deveria ser de conhecimento apenas do transmissor e do receptor da mensagem. Este

¹onde Shannon realizou a maior parte de suas pesquisas

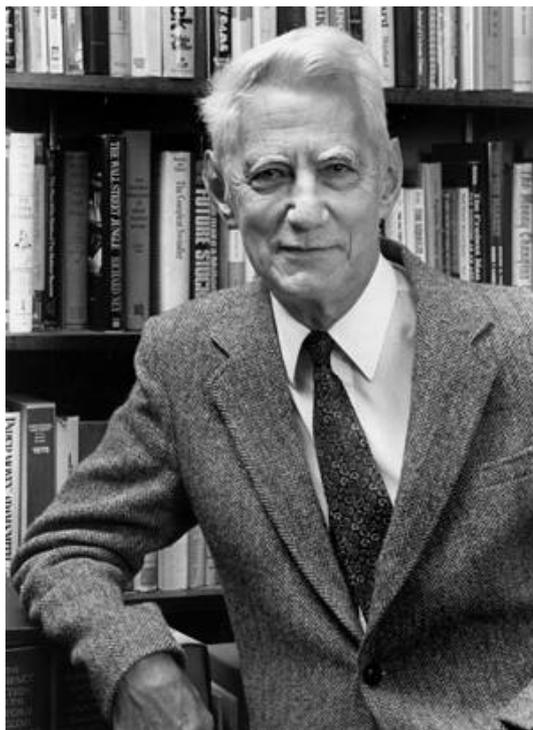


Figura A.1: Claude Shannon

método foi proposto e descrito matematicamente por Shannon em sua teoria da comunicação dos Sistemas de sírgilo, e posteriormente na própria TMC² sem o componente criptográfico.

Shannon em uma entrevista relata que tinha total liberdade para escolher o tema de seu trabalho no Laboratório de Bell, a escolha de trabalhar com sistema de sírgilo talvez não tenha sido simples coincidência entre suas vontades e os interesses de seu empregador(determinado pelo contexto da segunda guerra mundial), caso contrário não lhe teria sido preciso mudar a abordagem de seu trabalho em teoria da comunicação para uma teoria sobre criptografia. Parece lícito questionar se a “liberdade” não seria melhor entendida com a possibilidade de trabalhar em qualquer um dos projetos em curso no Laboratório Bell, somada ao ambiente informal e á abundância de recursos tecnológicos que eram oferecidos a seus pesquisadores mais importantes.

É importante salientar que sua dissertação é considerada um marco na ciência da computação por ter provido os fundamentos necessários para a construção de computadores cada vez mais sofisticados. Até então, as máquinas de cálculos mais poderosas

²Laboratório de pesquisa onde Shannon trabalhou

eram analógicas, como o analisador diferencial de Vannevar Bush, de quem Shannon foi assistente antes de obter seu grau de Mestre em Engenharia elétrica. Entretanto os dispositivos analógicos eram projetados e resolver problemas determinados (como resolver parcialmente ou totalmente equações diferenciais) e tinham limitações de precisão, pois se valiam de medições de propriedades físicas macroscópicas.

A.2 Constantino Tsallis

Nasceu em Atenas, em 1943, no seio de família grega de industriais e políticos. Aos quatro anos de idade emigrou, com sua família, para a América do Sul e, após breve estadia no Brasil, estabeleceu-se em Mendoza na Argentina, onde completou seus estudos primários e secundários. Após estudar Engenharia Química durante dois anos e meio, ganhou uma Bolsa em concurso público nacional e transferiu-se para o Instituto de Física Balseiro de Bariloche, onde completou seis anos acadêmicos, recebendo seu diploma em 1965. Em 1966 foi, inicialmente com bolsa do governo francês, para a França, onde morou durante oito anos. Durante este período lecionou Física regularmente na Universidade de Paris (7 anos) e na "École de Physique et Chimie" de Paris. Em 1974 recebeu o diploma de "Docteur d'Etat ès Sciences Physiques" pela Universidade de Paris-Orsay por pesquisas na área de Teoria de Transições de Fase com breves incursões experimentais. Durante todo este período, os mestres que mais o influenciaram foram Guido Beck – com seu talento para ligar complexas teorias com fatos da vida quotidiana– e Pierre-Gilles de Gennes – com sua notável habilidade de obter resultados teóricos não triviais sem realizar cálculos complicados.

Em 1975 emigrou para o Brasil: os dois primeiros anos na Universidade de Brasília, e os demais no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas no Rio de Janeiro, com freqüentes visitas ao Nordeste brasileiro, principalmente a Natal (Universidade Federal do Rio Grande do Norte) e Maceio (Universidade Federal de Alagoas). Nestas cidades, assim como em Cordoba-Argentina, contribuiu decisivamente para a criação e consolidação de grupos de pesquisa em Física Estatística.



Figura A.2: Constantino Tsallis

A.3 Marco Moshinsky

Em 1942 ele começou a prática como professor assistente de Mecânica Quântica, no Instituto de Física da Universidade. Em 1949 foi para Universidade de Princeton, EUA, onde completou seu doutorado, liderado por Eugene Wigner, Prêmio Nobel da Física. Retornando ao México, ele continuou seu ensino e pesquisa. Em 1954, ano em que obteve o nível de Professor Titular, viajou para Paris, incentivado por uma bolsa do CNRS³. Durante os anos cinquenta, trabalhou nas áreas de física teórica nuclear e física matemática, especificamente, em uma teoria esquemática de reações nucleares e estudos sobre a estrutura dos núcleos atômicos. Introduziu o conceito de suportes de transformação para as funções de oscilador harmônico. Em 1959 ele foi premiado com uma bolsa Fellowship⁴ da Alfred P. Sloan. Ele concordou com a cadeira de Física Teórica e começou a pesquisar o conceito de simetria oculta em problemas de mecânica quântica. Nos anos setenta, se concentrou em duas questões: primeiro, relacionado com transformações canônicas em mecânica clássica e representação mecânica quântica, no segundo, sobre o movimento colectivo em núcleos, tanto do ponto de vista macroscópico e do microscópio. Ele presidiu a

³Centro Nacional de Pesquisa Científica

⁴Fundação de apoio a pesquisa

Academia de Investigação Científica entre 1962 e 1963 e da Sociedade Mexicana de Física de 1967-1969.

Em 29 de abril de 1988 recebeu o Prêmio Príncipe de Astúrias de Investigação, um prêmio que ele dividia com o espanhol Manuel Cardona. Em 1991, a Organização dos Estados Americanos (OEA) foi agraciado com o Prêmio Bernardo Houssay Ciência por seu trabalho monumental de teóricos da física nuclear e em reconhecimento de seu trabalho como fundador da Escola Latino-Americana de Física. Entre suas pesquisas incluem parêntese Tabelas Teoria Grupo de Transformação e o problema de muitos corpos, problema de muitos corpos e problema relacionado de Física Teórica e movimento harmônico de osciloscópio na física moderna de átomo para quarks.

O modelo de Mochinsky nos últimos anos, atraiu o interesse dos investigadores, como um campo de testes para investigar os aspectos fundamentais da física atômica. Em particular, ela tem sido usada para explorar a aplicação das idéias da teoria da informação a este campo. O modelo Moshinsky fornece um sistema solucionável onde alguns aspectos fundamentais da física atômica pode ser investigado detalhadamente, com cálculos analíticos exatos. Além disso, a informação exata sobre os estados excitados do modelo Moshinsky pode ser usado para desenvolver técnicas de aproximação valiosa para o tratamento de modelos mais realistas.

Referências Bibliográficas

- [1] SHANNON, C. E. *Bell Syst. Tech. J.* , **27**, 379.(1949).
- [2] GARDINER,C. W. *Handbook of Stochastic Methods* Springer, Berlin, (1985).
- [3] GHOSH, A. and CHAUDHURI, P., *Int. J. Theo. Phys.*, **39**, 2423. (2000).
- [4] SALINAS, S. R. A., **Introdução à Física Estatística**. 2.ed. USP., São paulo(2008).
- [5] TSALLIS, C., *J.Stat. Phys.*, **52**, 479. (1988).
- [6] TSALLIS,C., BORGES, E.P. and BALDOVIN, F., *Physica A* 305, 1 (2002).
- [7] SOUZA,G.M., VILLA NOVA, N.A. and GONÇALVES, A.N. *Rev. Bras. Biol.* no.3, São Carlos(1999).
- [8] ALAIN, H.,*Revista de Economia Politica*, **25**, pg277.(2005).
- [9] DANCHIN, A., *Entropy et ordre biologique la recherche*.pg.788.(1978).
- [10] YÁÑEZ, R. L., VAN ASSCHE, W., and DEHESA, J. S. *Phys. Rev. A*, **50**, 3065. (1994).
- [11] CUI, N., MACOVEI, M., HATSAGORTSYAN, Z. and KEITEL, C. H. *Phys. Rev. Lett*, **108**, 243401. (2012).
- [12] GRIFFITHS, David J. **Introduction to Quantum Mechanics**. Prentice Hall : United States of America, (1994).
- [13] DIRAC, Paul A. **Theory of electrons and positrons**, Nobel Lacture, Dec(1933).

- [14] EISBERG, Robert and RESNICK, Robert. **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Campus, (1979).
- [15] MACHADO, K. Daum. **Teoria do Eletromagnetismo**. 2. ed. Ponta Grossa: UEPG, v. 1.(2005).
- [16] MERZBACHER, Eugen. **Quantum Mechanics**. 3. ed. Wiley:United States of America (1998).
- [17] C. SAGAN, *Apel blue dot : A vision of the Human future in space*. Random House. New York, (1994).
- [18] BLOCK, M. and ZEMAN, R. *Including student with disabilities in regular Physical education: effects on nondisabled children*. adapted Physical activity quarterly, 13, pg.38(1996).
- [19] DONG, Y. and LI, B. *Biometrika*, **97**, 279-294(2010).
- [20] www.explicatorium.com/Max-Planck.php (acessado em 05/07/2013).
- [21] TSALLIS, C., MENDES, R.S., PLASTINO, R.A. , *Physics A* **261**, 534. (1998).
- [22] YÁÑEZ, R. L., PLASTINO, A.R., and DEHESA, J. S. *Eur. Phys. J. D.*, **56**, 141. (2010).
- [23] ABRAMOWITZ, M., and SEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York,(1970).
- [24] DEUTSCH, M., *Phys. Rev.* , **82**, p.455. (1951).
- [25] GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK I. M. **Tables of integrals, Series and Products**. Academic Press, New York (1965).
- [26] BIALYNICI-BIRULA, I., and MYCIELSKI, J. *Comm. Math. Phys.*, **44**, 129, (1975).
- [27] LYRA, M.L. and TSALLIS, C. . *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53 (1997).
- [28] ANTENEODO, C. and TSALLIS, C. J. *Math. Phys.* **44**, 5194 (2003).
- [29] FILHO, J. B. B. and ARAÚJO, R.M.X. **Res. Bras.de Ens. de Fís.** V.29,P.233, São paulo(2007).