UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES EM $\mathbb{C}P^n$

EMERSON SILVA DE SOUSA

MANAUS

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EMERSON SILVA DE SOUSA

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES EM $\mathbb{C}P^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. José Kenedy Martins

MANAUS

2009

EMERSON SILVA DE SOUSA

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES EM $\mathbb{C}P^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 09 de Dezembro de 2009.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. José Kenedy Martins, *Presidente*

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy, *Membro*

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso, *Membro*

Universidade Federal do Pará - UFPA

Se o SENHOR não edificar a casa, em vão trabalham os que a edificam; se o SENHOR não guardar a cidade, em vão vigia a sentinela. Inútil vos será levantar de madrugada, repousar tarde, comer o pão que penosamente granjeastes; aos seus amados ele o dá enquanto dormem.

Salmos 127:1-2

AGRADECIMENTOS

À DEUS, o autor e sustentador da vida; que "faz forte ao cansado e multiplica as forças ao que não tem nenhum vigor"(*Is 40:29*).

À CRISTO JESUS, razão da minha existência.

Aos meus pais Antonio Mota e Maria de Lourdes pelo amor que me deram.

À minha querida esposa Lademe e minha filha Larissa, presentes de DEUS na minha vida.

Ao amigo Elzimar Rufino, companheiro de lutas. E a todos os colegas que contribuiram para que eu pudesse chegar até aqui.

Aos professores do mestrado pelos ensinamentos preciosos transmitidos durante o curso.

Ao professor Mário Salvatierra por tudo.

Ao professor José Kenedy Martins pela dedicada e paciente orientação em cada etapa deste trabalho.

À UFAM que me proporcionou a realização de um sonho.

À FAPEAM pelo apoio financeiro.

RESUMO

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES EM $\mathbb{C}P^n$

Neste trabalho, apresentamos uma nova demonstração obtida por J.K. Martins em 1999, do Teorema de Rigidez de Hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$, resultado primeiramente provado por Y.W. Choe, H. S. Kim, I.B. Kim e R. Takagi em 1996, usando o método de Cartan. Mostraremos que a Rigidez de hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$ só depende, em geral, da invariância do campo de Hopf, isto é, se g é uma imersão isométrica de M em $\mathbb{C}P^n$ e se g leva campos de Hopf de M em campos de Hopf de $g(M)$, então g é a restrição de uma isometria holomorfa de $\mathbb{C}P^n$.

ABSTRACT

RIGIDITY OF HIPERSURFACES IN $\mathbb{C}P^n$

In this work, we presented a new demonstration obtained by J.K. Martins in 1999, of the Theorem of Rigidity of hypersurfaces in $\mathbb{C}P^n$, resulted firstly proven by Y.W. Choe, H. S. Kim, I.B. Kim and R. Takagi, in 1996, using the method of Cartan. We will show that the hipersuperfícies Rigidity in $\mathbb{C}P^n$ only depends, in general, of the invariance of the Hopf vector field, that is, if g is an isometric immersion of M in $\mathbb{C}P^n$ and if g takes Hopf vector field of M in Hopf vector field of $g(M)$, then g is the restriction of a holomorphic isometry of $\mathbb{C}P^n$.

Sumário

Introdução

Um resultado clássico de rigidez de uma hipersuperfície no espaço real é dado pelo

Teorema 3.1.1. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n, e sejam f e g imersões isométricas de M em $\mathbb{R}^{n+1}$ com campos de vetores unitários normais ξ_f e ξ_g, respectivamente. Se as segundas formas fundamentais α_f e α_g de f e g (com relação a ξ_f e ξ_g), respectivamente, coincidem em M, então existe uma isometria τ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f = \tau \circ g$.

Que nos leva ao seguinte resultado, devido a Beez [1] e Killing [5]:

Corolário 3.1.1. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n, conexa e orientável, e sejam f e g imersões isométricas de M em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se o posto da segunda forma de M pela imersão isométrica f é maior ou igual a 3 em todos os pontos de M, então existe uma isometria τ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f = \tau \circ g$.

Em 1973, Takagi mostrou um teorema de rigidez para hipersuperfícies do espaço projetivo complexo que é o equivalente do famoso teorema de rigidez para hipersuperfície do espaço real visto acima, isto é,

Teorema 3.1.2. Se M é uma hipersuperfície de $\mathbb{C}P^n$ tal que sua segunda forma fundamental A tenha posto maior ou igual a 3 em todos os pontos de

M; e f uma imersão isométrica de M em $\mathbb{C}P^n$ $(n \geq 3)$, então,

(i) $\phi = \hat{\phi}$ se, e somente se $A = \hat{A}$

(ii) Se $A = \hat{A}$ então existe uma isometria holomorfa F de $\mathbb{C}P^n$ tal que $F\,|_M = f$.

Mais recentemente (1996) esse resultado foi melhorado por Takagi et al, mostrando que a Rigidez de hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$ só depende, em geral, da invariância do campo de Hopf.

Mais precisamente temos

Teorema 3.2.1. Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{C}P^n$ tal que sua segunda forma fundamental A tenha posto maior ou igual a 3 em todos os pontos de M e seja g uma imersão isométrica de M em $\mathbb{C}P^n$. Se g leva campos de Hopf de M em campos de Hopf de $g(M)$, isto é, $U = \hat{U}$, então g é a restrição de uma isometria holomorfa de $\mathbb{C}P^n$.

Para a demonstração desses resultados Takagi usou a teoria das formas diferenciais como ferramenta principal. Em 1999, J.K. Martins em sua tese intitulada *Hopf Hypersurfaces*, desenvolveu outra maneira para provar o teorema da Rigidez de Hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$ utilizando o mesmo método usado no caso de Hipersuperfícies de S^6, ou seja, as ferramentas da geometria clássica.

O objetivo principal desse trabalho é dar uma prova detalhada do teorema da Rigidez de hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$ conforme J.K. Martins.

Capítulo 1

Generalidades

Neste capítulo apresentaremos os conceitos fundamentais da geometria Riemanniana que serão necessários para o desenvolvimento desse trabalho. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [2] e [4].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1. Uma ***Variedade Diferenciável*** de dimensão n é um par $(M, \mathcal{F})$ onde M é um conjunto e $\mathcal{F}$ é uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

(*1*) $M = \bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$;

(*2*) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ aí definidas são diferenciáveis.

(*3*) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (*1*) e (*2*), isto é, qualquer outra família está contida nesta.

Dados quaisquer par (U_α, x_α) e $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ dizemos que (U_α, x_α) é uma ***Parametrização*** ou ***Sistema de Coordenadas*** de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma ***Vizinhança Coordenada*** em p. Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (*1*) e (*2*) é chamada uma ***Estrutura Diferenciável*** em M.

Exemplo 1. ***O Espaço Euclidiano*** $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.

Definição 1.1.2. Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões n e m, respectivamente. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é ***Diferenciável*** em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow N$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável num aberto de M se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Definição 1.1.3. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma ***Curva*** (diferenciável) em M.

Definição 1.1.4. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. Chama-se o ***Vetor Tangente*** à curva α em $t = 0$ para a função $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.1.5. O ***Espaço Tangente*** a uma variedade M^n em um ponto p, representado por T_pM, é o conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a M passando por p. Mostra-se que o conjunto T_pM é um espaço vetorial de dimensão n e que a escolha de uma parametrização $x : U \to M$ em p determina uma base associada $\left\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\right\}$ em T_pM, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende da parametrização x.

Exemplo 2. O conjunto $TM = \{(p,v); p \in M, v \in T_pM\}$, onde M é uma variedade diferenciável, munido com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha)\}$ sendo $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

$(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, é chamado ***Fibrado Tangente*** de M. Verifica-se que TM munido com a estrutura diferenciável acima é uma variedade diferenciável (de dimensão $2n$).

Definição 1.1.6. Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões n e m, respectivamente, e seja $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é chamada a ***Diferencial*** de φ em p, dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$.
Vemos que $d\varphi_p$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.

Definição 1.1.7. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma Aplicação $\varphi : M \longrightarrow N$ é um ***Difeomorfismo*** se ela é diferenciável, bijetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um ***Difeomorfismo Local*** em p se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.

Definição 1.1.8. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é ***Orientável*** se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, o jacobiano da diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo. Caso contrário, diz-se que M é não orientável.

Exemplo 3. A esfera $S^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável.

1.2 Campos de Vetores

Definição 1.2.1. Um ***Campo de Vetores*** X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação do tipo

$$p \in M \mapsto X(p) \in T_pM,$$

isto é, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.
Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em M.
Considerando uma parametrização de M, digamos (U, φ), é possível escrever o vetor $X(p)$ na base $\{\frac{\partial}{\partial x_i} |_p\}$ de T_pM da seguinte maneira

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} |_p,$$

onde cada a_i é uma função real definida em $\varphi(U)$. É claro que X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Um campo de vetores X de M pode ser interpretado como sendo uma aplicação (***derivação***) do tipo

$$f \in \mathcal{D}(M) \mapsto Xf \in \mathcal{D}(M), \quad \text{dada por} \quad (Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde $\mathcal{D}(M) = \{f : M \to \mathbb{R}; f \in C^\infty\}$.

Com esta interpretação, dados campos de vetores X, Y de M, podemos considerar expressões do tipo $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ e obter o seguinte resultado:

Lema 1.2.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial $[X, Y]$, chamado ***Colchete***, tal que $\forall f \in \mathcal{D}(M)$, $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.

A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.2.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

(*1*) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*)

(*2*) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*)

(*3*) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*)

(*4*) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.3 Variedades Riemannianas

Definição 1.3.1. Uma ***Métrica Riemanniana*** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:

Dados campos de vetores X, Y em M, a aplicação $p \in M \mapsto \langle X(P), Y(p) \rangle_p \in \mathbb{R}$ é de classe C^∞.

De modo equivalente é dizer que as funções g_{ij} definidas em uma vizinhaça coordenada Vde M pela expressão

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p \right\rangle_p$$

são funções de classe C^∞ em V.

Definição 1.3.2. Uma variedade M munida de uma métrica Riemanniana é chamada uma ***Variedade Riemanniana***.

Proposição 1.3.1. Toda variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana.

Exemplo 4. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual é um exemplo trivial de uma variedade Riemanniana.

1.4 Conexões Afins e Riemannianas

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável. Uma ***Conexão Afim*** ∇ em M é uma aplicação

$$(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$$

que possui as seguintes propriedades:

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(*2*) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(*3*) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$, onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominada ***Derivada Covariante*** de V ao longo de c, tal que:

(*1*) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c.

(*2*) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I.

(*3*) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 1.4.2. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado ***Paralelo*** quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.4.2. Sejam $c : I \to M$ uma curva diferenciável e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$; $V(t)$ é chamado o ***Transporte Paralelo*** de $V(t_0)$ ao longo de c.

Definição 1.4.3. Uma curva $\gamma : I \to M$ em uma variedade M munida de uma conexão afim ∇ é dita uma ***Geodésica*** se para todo $t \in I$ temos $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$.

Definição 1.4.4. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão ∇ é dita ***Compatível com a Métrica*** $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c em M e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle =$ constante.

Proposição 1.4.3. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão afim ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo todo par V e W de campos de vetores ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \ t \in I.$$

Corolário 1.4.1. Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \ \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 1.4.5. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita ***Simétrica*** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Observação 1.4.1. Escolhendo um sistema de cordenadas $(x_1, ..., x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i \ \text{ e } \ Y = \sum_j y_j Y_j,$$

o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \ \ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 1.4.1. (***Levi-Civita***). Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

(*1*) ∇ é simétrica.

(*2*) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada ***Conexão de Levi-Civita*** ou ***Conexão Riemanniana*** de M.

1.5 Curvatura

Definição 1.5.1. Seja M uma variedade riemanniana. A ***Curvatura*** R de M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$, dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

Exemplo 5. Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja $Z = (z_1, ..., z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, ..., Xz_n)$ e $\nabla_Y Z = (Yz_1, ..., Yz_n)$. Logo

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, ..., YXz_n),$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, ..., XYz_n),$$

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, ..., [X,Y]z_n).$$

$$\text{Portanto} \quad R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Podemos pensar em R como uma maneira de medir o quanto uma variedade M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.5.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M goza das seguintes propriedades:

(1) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

onde $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

(2) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

com $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

(3) (***Identidade de Bianchi***) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.

Proposição 1.5.2. Para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ e fazendo a identificação $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = (X, Y, Z, T)$, são válidas as seguintes relações:

(1) $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$,

(2) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$,

(3) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$,

(4) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Definição 1.5.2. Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e $\{X, Y\}$ uma base qualquer de σ. A ***Curvatura Seccional*** de σ em p, $K(\sigma) = K(X, Y)$, é por definição

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X \wedge Y|^2}, \tag{1.1}$$

onde $|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $X, Y \in \sigma$.

Verifica-se que esta definição não depende das escolhas dos geradores $X, Y \in \sigma$. De fato, se $\overline{X} = aX + bY$ e $\overline{Y} = cX + dY$ são outros geradores de σ, então um cálculo direto nos mostra que

$$\frac{\langle R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\rangle}{\|\overline{X}\|^2\|\overline{Y}\|^2-\langle \overline{X},\overline{Y}\rangle^2} = \frac{(ad-bc)^2\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{(ad-bc)^2(\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X,Y\rangle^2)} = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{(\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X,Y\rangle^2)}$$

o que demostra a afirmação acima.

Proposição 1.5.3. Seja M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por

$$\langle R'(X, Y, W), Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante c se, e somente se, $R = cR'$, onde R é a curvatura de M.

Exemplo 6. Entre as variedades Riemannianas, aquelas de curvatura seccional constante c são as mais simples. Podemos citar como exemplo, o ***Espaço Euclidiano*** $\mathbb{R}^n$ com $c = 0$, a ***Esfera Unitária*** $\mathbb{S}^n$ com $c = 1$ e o ***Espaço Hiperbólico*** $\mathbb{H}^n$ que tem curvatura seccional $c = -1$.

Definição 1.5.3. Um ***Tensor*** T em uma variedade riemanniana é uma aplicação multilinear $T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times ... \times \mathcal{X}(M)}_{r-fatores} \to \mathcal{D}(M)$.

Isto quer dizer que, dados $Y_1, ..., Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(Y_1, ..., Y_r)$, é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, ..., fX + gY, ..., Y_r) = fT(Y_1, ..., X, ..., Y_r) + gT(Y_1, ..., Y, ..., Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.5.4. Seja T um tensor de ordem r. A ***Diferencial Covariante*** ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dada por

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, a ***Derivada Covariante*** $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z). \tag{1.2}$$

Capítulo 2

Preliminares e Fundamentos

2.1 Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica

Definição 2.1.1. Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é dita uma ***Imersão*** se $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um ***Mergulho***. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma ***Subvariedade*** de N. Se $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão, então $n \leq m$, neste caso a diferença $m - n$ é chamada a ***Codimensão*** da imersão φ.

Proposição 2.1.1. Seja $\varphi : M^n \longrightarrow N^m$ uma imersão da variedade M na variedade N. Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $\varphi|_U$ é um mergulho.

A Proposição 2.1.1 nos diz que toda imersão é localmente um mergulho.

Definição 2.1.2. Seja $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ com métrica $\langle , \rangle_{\overline{M}}$. Diz-se que φ é ***Isométrica*** se

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y)\rangle_{\overline{M}}, \quad \forall p \in M, \quad X, Y \in T_pM.$$

Sendo a imersão $\varphi : M \to \overline{M}$ localmente um mergulho (Proposição 2.1.1), podemos identificar um aberto U de M com $\varphi(U)$, e dizer que φ é localmente a aplicação inclusão. Mais ainda, podemos considerar U como uma subvariedade de $\overline{M}$. Em particular, estamos identificando $p \in U$ com $\varphi(p) \in \varphi(U)$. Assim, o espaço tangente de M em p se torna um subespaço do espaço tangente a $\overline{M}$, e o produto interno de $T_p\overline{M}$ o decompõe em soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, do modo como definimos o fibrado tangente TM no Exemplo 1.5.3, podemos definir também o ***Fibrado Normal***

$$TM^{\perp} = \{(p, \xi); \ \ p \in M \ \ e \ \ \xi \in (T_pM)^{\perp}\}.$$

Com respeito à decomposição acima temos as aplicações

$$(\ )^{\top} : T\overline{M} \to TM$$

$$(\ )^{\perp} : T\overline{M} \to TM^{\perp}$$

chamadas ***Projeção Tangencial*** e ***Projeção Normal***, respectivamente.

Agora, tomando campos vetoriais $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, e sabendo que $\varphi|_U$ é um mergulho, existem extensões locais $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ de X e Y, respectivamente, numa vizinhaça U de $\overline{M}$. Então, se $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\overline{M}$, faz sentido calcular $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ ou $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$. Verifica-se que $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$ não depende da extensão $\overline{Y}$ de Y, logo por simplicidade de notação, denotaremos $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$ por

$\overline{\nabla}_X Y$, lembrando que isso significa tomar uma extensão de Y para calcular a derivada covariante. Assim, pela unicidade da conexão Riemanniana verifica-se que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^{\top}$$

isto é, se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ então

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp} \tag{2.1}$$

Definição 2.1.3. A ***Segunda Forma Fundamental*** da imersão φ é definida como sendo a aplicação $\alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)^{\perp}$ dada por,

$$\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$$

Assim, para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, obtemos de (2.1) a ***Fórmula de Gauss***

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Verifica-se que a segunda forma fundamental α é simétrica e bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$.

Sejam $X \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, temos

$$\overline{\nabla}_X \xi = (\nabla_X \xi)^{\top} + (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}.$$

e com relação à compenente normal, definimos

$$\nabla^{\perp}_X \xi := (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}.$$

Note que para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, temos que

$$\nabla^{\perp} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{X}(M)^{\perp}$$

é por definição

$$\nabla^{\perp}_{fX+gY} \xi = \overline{\nabla}_{fX+gY} \xi - (\overline{\nabla}_{fX+gY} \xi)^{\top}.$$

Com isso, podemos concluir que $\nabla^\perp$ é $\mathcal{D}(M)$-linear em X e $\mathbb{R}$-linear em ξ, pois $\overline{\nabla}$ e $\overline{\nabla}^\top$ são conexões afins. Também vemos que $\nabla^\perp$ é compatível com a métrica, ou seja, $X\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle$, onde $\langle , \rangle$ é a métrica de $\overline{M}$. Assim, $\nabla^\perp$ é uma conexão afim em $TM^\perp$ chamada ***Conexão Normal***.

Com relação à componente tangencial, definimos a aplicação

$$A_\xi : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \quad \text{dada por}$$

$$A_\xi(X) := -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Dado $p \in M$, verificamos que $A_{\xi_p} : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto. Com efeito, se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi \in \mathcal{X}(M)^\perp$ temos

$$\begin{aligned} \langle A_\xi X, Y \rangle &= \langle -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top, Y \rangle = \langle -\overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle \\ &= \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y \rangle = \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \rangle \\ &= \langle \xi, \alpha(X,Y) \rangle = \langle \xi, \alpha(Y,X) \rangle = \dots \\ &= \langle A_\xi Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Note que em particular, $\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle$. O operador A_ξ é chamado ***Operador de Weingarten*** ou por abuso de linguagem, de Segunda Forma Fundamental da imersão φ.
Assim, temos a ***Fórmula de Weingarten***

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi.$$

Agora, usando as fórmulas de Gauss e Weingarten vamos obter as ***Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica***, a saber, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $R, \overline{R}$ os operadores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente. Assim, temos

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Das fórmulas de Gauss e Weingarten segue que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) = \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z)\\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z).\end{aligned}$$

De modo análogo, também temos

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z).$$

E por fim, também pela fórmula de Gauss,

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z).$$

Tomando a parte tangencial do operador curvatura de $\overline{M}$ temos

$$\begin{aligned}(\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} &= \nabla_X\nabla_Y Z - A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla_Y\nabla_X Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &= R(X,Y)Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X.\end{aligned}$$

Assim, para todo $W \in \mathcal{X}(M)$ obtemos a ***Equação de Gauss***

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle - \langle\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle. \tag{2.2}$$

Se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$ e $\overline{K}(X,Y) = \langle\overline{R}(X,Y)Y,X\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$, respectivamente do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$, então a equação de Gauss será

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2. \tag{2.3}$$

Tomando agora a componente normal de $\overline{R}(X,Y)Z$ temos,

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \alpha(X,\nabla_Y Z) + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \alpha([X,Y],Z).$$

Usando o fato de que a conexão em M é simétrica e denotando $(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z)$ por

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)$$

obtemos a ***Equação de Codazzi***

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z). \tag{2.4}$$

Finalmente consideremos o operador de curvatura normal

$$R^{\perp} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{X}(M)^{\perp} \text{ definido por}$$

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi, \quad \forall X,Y \in \mathcal{X}(M), \quad \xi \in \mathcal{X}(M)^{\perp}.$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten e tomando a projeção normal de $\overline{R}(X,Y)\xi$ obtemos a ***Equação de Ricci***

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(A_{\xi}X,Y) - \alpha(X,A_{\xi}Y)$$

ou

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_{\xi},A_{\eta}]X,Y\rangle,$$

onde $\eta \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, $[A_{\xi},A_{\eta}] = A_{\xi}\circ A_{\eta} - A_{\eta}\circ A_{\xi}$ e $(\nabla_{Y}A)(X,\xi) = \nabla_{Y}A_{\xi}X - A_{\xi}\nabla_{Y}X - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}X$.

Se considerarmos uma imersão isométrica $\varphi : M^{n} \to \overline{M}^{n+m}_{c}$, onde $\overline{M}^{n+m}_{c}$ denota uma variedade de curvatura seccional constante c, então pela Proposição (1.5.3) o tensor curvatura de $\overline{M}$ é dado por

$$\overline{R}(X,Y)Z = c(X\wedge Y)Z = c(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y), \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(\overline{M}).$$

Assim, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, são, respectivamente

(1) ***Equação de Gauss***

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = c\langle (X\wedge Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle$$

(*2*) ***Equação de Codazzi***

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) = (\nabla_Y A)(X, \xi)$$

(*3*) ***Equação de Ricci***

$$\langle R^{\perp}(X, Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$$

para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$.

Decorre dessa última equação que $R^{\perp} = 0$ se, e somente se, $[A_\xi, A_\eta] = 0$ para todo ξ, η, ou seja, se e somente se para todo $p \in M$ existe uma base de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os operadores A_ξ.

Definição 2.1.4. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Nesse caso particular em que a codimensão da imersão é 1, $\varphi(M) \subset \overline{M}$ é denominada uma ***Hipersuperfície***. É imediato que para hipersuperfícies, dado $p \in M$ temos $dim_{\mathbb{R}}((T_pM)^{\perp}) = 1$, logo $[A_\xi, A_\eta] = 0$.

Exemplo 7. Considere uma hipersuperfície $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$. Assim, dados $p \in M$, $\xi \in (T_pM)^{\perp}$ e usando o fato de que a aplicação de Weingarten é auto-adjunta, é possível determinar uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM que diagonaliza A_{ξ_p}, isto é, $A_{\xi_p} = \lambda_i e_i$ com $i \in \{1, ..., n\}$. Deste modo a expressão (2.3) se escreve como

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

O produto $\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$ é chamado de ***Curvatura de Gauss-Kronecker*** de M em p e coincide com a curvatura seccional no caso em que $n = 2$ e $\overline{M} = \mathbb{R}^3$.

Numa hipersuperfície, se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$ é um campo vetorial unitário então $\alpha(X,Y) = Proj_{T_pM^{\perp}}\overline{\nabla}_X Y = \lambda\xi$, ou seja, $\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = \lambda$. Portanto,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) = \nabla_X Y + \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle\xi,$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X, Y\rangle\xi,$$

que é a ***fórmula de Gauss*** para as hipersuperfícies. Por outro lado, como ξ é um campo vetorial unitário, temos que $\langle \overline{\nabla}_X \xi, \xi\rangle = 0$ logo $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Portanto, a ***fórmula de Weingarten*** torna-se

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

Neste caso a equação de Ricci é identicamente nula e usando o fato de que $\alpha(X,Y) = \langle A_\xi X, Y\rangle\xi$ e tomando as componentes tangenciais de $\overline{R}(X,Y)Z$ obtemos a ***equação de Gauss***

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z,$$

onde $(A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z = \langle A_\xi Y, Z\rangle A_\xi X - \langle A_\xi X, Z\rangle A_\xi Y$.
e a ***equação de Codazzi***, é

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y,$$

onde por definição $(\nabla_X A_\xi)Y := \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi \nabla_X Y$.

Observação 2.1.1. Vimos acima que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são satisfeitas para qualquer imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$. O *teorema fundamental das subvariedades* nos dá uma recíproca deste fato quando $\overline{M}^{n+m} = Q_c^{n+m}$, onde Q_c^{n+m} denota a forma espacial de dimensão $n+m$ e curvatura constante c. Trata-se de uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa $(n+m)-$ dimencional com curvatura seccional constante c, isto é, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+m}$, a esfera Euclidiana $\mathbb{S}_c^{n+m}$, ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}_c^{n+m}$. Uma prova desse teorema pode ser vista em [6].

2.2 Fibrados Vetoriais

Definição 2.2.1. Sejam E e M variedades diferenciáveis e $\pi : E \to M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\pi : E \to M$ é um ***Fibrado Vetorial Diferenciável*** de posto m, ou simplesmente ***Fibrado Vetorial***, quando para cada ponto $p \in M$ tem-se,

(*1*) $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão m,

(*2*) Existe uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ cuja restrição a $\pi^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^m$ para cada $q \in U$.

Definição 2.2.2. Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to M$, para cada $p \in M$ chamamos o espaço vetorial $E_p = \pi^{-1}(p)$ de ***Fibra*** de π sobre p. Uma ***Seção Local*** sobre um conjunto aberto $U \in M$ é uma aplicação diferenciável $\xi : M \to E$ tal que $\pi \circ \xi = id_U$. Se $U = M$ dizemos que ξ é uma ***Seção Global***, ou simplesmente, ***Seção*** de π. Denotaremos por $\Gamma(\pi)$ o conjunto das seções de π.

Observação 2.2.1. Dado $e \in E$ existe uma seção ξ tal que $\xi(\pi(e)) = e$. De fato, se $e \in E$ temos $\pi(e) = p \in M$ e, pela definição de fibrado vetorial, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$. Note que $\varphi(e) = (p, v_0)$, onde $v_0 \in \mathbb{R}^m$. Definindo $\eta : U \to U \times \to \mathbb{R}^m$ por

$\eta(q) = (q, v_0)$ e fazendo $\xi : U \to E$ como $\xi(p) = \varphi^{-1} \circ \eta$, temos que ξ é diferenciável e $\xi \circ \pi(e) = \varphi^{-1} \circ \eta \circ \pi(e) = \varphi^{-1} \circ \eta(p) = e$, como queríamos encontrar. Em particular, isto mostra que $\Gamma(\pi)$ é não vazio.

Exemplo 8. Seja $TM = \{(p, v_p); p \in M, v_p \in T_pM\}$. A aplicação $\pi : TM \to M$, dada por $\pi(p, v_p) = p$, é um espaço fibrado vetorial de classe C^∞, chamado o espaço ***Fibrado Tangente*** a M. Assim, uma seção do espaço fibrado tangente TM é um campo de vetores X em M, que para todos os efeitos, é uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.

Exemplo 9. Seja $\langle , \rangle$ uma métrica riemanniana em M^n e $N^m \subset M^n$ uma subvariedade de M. Dado $p \in M$, seja $T_pN^\perp \subset T_pM$ o subespaço de vetores normais a T_PN; definimos $\omega(N) = \{(p, v_p); p \in N, v_p \in T_pN^\perp\}$. A aplicação $\pi : \omega(N) \to N$, dada por $\pi(p, v_p) = p$ é um espaço fibrado vetorial, chamado o espaço ***Fibrado Normal***.

2.3 Estrutura Complexa em Espaços Vetoriais

Definição 2.3.1. Seja V um espaço vetorial real. Um homomorfismo linear $J : V \to V$ satisfazendo $J^2 = -I$, onde I é a aplicação identidade em V, é chamado de ***Estrutura Complexa*** em V.

Seja V um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J. Podemos definir o produto λX de um número complexo $\lambda = a + ib$ e um elemento X de V por

$$\lambda X = (a + ib)X = aX + bJX.$$

Então podemos considerar V como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Observação 2.3.1. Note que com relação às operações adição(usual) e multiplicação por um número complexo definida por $(a + ib)v := av + bJv$, $a + ib \in \mathbb{C}$ e $v \in V$, V torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, que será denotado por V^J, uma vez fixada a estrutura complexa J. Também, podemos verificar que a dimensão real de V, ou seja, a dimensão de V como espaço vetorial real, é par. De fato, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base do espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$,então $\{e_1, ..., e_n, ie_1, ..., ie_n\}$ é base de V sobre $\mathbb{R}$ pois,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{j=1}^{n} ib_j e_j = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n}(a_j + ib_j)e_j = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_j + ib_j = 0, \forall j \\ &\Rightarrow \quad a_j = b_j = 0, \forall j.\end{aligned}$$

Logo, $dim_{\mathbb{C}} V = n$, então $dim_{\mathbb{R}} V = 2n$.

Dado um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n, seja J o endomorfismo linear definido por $JX = iX$, para todo $X \in V$. Considerando V como espaço vetorial real de dimensão $2n$, então J é a estrutura complexa de V.

Seja V um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J. Então podemos estender J a um endomorfismo linear complexo de $V^{\mathbb{C}} = \{X + iY; X, Y \in V\}$, também denotado por J, dado por

$$J(X + iY) = JX + iJY.$$

Em um espaço vetorial real $2n$-dimensional com estrutura complexa J, existem elementos $X_1, ..., X_n$ de V tal que $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ é uma base de V.

Consideremos $Z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iJX_k)$ e $\overline{Z}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iJX_k)$, $k = 1, ..., n$.

Então $\{Z_1, ...Z_n, \overline{Z}_1, ...\overline{Z}_n\}$ é uma base de $V^{\mathbb{C}}$, desde que, $dimV^{\mathbb{C}} = dim_{\mathbb{R}}V = 2n$ e dado que o conjunto acima é linearmente independente.

Além disso,

$$\begin{aligned} J(Z_k) &= J\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iJX_k)\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iJ^2X_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iX_k) \\ &= iZ_k, \forall k; \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} J(\overline{Z}_k) &= J\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iJX_k)\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iJ^2X_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iX_k) \\ &= -i\overline{Z}_k, \forall k. \end{aligned}$$

Assim, i e $-i$ são os autovalores de J, correspondentes aos autovetores Z_k e $\overline{Z}_k$, respectivamente, para $k = 1, ..., n$, e portanto J é diagonalizável (i e $-i$ têm multiplicidade n).

Sejam $V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, e $V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\}$, os autoespaços correspondentes aos autovalores i e $-i$ respectivamente.

Proposição 2.3.1. Vale os seguintes itens

1. $V^{(1,0)} = \{X - iJX; X \in V\}$ e $V^{(0,1)} = \{X + iJX; X \in V\}$;

2. $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

Demonstração.

1. Para todo $X - iJX \in \{X - iJX; X \in V\}$ temos que

$$\begin{aligned} J(X - iJX) &= JX - iJ^2X \\ &= JX + iX \\ &= i(X - iJX), \end{aligned}$$

então $X - iJX \in \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, e

$$\{X - iJX; X \in V\} \subset \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}.$$

Seja $Z \in \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, então $Z \in V^{\mathbb{C}}$ e $JZ = iZ$, ou seja, $Z = X + iY$ e $J(X + iY) = i(X + iY) \Rightarrow JX + iJY - iX + Y = 0 \Rightarrow -JX = Y$ e $X = JY$. Assim, $Z = X + iY = X + i(-JX) = X - iJX$, isto é, $Z \in \{X - iJX; X \in V\}$ e

$$\{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} \subset \{X - iJX; X \in V\}.$$

Logo,

$$V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} = \{X - iJX; X \in V\}.$$

De modo análogo temos

$$V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\} = \{X + iJX; X \in V\}.$$

2. Primeiro observe que para qualquer $Z \in V^{\mathbb{C}}$,

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ),$$

com $\frac{1}{2}(Z - iJZ) \in V^{(1,0)}$ e $\frac{1}{2}(Z + iJZ) \in V^{(0,1)}$. De fato

$$\frac{1}{2}(Z - iJZ) = \frac{1}{2}(X + iY - iJ(X + iY))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(X + iY - iJX + JY) \\
&= \frac{1}{2}((X + JY) - i(JX - Y)) \\
&= \frac{1}{2}((X + X) - i(JX + JX)) \\
&= X - iJX,
\end{aligned}
$$

analogamente

$$\frac{1}{2}(Z + iJZ) = X + iJX.$$

Além disso, se $Z \in V^{(1,0)} \cap V^{(0,1)}$ então $JZ = iZ$ e $JZ = -iZ$, o que implica que $iZ = -iZ \Leftrightarrow Z = 0$. Portanto $Z \in V^{(1,0)} \cap V^{(0,1)} = \{0\}$, logo $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

□

Seja M uma variedade diferenciável, indicaremos por $T^{\mathbb{C}}M$ a complexificação do fibrado tangente, ou seja, $T^{\mathbb{C}}M = \{X + iY; X, Y \in TM\}$. Como foi visto anteriormente, a extensão de J ao fibrado tangente complexificado pode ser diagonalizada tendo i e $-i$ como autovalores. Os autoespaços associados aos autovalores i e $-i$ serão denotados por $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$, respectivamente. Segue também que $T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{(1,0)}M \oplus T_p^{(0,1)}M$, onde $T_p^{(1,0)}M = \{X - iJX; X \in TM\}$ e $T_p^{(0,1)}M = \{X + iJX; X \in TM\}$.

Definição 2.3.2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um ***Produto Interno Complexo*** sobre V é uma aplicação $\langle\langle ., . \rangle\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tem-se

(1) $\langle\langle u, v \rangle\rangle = \overline{\langle\langle v, u \rangle\rangle}$

(2) $\langle\langle \alpha u + \beta v, w \rangle\rangle = \alpha \langle\langle u, w \rangle\rangle + \beta \langle\langle v, w \rangle\rangle$

(3) $\langle\langle u, u \rangle\rangle > 0$ e $\langle\langle u, u \rangle\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Daí tem-se que

$$\langle\langle u, \lambda v\rangle\rangle = \overline{\langle\langle \lambda v, u\rangle\rangle} = \overline{\lambda\langle\langle v, u\rangle\rangle} = \bar{\lambda}\overline{\langle\langle v, u\rangle\rangle} = \bar{\lambda}\langle\langle u, v\rangle\rangle, \quad \forall u, v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Definição 2.3.3. Um produto interno $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ sobre um espaço vetorial quase-complexo (V, J) é dito ***Hermitiano*** quando $\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle, \ \forall u, v \in V$. A terna $(V, J, \langle .,. \rangle)$ é então chamada um ***Espaço Vetorial Hermitiano***, e representaremos tal produto interno por $\langle .,. \rangle_h$.

Definição 2.3.4. Seja M uma variedade diferenciável real. Um campo de tensores J em M é chamado uma ***Estrutura Quase Complexa*** em M, se para cada ponto $p \in M$, J_p é um endomormismo do espaço tangente T_pM tal que $J_p^2 = -I$. A variedade M munida com tal estrutura é dita uma ***Variedade Quase Complexa***.

Definição 2.3.5. Sejam $U \subset \mathbb{C}^m = \{(z_1 \ldots z_m) \in \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}; z_j = x_j + iy_j\}$ aberto e $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ de classe C^1, isto é, existem e são contínuas as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial u}{\partial y_k}, \dfrac{\partial v}{\partial x_k}, \dfrac{\partial v}{\partial y_k}$, $1 \leq k \leq m$. Dizemos que f é ***Holomorfa*** (derivável no sentido complexo) em U quando valem as ***Equações de Cauchy-Riemann***

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \ k = 1, \ldots, m$$

.

Definição 2.3.6. Sejam $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto e $f = (f_1 \ldots f_n) : U \to \mathbb{C}^n$, onde cada $f_j : U \to \mathbb{C}$ é de classe C^1. Dizemos que f é holomorfa em U quando cada f_j é holomorfa em U.

Definição 2.3.7. Uma ***Variedade Complexa*** de dimensão m é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $f_\alpha : U_\alpha \to M$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{C}^m$ em M tais que:

(*1*) $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$

(*2*) para quaisquer α, β com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{C}^m$ e, além disto, as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ e $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ aí definidas são holomorfas.

O par (U_α, f_α) (ou a aplicação f_α) com $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p e $f_\alpha(U_\alpha)$ é chamada de vizinhança coordenada em p. A família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é chamada uma estrutura holomorfa em M.

Exemplo 10. O ***Espaço Projetivo Complexo*** n-dimensional $\mathbb{C}P^n$ é dado pelo quociente $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}_*^{n+1}/\sim$, onde dados $z, w \in \mathbb{C}_*^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

$\mathbb{C}P^n$ é então o conjunto das classes $[z]$, onde $z \in \mathbb{C}_*^{n+1}$.
Mas,

$$\begin{aligned} [z] &= \{w \in \mathbb{C}_*^{n+1}; w \sim z\} \\ &= \{w \in \mathbb{C}_*^{n+1}; w = \lambda z \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}^*\} \\ &\simeq \{\lambda z; \lambda \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathbb{C}P^n$ é o conjunto dos subespaços de dimensão complexa 1 em $\mathbb{C}^n$.

Note que qualquer elemento de $\mathbb{C}P^n$ é da forma $[(z_1, \ldots, z_{n+1})]$, onde $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}_*^{n+1}$. Segue daí que dado $[(z_1, \ldots, z_{n+1})] \in \mathbb{C}P^n$, tem-se $z_j \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq n+1$, de onde concluimos que se $V_j = \{[(z_1, \ldots, z_{n+1})]; z_j \neq 0\}$ então $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{j=1}^{n+1} V_j$. Também $[w] = [z] \Leftrightarrow w \sim z \Leftrightarrow w = \lambda z$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Isto quer dizer que $[w] = [z]$ se, e somente se, w é um múltiplo de z

Em particular, se $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}_*^{n+1}$ é tal que $z_j \neq 0$ para algum $j = 1, \ldots, n+1$ então

$$[(z_1, \ldots, z_{n+1})] = \left[\frac{1}{z_j}(z_1, \ldots, z_{n+1})\right] = \left[\left(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_j}\right)\right]$$

Assim, podemos escrever

$$[(z_1, \ldots, z_{n+1})] = [(w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n)],$$

onde $w_k = \dfrac{z_k}{z_j}$. Para cada $j = 1, \ldots, n+1$, definimos

$$\begin{aligned} V_j &= \{[(z_1, \ldots, z_{n+1})] \in \mathbb{C}_*^{n+1}; z_j \neq 0\} \\ &= \{[(w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n)]; (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n\} \end{aligned}$$

e $f_j : \mathbb{C}^n \to V_j \subset \mathbb{C}P^n$ pondo $f_j(w_1, \ldots, w_n) = [(w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n)]$.

Podemos verificar que $\{(\mathbb{C}^n, f_j); j = 1, \ldots, n+1\}$ é uma estrutura holomorfa em $\mathbb{C}P^n$ o que o torna uma variedade complexa de dimensão n. De fato, f_j é obviamente bijetiva, logo $\bigcup_{j=1}^{n+1} f_j(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{j=1}^{n+1} V_j = \mathbb{C}P^n$.

Agora só falta mostrarmos que se $f_j(\mathbb{C}^n) \cap f_i(\mathbb{C}^n) = V_j \cap V_i \neq 0$, $f_j^{-1}(V_j \cap V_i)$ é aberto e que $f_i^{-1} \circ f_j$ é holomorfa. Para isso, suporemos $i < j$(o caso i>j é análogo).

Dado $((w_1, \ldots, w_n))$ com $w_i \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} f_j((w_1, \ldots, w_n)) &= [(w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n)] \\ &= \left[\frac{1}{w_i}(w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n)\right] \\ &= \left[\left(\frac{w_1}{w_i}, \ldots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, 1, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_{j-1}}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_n}{w_i}\right)\right] \\ &= f_i\left(\frac{w_1}{w_i}, \ldots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_{j-1}}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_n}{w_i}\right) \in f_i(\mathbb{C}^n) = V_i. \end{aligned}$$

Portanto, $f_j(w_1, \ldots, w_n) \in V_j \cap V_i$ e daí $(w_1, \ldots, w_n) \in f_j^{-1}(V_j \cap V_i)$.

Dado $[(z_1,\ldots,z_{n+1})] \in V_j \cap V_i$ tem-se

$$[(z_1,\ldots,z_{n+1})] = \left[\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\frac{z_{j-1}}{z_j},1,\frac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_j}\right)\right].$$

Logo,

$$f_j^{-1}([(z_1,\ldots,z_{n+1})]) = \left[\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\frac{z_{j-1}}{z_j},\frac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_j}\right)\right] = (w_1,\ldots,w_n)$$

com $w_i = \dfrac{z_i}{z_j} \neq 0$, pois $z_i \neq 0$ já que $(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in V_i$ Provamos então que

$$f_j^{-1}(V_i \cap V_j) = \{(w_1,\ldots,w_n); w_i \neq 0\}.$$

que é de fato aberto.

Agora,

$$\begin{aligned} f_i^{-1} \circ f_j(w_1,\ldots,w_n) &= f_i^{-1}([w_1,\ldots,w_{j-1},1,w_{j+1},\ldots,w_n]) \\ &= f_i^{-1}\left(\left[\left(\frac{w_1}{w_i},\ldots,\frac{w_{i-1}}{w_i},1,\frac{w_{i+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_{j-1}}{w_i},\frac{1}{w_i},\frac{w_{j+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_n}{w_i}\right)\right]\right) \\ &= \left(\frac{w_1}{w_i},\ldots,\frac{w_{i-1}}{w_i},\frac{w_{i+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_{j-1}}{w_i},\frac{1}{w_i},\frac{w_{j+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_n}{w_i}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $f_i^{-1} \circ f_j$ é holomorfa, já que cada coordenada determina uma função holomorfa.

2.4 Estrutura Complexa de $\mathbb{C}P^n$

Temos que $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \equiv \mathbb{C}^{n+1}$. Sejam $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ a projeção canônica de S^{2n+1} sobre $\mathbb{C}P^n$ que leva cada $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ a uma reta $p = [z] \in \mathbb{C}P^n$, onde $\sigma_{\mathbb{R}} = span_{\mathbb{R}}\{z, iz\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Então

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(p) &= \{w \in S^{2n+1}; z \sim w\} \\ &= \{w \in S^{2n+1}; w = \lambda z \text{ para algum } \lambda \in S^1\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\lambda z; \lambda = a + bi \in S^1\} \\
&= \{(a+bi)z; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } |(a+bi)z| = 1\} \\
&= \{az + b(iz); a, b \in \mathbb{R} \text{ e } |az + b(iz)| = 1\} \\
&= S^{2n+1} \cap \{az + b(iz); a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= S^{2n+1} \cap \sigma_{\mathbb{R}} \cong S^1. \quad \text{Logo, } S^1 \text{ é a fibra de } \pi \text{ sobre } p.
\end{aligned}
$$

Temos que $T_z S^{2n+1} = \{w \in \mathbb{C}^{n+1}; w \perp z\}$ e, portanto, $iz \in T_z S^{2n+1}$. Como π é constante em $\pi^{-1}(p) \cong S^1$, tem-se $d\pi_z$ restrita ao subespaço tangente a $\pi^{-1}(p)$ é identicamente nula. Tal subespaço tem dimensão 1 e é gerado por um vetor perpendicular z e contido no plano $\sigma_{\mathbb{R}}$, ou seja, gerado por iz. Logo, $d\pi_z|_{span_{\mathbb{R}}\{iz\}} \equiv 0$.

Seja $\tilde{T}_z = \{\{iz\}^{\perp} \text{ em } T_z S^{2n+1}\} = \{w \in \mathbb{C}^{n+1}; w \perp_{\mathbb{C}} z\}$. Então $T_z S^{2n+1} = \tilde{T}_z \oplus span_{\mathbb{R}}\{iz\}$, $\tilde{T}_z$ tem dimensão $2n$ e, como $d\pi_z(span_{\mathbb{R}}\{iz\}) = \{0\}$, temos que $d\pi_z$ tem posto $2n-2$. Portanto $d\tilde{\pi} = d\pi|_{\tilde{T}_z} : \tilde{T}_z \to T_p\mathbb{C}P^n$ é um isomorfismo.

Se denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ o produto interno hermitiano sobre $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$, isto é, $\langle z, w \rangle_h = \sum_{k=1}^{n+1} z_k \overline{w}_k$, então o produto interno euclidiano $\langle ., . \rangle$ sobre $\mathbb{R}^{2n+2}$ pode ser escrito como $\langle X, Y \rangle = \Re \langle X, Y \rangle_h$. Dessa forma podemos definir uma métrica Riemanniana g sobre $\mathbb{C}P^n$ pondo $\forall X, Y \in T_p\mathbb{C}P^n$,

$$g_p(X, Y) = \langle (d\tilde{\pi})^{-1}(X), (d\tilde{\pi})^{-1}(Y) \rangle$$

g é chamada ***Métrica de Fubini-Study***.

Sejam $p \in \mathbb{C}P^n$, $d\tilde{\pi} = d\pi|_{\tilde{T}_z}$ e a estrutura complexa $\tilde{J} : \tilde{T}_z \to \tilde{T}_z$ dada por $\tilde{J}(w) = iw$, $z \in S^{2n+1}$ tal que $\pi(z) = p$ e $J = d\tilde{\pi}_z \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}_z^{-1} : T_P\mathbb{C}P^n \to T_p\mathbb{C}P^n$. Dessa forma, podemos verificar que J é uma estrutura complexa sobre $\mathbb{C}P^n$ e que a métrica de Fubini-Study é hermitiana com respeito a estrutura J.

Capítulo 3

Rigidez de Hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$

3.1 Conceitos Preliminares

Definição 3.1.1. Uma variedade complexa M^n, com estrutura complexa J em TM é chamada ***Variedade Kähleriana*** se J é um operador ortogonal, paralelo na conexão Riemanniana ∇, ou seja, $\nabla J = 0$ ou ainda para todo par de campos tangentes X, Y tem-se $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y = 0$ e portanto $\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y$. No caso em que J satisfaz apenas a condição $(\nabla_X J)X = 0$ para todo campo tangente X, a variedade é dita ***Quase Kähleriana***.

Definição 3.1.2. Seja (M, J) uma variedade Kähleriana. Diz-se que M tem ***Curvatura Seccional Holomorfa*** quando na definição (1.1) considerarmos sempre $K(X, JX)$ para todo $X \in T_pM$. A Curvatura Seccional Holomorfa é Constante se para todo $X \in T_pM$ tivermos $K(X, JX) \equiv c$.

Exemplo 11. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ com a métrica de Fubini-

Study tem curvatura seccional holomorfa constante $c = 4$.

Definição 3.1.3. Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana dotada de estrutura quase complexa ortogonal J e M uma hipersuperfície de $\overline{M}$. Seja, também, ξ um campo local de vetores unitários normais em M. O campo de vetores tangentes $U := J\xi \in \mathcal{X}(M)$ será chamado ***Campo Vetorial de Hopf*** em M e diremos que M é uma ***Hipersuperfície de Hopf*** de $\overline{M}$ se as curvas integrais de U são geodésicas de M, isto é

$$\nabla_U U = 0.$$

Definição 3.1.4. Seja $g : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica de uma Variedade Riemanniana M^{2n-1} em uma variedade Quase Kahleriana $(\overline{M}^n, J)$ e seja $\tilde{\xi}$ um campo de vetores normais na hipersuperfície $\tilde{M} = g(M)$ de $\overline{M}$. Então podemos definir em M uma estrutura de campo vetorial $\hat{U}$ e tensores $\hat{\phi}$ e $\hat{A}$ de modo que

$$\hat{U}_q = dg^{-1}(J\tilde{\xi})$$

$$\hat{\phi}(X) = dg^{-1}(Jdg(X) - \langle Jdg(X), \tilde{\xi}\rangle\tilde{\xi})$$

$$\hat{A}(X) = -dg^{-1}(\overline{\nabla}_{dg(X)}\tilde{\xi}).$$

Observamos que a estrutura do campo de vetores $\hat{U}$ corresponde ao campo de vetores de Hopf $dg(\hat{U})$ de $g(M)$ com relação ao campo normal $\tilde{\xi}$. Assim, quando M é uma subvariedade de $\overline{M}$ e g é a inclusão então podemos denotar essa estrutura induzida na hipersuperfície M por U, ϕ, A e ξ está no fibrado normal de M. Nesse caso, teremos de modo mais simples, as expressões,

$$U = J\xi, \tag{3.1}$$

$$\phi(X) = JX + \langle X, U\rangle\xi. \tag{3.2}$$

Usando a condição de Kähler, $\overline{\nabla}_X(JY) = J(\overline{\nabla}_X Y)$ em $\mathbb{C}P^n$, encontramos a taxa de variação dos campos induzidos U e $\hat{U}$ (se considerarmos uma imersão isométrica $g : M \to \mathbb{C}P^n$), ou seja

$$\begin{aligned}
\nabla_X U &= \nabla_X(J\xi) \\
&= \overline{\nabla}_X(J\xi) - \langle \overline{\nabla}_X(J\xi), \xi \rangle \xi \\
&= J(\overline{\nabla}_X \xi) + \langle J\xi, \overline{\nabla}_X \xi \rangle \xi \\
&= -J(AX) - \langle U, AX \rangle \xi \\
&= -(J(AX) + \langle U, AX \rangle \xi)
\end{aligned}$$

Assim, comparando essa igualdade com (3.2) temos

$$\nabla_X U = -\phi AX. \tag{3.3}$$

Procedendo de modo análogo com $\nabla_X \hat{U}$ também obtemos,

$$\nabla_X \hat{U} = -\hat{\phi}\hat{A}X. \tag{3.4}$$

Através dessa estrutura induzida $(\hat{U}, \hat{\phi})$ podemos verificar as seguintes propriedades:

(*P1*) $\phi^2 X = -X + \langle X, U \rangle U$

(*P2*) $\langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, U \rangle \langle Y, U \rangle$

(*P3*) ϕ é anti-simétrico

(*P4*) $ker(\phi) = span\{U\}$

(*P5*) $\phi : U^\perp \to U^\perp$ é uma isometria linear, onde
$U^\perp = \{U(p)\}^\perp = \{v \in T_pM; \langle v, U(p) \rangle = 0\}$.

(*P6*) $(\nabla_X \phi)Y = \langle AX, Y \rangle U - \langle Y, U \rangle AX$.

Com efeito,

Aplicando ϕ em $\phi X = JX + \langle X, U\rangle\xi$ temos

$$\begin{aligned}\phi^2 X &= \phi JX + \langle X, U\rangle\phi\xi \\ &= JJX + \langle JX, U\rangle\xi + \langle X, U\rangle U \\ &= -X + \langle X, U\rangle U\end{aligned}$$

Portanto vale (*P1*).

Temos que $\phi X = JX + \langle X, U\rangle\xi$ e $\phi Y = JY + \langle Y, U\rangle\xi$. Daí, segue que $\langle \phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle + \langle X, U\rangle\langle Y, U\rangle$. Portanto vale (*P2*).

Usando (*P1*) e (*P2*) temos que $\langle \phi^2 X, \phi Y\rangle = \langle \phi X, Y\rangle + \langle \phi X, U\rangle\langle Y, U\rangle$. Assim, $-\langle X, \phi Y\rangle = \langle \phi X, Y\rangle$. Logo vale (*P3*).

Em $\phi X = JX + \langle X, U\rangle\xi$, fazendo $X = U$ temos,

$$\begin{aligned}\phi U &= JU + \langle U, U\rangle\xi \\ &= J^2\xi + \xi \\ &= -\xi + \xi \\ &= 0\end{aligned}$$

então $span\{U\} \subset Ker(\phi)$. Por outro lado, se $\phi X = 0$ temos $JX + \langle X, U\rangle\xi = 0$, logo $JX = -\langle X, U\rangle\xi$. Aplicando J nessa última igualdade temos,

$$\begin{aligned}J^2 X &= -\langle X, U\rangle J\xi \\ -X &= -\langle X, U\rangle U \\ X &= \langle X, U\rangle U.\end{aligned}$$

assim, X é múltiplo de U. Segue que $span\{U\} \supset Ker(\phi)$. Portanto vale (*P4*).

Por $(P2)$ $\forall X \in U^{\perp}$ temos $\langle \phi^2 X, \phi U\rangle = \langle \phi X, U\rangle + \langle \phi X, U\rangle\langle U, U\rangle$. Por $(P4)$ $\phi U = 0$, logo $\langle \phi X, U\rangle = 0$, isto é, $\phi X \in U^{\perp}$. Assim a restrição de ϕ a $U^{\perp}$ é linear. Por outro lado, usando $(P2)$ $\forall X, Y \in U^{\perp}$ temos $\langle \phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle$, ou seja, ϕ é isometria. Logo vale $(P5)$.

Agora, pela definição de derivada covariante de um tensor vista em (1.2), temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \phi)Y &= \nabla_X(\phi Y) - \phi(\nabla_X Y)\\
&= \overline{\nabla}_X(\phi Y) - \langle \overline{\nabla}_X(\phi Y), \xi\rangle\xi - J(\nabla_X Y) - \langle \nabla_X Y, U\rangle\xi\\
&= \overline{\nabla}_X(JY + \langle Y, U\rangle\xi) + \langle \phi Y, \overline{\nabla}_X \xi\rangle\xi - J(\overline{\nabla}_X Y - \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi\rangle\xi)\\
&- \langle \nabla_X Y, U\rangle\xi\\
&= \overline{\nabla}_X(JY) + \langle \overline{\nabla}_X Y, U\rangle\xi + \langle Y, \overline{\nabla}_X U\rangle\xi + \langle Y, U\rangle\overline{\nabla}_X\xi\\
&- \langle \phi Y, AX\rangle\xi - J(\overline{\nabla}_X Y) - \langle Y, \overline{\nabla}_X\xi\rangle J\xi - \langle \nabla_X Y, U\rangle\xi\\
&= -\langle Y, \phi AX\rangle\xi - \langle Y, U\rangle AX + \langle Y, \phi AX\rangle\xi + \langle Y, AX\rangle U\\
&= \langle Y, AX\rangle U - \langle Y, U\rangle AX\\
&= \langle AX, Y\rangle U - \langle Y, U\rangle AX.
\end{aligned}$$

Portanto vale $(P6)$.

Definição 3.1.5. Sejam $\overline{M}$ e M variedades Riemannianas e $g : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Diz-se que a subvariedade $g(M)$ é ***Rígida*** em $\overline{M}$ se para cada imersão isométrica $f : M \to \overline{M}$, existe uma isometria $\tau : \overline{M} \to \overline{M}$ tal que $f = \tau \circ g$.

De outra forma,

Definição 3.1.6. Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana e $M \subset \overline{M}$ uma subvariedade de $\overline{M}$. Se G é um grupo de isometrias de $\overline{M}$, diz-se que M é ***Rígida*** em $\overline{M}$ com relação a G se toda imersão isométrica $f : M \to \overline{M}$ é extendível a uma isometria do espaço ambiente $\overline{M}$. Em outras palavras, existe uma isometria $\tau \in G$ tal que $f = \tau \mid_M$. Neste caso dizemos que as variedades M e $f(M)$ são ***G-congruente***.

Observação 3.1.1. Em espaço real, a rigidez de hipersuperfícies cuja segunda forma fundamental tem posto maior ou igual a 3 em todo ponto é um resultado clássico bem conhecido que pode ser encontrado, por exemplo, em [6] e [9]. Lembremos desse resultado.

Teorema 3.1.1. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n, e sejam f e g imersões isométricas de M em $\mathbb{R}^{n+1}$ com campos de vetores unitários normais ξ_f e ξ_g, respectivamente. Se as segundas formas fundamentais α_f e α_g de f e g (com relação a ξ_f e ξ_g), respectivamente, coincidem em M, então existe uma isometria τ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f = \tau \circ g$.

Como consequência temos

Corolário 3.1.1. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n, conexa e orientável, e sejam f e g imersões isométricas de M em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se o posto da segunda forma de M pela imersão isométrica f é maior ou igual a 3 em todos os pontos de M, então existe uma isometria τ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f = \tau \circ g$.

Esse resultado (3.1.1) é devido a Beez [1] e Killing [5]. Uma prova desse teorema fazendo uso das formas diferenciais pode ser encontrado em E. Cartan [3].

Em 1973, Takagi [10] mostrou um teorema de rigidez para hipersuperfícies do espaço projetivo complexo que é o equivalente do famoso teorema de rigidez para hipersuperfície do espaço real visto acima, isto é, ele provou o

Teorema 3.1.2. Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{C}P^n$ tal que sua segunda forma fundamental A tenha posto maior ou igual a 3 em todos os pontos de M. Seja f uma imersão isométrica de M em $\mathbb{C}P^n$ $(n \geq 3)$. Então,

(i) $\phi = \hat{\phi}$ se, e somente se $A = \hat{A}$

(ii) Se $A = \hat{A}$ então existe uma isometria holomorfa F de $\mathbb{C}P^n$ tal que $F\mid_M = f$.

Mais recentemente (1996) esse resultado foi melhorado por Takagi et al [11], mostrando que a Rigidez de hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$ só depende, em geral, da invariância do campo de Hopf, isto é, basta $U = \hat{U}$. Trataremos desse resultado com detalhes na próxima seção.

Considere o espaço projetivo complexo $(\mathbb{C}P^n, J, <>, \overline{\nabla}, \overline{R})$ dotado com a métrica de Fubini-Study de curvatura seccional holomorfa constante igual a 4. Então seu tensor curvatura $\overline{R}$, encontrado em [6], é dado por

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,JZ\rangle JX \\ &+ \langle X,JZ\rangle JY + 2\langle X,JY\rangle JZ \end{aligned} \tag{3.5}$$

Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{C}P^n$ com segunda forma fundamental α e estrutura induzida $<>, \nabla, R,$ etc. Seja ξ um campo unitário normal em M. Lembremos que

$$\begin{aligned} \alpha(X,Z) &= \overline{\nabla}_X Z - \nabla_X Z \\ &= \overline{\nabla}_X Z - (\overline{\nabla}_X Z - \langle \overline{\nabla}_X Z, \xi\rangle \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle \overline{\nabla}_X Z, \xi\rangle \xi \\ &= \langle Z, -\overline{\nabla}_X \xi\rangle \xi \\ &= \langle Z, AX\rangle \xi \end{aligned}$$

Também, $\alpha(Y, W) = \langle W, AY\rangle\xi$, logo

$$\langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle = \langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle.$$

Procedendo de modo análogo, temos

$$\langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, W)\rangle = \langle AY, Z\rangle\langle AX, W\rangle.$$

Assim, as equações de Gauss (2.2) e Codazzi (2.4) para M são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, Y)Z, W\rangle &= \langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle \\ &- \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \xi\rangle = \langle (\overline{\nabla}_X \alpha)(Y, Z), \xi\rangle - \langle (\overline{\nabla}_Y \alpha)(X, Z), \xi\rangle, \tag{3.7}$$

onde a derivada covariante do tensor h é por definição dado por

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(Y, Z) := \overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Da aplicação de Weingarten sabemos que $\langle \alpha(Y, Z), \xi\rangle = \langle AY, Z\rangle$, logo

$$\begin{aligned} X\langle AY, Z\rangle &= X\langle \alpha(Y, Z), \xi\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z), \xi\rangle + \langle \alpha(Y, Z), \overline{\nabla}_X \xi\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z), \xi\rangle - \langle \alpha(Y, Z), AX\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z), \xi\rangle. \end{aligned}$$

De modo análogo, vemos que $Y\langle AX, Z\rangle = \langle \overline{\nabla}_Y \alpha(X, Z), \xi\rangle$.

Em termos do operador de Weingarten A de M a equação de Codazzi (3.7) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)Z,\xi\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z),\xi\rangle \\
&- \langle \overline{\nabla}_Y\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z),\xi\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z),\xi\rangle - \langle \alpha(\nabla_X Y,Z),\xi\rangle - \langle \alpha(Y,\nabla_X Z),\xi\rangle \\
&- \langle \overline{\nabla}_Y\alpha(X,Z),\xi\rangle + \langle \alpha(\nabla_Y X,Z),\xi\rangle + \langle \alpha(X,\nabla_Y Z),\xi\rangle \\
&= \langle AX,\nabla_Y Z\rangle - \langle AY,\nabla_X Z\rangle + \langle AZ,\nabla_Y X\rangle \\
&- \langle AZ,\nabla_X Y\rangle + X\langle AY,Z\rangle - Y\langle AX,Z\rangle. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

De outra forma, desenvolvendo o segundo membro da igualdade (3.8) obtemos,

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\xi\rangle = \langle (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, Z\rangle \qquad (3.9)$$

Assim, substituindo (3.5) em (3.6) e em (3.9) obtemos para toda hipersuperfície M de $\mathbb{C}P^n$ as equações de Gauss e Codazzi simplificadas para

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle \phi Y,Z\rangle \phi X - \langle \phi X,Z\rangle \phi Y \\
&- 2\langle \phi X,Y\rangle \phi Z + \langle AY,Z\rangle AX - \langle AX,Z\rangle AY, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

e

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = 2\langle \phi X,Y\rangle U + \langle Y,U\rangle \phi X - \langle X,U\rangle \phi Y. \qquad (3.11)$$

3.2 Teorema da Rigidez de Hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$

Agora, traremos como resultado principal deste trabalho a nova prova de [8] do teorema da Rigidez de Hipersuperfícies em $\mathbb{C}P^n$, utilizando ferramentas da geometria clássica vistas até aqui.

Teorema 3.2.1. Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{C}P^n$ tal que sua segunda forma fundamental A tenha posto maior ou igual a 3 em todos os pontos de M e seja g uma imersão isométrica de M em $\mathbb{C}P^n$. Se g leva campos de Hopf de M em campos de Hopf de $g(M)$, isto é, $U = \hat{U}$, então g é a restrição de uma isometria holomorfa de $\mathbb{C}P^n$.

Demonstração:

Façamos algumas considerações iniciais.

Sendo $U = \hat{U}$, segue de (3.3) e (3.4) que para todo $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\phi AX = \hat{\phi}\hat{A}X \tag{3.12}$$

Como g preserva a curvatura, isto é, $R = \hat{R}$, obtemos de (3.10) que

$$\begin{aligned}\langle X, \phi Z\rangle\phi Y + 2\langle X, \phi Y\rangle\phi Z - \langle Y, \phi Z\rangle\phi X - \langle AX, Z\rangle AY + \langle AY, Z\rangle AX = \\ \langle X, \hat{\phi} Z\rangle\hat{\phi} Y + 2\langle X, \hat{\phi} Y\rangle\hat{\phi} Z - \langle Y, \hat{\phi} Z\rangle\hat{\phi} X - \langle \hat{A}X, Z\rangle \hat{A}Y + \langle \hat{A}Y, Z\rangle \hat{A}X\end{aligned} \tag{3.13}$$

Em particular se $Z = U$, sabendo que $\phi U = 0$ e $\hat{\phi} U = \hat{\phi}\hat{U} = 0$ (pela propriedade (*P4*)), e substituido em (3.13) obtemos

$$\langle X, AU\rangle AY - \langle Y, AU\rangle AX = \langle X, \hat{A}U\rangle \hat{A}Y - \langle Y, \hat{A}U\rangle \hat{A}X \tag{3.14}$$

Também se $Y = U$ a equação (3.14) será

$$\langle X, AU\rangle AU - \langle U, AU\rangle AX = \langle X, \hat{A}U\rangle \hat{A}U - \langle U, \hat{A}U\rangle \hat{A}X \tag{3.15}$$

Se W denota o complemento ortogonal do espaço vetorial gerado por $\{AU, \hat{A}U\}$ então para quaisquer $Y \in \mathcal{X}(M)$ e $X \in W$ as equações (3.14) e

(3.15) serão, respectivamente

$$\langle Y, AU\rangle AX = \langle Y, \hat{A}U\rangle \hat{A}X, \tag{3.16}$$

$$\langle U, AU\rangle AX = \langle U, \hat{A}U\rangle \hat{A}X. \tag{3.17}$$

Fazendo $Y = AU$ e $Y = \hat{A}U$ em (3.16) obtemos para todo $X \in W$, respectivamente

$$|AU|^2 AX = \langle \hat{A}U, AU\rangle \hat{A}X, \tag{3.18}$$

$$\langle \hat{A}U, AU\rangle AX = |\hat{A}U|^2 \hat{A}X. \tag{3.19}$$

Agora, faremos a demonstração considerando dois casos.

1º CASO: $AU \neq 0$.

Sendo o posto de A maior ou igual a 3, existe um vetor $X \in W$ tal que $AX \neq 0$, e assim das equações (3.18) e (3.19) temos que $\hat{A}X \neq 0$, $\hat{A}U \neq 0$ e $\langle \hat{A}U, AU\rangle \neq 0$. Tomando o quociente entre os módulos dessas equações obtemos $|\langle \hat{A}U, AU\rangle| = |\hat{A}U||AU|$. Consequentemente $\hat{A}U = \delta AU$, onde $\delta = \pm\frac{|\hat{A}U|}{|AU|}$. Usando esse resultado em (3.18) segue que $AX = \delta\hat{A}X$ para todo $X \in W$.

Por outro lado, da propriedade (*P2*) temos que

$$\langle \phi AX, \phi AX\rangle = \langle AX, AX\rangle + \langle AX, U\rangle\langle AX, U\rangle,$$

e

$$\langle \hat{\phi}\hat{A}X, \hat{\phi}\hat{A}X\rangle = \langle \hat{A}X, \hat{A}X\rangle + \langle \hat{A}X, U\rangle\langle \hat{A}X, U\rangle.$$

Como $\langle AX, U\rangle = \langle X, AU\rangle = 0$ e $\langle \hat{A}X, U\rangle = \langle X, \hat{A}U\rangle = 0$, e usando (3.12) segue que $|AX| = |\hat{A}X|$ para todo $X \in W$, logo $AX = \pm\hat{A}X$ e assim, $\delta = \pm 1$.

Escolhendo se necessário, o campo normal oposto em $g(M)$, podemos assumir que $\delta = 1$. Assim,

$$AX = \hat{A}X, \tag{3.20}$$

$$AU = \hat{A}U. \tag{3.21}$$

Se $\langle AU, U\rangle \neq 0$ e substituindo (3.21) em (3.15) obtemos que $A = \hat{A}$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.
Se $\langle AU, U\rangle = 0$, pela propriedade $(P5)$ podemos escolher um vetor $X \in U^{\perp}$ tal que $\phi X = AU \in U^{\perp}$.

Observação 3.2.1. Usando a propriedade $(P1)$ nesse caso em que $X \in U^{\perp}$, temos que $\phi^2 X = -X$, logo $\hat{\phi}^2(\phi X) = -\phi X$. Por outro lado, usando (3.12) temos também que $\hat{\phi}(\phi X) = -X$, logo $\hat{\phi}^2(\phi X) = -\hat{\phi}X$ e portanto $\hat{\phi}X = \phi X$. Afirmamos que $A\phi X = \hat{A}\hat{\phi}X$. De fato, basta verificar (e verificamos facilmente) que $\langle A\phi X, Z\rangle = \langle \hat{A}\hat{\phi}X, Z\rangle$, onde $Z = AU$ ou $Z \in (AU)^{\perp}$. Usando a propriedade $(P1)$ temos que $\hat{\phi}^2(AU) = -AU + \langle AU, U\rangle\xi$, logo $\hat{\phi}^2(AU) = -AU$.

Aplicando A na igualdade $\phi X = AU \in U^{\perp}$ e usando os resultados vistos na observação anterior temos,

$$A(AU) = A(\phi X) = \hat{A}\hat{\phi}X = -\hat{A}\hat{\phi}^2(AU) = \hat{A}(AU).$$

que juntamente com (3.20) e (3.21) obtemos $A = \hat{A}$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Assim, fazendo $Z = Y$ na expressão (3.13) reduzimo-la para

$$\langle X, \phi Y\rangle \phi Y = \langle X, \hat{\phi}Y\rangle \hat{\phi}Y.$$

Usando a propriedade $(P5)$ podemos considerar $X = \phi Y \in U^{\perp}$ e $X = \hat{\phi}Y \in U^{\perp}$, que substituindo na expressão acima, e calculando o quociente entre seus módulos obtemos $|\langle\hat{\phi}Y, \phi Y\rangle| = |\hat{\phi}Y||\phi Y|$. Assim, procedendo com o mesmo argumento usado para mostrar que $AX = \pm\hat{A}X$, temos que para todo $X \in U^{\perp}$ podemos verificar que $\phi X = \pm\hat{\phi}X$. Por outro lado, devido a propriedade (*P4*) devemos ter $\phi = \pm\hat{\phi}$ para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$. Mas, por (3.12) e (3.20) sabemos que $\phi AX = \hat{\phi}AX$, e portanto $\phi = \hat{\phi}$.

2º CASO: $AU = 0$.

Nesse caso, fazendo $Z = U$ e usando (3.3) e (3.4), juntamente com a propriedade (*P3*), a equação de Codazzi (3.8) para as hipersuperfícies M e $g(M)$ são escritas, respectivamente por

$$\langle\overline{R}(X,Y)U, \xi\rangle = 2\langle\phi AX, AY\rangle, \quad \text{ou} \tag{3.22}$$

$$\langle\overline{R}(dgX, dgY)dgU, \tilde{\xi}\rangle = 2\langle\hat{\phi}\hat{A}X, \hat{A}Y\rangle. \tag{3.23}$$

Por outro lado, usando o tensor curvatura de $\mathbb{C}P^n$ visto em (3.5) temos para todo $X, Y \in U^{\perp}$ que

$$\overline{R}(X,Y)U = 2\langle\phi X, Y\rangle\xi,$$

$$\overline{R}(dgX, dgY)dgU = 2\langle\hat{\phi}X, Y\rangle\tilde{\xi}$$

Assim, fazendo $\langle\overline{R}(X,Y)U, \xi\rangle = 2\langle\phi X, Y\rangle\langle\xi, \xi\rangle$ e comparando com (3.22) obtemos

$$\langle\phi X, Y\rangle = \langle\phi AX, AY\rangle \tag{3.24}$$

Procedendo de modo análogo com a outra equação, obtemos

$$\langle\hat{\phi}X, Y\rangle = \langle\hat{\phi}\hat{A}X, \hat{A}Y\rangle. \tag{3.25}$$

Em outras palavras, usando (3.12) juntamente com (3.24) e (3.25), obtemos para todo $X \in U^{\perp}$

$$A\phi A = \phi \tag{3.26}$$

$$\hat{A}\phi A = \hat{\phi}. \tag{3.27}$$

Agora, tomando $Z = Y$ em (3.13) temos,

$$\begin{aligned} 3\langle X, \phi Y\rangle \phi Y - \langle AX, Y\rangle AY + \langle AY, Y\rangle AX &= \\ 3\langle X, \hat{\phi} Y\rangle \hat{\phi} Y - \langle \hat{A}X, Y\rangle \hat{A}Y + \langle \hat{A}Y, Y\rangle \hat{A}X & \end{aligned} \tag{3.28}$$

Pondo $Y = -\phi AX$, pela propriedade ($P1$) e por (3.26) obtemos

$$\phi Y = -\phi^2 AX = AX \quad \text{e} \quad AY = -A\phi AX = -\phi X.$$

Por (3.12) também $Y = -\hat{\phi}\hat{A}X$, logo pela propriedade ($P1$) e por (3.27) também obtemos

$$\hat{\phi} Y = \hat{A}X \quad \text{e} \quad \hat{A}Y = -\hat{\phi} X.$$

Assim, substituindo esses valores em (3.28), para todo $X \in U^{\perp}$ obtemos

$$\langle X, AX\rangle AX = \langle X, \hat{A}X\rangle \hat{A}X.$$

Por outro lado, de $-\phi^2 AX = AX$ temos $\langle -\phi^2 AX, AX\rangle = \langle AX, AX\rangle$ que por sua vez é $\langle \phi AX, \phi AX\rangle = \langle AX, AX\rangle$, logo

$$|AX| = |\phi AX|.$$

De modo análogo, também

$$|\hat{A}X| = |\hat{\phi}\hat{A}X|.$$

Portanto da igauldade (3.12) temos

$$|AX| = |\phi AX| = |\hat{\phi}\hat{A}X| = |\hat{A}X|$$

e consequentemente $AX = \pm\hat{A}X$ em $U^{\perp}$. Escolhendo um campo de vetores normais apropriado, se necessário, podemos assumir $A = \hat{A}$. Então, de (3.26) e (3.27) segue que $\phi = \hat{\phi}$.

Portanto, a prova do teorema segue do **Teorema 3.1.2.**

□

Referências Bibliográficas

[1] Beez, R. *Zur Theorie der Krümmungmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordunung*, Z. Math. Physik 21 (1876), 373-401.

[2] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - terceira edição.(Projeto Euclides)

[3] Cartan, E. *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions*, Bull. Soc. Math. France 44 (1916), 65-99.

[4] Dajczer, M. et al. *Submanifolds and isometric immersions*, Math. Lecture Series 13, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1990.

[5] Killing, W. *Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytische Behandlung*, Teubner, Leibzig, 1885.

[6] Kobayashi, S. e Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*, Wiley Classics Library Edition Published, 1996, v. 2.

[7] Martins, J.K., *Hopf Hypersurfaces*, Tese de Doutorado, University of Durham, England, 1999.

[8] Martins, J.K., *Rigidity of hypersurfaces in $\mathbb{C}P^n$*. Preprint, 2009.

[9] Spivak M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish. 1975.

[10] Takagi R., *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka. J. Math. 10 (1973), 495-506.

[11] Takagi R. et al. *Rigidity theorems for real hypersurfaces in a complex projetive space*, Hokkaido Math, J. 25(1996), 433-451.