

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE
DELAUNAY

Geziel Damasceno Bezerra

MANAUS - 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Geziel Damasceno Bezerra

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE
DELAUNAY

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS - 2012

Geziel Damasceno Bezerra

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE
DELAUNAY

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 4 de Abril de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof^o Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

.....

Prof^a Dr. José Nazareno Vieira Gomes, Membro
Universidade Federal do Amazonas

.....

Prof^o Dr. Cleon da Silva Barroso, Membro
Universidade Federal do Ceará

.....

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão desse trabalho, em especial, a Deus pela capacitação e permissão, ao meu orientador professor Renato Tribuzy pela paciência e dedicação, aos professores Raul Mesquita, Ivan Tribuzy e José Kenedy pelas lições de geometria diferencial, aos meus colegas do mestrado Adrian Ribeiro e Francisco Almino pelo auxílio técnico computacional, sugestões e trocas de idéias, Ivana Bandeira e Marcos Aurélio pela contribuição com materiais didáticos, aos professores Inês Silva e Juliana Miranda pelos diálogos e esclarecimentos, aos professores Cleon Barroso e José Nazareno pelas correções e sugestões, e à FAPEAM pelo suporte financeiro.

RESUMO

Admite-se que, numa superfície completa, conexa e orientada imersa no espaço euclidiano tri-dimensional com curvatura média constante não nula, existe um triângulo geodésico cujos ângulos internos satisfazem uma relação integral envolvendo a curvatura média e o ângulo formado pelo vetor unitário paralelo a um eixo coordenado qualquer do espaço ambiente e o vetor unitário normal a superfície, e sob tais hipóteses mostra-se que a imersão é uma superfície de revolução, ou seja, uma superfície de Delaunay. Em seguida dar-se uma caracterização da esfera alterando-se algumas hipóteses no resultado anterior.

Palavras chave: Superfície de Revolução, Curvatura Média, Superfície de Delaunay, Esfera Padrão.

ABSTRACT

Admits that in a complete surface, connected and oriented immersed in \mathbb{R}^3 with non-zero constant mean curvature, there is a geodesic triangle whose interior angles satisfy a relationship involving the integral mean curvature and the angle formed by unit vector parallel to a coordinate axis of either \mathbb{R}^3 and the unit vector normal to the surface, and in such cases shows that the immersion is a surface of revolution, ie, a surface Delaunay. Then give a characterization of the sphere is changing some hypotheses on the previous result.

Keywords: Surfaces of Revolution, Mean Curvature, Surface of Delaunay, Standard Sphere.

Lista de Figuras

4.1	Catenária	51
4.2	Ondulária	51
4.3	Nodária	51
4.4	Catenóide	52
4.5	Ondulóide	52
4.6	Nodóide	52

Conteúdo

Lista de Figuras	i
Introdução	1
1 Generalidades	4
1.1 Variedades Diferenciáveis	4
1.2 Campos de Vetores	8
1.3 Métricas Riemannianas	10
1.4 Conexões Afins; Conexão Riemanniana	11
1.5 Geodésicas; Variedades Completas	13
1.6 Curvatura	13
2 Imersões Isométricas	15
3 O Teorema de Gauss-Bonnet	22
3.1 Formas Diferenciais numa Variedade	22

Conteúdo	ii
3.2 As Equações Estruturais do \mathbb{R}^n	27
3.3 Superfícies em \mathbb{R}^3	28
3.4 Teorema de Stokes	34
3.5 Teorema de Gauss-Bonnet	43
4 Superfícies em \mathbb{R}^3 com Curvatura Média Constante	50
4.1 Superfícies de Delaunay	50
4.2 Uma Caracterização do Cilindro	52
4.3 Analiticidade de Imersões de Superfícies em \mathbb{R}^3 com Curvatura Média Constante	53
5 Resultados Principais	54
5.1 Uma Caracterização das Superfícies de Delaunay	54
5.2 Acerca da Generalização	64
Bibliografia	67

Introdução

Em 1841, o matemático astrônomo francês Charles Eugène Delaunay, em seu trabalho *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, exibiu uma forma de construir superfícies com curvatura média constante fazendo a revolução de curvas descritas pelo foco de cônicas quando estas rolam sobre uma reta tangente sem escorregar. Tais superfícies são chamadas de Superfícies de Delaunay. Delaunay provou ainda que toda superfície de revolução com curvatura média constante é uma superfície de Delaunay.

Neste trabalho provaremos a seguinte caracterização das superfícies de Delaunay demonstrada por H. Alencar, M. do Carmo e R. Tribuzy em [2].

Teorema 1. *Sejam Σ uma superfície completa, conexa e orientada imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média H constante não nula, e θ o ângulo formado pelo vetor normal unitário dado pela orientação e um eixo coordenado fixado em \mathbb{R}^3 . Assuma que existe um triângulo geodésico T em Σ cujos ângulos internos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ satisfazem*

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|) d\sigma,$$

onde R é a região limitada por T . Então Σ é uma superfície de Delaunay.

Em 1951, H. Hopf desenvolveu um trabalho a respeito de superfícies compactas com curvatura média constante, no qual demonstrou de duas formas que *"uma superfície compacta de gênero zero (isto é, homeomorfa a uma esfera) Σ imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante é uma esfera padrão."* Ambas as provas fazem uso da existência de parâmetros isotérmicos e consiste no estudo de uma forma holomorfa Φ construída por Hopf definida em Σ , cujos zeros são exatamente os pontos umbílicos (pontos nos quais as curvaturas principais coincidem) de Σ .

Já em 1956, A. Alexandrov mostrou que *"se Σ é uma superfície compacta mergulhada em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante, então Σ é uma esfera padrão."* A demonstração faz uso de uma consequência do Princípio do Máximo e consiste em comparar a superfície ao seu reflexo em relação a planos. Tal técnica ficou conhecida posteriormente como método da reflexão de Alexandrov.

Como consequência da caracterização das superfícies de Delaunay daremos ainda a seguinte caracterização da esfera, cuja demonstração também pode ser encontrada em [2].

Teorema 2. *Sejam Σ uma superfície compacta, conexa e orientada imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média H constante não nula, e θ o ângulo formado pelo vetor normal unitário dado pela orientação e um eixo coordenado fixado em \mathbb{R}^3 . Se*

$$\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ , então Σ é uma esfera padrão.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 1 fixamos as notações e listamos definições e resultados gerais, no capítulo 2 apresentamos de forma sucinta o necessário do estudo das imersões isométricas.

cas, no capítulo 3 demonstramos o Teorema de Gauss-Bonnet, no capítulo 4 descrevemos o processo de demonstração do Teorema de Delaunay, e citamos resultados que serão utilizados no decorrer da prova dos resultados principais, e no capítulo 5 fazemos a demonstração dos resultados principais e comentários a respeito da generalização desses tais.

Capítulo 1

Generalidades

Este capítulo foi escrito afim de estabelecer as notações e conceitos que serão utilizadas no decorrer do trabalho e listar alguns fatos que usaremos posteriormente para auxiliar na compreensão dos resultados principais. Uma abordagem detalhada dos resultados abaixo pode ser encontrada em [6] e [15]. Neste e nos demais capítulos a palavra diferenciável significará de classe C^∞ .

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1. *Uma Variedade Diferenciável de dimensão n é um conjunto M juntamente com uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ definidas em abertos U_α de \mathbb{R}^n satisfazendo:*

1. $\bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$;
2. Para todo par α, β tal que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos de \mathbb{R}^n e a aplicação $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \rightarrow x_\beta^{-1}(W)$ é um difeomorfismo;

3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal em relação às condições (1) e (2).

Se $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, a aplicação $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ cumprindo as condições (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Se $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável no conjunto M , então os subconjuntos $A \subset M$ tais que $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de \mathbb{R}^n para todo α constituem uma topologia em M , a qual está definida de tal forma que os conjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações x_α são contínuas. Dessa forma, dizemos que uma variedade diferenciável é compacta, conexa, etc, se quando observada do ponto de vista topológico, for um espaço compacto, conexo, etc, respectivamente.

Exemplo 1.1.1. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n com sua aplicação identidade é uma variedade diferenciável de dimensão n .

Exemplo 1.1.2. Superfícies regulares em \mathbb{R}^3 são variedades diferenciáveis de dimensão 2. De fato, superfícies regulares são cobertas por aplicações definidas em abertos do \mathbb{R}^2 , e como pode ser visto em [4], a mudança de coordenadas é um difeomorfismo.

No que segue, ao denotarmos uma variedade diferenciável por M^n , o índice superior indicará a sua dimensão.

Definição 1.1.2. Dizemos que uma variedade diferenciável M é orientável quando existe uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que cumpre: Para todo par α, β tal que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, o determinante da diferencial da aplicação mudança de coordenada $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W) \rightarrow x_\alpha^{-1}(W)$ é positivo em todo $q \in x_\beta^{-1}(W)$. Se porventura não existir uma tal estrutura dizemos que

M é não-orientável. A escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a propriedade descrita acima é chamada uma orientação de M , e neste caso dizemos que M está orientada. Duas estruturas diferenciáveis determinam a mesma orientação quando a união delas ainda satisfaz a propriedade descrita acima.

Uma variedade diferenciável conexa orientável possui exatamente duas orientações.

Definição 1.1.3. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação. Dizemos que φ é diferenciável em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, chamada a expressão de φ nas parametrizações x e y , é diferenciável em $x^{-1}(p)$. φ é diferenciável se o for em todos os pontos de seu domínio.*

Definição 1.1.4. *Uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ na variedade diferenciável M é chamada uma curva diferenciável em M .*

Definição 1.1.5. *Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável na variedade diferenciável M tal que $\alpha(0) = p$. Denotemos por \mathfrak{D} o conjunto das funções reais definidas em M diferenciáveis em p . O vetor tangente a curva α em $t = 0$ é a aplicação $\alpha'(0) : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha'(0)(f) = (f \circ \alpha)'(0)$. Um vetor tangente a M em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. Denotaremos por $T_p M$ o conjunto dos vetores tangentes a M em p .*

O conjunto $T_p M$ munido com as operações usuais de funções é um espaço vetorial.

Seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização em p tal que $x(0) = p$ e $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$. Suponhamos que as expressões de α e f na parametrização x são dadas respectivamente por $\tilde{\alpha}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$. Então

$$\alpha'(0)f = (\tilde{f} \circ \tilde{\alpha})'(0) = \sum_{i=0}^n x'_i(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0) = \left\{ \sum_{i=0}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\} \tilde{f},$$

ou seja, $\alpha'(0)$ é uma combinação linear dos vetores linearmente independentes $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0$, e estes portanto constituem uma base para $T_p M$, a qual será chamada a *base associada* a parametrização x . Chamaremos o espaço vetorial $T_p M$ de *espaço tangente* de M em p .

Definição 1.1.6. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis, $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável e $p \in M_1$. A diferencial de φ em p é a aplicação linear $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ definida da seguinte forma: dado $v \in T_p M_1$, tome uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, e defina $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$, onde $\beta = \varphi \circ \alpha$.*

Tomemos $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ uma parametrização em p tal que $x(0) = p$ e $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$ e suponhamos que as expressões de α e φ na parametrização x são dadas respectivamente por $\tilde{\alpha}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$. Por definição,

$$d\varphi_p(v) = (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\alpha})'(0) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(0) \right) (x'_j(0)),$$

$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$, donde $d\varphi_p$ é de fato uma aplicação linear cuja matriz relativa às bases associadas às parametrizações x e y é a matriz do tipo $m \times n$ acima. Desta relação temos ainda que, embora tenhamos feito a escolha de uma curva para definir a diferencial, tal definição independe dessa escolha.

Definição 1.1.7. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma bijeção diferenciável $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ cuja inversa φ^{-1} é diferenciável é chamada um difeomorfismo. φ é um difeomorfismo local em p se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.*

Exemplo 1.1.3 (O Fibrado Tangente). *Sejam M^n uma variedade diferenciável e $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$. Seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável máxima de M . Indicaremos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$ as bases canônicas associadas nos espaços tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α definina $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ por $y_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha})$, $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. A família $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em TM . Este conjunto munido com tal estrutura constitui uma variedade diferenciável chamada fibrado tangente de M .*

Definição 1.1.8. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$ dizemos que φ é uma imersão. E se além disso $\varphi : M \rightarrow \varphi(M)$ for um homeomorfismo, onde $\varphi(M)$ está munido da topologia induzida de N , dizemos que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, dizemos que M é uma subvariedade de N .*

Proposição 1.1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis, $n \leq m$, e $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma imersão. Então, para todo $p \in M_1$ existe uma vizinhança $U \subset M_1$ de p tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um mergulho.*

1.2 Campos de Vetores

Definição 1.2.1. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um vetor $X(p) \in$*

T_pM . Na linguagem de aplicações, X é uma aplicação de M em seu fibrado tangente TM . Dizemos que X é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M .

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma parametrização, então podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p,$$

onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base de T_pM associada a x . Assim, o campo X é diferenciável se, e somente se, as funções $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis, para alguma, e portanto qualquer parametrização.

Sejam $\mathfrak{F}(M)$ o conjunto das funções reais em M e $\mathfrak{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis reais em M . Um campo de vetores X também pode ser visto como uma aplicação $X : \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ que associa cada $f \in \mathfrak{D}(M)$ a uma função $Xf \in \mathfrak{F}(M)$, definida por $Xf(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, onde f indica a expressão de f na parametrização x . Neste contexto X é diferenciável se, e somente se, $X : \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$.

Teorema 1.2.1. *Sejam M uma variedade diferenciável, X um campo de vetores diferenciável em M e $p \in M$. Existem uma vizinhança $U \subset M$ de p , $\varepsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ tais que, fixado $q \in U$, a curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ definida por $\alpha(t) = \varphi(t, q)$ é a única que satisfaz $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ e $\alpha(0) = q$.*

Definição 1.2.2. *Sejam M uma variedade diferenciável, X um campo de vetores diferenciável em M e $p \in M$. Uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ que satisfaz às condições $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ e $\alpha(0) = p$ é chamada a trajetória de X que passa por p em $t = 0$.*

Lema 1.2.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis numa variedade diferenciável M . Existe um único campo diferenciável $[X, Y]$, chamado o colchete de X e Y , tal que $[X, Y]f = (XY - YX)f$ para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$.*

1.3 Métricas Riemannianas

Definição 1.3.1. *Uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em T_pM satisfazendo: Dada uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, as funções $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, chamadas expressão da métrica Riemanniana, definidas por $g_{ij}(q) = \langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_q \rangle_{x(q)}$ são diferenciáveis em U . Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é chamada uma variedade Riemanniana.*

Definição 1.3.2. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é uma isometria se $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle_{f(p)}$, $\forall p \in M, v_1, v_2 \in T_pM$.*

Definição 1.3.3. *Sejam M e N variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle_{f(p)}$, $\forall p \in U, v_1, v_2 \in T_pM$.*

Definição 1.3.4. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, M uma variedade diferenciável e $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável. Um campo vetorial V ao longo de uma curva é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .*

Exemplo 1.3.1. *Sejam M uma variedade diferenciável e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável. Considere $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametriza-*

ção para a qual $\gamma(I) \subset x(U)$. Suponhamos que $\tilde{\gamma} = x^{-1} \circ \gamma : I \rightarrow U$, a expressão de γ em x , seja dada por $\tilde{\gamma}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Então $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\tilde{\gamma}(t)}$ é chamado o campo velocidade (ou tangente) de γ .

Definição 1.3.5. *Sejam M uma variedade diferenciável e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável. A restrição de γ a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um segmento. Se M é Riemanniana, o comprimento de um segmento é definido por $l_b^a(\gamma) = \int_b^a \langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle^{1/2} dt$.*

1.4 Conexões Afins; Conexão Riemanniana

Definição 1.4.1. *Uma conexão afim numa variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, que indicamos por $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, satisfazendo:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Proposição 1.4.1. *Seja M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇ . Existe uma única correspondência que associa um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$, a um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , tal que:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde W é um campo diferenciável ao longo de c ;

2. $\frac{DV}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I ;
3. Se V é induzido por um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, ou seja, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

Definição 1.4.2. *Seja M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇ . Dizemos que, um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ é paralelo, quando $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.*

Definição 1.4.3. *Sejam M uma variedade diferenciável, ∇ conexão afim em M , $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, com $t_0 \in I$, isto é, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Existe um único campo paralelo V ao longo de c tal que $V(t_0) = V_0$ (V é chamado o transporte paralelo de V_0 ao longo de c).*

Definição 1.4.4. *Uma conexão afim ∇ numa variedade Riemanniana M é compatível com a métrica quando uma das condições (equivalentes) abaixo for satisfeita:*

1. Para toda curva diferenciável $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ e todo par V e W de campos de vetores ao longo de c temos:

$$\frac{D}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I;$$

2. $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 1.4.1 (Levi Civita). *Em uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão afim ∇ , denominada conexão de Levi Civita (ou Riemanniana) de M , que cumpre:*

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Simetria);
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

1.5 Geodésicas; Variedades Completas

Definição 1.5.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Dizemos que uma curva diferenciável $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma geodésica quando o campo velocidade de γ é paralelo ao longo de γ , isto é, $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ para todo $t \in I$.*

Definição 1.5.2. *Uma variedade Riemanniana conexa M é dita geodesicamente completa se para todo $p \in M$ as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Proposição 1.5.1. *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. A função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(p, q) = \text{ínfimo dos comprimentos de todas as curvas } f_{p,q}$, onde $f_{p,q}$ é uma curva diferenciável por partes ligando p a q , é uma métrica em M . A topologia induzida por d coincide com topologia inicial de M .*

Teorema 1.5.1 (Hopf e Rinow). *Uma variedade Riemanniana conexa M é geodesicamente completa se, e somente se, M é completa como espaço métrico.*

Corolário 1.5.1. *Se M é compacta e conexa, então é completa.*

1.6 Curvatura

Definição 1.6.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. A curvatura R de M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 1.6.1. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M satisfaz as seguintes propriedades:*

1. R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$;
2. O operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;
3. (Primeira Identidade de Bianchi) Para todo terno $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Se V é um espaço vetorial com produto interno. Usaremos a notação $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2$, para representar a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$, onde $|x|^2 = \langle x, x \rangle$.

Proposição 1.6.2. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço de dimensão 2 do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 1.6.2. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .*

Observação 1.6.1. *Sabemos que, se $M = \mathbb{R}^n$, vale $\nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_X \nabla_Y Z$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, donde $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Logo, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $K \equiv 0$.*

Capítulo 2

Imersões Isométricas

Faremos agora uma exposição sucinta de resultados pertencentes ao estudo das imersões isométricas que serão necessários para o entendimento dos resultados principais e estabeleceremos ainda notações que serão utilizadas no capítulo final. A demonstração dos fatos abaixo pode ser encontrada em [6].

Sejam M^n uma variedade diferenciável, $\overline{M}^{k=n+m}$ uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão. Para cada $p \in M$ podemos definir um produto interno em $T_p M$ da seguinte forma: Se $v_1, v_2 \in T_p M$, então $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle_{f(p)}$, onde o produto interno à direita é o produto interno dado pela métrica Riemanniana em \overline{M} . Tal associação é uma métrica Riemanniana em M , dita induzida pela imersão, e sob estas condições f se torna uma imersão isométrica.

Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $f|U$ é um mergulho, o que nos permite olhar para U como um subconjunto de \overline{M} , e sendo assim, afim de simplificarmos a notação, identificaremos U com $f(U)$ e $v \in T_q M$ com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$, sempre que $q \in U$. Essas identificações

serão úteis, por exemplo, para estendermos um campo local (definido em U) de vetores em M a um campo local (definido em $f(U)$) de vetores em \overline{M} .

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ o decompõe na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Isto nos diz que, dado $v \in T_p\overline{M}$, podemos escrevê-lo da forma $v = v^T + v^N$, onde $v^T \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^\perp$. Chamamos v^T e v^N de as *componente tangencial* e *normal* de v , respectivamente.

Sejam \overline{X} e \overline{Y} extensões locais a \overline{M} dos campos locais de vetores X e Y em M . Definimos a conexão Riemanniana $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \overline{M} , que por unicidade, é a Riemanniana relativa a métrica induzida pela imersão.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ o conjunto dos campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 2.0.3. *A aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ definida por $B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$, independe das extensões \overline{X} e \overline{Y} , e é bilinear e simétrica.*

Definição 2.0.3. *Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A forma bilinear simétrica $\alpha_\eta : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de f em p na direção normal η .*

Associada à forma bilinear simétrica α_η encontra-se o operador auto-adjunto $A_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ dado por $\langle A_\eta(x), y \rangle = \alpha_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$, chamado o *operador de Weingarten* na direção normal η .

Proposição 2.0.4. *Sejam $p \in \Sigma$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então o operador de Weingarten $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é definido por $A_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T$.*

Sejam $x, y \in T_p M \subset T_p \bar{M}$ vetores linearmente independentes. Denotemos por $K(x, y)$ e $\bar{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e \bar{M} , respectivamente, do plano gerado por x e y .

Teorema 2.0.1 (Equação de Gauss). *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de $T_p M$. Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Dados X e η campos diferenciáveis de vetores tangentes e normais respectivamente, sabemos que a componente tangente de $\bar{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\bar{\nabla}_X \eta)^T = -A_\eta(X)$. A componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$ será chamada a *conexão normal* ∇^\perp da imersão, esta possui as propriedades usuais de uma conexão. De forma explícita,

$$\nabla_X^\perp \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^N = \bar{\nabla}_X \eta - (\bar{\nabla}_X \eta)^T = \bar{\nabla}_X \eta + A_\eta(X).$$

A *curvatura normal* da imersão é definida por

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

Definição 2.0.4. *Um tensor T de ordem k numa variedade Riemanniana M é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k\text{-fatores}} \rightarrow \mathfrak{D}(M),$$

cuja derivada covariante em relação a $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é o tensor dado por

$$\begin{aligned} (\nabla_Z T)(Y_1, \dots, Y_k) &= Z(T(Y_1, \dots, Y_k)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_k) \\ &\quad - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{k-1}, \nabla_Z Y_k). \end{aligned}$$

Dada uma imersão isométrica, denotaremos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M . A segunda forma fundamental da imersão pode ser vista como um tensor $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ definido por $B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$.

Proposição 2.0.5 (Equação de Codazzi). *Usando a notação acima vale*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta),$$

onde por definição,

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta).$$

Consideremos o caso particular no qual temos uma variedade diferenciável bi-dimensional Σ , que chamamos de *superfície*, imersa em \mathbb{R}^3 por uma imersão f .

Dado $p \in \Sigma$, considere o produto interno em $T_p \Sigma$ induzido pela imersão. Desse produto interno podemos definir em $T_p \Sigma$ uma norma em $T_p \Sigma$ dada por

$$|v|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p} = \sqrt{\langle df_p(v), df_p(v) \rangle} = \sqrt{|df_p(v)|^2} = |df_p(v)|.$$

A partir de tal norma definimos ainda uma métrica d_p em $T_p \Sigma$: se $v_1, v_2 \in$

$T_p\Sigma$, então

$$d_p(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|_p = |df_p(v_1 - v_2)| = |df_p(v_1) - df_p(v_2)| = d(df_p(v_1), df_p(v_2)).$$

Definimos o ângulo $\angle(v_1, v_2)$ entre os vetores $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ por

$$\cos \angle(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_p}{|v_1|_p |v_2|_p} = \frac{\langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle}{|df_p(v_1)| |df_p(v_2)|} = \cos \angle(df_p(v_1), df_p(v_2)).$$

No caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 uma forma equivalente de interpretarmos a orientabilidade é dado pelo

Teorema 2.0.2. *Uma superfície Σ imersa em \mathbb{R}^3 é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável de vetores normais unitários $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

Neste contexto dizemos que uma superfície Σ imersa em \mathbb{R}^3 é orientável se existe um campo diferenciável $N : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de vetores unitários normais em Σ , e caso contrário dizemos que Σ é não orientável. Se Σ é orientável, a escolha de um campo diferenciável de vetores unitários normais em Σ é uma orientação de Σ .

Definição 2.0.5. *Seja Σ uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 com orientação N . Então $N : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é chamada a aplicação normal de Gauss de Σ .*

Fixemos $p \in \Sigma$. Uma vez que $T_p\Sigma$ e $T_{N(p)}S^2$ são paralelos, podemos identificá-los. Dado $x \in T_p\Sigma$, tomemos $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ uma curva tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = x$. Derivando $\langle N, N \rangle = 1$ na direção de x obtemos $\langle \bar{\nabla}_x N, N \rangle = 0$, isto é, $\bar{\nabla}_x N = (\bar{\nabla}_x N)^T$. Dessa forma,

$$dN_p(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))|_{t=0} = \bar{\nabla}_x N = (\bar{\nabla}_x N)^T = -A(x),$$

ou seja, $-A$ é a diferencial da aplicação normal de Gauss em p .

Portanto, a diferencial da aplicação normal de Gauss $dN_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ é um operador auto-adjunto e a segunda forma fundamental da imersão em p $\alpha : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ pode ainda ser definida por

$$\alpha(x, y) = -\langle dN_p(x), y \rangle. \quad (2.1)$$

Definição 2.0.6. *Sejam Σ uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 com orientação N e $dN_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ a diferencial da aplicação normal de Gauss de Σ em p . O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K da imersão em p , e o negativo da metade do traço de dN_p é chamada a curvatura média H da imersão em p .*

Se Σ é uma superfície conexa e orientável imersa em \mathbb{R}^3 , então Σ possui precisamente duas orientações e por conseguinte dois campos diferenciáveis de vetores unitários normais a Σ distintos. Visto que temos apenas uma direção normal concluímos que, se N é uma orientação, então $-N$ será a outra. Observe que dN_p e $-dN_p$ possuem o mesmo determinante e traços com sinais opostos, donde o sinal da curvatura Gaussiana independe da orientação, enquanto que o sinal da curvatura média depende.

De acordo com a equação 2.1 o ij -ésimo elemento da matriz de $-dN_p$ é dado por $\alpha(a_1, a_2)$ onde $\{a_1, a_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma$, donde deduzimos

Teorema 2.0.3 (Equação de Gauss). *Sejam Σ uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 com orientação N e $p \in \Sigma$. Se $\{x, y\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma$, então*

$$K(x, y) = \alpha(x, x)\alpha(y, y) - \alpha(x, y)^2.$$

Sabemos ainda que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p\Sigma$ para a

qual $\alpha(e_i, e_j) = 0$ se $i \neq j$, e esta é precisamente a base de $T_p\Sigma$ constituída de auto-vetores de $-dN_p$ que diagonaliza tal operador. Os auto-vetores e_1 e e_2 são chamados as *direções principais* em p e os auto-valores k_1 e k_2 , associados respectivamente aos auto-vetores e_1 e e_2 , são chamados as *curvaturas principais* em p . Logo, pelo Teorema 2.0.3, $K(e_1, e_2) = k_1 k_2$.

Exemplo 2.0.1. *Considere a esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ orientada pelo campo normal $N : S^2 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definido por $N(x) = -x$, isto é, a aplicação normal de Gauss é o negativo da aplicação identidade de S^2 . Então, o determinante de dN_p é igual a 1 para todo $p \in S^2$, donde concluímos que curvatura de S^2 é igual a 1 em todo $p \in S^2$, ou seja, S^2 é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $K \equiv 1$.*

Definição 2.0.7. *Sejam Σ uma superfície e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. O gradiente de uma função diferenciável $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo de vetores diferenciável $\text{grad}\varphi : \Sigma \rightarrow T\Sigma$ tal que $\langle \text{grad}\varphi(p), v \rangle_p = d\varphi_p(v), \forall v \in T_p\Sigma$, onde o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é o produto interno induzido pela imersão.*

Fixado $p \in \Sigma$, consideremos a restrição $d\varphi_p : S_p^1 \subset T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, onde $S_p^1 = \{v \in T_p\Sigma; |v|_p = 1\}$. Dado $v \in S_p^1$, observe que $d\varphi_p(v) = \langle \text{grad}\varphi(p), v \rangle_p = |\text{grad}\varphi(p)|_p \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\text{grad}\varphi(p)$ e v . Multiplicando $-1 \leq \frac{d\varphi_p(v)}{|\text{grad}\varphi(p)|} \leq 1$ por $|\text{grad}\varphi(p)|$ concluímos que

$$-d\varphi_p\left(\frac{\text{grad}\varphi(p)}{|\text{grad}\varphi(p)|}\right) = -|\text{grad}\varphi(p)| \leq d\varphi_p(v) \leq |\text{grad}\varphi(p)| = d\varphi_p\left(\frac{\text{grad}\varphi(p)}{|\text{grad}\varphi(p)|}\right),$$

donde $d\varphi_p(v)$ alcança seu valor máximo em $v = \text{grad}\varphi(p)/|\text{grad}\varphi(p)|$, e $|d\varphi_p| = \sup\{|d\varphi_p(v)|; v \in S_p^1\} = |\text{grad}\varphi(p)|$. Por outro lado, se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal para $T_p\Sigma$, então

$$|d\varphi_p| = \sqrt{d\varphi_p(e_1)^2 + d\varphi_p(e_2)^2}.$$

Capítulo 3

O Teorema de Gauss-Bonnet

O objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema de Gauss Bonnet para superfícies e superfícies com bordo, o qual nos será útil na demonstração dos teoremas principais deste trabalho. Para isso, desenvolveremos um breve estudo da geometria de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 usando formas diferenciais como ferramenta, e em seguida demonstraremos o Teorema de Stokes. Detalhes dos resultados abaixo podem ser encontrados em [5].

3.1 Formas Diferenciais numa Variedade

Definição 3.1.1. *Um campo de vetores em \mathbb{R}^n é uma aplicação v que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa um vetor $v(p) \in \mathbb{R}^n$. Portanto, podemos escrever*

$$v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p)e_i,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^n e a_i são funções reais definidas no \mathbb{R}^n . Dizemos que v é diferenciável se as funções a_i são diferenciáveis.

Seja $(\mathbb{R}^n)^*$ o espaço dual de \mathbb{R}^n , isto é, o espaço dos funcionais lineares $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$ pode ser obtida tomando os funcionais dx_i , $i = 1, \dots, n$, onde $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a aplicação que associa cada ponto a sua i -ésima coordenada. Como $dx_i(e_i) = 1$ e $dx_i(e_j) = 0$, se $i \neq j$, $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ é a base dual da base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Isto nos conduz ao bom entendimento da definição seguinte.

Definição 3.1.2. *Uma forma exterior de grau 1 em \mathbb{R}^n é uma aplicação ω que associa a cada $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in (\mathbb{R}^n)^*$; ω pode ser escrita da forma*

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) dx_i,$$

onde a_i são funções reais definidas em \mathbb{R}^n . Se as funções a_i são diferenciáveis, ω é chamada uma forma diferencial de grau 1.

Agora seja $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que são bilineares (ou seja, φ é linear em cada variável) e alternadas (ou seja, $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$). Com as operações usuais de funções o conjunto $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$ torna-se um espaço vetorial.

Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^n)^*$, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$ pela construção $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j))$, $i, j = 1, 2$. O conjunto $\{dx_i \wedge dx_j; i < j\}$ é uma base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$. Além disso, $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, $i \neq j$, e $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Definição 3.1.3. *Uma forma exterior de grau 2 em \mathbb{R}^n é uma aplicação ω que associa a cada $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$; de acordo com a discussão anterior ω pode ser escrita da forma*

$$\omega(p) = \sum_{i < j} a_{ij}(p) dx_i \wedge dx_j,$$

$i, j = 1, \dots, n$, onde a_{ij} são funções reais definidas em \mathbb{R}^n . Quando as funções a_{ij} são diferenciáveis, ω é uma forma diferencial de grau 2.

Mais geralmente, consideremos $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ o conjunto das aplicações k lineares alternadas $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$ (φ é linear em cada variável e muda de sinal com a permutação de duas variáveis consecutivas). Com as operações usuais funções de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ é um espaço vetorial. Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (\mathbb{R}^n)^*$, podemos obter $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ pela construção $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$, $i, j = 1, \dots, k$. Das propriedades de determinantes segue que $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ é k linear e alternada. Em particular $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$. Além disso podemos concluir que o conjunto $\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}; i_1 < \dots < i_k, i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n\}$ é uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. E novamente somos conduzidos ao bom entendimento da definição mais geral seguinte.

Definição 3.1.4. *Uma forma exterior de grau k em aberto \mathbb{R}^n é uma aplicação ω que associa a cada $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$; ω pode ser escrita da forma*

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

$i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$, onde $a_{i_1 \dots i_k}$ são funções reais definidas em \mathbb{R}^n . Quando as funções $a_{i_1 \dots i_k}$ são diferenciáveis, ω é uma forma diferencial de grau k ou uma k forma diferencial.

Uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma 0 forma.

Usaremos a notação I para indicar a k -upla (i_1, \dots, i_k) com $i_1 < \dots < i_k$ e $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$, dx_I para indicar $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, logo $\omega = \sum_I a_I dx_I$.

Definição 3.1.5. Dadas $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e $\varphi = \sum_I b_I dx_I$, k formas diferenciais, definimos sua soma por $\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$.

Definição 3.1.6. Sejam $\omega = \sum_I a_I dx_I$, $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 < \dots < i_k$ uma k forma diferencial e $\varphi = \sum_J b_J dx_J$, $J = (j_1, \dots, j_s)$, $j_1 < \dots < j_s$ uma s forma diferencial. Definimos o produto exterior de ω e φ por

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

O produto exterior de formas em \mathbb{R}^n satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 3.1.1. Sejam ω uma k forma, φ uma s forma e θ uma r forma. Então:

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$;
2. $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$;
3. $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$, se $r = s$.

Definição 3.1.7. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Então f induz uma aplicação f^* que a cada k forma ω em \mathbb{R}^m associa uma k forma $f^*\omega$ em \mathbb{R}^n definida por $(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$, onde $p \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a diferencial da aplicação f em p . Se g é uma 0 forma, então $f^*(g) = g \circ f$.

Proposição 3.1.2. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável, ω e φ k formas em \mathbb{R}^m , e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Então:

1. $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$;
2. $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$;

3. Se $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ são 1 formas em \mathbb{R}^m , então $f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\varphi_k)$, .

Proposição 3.1.3. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Então:*

1. $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$, onde ω e φ são formas quaisquer em \mathbb{R}^m ;
2. $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$, onde $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável.

Definição 3.1.8. *Seja $\omega = \sum a_I dx_I$ uma k forma em \mathbb{R}^n . A diferencial exterior $d\omega$ de ω é definida por $d\omega = \sum da_I \wedge dx_I$.*

Proposição 3.1.4. 1. $d(\omega_1 + d\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$, onde ω_1 e ω_2 são k formas;

2. $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$, onde ω é uma k forma e φ é uma s forma;

3. $d(d\omega) = d^2\omega = 0$;

4. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, onde ω é uma k forma em \mathbb{R}^m e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação diferenciável.

Seja V um espaço vetorial. Denotaremos por $\Lambda^k(V)^*$ o conjunto das aplicações $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que são k lineares e alternadas.

Definição 3.1.9. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma k forma exterior ω em M é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p M)^*$.*

Dada uma k forma exterior ω em M e uma parametrização $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ em p , definimos a representação de ω nesta parametrização como a k forma exterior ω_α em $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ definida por

$$\omega_\alpha(v_1, \dots, v_k) = \omega(dx_\alpha(v_1), \dots, dx_\alpha(v_k)), v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n.$$

Observemos que, se $x_\beta : U_\beta \rightarrow M$ é outra parametrização tal que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, e ω_α e ω_β são representações de ω nestas parametrizações, então $(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)^* \omega_\beta = \omega_\alpha$.

Definição 3.1.10. *Uma forma diferencial de ordem k (ou uma k forma diferencial) numa variedade diferenciável M^n é uma k forma exterior, tal que em algum, e portanto todo sistema de coordenadas, sua representação é diferenciável.*

Todas as operações definidas para formas diferenciais em \mathbb{R}^n podem ser extendidas para formas diferenciais em M^n através de suas representações locais. Por exemplo, se ω é uma forma diferencial em M , $d\omega$ é a forma diferencial em M cuja representação local é $d\omega_\alpha$, que pelo item 4 da Proposição 3.1.4, $d\omega_\alpha = d((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)^* \omega_\beta) = (x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)^* d\omega_\beta$.

3.2 As Equações Estruturais do \mathbb{R}^n

Definição 3.2.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto de n campos de vetores diferenciáveis definidos em U tais que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Tal conjunto de campos de vetores é chamado um referencial móvel em U .*

Definição 3.2.2. *Dado um referencial móvel $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, podemos definir $n - 1$ formas diferenciais pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, ou seja, $\{\omega_i\}$, $i = 1, \dots, n$, é a base dual da base $\{e_i\}$. O conjunto de formas $\{\omega_i\}$ é chamado o co-referencial associado ao referencial $\{e_i\}$.*

Cada campo de vetor e_i é uma aplicação diferenciável $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A diferencial de e_i em p , $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma aplicação linear. Portanto,

para cada p e cada $v \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever $(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v) e_j$. As n^2 expressões $(\omega_{ij})_p(v)$ definidas acima são 1 formas diferenciais chamadas as *formas de conexão* do \mathbb{R}^n no referencial móvel $\{e_i\}$. Derivando $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, obtemos $0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji}$, isto é, as formas de conexão são anti-simétricas em relação aos índices, donde nem todas as formas de conexão são independentes.

Proposição 3.2.1 (As Equações Estruturais do \mathbb{R}^n). *Sejam $\{e_i\}$ um referencial móvel num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $\{\omega_i\}$ o co-referencial associado a $\{e_i\}$, e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então $d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}$*

e $d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$, $i, j, k = 1, \dots, n$.

Lema 3.2.1 (Lema de Cartan). *Sejam V^n um espaço vetorial de dimensão n e $\omega_1, \dots, \omega_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares em V linearmente independentes. Se existem formas $\theta_1, \dots, \theta_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$, então $\theta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j$ com $a_{ij} = a_{ji}$.*

Segue do Lema de Cartan o seguinte fato de unicidade das formas de conexão.

Lema 3.2.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\omega_1, \dots, \omega_n$ 1 formas diferenciais linearmente independentes em U . Existe um único conjunto de 1 formas diferenciais $\{\omega_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$, satisfazendo $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ e $d\omega_j = \sum \omega_k \wedge \omega_{kj}$.*

3.3 Superfícies em \mathbb{R}^3

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície em \mathbb{R}^3 . A cada $p \in \Sigma$ associemos um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ definido em $T_p \Sigma$ por

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle,$$

onde $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ e o produto interno do lado direito é produto interno canônico do \mathbb{R}^3 . Tal correspondência define uma métrica Riemanniana em Σ chamada a métrica induzida pela imersão x .

A forma local das imersões nos garante que, dado $p \in \Sigma$, existe uma vizinhança $U \subset \Sigma$ de p tal que a restrição $x|U$ é um mergulho. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma vizinhança de $x(p)$ em \mathbb{R}^3 tal que $V \cap x(\Sigma) = x(U)$, na qual é possível escolher um referencial móvel adaptado $\{e_1, e_2, e_3\}$, isto é, quando restrito a $x(U)$, e_1 e e_2 são tangentes a $x(U)$, e e_3 normal a $x(U)$.

Em V , temos associado ao referencial $\{e_i\}$, o co-referencial $\{\omega_i\}$ e as formas de conexão $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$, que satisfazem as equações estruturais: $d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31}$, $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} + \omega_3 \wedge \omega_{32}$, $d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}$, $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{23}$, $d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}$, $d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}$.

A imersão $x : U \subset \Sigma \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ induz formas $x^*(\omega_i)$, $x^*(\omega_{ij})$ em U . Como x^* comuta com d e \wedge , tais formas ainda satisfazem as equações estruturais. Note que $x^*(\omega_3) = 0$, pois para todo $q \in U$ e todo $v = a_1e_1 + a_2e_2 \in T_q\Sigma$,

$$x^*(\omega_3)(v) = \omega_3(dx(v)) = \omega_3(a_1e_1 + a_2e_2) = 0.$$

Com um certo abuso de notação, escreveremos $x^*(\omega_i) = \omega_i$ e $x^*(\omega_{ij}) = \omega_{ij}$. Olharemos para U como um subconjunto de \mathbb{R}^3 pela aplicação inclusão $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (afinal $x|U$ é um mergulho), e olharemos para as formas ω_i e ω_{ij} restritas a U . Essas formas restritas a U satisfazem as equações estruturais e a relação $\omega_3 = 0$. Então, em U teremos $d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$ e pelo Lema de Cartan

$$\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2,$$

$$\omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2,$$

onde $h_{ij} = h_{ji}$ são exatamente os coeficientes da segunda forma fundamental de x .

Observe que a aplicação $e_3 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores na esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, pois $|e_3| = 1$. Fixando uma orientação de U em \mathbb{R}^3 , escolhemos um referencial $\{e_i\}$ tal que, para cada $q \in U$, $\{e_1, e_2\}$ está na orientação de U e $\{e_1, e_2, e_3\}$ está na orientação de \mathbb{R}^3 . Neste caso, $e_3 : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ não depende da escolha do referencial, donde está bem definida, e é chamada a *aplicação normal de Gauss* em U . Note que, se Σ é orientada, a aplicação normal de Gauss pode ser globalmente definida em Σ .

Como $de_3 = \omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2$, temos pela unicidade do Lema de Cartan que,

$$de_3 = - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix},$$

isto é, $(-h_{ij})$ é a matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss $e_3 : U \rightarrow S^2$ na base $\{e_1, e_2\}$. Como $(-h_{ij})$ é simétrica, a diferencial $de_3(q) : T_q\Sigma \rightarrow T_qS^2$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto adjunta, e portanto pode ser diagonalizada por auto-valores reais $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$. É usual definirmos a *curvatura Gaussiana* K de Σ em q por $K = \det(de_3)_q = \lambda_1\lambda_2 = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$ e a *curvatura média* H de Σ em q por $H = -\frac{1}{2}\text{tr}(de_3)_q = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}$, onde as funções envolvidas são calculadas em q . K e H independem da escolha do referencial móvel. H muda de sinal com uma mudança de orientação, mas K permanece com o mesmo sinal com uma tal mudança. As expressões de K e H em termos de um referencial móvel são:

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

$$\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = (h_{11} + h_{22})\omega_1 \wedge \omega_2 = 2H\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Teorema 3.3.1 (Egregium (Gauss)). *K depende somente da métrica induzida em Σ , isto é, se $x, x' : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ são duas imersões com a mesma métrica induzida, então $K(p) = K'(p)$, $p \in M$, onde K e K' são respectivamente as curvaturas Gaussianas das imersões x e x' .*

Demonstração. Seja $U \subset \Sigma$ uma vizinhança de p e consideremos um referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ em U , ortonormal na métrica induzida. Podemos estender o conjunto $\{dx(e_1), dx_2(e_2)\}$ à um referencial adaptado em $V \subset x(U)$, e analogamente $\{dx'(e_1), dx'_2(e_2)\}$ pode ser estendido à um referencial adaptado em $V' \subset x'(U)$.

Denotemos com linha as entidades referentes à imersão x' . Então, por dualidade $\omega_1 = \omega'_1$ e $\omega_2 = \omega'_2$, e pela unicidade do Lema de Cartan, concluimos que $d\omega_{12} = d\omega'_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -K'\omega_1 \wedge \omega_2$, donde $K = K'$. \square

Dada uma imersão $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ associamos duas formas quadráticas em cada $T_p\Sigma$, $p \in \Sigma$ definidas a seguir.

A *primeira forma quadrática* I_p é a forma quadrática associada à forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, isto é, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$. Num referencial adaptado $\{e_1, e_2, e_3\}$, a expressão da primeira forma quadrática I é dada por

$$\begin{aligned} I(v) &= \langle v, v \rangle_p = \langle \omega_1(v)e_1 + \omega_2(v)e_2, \omega_1(v)e_1 + \omega_2(v)e_2 \rangle \\ &= (\omega_1\omega_1e_1 + \omega_2\omega_2e_2)(v) = (\omega_1^2 + \omega_2^2)(v), \end{aligned}$$

onde $\omega_i\omega_i$ é o produto simétrico de ω_i com ω_i , ou seja, $(\omega_i\omega_i)(v) = \omega_i(v)\omega_i(v)$, $i = 1, 2$. Portanto, a primeira forma quadrática é dada por $I = \omega_1^2 + \omega_2^2$.

A *segunda forma quadrática* é definida num referencial móvel adaptado

por

$$II_p(v) = (\omega_{13}\omega_1 + \omega_{23}\omega_2)(v) = \sum_{ij} h_{ij}\omega_i\omega_j, i, j = 1, 2,$$

onde estamos considerando novamente produtos simétricos de formas diferenciais. Nos resta mostrar que II independe do referencial escolhido, o que de fato acontece uma vez que esta é a forma quadrática associada ao negativo da diferencial da aplicação de Gauss, isto é, a matriz de $II_p = -de_3$ dada acima.

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ uma curva em Σ parametrizada pelo comprimento de arco s , com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p\Sigma$. Então, escrevendo $x \circ \alpha(s) = x(s)$ e $e_3 \circ \alpha(s) = e_3(s)$, obtemos $\langle \frac{dx}{ds}, e_3(s) \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2x}{ds^2}, e_3(s) \right\rangle|_{s=0} &= -\left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{de_3}{ds} \right\rangle|_{s=0} = -\langle dx(v), de_3(v) \rangle_p \\ &= \langle \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2 \rangle(v) \\ &= (\omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23})(v) = II_p(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, denotando por $k(s)$ a curvatura de $\alpha(s)$ e por $n(s)$ o vetor normal a $\alpha(s)$, temos $\langle \frac{d^2x}{ds^2}(0), e_3(0) \rangle = k(0)\langle n(0), e_3(0) \rangle$. A expressão $k\langle n, e_3 \rangle(p)$ é chamada a *curvatura normal* $k_n(v)$ da superfície na direção do vetor $v = \alpha'(0)$ no ponto p . Como $II_p(v) = k_n(v)$, temos que $k_n(v)$ é a mesma para toda curva $\alpha(s)$ com o mesmo vetor tangente v em p .

Reunindo as interpretações acima concluímos que

$$II_p(v) = -\langle de_3(v), v \rangle_p = k_n(v).$$

Sabemos que os valores máximo e mínimo que II_p assume no círculo $S^1 \subset T_p\Sigma$ são os autovalores $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$ de $(-de_3)$ e seus respectivos vetores próprios geram o auto espaço de $(-de_3)$. As curvaturas normais extremas

$k_1 = -\lambda_1$ e $k_2 = -\lambda_2$ são chamadas as *curvaturas principais* em p e as suas direções correspondentes são chamadas as *direções principais* em p .

Lema 3.3.1 (Teorema de Levi Civitta). *Sejam Σ uma superfície Riemanniana e $U \subset \Sigma$ um aberto no qual está bem definido um referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ com co-referencial associado $\{\omega_1, \omega_2\}$. Existe uma única 1-forma $\omega_{12} = -\omega_{21}$ tal que $d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2$ e $d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1$.*

Lema 3.3.2. *Se os referenciais $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ e $\{e_1, e_2\}$ tem a mesma orientação, então $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau$, onde $\tau = fdg - gdf$. Se os referenciais tem orientação oposta, então $\omega_{12} = -\bar{\omega}_{12} - \tau$.*

Lema 3.3.3. *Sejam $p \in U \subset \Sigma$, $\gamma : I \rightarrow U$ uma curva tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\varphi_0 = \text{angle}(e_1(p), \bar{e}_1(p))$. Então*

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \left(f \frac{dg}{dt} - g \frac{df}{dt} \right) dt + \varphi_0$$

é uma função diferenciável tal que $\cos \varphi(t) = f$, $\sin \varphi(t) = g$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$ e $d\varphi = \gamma^ \tau$.*

Segue das expressões $\omega_1 = f\bar{\omega}_1 - g\bar{\omega}_2$ e $\omega_2 = g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2$, que numa superfície orientada as 2 formas $\omega_1 \wedge \omega_2 = \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = \sigma$ independem da escolha do referencial, donde está definida globalmente em Σ . Se $v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$ e $v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$ são vetores linearmente independentes em algum $p \in \Sigma$, então $\sigma(v_1, v_2) = \det(a_{ij}) = \text{area}(v_1, v_2)$, onde (v_1, v_2) denota o paralelograma gerado por v_1 e v_2 . σ é chamado o *elemento de área* de Σ .

Proposição 3.3.1. *Seja Σ uma superfície Riemanniana. Para cada $p \in \Sigma$ definimos um número $K(p)$ pela escolha um referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ em p e fazendo $d\omega_{12}(p) = -K(p)(\omega_1 \wedge \omega_2)(p)$. Então, $K(p)$ não depende da escolha do referencial.*

Definição 3.3.1. *Seja Σ uma superfície Riemanniana orientada e seja $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco s com $\alpha'(s) \neq 0, s \in I$. Numa vizinhança de um ponto $\alpha(s) \in \Sigma$, considere um referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ na orientação de Σ tal que, restrito à α , $e_1(s) = \alpha'(s)$. A curvatura geodésica k_g de α em M é definida por $k_g = (\alpha^*\omega_{12})\left(\frac{d}{ds}\right)$, onde $\frac{d}{ds}$ é a base canônica de \mathbb{R} .*

Proposição 3.3.2. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ e $\{e_1, e_2\}$ como na definição acima (aqui não é necessário exigir que Σ seja orientável, pois existem apenas duas possibilidades para a escolha de e_2). Então e_1 é paralelo ao longo de α se, e somente se, $\alpha^*\omega_{12} = 0$.*

Corolário 3.3.1. *Uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ é uma geodésica se, e somente se, sua curvatura geodésica é nula em todo seu domínio.*

Proposição 3.3.3. *Sejam Σ orientada, $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco s com $\alpha'(s) \neq 0, s \in I$, V um campo de vetores paralelo ao longo de α e $\varphi = \angle(V, \alpha'(s))$, onde o ângulo é medido de acordo com a orientação. Então $k_g(s) = \frac{d\varphi}{ds}$.*

3.4 Teorema de Stokes

Definição 3.4.1. *Sejam M^n uma variedade diferenciável e ω uma forma diferencial definida num aberto $U \subset M$. O suporte K de ω é o fecho do conjunto $A = \{p \in U; \omega(p) \neq 0\}$.*

Definição 3.4.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e ω uma n forma diferencial definida em U . Escrevemos $\omega = a(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Suponhamos que o suporte K de ω é um compacto contido em U . Definimos*

$$\int_U \omega = \int_K a dx_1 \dots dx_n,$$

onde a integral do lado direito é a integral múltipla usual em \mathbb{R}^n .

Definição 3.4.3. *Sejam M^n uma variedade diferenciável compacta e orientada pela família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$, e ω uma n forma diferencial em M . Suponhamos que o suporte K de ω está contido em alguma vizinhança coordenada $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ e que $\omega_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ é a representação local de ω em U_α . (O suporte K de ω é compacto, visto que é subconjunto fechado de um espaço compacto). Definimos*

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \dots dx_n,$$

onde a integral do lado direito é uma integral em \mathbb{R}^n .

Suponhamos agora que K está contido numa outra vizinhança coordenada $V_\beta = f_\beta(U_\beta)$ da mesma família e que $V_\alpha = V_\beta$. Seja $f = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : U_\beta \rightarrow U_\alpha$ a mudança de coordenada dada por $x_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, $(x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha, (y_1, \dots, y_n) \in U_\beta$. Sendo $\omega_\beta = f^*(\omega_\alpha)$, temos $\omega_\beta = \det(df)a_\beta dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, onde

$$a_\beta = a_\alpha(f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)),$$

e pela mudança de variáveis para integrais múltiplas em \mathbb{R}^n obtemos

$$\int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \dots dx_n = \int_{U_\beta} \det(df)a_\beta dy_1 \dots dy_n,$$

e como $\det(df) > 0$ concluímos que

$$\int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{V_\beta} \omega_\beta.$$

Daí fica claro que sem orientabilidade, o sinal da integral não estaria bem definido.

No que segue $B_r(0) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < r\}$.

Lema 3.4.1. *Existe uma função diferenciável $\varphi : B_3(0) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:*

1. $\varphi(p) = 1, p \in B_1(0)$
2. $0 < \varphi(p) \leq 1, p \in B_2(0)$
3. $\varphi(p) = 0, p \in B_3(0) - B_2(0)$.

Demonstração. Considere a função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(t) = e^{-\frac{1}{(t+1)(t+2)}}$, se $t \in (-2, -1)$, e $\alpha(t) = 0$, se $t \in \mathbb{R} - (-2, -1)$, e tome a função diferenciável $\gamma(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(s) ds$ cujo valor máximo é $A = \int_{-\infty}^{-1} \alpha(s) ds = \int_{-2}^{-1} \alpha(s) ds$. Por construção $\beta(t) = \gamma(t)/A$ é uma função diferenciável tal que $\beta(t) = 0$, se $t \leq -2$, $0 < \beta(t) \leq 1$, se $t \in (-2, -1)$, e $\beta(t) = 1$, se $t \geq -1$. Dessa forma, a basta tomar $\varphi : B_3(0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(p) = \beta(-|p|)$. \square

Lema 3.4.2. *Sejam M^n uma variedade diferenciável, $p \in M$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n$ uma parametrização em p . Então, existe uma parametrização $f : B_3(0) \rightarrow M$ em p tal que $f(B_3(0)) \subset g(U)$ e $f^{-1}(p) = (0, \dots, 0)$.*

Demonstração. Suponhamos que $g^{-1}(p) = q$. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(q) \subset U$. Sejam T a translação em \mathbb{R}^n que associa q a 0 , e $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa o ponto $\frac{3}{r}p$. Então, $H \circ T$ leva $B_r(q) \subset U$ em $B_3(0)$. Portanto, basta tomar a parametrização $f : B_3(0) \rightarrow M$ dada por $f = g \circ T^{-1} \circ H^{-1}$. \square

Proposição 3.4.1. *Sejam M uma variedade diferenciável compacta e $\{V_\alpha\}$ uma cobertura de M constituída de vizinhanças coordenadas. Existem funções diferenciáveis $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ satisfazendo:*

1. $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1;$

2. $0 \leq \varphi_i \leq 1$, e o suporte de φ_i está contido em algum V_{α_i} da cobertura $\{V_{\alpha}\}$.

Demonstração. Para cada $p \in M$ considere a parametrização $f_p : B_3(0) \rightarrow M$ dada pelo lema anterior, com $f_p(B_3(0)) = V_p \subset V_{\alpha}$, para algum V_{α} da cobertura $\{V_{\alpha}\}$, e façamos $W_p = f_p(B_1(0)) \subset V_p$. A família $\{W_p\}$ uma cobertura aberta de M . Pela compacidade de M podemos extrair de $\{W_p\}$ uma subcobertura finita W_1, \dots, W_m . Os conjuntos V_1, \dots, V_m também constituem uma cobertura de M . Definamos as funções $\theta_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, por $\theta_i = \varphi \circ f_i^{-1}$ em V_i e $\theta_i = 0$ em $M - V_i$, onde $\varphi : B_3(0) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada pelo lema acima. As funções θ_i são diferenciáveis e o suporte de θ_i está contido em V_i . Por fim, as funções definidas por $\varphi_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\sum_{j=1}^m \theta_j(p)}$, $p \in M$. Por construção as funções φ_i satisfazem as condições do enunciado. \square

Definição 3.4.4. *Sejam M uma variedade diferenciável compacta e $\{V_{\alpha}\}$ uma cobertura de M constituída de vizinhanças coordenadas. A família $\{\varphi_i\}$ construída na proposição acima é chamada uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\{V_{\alpha}\}$. (Quando M é orientável, tomamos $\{V_{\alpha}\}$ compatível com a orientação.)*

Definição 3.4.5. *Sejam M^n uma variedade diferenciável compacta e orientada, e ω uma n forma em M . Considere $\{V_{\alpha}\}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas compatível com a orientação e $\{\varphi_i\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada à $\{V_{\alpha}\}$. (Pela proposição anterior o suporte da forma $\varphi_i\omega$ está contida em V_i). Definimos*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \omega.$$

Considere $\{W_{\beta}\}$ uma outra cobertura de M que determina em M a mesma orientação que $\{V_{\alpha}\}$, seja $\{\psi_j\}$, $j = 1, \dots, s$ uma partição da unidade subor-

dinada à $\{W_\beta\}$. Então $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$ será uma cobertura para M e a família $\{\varphi_i \psi_j\}$ será uma partição da unidade subordinada à $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$. Portanto

$$\sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \left(\sum_{j=1}^s \psi_j \right) \omega = \sum_{ij} \int_M \varphi_i \psi_j \omega,$$

onde na última igualdade usamos que, para cada i , as funções $\varphi_i \psi_j$ são definidas em V_i . Analogamente,

$$\sum_{j=1}^s \int_M \psi_j \omega = \sum_{j=1}^s \int_M \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i \right) \psi_j \omega = \sum_{ij} \int_M \varphi_i \psi_j \omega,$$

donde a definição acima independe das escolhas feitas.

Definição 3.4.6. *O conjunto $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$ é chamado um semi espaço do \mathbb{R}^n . Um conjunto aberto de H^n é a interseção de um aberto U do \mathbb{R}^n com H^n . Dizemos que uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida num conjunto aberto V de H^n é diferenciável se existem um aberto $U \supset V$ e uma função diferenciável \bar{f} em U tal que a restrição de \bar{f} a V coincide com f . Neste caso, definimos df_p , $p \in V$, de f em p como sendo $df_p = d\bar{f}_p$.*

A definição de df_p independe da extensão \bar{f} de f , e uma aplicação diferenciável $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida tal como foi feito acima.

Definição 3.4.7. *Uma variedade diferenciável n dimensional com bordo regular é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de conjuntos abertos de H^n em M tal que:*

1. $\bigcup_{\alpha} f_\alpha(U_\alpha) = M$;
2. Para todo par α, β , com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em H^n e as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ são diferenciáveis;

3. A família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

Definição 3.4.8. Dizemos que $p \in M$ é um ponto no bordo de M , se tivermos $f(0, x_2, \dots, x_n) = p$, para alguma parametrização $f : U \subset H^n \rightarrow M$ em p .

Lema 3.4.3. A definição de ponto no bordo não depende da parametrização.

Demonstração. Seja $f_1 : U_1 \subset H^n \rightarrow M$ uma parametrização em p tal que $f_1^{-1}(p) = q_1 = (0, x_2, \dots, x_n)$. Suponhamos que exista uma parametrização $f_2 : U_2 \subset H^n \rightarrow M$ em p tal que $f_2^{-1}(p) = q_2 = (x_1, \dots, x_n)$ com $x_1 \neq 0$. A aplicação $f_1^{-1} \circ f_2 : f_2^{-1}(W) \rightarrow f_1^{-1}(W)$ é um difeomorfismo. Como $x_1 \neq 0$, existe uma vizinhança $U \subset f_2^{-1}(W)$ de q_2 que não intersecta o eixo x_1 . Restringindo $f_1^{-1} \circ f_2$ a U obtemos uma aplicação diferenciável $f_1^{-1} \circ f_2 : U \rightarrow H^n$ tal que o determinante de $d(f_1^{-1} \circ f_2)_{q_2}$ é não nulo. Pelo Teorema da função inversa, existe uma vizinhança $V \subset U$ de q_2 tal que $f_1^{-1} \circ f_2 : V \rightarrow f_1^{-1} \circ f_2(V)$ é um difeomorfismo, então $f_1^{-1} \circ f_2(V)$ contém pontos da forma (x_1, \dots, x_n) com $x_1 > 0$, o que não acontece em H^n , e esta contradição encerra a demonstração. \square

Definição 3.4.9. O conjunto dos pontos no bordo de M é chamado o bordo de M e será representado por ∂M .

As definições das funções diferenciáveis, espaço tangente, orientabilidade, etc, para variedades com bordo, são exatamente as mesmas para variedades diferenciáveis, substituindo \mathbb{R}^n por H^n .

Proposição 3.4.2. O bordo ∂M de uma variedade diferenciável M com bordo, é uma variedade diferenciável de dimensão $n - 1$. Além disso, se M é orientável, uma orientação para M induz uma orientação para ∂M .

Demonstração. Sejam $p \in M$ um ponto no bordo de M e $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \rightarrow M^n$ uma parametrização em p . Então $f_\alpha^{-1}(p) = q = (0, x_2, \dots, x_n) \in U_\alpha$.

Seja $\bar{U}_\alpha = U_\alpha \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 = 0\}$. Identificando o conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 = 0\}$ com \mathbb{R}^{n-1} , vemos que \bar{U}_α é um aberto em \mathbb{R}^{n-1} . Denotando por \bar{f}_α a restrição de f_α a \bar{U}_α , temos pelo lema anterior que $\bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) \subset \partial M$. Fazendo p variar em ∂M , vemos que a família $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{f}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável para ∂M .

Agora, vamos assumir que M é orientável e vamos escolher uma orientação para M , ou seja, uma família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ tal que a mudança de coordenadas tem jacobiano positivo. Consideremos os elementos desta família tais que $f_\alpha(U_\alpha) \cap \partial M \neq \emptyset$ e a estrutura diferenciável $\bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) \subset \partial M$ para ∂M como construída acima. Mostraremos que, se $\bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) \cap \bar{f}_\beta(\bar{U}_\beta) \neq \emptyset$, então $\det(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta)_q) > 0$, para todo q cuja imagem, por alguma parametrização, está no bordo de M .

Observe que, a mudança de coordenadas $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ associa pontos da forma $(0, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta)$ a pontos da forma $(0, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$. Portanto, para um ponto q no bordo,

$$\det(d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)) = \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} \det(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta)).$$

Mas $\frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} > 0$, pois $x_1^\alpha = 0$ em $q = (0, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$, e ambos, x_1^α e x_1^β são negativos numa vizinhança de p . Como $\det(d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)) > 0$ por hipótese, concluímos que $\det(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta)) > 0$, como queríamos. \square

Teorema 3.4.1 (Teorema de Stokes). *Sejam M^n uma variedade diferenciável com bordo compacta e orientada, ω uma $(n-1)$ forma em M e $i : \partial M \rightarrow M$ a aplicação inclusão do bordo ∂M em M . Então*

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega.$$

Demonstração. Seja K o suporte de ω . Consideraremos os seguintes casos:

1. K está contido em alguma vizinhança coordenada $V = f(U)$ de uma parametrização $f : U \subset H^n \rightarrow M$. Em U ,

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

onde $a_j = a_j(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U . Portanto,

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

- (a) Vamos assumir inicialmente que $f(U) \cap \partial M = \emptyset$. Então ω é zero em ∂M e $i^*\omega = 0$. Portanto

$$\int_{\partial M} i^*\omega = 0.$$

Mostraremos que

$$\int_M d\omega = \int_U \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Para isso, vamos estender as funções a_j a H^n da seguinte forma: $a_j(x_1, \dots, x_n) = a_j(x_1, \dots, x_n)$, se $(x_1, \dots, x_n) \in U$ e $a_j(x_1, \dots, x_n) = 0$, se $(x_1, \dots, x_n) \in H^n - U$. Como $f^{-1}(K) \subset U$, as funções a_j , bem definidas, são diferenciáveis em H^n . Agora, seja $Q \subset H^n$ um paralelepípedo dado por $x_j^1 \leq x_j^0 \leq x_j$, $j = 1, \dots, n$, a contendo $f^{-1}(K)$ em seu interior. Então

$$\begin{aligned} \int_U \left(\sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \dots dx_n &= \sum_j (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} \int [a_j(x_j, \dots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$-a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n = 0,$$

pois $a_j(x_1, \dots, x_j^0, \dots, x_n) = a_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n) = 0$ para todo j .

- (b) Vamos assumir agora que $f(U) \cap \partial M \neq \emptyset$. Então a aplicação inclusão i pode escrita como: $x_1 = 0, x_j = x_j$. Portanto, usando a orientação induzida no bordo, $i^* \omega = a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Como no caso (a), estenderemos as funções a_j a H^n e consideraremos o paralelepípedo Q dado por $x_1^1 \leq x_1 \leq 0, x_j^1 \leq x_j \leq x_j^0, j = 2, \dots, n$ e tal que a união do interior de Q com o hiperplano $x_1 = 0$ contendo $f^{-1}(K)$. Então

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_Q [a_1(0, x_2, \dots, x_n) - a_1(x_1^1, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \dots dx_n \\ &+ \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \int_Q [a_j(x_1, \dots, x_j^0, \dots, x_n) - a_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n)] \\ &\quad dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n. \end{aligned}$$

Como $a_j(x_1, \dots, x_j^0, \dots, x_n) = a_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n) = 0$, para $j = 2, \dots, n$ e $a_1(x_1^1, x_2, \dots, x_n) = 0$, obtemos

$$\int_M \omega = \int a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

2. Consideremos agora o caso geral. Sejam $\{V_\alpha\}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas compatível com a orientação e $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a $\{V_\alpha\}$. As formas $\omega_j = \varphi_j \omega, j = 1, \dots, m$ satisfazem as condições do caso (1). Além

disso, como $\sum_j d\varphi_j = 0$ temos $\sum \omega_j = \omega$ e $\sum d\omega_j = d\omega$. Portanto,

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^m \int_M d\omega_j = \sum_{j=1}^m \int_{\partial M} i^* \omega_j = \int_{\partial M} i^* \sum_{j=1}^m \omega_j = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

□

3.5 Teorema de Gauss-Bonnet

Neste seção Σ denotará uma superfície compacta e orientada.

Definição 3.5.1. *Seja X um campo de vetores diferenciável em Σ . Um ponto $p \in \Sigma$ no qual $X(p) = 0$ é chamado um ponto singular de X . Diz-se que um ponto singular p é isolado se existe uma vizinhança $V \subset \Sigma$ de p na qual não há outro ponto singular além de p .*

A partir de agora, por conveniência escolheremos V homeomorfo a um disco aberto do plano. Observe que, o conjunto dos pontos singulares isolados é finito pela compacidade de Σ .

Sejam $X : \Sigma \rightarrow T\Sigma$ um campo de vetores diferenciável e $p \in \Sigma$ uma singularidade isolada de X . Consideremos o referencial móvel $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, onde $\bar{e}_1 = X/|X|$ e \bar{e}_2 é um campo de vetores unitários ortogonal a \bar{e}_1 , e na orientação de Σ . De tal procedimento determinamos formas diferenciais $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{12}$ em $V - \{p\}$. Escolhamos um outro referencial móvel $\{e_1, e_2\}$, na mesma orientação anterior, definido em V . Determina-se assim formas diferenciais $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ em V . A diferença $\bar{\omega}_{12} - \omega_{12} = \tau$ está definida em $V - \{p\}$. Consideremos C uma curva simples fechada que limita uma região compacta de V contendo p em seu interior (C será orientada como o bordo dessa região).

Pelo Lema [?], a restrição de τ a C é a diferencial do ângulo $\varphi(t)$ entre \bar{e}_1 e e_1 ao longo de C . Portanto,

$$\int_C \tau = \int_C d\varphi = 2\pi I.$$

O inteiro I é chamado o *índice* de X em p .

Lema 3.5.1. *A definição de I não depende da curva C .*

Demonstração. Sejam C_1 e C_2 duas curvas simples fechadas ao redor de p , como na definição de índice. Suponhamos inicialmente que C_1 e C_2 não se intersectam e consideremos a região anelar Δ limitada por C_1 e C_2 . Sejam I_1 e I_2 os índices calculados com C_1 e C_2 respectivamente. Pelo Teorema de Stokes e de $d\tau = 0$,

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{c_1} \tau - \frac{1}{2\pi} \int_{c_2} \tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} d\tau = 0,$$

o que prova essa etapa da demonstração. Se C_1 e C_2 se intesectam, basta escolher uma curva C_3 que não intercte C_1 e C_2 , e usando o que vimos acima concluímos que $I_1 = I_3 = I_2$. \square

Lema 3.5.2. *A definição de I não depende da escolha do referencial $\{e_1, e_2\}$. Mais precisamente, sejam $S_r = \partial B_r$ o bordo de um disco de raio r e centro em p , e considere o referencial móvel $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ da definição. Então, existe o limite*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \bar{\omega}_{12} = \bar{I}$$

e $\bar{I} = I$.

Demonstração. Sejam S_{r_1}, S_{r_2} círculos concentricos com $r_2 < r_1$ e Δ limitada

por S_{r_1} e S_{r_2} . Pelo Teorema de Stokes, quando $r_1, r_2 \rightarrow 0$ temos

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - \int_{S_{r_2}} \bar{\omega}_{12} = \int_{\Delta} d\bar{\omega}_{12} \quad (3.1)$$

Observe que $\bar{\omega}_{12}$ não está bem definida em B_{r_2} , entretanto $d\bar{\omega}_{12} = -K\sigma$ certamente está definida em todas as partes. Segue que qualquer sequência

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12}, \dots, \int_{S_{r_n}} \bar{\omega}_{12}, \dots,$$

com $\{r_n\} \rightarrow 0$, é uma sequência de Cauchy, e portanto converge. Logo o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \bar{\omega}_{12} = \bar{I}$$

existe e mostraremos que $\bar{I} = I$.

Em (1.1), fixemos r_1 e façamos r_2 tender a 0. Então

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - 2\pi\bar{I} = \int_{B_{r_1}} d\bar{\omega}_{12} = - \int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2. \quad (3.2)$$

Por outro lado, como $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + \tau$ temos

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} = \int_{S_{r_1}} \omega_{12} + \int_{S_{r_1}} \tau = \int_{B_{r_1}} d\omega_{12} + \int_{S_{r_1}} \tau = - \int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I. \quad (3.3)$$

Por (1.2) e (1.3), concluímos que $I = \bar{I}$ como queríamos. \square

Lema 3.5.3. *O índice não depende da métrica.*

Demonstração. Sejam \langle, \rangle_0 e \langle, \rangle_1 duas métricas Riemannianas em Σ . Para cada $t \in [0, 1]$ considere $\langle, \rangle_t = t\langle, \rangle_1 + (1-t)\langle, \rangle_0$. Então \langle, \rangle_t é um produto interno definido positivo em Σ que varia diferencialmente com p . Portanto, \langle, \rangle_t é uma família um parâmetro de métricas em Σ que começa em \langle, \rangle_0 e

termina em \langle, \rangle_1 . Sejam I_0 , I_t e I_1 seus índices correspondentes. Pelos lemas anteriores, I_t é uma função contínua de t . Sendo um inteiro, concluímos que $I_t = \text{const.}$, $t \in [0, 1]$. Portanto $I_0 = I_1$, como queríamos mostrar. \square

Teorema 3.5.1 (Teorema de Gauss-Bonnet). *Sejam Σ uma superfície compacta e orientada, e X um campo de vetores diferenciável em Σ com singularidades isoladas p_1, \dots, p_k cujos índices são I_1, \dots, I_k . Então, para qualquer métrica Riemanniana em Σ ,*

$$\int_{\Sigma} K \sigma = 2\pi \sum_i I_i,$$

onde K é a curvatura Gaussiana da métrica e σ é o seu elemento de área.

Demonstração. Considere em $\Sigma - U_i\{p_i\}$ o referencial móvel $\{\bar{e}_1 = X/|X|, \bar{e}_2\}$, onde \bar{e}_2 é um campo de vetores unitários ortogonal a \bar{e}_1 na orientação de Σ . Denotemos por B_i uma bola com centro p_i que não contém singularidades exceto p_i . Pelo Teorema de Stokes temos

$$\int_{\Sigma - U_i B_i} K \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = - \int_{\Sigma - U_i B_i} d\bar{\omega}_{12} = \int_{U(\partial B_i)} \bar{\omega}_{12} = \sum_i \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12},$$

onde ∂B_i tem a orientação induzida por B_i (ou seja, a oposta da orientação de $\Sigma - B_i$, por isso a troca de sinal na segunda igualdade). Agora, tomando o limite acima, quando o raio de B_i tende a 0, e usando o Lema [?] obtemos

$$\int_{\Sigma} K \omega_1 \wedge \omega_2 = 2\pi \sum_i I_i.$$

\square

Observe que o lado direito da equação não depende do campo de vetores X e o lado esquerdo não depende da métrica de Σ . Portanto obtemos a

notável conclusão de que $\sum I_i$ é o mesmo para todo campo de vetores com singularidades isoladas e $\int_{\Sigma} K\sigma$ é o mesmo valor para toda métrica Riemanniana em Σ .

O número $\sum_{i=1}^k I_i$ é chamado a *característica de Euler Poincaré* de Σ e é denotada por $\chi(\Sigma)$. E pelo que vimos acima, $\chi(\Sigma)$ é invariante por difeomorfismo e $\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K\sigma$ não depende da métrica Riemanniana em Σ .

Outra forma de introduzir $\chi(\Sigma)$, para uma superfície compacta Σ , é decompor Σ em um número finito de triângulos curvilíneos de tal maneira que a intersecção de dois triângulos tais seja vazia, com uma aresta comum ou um vértice comum (tal decomposição é chamado uma *triangulação* de Σ e é possível provar que existe sempre.).

Denotemos por F o número total de triângulos, por V o número total de vértices e por A o número total de arestas de uma tal triangulação. Por definição $\chi(\Sigma) = V - A + F$.

Quando Σ é orientável, esta definição coincide com a definição dada anteriormente, isto é, $\sum_i I_i = V - A + F$.

Teorema 3.5.2 (Gauss Bonnet para Superfícies com Bordo). *Sejam Σ uma superfície compacta e orientada com bordo $\partial\Sigma$, e X um campo de vetores diferenciável em Σ transversal a $\partial\Sigma$ (isto é, X não é tangente a $\partial\Sigma$) com singularidades isoladas p_1, \dots, p_k que não pertencem a $\partial\Sigma$ e cujos índices são I_1, \dots, I_k . Então, para qualquer métrica Riemanniana em Σ ,*

$$\int_{\Sigma} K\sigma + \int_{\partial\Sigma} k_g ds = 2\pi \sum_i I_i,$$

onde k_g é a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ e ds é o elemento de arco de $\partial\Sigma$.

Demonstração. Escolhamos uma métrica Riemanniana em Σ e consideremos

em Σ o referencial móvel orientado $\{\bar{e}_1 = X/|X|, \bar{e}_2\}$. Tomemos ainda, numa vizinhança $V \subset \Sigma$ de $\partial\Sigma$, outro referencial móvel orientado $\{e_1, e_2\}$ tal que, restrito a $\partial\Sigma$, e_1 é tangente a $\partial\Sigma$. Então $i^*\bar{\omega}_{12} = i^*\omega_{12} + d\varphi$, onde $i : \partial\Sigma \rightarrow \Sigma$ é a aplicação inclusão e φ é o ângulo entre \bar{e}_1 e e_1 ao longo de $\partial\Sigma$.

Seja B_i a bola de centro p_i , $i = 1, \dots, n$, na qual não outro ponto singular além de p_i . Então

$$\int_{\Sigma - UB_i} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = - \int_{\Sigma - UB_i} d\bar{\omega}_{12} = \int_{U\partial B_i} \bar{\omega}_{12} - \int_{\partial\Sigma} i^*\bar{\omega}_{12},$$

donde

$$\int_{\Sigma - UB_i} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + \int_{\partial\Sigma} i^*\bar{\omega}_{12} = \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12}.$$

Pela definição de curvatura geodésica,

$$\int_{\partial\Sigma} i^*\bar{\omega}_{12} = \int_{\partial\Sigma} i^*\omega_{12} + \int_{\partial\Sigma} d\varphi = \int_{\partial\Sigma} k_g ds + \int_{\partial\Sigma} d\varphi.$$

Como \bar{e}_1 é transversal a $\partial\Sigma$ temos que $\int_{\partial\Sigma} d\varphi = 0$. Portanto, tomando o limite quando os raios de B_i obtemos

$$\int_{\Sigma} K\sigma + \int_{\partial\Sigma} k_g ds = 2\pi \sum_i I_i.$$

□

O teorema de Gauss Bonnet ainda vale para superfícies com bordo, cujo bordo é uma curva regular por partes, isto é, a curva não é regular em um número finitos de pontos chamados os *vértices*. Cada vértice q_j , $j = 1, \dots, n$, dá origem a um ângulo externo α_j (que é o ângulo positivo formado peos vetores tangentes ao vértice) e isto deve ser adicionado a curvatura geodésica total, então teorema agora lê se:

$$\int_{\Sigma} K\sigma + \int_{\partial\Sigma} k_g ds + \sum_{j=1}^n \alpha_j = 2\pi \sum_i I_i.$$

No caso de um triângulo geodésico T temos $\chi(T) = 1$, ∂T é constituído de geodésicas donde $k_g = 0$, e sabemos que se $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os ângulos internos de T , então $\alpha_j = \pi - \beta_j$, $j = 1, 2, 3$, donde

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = \sum_{j=1}^3 (\pi - \beta_j) = 3\pi - \sum_{j=1}^3 \beta_j$$

e para triângulos geodésicos temos

$$\int_T K\sigma = \sum_{j=1}^3 \beta_j - \pi.$$

O resultado obtido nesse caso particular é conhecido como o Teorema do triângulo geodésico de Gauss.

Capítulo 4

Superfícies em \mathbb{R}^3 com Curvatura Média Constante

4.1 Superfícies de Delaunay

O conceito de curvatura média de superfícies foi introduzido em 1816 pela matemática francesa Sophie Germain em seu trabalho sobre vibrações de membranas. Entretanto, por causa das interessantes propriedades, o conceito de curvatura para superfícies criado por Gauss gerou maior influência no meio matemático.

Um dos pioneiros na obtenção de superfícies com curvatura média constante foi o matemático e astrônomo francês Charles Eugène Delaunay, que em seu trabalho "*Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*" ([8]), em 1841, agrupou uma certa classe de superfícies em \mathbb{R}^3 . Delaunay provou que, ao rolarmos uma cônica sobre uma reta tangente sem que haja deslizamentos, o seu foco descreve uma curva, cuja superfície de revolução

obtida por sua rotação em torno dessa mesma reta, é uma superfície com curvatura média constante. E além disso, mostrou que toda superfície de revolução completa, imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula, é obtida dessa forma.

No que segue descreveremos resumidamente o processo de demonstração do Teorema de Delaunay. O leitor interessado em aprofundar-se no tema pode consultar [15], trabalho no qual [10] é estudado de forma detalhada.

Inicialmente fazemos uma cônica rolar sem deslizar sobre uma reta tangente. A curva descrita pelo foco da cônica no decorrer deste processo é chamada uma *Roulette*. As Roulettes de uma parábola, uma elipse e uma hipérbole são respectivamente uma catenária, uma ondulária e uma nodária.

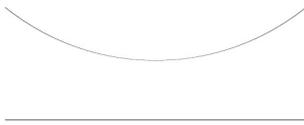


Figura 4.1: Catenária

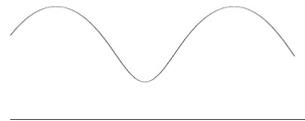


Figura 4.2: Ondulária

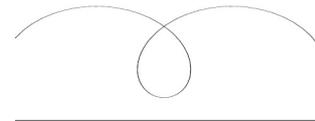


Figura 4.3: Nodária

Observe que, a roulette de uma elipse de excentricidade nula, isto é, uma circunferência, é uma reta, e caso façamos o comprimento do semi-eixo menor da elipse tender a zero, a elipse degenera-se num segmento de reta, e a roulette constitui-se de semi-círculos de centro sobre a reta tangente.

Rotacionando cada uma das Roulettes em torno das retas tangentes sobre as quais as cônicas rolaram, produz-se cinco superfícies em \mathbb{R}^3 chamadas as *superfícies de Delaunay*. São elas os catenóides, os ondulóides, os nodóides, os cilindros circulares retos e as esferas.

Uma vez construídas as superfícies de Delaunay podemos calcular e verificar que, o cilindro tem curvatura Gaussiana nula e curvatura média constante não nula, a esfera possui curvatura Gaussiana e média constantes e positivas,

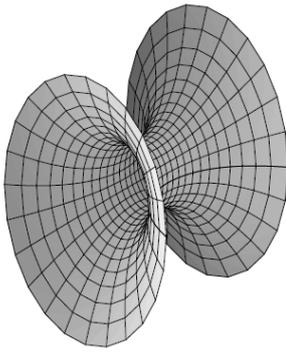


Figura 4.4: Catenóide

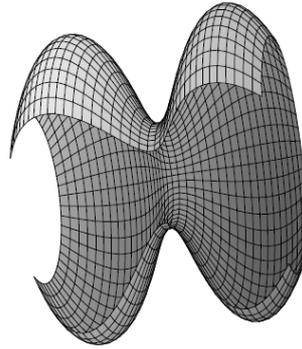


Figura 4.5: Ondulóide

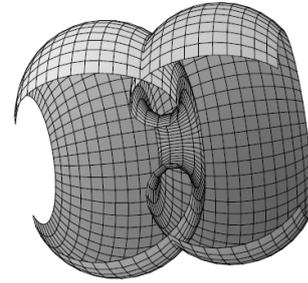


Figura 4.6: Nodóide

o catenóide tem curvatura média nula e sua curvatura Gaussiana varia, e por fim ambos, o ondulóide e nodóide, possuem curvatura média constante não nula e curvatura Gaussiana variável.

Para finalizar observamos ainda que uma superfície de revolução possui curvatura média constante não nula se, e somente se, sua geratriz satisfaz uma determinada relação, e as superfícies de revolução cujas geratrizes satisfazem tal relação, são as geradas pela roulette de uma cônica.

Dessa forma podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Delaunay). *Uma superfície de revolução completa imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula é uma superfície de Delaunay.*

4.2 Uma Caracterização do Cilindro

No processo de demonstração dos resultados principais será utilizado a caracterização do cilindro dada a seguir. Uma prova deste fato pode ser encontrada em [4] ou [13].

Teorema 4.2.1. *Uma superfície completa imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura gaus-*

siana nula e curvatura média constante não nula é um cilindro.

4.3 Analiticidade de Imersões de Superfícies em \mathbb{R}^3 com Curvatura Média Constante

Posteriormente será feito uso do

Teorema 4.3.1. *Se φ é uma imersão com curvatura média constante de uma superfície Σ em \mathbb{R}^3 , então φ é uma função analítica real.*

(Veja, C.B. Morrey Jr. *On the analyticity of solutions of analytic nonlinear elliptic systems of partial differential equations*, American J. of Math. 80 (1958), 198-237.).

Se $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é analítica real, então dada $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ uma parametrização de Σ , a expressão de φ em x , $\tilde{\varphi} = \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que suponhamos ser dada por $\tilde{\varphi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é uma função analítica real, isto é, as funções coordenadas $x(u, v), y(u, v)$ e $z(u, v)$ são analíticas.

Um fato importante é que funções analíticas obedecem o

Teorema 4.3.2 (Princípio da extensão analítica). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo e $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções analíticas. Se existe um aberto $V \subset U$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in V$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in U$.*

A demonstração do Teorema 4.3.2 pode ser encontrada em J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1969, Chapter IX (9.4.2).

Capítulo 5

Resultados Principais

5.1 Uma Caracterização das Superfícies de De-launay

Sejam Σ uma superfície completa, conexa e orientada imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula, $e_3 : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a aplicação normal de Gauss de Σ , ξ o campo de vetores unitários paralelo ao eixo coordenado $0z$ ou a qualquer outro eixo que se queira, e θ o ângulo dado por $\cos \theta = \langle \xi, e_3 \rangle$.

Indiquemos por $\xi^T(p)$ a projeção ortogonal do vetor $\xi(p)$ sobre $T_p\Sigma$, e consideremos o conjunto $U = \{p \in \Sigma; |\xi^T(p)| \neq 0\}$. Dado $p \in U$, pela continuidade da aplicação $|\xi^T| : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma vizinhança deste ponto na qual $|\xi^T| \neq 0$, e portanto U é um aberto de Σ . Além disso, U é denso em Σ , caso contrário existiria um aberto de Σ contido num plano perpendicular a ξ , e pela analiticidade da imersão e o princípio da extensão analítica, Σ estaria inteiramente contida nesse plano, o que nos daria uma contradição pois teríamos $H \equiv 0$.

Sendo assim, consideremos o campo diferenciável $e_1 : U \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $e_1(p) = \frac{\xi^T(p)}{|\xi^T(p)|}$ e tomemos $e_2 : U \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável de tal sorte que, para cada $p \in U$, $\{e_1, e_2\}$ seja uma base na orientação de Σ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ seja uma base na orientação de \mathbb{R}^3 .

Por construção $\xi(p) = \text{sen}\theta(p)e_1(p) + \text{cos}\theta(p)e_3(p)$, donde $\text{sen}\theta(p) \neq 0$ se, e somente se, $|\xi^T(p)| \neq 0$, isto é, se, e somente se, $p \in U$.

Uma vez que ξ é paralelo em \mathbb{R}^3 , para todo vetor tangente X temos

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_X \xi = \bar{\nabla}_X(\text{sen}\theta e_1 + \text{cos}\theta e_3) = \bar{\nabla}_X(\text{sen}\theta e_1) + \bar{\nabla}_X(\text{cos}\theta e_3) \\ &= \text{sen}\theta \bar{\nabla}_X e_1 + \text{cos}\theta d\theta(X)e_1 + \text{cos}\theta \bar{\nabla}_X e_3 - \text{sen}\theta d\theta(X)e_3 \\ &= \text{sen}\theta(\nabla_X e_1 + B(X, e_1)) + \text{cos}\theta d\theta(X)e_1 + \text{cos}\theta(-A(X) + \nabla_X^\perp e_3) - \text{sen}\theta d\theta(X)e_3 \\ &= \text{sen}\theta \nabla_X e_1 + \text{cos}\theta d\theta(X)e_1 - \text{cos}\theta A(X) + \\ &\quad \text{sen}\theta \alpha(X, e_1)e_3 + \text{cos}\theta \nabla_X^\perp e_3 - \text{sen}\theta d\theta(X)e_3, \end{aligned}$$

onde α e A denotam respectivamente a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten da imersão.

Derivando $\langle e_3, e_3 \rangle = 1$ na conexão $\bar{\nabla}$ do \mathbb{R}^3 com relação a X , obtemos $\langle \nabla_X^\perp e_3, e_3 \rangle = 0$, e conseqüentemente $\nabla_X^\perp e_3 = 0$. Agora tomando a componente normal na igualdade acima, temos $\text{sen}\theta \alpha(X, e_1) = \text{sen}\theta d\theta(X)$, e portanto em U vale a igualdade $\alpha(X, e_1) = d\theta(X)$.

De agora em diante será utilizada a notação $\alpha_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2$.

Usando $\alpha_{11} = d\theta(e_1)$, $\alpha_{12} = d\theta(e_2)$ e $\alpha_{22} = 2H - \alpha_{11}$ podemos escrever equação de Gauss no referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2) &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = d\theta(e_1)(2H - d\theta(e_1)) - d\theta(e_2)^2 \\ &= -(d\theta(e_1)^2 + d\theta(e_2)^2) + 2Hd\theta(e_1) = -|d\theta|^2 + 2Hd\theta(e_1). \end{aligned}$$

Vamos assumir que a curvatura média H , a curvatura média K e o ângulo θ estejam relacionados pela igualdade $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$.

A aplicação $d\theta_p : T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ restrita ao círculo unitário atinge seu valor máximo na direção do gradiente, e sua norma $|d\theta_p|$ é esse tal valor, isto é,

$$-|d\theta_p| = -d\theta_p\left(\frac{\text{grad}\theta(p)}{|\text{grad}\theta(p)|}\right) \leq d\theta_p(v) \leq d\theta_p\left(\frac{\text{grad}\theta(p)}{|\text{grad}\theta(p)|}\right) = |d\theta_p|, \forall v \in S^1 \subset T_p\Sigma.$$

Em particular,

$$-|d\theta| \leq d\theta(e_1) \leq |d\theta|.$$

Caso H seja positivo, multiplicando $-|d\theta| \leq d\theta(e_1) \leq |d\theta|$ por $2H$ e somando com $-|d\theta|^2$ obtemos $-|d\theta|^2 - 2H|d\theta| \leq K \leq -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$, e caso seja H negativo, multiplicando $-|d\theta| \leq d\theta(e_1) \leq |d\theta|$ por $2H$ e somando com $-|d\theta|^2$ obtemos $-|d\theta|^2 - 2H|d\theta| \geq K \geq -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$. Portanto, em ambas as situações a relação $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$ é válida se, e somente se, $d\theta(e_1) = \pm|d\theta|$, isto é, se, e somente se, $e_1 = \pm \frac{\text{grad}\theta(p)}{|\text{grad}\theta(p)|}$.

Note que, $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$ implica que $d\theta(e_1)^2 = |d\theta|^2$, e uma vez que $|d\theta|^2 = d\theta(e_1)^2 + d\theta(e_2)^2$, devemos ter $\alpha_{12} = d\theta(e_2) = 0$. Em palavras, $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza a segunda forma fundamental e θ é constante ao longo das trajetórias de e_2 .

Lema 5.1.1. *O referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3\}$ satisfaz $\nabla_{e_1}e_1 = 0$ e $\nabla_{e_1}e_2 = 0$.*

Demonstração. Podemos escrever $\nabla_{e_1}e_1 = \langle \nabla_{e_1}e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \rangle e_2$ e $\nabla_{e_1}e_2 = \langle \nabla_{e_1}e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle \nabla_{e_1}e_2, e_2 \rangle e_2$. Então, derivando $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ e $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ com relação a e_1 obtemos respectivamente $\langle \nabla_{e_1}e_1, e_1 \rangle = 0$ e $\langle \nabla_{e_1}e_2, e_2 \rangle = 0$, donde $\nabla_{e_1}e_1 = \langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \rangle e_2$ e $\nabla_{e_1}e_2 = \langle \nabla_{e_1}e_2, e_1 \rangle e_1$. Observe que, se $\nabla_{e_1}e_1 = 0$, derivando $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ com relação a e_1 concluímos $\langle \nabla_{e_1}e_2, e_1 \rangle = 0$, implicando que $\nabla_{e_1}e_2 = 0$. Logo, é suficiente mostrar que $\langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \rangle = 0$.

Sendo $\xi = \sin\theta e_1 + \cos\theta e_3$ é paralelo em \mathbb{R}^3 , temos

$$0 = \bar{\nabla}_{e_1}\xi = \sin\theta\bar{\nabla}_{e_1}e_1 + \cos\theta d\theta(e_1)e_1 + \cos\theta\bar{\nabla}_{e_1}e_3 - \sin\theta d\theta(e_1)e_3,$$

e sendo $\alpha_{12} = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{\nabla}_{e_1}\xi, e_2 \rangle = \sin\theta\langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \rangle - \cos\theta\langle A(e_1), e_2 \rangle \\ &= \sin\theta\langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \rangle - \cos\theta\alpha_{12} = \sin\theta\langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \rangle. \end{aligned}$$

Agora, como $\sin\theta \neq 0$ em U , concluímos que $\langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \rangle = 0$, o que encerra a demonstração. \square

A partir de agora trabalharemos no aberto denso U sem mencionar lo, e a extensão das conclusões geométricas em U para Σ pode ser feita através de limites.

Lema 5.1.2. *A função α_{22} é constante ao longo das trajetórias de e_2 .*

Demonstração. Observe que,

$$\begin{aligned} e_2(\alpha_{22}) &= e_2(\langle \alpha_{22}e_3, e_3 \rangle) = \langle \bar{\nabla}_{e_2}(\alpha_{22}e_3), e_3 \rangle + \langle \alpha_{22}e_3, \bar{\nabla}_{e_2}e_3 \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_2}^\perp(\alpha_{22}e_3), e_3 \rangle + \langle \alpha_{22}e_3, \nabla_{e_2}^\perp e_3 \rangle = \langle \nabla_{e_2}^\perp(\alpha_{22}e_3), e_3 \rangle. \end{aligned}$$

Assim, basta mostrar que $\nabla_{e_2}^\perp(\alpha_{22}e_3) = 0$.

Como $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 2H$ é constante,

$$\nabla_{e_2}^\perp(\alpha_{22}e_3) = -\nabla_{e_2}^\perp(\alpha_{11}e_3) = -(\nabla_{e_2}^\perp\alpha_{11})e_3 = -(\nabla_{e_2}^\perp\alpha)(e_1, e_1)e_3 - 2\alpha(\nabla_{e_2}e_1, e_1)e_3,$$

mas $\nabla_{e_2}e_1$ é múltiplo de e_2 e $\alpha(e_2, e_1) = 0$, então o último termo da última equação se anula.

Pela equação de Codazzi $(\nabla_{e_2}^\perp \alpha)(e_1, e_1) = (\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1)$, fazendo uso de $\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{21} = 0$ e do Lema 1.1.5, do qual temos $\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = 0$, obtemos

$$(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1) = \nabla_{e_1}^\perp \alpha(e_2, e_1) - \alpha(\nabla_{e_1} e_2, e_1) - \alpha(e_2, \nabla_{e_1} e_1) = 0,$$

o que completa a prova do lema. \square

Lema 5.1.3. *A função b definida por $\nabla_{e_2} e_2 = b e_1$ é dada por $b = -\alpha_{22} \cotg \theta$ e constante ao longo das trajetórias de e_2 .*

Demonstração. Sendo $\bar{\nabla}_{e_2} e_2 = \langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle \alpha(e_2, e_2), e_3 \rangle e_3 = b e_1 + \alpha_{22} e_3$, $\langle \xi, e_2 \rangle = 0$, e ξ paralelo em \mathbb{R}^3 , donde $\bar{\nabla}_{e_2} \xi = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= e_2 \langle \xi, e_2 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_2} \xi, e_2 \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle = \langle \xi, \bar{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle \\ &= \langle \xi, \nabla_{e_2} e_2 + (\bar{\nabla}_{e_2} e_2)^\perp \rangle = \langle \xi, \nabla_{e_2} e_2 \rangle + \langle \xi, B(e_2, e_2) \rangle \\ &= \langle \text{sen} \theta e_1 + \cos \theta e_3, \nabla_{e_2} e_2 \rangle + \langle \text{sen} \theta e_1 + \cos \theta e_3, \alpha_{22} e_3 \rangle \\ &= \langle \text{sen} \theta e_1, \nabla_{e_2} e_2 \rangle + \langle \cos \theta e_3, \alpha_{22} e_3 \rangle = b \text{sen} \theta + \alpha_{22} \cos \theta. \end{aligned}$$

Portanto, $b = -\alpha_{22} \cotg \theta$, e como α_{22} e θ constantes ao longo das trajetórias de e_2 , b também o é. \square

Sejam $\bar{\nabla}$ a conexão em \mathbb{R}^3 e $\bar{\nabla} = \hat{\nabla} + \nabla^\mathbb{R}$ sua decomposição nas conexões $\hat{\nabla}$ de \mathbb{R}^2 e $\nabla^\mathbb{R}$ de \mathbb{R} . Assim, se V e W são campos de vetores em \mathbb{R}^3 , então

$$\bar{\nabla}_Z W = \hat{\nabla}_{d\pi(Z)}(d\pi(W)) + \nabla_{dP(Z)}^\mathbb{R}(dP(W)),$$

onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$ e $dP : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $dP(W) = \langle W, \xi \rangle \xi$. Então,

$$\nabla_{dP(Z)}^\mathbb{R}(dP(W)) = \langle \nabla_{dP(Z)}^\mathbb{R} dP(W), \xi \rangle \xi.$$

Lema 5.1.4. *A imersão é uma superfície de Delaunay.*

Demonstração. Pela construção do referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3\}$, de forma que $\langle \xi, e_2 \rangle = 0$, temos que as trajetórias de e_2 devem estar contidas em planos perpendiculares a ξ , e por serem curvas planas, suas curvaturas são dadas por $|\bar{\nabla}_{e_2} e_2| = \sqrt{b^2 + \alpha_{22}^2}$. Por outro lado, b e α_{22} são constantes ao longo das trajetórias de e_2 , e portanto $|\bar{\nabla}_{e_2} e_2| = k \geq 0$ é constante.

Utilizando o Lema 5.1.1, do qual temos $\nabla_{e_1} e_2 = 0$, e sendo $\alpha_{12} = 0$, concluímos que $\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_2 + \alpha_{12} e_3 = 0$, isto é, e_2 é paralelo ao longo das trajetórias de e_1 .

Seja $\beta(s)$ uma trajetória de e_1 em \mathbb{R}^3 . Podemos escrever $\beta(s) = (\gamma(s), t(s))$, onde $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ e $t(s) \in \mathbb{R}$. Por construção $d\pi(e_2) = e_2$ e $dP(e_2) = 0$, o que implica

$$0 = \bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \widehat{\nabla}_{d\pi(e_1)}(d\pi(e_2)) + \nabla_{dP(e_1)}^{\mathbb{R}}(dP(e_2)) = \widehat{\nabla}_{d\pi(e_1)} e_2,$$

e sendo assim, $\widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} e_2(\gamma(s)) = \widehat{\nabla}_{d\pi(e_1)} d\pi(e_2) = \widehat{\nabla}_{d\pi(e_1)} e_2 = 0$, isto é, e_2 é paralelo ao longo de $\gamma(s)$ na conexão $\widehat{\nabla}$.

Observe que, $\gamma'(s)$ é ortogonal a $e_2(\gamma(s))$, então

$$0 = \gamma'(s) \langle \gamma'(s), e_2(\gamma(s)) \rangle = \langle \widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} \gamma'(s), e_2(\gamma(s)) \rangle + \langle \gamma'(s), \widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} e_2(\gamma(s)) \rangle,$$

donde $\langle \widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} e_2(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle = 0$, e sendo $\langle \widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ concluímos

$$0 = \widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} \gamma'(s) = \langle \widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle \gamma'(s) + \langle \widehat{\nabla}_{\gamma'(s)} \gamma'(s), e_2(\gamma(s)) \rangle e_2(\gamma(s)).$$

Portanto as curvas $\gamma(s)$ são geodésicas em \mathbb{R}^2 tais que $\langle \gamma'(s), e_2 \rangle = 0$, isto é, são retas que constituem uma família ortogonal às trajetórias de e_2 em \mathbb{R}^2 .

Supondo que $|\bar{\nabla}_{e_2} e_2| = k = 0$ em algum $p \in \Sigma$, a trajetória de e_2 que passa por p deve ser uma reta, e e_2 deve ser paralelo em \mathbb{R}^3 ao longo dessa reta. Além disso, e_2 é paralelo em \mathbb{R}^3 ao longo das trajetórias de e_1 . Logo, as demais trajetórias de e_2 também são retas.

Fixemos uma reta r , projeção de uma trajetória de e_2 em \mathbb{R}^2 . As projeções sobre \mathbb{R}^2 das trajetórias de e_1 são retas ortogonais a r , e portanto paralelas entre si em \mathbb{R}^2 . Conseqüentemente as trajetórias de e_2 são retas paralelas em \mathbb{R}^3 , o que implica que $K \equiv 0$, e como $H \neq 0$, Σ deverá ser um cilindro.

Agora, supondo que as trajetórias de e_2 são círculos planos, fixemos C , um desses círculos trajetória. Note que, sendo a projeção das trajetórias de e_1 sobre \mathbb{R}^2 retas normais a C , elas devem se encontrar num ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$, que é o centro de C , e pela arbitrariedade de C , as trajetórias de e_2 são círculos de centro em p_0 . Logo, Σ é uma superfície de revolução com um eixo de rotação l_0 paralelo a ξ e passando por p_0 , tendo como geratriz uma trajetória de e_1 .

Portanto, em ambas os casos, temos uma superfície de Delaunay. \square

As relações $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$ e $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|) d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$, onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler-Poincaré de Σ , são equivalentes.

É imediato pelo Teorema de Gauss Bonnet que $K = -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$ e $K = -|d\theta|^2 - 2H|d\theta|$ implicam que $2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 + 2H|d\theta|) d\sigma$ e $2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 - 2H|d\theta|) d\sigma$ nessa ordem.

Para mostrar que vale a recíproca dessas implicações, consideremos as possíveis ocorrências:

1. Caso H seja positivo, multiplicando $-|d\theta| \leq d\theta(e_1) \leq |d\theta|$ por $2H$ e

somando com $-|d\theta|^2$ obtemos

$$-|d\theta|^2 - 2H|d\theta| \leq K \leq -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|.$$

- (a) Vamos admitir que $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 + 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$. Uma vez que $K \leq -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$, pelo Teorema de Gauss Bonnet temos

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 + 2H|d\theta|)d\sigma,$$

e dessa forma $K = -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$.

- (b) Suponhamos que $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 - 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$. Visto que $-|d\theta|^2 - 2H|d\theta| \leq K$, usando o Teorema de Gauss Bonnet

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 - 2H|d\theta|)d\sigma,$$

donde $K = -|d\theta|^2 - 2H|d\theta|$.

2. Caso H seja negativo, multiplicando $-|d\theta| \leq d\theta(e_1) \leq |d\theta|$ por $2H$ e somando com $-|d\theta|^2$ obtemos

$$-|d\theta|^2 - 2H|d\theta| \geq K \geq -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$$

- (a) Vamos assumir que $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 + 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$. Valendo $K \geq -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$, pelo Teorema de Gauss Bonnet temos

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 + 2H|d\theta|)d\sigma,$$

e por conseguinte $K = -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$.

- (b) Consideremos $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 - 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$. Sendo válida

$-|d\theta|^2 - 2H|d\theta| \geq K$, pelo Teorema de Gauss Bonnet

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 - 2H|d\theta|)d\sigma,$$

e daí concluímos $K = -|d\theta|^2 - 2H|d\theta|$.

Portanto, independente do sinal de H , $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 + 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$ e $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 - 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$ implicam que $K = -|d\theta|^2 + 2H|d\theta|$ e $K = -|d\theta|^2 - 2H|d\theta|$ respectivamente.

Agora vamos assumir que existe um triângulo geodésico T em Σ cujos ângulos internos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ satisfazem

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma,$$

onde R é a região limitada por T . Pelo Teorema do triângulo geodésico de Gauss, $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$ implica que

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R K d\sigma = \int_R (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma.$$

Por outro lado, usando um argumento similar ao utilizado acima, podemos obter que $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$ e $\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma$ são equivalentes num aberto de Σ , a saber, o interior da região R . Portanto, assumindo válida a relação integral $\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma$, a imersão é uma superfície de revolução num aberto de Σ , e pela analiticidade da imersão, uma superfície de revolução por completo.

Reunindo todas as informações acima concluímos o resultado enunciado a seguir:

Teorema 5.1.1. *Sejam Σ uma superfície completa, conexa e orientada imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média H constante não nula, e θ o ângulo formado pelo vetor normal unitário dado pela orientação e um eixo coordenado fixado em \mathbb{R}^3 . Assuma que existe um triângulo geodésico T em Σ cujos ângulos internos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ satisfazem*

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma,$$

onde R é a região limitada por T . Então Σ é uma superfície de Delaunay.

O método de demonstração do Teorema anterior pode ser usado para dar a seguinte caracterização da esfera.

Teorema 5.1.2. *Sejam Σ uma superfície compacta, conexa e orientada imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média H constante não nula, e θ o ângulo formado pelo vetor normal unitário dado pela orientação e um eixo coordenado fixado em \mathbb{R}^3 . Se*

$$\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ , então Σ é uma esfera padrão.

Demonstração. As relações $\int_{\Sigma} (-|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|)d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$ e $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$ são equivalentes pelo que vimos anteriormente, donde a imersão é uma superfície de revolução. Também Σ é compacta, e por conseguinte completa. Logo, Σ é uma superfície de Delaunay compacta, ou seja, uma esfera. \square

Observe que a relação $K = -|d\theta|^2 \pm 2H|d\theta|$ nos assegura que em cada $p \in \Sigma$, a base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p\Sigma$ diagonaliza a segunda forma fundamental, ou seja, e_1 e e_2 são direções principais em cada p , e desta consequên-

cia concluímos a seguinte propriedade: Considerando as hipótese do teorema com respeito à superfície e a imersão, se a projeção ortogonal sobre $T_p\Sigma$ de um campo de vetores paralelo a um eixo qualquer for sempre uma direção principal, então a imersão é uma esfera.

5.2 Acerca da Generalização

Superfícies de revolução são invariantes por uma família a 1-parâmetro de rotações em \mathbb{R}^3 , isto é, por rotações em torno do seu eixo de rotação, e é nesse sentido que o método de demonstração dos teoremas acima pode ser utilizado para provar o seguinte resultado

Teorema 5.2.1. *Seja $\Sigma \looparrowright M_k^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície orientável imersa com curvatura média H positiva. Assuma a existência de um triângulo geodésico T em Σ com ângulos interiores $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R (-|d\theta|^2 + k \cos^2 \theta \pm 2H|d\theta|) d\sigma,$$

onde R é a região limitada por T . Então Σ é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias do espaço ambiente que fixa um eixo l_0 paralelo a ξ e passa por um ou dois pontos fixados dos fechos \overline{M}_k^2 de M_k^2 .

No enunciado acima M_k^2 denota uma variedade Riemanniana bidimensional simplesmente conexa e completa com curvatura seccional constante k , ou seja, M_k^2 é S_k^2 , \mathbb{R}^2 ou H_k^2 , se $k > 0$, $k = 0$ ou $k < 0$ respectivamente.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [2]. O caso $k = 0$ foi trabalhado acima, e nos casos nos quais $k \neq 0$ a demonstração é essencialmente a mesma.

O referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3\}$ é construído usando o mesmo critério, e tal referencial está bem definido num aberto denso de Σ . A equação de Gauss no referencial $\{e_1, e_2\}$ é dada por $K = -|d\theta|^2 + k \cos^2 \theta \pm 2Hd\theta(e_1)$, e assume-se válida a relação $K = -|d\theta|^2 + k \cos^2 \theta \pm 2H|d\theta|$, e esta implica que $e_1 = \pm \frac{grad\theta}{|grad\theta|}$. Tal como acima, pelo Teorema do triângulo geodésico de Gauss a relação $K = -|d\theta|^2 + k \cos^2 \theta \pm 2Hd\theta(e_1)$ é equivalente a

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_R (-|d\theta|^2 + k \cos^2 \theta \pm 2H|d\theta|) d\sigma.$$

Por construção as trajetórias de e_2 perpendiculares ξ , elas estão em M_k^2 e são curvas com curvatura geodésica constante. A projeção das trajetórias de e_1 em $M_k^2 \times \mathbb{R}$ sobre M_k^2 , são geodésicas em M_k^2 que também constituem uma família ortogonal às trajetórias de e_2 em M_k^2 .

Quando $k > 0$, isto é, M_k^2 é a 2-esfera S_k^2 , as isometrias são geradas por rotações de M_k^2 em torno de um ponto $p \in M_k^2$, cujas trajetórias são círculos.

A projeção das trajetórias de e_2 em S_k^2 são círculos com curvatura geodésica constante $k_g \geq 0$, e fixando C uma dessas curvas, como as projeções das trajetórias de e_1 sobre S_k^2 são geodésicas desse espaço, isto é, círculos máximos, e estes são normais a C , eles devem se encontrar em algum $p_0 \in S_k^2$, donde as trajetórias de e_2 são círculos geodésicos com centro em p_0 . Portanto, Σ é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias que fixa l_0 paralelo a ξ e passando por p_0 .

Quando $k < 0$, isto é, M_k^2 é o plano hiperbólico H_k^2 , as isometrias positivas são elíptica (um único ponto fixo em H_k^2), parabólica (um único ponto fixo no bordo de H_k^2 e nenhum em H_k^2) ou hiperbólica (dois pontos fixos no bordo de H_k^2 e nenhum em H_k^2).

Sendo as trajetórias de e_2 em H_k^2 curvas com curvatura geodésicas constantes k_g , elas devem ser círculos geodésicos, horociclos ou hiperciclos, conforme tenhamos $k_g^2 > -k$, $k_g^2 = -k$ ou $k_g^2 < -k$ respectivamente. Para o caso de círculos e horociclos procedemos como no caso anterior. Fixemos C uma trajetória de e_2 em H_k^2 . Como a projeção das trajetórias de e_1 sobre H_k^2 são geodésicas desse espaço perpendiculares a C , todas elas se encontrarão num ponto $p_0 \in H_k^2$ caso C seja um círculo, ou se encontrarão num ponto $p_0 \in \partial H_k^2$ caso C seja um horociclo. Logo, as trajetórias de e_2 são círculos de centro p_0 se $p_0 \in H_k^2$, ou horociclos passando por p_0 se $p_0 \in \partial H_k^2$. Portanto, Σ é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias que fixa l_0 paralelo a ξ e passando por p_0 .

Para o caso do hiperciclo, considere o modelo do semi plano superior para H_k^2 e denotemos por $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ e $\partial\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$ o modelo do espaço hiperbólico e seu bordo.

Fixe γ_0 , projeção de uma trajetória de e_1 sobre \mathbb{R}_+^2 . Sendo uma geodésica, podemos vê-la como a interseção de um círculo euclidiano com centro em $p_0 \in \partial\mathbb{R}_+^2$. Tal geodésica encontra-se ortogonalmente com todas as trajetórias de e_2 , e tais trajetórias, por terem curvatura geodésica constante, são curvas equidistantes de uma geodésica $\bar{\gamma}$ que se encontra ortogonalmente com γ_0 . Note ainda que, $\bar{\gamma}$ encontra $\partial\mathbb{R}_+^2$ no ponto p_0 e num outro ponto q_0 . Portanto, todas as trajetórias de e_2 , que são curvas equidistantes à $\bar{\gamma}$, passam por p_0 e q_0 , encontram-se ortogonalmente com γ_0 e por construção encontram-se ortogonalmente com todas as demais geodésicas normais a $\bar{\gamma}$.

Logo, Σ é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias G , e observe que, as projeções das isometrias de G sobre H_k^2 são isometrias de H_k^2 que fixam dois pontos no bordo de H_k^2 , donde são isometrias hiperbólicas, e deixam invariante a geodésica $\bar{\gamma}$ que une tais pontos.

Bibliografia

- [1] Alencar, H., do Carmo, M., and Tribuzy, R., *A Hopf theorem for ambient spaces of dimensions higher than three*, J. Differential Geom., 84 (2010), 1-17.
- [2] Alencar, H., do Carmo, M., and Tribuzy, R., *Surfaces of $M_k^2 \times \mathbb{R}$ invariant under a one-parameter group of isometries*, preprint.
- [3] Alexandrov, A.D., *Uniqueness theorems for surfaces in the large I*, Amer. Math. Soc. Translat. 21, 1962.
- [4] Carmo, M. do, *Differentiable Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [5] Carmo, M. do, *Differential Forms and Applications*, Lecture notes from the College of Differential Geometry at Trieste, 1988. Translation of Formas Diferenciais e Aplicações, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- [6] Carmo, M. do, *Riemannian geometry*, Mathematics. Theory and applications, Boston, Mass. 1992.
- [7] Dajczer, M., et al. *Submanifolds and Isometric Immersions*, Math. Lecture Series 13, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas 1990.
- [8] Daniel, B. *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous spaces*, Comm. Math. Helv. 82 (2007), 87-131.

-
- [9] Delaunay, C., *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J.Math.Pures Appl. (1) 6,(1841).
- [10] Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, vol. I Academic Press, 1969.
- [11] Eells, J., *The Surfaces of Delaunay*, The Mathematical Intelligencer, 1987.
- [12] Hopf, H., *Lectures on Differential Geometry in the Large*, notas publicadas pela Stanford University, 1955. Reproduzida em Lectures Notes in Math., 1000, Springer-Verlag, 1983.
- [13] Lejdfors, C.J., *Surfaces of Constant Mean Curvature*, Lund University, 2003.
- [14] Massey, W.S., *Surfaces of Gaussian Curvature Zero in Euclidean Space*, Tohoku Math. J. 14 (1962), 73-79.
- [15] Morrey Jr, C.B., *On the analyticity of solutions of analytic nonlinear elliptic systems of partial differential equations*, American J. of Math. 80 (1958), 198-237.
- [16] Petersen, P., *Riemannian geometry*, Springer, second edition, 2006.
- [17] Souza, Luiz Gustavo Alves de, *Classificação das Superfícies de Revolução Tipo Delaunay Completas*, 2008.
- [18] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vols. 1,2,3,4,5. Publish or Perish, Inc. 1975.