

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*SUPERFÍCIES ASSOCIADAS PELA TRANSFORMAÇÃO DE
RIBAUCCOUR*

Walter Lucas Pinto Júnior

MANAUS

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Walter Lucas Pinto Júnior

*SUPERFÍCIES ASSOCIADAS PELA TRANSFORMAÇÃO DE
RIBAUCCOUR*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Cícero Mota

MANAUS
2009

WALTER LUCAS PINTO JUNIOR

SUPERFÍCIES ASSOCIADAS PELA TRANSFORMAÇÃO DE
RIBAUCCOUR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 27 de fevereiro de 2009.

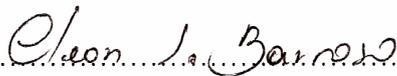
BANCA EXAMINADORA



.....
Prof. Dr. Cícero Mota, Presidente
Universidade Federal do Amazonas.



.....
Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy,
Universidade Federal do Amazonas.



.....
Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso,
Universidade Federal do Ceará.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade a mim concedida e por seu sustento a cada dia.

A minha melhor metade: Tagna de Souza pelo seu inestimável amor e compreensão.

A minha filhinha: Hillary de Souza por ser motivo de mais alegria em minha vida.

A Walter Lucas e Rita Inês pela educação e criação que me deram. Só a eternidade pode testemunhar o quanto vocês são importantes para mim.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Cícero Mota, por sua inarrestável competência e pelo seu tempo dedicado a mim sempre que necessário.

Agradeço a Prof^a. Dr^a. Keti Tenenblat, por sua gentileza e disponibilidade com que me ajudou.

Agradeço ao Prof. Dr. Ivan Tribuzi, por sua paciência e incentivo que nunca me faltaram.

Agradeço a todos os meus professores do Departamento de Matemática da UFAM e aos amigos que me ajudaram.

A Fucapi pela paciência, compreensão e apoio.

Agradeço ao CNPq que possibilitou o uso do programa Maple obtido pelo Projeto Casadinho.

Finalmente agradeço a banca examinadora pelas sugestões dadas, que contribuíram para a melhoria desta dissertação.

RESUMO

SUPERFÍCIES ASSOCIADAS PELA TRANSFORMAÇÃO DE RIBAUCCOUR

Orientador: Cícero Mota
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Neste trabalho faremos um estudo acerca de Transformações de Ribaucour e usaremos a definição proposta por K.Tenenblat em [1]. Estudaremos acerca dos aspectos geométricos de tais transformações e obteremos como aplicações algumas superfícies de Dupin no \mathbb{R}^3 que estão associadas por uma tal Transformação. Apresentaremos também a visualização dessas superfícies usando recursos de computação gráfica.

Palavra chave: Superfícies de Dupin, Formas Diferenciais, Transformações de Ribaucour.

ABSTRACT

SURFACES ASSOCIATED THE RIBAUCCOUR TRANSFORM

In this paper we will study about Ribaucour Transformations and we will use the definition proposed by K.Tenenblat in [1]. We will study concerning the geometric aspects of such transformations and we will obtain as applications some Dupin surfaces in the \mathbb{R}^3 that are associated by a such Transformation. We will also present the visualization of those surfaces using resources of graphic computation.

Key Word: Dupin Surfaces, Differential Forms, Ribaucour Transform.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Introdução	1
1.2	Superfície Regular do \mathbb{R}^3	1
1.3	Primeira e Segunda Formas Quadráticas	4
1.4	O Método do Referencial Móvel em \mathbb{R}^3	8
2	Transformações de Ribaucour	20
2.1	Transformação de Ribaucour	20
2.2	Teorema 1	22
2.3	Teorema 2	32
2.4	Teorema 3	41
2.5	Teorema 4	45
2.6	Teorema 5	50
2.7	Superfície de Dupin	52
3	Aplicações da Transformação de Ribaucour	53
3.1	Aplicação ao Plano	53
3.2	Aplicação ao Toro	60
3.3	Aplicação a um Cilindro	64
3.4	Aplicação a uma Esfera S^2	68
4	Conclusão	72
A	Scripts do Maple	73
A.1	<i>Script do Plano</i>	73
A.2	<i>Script do Toro</i>	75
A.3	<i>Script do Cilindro</i>	77
A.4	<i>Script da Esfera</i>	78

INTRODUÇÃO

Neste trabalho vamos considerar a transformação de Ribaucour entre duas superfícies. Obteremos como aplicações alguns exemplos de superfícies de Dupin no \mathbb{R}^3 que estão associadas a uma tal transformação. Usaremos técnicas de computação gráfica para visualizar essas superfícies associadas. Para esta visualização usaremos o Maple que nos foi disponibilizado pelo Programa Casadinho do CNPq e o JavaView.

No capítulo 1 são apresentadas algumas definições e resultados clássicos da geometria diferencial como o de superfícies regulares, formas quadráticas, aplicação normal de Gauss, formas diferenciais e etc. No capítulo 2 nós falaremos sobre a transformação de Ribaucour para uma definição local e apresentaremos alguns teoremas e, veremos uma caracterização de uma transformação de Ribaucour para superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 em termos de equações diferenciais. Assim, obteremos uma condição necessária e suficiente para que uma para tal uma transformação transforme uma superfície de Dupin em outra tal superfície. No capítulo 3 nós aplicaremos a transformação de Ribaucour para algumas superfícies do \mathbb{R}^3 como o plano, o toro, o cilindro e a esfera e em seguida exibiremos mediante computação gráfica as devidas superfícies que lhes estão associadas. E por fim no apêndice disponibilizaremos os scripts usados do Maple para gerar essa superfícies associadas a transformação de Ribaucour.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo apresentaremos algumas definições e resultados clássicos da Geometria Diferencial como de Superfícies Regulares, Formas Diferenciais, o Triedro Móvel de Cartan. Todos serão restritos ao \mathbb{R}^3 . Algumas demonstrações serão incluídas mas, outras serão omitidas por questões de simplicidade. O material aqui apresentado se encontra em [5], [6] e [7].

1.2 Superfície Regular do \mathbb{R}^3

Definição 1.2.1. Dizemos que um subconjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular do \mathbb{R}^3 se, para todo $p \in S$, existem uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ tais que:

- i) X é um homeomorfismo diferenciável;
- ii) a diferencial $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é biunívoca para todo $q \in U$.

Na figura 1.1 temos uma situação em que $X = X(u, v)$.

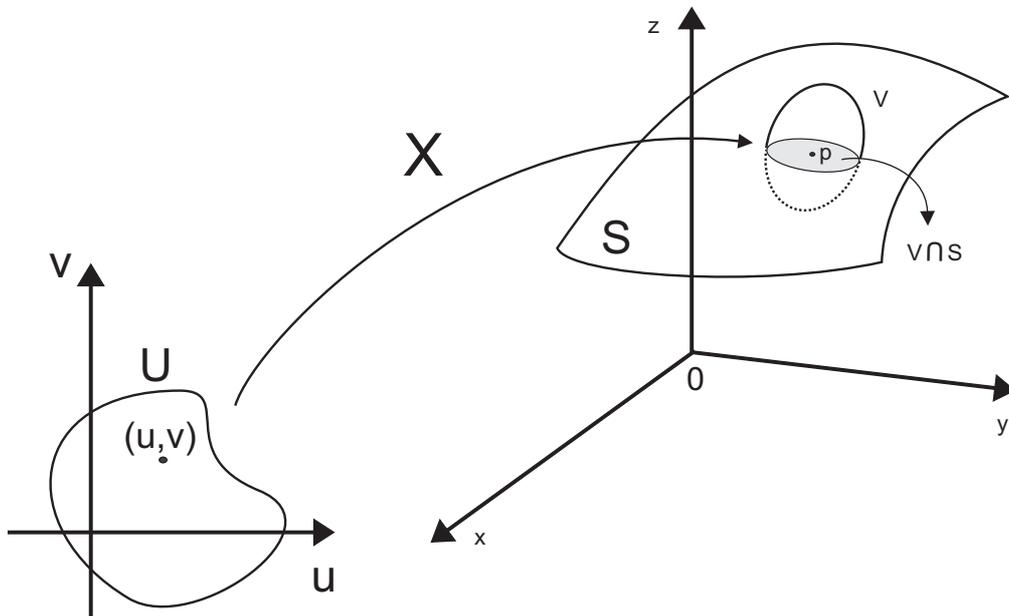


Figura 1.1: Superfície Regular

Definição 1.2.2. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares. Uma aplicação diferenciável $f : S_1 \rightarrow S_2$ é dita um difeomorfismo de S_1 em S_2 se f admite inversa $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ que seja diferenciável. Neste caso dizemos que S_1 e S_2 são duas superfícies difeomorfas.

Assim sendo, se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ com $\alpha(0) = p$ for uma curva parametrizada diferenciável, chamamos de vetor tangente a S_1 em $p \in S_1$, o vetor $\alpha'(0) = p$.

Proposição 1.2.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ uma parametrização de uma superfície regular S_1 e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão dois $dX_q(T_q(U)) \subset T_{X(q)}(\mathbb{R}^3)$ constitui um conjunto de vetores tangentes a S_1 em $X(q)$.

Esse subespaço é chamado de plano tangente a S_1 em p e vamos representá-lo por $T_p S_1$. Da proposição acima podemos concluir que, o plano tangente independe da parametrização. Com efeito, a escolha da parametrização X determina uma base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(p), \frac{\partial X}{\partial v}(p) \right\}$ de $T_p S_1$, chamada também de base associada a parametrização X . A partir de agora, usaremos a seguinte notação:

$$\frac{\partial X}{\partial u}(p) \equiv X_u,$$

e

$$\frac{\partial X}{\partial v}(p) \equiv X_v.$$

Definição 1.2.3. Seja $p \in S_1$. Um vetor unitário normal ao plano tangente $T_p S_1$ recebe o nome de vetor normal em p . Para cada ponto de S_1 existem sempre dois vetores normais e opostos entre si. Assim sendo, sempre que $X(u, v)$ for um sistema de coordenadas locais em p , o vetor normal em p é dado por:

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Definição 1.2.4. Uma superfície regular $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ é dita orientável, se e somente se existe um campo diferenciável $N : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais definidos em S_1 .

1.3 Primeira e Segunda Formas Quadráticas

O produto interno usual do $R^3 \supset S_1$, induz, em cada plano tangente $T_p(S_1)$ de uma superfície regular S_1 , um produto escalar, que o representaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ de uma tal maneira que se tomarmos dois vetores quaisquer v_1 e $v_2 \in T_p(S_1) \subset R^3$, o $\langle v_1, v_2 \rangle_p$ é igual do produto interno usual definido em R^3 . A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica em $T_p(S_1)$, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p(S_1) \rightarrow R^+$, definida por:

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = |v|^2 \geq 0. \quad (1.1)$$

Definição 1.3.1. A forma quadrática I_p em $T_p(S_1)$, definida por (1.1), é chamada a *Primeira Forma Fundamental* da superfície regular $S_1 \subset R^3$ no ponto $p \in S_1$.

O que a primeira forma fundamental nos fornece é a maneira de como a superfície S_1 herda o produto interno do R^3 . Essa métrica herdada pela superfície S_1 não só enriquece toda a teoria das superfícies mas, também nos permite fazer medidas de entes matemáticos sobre a superfície tais como, o comprimento de curvas, o ângulo entre dois vetores tangentes e a área de regiões limitadas na superfície S_1 . No entanto, não trataremos de tais entes nesse trabalho. Todavia, atentamos para o fato de que tais medidas são sempre possíveis de serem calculadas, sem nos preocuparmos com o espaço onde a superfície habita.

Agora, consideremos $v \in T_p(S_1)$ que também é o vetor tangente a uma curva parametrizada regular dada por $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $p = \gamma(0) = X(u_o, v_o)$.

Tendo em vista que $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $T_p(S_1)$, vamos expressar a primeira forma quadrática nesta base associada a um sistema de coordenadas $X(u, v)$ em p . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} I_p(\gamma'(0)) &= \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle_p. \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p. \\ &= E(u')^2 + 2F(u')^2(v')^2 + G(v')^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde os valores:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

recebem o nome de *Coefficientes da Primeira Forma Fundamental* na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p(S_1)$.

Definição 1.3.2. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares. Chama-se uma isometria de S_1 em S_2 , um difeomorfismo $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ tal que, $\forall p \in S_1$ e todo par v_1 e $v_2 \in T_p(S_1)$ tem-se que: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle$. Nesse caso, S_1 e S_2 são ditas isométricas.

Definição 1.3.3. Seja S_1 uma superfície regular, orientável e no qual se tem fixado um campo N de vetores normais. A aplicação $N : S_1 \rightarrow S^2$ é a aplicação que define a orientação de S_1 e é chamada **aplicação normal de Gauss**.

Em coordenadas locais $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$, a aplicação de Gauss é dada por $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$. Portanto, ela é uma aplicação diferenciável. Além disso, se tomarmos $T_p(S_1)$ e $T_{N(p)}(S^2)$ sendo planos paralelos do \mathbb{R}^3 , podemos identificar ambos por uma translação e considerar por fim, que $dN_p : T_p(S_1) \rightarrow T_p(S_1)$.

Considerando $\beta = \{u_1, u_2\}$ como sendo uma base de $T_p(S_1)$ então podemos concluir que $\langle dN_p(u_1), u_2 \rangle = \langle u_1, dN_p(u_2) \rangle$ visto que dN_p é linear. Ou seja, $dN_p : T_p(S_1) \rightarrow T_p(S)$ é uma aplicação linear auto-adjunta o que nos permite associar a ela uma forma quadrática Q em $T_p(S_1)$, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, $v \in T_p(S_1)$. Isso nos leva a seguinte definição:

Definição 1.3.4. A forma quadrática II_p , definida em $T_p(S_1)$ que é dada por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de S_1 em p .

Como dN é uma aplicação linear auto-adjunta, ela é diagonalizável, isto é, existe uma base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2\}$ e números reais λ^1 e λ^2 tais que

$dN_p(e_1) = \lambda^1 \cdot e_1$ e $dN_p(e_2) = \lambda^2 \cdot e_2$. Os números λ^1 e λ^2 são chamados de curvaturas principais e os vetores e_1 e e_2 são chamados de direções principais de S_1 em p .

Definição 1.3.5. Se uma curva regular e conexa γ em S_1 é tal que para todo $p \in \gamma$ a tangente a γ é uma direção principal de S_1 em p , então γ é dita uma linha de curvatura de S_1 .

Definição 1.3.6. Definimos a curvatura Gaussiana em um ponto $p \in S_1$ como o número $K = \det(dN) = \lambda^1 \lambda^2$.

1.4 O Método do Referencial Móvel em \mathbb{R}^3

Nesta seção vamos desenvolver a teoria das superfícies utilizando o método do referencial móvel devido a E. Cartan. Este método consiste em escolher adequadamente, para cada ponto da superfície, uma base ortonormal de vetores de \mathbb{R}^3 de tal forma, que dois deles sejam tangentes à superfície.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u, v)$ pontos de U , chama-se triedro móvel associado à superfície X , um terno de funções diferenciáveis e_1, e_2, e_3 de U em \mathbb{R}^3 tal que, para todo $q \in U$, o conjunto de vetores $e_1(q), e_2(q), e_3(q)$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 e $e_1(q), e_2(q)$ são vetores tangentes à superfície X em q .

Segue-se da definição que os vetores e_1, e_2 formam uma base do plano tangente T_qX e $e_3(q)$ é um vetor normal à superfície X .

Podemos concluir que o triedro móvel sempre existe para qualquer superfície parametrizada regular. Podemos sempre considerar triedros do tipo:

$$e_1 \propto X_u \quad e_2 \propto X_v - \langle X_v, e_1 \rangle e_1 \quad e_3 = N = e_1 \wedge e_2.$$

Se considerarmos e_1, e_2 e N sendo um triedro móvel associado a uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para cada $q \in U$ e cada $V \in \mathbb{R}^2$ temos que $dX_q(V) \in T_qX$. Como os vetores e_1, e_2 formam uma base e $dX_q(V) \in T_qX$, concluí-se que $dX_q(V)$ pode ser escrito como combinação linear de e_1, e_2 , ou seja:

$$dX_q(V) = (\omega_1)_q(V)e_1(q) + (\omega_2)_q(V)e_2(q). \quad (1.3)$$

que, pode também ser expresso da seguinte maneira $dX = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$.

Aplicando o produto interno com e_1 e e_2 na última equação acima e tendo em vista que $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ concluímos que:

$$(\omega_1)_q(V) = \langle dX_q(V), e_1(q) \rangle. \quad (1.4)$$

$$(\omega_2)_q(V) = \langle dX_q(V), e_2(q) \rangle. \quad (1.5)$$

ou $\omega_i = \langle dX, e_i \rangle$

Analogamente consideremos as funções diferenciais $e_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $i = 1, 2, 3$, assim, temos que para cada $q \in U$, a diferencial de e_i em q é uma aplicação linear $(de_i)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como os vetores e_1, e_2 e N formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , para todo $V \in \mathbb{R}^2$, $(de_i)_q(V)$ é combinação linear desta base, ou seja,

$$(de_i)_q(V) = (\omega_{i1})_q(V)e_1(q) + (\omega_{i2})_q(V)e_2(q) + (\omega_{i3})_q(V)N(q). \quad (1.6)$$

ou $(de_i) = (\omega_{i1})e_1 + (\omega_{i2})e_2 + (\omega_{i3})N$.

Fazendo $1 \leq i \leq 3$ obtemos as seguintes equações:

$$de_1 = \omega_{11}e_1 + \omega_{12}e_2 + \omega_{13}N, \quad (1.7)$$

$$de_2 = \omega_{21}e_1 + \omega_{22}e_2 + \omega_{23}N, \quad (1.8)$$

$$dN = \omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2 + \omega_{33}N. \quad (1.9)$$

Aplicando o produto interno com e_1 , e_2 , e N nas últimas três equações acima e tendo em vista que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ concluímos que:

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \langle de_1, e_1 \rangle, & \omega_{12} &= \langle de_1, e_2 \rangle, & \omega_{13} &= \langle de_1, N \rangle, \\ \omega_{21} &= \langle de_2, e_1 \rangle, & \omega_{22} &= \langle de_2, e_2 \rangle, & \omega_{23} &= \langle de_2, N \rangle, \\ \omega_{31} &= \langle dN, e_1 \rangle, & \omega_{32} &= \langle dN, e_2 \rangle, & \omega_{33} &= \langle dN, N \rangle. \end{aligned}$$

ou

$$\omega_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (1.10)$$

Para cada q que tomamos, $(\omega_1)_q$, $(\omega_2)_q$, e $(\omega_{ij})_q$, são funções lineares de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} o que permite concluir que ω_1 , ω_2 , e ω_{ij} , são 1-formas diferenciais em U .

Assim sendo, considerando as 1-formas ω_1 , ω_2 , e ω_{ij} de U , dX e de_i , as expressões acima podem se resumir da seguinte maneira:

$$dX = \omega_1e_1 + \omega_2e_2, \quad (1.11)$$

$$de_i = \omega_{i1}e_1 + \omega_{i2}e_2 + \omega_{i3}N. \quad (1.12)$$

com $1 \leq i \leq 3$ onde,

$$\omega_1 = \langle dX, e_1 \rangle, \quad (1.13)$$

$$\omega_2 = \langle dX, e_2 \rangle, \quad (1.14)$$

$$\omega_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle. \quad (1.15)$$

com $1 \leq i, j \leq 3$ são 1-formas diferenciais em U .

Considerando $X = X(u, v)$, temos ainda que $dX = X_u du + X_v dv$ e $de_i = (e_i)_u du + (e_i)_v dv$ e, fazendo o produto interno de dX com e_1 e e_2 e analogamente de de_i com e_j e considerando as equações (1.13), (1.14), e (1.15) obtemos,

$$\omega_1 = \langle X_u, e_1 \rangle du + \langle X_v, e_1 \rangle dv, \quad (1.16)$$

$$\omega_2 = \langle X_u, e_2 \rangle du + \langle X_v, e_2 \rangle dv, \quad (1.17)$$

$$\omega_{ij} = \langle (e_i)_u, e_j \rangle du + \langle (e_i)_v, e_j \rangle dv. \quad (1.18)$$

Por outro lado podemos verificar que qualquer 1-forma diferencial em U é uma combinação linear de ω_1, ω_2 . Considerando que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ e $\{e_1(q), e_2(q)\}$ ambas são bases de $T_q X$ podemos escrever,

$$X_u = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \quad (1.19)$$

$$X_v = a_{21}e_1 + a_{22}e_2. \quad (1.20)$$

Fazendo o produto interno com e_1 , e_2 nas equações (1.19) e (1.20) obtemos $a_{11} = \langle X_u, e_1 \rangle$, $a_{12} = \langle X_u, e_2 \rangle$, $a_{21} = \langle X_v, e_1 \rangle$, e $a_{22} = \langle X_v, e_2 \rangle$ que são funções diferenciáveis em U tais que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (q) \neq 0.$$

Decorre das equações (1.16) e (1.17) que:

$$\omega_1 = a_{11}du + a_{21}dv, \quad (1.21)$$

$$\omega_2 = a_{12}du + a_{22}dv. \quad (1.22)$$

Portanto,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (a_{11}du + a_{21}dv) \wedge (a_{12}du + a_{22}dv) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})du \wedge dv,$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} du \wedge dv.$$

Assim concluímos que ω_1 e ω_2 são 1-formas lineares independentes e qualquer 1-forma diferencial em U é uma combinação linear de ω_1 e ω_2 em que os coeficientes são funções diferenciáveis. Além disso, observamos que se V_1 e $V_2 \in \mathbb{R}^2$ são tais que,

$$dX_q(V_1) = e_1(q), \quad (1.23)$$

$$dX_q(V_2) = e_2(q). \quad (1.24)$$

então,

$$(\omega_i)_q(V_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Assim, decorre das equações (1.19) e (1.20) que

$$e_1 = b_{11}X_u + b_{12}X_v, \quad (1.25)$$

$$e_2 = b_{21}X_u + b_{22}X_v. \quad (1.26)$$

onde a matriz (b_{ij}) é a matriz inversa da matriz (a_{ij}) . Logo,

$$V_1 = b_{11}\frac{\partial}{\partial u} + b_{12}\frac{\partial}{\partial v}, \quad (1.27)$$

$$V_2 = b_{21}\frac{\partial}{\partial u} + b_{22}\frac{\partial}{\partial v}. \quad (1.28)$$

onde $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 .

Dizemos que as 1-formas ω_1, ω_2 formam o **coreferencial** do triedro móvel associado à superfície X e as formas ω_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, são denominadas **formas de conexão** do triedro.

O fato mais importante no método do referencial móvel é que as formas $\omega_1, \omega_2, \omega_{ij}$ satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan que passaremos a enunciar:

Teorema 1.4.1. (*Equações de estrutura do \mathbb{R}^3*) - Seja e_1, e_2, N um referencial ortonormal móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ associado a uma superfície $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sejam ω_1, ω_2 o coreferencial associado a $\{e_i\}$ e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (1.29)$$

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \quad (1.30)$$

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \quad (1.31)$$

$$0 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}, \quad (1.32)$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \quad (1.33)$$

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad (1.34)$$

$$d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \quad (1.35)$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [5] e [7].

Proposição 1.4.1. A forma diferencial ω_{12} é determinada pela equações:

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \quad (1.36)$$

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}. \quad (1.37)$$

Seja $q \in U$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Na seção 1.3 vimos que a primeira forma fundamental I_q é um aplicação definida em $T_q X$ tomando valores em \mathbb{R} dada por $I_q(w) = \langle w, w \rangle$ com $w \in T_q X$. Assim $w = dX_q(V)$ com $V \in \mathbb{R}^2$. Nestas condições temos que $I_q(dX_q(V)) = \langle dX_q(V), dX_q(V) \rangle$, ou seja, a primeira forma fundamental pode ser considerada como uma aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , representada por I_q , que pra cada $V \in \mathbb{R}^2$ associa

$$I_q(V) = \langle dX_q(V), dX_q(V) \rangle. \quad (1.38)$$

Sejam $\{e_1, e_2, N\}$ um triedro móvel associado a superfície X e $\{\omega_1, \omega_2\}$ e $\{\omega_{ij}\}$, com $1 \leq i, j \leq 3$ respectivamente, o coreferencial e as formas de conexão do triedro. Como já vimos que $dX = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$, segue-se de 1.58 que:

$$I(dX) = \langle dX, dX \rangle = \langle \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \rangle,$$

ou

$$I(dX) = \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (1.39)$$

Da mesma forma, como N ortogonal a superfície podemos obter a segunda forma quadrática sendo dada por:

$$II(dX) = -\langle dX, dN \rangle = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}.$$

Consideremos uma superfície S do \mathbb{R}^3 . Sejam e_1, e_2, e_3 e N , o campo de vetores tangentes ortonormais a S e N o campo de vetores normais unitários localmente definidos. Sejam ω_1, ω_2 o co-referencial associado ao campo e_1, e_2, N e $w_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$ as formas de conexão determinadas por:

$$dw_i = \sum_{j \neq i}^3 w_{ij} \wedge w_j, \quad w_{ij} + w_{ji} = 0.$$

Como

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0,$$

segue-se que

$$w_{ij} + w_{ji} = 0.$$

pois, de (1.10) temos que, $\langle de_i, e_j \rangle = \omega_{ij}$.

Por outro lado, sabemos de (1.12) que:

$$de_i = \omega_{i1}e_1 + \omega_{i2}e_2 + \omega_{i3}N.$$

Portanto, fazendo o produto interno com N obtemos:

$$\omega_{i3} = \langle de_i, N \rangle, \quad (1.40)$$

que satisfaz $\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$.

A conexão normal dada por $w_{i3} = \langle de_i, N \rangle$ satisfaz $\sum_i w_i \wedge w_{i3} = 0$. Considerando as equações de estrutura do teorema 1.4.1, temos que $w_{13} = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2$ onde $b_{12} = b_{21}$. Assim, a equação de Gauss é dada por:

$$dw_{ij} = \sum_{k=1}^3 w_{ik} \wedge w_{kj} + w_{i3} \wedge w_{3j}, \quad (1.41)$$

e as equações de Codazzi são:

$$dw_{i3} = \sum_j w_{ij} \wedge w_{j3}.$$

Sempre que a superfície for parametrizada pelas linhas de curvatura ortogonais $X(u_1, u_2)$, a primeira forma fundamental é dada por $I = \omega_1^2 + \omega_2^2$, conforme já vimos em 1.40, visto que $I(v) = \langle v, v \rangle$, $v \in T_pS$ onde $dX = \sum_i w_i e_i$ em que $w_i = a_i du_i$ com $1 \leq i \leq 2$ e a_i são funções diferenciáveis tais que $|a_i| = \left| \frac{\partial X}{\partial u_i} \right| \equiv |X_{u_i}|$. Além disso $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. As direções principais são os campos de vetores $e_i = X_{u_i}/a_i$ onde, X_{u_i} denota a derivada parcial de X

com relação a u_i .

Segue que,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{a_i a_j} \left(-\frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j \right) \text{ onde } 1 \leq i, j \leq 3.$$

De fato, temos que $\omega_i = a_i du_i$ e logo

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial u_j} du_j \wedge du_i \\ &= -\sum_{j=1}^3 \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} a_i du_i \wedge a_j du_j \\ &= -\sum_{j=1}^3 \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

Segue-se então que:

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j = \frac{1}{a_i a_j} \left(-\frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j \right),$$

$$w_{ij} = \frac{1}{a_i a_j} (-a_{i,j} w_i + a_{j,i} w_j). \quad (1.42)$$

Desde que as curvas coordenadas sejam linhas de curvaturas, temos que:

$$dN(e_i) = \lambda^i e_i, \quad w_{i3} = -\lambda^i w_i. \quad (1.43)$$

Então as equações de Codazzi reduzem-se para

$$d\lambda^i(e_j) = (\lambda^i - \lambda^j)w_{ij}(e_i), \quad i \neq j. \quad (1.44)$$

Capítulo 2

Transformações de Ribaucour

Neste capítulo iremos definir transformação de Ribaucour. Iniciaremos este capítulo demonstrando uma caracterização local das Transformações de Ribaucour para superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 e em seguida usaremos Transformações de Ribaucour para mostrar como obtermos superfícies de Dupin. Este já é um resultado clássico [2] sempre que as superfícies são parametrizadas pelas linhas de curvaturas. Por fim, provaremos uma condição necessária e suficiente para que uma dada Transformação de Ribaucour esteja associada a uma superfície de Dupin.

2.1 Transformação de Ribaucour

Definição 2.1.1. Sejam S e \tilde{S} duas superfícies orientadas do \mathbb{R}^3 com N e \tilde{N} sendo as respectivas aplicações normais de Gauss. Dizemos que S e \tilde{S} são associadas pela transformação de Ribaucour (*vide figura 2.1*), se e somente se, existir uma função diferenciável h definida em S e um difeomorfismo

$\Psi : S \rightarrow \tilde{S}$ tais que:

- i) $p + h(p).N(p) = \Psi(p) + h(p).\tilde{N}(\Psi(p)), \forall p \in S.$
- ii) o subconjunto $p + h(p).N(p), \forall p \in S$ é uma superfície bidimensional.
- iii) ψ preserva linhas de curvaturas.

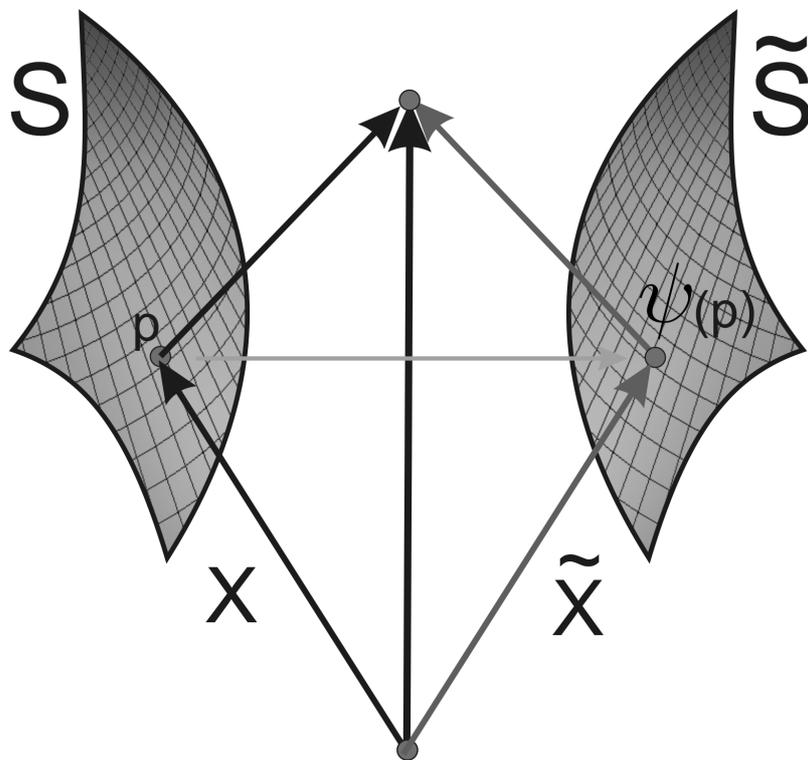


Figura 2.1: Transformação de Ribaucour

Definição 2.1.2. Dizemos que S e \tilde{S} são localmente associadas por uma transformação de Ribaucour se para todo $p \in M$, existir uma vizinhança coordenada de $p \in M$ que está associada por uma transformação de Ribaucour a um subconjunto aberto de \tilde{S} . Semelhantemente, podemos considerar a noção de superfícies localmente parametrizadas e associadas por uma transformação de Ribaucour.

2.2 Teorema 1

Teorema 2.2.1. *Seja S uma superfície orientada de \mathbb{R}^3 . Assumamos que e_1, e_2 sejam as direções principais ortonormais, λ^1 e λ^2 as correspondentes curvaturas principais e N é o campo de vetores normais unitário em S . Uma superfície \tilde{S} é localmente associada a S pela transformação de Ribaucour, se e somente se, $\forall p \in S$, existir uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma vizinhança coordenada de p e uma função diferenciável $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N}). \quad (2.1)$$

é uma parametrização de \tilde{S} e o campo de vetores normais unitários \tilde{N} de \tilde{S} é dado por

$$\tilde{N} = \frac{1}{\Delta + 1} (2.Z^1 e_1 + 2.Z^2 e_2 + (\Delta - 1)N). \quad (2.2)$$

onde

$$Z^1 = \frac{dh(e_1)}{1+h\lambda^1}, \quad Z^2 = \frac{dh(e_2)}{1+h\lambda^2}, \quad e \quad \Delta = (Z^1)^2 + (Z^2)^2. \quad (2.3)$$

e h satisfaz as equações diferenciais

$$dZ^2(e_1) + Z^1 w_{12}(e_1) - Z^1 Z^2 \lambda^1 = 0. \quad (2.4)$$

$$dZ^1(e_2) + Z^2 w_{21}(e_2) - Z^2 Z^1 \lambda^2 = 0. \quad (2.5)$$

Para demonstrarmos o teorema, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 2.2.1. Sejam $\beta = \{e_1, e_2, N\}$ e \tilde{N} como no teorema 2.2.1. Escrevamos:

$$\tilde{N} = b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 N, \quad (2.6)$$

$$d\tilde{N}(e_1) = L_1^1 e_1 + L_1^2 e_2 + L_1^3 N, \quad (2.7)$$

$$d\tilde{N}(e_2) = L_2^1 e_1 + L_2^2 e_2 + L_2^3 N. \quad (2.8)$$

Então:

$$1 = (b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2, \quad (2.9)$$

$$L_i^k = db^k(e_i) + \sum_{k=1}^2 b^j \omega_{jk} e_i + b^3 \lambda^i \delta_{ik}, \quad (2.10)$$

$$L_i^3 = db^3(e_i) - b^i \lambda^i. \quad (2.11)$$

com $1 \leq i, k \leq 2$.

Demonstração: 1. Com efeito, temos que $|\tilde{N}| = 1$ logo,

$$|\tilde{N}|^2 = (b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2 = 1.$$

Para obtermos cada L_i^k das equações (2.12) e (2.13) vamos proceder da seguinte maneira: Derivemos a equação (2.6) e usemos o fato de que $\omega_{i3} = \langle dN e_i, N \rangle$, $dN(e_i) = \lambda^i e_i$ e que $de_i = \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} N$, $1 \leq i \leq 2$. Fazendo as devidas simplificações, temos que:

$$\begin{aligned} d\tilde{N}(e_1) &= [db^1(e_1) + b^1 \omega_{11}(e_1) + b^2 \omega_{21}(e_1) + b^3 \lambda^1] e_1 + \\ &+ [db^2(e_1) + b^1 \omega_{12}(e_1) + b^2 \omega_{22}(e_2)] e_2 + \\ &+ [db^3(e_1) - b^1 \lambda^1] N. \end{aligned} \quad (2.12)$$

e,

$$\begin{aligned}
d\tilde{N}(e_2) &= [db^1(e_2) + b^1\omega_{11}(e_2) + b^2\omega_{21}(e_2)] e_1 + \\
&+ [db^2(e_2) + b^1\omega_{12}(e_2) + b^2\omega_{22}(e_2) + b^3\lambda^2] e_2 + \\
&+ [db^3(e_2) - b^2\lambda^2] N.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

comparando $d\tilde{N}(e_1)$ e $d\tilde{N}(e_2)$ das últimas expressões acima com os de 2.7 e 2.8 concluímos que os coeficientes são dados por:

$$L_1^1 = db^1(e_1) + b^1\omega_{11}(e_1) + b^2\omega_{21}(e_1) + b^3\lambda^1, \tag{2.14}$$

$$L_1^2 = db^2(e_1) + b^1\omega_{12}(e_1) + b^2\omega_{22}(e_1), \tag{2.15}$$

$$L_1^3 = db^3(e_1) - b^1\lambda^1, \tag{2.16}$$

$$L_2^1 = db^1(e_2) + b^1\omega_{11}(e_2) + b^2\omega_{21}(e_2), \tag{2.17}$$

$$L_2^2 = db^2(e_2) + b^1\omega_{12}(e_2) + b^2\omega_{22}(e_2) + b^3\lambda^2, \tag{2.18}$$

$$L_2^3 = db^3(e_2) - b^2\lambda^2. \tag{2.19}$$

Assim, o lema está provado.

Lema 2.2.2. Sejam X , \tilde{X} , h , λ^1 e λ^2 como no teorema 2.2.1 acima. Então, $1 + h\lambda^i \neq 0 \forall i$.

Demonstração: 2. Pela definição (2.1), existe uma parametrização local X de S , \tilde{X} de \tilde{S} e uma função h definida em S tal que

$$\tilde{X} + h\tilde{N} = X + hN,$$

onde \tilde{N} é um campo de vetores normais unitários de \tilde{S} , que pode ser considerado como definido em 2.6.

Então,

$$\langle d\tilde{X}(e_1), \tilde{N} \rangle = 0, \quad (2.20)$$

e

$$\langle d\tilde{X}(e_2), \tilde{N} \rangle = 0. \quad (2.21)$$

Como $\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N})$ temos que:

$$d\tilde{X}(e_i) = dX(e_i) + dh(e_i)(N - \tilde{N}) + h(dN(e_i) - d\tilde{N}(e_i)). \quad (2.22)$$

Usando o fato de que,

$$dX(e_1) = w_1(e_1)e_1 + w_2(e_1)e_2, \quad (2.23)$$

$$dX(e_2) = w_1(e_2)e_1 + w_2(e_2)e_2, \quad (2.24)$$

$$dN(e_1) = \lambda^1 e_1, \quad (2.25)$$

$$dN(e_2) = \lambda^2 e_2. \quad (2.26)$$

concluimos que,

$$d\tilde{X}(e_1) = (1 + h\lambda^1)e_1 + dh(e_1)(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N}(e_1), \quad (2.27)$$

$$d\tilde{X}(e_2) = (1 + h\lambda^2)e_2 + dh(e_2)(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N}(e_2). \quad (2.28)$$

visto que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}, \forall 1 \leq i \leq 2$.

Conseqüentemente, desenvolvendo as equações (2.20) e (2.21) obtemos que:

$$(1 + h\lambda^1)b^1 + dh(e_1)(b^3 - 1) = 0, \quad (2.29)$$

$$(1 + h\lambda^2)b^2 + dh(e_2)(b^3 - 1) = 0. \quad (2.30)$$

Usando o fato de que \tilde{X} seja uma transformação de Ribaucour de X implica que $1 + h\lambda^1 \neq 0$, e $1 + h\lambda^2 \neq 0$. De fato, se considerarmos a superfície centrada em $X^0 = X + hN$ então de (2.27) e (2.28) podemos escrever que:

$$dX^0(e_1) = (1 + h\lambda^1)e_1 + dh(e_1)N, \quad (2.31)$$

$$dX^0(e_2) = (1 + h\lambda^2)e_2 + dh(e_2)N. \quad (2.32)$$

Vamos considerar nos próximos passos que $1 \leq i \leq 2$. Com efeito vamos assumir que $(1 + h\lambda^i)(p) = 0$ no ponto p . Então, segue-se de (2.29) e (2.30) que $dh(e_i)(b^3 - 1)(p) = 0$ e conseqüentemente $dh(e_i)(p) = 0$. Caso contrário, teríamos que $b^3(p) = 1 \Rightarrow b^1(p) = b^2(p) = 0$. Logo $N = \tilde{N}$ e portanto, $\tilde{X}(p) = X(p) = X^0(p)$. Conseqüentemente $h(p) = 0$, pois $\tilde{X} = X + hN$ o que nos leva a uma contradição. Assim, concluímos que $dh(e_i)(p) = 0$ e $dX^0(e_i)(p) = 0$ contradiz o fato de que a superfície centrada em X^0 é bi-dimensional.

Lema 2.2.3. Sejam Z^1 , Z^2 e Δ como no teorema 2.2.1; b^1 , b^2 , b^3 como no lema 2.2.1 e $1 + h\lambda^i \neq 0 \forall i$ como no lema 2.2.2. Então:

$$b^1 = Z^1(1 - b^3), \quad (2.33)$$

$$b^2 = Z^2(1 - b^3), \quad (2.34)$$

$$b^3 = \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}. \quad (2.35)$$

Demonstração: 3. Como $1 + h\lambda^i \neq 0 \forall i$, concluímos de (2.29) e (2.30) que (2.33) e (2.34) são satisfeitas. Assim, $b^1 = Z^1(1 - b^3)$ e $b^2 = Z^2(1 - b^3)$.

Vamos agora determinar b^3 . Com efeito, de (2.9) podemos escrever:

$$(Z^1(1 - b^3))^2 + (Z^2(1 - b^3))^2 + (b^3)^2 = 1.$$

que implica em,

$$(1 - b^3)^2 \cdot \Delta + (b^3)^2 - 1 = 0.$$

ou ainda,

$$(\Delta + 1)(b^3)^2 - 2\Delta b^3 + (\Delta - 1) = 0.$$

cujas soluções são $b^3 = 1$ e $b^3 = \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}$. Como $b^3 \neq 1 \Rightarrow b^3 = \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}$. Além disso, substituindo b^3 em 2.33 e 2.34 obtemos 2.2.

Demonstração: 4. (\Rightarrow) Vamos demonstrar o teorema 2.2.1. Pelos lemas 2.2.2 e 2.2.3 sabemos que 2.3 estão satisfeitas. Resta mostrar que 2.4 e 2.5 são válidas. Assim, mostraremos que as equações diferenciais 2.4 e 2.5 que está satisfeita por h , é uma consequência da propriedade

$$\langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{X}(e_j) \rangle = 0, \forall i \neq j.$$

Desde que \tilde{X} preserve linhas de curvatura, nós temos

$$\langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{X}(e_j) \rangle = \langle d\tilde{N}(e_j), d\tilde{X}(e_i) \rangle = \langle d\tilde{N}(e_j), d\tilde{N}(e_i) \rangle = 0 \forall i \neq j.$$

Conseqüentemente, usando as equações (2.7) e (2.8) e as equações (2.27) e (2.28), nós obtemos

$$\langle d\tilde{N}(e_1), d\tilde{X}(e_2) \rangle = 0, \quad (2.36)$$

$$\langle d\tilde{N}(e_2), d\tilde{X}(e_1) \rangle = 0. \quad (2.37)$$

que equivale a escrever:

$$\langle L_1^1 e_1 + L_1^2 e_2 + L_1^3 N, (1 + h\lambda^2)e_2 + dh(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N} \rangle = 0, \quad (2.38)$$

$$\langle L_2^1 e_1 + L_2^2 e_2 + L_2^3 N, (1 + h\lambda^1)e_1 + dh(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N} \rangle = 0. \quad (2.39)$$

aplicando o produto interno e fazendo as devidas simplificações encontramos as seguintes equações:

$$L_1^2(1 + h\lambda^2) + L_1^3 dh(e_2) = 0, \quad (2.40)$$

$$L_2^1(1 + h\lambda^1) + L_2^3 dh(e_1) = 0. \quad (2.41)$$

que pode ser expresso por $L_i^2(1 + h\lambda^j) + L_i^3 dh(e_j) = 0$, para $i \neq j$.

Usando os valores de L_1^2 , L_1^3 , L_2^1 e L_2^3 já obtidos de (2.14) - (2.19) nas equações (2.38) e (2.39) acima, e fazendo as devidas simplificações concluimos

que as equações

$$dZ^2(e_1) + Z^1 w_{12}(e_1) - Z^1 Z^2 \lambda^1 = 0$$

e

$$dZ^1(e_2) + Z^2 w_{21}(e_2) - Z^2 Z^1 \lambda^2 = 0.$$

do teorema acima são satisfeitas. O que prova o teorema.

2.3 Teorema 2

Teorema 2.3.1. Seja S e \tilde{S} superfícies orientadas de \mathbb{R}^3 . Suponha que existam parametrizações X e \tilde{X} de S e \tilde{S} respectivamente com as seguintes propriedades $\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N})$ é uma parametrização de \tilde{S} e \tilde{N} é o campo de vetores normais unitários de \tilde{S} dado por

$$\tilde{N} = \frac{1}{\Delta + 1} (2.Z^1 e_1 + 2.Z^2 e_2 + (\Delta - 1)N) \quad (2.42)$$

onde

$$Z^1 = \frac{dh(e_1)}{1 + h\lambda^1}, \quad Z^2 = \frac{dh(e_2)}{1 + h\lambda^2}, \quad e \quad \Delta = (Z^1)^2 + (Z^2)^2 \quad (2.43)$$

e h satisfaz as equações diferenciais

$$dZ^2(e_1) + Z^1 w_{12}(e_1) - Z^1 Z^2 \lambda^1 = 0, \quad (2.44)$$

$$dZ^1(e_2) + Z^2 w_{21}(e_2) - Z^2 Z^1 \lambda^2 = 0. \quad (2.45)$$

então \tilde{S} é uma superfície associada pela transformação de Ribaucour.

Demonstração: 5. \Leftarrow Reciprocamente, assumamos que h é uma solução de (2.4) e (2.5), então nós definimos as funções Z^1 e Z^2 e Δ como em (2.3), b^1 , b^2 e b^3 como em (2.6). Segue de (2.14)-(2.19) e de (2.4) e (2.5) que

$$L_1^2 + Z^2 L_1^3 = 0, \quad (2.46)$$

$$L_2^1 + Z^1 L_2^3 = 0. \quad (2.47)$$

Com efeito, vamos considerar a equação (2.4) dada por:

$$dZ^2(e_1) + Z^1 w_{12}(e_1) - Z^1 Z^2 \lambda^1 = 0.$$

De (3.17) temos que $b^2 = Z^2(1 - b^3)$.

Derivando esta equação obtemos:

$$dZ^2(e_1) = \frac{db^2(e_1)(1 - b^3) + db^3(e_1)b^2}{(1 - b^3)^2}.$$

Assim,

$$\frac{db^2(e_1)(1 - b^3) + db^3(e_1)b^2}{(1 - b^3)^2} + Z^1 w_{12}(e_1) - Z^1 Z^2 \lambda^1 = 0.$$

Considerando ainda os valores de Z^1 e Z^2 em (2.33) e (2.34) obtemos:

$$[db^2(e_1) + b^1 \omega_{12}(e_1) + b^2 \omega_{22}(e_2)](1 + h\lambda^2) + [db^3(e_1) - b^1 \lambda^1] dh(e_2) = 0.$$

que com as devidas simplificações temos que:

$$L_1^2(1 + h\lambda^2) + L_1^3 dh(e_2) = 0. \quad (2.48)$$

Dividindo a última equação por $(1 + h\lambda^2) \neq 0$ mostramos que (2.46) vale. De maneira análoga mostra-se que (2.47) é verdadeira à partir de (2.5).

Além disso, de (2.14) e (2.18) podemos concluir que:

$$L_1^1 = \frac{2}{\Delta + 1} \left(dZ^1(e_1) + Z^2 w_{21}(e_1) - 2Z^1 \frac{d\Delta(e_1)}{\Delta + 1} + (\Delta - 1) \frac{\lambda^1}{2} \right). \quad (2.49)$$

$$L_2^2 = \frac{2}{\Delta + 1} \left(dZ^2(e_2) + Z^1 w_{12}(e_2) - 2Z^2 \frac{d\Delta(e_2)}{\Delta + 1} + (\Delta - 1) \frac{\lambda^2}{2} \right), \quad (2.50)$$

Com efeito vamos considerar a expressão de L_2^2 na equação (2.18). Assim,

$$L_2^2 = db^2(e_2) + b^1 \omega_{12}(e_2) + b^2 \omega_{22}(e_2) + b^3 \lambda^2.$$

Como $b^1 = Z^1(1 - b^3)$, $b^2 = Z^2(1 - b^3)$, $b^3 = \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}$ e além do mais,

$$db^2(e_2) = dZ^2(e_2)(1 - b^3) - db^3(e_2)Z^2, \quad (2.51)$$

$$db^3(e_2) = \frac{2d\Delta(e_2)}{(\Delta + 2)^3}. \quad (2.52)$$

Logo, substituindo essa duas últimas equações na expressão (2.18) de L_2^2 encontramos (2.46). Segue-se de forma análoga a expressão (2.47).

Então usando a definição de Δ em (2.3) e as equações (2.4) e (2.5), segue-se diretamente que

$$Z^1 L_1^1 + \left((Z^1)^2 - \frac{\Delta + 1}{2} \right) L_1^3 = 0, \quad (2.53)$$

$$Z^2 L_2^2 + \left((Z^2)^2 - \frac{\Delta + 1}{2} \right) L_2^3 = 0. \quad (2.54)$$

Consideremos \tilde{X} e \tilde{N} como em (2.1) e (2.2) respectivamente. Precisamos mostrar que \tilde{X} é associado a X pela transformação de Ribaucour. Com efeito, observemos primeiramente que \tilde{N} é um campo de vetor unitário. De fato,

$$|\tilde{N}|^2 = (b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2 = (1 - b^3)^2 \Delta + (b^3)^2 = 1,$$

onde a última equação resultado do uso da expressão de b^3 .

Nós verificaremos a seguir que \tilde{N} é normal a \tilde{X} . Da definição de \tilde{X} , temos que $d\tilde{X}(e_1)$ e $d\tilde{X}(e_2)$ são determinados pelas equações (2.27) e (2.28). Conseqüentemente, usando o fato que $|\tilde{N}| = 1$, podemos concluir que:

$$\langle d\tilde{X}(e_1), \tilde{N} \rangle = 0, \quad (2.55)$$

$$\langle d\tilde{X}(e_2), \tilde{N} \rangle = 0. \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{X}(e_1), \tilde{N} \rangle &= \langle (1 + h\lambda^1)e_1 + dh(e_1)(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N}(e_1), \tilde{N} \rangle. \\ &= \langle (1 + h\lambda^1)e_1 + dh(e_1)(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N}(e_1), b^1e_1 + b^2e_2 + b^3N \rangle. \\ &= (1 + h\lambda^1)b^1 + dh(e_1)(b^3 - dh(e_1)). \\ &= (1 + h\lambda^1)b^1 + dh(e_1)(b^3 - 1). \\ &= (1 + h\lambda^1)Z^1(1 - b^3) + dh(e_1)(b^3 - 1). \\ &= (-(1 + h\lambda^1)Z^1 + dh(e_1))(b^3 - 1). \\ &= (-dh(e_1) - dh(e_1))(b^3 - 1). \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente se mostra que (2.52) é satisfeita.

Para mostrar que as direções principais são preservadas, mostraremos primeiramente que $\langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{N}(e_j) \rangle = 0 \quad i \neq j$.

Este último resultado vem do produto interno a seguir decorrido das devidas simplificações. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{N}(e_1), d\tilde{N}(e_2) \rangle &= \langle L_1^1 e_1 + L_1^2 e_2 + L_1^3 N, L_2^1 e_1 + L_2^2 e_2 + L_2^3 N \rangle. \\
&= L_1^1 L_2^1 + L_1^2 L_2^2 + L_1^3 L_2^3. \\
&= ((Z^1)^2 + (Z^2)^2 - (\Delta + 1) + 1) L_1^3 L_2^3. \\
&= (\Delta - (\Delta + 1) + 1) L_1^3 L_2^3. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

onde nas duas últimas equações usamos (2.53) e a definição de Δ . Agora, usando a equação anterior e as equações (2.27), (2.28), (2.46), e (2.47), concluimos que $\forall i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{N}(e_1), d\tilde{X}(e_2) \rangle &= \langle L_1^1 e_1 + L_1^2 e_2 + L_1^3 N, (1 + h\lambda^2)e_2 + dh(e_2)(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N}(e_2) \rangle. \\
&= \langle L_1^1 e_1 + L_1^2 e_2 + L_1^3 N, (1 + h\lambda^2)e_2 + dh(e_2)N \rangle. \\
&= L_1^2(1 + h\lambda^2) + L_1^3 dh(e_2) = 0. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

pois, segundo a equação (2.40) temos que $L_1^2(1 + h\lambda^2) + L_1^3 dh(e_2) = 0$.

Finalmente, concluimos que as imagens dos campos de vetores e_i, e_j por $d\tilde{X}$ são ortogonais para todo $i \neq j$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{X}(e_1), d\tilde{X}(e_2) \rangle &= (1 + h\lambda^1) \langle e_1, d\tilde{X}(e_2) \rangle + dh(e_1) \langle N, d\tilde{X}(e_2) \rangle. \\
&= -(1 + h\lambda^1) (dh(e_2)b^1 + hL_2^1) (dh(e_1)(1 - b^3) - hL_2^3). \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde essa última igualdade segue da definição de b^1 , b^2 e b^3 e das equações (2.42) e (2.43). Além disso, geralmente, \tilde{X} é uma superfície de bi-dimensão, desde que,

$$\begin{aligned}
d\tilde{X}(e_i) + h\tilde{\lambda}^i d\tilde{X}(e_i) &= (1 + h\lambda^i)e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}), \\
d\tilde{X}(e_i)(1 + h\tilde{\lambda}^i) &= (1 + h\lambda^i)e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}), \\
|d\tilde{X}(e_i)|(1 + h\tilde{\lambda}^i) &\leq |(1 + h\lambda^i)||e_i| + |dh(e_i)|(N - \tilde{N}), \\
|d\tilde{X}(e_i)||1 + h\tilde{\lambda}^i| &= |1 + h\lambda^i|. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Nosso próximo passo consiste em mostrar como linearizar o problema afim de obtermos a função h .

Proposição 2.3.1. *Suponha que h seja uma função que não se anula satisfazendo as equações (2.4) e (2.5), então $\psi = \frac{1}{h} (Z^1\omega_1 + Z^2\omega_2)$ é uma 1-forma fechada e existe uma função Ω que não se anula, definida em um domínio simplesmente conexo que é dado pelas equações $d\Omega(e_1) = \frac{\Omega}{h} Z^1$ e $d\Omega(e_2) = \frac{\Omega}{h} Z^2$.*

Demonstração: 6. Considerando a diferenciação exterior de ψ , obtemos

$$d\psi = \frac{1}{h} \left[dZ^1(e_2) - Z^1 \frac{dh(e_2)}{h} - Z^2 \omega_{12}(e_2) \right] \omega_2 \wedge \omega_1, \quad (2.58)$$

$$d\psi = \frac{1}{h} \left[dZ^2(e_1) - Z^2 \frac{dh(e_1)}{h} - Z^1 \omega_{21}(e_1) \right] \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (2.59)$$

Como consequência da equação (2.4) e (2.5) nós concluímos que o coeficiente de $\omega_j \wedge \omega_i$ para $j < i$ se anula. Conseqüentemente, em qualquer domínio simplesmente conexo, existe uma função diferenciável f tal que $df = \psi$. Tome $\Omega = e^f \Rightarrow f = \log(\Omega)$. Então, $d(f) = \psi \Rightarrow d(\log \Omega) = \psi \Rightarrow \frac{d\Omega(e_i)}{\Omega} = \psi(e_i)$.

Assim sendo, $d\Omega(e_1)/\Omega = \psi(e_1)$ e $d\Omega(e_2)/\Omega = \psi(e_2)$, o que conclui a demonstração.

Baseado em um resultado prévio, para cada função h que não se anula, que é uma solução de (2.4) e (2.5), consideraremos sempre Ω como dado pela proposição anterior e definimos

$$\Omega^1 = d\Omega(e_1), \quad (2.60)$$

$$\Omega^2 = d\Omega(e_2), \quad (2.61)$$

$$W = \frac{\Omega}{h}. \quad (2.62)$$

Com esta notação, (2.4) e (2.5) é dado por

$$d\Omega^1(e_2) = \Omega^2\omega_{12}(e_2), \quad (2.63)$$

$$d\Omega^2(e_1) = \Omega^1\omega_{21}(e_1). \quad (2.64)$$

$$d\Omega = \Omega^1\omega_1 + \Omega^2\omega_2. \quad (2.65)$$

$$dW = -(\Omega^1\lambda^1\omega_1 + \Omega^2\lambda^2\omega_2). \quad (2.66)$$

e

$$h = \Omega/W. \quad (2.67)$$

Proposição 2.3.2. *Uma função h que não se anula é uma solução de (2.4) e (2.5) definida em um domínio simplesmente conexo, se e somente se, $h = \Omega/W$ onde Ω e W são funções que não se anulam e que satisfazem (2.59) – (2.62).*

Com a seguinte notação, temos que:

$$dh(e_1) = \frac{\Omega^1}{W}(1 + \Omega\lambda^1/W), \quad (2.68)$$

$$dh(e_2) = \frac{\Omega^2}{W}(1 + \Omega\lambda^2/W), \quad (2.69)$$

$$1 + h\lambda^1 = 1 + \Omega\lambda^1/W, \quad (2.70)$$

$$1 + h\lambda^2 = 1 + \Omega\lambda^2/W. \quad (2.71)$$

Então,

$$Z^1 = \frac{\Omega^1}{W}, \quad (2.72)$$

$$Z^2 = \frac{\Omega^2}{W}, \quad (2.73)$$

$$\Delta = \frac{1}{W^2} ((\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2). \quad (2.74)$$

Assim podemos reescrever o teorema 2.2.1 da seguinte maneira:

2.4 Teorema 3

Teorema 2.4.1. *Seja S uma superfície parametrizada de \mathbb{R}^3 que é dada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Assumamos que e_1 e e_2 sejam as direções principais, λ^1 e λ^2 as correspondentes curvaturas principais e N é o campo de vetores normais unitário em S . Uma superfície \tilde{S} é localmente associada a S pela*

transformação de Ribaucour, se e somente se, existir funções diferenciáveis $W, \Omega, \Omega^1, \Omega^2 : V \subset U \longrightarrow R$, que satisfazem as relações (2.63) - (2.65) e $\tilde{X} : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \tilde{X}$ é uma parametrização de \tilde{X} dada por

$$\tilde{X} = X - \frac{2\Omega}{(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2 + W^2} (\Omega^1 e_1 + \Omega^2 e_2 - WN). \quad (2.75)$$

Observação 1: Observemos inicialmente que

$$d\Omega^1 = d\Omega^1(e_1)\omega_1 + d\Omega^1(e_2)\omega_2 \quad e \quad d\Omega^2 = d\Omega^2(e_1)\omega_1 + d\Omega^2(e_2)\omega_2.$$

Então (2.63) e (2.64) é equivalente a

$$d\Omega^1 \wedge \omega_1 - \Omega^2 \omega_{12}(e_2)\omega_2 \wedge \omega_1 = 0, \quad (2.76)$$

$$d\Omega^2 \wedge \omega_2 - \Omega^1 \omega_{21}(e_1)\omega_1 \wedge \omega_2 = 0. \quad (2.77)$$

Em notação clássica, sempre que X é parametrizada pelas linhas de curvaturas $X(u, v)$, o sistema de equações (2.63) - (2.66) pode ser escrito como

$$\frac{\partial \Omega^1}{\partial u_2} = \Omega^2 \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial \Omega^2}{\partial u_1} = \Omega^1 \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial u_2}, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = a_1 \Omega^1, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = a_2 \Omega^2, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = -a_1 \Omega^1 \lambda^1, \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_2} = -a_2 \Omega^2 \lambda^2. \quad (2.83)$$

onde as funções a_1 e a_2 correspondem à métrica da superfície S , ou seja, $ds^2 = a_1^2 du_1^2 + a_2^2 du_2^2$.

O seguinte resultado mostra-nos que para cada solução Ω^1, Ω^2 da equação (2.63) e (2.64), existe uma família de soluções de 2 parâmetros do sistema formado pelas equações (2.65) e (2.66).

Proposição 2.4.1. *As equações (2.63) e (2.64) são as condições de integrabilidades do sistema de equações para as equações (2.65), (2.66) para Ω e W .*

Demonstração: 7. Considere o ideal I gerado pelas 1-formas:

$$\alpha = d\Omega - (\Omega^1 \omega_1 + \Omega^2 \omega_2),$$

$$\beta = dW + (\Omega^1 \lambda^1 \omega_1 + \Omega^2 \lambda^2 \omega_2).$$

Nós mostraremos que se (2.63) e (2.64) se aplica então I é fechado sob diferenciação exterior.

De fato,

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d(d\Omega) - d(\Omega^1\omega_1 + \Omega^2\omega_2). \\
&= -(d\Omega^1 \wedge \omega_1 + d\Omega^2 \wedge \omega_2) - (\Omega^1 \omega_2 \wedge \omega_{21} + \Omega^2 \omega_1 \wedge \omega_{12}). \\
&= 0.
\end{aligned}$$

onde essa última igualdade segue-se da observação 1.

Analogamente, usando 2.62 temos,

$$d\beta = d(d\omega) + d(\Omega^1\lambda^1\omega_1) + d(\Omega^2\lambda^2\omega_2). \quad (2.84)$$

$$= d(-\Omega^1\lambda^1\omega_1 - \Omega^2\lambda^2\omega_2) + d(\Omega^1\lambda^1\omega_1) + d(\Omega^2\lambda^2\omega_2). \quad (2.85)$$

$$= 0. \quad (2.86)$$

A partir de agora, sempre que for dito que duas superfícies estão localmente associadas pela transformação de Ribaucour, estaremos assumindo que existem funções Ω^1 , Ω^2 , Ω e W localmente definidas, satisfazendo o sistema (2.63)-(2.66). Além disso, observamos que desde que as linhas normais a pontos correspondentes se interceptem a uma distância $h = \frac{\Omega}{W}$, segue que $dh(e_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq 2$ se e somente se $\Omega^i \neq 0$.

2.5 Teorema 4

Teorema 2.5.1. Assumamos que \tilde{S} é localmente associada a M pela transformação de Ribacour. Seja e_1, e_2 as direções principais e λ^1, λ^2 as correspondentes curvaturas principais de S . Então as curvaturas principais de \tilde{S} são dadas por:

$$\tilde{\lambda}^1 = \frac{dS(e_1)W + \Omega^1\lambda^1S}{\Omega^1S - \Omega dS(e_1)} \quad se \quad \Omega^1 \neq 0, \quad (2.87)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{dS(e_2)W + \Omega^2\lambda^2S}{\Omega^2S - \Omega dS(e_2)} \quad se \quad \Omega^2 \neq 0, \quad (2.88)$$

$$\tilde{\lambda}^1 = \frac{WT^1 + \lambda^1S}{S - \Omega T^1} \quad se \quad \Omega^1 \equiv 0, \quad (2.89)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{WT^2 + \lambda^2S}{S - \Omega T^2} \quad se \quad \Omega^2 \equiv 0. \quad (2.90)$$

onde $\Omega^1, \Omega^2, \Omega$ e W satisfazem o sistema de equações (2.63)-(2.66) e

$$S = W^2 + (\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2, \quad (2.91)$$

$$T^1 = 2 (\Omega^2 \omega_{21}(e_1) - W \lambda^1), \quad (2.92)$$

$$T^2 = 2 (\Omega^1 \omega_{12}(e_2) - W \lambda^2). \quad (2.93)$$

Demonstração: 8. Tomemos X e \tilde{X} parametrizações de M e \tilde{M} respectivamente associadas pela Transformação de Ribacour. As curvaturas principais de \tilde{M} são dadas por

$$\tilde{\lambda}^1 = \frac{\langle d\tilde{N}(e_1), d\tilde{X}(e_1) \rangle}{\langle d\tilde{X}(e_1), d\tilde{X}(e_1) \rangle}, \quad (2.94)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{\langle d\tilde{N}(e_2), d\tilde{X}(e_2) \rangle}{\langle d\tilde{X}(e_2), d\tilde{X}(e_2) \rangle}. \quad (2.95)$$

Como \tilde{X} é associada pela Transformação de Ribacour, temos que:

$$d\tilde{X} = dX + dh(N - \tilde{N}) + h(dN - d\tilde{N}),$$

onde $h = \frac{\Omega}{W}$ e \tilde{N} é dado pela equação (2.2) agora, $d\tilde{N}(e_1) = \tilde{\lambda}^1 d\tilde{X}(e_1)$ e $d\tilde{N}(e_2) = \tilde{\lambda}^2 d\tilde{X}(e_2)$ então, das últimas equações nós obtemos

$$(1 + h\tilde{\lambda}^1)d\tilde{X}(e_1) = (1 + h\tilde{\lambda}^1)e_1 + dh(e_1)(N - \tilde{N}), \quad (2.96)$$

$$(1 + h\tilde{\lambda}^2)d\tilde{X}(e_2) = (1 + h\tilde{\lambda}^2)e_2 + dh(e_2)(N - \tilde{N}). \quad (2.97)$$

Conseqüentemente, usando a equação (2.6), obtemos:

$$(1 + h\tilde{\lambda}^1)^2 \langle d\tilde{X}(e_1), d\tilde{X}(e_1) \rangle = (1 + h\lambda^1)^2 + 2(dh(e_1))^2 - 2dh(e_1)[(1 + h\lambda_1)b^1 + dh(e_1)b^3],$$

$$(1 + h\tilde{\lambda}^2)^2 \langle d\tilde{X}(e_2), d\tilde{X}(e_2) \rangle = (1 + h\lambda^2)^2 + 2(dh(e_2))^2 - 2dh(e_2)[(1 + h\lambda_2)b^1 + dh(e_2)b^3].$$

Então de (2.3) e (2.16) - (2.18) temos:

$$(1 + h\tilde{\lambda}^1)^2 \langle d\tilde{X}(e_1), d\tilde{X}(e_1) \rangle = (1 + h\lambda^1)^2, \quad (2.98)$$

$$(1 + h\tilde{\lambda}^2)^2 \langle d\tilde{X}(e_2), d\tilde{X}(e_2) \rangle = (1 + h\lambda^2)^2. \quad (2.99)$$

Por outro lado, usando as equações (2.8) e (2.9) e (2.96) e (2.97), temos que:

$$\langle d\tilde{N}(e_1), d\tilde{X}(e_1) \rangle = \frac{1}{1 + h\tilde{\lambda}^1} [(1 + h\lambda^1)L_1^1 + dh(e_1)L_1^3], \quad (2.100)$$

$$\langle d\tilde{N}(e_2), d\tilde{X}(e_2) \rangle = \frac{1}{1 + h\tilde{\lambda}^2} [(1 + h\lambda^2)L_1^1 + dh(e_2)L_1^3]. \quad (2.101)$$

Assumamos que $\Omega^i \neq 0$, e $dh(e_i) \neq 0$ com $1 \leq i \leq 2$. Então de (2.53) e (2.54) tem-se que:

$$L_1^1 + Z^1 L_1^3 = \frac{\Delta + 1}{2Z^1} L_1^3, \quad (2.102)$$

$$L_2^2 + Z^2 L_2^3 = \frac{\Delta + 1}{2Z^2} L_2^3. \quad (2.103)$$

conseqüentemente

$$\langle d\tilde{N}(e_1), d\tilde{X}(e_1) \rangle = \frac{(1 + h\lambda^1)(\Delta + 1)}{2Z^1(1 + h\tilde{\lambda}^1)} L_1^3, \quad (2.104)$$

$$\langle d\tilde{N}(e_2), d\tilde{X}(e_2) \rangle = \frac{(1 + h\lambda^2)(\Delta + 1)}{2Z^2(1 + h\tilde{\lambda}^2)} L_2^3. \quad (2.105)$$

Concluimos, usando (2.94) - (2.95) e (2.98) - (2.99), que $\tilde{\lambda}^1$ e $\tilde{\lambda}^2$ são dados por

$$\tilde{\lambda}^1 = \frac{(\Delta + 1)L_1^3}{2dh(e_1) - h(\Delta + 1)L_1^3} \quad \text{se } \Omega^1 \neq 0, \quad (2.106)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{(\Delta + 1)L_2^3}{2dh(e_2) - h(\Delta + 1)L_1^3} \quad \text{se } \Omega^2 \neq 0. \quad (2.107)$$

onde L_1^3 e L_2^3 estão definidos em (2.12) e (2.15).

Observe que $\Delta + 1 = S/W^2$, onde S é definida em(2.91).

Então

$$(\Delta + 1)L_1^3 = 2\frac{dS(e_1)}{S} - 2\frac{dW(e_1)}{W}, \quad (2.108)$$

$$(\Delta + 1)L_2^3 = 2\frac{dS(e_2)}{S} - 2\frac{dW(e_2)}{W}. \quad (2.109)$$

Conseqüentemente, segue de (2.60), (2.612) e do fato que $h = \Omega/W$ que $\tilde{\lambda}^1$ e $\tilde{\lambda}^2$ são dados por (2.94 e 2.95).

Se $\Omega^1 = \Omega^1 \equiv 0$, isto é $dh(e_1) = dh(e_1) \equiv 0$, então $Z^1 = Z^2 = 0$ e consequentemente temos de (2.4) e (2.5) que $dZ^1(e_2) = dZ^2(e_1) = 0$. Então, obtemos de (2.3) que $d\Delta(e_1) = d\Delta(e_2) = 0$. Usando as equações (2.14) e (2.19), concluímos que $L_1^3 = L_1^1 = L_2^3 = L_2^1 = 0$. Além disso, L_1^1 e L_2^2 são determinado por (2.102 e 2.103). Agora segue que,

$$|d\tilde{X}(e_1)|^2 = (1 + h\lambda^1 - hL_1^1)^2, \quad (2.110)$$

$$|d\tilde{X}(e_2)|^2 = (1 + h\lambda^2 - hL_2^2)^2. \quad (2.111)$$

Desde $d\tilde{N}(e_1) = L_1^1 e_1$ e $d\tilde{N}(e_2) = L_2^2 e_2$, obtemos:

$$\langle d\tilde{X}(e_1), d\tilde{N}(e_1) \rangle = (1 + h\lambda^1 - hL_1^1)L_1^1, \quad (2.112)$$

$$\langle d\tilde{X}(e_2), d\tilde{N}(e_2) \rangle = (1 + h\lambda^2 - hL_2^2)L_2^2. \quad (2.113)$$

Então, de (2.94) e (2.95) podemos obter que,

$$\tilde{\lambda}^1 = \frac{L_1^1}{1 + h\lambda^1 - hL_1^1} \quad se \quad \Omega^1 \equiv 0, \quad (2.114)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{L_2^2}{1 + h\lambda^2 - hL_2^2} \quad se \quad \Omega^2 \equiv 0. \quad (2.115)$$

onde,

$$\begin{aligned}
L_1^1 &= \frac{1}{\Delta + 1} (2Z^1\omega_{11}(e_1) + 2Z^2\omega_{21}(e_1) + (\Delta - 1)\lambda^1) \quad \text{quando } \Omega^1 \equiv 0, \\
L_2^2 &= \frac{1}{\Delta + 1} (2Z^1\omega_{12}(e_2) + 2Z^2\omega_{22}(e_2) + (\Delta - 1)\lambda^2) \quad \text{quando } \Omega^2 \equiv 0.
\end{aligned}$$

Usando (2.3) temos que $\Delta + 1 = S/W^2$, $\Delta - 1 = (S - 2W^2)/W^2$ e,

$$L_1^1 = \frac{WT^1 + \lambda^1 S}{S} \quad e \quad L_2^2 = \frac{WT^2 + \lambda^2 S}{S}.$$

onde T^1 e T^2 são definidos por (2.92) e (2.93) desde que,

$$1 + h\lambda^1 - hL_1^1 = \frac{S - \Omega T^1}{S} \quad e \quad 1 + h\lambda^2 - hL_2^2 = \frac{S - \Omega T^2}{S}.$$

Então, concluímos de (2.114) e (2.115) que (2.89) e (2.90) valem.

2.6 Teorema 5

Teorema 2.6.1. Seja S uma superfície de Dupin de \mathbb{R}^3 cujas curvaturas principais e direções principais correspondentes são determinadas através de λ^1 , λ^2 e e^1, e^2 respectivamente. Seja \tilde{S} uma superfície de \mathbb{R}^3 localmente associada a S pela transformação de Ribaucour. Então \tilde{S} é uma superfície de Dupin se e somente se, as funções Ω^1 , Ω^2 , Ω e W satisfazem as seguintes condições adicionais.

$$\text{i) } d\left(\frac{dS(e_1)}{\Omega^1}\right)(e_1) = d\left(\frac{dS(e_2)}{\Omega^2}\right)(e_2) = 0, \text{ sempre que } \Omega^1 \neq 0 \text{ e } \Omega^2 \neq 0;$$

$$\text{ii) } d\left(\frac{T^1}{S}\right)(e_1) = d\left(\frac{T^2}{S}\right)(e_2) = 0, \text{ sempre que } \Omega^1 = \Omega^2 = 0,$$

onde S , T^1 e T^2 são dados por (2.91), (2.92) e (2.93).

Demonstração: 9. Assuma que $\Omega^1 \neq 0$ ou $\Omega^2 \neq 0$ isto é, h depende de u ou de v . Desde que S seja uma superfície de Dupin, procede de (2.87) e (2.88) que $d\tilde{\lambda}^1(e_1) = d\tilde{\lambda}^2(e_2) = 0$, se e somente se,

$$d\left(\frac{dS(e_1)W + \Omega^1\lambda^1 S}{\Omega^1 S - \Omega dS(e_1)}\right)(e_1) = 0, \quad (2.116)$$

$$d\left(\frac{dS(e_2)W + \Omega^2\lambda^2 S}{\Omega^2 S - \Omega dS(e_2)}\right)(e_2) = 0. \quad (2.117)$$

Usando (2.65) e (2.66), estas equações equivalem a

$$S(W + \Omega\lambda^1) (\Omega^1 d(dS(e_1)))(e_1) - dS(e_1)d\Omega^1(e_1) = 0, \quad (2.118)$$

$$S(W + \Omega\lambda^2) (\Omega^2 d(dS(e_2)))(e_2) - dS(e_2)d\Omega^2(e_2) = 0. \quad (2.119)$$

Desde que $S(W + \Omega\lambda^i)$ e $S(W + \Omega\lambda^i)$ sejam $\neq 0$, concluímos que i) está satisfeita.

Se h é independente das variáveis u e v , isto é, $\Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv 0$, então segue-se de (2.63), (2.64) e (2.65) e (2.66) que $d\Omega(e_1) = d\Omega(e_2) = dW(e_1) = dW(e_2) = 0$ e $d\Omega^1(e_2) = d\Omega^2(e_1) = 0$. Além disso, vimos pelo teorema (2.5.1) que $\tilde{\lambda}^1$ e $\tilde{\lambda}^2$ são determinados por (2.89) e (2.90). Conseqüentemente, $d\tilde{\lambda}^1(e_1) = d\tilde{\lambda}^2(e_2) = 0$, se e só se,

$$(W + \Omega\lambda^1) (SdT^1(e_1) - T^1dS(e_1)) = 0, \quad (2.120)$$

$$(W + \Omega\lambda^2) (SdT^2(e_2) - T^2dS(e_2)) = 0. \quad (2.121)$$

Portanto, concluímos que *ii)* é satisfeita, o que prova teorema.

2.7 Superfície de Dupin

Definição 2.7.1. Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita uma *Superfície de Dupin* se suas curvaturas principais forem constantes ao longo das correspondentes linhas de curvaturas. Sempre que as curvaturas principais forem constantes, S também é chamada de uma *superfície isoparmétrica*.

Quando a superfície for uma *superfície de Dupin* teremos sempre que $d\lambda^1(e_1) = d\lambda^2(e_2) = 0$.

Capítulo 3

Aplicações da Transformação de Ribaucour

Neste capítulo nós geraremos as superfícies de Dupin aplicando o teorema (3.5.1) do capítulo anterior para o plano, o toro, cilindro e a esfera. Esses exemplos nos mostrarão que a transformação de Ribaucour são usadas para gerar superfícies de Dupin.

3.1 Aplicação ao Plano

Proposição 3.1.1. *Considere o plano no espaço euclidiano R^3 , parametrizado por $X(u, v) = (u, v, 0)$. Então, \tilde{X} é uma superfície de Dupin parametrizada localmente e associada a X por uma transformação de Ribaucour, se e só se,*

$$\tilde{X} = X - \frac{2(f_1 + f_2)}{(f_1')^2 + (f_2')^2 + c^2}(f_1', f_2', -c), \quad (3.1)$$

onde

$$f_1 = a_1 u^2 + b_1 u + c_1, \quad (3.2)$$

$$f_2 = a_2 v^2 + b_2 v + c_2. \quad (3.3)$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ e $c \neq 0$.

Demonstração: 10. Como as curvaturas principais de X são $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$ e a métrica $E = G = 1$ e $F = 0$, segue-se das equações (2.78) – (2.83) que

$$\Omega = f_1 + f_2, \quad W = c \neq 0, \quad h = \frac{\Omega}{c}, \quad \Omega^1 = f_1' \quad e, \quad \Omega^2 = f_2'$$

onde f_1 e f_2 são funções diferenciáveis. Para cada uma dessas funções, a superfície \tilde{X} dada por (2.71) é uma transformação de Ribaucour do plano.

Das equações (2.78) – (2.83) podemos escrever:

$$\frac{\partial \Omega^1}{\partial v} = 0 \quad \text{visto que} \quad \frac{\partial a_2}{\partial u} = 0. \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Omega^2}{\partial u} = 0 \quad \text{visto que} \quad \frac{\partial a_1}{\partial v} = 0. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega^1 \quad e \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega^2. \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \quad \text{pois,} \quad \lambda^1 = \lambda^2 = 0. \quad (3.7)$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} = f_1'(u). \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = f_2'(v). \quad (3.9)$$

Integrando as equações (3.8) e (3.9) temos:

$$\Omega = f_1(u) + A(v). \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial v}. \quad (3.11)$$

Logo: $\Omega = f_1(u) + f_2(v)$ e de 3.7 concluímos que $W = c \neq 0$.

Além disso, das equações 3.6, 3.8 e 3.9, concluímos que

$$\Omega^1 = f_1' \quad e, \quad \Omega^2 = f_2'.$$

Agora, vamos impor que a superfície associada seja de Dupin.

Afim de obtermos a superfície de Dupin associada a X , vamos considerar as expressões de (2.91 e 2.93) com $\Omega^1 = f'_1$, $\Omega^2 = f'_2$ e $W = c$. Logo,

$$S = c^2 + (f'_1)^2 + (f'_2)^2. \quad (3.12)$$

$$T^1 = T^2 = 0. \quad (3.13)$$

Derivando 3.12 temos,

$$\frac{dS}{du}(e_1) = 2f'_1 f''_1. \quad (3.14)$$

$$\frac{dS}{dv}(e_2) = 2f'_2 f''_2. \quad (3.15)$$

Se f_1 for uma função constante então, $\frac{dS}{du} = 0$. Como $\lambda^1 = 0$, concluímos que $\tilde{\lambda}^1 = 0$. De igual modo, concluímos que $\tilde{\lambda}^2 = 0$ se f_2 também for constante, pois, $\lambda^2 = 0$.

Caso contrário, isto é, se f_1 , e f_2 não são constantes, concluímos do teorema (2.6.1), que \tilde{X} é uma superfície de Dupin, se e somente se,

$$d\left(\frac{dS(e_1)}{\Omega^1}\right)(e_1) = d\left(\frac{dS(e_2)}{\Omega^2}\right)(e_2) = 0.$$

Então segue-se que:

$$d\left(\frac{2f_1'f_1''}{\Omega^1}\right) = d\left(\frac{2f_1'f_1''}{f_1'}\right) = d(2f_1'') = 0 \Rightarrow f_1''' = 0. \quad (3.16)$$

$$d\left(\frac{2f_1'f_1''}{\Omega^1}\right) = d\left(\frac{2f_2'f_2''}{f_2'}\right) = d(2f_2'') = 0 \Rightarrow f_2''' = 0. \quad (3.17)$$

De (3.16) e (3.17) concluimos que existem escalares $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$, tal que:

$$f_1 = a_1u^2 + b_1u + c_1 \quad e \quad f_2 = a_2v^2 + b_2v + c_2$$

satisfazendo (3.2) e (3.3).

Se $a_1 = a_2 = 0$, e b_1 e $b_2 \neq 0$ então de (2.94) e (2.95) obtemos que $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{\lambda}^2 = 0$. Se a_1 e $a_2 \neq 0$, então

$$\tilde{\lambda}^1 = \frac{4a_1c}{((f_2')^2 - 4a_1f_2 + A_1)},$$

onde a constante $A_1 = b_1^2 + c^2 - 4a_1c_1$ e,

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{4a_2c}{((f_1')^2 - 4a_2f_1 + B_1)},$$

onde a constante $B_1 = b_2^2 + c^2 - 4a_2c_2$

Assim, a superfície de Dupin é dada pela equação (3.1).

Nota: Na proposição (3.1.1) observa-se que a hiperfície de Dupin tem as seguintes propriedades:

- a) Geralmente, quando os coeficientes $a_1 \neq a_2$ e não nulos, então as curvaturas $\tilde{\lambda}^1$ e $\tilde{\lambda}^2$ são distintas.
- b) Se $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$, então \tilde{X} tem curvatura principal igual a zero. Em particular, se $a_1 = a_2 = 0$ então, \tilde{X} é um subconjunto aberto do plano.
- c) Se $a_1 = a_2 = a \neq 0$, concluímos que as curvaturas principais independem dos parâmetros u e v e são dadas por $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{\lambda}^2 = \frac{4ac}{b_1^2 + b_2^2 - 4a(c_1 + c_2)}$ isto é, são constantes e não nulas. Então, \tilde{X} é um subconjunto aberto da esfera.

Com a parametrização do plano desta proposição obtivemos as seguintes superfícies associadas pela transformação de Ribaucour. Na figura a seguir, exibimos seis visualizações destas superfícies com os parâmetros configurados para os valores que a acompanham.

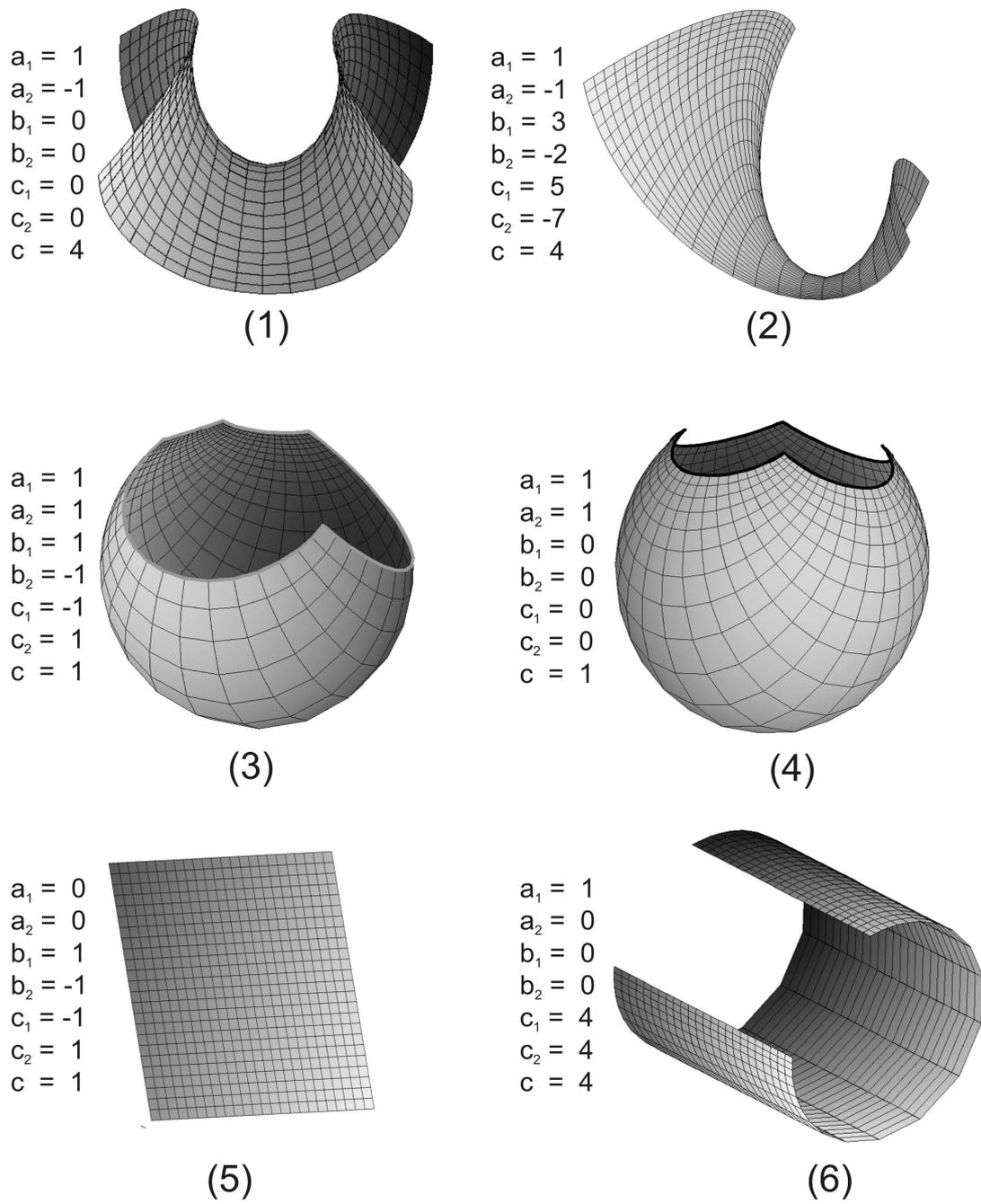


Figura 3.1: Superfície associada ao Plano pela Transformação de Ribaucour

3.2 Aplicação ao Toro

Proposição 3.2.1. *Considere o toro do \mathbb{R}^3 cuja parametrização é dada por*

$$X(u, v) = ((a + r.\cos v).\cos u, (a + r.\cos v).\sen u, r.\sen v).$$

\tilde{X} será uma parametrização da superfície de Dupin localmente associada a X pela transformada de Ribaucour, se e somente se, \tilde{X} for dada por 2.75 onde

$$\Omega^1 = -a_1.\sen(u) + b_1.\cos(u),$$

$$\Omega^2 = -a_2.\sen(v) + b_2.\cos(v) - a_1.\cos(u).\sen(v) - b_1.\sen(u).\sen(v) - c_1.\sen(v)$$

$$\Omega = (a + r.\cos v).f_1 + r.f_2 + A, \quad W = -f_1.\cos v - f_2 + B.$$

$$f_1 = a_1.\cos(u) + b_1.\sen(u) + c_1, \quad (3.18)$$

$$f_2 = a_2.\cos(v) + b_2.\sen(v) + c_2. \quad (3.19)$$

onde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, A$ e B são constantes reais desde que $\Omega^2 \equiv 0$ então $\Omega^1 \equiv 0$.

Demonstração: 11. As curvaturas principais do toro são dadas por

$$\lambda^1 = \frac{\cos v}{a + r \cdot \cos v}, \quad \lambda^2 = \frac{1}{r}.$$

Os coeficientes da métrica são dados por

$$a_1 = a + r \cdot \cos v \quad a_2 = r.$$

Isto sucede das equações (2.78) – (2.83) que

$$\Omega^1 = -a_1 \cdot \text{sen}(u) + b_1 \cdot \cos(u), \quad \Omega^2 = -f_1 \text{sen} v + f_2'(v).$$

onde f_1 e f_2 são funções diferenciáveis de u e v respectivamente. Além disso

$$\Omega = (a + r \cdot \cos v) \cdot f_1 + r \cdot f_2 + A \quad W = -\cos v \cdot f_1 - f_2 + B,$$

onde A e B são constantes.

Afim de usarmos o teorema (2.6.1) vamos considerar as funções S e T^i definidas por (2.91) a (2.93) . Então,

$$S = f_1^2 + f_2^2 + (f_1')^2 + (f_2')^2 - 2 \cdot f_1 \cdot (f_2' \cdot \text{sen} v - f_2 \cdot \cos v) - 2 \cdot B \cdot (f_1 \cdot \cos v + f_2) + B^2$$

e

$$T^1 = 2(-\Omega^2 \cdot \text{sen}v - W\lambda^1) \quad T^2 = -2W\lambda^2.$$

Se Ω^1 e $\Omega^2 \neq 0$ $i = 1, 2$, então teremos que $\frac{dS(e_1)}{\Omega^1}$ e $\frac{dS(e_2)}{\Omega^2}$ são independente de u e v isto equivale a obtermos f_1 e f_2 satisfazendo as equações (3.18) e (3.19) .

Se $\Omega^1 = \Omega^2 \equiv 0$ então $f_1(u_1) = c_1$, Ω^2 , W e S não dependem de u . Então a condição *ii*) do teorema 2.6.1 é trivialmente satisfeita.

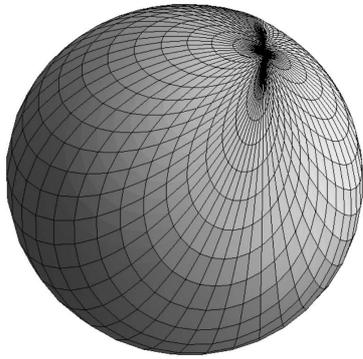
Se considerarmos $\Omega^2 = 0$ então necessariamente temos que $f_1 = c_1$ e $f_2 = -c_1 \cdot \text{cos}v + c_2$ onde c_1 e $c_2 \neq B$ são constantes reais. Neste caso, a superfície associada é paralela ao toro e as curvaturas principais são

$$\tilde{\lambda}^1 = \frac{-\lambda^1}{1 + 2h\lambda^1} \text{ e } \tilde{\lambda}^2 = \frac{-\lambda^2}{1 + 2h\lambda^2}$$

donde temos que $h = \frac{ac_1 + rc_2 + A}{B - c_2}$.

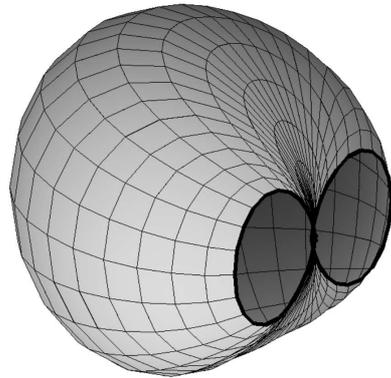
Com o Toro da proposição 3.2.1 vejamos algumas das superfícies associada pela Transformação de Ribaucour com segue-se abaixo.

$a = 7$
 $r = 4$
 $a_1 = 1$
 $a_2 = 0$
 $b_1 = 0$
 $b_2 = 0$
 $c_1 = 0$
 $c_2 = 0$
 $A = 0$
 $B = 0$



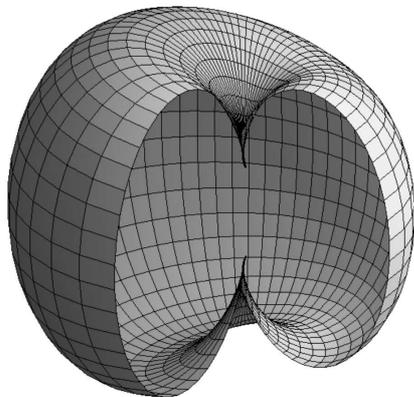
(a)

$a = 7$
 $r = 4$
 $a_1 = 1$
 $a_2 = 1$
 $b_1 = 0$
 $b_2 = 0$
 $c_1 = 0$
 $c_2 = 0$
 $A = 0$
 $B = 0$



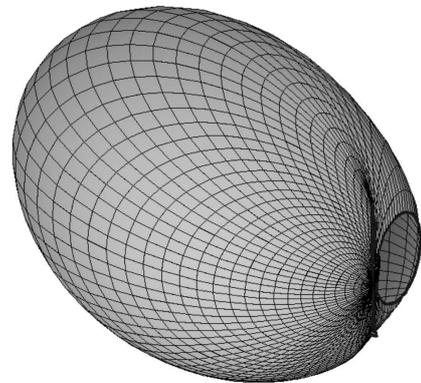
(b)

$a = 7$
 $r = 4$
 $a_1 = 1$
 $a_2 = 2$
 $b_1 = 2$
 $b_2 = 0$
 $c_1 = 3$
 $c_2 = 3$
 $A = 1$
 $B = 1$



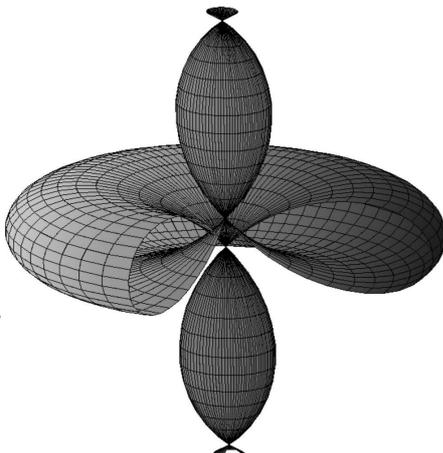
(c)

$a = 7$
 $r = 4$
 $a_1 = 2$
 $a_2 = -3$
 $b_1 = -3$
 $b_2 = 1$
 $c_1 = 2$
 $c_2 = -4$
 $A = -1$
 $B = 3$



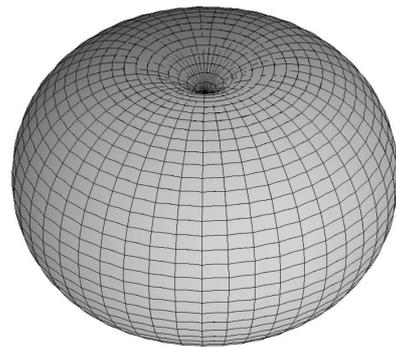
(d)

$a = 7$
 $r = 4$
 $a_1 = 0$
 $a_2 = 0$
 $b_1 = 1$
 $b_2 = 0$
 $c_1 = 1$
 $c_2 = -4$
 $A = 0$
 $B = 0$



(e)

$a = 7$
 $r = 4$
 $a_1 = 0$
 $a_2 = 0$
 $b_1 = 0$
 $b_2 = 0$
 $c_1 = 2$
 $c_2 = 0$
 $A = 0$
 $B = 0$



(f)

Figura 3.2: Superfície associada ao Toro pela Transformação de Ribaucour

3.3 Aplicação a um Cilindro

Proposição 3.3.1. *Vamos considerar a parametrização do cilindro dado por $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Então \tilde{X} é uma parametrização da superfície de Dupin localmente associada a X pela transformada de Ribaucour se, e somente se,*

$$\tilde{X} = X - \rho \cdot \left(((c - f_1) \cdot \sin u)', ((c - f_1) \cdot \cos u)', f_2' \right) \quad (3.20)$$

onde $\rho = \frac{2(f_1 + f_2)}{(f_1')^2 + (f_2')^2 + (c - f_1)^2}$ e

$$f_1 = a_1 \cos u + b_1 \sin u + c_1 + c, \quad (3.21)$$

$$f_2 = a_2 v^2 + b_2 v + c_2. \quad (3.22)$$

e

$$a_1, b_1, c, c_1, c_2, b_2, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: 12. As curvaturas principais e a métrica para a superfície S são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $a_j = 1$, para $1 \leq j \leq 2$. Assim, decorre das equações (2.78) a (2.83) que

$$\Omega^1 = f'_1, \quad \Omega^2 = f'_2, \quad \Omega = f_1 + f_2, \quad W = -f_1 + c \quad e \quad h = \frac{\Omega}{(-f_1 + c)},$$

onde $f_1(u)$ e $f_2(v)$ são funções de u e v respectivamente.

Para qualquer uma dessas funções a parametrização da superfície \tilde{X} definida por (2.75) é uma transformação de Ribaucour do cilindro. Afim de que \tilde{X} seja uma superfície de Dupin vamos considerar a expressão definida por (2.91)

$$S = (-f_1 + c)^2 + (f'_1)^2 + (f'_2)^2,$$

e

$$T^i = \begin{cases} 2(f_1 - c) & \text{se } i = 1, \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

Vamos primeiramente assumir que $\Omega^i \neq 0$ isto é, f_i é uma função não constante de u ou v , onde

$$\frac{dS(e_i)}{\Omega^i} = \begin{cases} 2(f_1 - c) + 2f''_1 & \text{se } i = 1, \\ 2f''_i & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

Portanto, a condição i do teorema (2.6.1) é satisfeita se, e somente se f_i e f_j são dadas como em (3.21) e (3.22). Além disso, as curvaturas principais associada são dadas por

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \frac{2c_1W + S}{S - 2\Omega c_1} & \text{se } i = 1, \\ \frac{4c_{i2}W}{S - 4\Omega c_{i2}} & \text{se } i \geq 2. \end{cases}$$

Se $\Omega^i = 0$ para algum i , isto é, $f_i = c_i$ é uma constante, $c_1 \neq c$ se $i = 1$.

Então a condição *ii*) do teorema (2.6.1) é trivialmente verificada e

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \frac{-(c - c_1)^2 + (f_2')^2}{(c - c_1)(c + c_1 + 2f_2) + (f_2')^2} & \text{se } i = 1, \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

Concluimos então que, em ambos os casos as funções f_1 e f_2 são dadas por (3.21) e (3.22). De (3.48) obtemos a superfície de Dupin associada que é dada por (3.20).

Com o Cilindro da proposição (3.3.1) obtivemos as seguintes superfícies associada pela Transformação de Ribaucour com segue-se abaixo. Veja figuras abaixo:

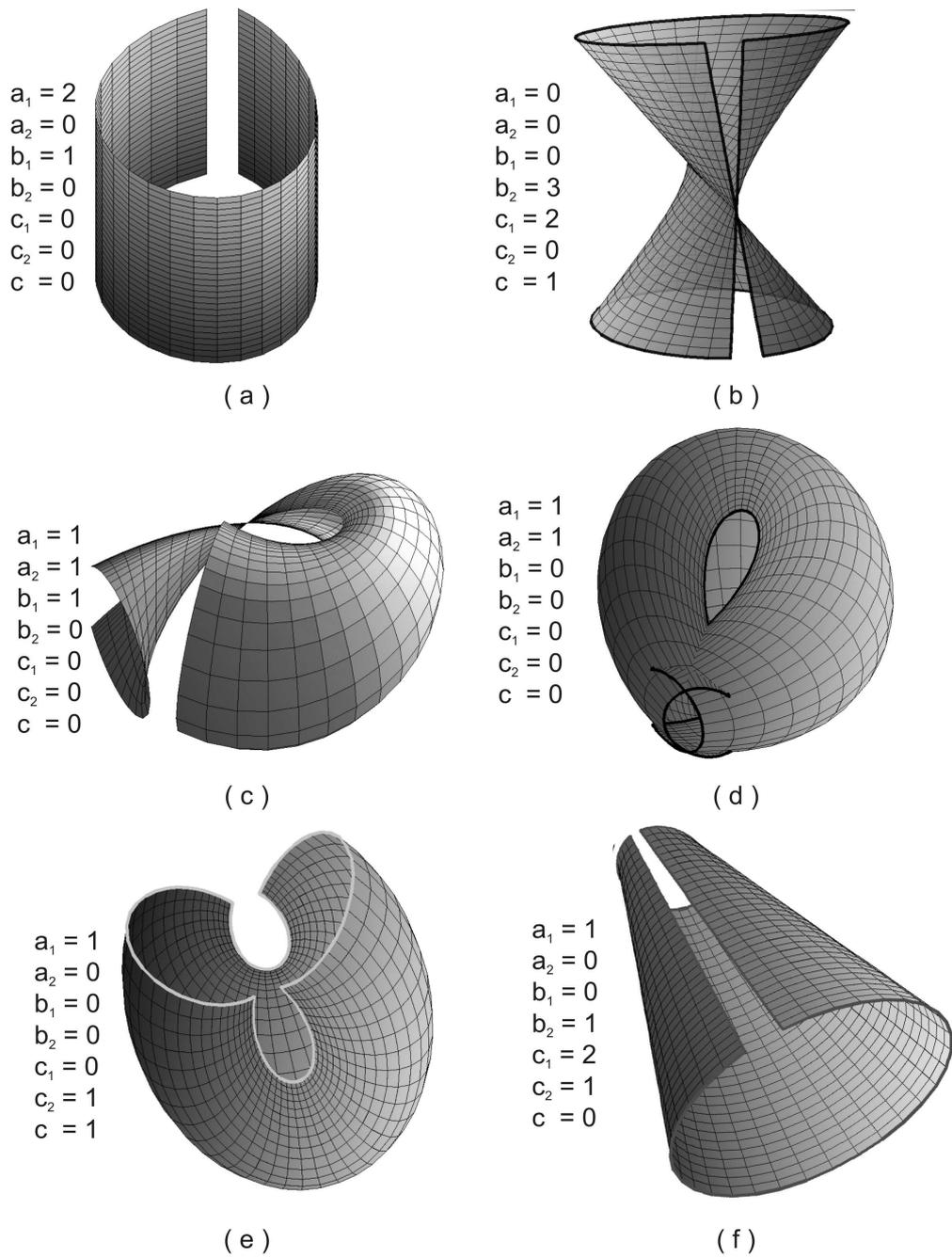


Figura 3.3: Superfície associada ao Cilindro pela Transformação de Ribaucour

3.4 Aplicação a uma Esfera S^2

Proposição 3.4.1. *Considere a esfera S^2 cuja parametrização é dada por $X(u, v) = (\text{senu} \cos v, \text{senu} \text{senv}, \cos u)$. Então \tilde{X} é uma parametrização de uma superfície de Dupin localmente associada a X , se e somente se, \tilde{X} é dada por (2.71) onde*

$$\Omega^1 = \cos u f_2 + f_1', \quad \Omega^2 = f_2'. \quad (3.23)$$

$$\Omega = \text{senu} f_2 + f_1, \quad W = -(\text{senu} f_2 + f_1). \quad (3.24)$$

e

$$f_1 = a_1 \cos u + b_1 \text{senu} + c_1 \quad (3.25)$$

$$f_2 = a_2 \cos v + b_2 \text{senv} + c_2. \quad (3.26)$$

onde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são constantes reais.

Demonstração: 13. As curvaturas principais da superfície M são dadas por $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$. A primeira forma fundamental de M fica escrita como $ds^2 = a_1^2 du^2 + a_2^2 dv^2$ onde, $a_2 = senu$ e $a_1 = 1$. Decorre da equação (3.4), (3.5) e (3.6) que $\Omega^1, \Omega^2, \Omega$ e W são dados como em (3.21) e (3.22), onde f_1 e f_2 acima definidas são funções diferenciáveis.

Para obtermos a superfície de Dupin \tilde{X} localmente associada a X pela transformada de Ribaucour, vamos considerar as equações de S, T^1 e T^2 de (2.91) a (2.93) que ficam escritas da seguinte maneira:

$$S = f_1^2 + f_2^2 + 2f_2(f_1 senu + f_1' cosu) + (f_1')^2 + (f_2')^2,$$

$$T^1 = -2W.$$

e

$$T^2 = -2W + 2cosu\Omega^1.$$

Consideremos inicialmente os casos para os quais as funções Ω^1 e Ω^2 são não-nulas. Desde que Ω^1 ou $\Omega^2 \neq 0$, podemos concluir do teorema 2.6.1 que as funções f_1 e f_2 são dadas por (3.25) e (3.26).

Assuma $\Omega^1 \equiv 0$, então isto equivale a $f_2 = c_2$ e $f_1 = -c_2 senu + c_1$, onde $c_1 \neq 0$. Neste caso, não necessariamente temos que $\Omega^2 \equiv 0$. Então a condição

ii) do teorema (2.6.1) é satisfeita para $i = 1, 2$.

- a) Para escolha geral das constantes envolvidas nas funções (3.25) e (3.26), obtemos $\tilde{\lambda}^1$ e $\tilde{\lambda}^2$ são independentes de u_1 e u_2 e possuem multiplicidade um.
- b) se $a_1 = a_2 = b_0$, $b_1 = -c_2$ e $c_1 \neq 0$ (ou seja $\Omega^1 = \Omega^2 = 0$), então \tilde{X} tem uma curvatura principal de multiplicidade 2, chamada $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{\lambda}^2$ que é uma função independente de u e v .
- c) Se $c_1 = 0$ e $c_2 + b_1 \neq 0$ então $\tilde{\lambda}^1 = 1$ e $\tilde{\lambda}^2 \neq 1$.
- d) Se $c_1 = 0$, $c_2 + b_1 = 0$ e $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ então $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{\lambda}^2 = 1$.

Assim, observamos que a transformação de Ribaucour transforma superfícies de Dupin em outras superfícies de Dupin. Uma hiperfície de Dupin cujas curvaturas principais tem multiplicidades constantes é chamada de superfície própria de Dupin.

Com a esfera da proposição 3.4.1 e suas considerações obtivemos a seguinte superfície associada pela Transformação de Ribaucour com segue-se abaixo. Veja figura a seguir.

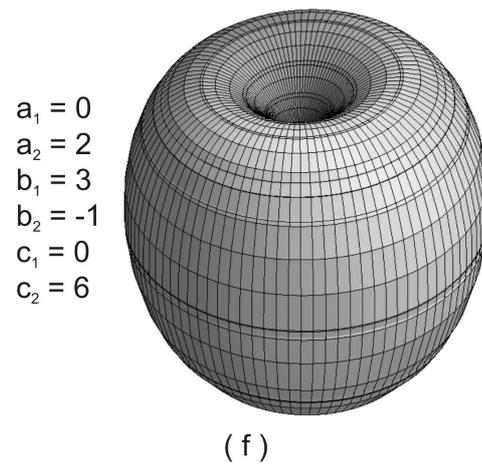
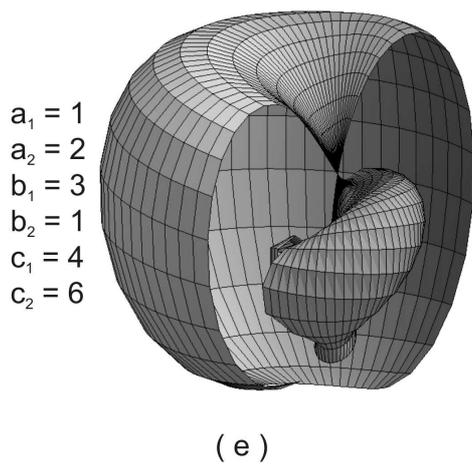
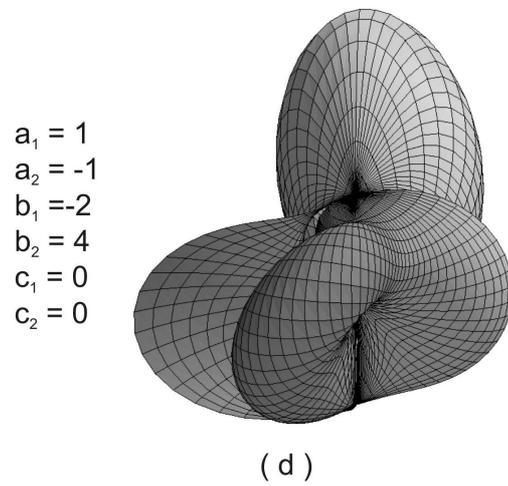
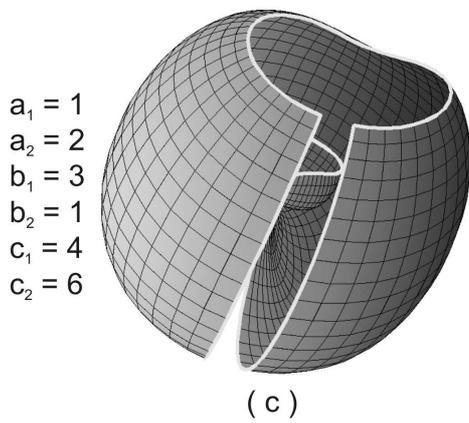
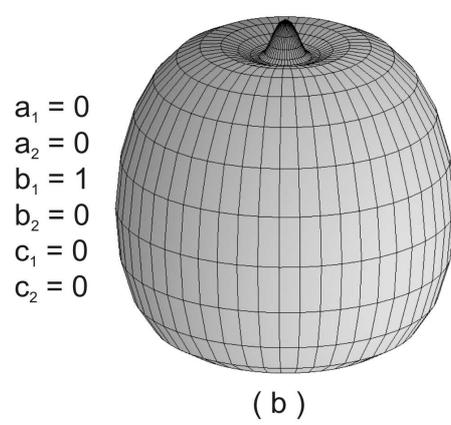
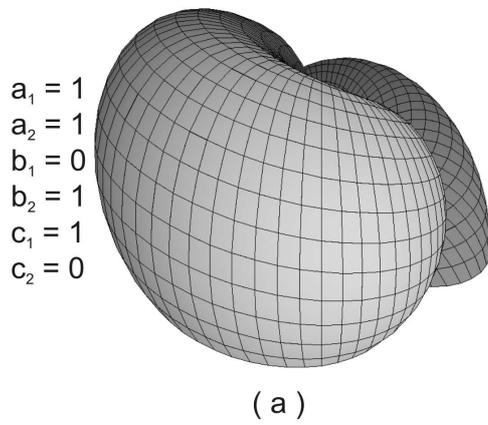


Figura 3.4: Superfície associada a Esfera pela Transformação de Ribaucour

Capítulo 4

Conclusão

Conforme foi visto no teorema 1 e nos exemplos das aplicações apresentadas, as superfícies associadas pela transformação de Ribaucour podem ser obtidas sempre que restritas as hipóteses do teorema 1 e do teorema 3. Percebemos que para certas superfícies como o plano por exemplo, as superfícies associadas se parecem em alguns casos, com a de um parabolóide hiperbólico e em outros com um subconjunto de uma esfera. Num caso particular assemelham-se a um subconjunto de um plano ou de um cilindro. Já para o toro, os aspectos das superfícies obtidas assumiram características bem diversificadas e desconhecidas das superfícies mais tradicionais. Porém em alguns casos, a aparência de um elipsóide ou de um subconjunto de uma esfera podem ser percebidos sem dificuldades. Nos casos do cilindro e esfera pode-se perceber mais ainda que as superfícies associadas possuem aspectos insólitos quando comparados as superfícies a que estamos mais familiarizados. Assim, transformação de Ribaucour leva superfícies de Dupin em superfícies de Dupin.

Apêndice A

Scripts do Maple

Segue-se abaixo, os scripts feito no Maple para gerar cada umas das superfícies apresentadas como aplicações deste trabalho. Cada um deles está integrado ao JavaView.

A.1 *Script do Plano*

```
> restart: libname:
> installationPath:="C:\\Arquivos de programas\\Maple 10\\JavaViewLib";
> libname:=installationPath,libname:
> with(plots): with(linalg): with(JavaViewLib):
> a1:=1; a2:=1; b1:=1; b2:=-1; c1:=-1; c2:=1; c:=1;
> X:= (u,v) -> <u,v,0>;
> f1:= u -> a1*u^2+b1*u+c1;
> f2:= v -> a2*v^2+b2*v+c2;
```

```
> Diff1 := u -> 2*a1*u+b1;
> Diff2 := v -> 2*a2*v+b2;
> A:= (u,v) -> 2*(f1(u)+f2(v));
> A(0,10);
> B:= (u,v) -> Diff1(u)^2 + Diff2(v)^2 +c^2;
> B(0,0);
> Z := (u,v) -> <Diff1(u), Diff2(v),-c>;
> Y := (u,v) -> X(u,v) - ( A(u,v)/B(u,v) ) * (Z(u,v));
> plot3d(Y(u,v),u=-1..1,v=-1..1): runJavaView(%);
```

A.2 *Script do Toro*

```
> with(plots): with(linalg):
installationPath:="c:\\Arquivos de programas\\Maple 10\\JavaViewLib":
libname:=installationPath,libname: with(JavaViewLib):
> a:=7; r:=4; a1:=0; b1:=0; c1:=1; a2:=0; b2:=0; c2:=-4; A:=0; B:=0;
> X:= (u1,u2) -> < (a+r*cos(u2))* cos(u1), (a+r*cos(u2))*sin(u1), r*sin(u2)>;
> plot3d(X(u1,u2),u1=0..2*Pi,u2=-Pi/2..3*Pi/2,numpoints=2000):
> N:= (u1,u2) ->
< (a+r*cos(u2))*cos(u1)*r*cos(u2), (a+r*cos(u2))*sin(u1)*r*cos(u2),
(a+r*cos(u2)) * (sin(u1))^2 * r * sin(u2) +
+ (a+r*cos(u2))* (cos(u1))^2 * r * sin(u2)>;
> f1 := u1 -> a1 * cos(u1) + b1 * sin(u1) + c1;
> f2 := u2 -> a2 * cos(u2) + b2 * sin(u2) + c2;
> Diff1 := u1 -> -a1* sin(u1) + b1* cos(u1);
> Diff2 := u2 -> -a2* sin(u2) + b2* cos(u2);
> W:=(u1,u2) -> -f1(u1) * cos(u2) - f2(u2) +B;
> Omega:=(u1,u2) ->(a+r*cos(u2)) * ( a1 * cos(u1) + b1 * sin(u1) + c1 ) +
+ r* ( 2 * cos(u2) + b2 * sin(u2) + c2 )+A;
> Omega2 := (u1,u2) -> (7+4*cos(u2))*f1(u1)+4*f2(u2);
> Omega2(0,0);
> Omega1:= u1 -> -a1* sin(u1) + b1* cos(u1);
> Omega2:=(u1,u2) -> (-a2* sin(u2) + b2* cos(u2)) -
(a1 * cos(u1) + b1 * sin(u1) + c1) * sin(u2);
```

```

> Z:=(u1,u2) -> (Omega1(u1))^2+(Omega2(u1,u2))^2 + (W(u1,u2))^2;
> expand(Z): simplify(Z):
> Y := (u1,u2) ->
    X(u1,u2) - (2*Omega(u1,u2)/Z(u1,u2) ) * ( (-W(u1,u2))*(N(u1,u2)) );
> Y(u1,u2);
> plot3d(Y(u1,u2), u1=-Pi/2..Pi/2, u2=-Pi/2..Pi/2, numpoints=1900);

```

A.3 *Script do Cilindro*

```
> restart: libname:
> installationPath:="C:\\Arquivos de programas\\Maple 10\\JavaViewLib":
> libname:=installationPath,libname:
> with(plots): with(linalg): with(JavaViewLib):
> a1:=2; b1:=1; c1:=0; c:=0; a2:=0; b2:=0; c2:=0;
> X:=(u,v) -> <cos(u),sin(u),v>;
> f1 := u -> a1*cos(u)+b1*sin(u)+c+c1;
> f2:= v -> a2*v^2 + b2 *v + c2;
> Diff1 := u -> -a1*sin(u)+b1*cos(u);
> Diff2 := v -> 2*a2 *v+ b2;
> A:=(u,v) -> 2*((a1*cos(u)+b1*sin(u)+c+c1)+(a2*v^2 + b2 *v + c2));
> B:=(u,v) -> ( -a1*sin(u)+b1*cos(u) )^2 + ( 2*a2 * v+ b2 )^2 +
      +(c-(a1*cos(u)+b1*sin(u)+c+c1))^2;
> C:=(u,v) -> A(u,v)/B(u,v);
> Z := (u,v) ->
      < (a1*sin(u)-b1*cos(u)) * sin(u) + cos(u) * (-a1*cos(u)-b1*sin(u)-c1) ,
      (a1*sin(u)-b1*cos(u)) * cos(u) - sin(u) * (-a1*cos(u)-b1*sin(u)-c1) ,
      2*a2 *v+ b2 >;
> Y := (u,v) -> X(u,v)- A(u,v)/B(u,v) * Z(u,v);
> plot3d(Y(u,v),u=-1..1,v=-1..1,numpoints=800,lightmodel=light2);
> runJavaView(%);
```

A.4 *Script da Esfera*

```
> with(plots): with(linalg):
installationPath:="c:\Arquivos de programas\Maple 10\JavaViewLib":
libname:=installationPath,libname: with(JavaViewLib):
> a1:=0; b1:=2; c1:=3; a2:=-1; b2:=0; c2:=6;
> X:= (u1,u2) -> < sin(u1)*cos(u2), sin(u1)*sin(u2), cos(u1)>;
> plot3d(X(u1,u2),u1=0..2*Pi,u2=Pi..2*Pi,numpoints=2000):
> N:= (u1,u2) ->
    < ( sin(u1) )^2 * cos(u2), ( sin(u1) )^2 * sin(u2), cos(u1)* sin(u1) >;
> f1 := u1 -> a1 * cos(u1) + b1 * sin(u1) + c1;
> f2 := u2 -> a2 * cos(u2) + b2 * sin(u2) + c2;
> Diff1 := u1 -> -a1* sin(u1) + b1* cos(u1);
> Diff2 := u2 -> -a2* sin(u2) + b2* cos(u2);
> W:=(u1,u2) -> - ( sin(u1) * f2(u2) + f1(u1));
> Omega:=(u1,u2) -> -(sin(u1) * f2(u2) + f1(u1));
> Omega1 := (u1,u2) -> cos(u1)* f2(u2) + Diff1(u1);
> Omega2:= (u2) -> -a2 * sin(u2) + b2 * cos(u2);
> Z:=(u1,u2) -> (Omega1(u1,u2))^2+(Omega2(u2))^2 + (W(u1,u2))^2;
> expand(Z): simplify(Z):
> Y := (u1,u2) ->
    X(u1,u2) - (2*Omega(u1,u2)/Z(u1,u2) ) * ( ((Omega1(u1,u2) +
```

```
    + Omega2(u2))-W(u1,u2))*(N(u1,u2)) );  
> plot3d(Y(sinh(u1),u2), u1=-Pi..Pi, u2=-Pi..Pi, numpoints=9000);  
> runJavaView(%);
```

Referências Bibliográficas

- [1] K.TENENBLAT, A.V. Corro, W. Ferreira *On Ribaucour Transformations for Hypersurfaces*, Matemática Contemporânea Vol.17, pág. 137-158, 1999.
- [2] K.TENENBLAT, *Mininal and cmc surfaces obtained by Ribaucour transformations*, Proceedings of the CMI Summer School, MSRI, to appear.
- [3] BIANCHI,L.,*Lezioni di Geometria Differenciabile*, Terza Edizione, Bologna Nicola Zanichelli, Ed., 1927.
- [4] Minimal surfaces obtained by Ribaucour transformations,Geom. Dedicata, 96 (2003), 117-150, MR 1 956 836.
- [5] CARMO, M.P. 8º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, *Formas Diferenciais e Aplicações*. Poços de Caldas, 5 a 23 de 1971
- [6] CARMO, M.P., *Geometria Diferencila de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005/2006 - Segunda Edição.(Textos Universitários)

- [7] CARMO, M.P.*III* Escola Latino Americana de Matemática, *O Método do Referencial Móvel*. IMPA, 1976.
- [8] ANDRADE,L.N., *Introdução à Computação Algébrica com o Maple*, Apostila em PDF da UFBP.
- [9] SPIVAK Michael, *A comprehensive Introdution to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1979,v.4.
- [10] CORRO, A. V. Ferreira, W. and Tenenblat, K.: On Ribaucour transformations for hypersurfaces, *Math. Contemp.* 17(1999), 137-160.
- [11] <http://www.javaview.de>.