UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE HOPF PARA UMA CLASSE DE SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN

FRANCISCO ETEVAL DA SILVA FEITOSA

MANAUS

2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO ETEVAL DA SILVA FEITOSA

GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE HOPF PARA UMA CLASSE DE SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS
2003

FRANCISCO ETEVAL DA SILVA FEITOSA

GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE HOPF PARA UMA CLASSE DE SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Aprovado em Janeiro de 2003.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof^o Dr. Renato Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof^o Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof^o Dr.José Miguel Martins Veloso
Universidade Federal do Pará.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador pelo acompanhamento constante;

Aos meus familiares pelo apoio;

A minha esposa por ter estado presente em todos os momentos que precisei.

Aos colegas da instituição que auxiliaram na discussão da temática e contribuíram no delinear do caminho;

Aos colegas da turma que incentivaram.

RESUMO

GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE HOPF PARA UMA CLASSE DE SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN

Esta dissertação tem como finalidade apresentar uma exposição clara e detalhada de um trabalho de Robert L. Bryant intitulado Análise Complexa e uma Classe de Superfícies de Weingarten, superfícies essas, imersas em E^3, que satisfazem a equação $H = f(H^2 - K)$ onde H e K são as curvaturas média e gaussiana, respectivamente, e f é uma função real diferenciável.
As superfícies com curvaturas média e gaussiana constante, pertencem claramente a esta classe e se elas têm gênero zero os teoremas de Hopf e de Liebermann, respectivamente, asseguram que elas são esferas usuais de E^3.
O principal resultado deste trabalho caracteriza as esferas usuais como as únicas superfícies de Weingarten de gênero zero pertencentes à classe mencionada.

Palavra chave: Superfícies de Weingarten, Imersão e Esferas usuais.

ABSTRACT

GENERALIZATION OF HOPF'S THEOREM FOR A CLASS OF WEINGARTEN SURFACES

The purpose of this essay is to make a clear and detailed exposition of the work of Robert L. Bryant on the class of Weingarten Surfaces immersed in the Euclidean tree-space, E^3, that satisfy the equation $H = f(H^2 - K)$, where H and K denote the mean and the Gaussian curvatures respectively and f is a smooth function.
The surfaces with constant mean curvature and those with constant Gaussian curvature clearly belong to this class and if they have genus zero, the Hopf's and the Liebermann's theorems respectively state that they are standard spheres of E^3.
The main result of this work characterizes the standard spheres as the only Weingarten surface of genus zero in the mentioned class.

key word:Weingarten Surfaces, Immersion and Standard Spheres.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sistemático do artigo de Robert L. Bryant[1] que faz uma generalização do teorema de Hopf[2] para uma classe de superfícies de Weingarten, que são superfícies que satisfazem uma relação da forma $U(H, K) = 0$(H e K são as curvaturas média e gaussiana, respectivamente, de uma superficie S e U é uma função diferenciável) chamada de relação de Weingarten ,sendo o principal resultado o seguinte teorema:

Teorema - Seja $X : S^2 \longrightarrow E^3$ uma imersão diferenciável que satisfaz uma relação de Weingarten da forma $H = f(H^2 - K)$ onde, f é uma função diferenciável definida no intervalo $(-\varepsilon, \infty)$, K e H são as curvaturas gaussiana e média, respectivamente , de X. Então $X(S^2)$ é uma 2-esfera redonda em E^3.

Este resultado surgiu a partir de dois teoremas: O teorema de Hopf, mostrando que toda 2-esfera imersa em E^3 com curvatura média constante é uma 2-esfera redonda em E^3;E o teorema de Liebermann, afirmando que toda 2-esfera imersa em E^3 com curvatura gaussiana constante é uma 2-esfera redonda em E^3. Observe que Hopf toma H como constante, enquanto, Bryant , considera H dada por uma relação de Weingarten.

O teorema de Liebermann é normalmente provado assumindo que a esfera não é redonda e fazendo a análise local de um ponto onde a diferença das curvaturas principais é máxima. Já na prova do teorema de Hopf , S^2 é vista como uma superfície de Riemann e é usado o fato de que toda forma quadrática holomorfa em S^2 é identicamente nula. Hopf constrói a partir da segunda forma fundamental da imersão uma forma quadrática holomorfa cujos zeros são os pontos umbílicos da imersão e consequentemente esta é constituída inteiramente de pontos umbílicos e é portanto a esfera usual do espaço euclidiano. Hopf chegou até a conjecturar que a esfera usual do E^3 seria a única superfície compacta imersa em E^3 com curvatura média constante. Mas, em 1986 Went [3] deu um contra-exemplo mostrando a existência de um toro imerso em E^3 com curvatura média constante.

O propósito do autor era provar o teorema de Liebermann pela teoria das superfícies de Riemann, mas desenvolveu-se um resultado mais geral, que é o principal resultado deste trabalho.

O teorema de Bryan torna as afirmações feitas por Hopf e por Liebermann resultados imediatos. Os dois resultados diferem apenas na escolha de f, enquanto Hopf toma f como constante, Liebermann a toma como $f = \sqrt{c^2 + x}$, onde c^2 é a curvatura gaussiana constante.

Este trabalho está dividido em quatro partes. Na primeira, damos algumas definiç˜oes e fatos importantes da geometria Riemanniana necessários para a compreenssão do trabalho . Na segunda, fazemos um estudo das superfícies através do método do referencial móvel.Na terceira, estudamos uma classe de equações de Weingarten, onde é provado o principal teorema. E por fim, fazemos algumas considerações sobre superfícies de Weingarten em espaços de curvatura constante.

Capítulo 2

Generalidades

Apresentaremos a seguir algumas definições e fatos importantes relativos às superfícies Riemannianas.

Denotaremos o espaço euclidiano por E^3 e nele fixaremos um produto interno e uma orientação. O conjunto dos vetores tangentes a uma superfície $S \subset E^3$ será representado por T_pS e a diferencial de uma aplicação diferenciável $X : S_1 \rightarrow S_2$ entre duas superfície S_1 e S_2 em um ponto $p \in S_1$, por dX_p onde $dX_p : T_pS_1 \rightarrow T_{X(p)}S_2$. E diferenciável significará C^∞.

Definição 2.1 - Uma aplicação $X : S \rightarrow E^3$ diferenciável é dita uma imersão se para todo $p \in S$ a aplicação $dX_p : T_pS \rightarrow E^3$ é injetora. Se além disso, X for um homeomorfismo de S sobre $X(S)$, X é dita um mergulho.

Na maior parte das questões puramente locais de Geometria é indiferente tratar com imersões ou mergulhos. Isto provém da seguinte proposição que mostra ser toda imersão localmente um mergulho.

Proposição 2.1 - Seja $X : S \rightarrow E^3$,uma imersão de S em E^3. Para todo ponto $p \in S$, existe uma vizinhança $V \subset S$ de p tal que a restrição $X \mid V \rightarrow E^3$ é um mergulho.

Esta proposição,nada mais é, do que uma consequência do teorema da função inversa. Sua demonstração pode ser encontrada em [4].

Definição 2.2 - Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma superfície regular $S \subset E^3$ é uma correspondência que associa a cada ponto p de S um produto interno $<,>_p$ no espaço tangente T_pS, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset E^2 \rightarrow S$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, x_2) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_1}(q) = dx_q(1, 0)$, e $\frac{\partial}{\partial x_2}(q) = dx_q(0, 1)$ então

$$< \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) >= g_{ij}(x_1, x_2)$$

é uma função diferenciável em U.

As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset E^2 \to S$. Uma superfície regular com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma Superfície Riemanniana.

Definiremos a seguir formas diferenciais em E^3 que serão usadas posteriormente para obtermos as equações de estrutura de E. Cartan em E^3, que são fundamentais no estudo das superfícies regulares em E^3 pelo método do referencial móvel.

Definição 2.3 - Um campo de vetores em E^3 é uma correspondência que a cada ponto $p \in E^3$ associa um vetor $X(p)p \in T_pE^3$. Num sistema de coordenadas, é possível escrever:

$$X(p) = \sum_{i=1}^{3} a_i(p)e_i,$$

onde cada $a_i : U \to R$ é uma função em U e e_i é a base canônica de E^3 com origem em p.

Para cada espaço tangente E^3_p, consideramos o espaço dual $(E^3_p)^*$, que é o conjunto das funções lineares $\varphi : E^3_p \to E$. Uma base para $(E^3_p)^*$ é obtida tomando $(dx_i)_p, i = 1, 2, 3$, onde $x_i : E^3 \to E$ é a projeção na i-ésima coordenada.

Definição 2.4 - Um Campo de formas lineares ou forma exterior de grau 1 em E^3 é uma aplicação w que a cada $p \in E^3$ associa $w(p) \in (E^3_p)^*$; w pode ser escrito na forma

$$w(p) = \sum_{i=1}^{3} a_i(p)dx_i(p)$$

onde $a_i : E^3 \to E$. Se as funções a_i forem diferenciáveis w chama-se forma diferenciável de grau 1.

Seja $\bigwedge^2(E^3_p)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : E^3_p \times E^3_p \to E$ bilineares e alternadas.

Se φ_1 e φ_2 são formas lineares podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ em $\bigwedge^2(E^3_p)^*$ definido

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = det(\varphi_i(v_j)) = det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}$$

O elemento $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \bigwedge^2(E_p^3)^*$ será indicado por $(dx_i \wedge dx_j)_p$. É possível mostrar que o conjunto $(dx_i \wedge dx_j)_p$, $i < j$ forma uma base para o espaço $\bigwedge^2(E_p^3)^*$. Além disso,

$$(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p = -(dx_j)_p \wedge (dx_i)_p$$

Definição 2.5 - Um campo de formas bilineares alternadas ou forma exterior de grau 2 em E^3 é uma aplicação w que a cada $p \in E^3$ associa $w(p) \in \bigwedge^2(E_p^3)^*$; w pode ser escrito na forma

$$w = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

onde, $i, j = 1, 2, 3$ e $a_{ij} : E^3 \rightarrow E$.

Se as funções a_{ij} forem diferenciáveis, w é chamada uma forma diferenciável de grau 2.

No caso particular de E^3, um campo de vetores em um abero U de uma superfície $S \subset E^3$ é uma aplicação v que a cada ponto $p \in U$ associa $v(p)$ em T_pS; O campo v é dito diferenciável em $p \in U$ se, para alguma parametrização $f(u, v)$ em p, as funções $\alpha(u, v)$ e $\beta(u, v)$ definidas por $v(p) = \alpha(u, v)f_u + \beta(u, v)f_v$ são diferenciáveis em p.

Sabemos que a noção de isometria é o conceito de equivalência para as propriedades métricas das superfícies. É possível definir outros tipos de equivalência no estudo das superfícies. Para o estudo de problemas associados com as funções analíticas de variáveis complexas é importante a transformação conforme,que trataremos a seguir.

Definição 2.6 - Um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$ é chamado uma transformação conforme se,$\forall p \in S$ e $v_1, v_2 \in T_pS$, tem-se

$$< v_1, v_2 >_p = \lambda(p) < d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) >,$$

onde $\lambda(p) > 0$ é uma função diferenciável em S; as superfícies S e $\overline{S}$ são ditas então conformes.

O significado geométrico de uma transformação conforme é que ela preserva os ângulos formados por duas curvas que se cortam.

Para o caso de E^2, que identificamos com o plano complexo , é bem conhecido que as transformações conformes são as funções holomorfas ou antiholomorfas (antiholomorfa quer dizer que a função conjugada é holomorfa) com derivadas não nulas.

A propriedade mais importante das transformações conformes é expressa pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1- Duas superfícies regulares quaisquer são localmente conformes.

A demonstração baseia-se na possibilidade de toda superfície regular admitir um sistema de coordenadas locais, em qualquer ponto da superfície , no qual os coeficientes da primeira forma quadrática sejam

$$E = \lambda(u, v) > 0$$

$$F = 0 \qquad G = \lambda(u, v) > 0$$

um tal sistema é chamado sistema isotérmico. O teorema que garante a existência de coordenadas isotérmicas é o seguinte:

Teorema 2.2(Existência de coordenadas isotérmicas)- Seja $f : \triangle \rightarrow E^n$ uma aplicação contínua tal que $f|\triangle^0(\triangle^0$ interior de $\triangle)$ é uma imersão diferenciável (C^∞). Então existe um homeomorfismo $d : \triangle \rightarrow \triangle$ tal que $d|\triangle^0$ é de classe C^k e a aplicação $f \circ d$ é conforme.

A demonstração deste teorema foge aos objetivos do presente trabalho e pode ser encontrada em [5]

Veremos a seguir a noção de campos de direção numa superfície. Esta noção será útil quando formos demonstrar o teorema de Hopf, que é peça importante na demonstração de nosso principal resultado.

Um campo de direção em uma região U de uma superfície S é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in U$ um subespaço vetorial de dimensão 1 do espaço tangente de S.

Se não for possível estender continuamente o campo de direção por todo o aberto U, isto é, se o campo não estiver definido em um ponto $p \in U$, então dizemos que o ponto p é uma singularidade do campo.

Definimos índice I, de uma singularidade isolada do seguinte modo:

Seja p uma singularidade isolada de um campo de direção numa região U de uma superfície S. Seja γ uma curva fechada simples em torno de p, onde p é o único ponto singular no interior de γ, isto é possível tendo em vista que p é ponto isolado.

Consideremos γ dada por uma função de parâmetro t, $\gamma(t)$,$0 \leq t \leq 1$. Escolhamos uma das duas possíveis direções ao longo de γ a partir de $\gamma(0)$.

Nosso intuíto é medir a variação do ângulo do campo, quando este percorre a curva γ. Mas, tal variação é medida com respeito a algo fixo. Sendo assim , suponhamos que γ seja pequena o suficiente para estar contida em uma região sem pontos singulares e onde está definido um sistema de coordenadas (u, v). Quando fazemos , $u = 0$, definimos uma direç˜ao em cada ponto, que será representada por d. Seja $\angle[d, F]$ o ângulo entre a direção d e a direç˜ao F escolhida, seja $\delta_\gamma \angle[d, F]$ a mudança total deste ângulo quando o campo completa uma volta em torno de γ na direção positiva. Então definimos

$$2\pi I = \delta_\gamma \angle[d, F]$$

Um fato interessante a respeito de I, é que ele não depende de d nem da curva γ.

Relacionaremos agora, índice e característica de Euler de uma superfície compacta.

Primeiramente, lembremos que se S é uma superfície compacta, conexa e orientável imersa em E^3, então S é homeomorfa a uma esfera com g asas $(g \geq 0)$ [2]. O número g é chamado de gênero de S. Ao número inteiro $(2-2g)$ chamamos de característica de Euler de S, e o representaremos por $\chi(S)$.

Teorema 2.2 - Dada uma superfície S de gênero g, nela está definido um campo de direção que possui um número finito de singularidades tal que a soma dos índices destas é $\chi(S)$.

Mais adiante, mostraremos que esta soma não depende do campo de direção escolhido.

Para concluirmos este capítulo, definiremos o índice de um ponto umbílico.

Sejam k_1 e k_2 as curvaturas principais de uma superfície S. Sabemos que se uma curva regular e conexa γ em S é tal que $\forall p \in \gamma$ a tangente a γ é uma direção principal de S, isto é, correspondente a k_1 ou k_2, então γ é dita uma linha de curvatura. Os pontos de S onde $k_1 = k_2$, são chamados de pontos umbílicos de S.

Seja $p \in S$ um ponto umbílico isolado. Então p é uma singularidade isolada de cada uma das duas famílias de linha de curvatura, uma dada por k_1 e outra por k_2(convencionamos $k_1 \geq k_2$). Sendo assim, p tem um índice com respeito a cada uma destas famílias; mas pelo fato das linhas de uma família serem ortogonais às linhas da outra família, segue imediatamente da definição de índice que estes dois índices são iguais. Assim o índice de um ponto umbílico fica bem definido e satisfaz a igualdade (para demonstração ver [1]).

$$I(p) = -\frac{1}{2\pi}.\frac{1}{2}\delta(arg\Phi)$$

onde Φdz^2 é a expressão local num sitema de coordenadas em torno do ponto umbílico de uma forma quadrática complexa definida globalmente em S, cujos zeros são pontos umbílicos da superfície e $Im(\Phi dz^2) = 0$ determinam campos de direção em S. A expressão $\delta(arg\Phi)$ representa a variação do argumento de Φ.

Capítulo 3

A Geometria das Superfícies através do Método do Referencial Móvel

Neste capítulo estudaremos as superfícies através do Método do Referencial Móvel. E o primeiro passo é definirmos o que é um referencial adaptado.

Definição 3.1 - Um Referencial adaptado em um aberto U de M será uma terna de funções diferenciáveis $E_i : U \rightarrow E^3$ $(i = 1, 2\, e\, 3)$ com a seguinte propriedade:$\forall$ p $\in$ U,$(E_1(p), E_2(p),$ $E_3(p)$)é uma base ortonormal orientada em E^3, onde $E_3(p)$é normal em $X^*(T_pM) \subseteq E^3$.

Se acontecer de termos um outro referencial adaptado $\{E_i^*/i = 1, 2\, e\, 3\}$,no aberto U de M ,é possível obtermos uma única função diferenciável

$$\theta : U \rightarrow E/2\pi Z$$

tal que

$$E_1^* = \cos\theta E_1 + \sin\theta E_2$$
$$E_2^* = \cos\theta E_2 - \sin\theta E_1$$
$$E_3^* = E_3$$

Neste caso ,dizemos que $\{E_i^*\}$ é uma rotação de $\{E_i\}$ por θ.

Estabeleceremos a seguir as chamadas equações de estrutura do E^n.

Seja U$\subset$ E^n, aberto, e sejam $E_1, ..., E_n$ campos diferenciáveis de vetores em U de tal modo que, $\forall p \in U$, se tenha $< E_i, E_j >= \delta_{ij}$(para simplificarmos a notação, algumas vezes escreveremos $E_i.E_j$ em vez de $< E_i, E_j >$), onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se i$\neq$j, $i, j = 1, ..., n.$. Um tal conjunto de vetores é o que chamamos de referencial ortonormal móvel em U.

A partir do referencial $\{E_i\}$ definimos formas diferenciais lineares $\omega_1, ..., \omega_n$ pela condição $\omega_i(E_j) = \delta_{ij}$; isto é, para cada $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é base dual da base $\{(E_i)_p\}$.O conjunto das formas diferenciais $\{\omega_i\}$é chamado coreferencial associado ao referencial $\{E_i\}$.

Podemos pensar no campo E_i como uma aplicação diferenciável

$$E_i : U \subset E^n \rightarrow E^n$$

e a diferencial

$$(dE_i)_p : E^n \rightarrow E^n$$

em $p \in U$,é uma aplicação linear. Portanto, para todo $v \in E^n$, podemos escrever

$$(dE_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v) E_j$$

Dessa forma, as expressões $(\omega_{ij})_p(v)$, acima definidas, dependem linearmente de v e portanto $(\omega_{ij})_p$ é uma forma linear em E^n. E pelo fato de E_i ser diferenciável, (ω_{ij}) é uma forma diferenciável linear. Assim, escrevemos

$$dE_i = \sum_j \omega_{ij} E_j \qquad (1)$$

como definição das formas ω_{ij}, que são chamadas formas de conexão do E^n no referencial $\{E_i\}$.

Mostraremos agora que as formas ω_{ij} são anti-simétricas, isto é, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Derivando a expressão

$$< E_i, E_j >_p = \delta_{ij}$$

obteremos

$$0 =< dE_i, E_j > + < E_i, dE_j >$$
$$0 =< \sum_j \omega_{ij} E_j, E_j > + < E_i, \sum_i \omega_{ji} E_i >$$
$$0 = \omega_{ij} + \omega_{ji}.$$

O fato mais importante no método do referencial móvel é que as formas ω_i e ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estrutura de Eli Cartan.

Teorema 3.1(Equações de Estrutura do E^n)- Seja $\{E_i\}$ um referencial ortonormal móvel em um aberto U de R^n. Sejam ω_i o coreferencial associado a $\{E_i\}$, e ω_{ij} as formas de conexão de U neste referencial. Então:

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \qquad (2)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} k = 1, ..., n. \qquad (3)$$

Demonstração - Seja $a_1 = (1, 0, ..., 0), a_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., a_n = (0, 0, ..., 0)$ a base canônica do E^n. Seja $x_i : U \to E$ a função que faz corresponder a cada ponto $p = (x_1, ..., x_n) \in U$ a sua i-ésima coordenada. Então dx_i é uma forma diferencial em U, e como $dx_i(a_j) = \delta_{ij}$, concluímos que dx_i é o coreferencial associado ao referencial a_i.
O referencial dado se exprime em termos a_i por

$$E_i = \sum_j \beta_{ij} a_j, \qquad (4)$$

onde os β_{ij} são funções diferenciáveis em U e, para cada $p \in U$, a matriz $(\beta_{ij}(p))$ é uma matriz ortogonal. Como $\omega_i(E_j) = \delta_{ij}$, temos

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j. \qquad (5)$$

Diferenciando (4), obteremos

$$dE_i = \sum_k d\beta_{ik} a_k = \sum_k d\beta_{ij} \sum_j \beta_{jk} E_j$$

.
Como $dE_i = \sum_j \omega_{ij} E_j$, concluímos que

$$\omega_{ij} = \sum_k d\beta_{ik} \beta_{jk}, \qquad (6)$$

ou seja

$$\sum_j \omega_{ij} \beta_{js} = \sum_{jk} d\beta_{ik} \beta_{js} = d\beta_{is}, s = 1, ..., n. \qquad (7)$$

Finalmente, diferenciando exteriormente (5) e usando (7), obteremos

$$d\omega_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_{jk} \omega_{ik} \beta_{hj} \wedge dx_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki},$$

que é a primeira equação de estrutura (2).

Diferenciando (6) e usando (7), obteremos

$$d\omega_{ij} = -\sum_k d\beta_{ik} \wedge d\beta_{jk} = -\sum_k (\sum_{l=1}^{n} \omega_{il} \beta_{lk}) \wedge (\sum_s \omega_{js} \beta_{sk})$$

$$d\omega_{ij} = -\sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{js} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj},$$

que é a segunda equação de estrutura (3). c.q.d..

Um fato importante que possibilita o uso do método do referencial móvel é o de que, dada uma imersão $X : M^2 \to E^3$,onde M é uma superfície diferenciável , sempre é possível obtermos numa vizinhança $U \subset$M de um ponto p, um referencial adaptado a X [6].

Recordemos que se ω_1 e ω_2 são formas lineares em um espaço vetorial V de dimensão n,então o produto exterior $\omega_1 \wedge \omega_2$ de ω_1 por ω_2 é a forma bilinear alternada

$$\omega_1 \wedge \omega_2 : V \times V \to E$$

dada por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1)$$

onde $v_1, v_2 \in V$.

Além disto, se $\omega_1, ..., \omega_n$ é uma base para o espaço das formas lineares V^*, então $\omega_i \wedge \omega_j, i < j, i, j = 1, ..., n$ formam uma base para o espaço $\Lambda^2 V^*$ das formas bilineares alternadas de $V \times V$.

Lema 3.1(Cartan) - Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $\omega_1, ..., \omega_r$:V$\to$E,r$\leq$n , formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, ..., \theta_r$:V$\to$E satisfazendo a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$$

.
Então

$$\theta_i = \sum_j h_{ij}\omega_j, \qquad i, j = 1, ..., r, h_{ij} = h_{ji}.$$

Demonstração - Completemos as formas $\omega_1, ..., \omega_r$, em uma base $\omega_1, ..., \omega_r, \omega_{r+1}, ..., \omega_n$ de V^* e escrevamos

$$\theta_i = \sum_j h_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l \qquad l = r + 1, ..., n$$

Basta agora observar que a condição $\sum_i \omega_i \wedge \theta_i = 0$ implica em que

$$0 = \sum_i \omega_i \wedge \theta_i = \sum_j \omega_i \wedge \sum_j h_{ij}\omega_j + \sum_l \omega_i \wedge \sum_l b_{il}\omega_l$$

$$= \sum_{i<j}(h_{ij} - h_{ji})\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i<l} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l$$

Como os $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $k, s = 1, ..., n$ são linearmente independentes, conclui-se que $h_{ij} = h_{ji}$ e $b_{il} = 0$. c.q.d..

Aplicando o método do referencial móvel às superfícies em E^3, teremos pelas equações de estrutura,

$$d\omega_3 = \omega_{31} \wedge \omega_1 + \omega_{32} \wedge \omega_2$$

Como,$E^3.dX = \omega_3 = 0$, temos que $d\omega_3 = 0$,isto é

$$\omega_{31} \wedge \omega_1 + \omega_{32} \wedge \omega_2 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{2} \omega_{3i} \wedge \omega_i = 0$$

Visto que $\omega_1 \wedge \omega_2$ é a forma de área orientada em U, e portanto é diferente de zero,aplicamos o lema de Cartan para mostrar que existem funções diferenciáveis $h_{ij} = h_{ji}$ em U tal que

$$\omega_{3i} = h_{ij}.\omega_j.$$

Seja $S \subset E^3$. S possui em cada plano tangente T_pS um produto interno induzido por E^3.A este produto interno, que denotamos por $<,>_p$,é possível associarmos uma forma quadrática, representada por I, chamada de primeira forma quadrática ou primeira forma fundamental da superfície no ponto p.

Seja N um campo de vetores normais e unitários em S. Seja

$$N : S \longrightarrow S^2$$

a aplicação normal de Gauss e

$$dN_p : T_pS \longrightarrow T_{N(p)}S^2$$

sua diferencial.

Pelo fato de dN_p ser uma aplicação linear auto-adjunta [7], podemos associar a dN_p uma forma quadrática em T_pS,II_p, dada por

$$\mathrm{II}_p(v) = - < dN_p(v), v >$$

e chamada de segunda forma quadrática ou segunda forma fundamental de S em p.

Ao determinante de dN_p chamamos de curvatura Gaussiana K de S em p; e ao simétrico da metade do traço de dN_p chamamos de curvatura média H de S em p.

A proposição seguinte, nos fornece as expressões de K e H em função das formas diferenciais ω_i e ω_{ij}.

Proposição 3.1- Seja K a curvatura Gaussiana de um ponto p de uma superfície orientada M e H a curvatura média de M em p. Então

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

e

$$\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = 2H\omega_1 \wedge \omega_2$$

Demonstração: Consideremos a primeira equação de estrutura

$$d\omega_3 = \sum_i \omega_{3i} \wedge \omega_i \qquad\qquad i = 1, 2\, e\, 3$$

Como $\omega_3 = 0$, temos que

$$\omega_{31} \wedge \omega_1 + \omega_{32} \wedge \omega_2 = 0 \qquad\qquad (8)$$

As formas ω_1 e ω_2 formam uma base para o espaço dual. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 \\ \omega_{32} &= h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 \end{aligned} \qquad\qquad (9)$$

donde, $h_{ij} = h_{ji}$(pelo lema de Cartan).

Por (9) temos:

$$\begin{aligned} \omega_{31}(E_1) &= h_{11}\omega_1(E_1) + h_{12}\omega_2(E_1) = h_{11} \\ \omega_{31}(E_2) &= h_{11}\omega_1(E_2) + h_{12}\omega_2(E_2) = h_{12} \\ \omega_{32}(E_1) &= h_{21}\omega_1(E_1) + h_{22}\omega_2(E_1) = h_{21} = h_{12} \\ \omega_{32}(E_2) &= h_{21}\omega_1(E_2) + h_{22}\omega_2(E_2) = h_{22} \end{aligned} \qquad\qquad (4)$$

Como $dE_i = \sum \omega_{ij}E_j$, temos que :

$$dE_3(v) = \omega_{31}(v)E_1 + \omega_{32}(v)E_2$$

e, por (4):

$$dE_3 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

Portanto, $K = detdE_3 = h_{11}.h_{22} - h_{12}.h_{21}$

As equações (9) nos dão que:

$$\omega_{31} \wedge \omega_{32} = (h_{11}.\omega_1 + h_{12}.\omega_2) \wedge (h_{21}.\omega_1 + h_{22}.\omega_2)$$
$$\omega_{31} \wedge \omega_{32} = h_{11}.h_{22}.\omega_1 \wedge \omega_2 - h_{12}.h_{12}.\omega_1 \wedge \omega_2$$
$$\omega_{31} \wedge \omega_{32} = (h_{11}.h_{22} - h_{12}.h_{12})\omega_1 \wedge \omega_2$$
$$\omega_{31} \wedge \omega_{32} = K\omega_1 \wedge \omega_2$$

Pela segunda equação de estrutura:

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\omega_{31} \wedge \omega_{32}$$

Portanto:

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

Como havíamos afirmado.

Por (5) e pela definição de H, temos:

$$H = -\frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

As equações (3) nos dão que:

$$\omega_{13} \wedge \omega_2 = -\omega_{31} \wedge \omega_2 = -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge \omega_2 = -h_{11}\omega_1 \wedge \omega_2$$
$$\omega_1 \wedge \omega_{23} = -\omega_1 \wedge \omega_{32} = -\omega_1 \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) = -h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2$$

Assim,

$$\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = -h_{11}\omega_1 \wedge \omega_2 - h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2$$
$$\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = -(h_{11} + h_{22})\omega_1 \wedge \omega_2$$
$$\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = 2H\omega_1 \wedge \omega_2$$

Um resultado de extrema importância é dado pelo Teorema de Gauss, afirmando que K só depende da primeira forma quadrática. Para isto, usamos o fato de que $d\omega_{12}$ só depende de ω_1 e ω_2, que por sua vez são determinados a partir de E_1 e E_2 [8].

Teorema 3.2(Gauss) - K só depende da primeira forma quadrática.

Demonstração - Pela proposição 3.1

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

onde , $d\omega_{12}$, ω_1 e ω_2 só dependem de E_1 e E_2.Dada a primeira forma quadrática, é possível escolher, localmente, campos E_1 e E_2, que são ortogonais, donde calcular K. c.q.d..

Os autovalores da matriz (h_{ij}) são as curvaturas principais da imersão X. Eles independem da escolha do referencial. Mas , infelizmente, em geral, eles não são funções diferenciáveis em uma vizinhaça do lugar dos pontos umbílicos, que é o subconjunto de U onde os autovalores são iguais. Por outro lado as funções simétricas dos autovalores são diferenciáveis. Consequentemente:

$$K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$
$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

são diferenciáveis.

Podemos ver que o lugar onde $H^2 - K = 0$ é exatamente o lugar dos pontos umbílicos. Com efeito:

$$H^2 - K = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(h_{11} - h_{22})^2 + (h_{12})^2 = 0$$

mas isto acontece se, e somente se,$h_{11} = h_{22}$ e $h_{12} = 0$.

Quando a matriz h_{ij} é diagonal, isto é, quando $h_{12} = 0$ dizemos que o referencial adaptado E_i é principal. E se além disso, tivermos $h_{11} > h_{22}$,o referencial será dito positivo principal. Dado qualquer ponto não umbílico $p \in U$, existirá exatamente dois referenciais positivos, onde um é a rotação do outro por um ângulo π.

Provaremos a seguir um dos resultados mais importantes da teoria das superfícies, a saber, o Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 3.3(Gauss-Bonnet) - Seja S uma superfície diferenciável compacta, orientada e v um campo diferenciável de vetores em S, cujos pontos umbílicos $p_1, ..., p_n$, têm índices I_1,...,I_n. Então

$$\int_S K\omega_1 \wedge \omega_2 = 2\pi \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Demonstração - Consideremos em $S - \bigcup_{i=1}^n p_i$ o referencial $\overline{E}_1 = \frac{v}{|v|}$,$\overline{E}_2$, com $\overline{E}_2$ unitário e ortogonal a $\overline{E}_1$, na orientação de S. Sejam B_i bolas centradas em p_i , de modo que cada B_i não contém outro ponto umbílico além de p_i. Usando o teorema de Stokes temos que

$$\int_{S-\bigcup_{i=1}^n B_i} K\varpi_1 \wedge \varpi_2 = -\int_{S-\bigcup_{i=1}^n B_i} d\varpi_{12} = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \varpi_{12}$$

onde, S_i é o círculo que limita B_i na orienatção induzida por B_i. Considerando o limite quando o raio de S_i tende a zero, e usando o fato de que o índice independe da escolha do referencial, concluimos que

$$\int_S k\omega_1 \wedge \omega_2 = 2\pi \sum_{i=1}^{n} I_i$$

É possível mostrar que o Teorema de Gauss-Bonnet é válido também quando consideramos campos de direção em vez de campos de vetores. Enuciaremos a seguir o teorema para esta situação e sua demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 3.4 - Seja S uma superfície orientada compacta de gênero g e curvatura gaussiana K. Seja F um campo de direção em S como um número finito de singularidades $p_1, ..., p_n$, de índices I_1,...,I_n, respectivamnete. Então

$$\iint_S KdA = 2\pi \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Com este resultado podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.5 (Hopf) - Seja S compacta e $X : M \to E^3$ uma imersão.Seja F um campo de direção em S que possui um número finito de singularidades $p_1, ..., p_n$ de índices I_1,...,I_n,respectivamnete. Então

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \chi(S)$$

Demonstração : Pelo teorema de Gauss-Bonnet ,

$$\iint_S KdA = 2\pi \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Como

$$\iint_S KdA$$

não depende do campo de direção escolhido, a soma

$$\sum_{i=1}^{n} I_i.$$

é a mesma seja qual for o campo de direção que possua um número finito de singularidades. Logo pelo teorema 2.1

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 2 - 2g = \chi(S) \qquad\qquad c.q.d..$$

Introduziremos a seguir a notação complexa para um referencial adaptado E_i em U$\subseteq$M. Para isto, definiremos os seguintes valores complexos:

$E = \frac{1}{2}(E_1 - i.E_2)$

$\omega = \omega_1 + i.\omega_2$
$\pi = \omega_{31} - i.\omega_{32}$
$\rho = \omega_{21}$
$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$
$z = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - i.h_{12}$

Se E_i^* é a rotação de E_i por θ; teremos:

(a)$E^* = \frac{1}{2}(E_1^* - i.E_2^*)$
(b) $\omega^* = e^{-i\theta}.\omega$
(c) $\pi^* = e^{i\theta}.\pi$
(d) $\rho^* = \rho + d\theta$
(e) $H^* = H$
(f) $z^* = e^{2i\theta}z$

Mostraremos aqui, quatro destas igualdades.
(a)$E^* = \frac{1}{2}(E_1^* - i.E_2^*)$

$E^* = \frac{1}{2}(\cos\theta E_1 + \sin\theta E_2 + i\sin\theta E_1 - i\cos\theta E_2)$
$E^* = \frac{1}{2}[\cos\theta(E_1 - iE_2) + \sin\theta(E_2 + iE_1)]$
$E^* = \frac{1}{2}[\cos\theta(E_1 - iE_2) - \frac{i}{-i}sin\theta(E_2 + iE_1)]$
$E^* = \frac{1}{2}[\cos\theta(E_1 - iE_2) - \frac{1.i}{-i.i}sin\theta(E_1 - iE_2)]$
$E^* = \frac{1}{2}[\cos\theta(E_1 - iE_2) + isin\theta(E_1 - iE_2)]$
$E^* = \frac{1}{2}[(\cos\theta + isin\theta).(E_1 - iE_2)]$
$E^* = (\cos\theta + isin\theta).\frac{1}{2}(E_1 - iE_2) \Rightarrow E^* = e^{i\theta}.E$

(b) $\omega^* = e^{-i\theta}.\omega$; sabendo que $\omega = \omega_1 + i.\omega_2 = E_1.dX + i.E_2.dX$.
$\omega^* = E_1^*.dX + i.E_2^*.dX$.
$\omega^* = (\cos\theta E_1 + \sin\theta E_2).dX + i.(-\sin\theta E_1 + \cos\theta E_2).\mathrm{dX}$
$\omega^* = \cos\theta E_1 dX + \sin\theta E_2 dX - i\sin\theta E_1 dX + i\cos\theta E_2 dX$
$\omega^* = (\cos\theta - i\sin\theta)E_1 dX + (\sin\theta + i\cos\theta)E_2 dX$
$\omega^* = (\cos\theta - i\sin\theta)E_1 dX - \frac{i}{-i}(\sin\theta + i\cos\theta)E_2 dX$
$\omega^* = (\cos\theta - i\sin\theta)E_1 dX - \frac{1}{i}(\cos\theta - i\sin\theta)E_2 dX$
$\omega^* = (\cos\theta - i\sin\theta)E_1 dX + i(\cos\theta - i\sin\theta)E_2 dX$
$\omega^* = (\cos\theta - i\sin\theta)(E_1 dX + iE_2 dX) \rightarrow \omega^* = e^{-i\theta}.\omega$

(c) $\pi^* = e^{i\theta}.\pi$, onde $\pi = \omega_{31} - i\omega_{32} = E_3 dE_1 - iE_3 dE_2$
$\pi^* = E_3^* dE_1^* - iE_3^* dE_2^*$
$\pi^* = E_3(-\sin\theta E_1 + \cos\theta dE_1 + \cos\theta E_2 + \sin\theta E_2) - iE_3(-\cos\theta E_1 - \sin\theta dE_1 - \sin\theta E_2 + \cos\theta dE_2)$
$\pi^* = -\sin\theta E_3 E_1 + \cos\theta E_3 dE_1 + \cos\theta E_3 E_2 + \sin\theta E_3 dE_2 + i\cos\theta E_3 E_1 + i\sin\theta E_3 dE_1 + i\sin\theta E_3 E_2 - i\cos\theta E_3 dE_2$
$\pi^* = (\cos\theta + i\sin\theta)E_3 dE_1 - i(\cos\theta + i\sin\theta)E_3 dE_2$
$\pi^* = (\cos\theta + i\sin\theta)(E_3 dE_1 - iE_3 dE_2)$

$\pi^* = e^{i\theta}.\pi$

(d) $\rho^* = \rho + d\theta$, onde $\rho = \omega_{21} = E_2 dE_1$ $\rho^* = E_2^* dE_1^*$
$\rho^* = (-\sin\theta E_1 + \cos\theta E_2)(-\sin\theta E_1 d\theta + \cos\theta dE_1 + \cos\theta E_2 d\theta + \sin\theta dE_2)$
$\rho^* = \sin^2\theta d\theta - \sin^2\theta E_1 dE_2 + \cos^2\theta E_2 dE_1 + \cos^2\theta d\theta$. Como $E_1 dE_2 = -E_2 dE_1$,
$\rho^* = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta + \sin^2\theta E_2 dE_1 + \cos^2\theta E_2 dE_1$
$\rho^* = d\theta + E_2 dE_1$, $\rho^* = d\theta + \rho$

Notemos que $\{E_i\}$ é um referencial adaptado positivo se z é uma função real positiva em U. Pois, se $Im(z) = 0$ então $h_{12} = 0$. Se observarmos bem, o lugar dos pontos umbílicos está definido exatamente para $z = 0$, isto é, $h_{11} = h_{22}$, nesta notação.

Faremos uso, ainda, das seguinte equações de estrutura (como também do fato de $\omega \wedge \varpi \neq 0$):

$$d\omega = -i\rho \wedge \omega$$

$$d\pi = i\rho \wedge \pi$$

$$\pi = z\omega + H\varpi$$

Notemos que estas equações são exatamente as equações de Codazzi ($d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}$ e $d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}$). Não faremos uso da equação de Gauss $d\rho = \frac{i}{2}\pi \wedge \overline{\pi}$. Ela é útil quando cosideramos generalizações a outros espaços de curvatura constante.

Capítulo 4

Uma Classe de Equações de Weingarten

Neste capítulo provaremos nosso principal resultado.

Seja X : $M^2 \to E^3$ uma imersão de uma superfície diferenciável orientada em E^3. Nosso intuíto é construir em M uma forma quadrática que seja holomorfa e cujos zeros determinem os pontos umbílicos da imersão.

Seja $\{E_i\}$ um referencial adaptado em U$\subseteq M^2$. Substituindo a expressão

$$\pi = z\omega + H\overline{\omega}$$

em

$$d\pi = i\rho \wedge \pi$$

obtemos:

$$(dz - 2iz\rho) \wedge \omega + dH \wedge \overline{\omega} = 0$$

Visto que $\omega \wedge \overline{\omega} \neq 0$ e que ω, ϖ formam uma base para o espaço das formas, $(dz - 2iz\rho)$ e dH podem ser escritos nessa base por meio de funções diferenciáveis u e v definidas em U, isto é :

$$\begin{bmatrix} dz - 2iz\rho \\ dH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & u \\ u & \overline{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \overline{\omega} \end{bmatrix}$$

Se existir um outro referencial $\{E_i^*\}$ em U, teremos que:

$$u^* = e^{i\theta}u \qquad\qquad e \qquad\qquad v^* = e^{3i\theta}v$$

Seja f uma função difrenciável em $(-\epsilon; \infty) \subseteq$ R, com $\epsilon > 0$ e $z = \frac{1}{2}(h_{11}+h_{22})-ih_{12}$ o valor complexo definido no capítulo anterior. Suponhamos que X satisfaça a uma relação de Weingarten da forma $H = f(H^2 - K)$. Temos que $H^2 - K = \overline{z}z$. Com efeito:

$$H^2 - K = (\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{22}}{2})^2 - h_{11}h_{22} + h_{12}^2$$
$$H^2 - K = \frac{h_{11}^2}{4} + \frac{h_{11}h_{22}}{2} + \frac{h_{22}^2}{4} - h_{11}h_{22} + h_{12}^2$$
$$H^2 - K = \frac{h_{11}^2}{4} - \frac{h_{11}h_{22}}{2} + \frac{h_{22}^2}{4} + h_{12}^2$$
$$H^2 - K = [\frac{1}{2}(h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2$$
$$H^2 - K = \{[\frac{1}{2}(h_{11} - h_{22})] + ih_{12}\}\{[\frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})] - ih_{12}\}$$
$$H^2 - K = \overline{z}z.$$

Dessa forma, a relação $H = f(H^2 - K)$ pode ser escrita como $H = f(\overline{z}z)$. Diferenciando esta relação, teremos:

$$dH = f'(\overline{z}z)(zd\overline{z} + \overline{z}dz)$$

Como $dz - 2iz\rho = v\omega + u\overline{\omega}$, temos que,

$$dz = v\omega + u\overline{\omega} + 2iz\rho \qquad e \qquad d\overline{z} = \overline{v\omega} + \overline{u}\omega - 2i\overline{z}\rho$$

Então,

$$dH = f'(\overline{z}z)[z(\overline{v\omega} + \overline{u}\omega) + \overline{z}(v\omega + u\overline{\omega})$$
$$dH = \{f'(\overline{z}z)(z\overline{u} + \overline{z}v)\}\omega + \{f'(\overline{z}z)[z\overline{v} + \overline{z}u]\}\overline{\omega}$$

Mas, $dH = u\omega + \overline{u\omega}$ e comparando os coeficientes de ω e $\overline{\omega}$, temos:

$$u = f'(z\overline{z})(z\overline{u} + \overline{z}v) \qquad \text{e} \qquad \overline{u} = f'(z\overline{z})(z\overline{v} + \overline{z}u)$$

Construiremos a seguir, duas funções diferenciáveis $F(x)$ e $G(x)$ definidas ∀x∈R, e com as seguintes propriedades ∀x≥0:

(i) $[F(x)]^2 - x.[G(x)]^2 = 1$
(ii)$2.F'(x) = f'(x).G(x)$
(iii)$2x.G'(x) = f'(x).F(x) - G(x)$

Para obtermos tais funções, iremos considerar a função diferenciável $\phi(r)$ definida por

$$\phi(r) = \int_0^r f'(s^2)ds$$

Como pode ser verificado,$-\phi(r) = \phi(-r)$. Fazendo a substituição $s = rt$ ($ds = rdt$), teremos:

$$\phi(r) = r.\int_0^1 f'(r^2t^2)dt$$

onde a função

$$\psi(r^2) = \int_0^1 f'(r^2t^2)dt$$

é diferenciável.

Dessa forma, percebemos que existem funções diferenciáveis F e G, satisfazendo

$$F(r^2) = \cosh\phi(r)$$
$$G(r^2) = \frac{\sinh\phi(r)}{r}$$

Isto especifica F e G $\forall x \geq 0$. Agora vamos verificar que elas satisfazem as três condições acima desejadas:

i)$[F(r^2)]^2 - r^2.[G(r^2)]^2 = \cosh^2\phi(r) - r^2.\frac{\sinh^2\phi(r)}{r^2} = 1$.

ii) $F(r^2) = \cosh\phi(r)$, derivando esta expressão com respeito a r:

$$2r.F'(r^2) = \phi'(r).\sinh\phi(r)$$
$$2.F'(r^2) = \phi'(r).\frac{1}{r}\sinh\phi(r)$$

Sendo f, C^∞, definida em $(-\epsilon, \infty)$ e $\epsilon > 0$, temos

$$\phi'(r) = D_r(\int_o^r f'(s^2)ds) = f'(r^2$$

logo:

$$2.F'(r^2) = f'(r^2).G(r^2)$$

(iii) $G(r^2) = \frac{1}{r}\sinh\phi(r)$,derivando esta expressão com respeito a r:

$$2r.G'(r^2) = \frac{r.\phi'(r).\cosh\phi(r) - \sinh\phi(r)}{r.r}$$
$$2r^2.G'(r^2) = \frac{r\phi'(r)}{r}.\cosh\phi(r) - \frac{\sinh\phi(r)}{r}$$
$$2r^2.G'(r^2) = f'(r^2).F(r^2) - G(r^2)$$

Tomemos a 1-forma σ em U dada por

$$\sigma = F(z\overline{z})\omega + G(z\overline{z})\overline{z\omega}$$

Se $\{E_i^*\}$ for um outro referencial adaptado em U, σ se escreve como $\sigma^* = e^{-i\theta}.\sigma$. Com efeito:

$$\sigma^* = F\omega^* + G\overline{z}\overline{\omega}^*$$
$$\sigma^* = Fe^{-i\theta}\omega + Ge^{-2i\theta}\overline{z}e^{i\theta}\overline{\omega}$$
$$\sigma^* = e^{-i\theta}[F\omega + G\overline{z}\overline{\omega}]$$
$$\sigma^* = e^{-i\theta}.\sigma$$

E com respeito a orientação $(\frac{i}{2})\sigma \wedge \overline{\sigma}$, temos:

$$\begin{gathered}(\tfrac{i}{2})\sigma \wedge \overline{\sigma} = (\tfrac{i}{2})[F\omega + G\overline{z}\overline{\omega}] \wedge [F\overline{\omega} + Gz\omega]\\ = (\tfrac{i}{2})[F\omega \wedge F\varpi + F\omega \wedge Gz\omega + G\overline{z}\overline{\omega} \wedge F\overline{\omega} + G\overline{z}\overline{\omega} \wedge Gz\omega]\\ = (\tfrac{i}{2})[F(z\overline{z})^2\omega \wedge \overline{\omega} + (z\overline{z})G(z\overline{z})^2\overline{\omega} \wedge \omega]\\ = (\tfrac{i}{2})[F(z\overline{z})^2\omega \wedge \overline{\omega} - (z\overline{z})G(z\overline{z})^2\omega \wedge \overline{\omega}]\\ = (\tfrac{i}{2})[F(z\overline{z})^2 - (z\overline{z})G(z\overline{z})^2]\omega \wedge \overline{\omega}\\ = (\tfrac{i}{2})\omega \wedge \overline{\omega}\end{gathered}$$

Visto que pela primeira propriedade de F e G,

$$F(z\overline{z})^2 - (z\overline{z})G(z\overline{z})^2 = 1$$

Como :

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 \qquad \text{e} \qquad \overline{\omega} = \omega_1 - i\omega_2,$$

teremos:

$\omega \wedge \overline{\omega} = \omega_1 \wedge \omega_1 - \omega_1 \wedge i\omega_2 + i\omega_2 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_2 \omega \wedge \overline{\omega} = -\omega_1 \wedge i\omega_2 - \omega_1 \wedge i\omega_2 = -2i\omega_1 \wedge \omega_2$

Assim:

$$(\frac{i}{2})\sigma \wedge \overline{\sigma} = (\frac{i}{2})(-2i)\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$$

Se escrevermos $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, teremos que σ_1 e σ_2 são independentes em U e que a forma quadrática ds^2 definida por:

$$ds^2 = \sigma.\overline{\sigma}$$

não depende do referencial. Com efeito, seja $\{E_i^*\}$ um outro referencial em U. Então:

$$ds^2 = \sigma.\overline{\sigma}$$
$$ds^2 = (\sigma_1 + i\sigma_2).(\sigma_1 - i\sigma_2)$$
$$ds^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Por outro lado temos, $\sigma.\overline{\sigma} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = (\sigma^*).(\overline{\sigma^*})$, pois:
$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \Rightarrow \overline{\sigma} = \sigma_1 - i\sigma_2$

$\sigma^* = e^{-i\theta}(\sigma_1 + i\sigma_2) \Rightarrow \overline{\sigma}^* = e^{i\theta}(\sigma_1 - i\sigma_2)$
$\sigma.\overline{\sigma} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ e
$\sigma^*.\overline{\sigma}^* = [e^{-i\theta}(\sigma_1 + i\sigma_2].[e^{i\theta}(\sigma_1 - i\sigma_2)] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$

Temos que σ depende do referencial, mas $\sigma\overline{\sigma}$ e $\sigma \wedge \overline{\sigma}$ não dependem da escolha de tal referencial. Sendo assim, a forma quadrática ds^2 definida por $\sigma\overline{\sigma}$ fica determinada em todo M. E, a partir desta métrica, podemos definir uma única estrutura complexa $J : T_pM \to T_pM$, onde $J(v) \in T_pM$ é um rotação de $\frac{\pi}{2}$ de $v \in T_pM$ na orientação $\sigma \wedge \overline{\sigma}$.

Consideremos a forma quadrática diferenciável $Q = z.(\sigma^2)$. Esta forma quadrática, da maneira que foi definida, independe do referencial. Com efeito,

$$Q^* = z^*.(\sigma^*)^2 = e^{2i\theta}.z.(e^{-i\theta}\sigma)^2 = z.(\sigma)^2 = Q$$

Logo, está definida em todo M. A proposição seguinte é o coração de nossos resultados.

Proposição 4.1 - Q é uma forma quadrática holomorfa em M.

Demonstração: Seja $U \subseteq M$ um aberto onde está definido um sistema de coordenadas holomorfo ζ:U$\to C$. Claramente M é coberto por tais abertos, já que para cada ponto de M conseguimos tal sistema. Por uma aplicação conforme, é possível verificarmos que σ e $\lambda d\zeta$ terão o mesmo comprimento diferindo apenas por um fator $e^{i\theta}$. Portanto, podemos observar que há um único referencial adaptado $\{E_i\}$ em U tal que σ=λ $d\zeta$ onde $\lambda > 0$ é uma função diferenciável (real) positiva em U. Dessa maneira, como $Q = z(\sigma)^2$, teremos que $Q \mid_U = (z\lambda^2)(d\zeta)^2$.Para provar que Q é holomorfa, é suficiente mostrar que $\partial(z\lambda^2)/\partial\overline{\zeta} \equiv 0$ em U. Como

$$d(z\lambda^2) = \frac{\partial z\lambda^2}{\partial\zeta}d\zeta + \frac{\partial z\lambda^2}{\partial\overline{\zeta}}d\overline{\zeta}$$

Se,$\frac{\partial z\lambda^2}{\partial\overline{\zeta}} = 0$,

$$d(z\lambda^2) = \tfrac{\partial z\lambda^2}{\partial\zeta}d\zeta$$
$$d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = \tfrac{\partial z\lambda^2}{\partial\zeta}d\zeta \wedge d\zeta$$

teríamos: $d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = 0$.

Ou seja, para provarmos que $\partial(z\lambda^2)/\partial\overline{\zeta} \equiv 0$ em U, basta provarmos que $d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = 0$.

$$d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = (dz\lambda^2 + 2z\lambda d\lambda) \wedge d\zeta$$

$$d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = dz\lambda^2 \wedge d\zeta + 2z\lambda d\lambda \wedge d\zeta$$

Como ,

$$\sigma = \lambda d\zeta \Rightarrow d\zeta = \frac{\sigma}{\lambda}$$

e

$$d\sigma = d\lambda \wedge d\zeta + \lambda \wedge d^2\zeta = d\lambda \wedge d\zeta$$

teremos:

$$\begin{array}{c} d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = dz\lambda^2 \wedge \frac{\sigma}{\lambda} + 2z\lambda d\sigma = 0 \\ d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = \frac{\lambda^2}{\lambda}(dz \wedge \sigma) + \lambda 2zd\sigma = 0 \\ d(z\lambda^2) \wedge d\zeta = \lambda(dz \wedge \sigma + 2zd\sigma) = 0, \end{array}$$

mas $\lambda > 0$, portanto necessitemos provar que:

$$dz \wedge \sigma + 2zd\sigma = 0.$$

A seguir,utilizaremos as equações de estrutura e desenvolveremos esta última expressão, escrevendo F,F',etc. em vez de F($z\overline{z}$),F'($z\overline{z}$), etc.

Foi visto que $dz - 2iz\rho = v\omega + u\overline{\omega} \Rightarrow dz = 2iz\rho + v\omega + u\overline{\omega}$ e que $\sigma = F\omega + G\overline{z\omega}$, então,

$$dz \wedge \sigma = (2iz\rho + v\omega + u\overline{\omega}) \wedge (F\omega + G\overline{z\omega}).$$

De $\sigma = F\omega + G\overline{z\omega}$ temos,

$$\begin{array}{c} d\sigma = F'(dz.\overline{z} + z.d\overline{z}) \wedge \omega + Fd\omega + G'(dz.\overline{z} + z.d\overline{z}) \wedge \overline{z\omega} + \\ G(\overline{\omega} \wedge d\overline{z} + \overline{z}d\overline{\omega}). \end{array}$$

como,

$$\begin{array}{c} dz = v\omega + u\overline{\omega} + 2iz\rho \Rightarrow dz.\overline{z} = v\overline{z}\omega + u\overline{z\omega} + 2iz\rho \\ d\overline{z} = \overline{v\omega} + \overline{u}\omega - 2i\overline{z}\rho \Rightarrow z.d\overline{z} = \overline{v}z\overline{\omega} + \overline{u}z\omega - 2iz\rho, \end{array}$$

logo:

$$dz.\overline{z} + z.d\overline{z} = (u\overline{z} + \overline{v}z)\overline{\omega} + (v\overline{z} + \overline{u}z)\omega$$

e teremos que $d\sigma$ se escreve da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} d\sigma = F'[(u\overline{z} + \overline{v}z)\overline{\omega} + (v\overline{z} + \overline{u}z)\omega] \wedge \omega + F(-i\rho \wedge \omega) + \\ G'[(u\overline{z} + \overline{v}z)\overline{\omega} + (v\overline{z} + \overline{u}z)\omega] \wedge \overline{z\omega} + G\overline{z}d\overline{\omega} - G\overline{\omega} \wedge d\overline{z} \\ d\sigma = \\ F'(u\overline{z}+\overline{v}z)\overline{\omega}\wedge\omega+F(-i\rho\wedge\omega)+\overline{z}G'(v\overline{z}+z\overline{u})\omega\wedge\overline{\omega}+G\overline{z}(i\rho\wedge\overline{\omega})+d\overline{z}G\wedge\overline{\omega}-G\overline{v\omega}\wedge\overline{\omega} \end{array}$$

Onde,

$$d\overline{z}G\wedge\overline{\omega}-G\overline{v}\overline{\omega}\wedge\overline{\omega}=d\overline{z}G\wedge\overline{\omega}-G\overline{v}\overline{\omega}\wedge\overline{\omega}=G(d\overline{z}-\overline{v}\overline{\omega})\wedge\overline{\omega}=G(-2i\overline{z}\rho+\overline{u}\omega)\wedge\overline{\omega}.$$

Assim,

$$2z.d\sigma = 2z[F'(\overline{z}u+z\overline{v})\overline{\omega}\wedge\omega+F(-i\rho\wedge\omega)]+2z[\overline{z}G'(\overline{z}v+z\overline{u})\omega\wedge\overline{\omega}+G\overline{z}(i\rho\wedge\varpi)+G(-2i\overline{z}\rho+\overline{u}\omega)\wedge\overline{\omega}]$$

Dessa forma temos:

$$dz\wedge\sigma+2zd\sigma=(2iz\rho+v\omega+u\varpi)\wedge(F\omega+G\overline{z}\varpi)+2z[F'(\overline{z}u+z\overline{v})\overline{\omega}\wedge\omega+F(-i\rho\wedge\omega)]+2z[\overline{z}G'(\overline{z}v+z\overline{u})\omega\wedge\varpi+G\overline{z}(i\rho\wedge\varpi)+G(-2i\overline{z}\rho+\overline{u}\omega)\wedge\varpi]$$

ou seja

$$dz\wedge\sigma+2zd\sigma=2iz\rho\wedge F\omega+2iz\rho\wedge G\overline{z}\varpi+vG\overline{z}\omega\wedge\varpi+uF\varpi\wedge\omega+2zF'\overline{z}u\varpi\wedge\omega+2zF'z\overline{v}\varpi\wedge\omega-2zF(i\rho\wedge\omega)+2z\overline{z}G'\overline{z}v\omega\wedge\varpi+2z\overline{z}G'z\overline{u}\omega\wedge\varpi+2zG\overline{z}(i\rho\wedge\varpi)-4zi\overline{z}\rho G\wedge\varpi+2z\overline{u}G\omega\wedge\varpi$$

Vamos analisar agora, apenas os termos que contém ρ e verificar que eles se cancelam.

$$2iz\rho\wedge F\omega+2iz\rho\wedge G\overline{z}\varpi-2zF(i\rho\wedge\omega)+2z\overline{z}G(i\rho\wedge\varpi)-4iz\overline{z}\rho G\wedge\varpi=$$

Ficando a expressão reduzida a:

$$dz\wedge\sigma+2zd\sigma=-uF\omega\wedge\varpi+\overline{z}vG\omega\wedge\varpi+\underbrace{2F'}_{f'G}z\overline{z}u\varpi\wedge\omega+\underbrace{2F'}_{f'G}z\overline{v}z\varpi\wedge\omega+(2z\overline{z}G'\overline{z}v+2z\overline{z}G'z\overline{u})\omega\wedge\overline{\omega}+2z\overline{u}G\omega\wedge\overline{\omega}=$$
$$[-uF+\overline{z}vG]\omega\wedge\overline{\omega}+[zf'G\overline{z}u+zf'Gz\overline{v}]\overline{\omega}\wedge\omega+[\underbrace{(2z\overline{z}G')}_{f'F-G}(\overline{z}v+z\overline{u})]\omega\wedge\varpi+2z\overline{u}G\omega\wedge\varpi=$$
$$[-uF+\overline{z}vG]\omega\wedge\overline{\omega}+z(f'G)[\overline{z}u+z\overline{v}]\overline{\omega}\wedge\omega+[(f'F-G)(\overline{z}v+z\overline{u})+2z\overline{u}G]\omega\wedge\overline{\omega}=$$
$$[-uF+\overline{z}vG-z(f'G)(\overline{z}u+z\overline{v})+(f'F-G)(\overline{z}v+z\overline{u})+2z\overline{u}G]\omega\wedge\varpi$$

Usando o fato de que : $u=(\overline{z}v+z\overline{u})f'$ e $\overline{u}=(z\overline{v}+\overline{z}u)f'$, chegaremos a conclusão esperada:

$$dz\wedge\sigma+2zd\sigma=[-uF+\overline{z}vG-zGf'\underbrace{(\overline{z}u+z\overline{v})}_{\overline{u}}+\underbrace{f'(\overline{z}v+z\overline{u})}_{u}F-G(\overline{z}v+z\overline{u})+2z\overline{u}G]\omega\wedge\varpi=-uF+\overline{z}vG-zG\overline{u}+uF-\overline{z}vG-zG\overline{u}+2z\overline{u}G]\omega\wedge\varpi=0$$

Proposição 4.2 - Ou X:M→ E^3 é totalmente umbílico ou o lugar dos pontos umbílicos é constituído inteiramente de pontos isolados de índices estritamente negativo.

Demonstração. Pelo fato de M ser conexa e Q ser holomorfa em M, ou $Q \equiv 0$ ou então Q possui apenas pontos isolados. Se $Q \equiv 0$ então, $Q = z(\sigma^2) \equiv 0$ em $U \subseteq M$ que tem o referencial adaptado $\{E_i\}$. Como $(\sigma)^2 \neq 0$, temos que $z = 0$, de forma que todo ponto de U é umbílico, já que o lugar dos pontos umbílicos está definido exatamente para os pontos onde $z = 0$. Agora, se $Q \neq 0$, então, os zeros de Q s˜ao isolados e são claramente pontos umbílicos da imersão. Seja p_0 um ponto umbílico de X. Temos que $Q = h.dz^2$, onde h representa seu coeficiente. Q ser holomorfa, significa que g é holomorfa. Logo g pode ser representada por uma série da forma $a_n\zeta^n + ...$, onde a_n é o primeiro coeficiente não-nulo e $n \geq 1$. O expoente n nos dá exatamente a variação do argumento de h, isto é, $I = n$, o que implica dizer que $\delta(argh) = 2\pi n$. Consequentemente, $I = -\frac{1}{2\pi}.\frac{1}{2}\delta(argh) = -\frac{n}{2} < 0$. c.q.d.

Provaremos agora o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.1 - Seja X:$S^2 \rightarrow E^3$ uma imersão diferenciável que satisfaz uma equação de Weingarten da forma $H = f(H^2 - K)$ onde f é uma função diferenciável definida no intervalo de $(-\epsilon, \infty)$, com $\epsilon > 0$. Então $X(S^2)$ é uma 2-esfera redonda em E^3.

Demonstração: Se mostrarmos que X:$S^2 \rightarrow E^3$ é constituída inteiramente por pontos umbílicos, então o teorema estará provado. Suponhamos então que não, que X n˜ao seja constituída inteiramente por pontos umbílicos. Então, pela proposição 2,os pontos umbílicos de X formam um conjunto finito, onde cada ponto possui índice negativo.Assim , aplicando o Teorema de Hopf, teríamos que $\sum_{p \in U} I_X(p_0) = \chi(S^2) < 0$. Porém, isto é um absurdo, visto que $\chi(S^2) = 2 > 0$. Desta forma o teorema está provado.

Corolário 4.1(Hopf). Se X:$S^2 \rightarrow E^3$ é uma imersão com curvatura média constante, então $X(S^2)$ é uma esfera redonda.

Demonstração. Basta tomar $f \equiv$constante, da forma $f(H^2 - K) = H$. Assim , teremos f uma função diferenciável e aplicando o teorema 1, temos o corolário.

Corolário 4.2 - Considere M^2 uma superfície compacta orientada e X:$M^2 \rightarrow E^3$uma imersão diferenciável satisfazendo uma equação de Weingarten da forma $H = f(H^2 - K)$ onde f é uma função diferenciável definida no intervalo $(-\epsilon, \infty)$, $\epsilon > 0$ e que satisfaz $[f(x)]^2 \geq x$ ∀x≥0. Então M^2 é uma esfera e $X(M^2) \subseteq E^3$ é uma esfera redonda.

Demonstração:Como $K = H^2 - (H^2 - K) = [f(H^2 - K)]^2 - (H^2 - K) = [f(x)]^2 - x \geq 0$, pondo $x = H^2 - K$, a métrica induzida em M tem curvatura não-negativa. Sendo M compacta,$\exists p \in M$ tal que, $K(p) > 0$. Pela continuidade de K,$K(p) > 0 \forall p \in M$. Entretanto,pelo teorema de Gauss-Bonnet, $\chi(M) > 0$. Assim $M^2 = S^2$. Agora basta aplicarmos o teorema 1 que teremos o corolário.

Corolário 4.3 (Liebermann)- Suponha M^2 compacta e orientada e que $X(M^2) \subseteq E^3$ possui curvatura gaussiana ,$K > 0$, constante. Então $X(M^2)$ é uma esfera redonda.

Demonstração: Tomemos $f(x) = \sqrt{K + x}$. Então $[f(x)]^2 = K + x \geq x$, pois por hipótese $K > 0$(const.). Estamos assim, nas mesmas condições do corolário 2, e o aplicando, concluimos a demonstração do corolário.

É possível ainda adquirirmos algumas imformações sobre superfícies um pouco mais complexas. Por exemplo :

Teorema 4.2 - Seja $X : T^2 \rightarrow E^3$ uma imersão diferenciável do toro , que satisfaz uma equação de Weingarten da forma $H = f(H^2 - K)$ onde f é uma função diferenciável em um intervalo $(-\epsilon, \infty)$, $\epsilon > 0$. Então X está livre de pontos umbílicos e lá está definido globalmente um referencial adaptado positivo em T^2.

Para concluirmos este capítulo, faremos uma breve observação. Alguma hipótese sobre a relação de Weingarten $R(H, H^2 - K) = 0$ deve ser feita sobre o lugar dos pontos umbílicos correspondentes a proposição 4.2. Por exemplo, qualquer superfície de revolução é sempre uma superfície de Weingarten e os elipsóides de revolução dão exemplos de superfícies de Weingarten esféricas não - redondas. Claro que, a correspondente relação de Weingarten não pode ser solucionada diferenciavelmente para H em termos de $H^2 - K$. Entretando, poderíamos enfraquecer nossa hipótese consideravelmente e mesmo assim teríamos a conclusão do teorema 1. Por exemplo, suponha $X : S^2 \rightarrow E^3$ uma imersão diferenciável, tal que, na vizinhança de cada ponto umbílico p$\in$ S^2, X satisfaz uma relação de Weingarten da forma $H = f_p(H^2 - K)$ onde f_p é uma função diferenciável em um intervalo $(-\epsilon, \infty)$ com $\epsilon > 0$. aqui, f depende de p.Então,ainda podemos concluir que X é totalmente umbílica. Com efeito. seja U$\subseteq$ S^2 uma vizinhaça de p. Aplicando a proposição 2 em $X|_U$, vemos que, ou p é um ponto umbílico isolado de índice estritamente negativo ou então U é constituído inteiramente por pontos umbílicos. Obviamente os pontos umbílicos não isolados formarão um conjunto aberto e fechado. Assim, se X não fosse totalmente umbílico, o lugar dos pontos umbílicos seria constituído inteiramente por pontos umbílicos isolados de índice estritamente negativo, isto é, teríamos $\sum_{p \in U} i_X(p) = \chi(S^2) < 0$. Mas pelo teorema de Hopf,$\sum_{p \in U} i_X p = \chi(S^2) = 2$, ou seja, teríamos uma contradição.

Capítulo 5

Superfícies de Weingarten em Espaços de Curvatura Constante

Neste capítulo generalizaremos o teorema 4.1 para superfícies imersas em variedades Riemannianas de curvatura constante que geralmente são designadas por espaços de curvatura constante.

O espaço euclidiano E^n com curvatura igual a 0 , as esferas com curvatura positiva e os espaços hiperbólicos H^ncom curvatura negativa são as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura constante, conforme o teorema de Cartan[4]
As equações de estrutura agora são escritas da seguinte maneira[9]:

$$d\omega_i = -\omega_{ij} \wedge \omega_j$$

$$d\omega_{ij} = -\omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + R\omega_i \wedge \omega_j$$

para espaços de curvatura constante R.

Considere uma imersão $X : S \to E^3(R)$ onde $E^3(R)$ denota o espaço tridimensional de curvatura constante R.
Novamente, temos $\omega_3 = 0$ e consequentemente $\omega_{3i} = h_{ij}\omega_j$ $(h_{ij} = h_{ji})$. As fórmulas para as curvaturas média e gaussiana se escrevem:

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

$$K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 + R$$

Utilizando a notação complexa definimos ω,π e ρ da mesma forma que fizemos anteriormente. Verificamos então que as equações de estrutura são:

$$d\omega = -i\rho \wedge \omega$$

$$d\pi = i\rho \wedge \pi \text{ , onde } \pi = z\omega + H\varpi.$$

$$d\rho = \tfrac{i}{2}(\pi \wedge \pi - R\omega \wedge \varpi)$$

Notemos que agora $z\overline{z} = H^2 - K + R$ e que as duas primeiras equações de estrutura permanecem inauteradas. Desde que não usemos a fórmula $d\rho$(i.e. a equação de Gauss) na prova da proposição 1, segue que ela será válida para imersões $X : M^2 \to N^3$ que satisfaçam uma equação da forma $H = f(H^2 - K + R)$ onde f é uma função diferenciável definida em $(-\varepsilon, \infty)$, $\epsilon > 0$.

Teorema - Seja M^2 conexa e $X : M^2 \to N^3$ uma imersão onde N^3 possui curvatura seccional R constante. Suponha que todo ponto umbílico p de M possui uma vizinhança aberta na qual X satisfaz uma equação de Weingarten da forma $H = f_p(H^2 - K + R)$ onde f_p é diferenciável numa vizinhança de 0∈R. Então , ou X é uma imersão totalmente umbílica ou cada ponto umbílico é isolado de índice estritamente negativo.
Este teorema inclui muitos resultados clássicos sobre superfícies de Weingarten em espaços de curvatura constante. Por exemplo, podemos deduzir imediatamente do teorema acima, o resultado de Hopf's: que uma esfera de curvatura média contante é totalmente umbílica e uma generalização do resultado de Liebermann: que uma esfera de curvatura gaussiana constante K≠R em N^3 é uma esfera redonda.

Referências Bibliográficas

[1] Bryant, Robert L. Complex Analysis and a Class of Weingarten Surfaces.

[2] Hopf, H., Lectures on Differential in the Large, mimeographed notes, Stanford University, 1956.

[3] H. Went, Counterexample to 2 Conjecture of H. Hopf, Pacific Journal of Math., vol. 121, 1986.

[4] Carmo, M. do, Geometria Riemanniana, IMPA, 1988.

[5] Chern, S.S., On the Existence of Isothermal Parameters, 1955.

[6] Carmo, M. do, O Método do Referencial Móvel, IMPA, Escola Latino Americana de Matemática, 1976.

[7] Carmo, M. do, Eleemntos de Geometria Diferencial, IMPA, 1971.

[8] Carmo, M. do, Formas Diferenciais e Aplicações, 8^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1971.

[9] Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish, Inc. Boston, Mass. Vol.III, 1970.

[10] O'Neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966.

[11] R. Courant and D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics, vol.1. Wiley: New York, 1989.