UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CONGRUÊNCIAS DE APLICAÇÕES HARMÔNICAS DE UMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN EM $\mathbb{C}P^n$

Cleiton Lira Cunha

MANAUS

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Cleiton Lira Cunha

CONGRUÊNCIAS DE APLICAÇÕES HARMÔNICAS DE UMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN EM $\mathbb{C}P^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. José Kenedy Martins

MANAUS

2009

Cleiton Lira Cunha

CONGRUÊNCIAS DE APLICAÇÕES HARMÔNICAS DE UMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN EM $\mathbb{C}P^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 25 de março de 2009.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof^o Dr. José Kenedy Martins, Presidente

Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Membro

Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. José Miguel Martins Veloso, Membro

Universidade Federal do Pará

RESUMO

CONGRUÊNCIAS DE APLICAÇÕES HARMÔNICAS DE UMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN EM $\mathbb{C}P^n$

Neste trabalho, daremos uma demonstração detalhada do Teorema da congruência para $\mathbb{C}P^n$, resultado obtido por J. Bolton e L.M. Woodward. Mostraremos que se ψ e $\widetilde{\psi}$ são aplicações harmônicas de uma superfície de Riemann em $\mathbb{C}P^n$, com $\Gamma_{-1} = \widetilde{\Gamma}_{-1}$ e $\Gamma_0 = \widetilde{\Gamma}_0$ em que ou ψ é pseudo-holomorfa ou $\widetilde{U}_{p,0} = U_{p,0}$ para $p = 2, \ldots, n+1$, então existe uma isometria g de $\mathbb{C}P^n$ tal que $\widetilde{\psi} = g\psi$. Além disso, se ψ é substancial então g é unica.

Sumário

Introdução

Este trabalho estuda condições de congruências entre superfícies de um espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$. Estas condições serão obtidas a partir de tensores invariantes associados a uma seqüência de aplicações harmônicas $\psi_n : S \to \mathbb{C}P^n$ obtida a partir de uma aplicação harmônica $\psi : S \to \mathbb{C}P^n$.

Acreditamos que o aprendizado da técnica de construção da seqüência harmônica associada a uma aplicação harmônica é igualmente um conteúdo deste trabalho pois além da elegância da técnica em si mesma têm sido produzidos muitos trabalhos em geometria diferencial a partir do uso desta seqüência.

O Teorema da congruência para $\mathbb{C}P^n$ afirma que se ψ e $\widetilde{\psi}$ são aplicações harmônicas de uma superfície de Riemann em $\mathbb{C}P^n$, com mesmos $\Gamma-$invariantes(correspondentes aos mesmos índices) em que ou ψ é pseudo-holomorfa ou $\widetilde{U}_{p,0} = U_{p,0}$ para $p = 2, \dots, n+1$, então existe uma isometria g de $\mathbb{C}P^n$ tal que $\widetilde{\psi} = g\psi$ e além disso, se ψ é substancial então tal isometria é unica.

Para a demonstração desse teorema, são construídas a partir de ψ, outras aplicações harmônicas ψ_p e para cada $p \in \mathbb{Z}$, são definidas formas Γ_p chamadas de os $\Gamma-$invariantes da sequência (ψ_p). Na verdade, a hipótese mencionada acima não é que os $\Gamma-$invariantes da ψ e $\widetilde{\psi}$ sejam iguais, e sim que os correspondentes aos índices -1 e 0 da sequências construidas sejam os mesmos. No entanto, isto acaba implicando no que foi dito, como veremos ao longo deste trabalho.

O objetivo desse trabalho é justamente dar uma prova detalhada desse teorema.

No primeiro capítulo, apresentamos as preliminares, alguns conceitos e resultados que serão usados nos capítulos posteriores. Muitas notações clássicas e conceitos básicos são usados, sem mencioná-los, por já serem bem conhecidos. Neste capítulo fazemos uma breve apresentação da geometria do espaço $\mathbb{C}P^n$.

No capítulo 2, fazemos a construção da sequência harmônica, que é essencial em todo o trabalho. Ainda neste capítulo são apresentadas as equações básicas desta sequência, resultados importantes e definimos os $\Gamma-$invariantes e os $U-$invariantes.

Finalmente no último capítulo é apresentado o teorema mencionado acima, sendo a primeira seção dedicada a lemas que são invocados nele.

Aqui, muitas notações, bem como nome de aplicações, serão preservadas mesmos em outros capítulos sem serem mencionadas, quando ficarem implícitas. Por exemplo, quando definimos os fibrados L_p no capítulos 2, ainda mencionamos nele no capítulo 3 apenas como L_p, sem precisar a que aplicação ele corresponde, pois já fica subentendido.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho, e fixaremos notações a serem utilizadas nos capítulos posteriores. Algumas demonstrações serão inseridas e outras apenas terão as suas referência citadas.

1.1 Notações básicas

Notação 1. Se B é um conjunto não vazio, indicaremos por I_B ou id_B a aplicação indentidade de B.

Notação 2. *Seja V um espaço vetorial real e $X \subset V$ um subconjunto. O conjunto gerado por X será denotado por $span_{\mathbb{R}}\{X\}$.*

Notação 3. *Seja V um espaço vetorial complexo e $X \subset V$ um subconjunto. O conjunto gerado por X será denotado por $span_{\mathbb{C}}\{X\}$.*

1.2 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.2.1. Uma **variedade diferenciável** de dimensão m é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathcal{X}_\alpha : U_\alpha \to M$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ em M tais que:

- $\bigcup\limits_{\alpha} \mathcal{X}_\alpha(U_\alpha) = M$

- para quaisquer α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta = W) \neq \emptyset$, os conjuntos $x^{-1}(W)$ e $x^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^m$ e, além disto, as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ aí definidas são diferenciáveis.

O par (U_α, x_α) (ou a aplicação x_α) com $p \in x_{\alpha(U_\alpha)}$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada de vizinhança coordenada em p. A família (U_α, x_α) é chamada uma estrutura diferenciável em M.

Uma variedade diferenciável M de dimensão m será, as vezes, representada por M^m

Uma estrutura diferenciável em M induz de maneira natural uma topologia em M, segundo a definição abaixo:

Definição 1.2.2. Diremos que $A \subset M$ é aberto quando $\mathcal{X}_\alpha(A \cap \mathcal{X}_\alpha(U_\alpha))$ for aberto para todo α.

Definição 1.2.3. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in M$ se para alguma parametrização $\mathcal{X} : U \to M$ em torno de p tem-se que $f \circ \mathcal{X}$ é diferenciável em $\mathcal{X}^{-1}(p)$.
f é diferenciável em M se for diferenciável em todo $p \in M$.
$f \circ \mathcal{X}$ é chamada a expressão de f na parametrização $\mathcal{X}$.

Na notação da definição acima, se $\mathcal{Y} : V \to M$ é uma outra parametrização em torno de p, então escrevendo

$$f \circ \mathcal{Y} = (f \circ \mathcal{X}) \circ (\mathcal{X}^{-1} \circ \mathcal{Y})$$

vemos que $f \circ \mathcal{Y}$ é diferenciável como composta de funções diferenciáveis. Isso mostra que a definição acima não depende da parametrização.

Definição 1.2.4. Uma **curva parametrizada** $\alpha : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, em M é diferenciável em $t \in I$ se para alguma parametrização $\mathcal{X} : U \to M$ em torno de $\alpha(t)$ tivermos que $\mathcal{X}^{-1} \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em t.

Com argumento análogo ao anterior, provamos que a definição acima não depende da escolha da parametrização.

Definição 1.2.5. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, uma curva parametrizada diferenciável em M com $\alpha(0) = p$ e $\mathfrak{D}_p$ o conjunto das funções reais em M que são diferenciáveis em p. O **vetor tangente** à curva α em p é a aplicação $\alpha'(0) : \mathfrak{D}_p \to \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Um vetor tangente a p em M é o vetor tangente, em p, a uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$.

Seja $p \in M$ e $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização de M em torno de p tal que $p = \mathcal{X}(0)$. Supomos que $\mathcal{X}$ se escreva como $\mathcal{X}(x_1, \ldots, x_n)$ e consideremos a curva $\beta_i : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, dada por $\beta_i(t) = \mathcal{X}(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0,)$[1] onde I é tal que

$$t \in I \Leftrightarrow (0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0) \in U,$$

ou seja, β_i é a curva coordenada $x_i \mapsto \mathcal{X}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$. Seja f uma função real em M, diferenciável em p e seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ a expressão de f em $\mathcal{X}$. A expressão de β_i em $\mathcal{X}$ é dada por $(0, \ldots, 0, t, 0 \ldots, 0)$. Assim, na parametrização $\mathcal{X}$, $f \circ \beta_i$ é expressa por

$$(f \circ \beta_i)(t) = f(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

e

$$\beta_i'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \beta_i)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f)$$

é a expressão de $\beta_i(0)(f)$ em $\mathcal{X}$, e isto nos leva a concluir que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ é o vetor tangente a "i-ésima curva coordenada"em p, onde tal aplicação é dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0.$$

E mais ainda, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.2.1. Na notação acima, o conjunto T_pM dos vetores tangente a $p \in M$ em M coincide com o espaço vetorial T gerado por $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right); i = 1, \ldots, n\right\}$. T_pM é então chamado o espaço tangente a M em p.

Demonstração:

Seja $v \in T_pM$. Então v é o "vetor velocidade" $\alpha'(0)$ de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $p = \alpha(0)$. E, para toda $f \in \mathfrak{D}_p$ temos que

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}.$$

[1] t é a i-ésima coordenada

Podemos expressar (na parametrização $\mathcal{X}$):

$\alpha'(0)(f) = \dfrac{d}{dt}\left[f\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)\right]\Big|_{t=0} =$

$= x_1'(0)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 + \ldots + x_n'(0)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 = \left\{x_1'(0)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) + \ldots + x_n'(0)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)\right\}(f).$

Assim, $v = \alpha'(0)$é dado por

$$x_1'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \ldots + x_n'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

e, portanto, $v \in T$.

Seja, agora,

$$\bar{v} = a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \ldots + a_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \in T.$$

Temos que $(a_1 t, \ldots, a_n t) = t(a_1, \ldots, a_n) \in U$ para t sufucientemente pequeno, digamos com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Podemos, então, considerar a curva

$$\alpha : t \mapsto \mathcal{X}(a_1 t, \ldots, a_n t),\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Na parametrização $\mathcal{X}$, a expressão de α é

$$(a_1 t, \ldots, a_n t)$$

e de seu vetor tangente em $\alpha(0) = p$ será[2]

$$\alpha'(0) = a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \ldots + a_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \bar{v}$$

Logo, $v \in T_pM$, como queríamos. $\Diamond$

Observação 1.2.1. Tanto na proposição como na discursão acima, usamos, sem mencionar, as operações usuais entre funções.

Observação 1.2.2. Observamos que o conjunto $\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right); i = 1, \ldots, n\right\}$ é L.I., logo forma uma base (já que gera) para T_pM. Tal base será chamada a **base associada a $\mathcal{X}$**.

Definição 1.2.6. Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente. Uma função $f : M \to N$ é **diferenciável** em $p \in M$ se existem parametrizações

[2]isto pode ser concluído diretamente porque ja fizemos isso acima em uma curva α qualquer sob as condições dadas

$\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ e $\mathcal{Y} : V \subset \mathbb{R}^n \to N$ com $p \in \mathcal{X}(U)$, $f(\mathcal{X}(U)) \subset \mathcal{Y}(V)$, tal que $\mathcal{Y}^{-1} f \circ \mathcal{X} : U \to \mathcal{Y}^{-1}(V)$ seja diferenciável em $\mathcal{X}^{-1}(p)$.

f é diferenciável em M se for diferenciável em todo $p \in M$.

Definição 1.2.7. Consideremos as mesmas notações da definição 1.2.6 acima, supondo f diferenciável em $p \in M$. A **diferencial de f no ponto** p é a aplicação $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ que opera da seguinte maneira: dado $v \in T_pS$, tem-se que $v = \alpha'(o)$ para alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ e pomos $df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0)$

Para que fique bem definida, mostraremos df_p não depende da curva satisfazendo as condições da definição.

Consideremos $\mathcal{X} : U \subset M$ e $\mathcal{Y} : V \to N$ parametrizações de M e N em torno de p e $f(p)$ respectivamente e suponhamos que tais sejam expressas por $\mathcal{X}(x_1, \ldots, x_m)$ e $\mathcal{Y}(y_1, \ldots, y_n)$. Consideramos as bases $\mathcal{A} = \left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} \right), \ldots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_m} \right) \right\} \subset T_pM$ e $\mathcal{B} = \left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1} \right), \ldots, \left(\dfrac{\partial}{\partial y_n} \right) \right\} \subset T_{f(p)}N$ associadas a $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, respectivamente. Então podemos escrever

$$v = \alpha'(0) = x_1'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \ldots + x_n'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right),$$

onde $(x_1, \ldots, x_m)$ é a expressão de $\alpha(t)$ em $\mathcal{X}$.

Suponhamos ainda que, nas parametrizações $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, f seja expressa por

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m))$$

Então

$$(f \circ \alpha)(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_m(t)), \ldots, y_n(x_1(t), \ldots, x_m(t)))$$

e portanto

$$(f \circ \alpha)'(0) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{x_j}(p) x_j'(0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_m}{x_j}(p) x_j'(0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)$$

Assim, nas bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, $(f \circ \alpha)'(0)$ pode ser escrito da forma

$$(f \circ \alpha)'(0) = df_p(v) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{x_j}(p) x_j'(0), \ldots, \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_m}{x_j}(p) x_j'(0) \right)$$

$$df_p(v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ \vdots \\ x_m'(0) \end{pmatrix}$$

Segue desse modo que df_p não depende da curva. E mais do que isso, df_p é linear e sua matriz nas bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é dada acima.

Observação 1.2.3. Será suposto que sejam satisfeitas as seguintes propriedades para as variedades diferenciáveis:

1. Dados dois pontos distintos de M, existem vizinhança destes dois pontos que não se interceptam;

2. M pode ser coberto por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (imagens das parametrizações).

Assim, um sistema de coordenadas para M,por exemplo, pode ser considerado da forma $\mathcal{X}_i : U_i \to M$, onde $i \in \mathbb{N}$.

1.3 Aspectos da Geometria Complexa

Definição 1.3.1. Seja V um espaço vetorial real. Em $V \times V$ definimos as seguintes operações de adição e multiplicação por um número complexo:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

$$(a + ib)(u, v) = (au - bv, av + bu).$$

Relativamente a essas operações, V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ chamado de **espaço vetorial complexificado** de V, e representado por $V^{\mathbb{C}}$.

Nesta definição, $V^{\mathbb{C}}$ também é um espaço vetorial real e a aplicação $u \in V \mapsto (u, 0) \in V \times V$ é um isomorfismo $\mathbb{R}$-Linear, o que nos permite fazer a identificação

$$u := (u, 0).$$

Como $(u, v) = (u, 0) + (0, v) = (u, 0) + i(v, 0)$, teremos $(u, v) = u + iv$. Sendo assim, se

$$\mathcal{V} = \{(u, 0); u \in V\} \text{ e } i\mathcal{V} = \{i(v, 0); v \in V\}$$

então $V = \mathcal{V} + i\mathcal{V}$ e, ja que $\mathcal{V} \cap i\mathcal{V} = \emptyset$, tem-se $V = \mathcal{V} \oplus i\mathcal{V}$.

Definição 1.3.2. Dado $z = u + iv \in V^{\mathbb{C}}$, o **vetor conjugado** de z é definido por $\bar{z} = u - iv$

Definição 1.3.3. Seja V um espaço vetorial real. Uma **estrutura complexa** sobre V é um operador linear $J : V \to V$ satisfazendo $J^2 = I_V$. Neste caso, ao par (V, J), chamamos de **espaço vetorial quase-complexo**.

Observamos que com relação às operações adição(usual) e multiplicação por um número complexo definida por $(a + ib)v := av + bJv$, $a + ib \in \mathbb{C}$ e $v \in V$, V torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, que será denotado por V^J, uma vez fixada a estrutura quase-complexa J.

Proposição 1.3.1. Se V é um espaço vetorial real de dimensão finita m e possui uma estrutura quase-complexa J, então m é par.

Definição 1.3.4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um produto interno complexo sobre V é uma aplicação $\langle\langle ., . \rangle\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tem-se

- $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \overline{\langle\langle v, u\rangle\rangle}$
- $\langle\langle \alpha u + \beta v, w\rangle\rangle = \alpha\langle\langle u, w\rangle\rangle + \beta\langle\langle v, w\rangle\rangle$
- $\langle\langle u, u\rangle\rangle \geq 0$ e $\langle\langle u, u\rangle\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Desta definição tem-se

$$\langle\langle u, \lambda v\rangle\rangle = \overline{\langle\langle \lambda v, u\rangle\rangle} = \overline{\lambda\langle\langle v, u\rangle\rangle} = \bar{\lambda}\overline{\langle\langle v, u\rangle\rangle} = \bar{\lambda}\langle\langle u, v\rangle\rangle \; \forall u, v \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}$$

Definição 1.3.5. Um produto interno $\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ sobre um espaço vetorial quase-complexo (V, J) é dito hermitiano quando $\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$, $\forall u, v \in V$.

A terna $(V, J, \langle ., .\rangle)$ é então chamada um espaço vetorial hermitiano, e representaremos tal produto interno por $\langle ., .\rangle_h$.

Notação 4. Denotaremos por $z \perp_{\mathbb{C}} w$, para indicar que os vetores z e w de V são perpediculares como respeito ao produto interno hermitiano, ou seja, $\langle z, w\rangle_h = 0$.

Definição 1.3.6. Sejam $U \subset \mathbb{C}^m = \{(z_1 \dots z_m) \in \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}; z_j = x_j + iy_j\}$ aberto e $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ de classe C^1, isto é, existem e são contínuas as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial u}{\partial y_k}, \dfrac{\partial v}{\partial x_k}, \dfrac{\partial v}{\partial y_k}$, $1 \leq k \leq m$. Dizemos que f é holomorfa em U quando

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \ \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \ k = 1, \dots, m$$

.

Definição 1.3.7. Sejam $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto e $f = (f_1 \dots f_n) : U \to \mathbb{C}^n$, onde cada $f_j : U \to \mathbb{C}$ é de classe C^1. Dizemos que f é holomorfa em U quando cada f_j é holomorfa em U.

Definição 1.3.8. Uma variedade complexa de dimensão m é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $f_\alpha : U_\alpha \to M$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{C}^m$ em M tais que:

- $\bigcup\limits_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$
- para quaisquer α, β com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{C}^m$ e, além disto, as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ e $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ aí definidas são holomorfas.

O par (U_α, f_α) (ou a aplicação f_α) com $p \in f_{\alpha(U_\alpha)}$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p e $f_\alpha(U_\alpha)$ é chamada de vizinhança coordenada em p. A família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é chamada uma estrutura holomorfa em M.

Observação 1.3.1. Quando usarmos simplesmente o termo "variedade", então tal contexto valerá tanto para variedade diferenciável como para variedade complexa.

1.4 Fibrados e conexões

Definição 1.4.1. *Sejam M uma variedade diferenciável e V um espaço vetorial de dimensão k. Um fibrado vetorial local de dimensão k sobre M é a variedade produto $M \times V$ juntamente com a projeção $\pi : M \times V \to M$ dada por $\pi(p, v) = p$, e será representado, as vezes, pela notação $E = M \times V$.*

M é chamado variedade base e, para cada $p \in M$, o conjunto $E_p = \{p\} \times V$ é chamado fibra sobre p.

Uma aplicação diferenciável $\sigma : M \to M \times V$ tal que $\sigma(p) \in E_p$ para cada $p \in M$ é chamada uma seção do fibrado vetorial local E.

Sejam $E = M \times V$ e $\tilde{E} = N \times W$ fibrados vetoriais locais. Uma aplicação diferenciável $\Phi : E \to \tilde{E}$ é chamada um *morfismo diferenciável entre os fibrados vetoriais locais* E *e* $\tilde{E}$ *se existe uma aplicação* $\varphi : M \to N$ *tal que*

$$\Phi(p, v) = (\varphi(p), g_p(v)),$$

onde $g_p \in \mathfrak{L}(V, W)$ *para cada* $p \in M$.

No caso particular quando φ *é um difeomorfismo e* g_p *é um isomorfismo para todo* p, Φ *é chamada isomorfismo entre os fibrados vetoriais locais(sobre a identidade se* φ *é a identidade), e* E *e* $\tilde{E}$ *são ditos isomorfos.*

Definição 1.4.2. *Sejam* $E = M \times V$ *e* $\tilde{E} = M \times W$ *fibrados vetoriais locais com mesma variedade base* M. *Definimos o fibrado homomorfismo* $Hom(E, \tilde{E})$ *pelo fibrado vetorial local* $M \times \mathfrak{L}(V \to W)$. *Em outras palavras, a fibra* $Hom(E, \tilde{E})_p$ *sobre cada ponto* $p \in M$ *é uma aplicação linear* $E_p \to \tilde{E}_p$.

Definição 1.4.3. *Um fibrado vetorial de dimensão* k *sobre uma variedade diferenciável* M *é uma variedade diferenciável* E *juntamente com uma aplicação* $\pi : E \to M$ *(chamada projeção) que satisfazem as seguintes condições:*

(i) Existe um espaço vetorial de dimensão k *tal que para cada* $p \in M$, $E_p = \pi^{-1}(p)$ *é um espaço vetorial isomormo* V. E_p *é chamado fibra sobre* p;

(ii) Cada ponto $q \in M$ *está contido em um aberto* $U \subset M$ *tal que exista um difeomorfismo* $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ *satisfazendo* $\Phi_U(E_p) \subset \{p\} \times V$;

(iii) Para cada dois abertos U *e* $\tilde{U}$ *da propriedade (ii) como* $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ *a aplicação* $\Phi_U \circ \Phi_{\tilde{U}}^{-1} : (U \cap \tilde{U}) \times V \to (U \cap \tilde{U}) \times V$ *é um isomorfismo entre fibrados vetoriais locais sobre a identidade.*

M *é chamada base e* E, *espaço total.*

As vezes nos referimos simplesmente ao espaço total E *somente a projeção* $\pi : E \to M$ *como o fibrado vetorial.*

Exemplo 1. *É fácil ver que os fibrados vetoriais locais sobre* M *são fibrados vetoriais sobre* M. *Basta considerarmos as mesmas notações das duas definições e colocarmos* $\Phi_U = I_{U \times V}$

Definição 1.4.4. *Sejam $\pi : E \to M$ e $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to M$ com fibras isomorfas aos espaços V e $\tilde{V}$, respectivamente, e $f : M \to \tilde{M}$ uma aplicação diferenciável. Então uma aplicação $F : E \to \tilde{E}$ diferenciável é chamada um morfismo fibrado vetorial diferenciável se $F(E_p) \subset F(\tilde{E}_{f(p)})$ e $F|_{E_p}$ é linear para cada $p \in M$.*

Caso f seja um difeomorfismo e, para cada $p \in M$, $F|_{E_p}$ um isomorfismo linear então F é dita um isomorfismo fibrado vetorial diferenciável e E e $\tilde{E}$ são ditos esquivalentes.

Definição 1.4.5. *Seja $M \times V$ fibrado vetorial local com projeção $\pi : M \times V \to M$ dada por $\pi(p, v) = p$. Um fibrado equivalente a tal fibrado é chamado fibrado trivial.*

Definição 1.4.6. *Dizemos que um fibrado vetorial $\tilde{E}$ sobre uma variedade diferenciável M é um subfibrado de fibrado vetorial E sobre M se $\tilde{E}_p$ é um subespaço vetorial de E_p para cada $p \in M$ e, além disso, a aplicação inclusão $\psi : \tilde{E} \to E$ é um morfismo entre fibrados vetoriais locais.*

Definição 1.4.7. *Uma seção diferenciável de um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma aplicação diferenciável $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma(p) = p$, ou seja, para cada $p \in M$, tem-se $\sigma(p) \in E_p$.*

1.5 Grupos de Lie

Definição 1.5.1. *Um grupo de Lie é um grupo G com estrutura diferenciável tal que a aplicação $G \times G \to G$ dada por $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ é diferenciável.*

Um homomorfismo de grupos de Lie será um homomorfismo diferenciável entre gupos de Lie.

Exemplo 2. *$\mathbb{C}$ é um espaço vetorial, logo é uma variedade diferenciável e segue daí que todo aberto A de $\mathbb{C}$ é ainda uma variedade diferenciável. Em particular, $\mathbb{C}^*$ possui uma estrutura diferenciável e sabemos que é um grupo multiplicativo. Como a operação $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ $(z, w) \mapsto zw^{-1}$ é holomorfa, temos que é difereciável.*

Portanto, $\mathbb{C}^*$ é um grupo de Lie.

Seja V um espaço vetorial. O conjunto $Aut(V)$ dos automorfismos de V é um subconjunto aberto do espaço vetorial $End(V)$ dos endomorfismos de V. Com efeito, a aplicação

$\psi : End(V) \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(A) = \det(A)$ é contínua e $Aut(V) = \psi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, ou seja, $Aut(V)$ é imagem inversa de um aberto por uma aplicação contínua, o que prova nossa afirmação. Então, $Aut(V)$ possui uma estrutura diferenciável por ser uma subconjunto aberto de uma variedade diferenciável, a saber o espaço vetorial $End(V)$. E se considerarmos a operação multiplicação de matrizes em $Aut(V)$, vemos que a aplicação $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ é diferenciável, logo $Aut(V)$ é um grupo de Lie.

Notação 5. *Denotaremos os automorfismos de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ por $GL_n(\mathbb{R})$ e os automorfismos de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$ por $GL_n(\mathbb{C})$*

Definição 1.5.2. *Os subgrupos*

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); \det(A) = 1\}$$

e

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); \det(A) = 1\}$$

são chamados grupos especiais lineares.

Definição 1.5.3. *Os subgrupos*

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); A^t A = I\}$$

e

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); A^* A = I\}$$

são chamados grupos ortogonais e grupos unitários, respectivamente.

Definição 1.5.4. *Os subgrupos*

$$SO(n) = \{A \in O(n); \det(A) = 1\}$$

e

$$SU(n) = \{A \in U(n); \det(A) = 1\}$$

são chamados grupos especiais ortogonais e grupos especiais unitários, respectivamente.

Definição 1.5.5. *Uma ação à esquerda de um grupo G sobre uma variedade diferenciável M é uma operação*

$$G \times M \to M, \ (g, x) \mapsto g \cdot x$$

tal que $e \cdot x = x$ e $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in M$.

Se G é um grupo de Lie e a operação é diferenciável, dizemos então que tal é uma ação à esquerda diferenciável.

Exemplo 3. *A operação produto usual de um elemento do grupo de Lie $\mathbb{C}^*$ por um elemento da variedade diferenciável $\mathbb{C}_*^{n+1}$ define uma ação à esquerda diferenciável de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}_*^{n+1}$.*

De fato, aqui $e = 1$, $1 \cdot z = z$ e $(\alpha\beta) \cdot z = \alpha \cdot (\beta \cdot z)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ e $z \in \mathbb{C}_*^{n+1}$. Além disso a operação produto é holomorfa e, portanto, diferenciável.

Seja $G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\} \subset G$. Obviamente, tem-se $e \in G_x$. Além disso dados $g, h \in G_x$ tem-se

$$h^{-1} \cdot x = (h^{-1}e) \cdot x = (h^{-1}h^{-1}h) \cdot x = (h^{-1}h^{-1}) \cdot (h \cdot x) = h^{-1}h^{-1} \cdot x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^{-1} \cdot x = h^{-1}h^{-1} \cdot x \Rightarrow h^{-1} \cdot x = x.$$

Daí,

$$(gh^{-1}) \cdot x = g \cdot (h^{-1} \cdot x) = g \cdot x = x$$

e portanto G_x é um subgrupo de G, chamado grupo isotrópico de x.

Definição 1.5.6. *Suponhamos que exista uma ação à esquerda de um grupo G sobre uma variedade M. O conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x; g \in G\}$ é chamado órbita de x.*

Caso M contém somente uma órbita, ou seja, $G \cdot x = G \cdot y \ \forall x, y \in M$ dizemos que tal ação é transitiva.

O conjunto de todas as órbitas em M será denotado por M/G, ou seja,

$$M/G = \{G \cdot x; x \in M\}$$

e a aplicação $\pi : M \to M/G$ dada por $\pi(x) = G \cdot x$ é chamada de projeção canônica de M sobre G/M.

Definição 1.5.7. *Um espaço homogêneo de um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável M com uma ação transitiva à esquerda diferenciável de G sobre M.*

Teorema 1.5.1. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Então o quociente G/H admite uma estrutura diferenciável tal que a projeção canônica $\pi : G \to G/H$ é uma submersão.*

Teorema 1.5.2. *Seja M um espaço homogêneo de um grupo de Lie G, $x \in M$ e G_x o grupo isotrópico de x. Então a aplicação $f_x : G/G_x \to M$ dada por $f(gG_x) = g \cdot x$ está bem definida e é um difeomorfismo.*

Definição 1.5.8. *Um grupo G age livremente sobre uma variedade M se possui uma ação à esquerda satisfazendo: $gx = x$ para algum $x \in M \Rightarrow g = e$.*

Exemplo 4. $\mathbb{C}^*$ *age livremente sobre* $\mathbb{C}_*^{n+1}$

Definição 1.5.9. *Seja M uma variedade e G um grupo de Lie. Um fibrado principal sobre M com a estrutura de G consiste de uma variedade P e uma ação de G sobre P satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) *G age livremente sobre P;*

(ii) *$M = P/G$ e a projeção canônica de P sobre P/G é diferenciável;*

(iii) *P é localmente trivial;*

P é chamado de espaço total ou espaço fibrado e M espaço base.

1.6 A geometria de $\mathbb{C}P^n$

1.6.1 Estrutura Holomorfa de $\mathbb{C}P^n$

Definição 1.6.1. *O espaço projetivo real complexo n-dimensional $\mathbb{C}P^n$ é dado pelo quociente $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}_*^{n+1}/\sim$, onde dados $z, w \in \mathbb{C}_*^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$,*

$$z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

$\mathbb{C}P^n$ é então o conjunto das classes $[z]$, onde $z \in \mathbb{C}_*^{n+1}$.
Mas,

$$[z] = \{w \in \mathbb{C}_*^{n+1}; w \sim z\} = \{w \in \mathbb{C}_*^{n+1}; w = \lambda z \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}^*\} \simeq \{\lambda z; \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

Ou seja, $\mathbb{C}P^n$ é o conjunto dos subespaços de dimensão complexa 1 em $\mathbb{C}^*$.

Observação 1.6.1. *Qualquer elemento de* $\mathbb{C}P^n$ *é da forma* $[(z_1,\ldots,z_{n+1})]$, *onde* $(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}_*$. *Segue daí que dado* $[(z_1,\ldots,z_{n+1})] \in \mathbb{C}P^n$, *tem-se* $z_j \neq 0$ *para algum* $1 \leq j \leq n+1$, *de onde concluimos que se* $V_j = \{[(z_1,\ldots,z_{n+1})]; z_j \neq 0\}$ *então* $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{j=1}^{n+1} V_j$.

Observação 1.6.2. $[w] = [z] \Leftrightarrow w \sim z \Leftrightarrow w = \lambda z$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Isto quer dizer que $[w] = [z]$ *se, e somente se,* w *é um múltiplo de* z
Em particular, se $z = (z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}_*$ *é tal que* $z_j \neq 0$ *para algum* $j = 1,\ldots,n+1$ *então*

$$[(z_1,\ldots,z_{n+1})] = \left[\frac{1}{z_j}(z_1,\ldots,z_{n+1})\right] = \left[\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\frac{z_{j-1}}{z_j},1,\frac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_j}\right)\right]$$

Assim, podemos escrever

$$[(z_1,\ldots,z_{n+1})] = [(w_1,\ldots,w_{j-1},1,w_j,\ldots,w_n)],$$

onde $w_k = \dfrac{z_k}{z_j}$.

Para cada $j = 1,\ldots,n+1$, *definimos*

$$V_j = \{[(z_1,\ldots,z_{n+1})] \in \mathbb{C}^{n+1}_*; z_j \neq 0\} = \{[(w_1,\ldots,w_{j-1},1,w_j,\ldots,w_n)]; (w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^n\}$$

e $f_j : \mathbb{C}^n \to V_j \subset \mathbb{C}P^n$ *pondo* $f_j(w_1,\ldots,w_n) = [(w_1,\ldots,w_{j-1},1,w_j,\ldots,w_n)]$. *Mostraremos que* $\{(\mathbb{C}^n, f_j); j = 1,\ldots,n+1\}$ *é uma estrutura holomorfa em* $\mathbb{C}P^n$ *o que o torna uma variedade complexa de dimensão* n.

f_j *é obviamente bijetiva, logo* $\bigcup_{j=1}^{n+1} f_j(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{j=1}^{n+1} V_j = \mathbb{C}P^n$.

Agora só falta mostrarmos que se $f_j(\mathbb{C}^n) \cap f_i(\mathbb{C}^n) = V_j \cap V_i \neq 0$, $f_j^{-1}(V_j \cap V_i)$ *é aberto e que* $f_i^{-1} \circ f_j$ *é holomorfa. Para isso, suporemos* $i < j$ *(o caso i>j é análogo).*

Dado $((w_1,\ldots,w_n))$ *com* $w_i \neq 0$, *tem-se*

$$\begin{aligned}
f_j((w_1,\ldots,w_n)) &= [(w_1,\ldots,w_{j-1},1,w_j,\ldots,w_n)] \\
&= \left[\frac{1}{w_i}(w_1,\ldots,w_{j-1},1,w_j,\ldots,w_n)\right] \\
&= \left[\left(\frac{w_1}{w_i},\ldots,\frac{w_{i-1}}{w_i},1,\frac{w_{i+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_{j-1}}{w_i},\frac{1}{w_i},\frac{w_{j+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_n}{w_i}\right)\right] \\
&= f_i\left(\frac{w_1}{w_i},\ldots,\frac{w_{i-1}}{w_i},\frac{w_{i+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_{j-1}}{w_i},\frac{1}{w_i},\frac{w_{j+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_n}{w_i}\right) \in f_i(\mathbb{C}^n) = V_i.
\end{aligned}$$

Portanto, $f_j(w_1,\ldots,w_n)\in V_j\cap V_i$ *e daí* $(w_1,\ldots,w_n)\in f_j^{-1}(V_j\cap V_i)$.

Dado $[(z_1,\ldots,z_{n+1})]\in V_j\cap V_i$ *tem-se*

$$[(z_1,\ldots,z_{n+1})]=\left[\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\frac{z_{j-1}}{z_j},1,\frac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_j}\right)\right].$$

Logo,

$$f_j^{-1}([(z_1,\ldots,z_{n+1})]) \;=\; \left[\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\frac{z_{j-1}}{z_j},\frac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_j}\right)\right]=(w_1,\ldots,w_n)$$

com $w_i=\dfrac{z_i}{z_j}\neq 0$, *pois* $z_i\neq 0$ *já que* $(z_1,\ldots,z_{n+1})\in V_i$ *Provamos então que*

$$f_j^{-1}(V_i\cap V_j)=\{(w_1,\ldots,w_n);w_i\neq 0\}.$$

que é de fato aberto.

Agora,

$$\begin{aligned}
f_i^{-1}\circ f_j(w_1,\ldots,w_n) &= f_i^{-1}([w_1,\ldots,w_{j-1},1,w_{j+1},\ldots,w_n])\\
&= f_i^{-1}\left(\left[\left(\frac{w_1}{w_i},\ldots,\frac{w_{i-1}}{w_i},1,\frac{w_{i+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_{j-1}}{w_i},\frac{1}{w_i},\frac{w_{j+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_n}{w_i}\right)\right]\right)\\
&= \left(\frac{w_1}{w_i},\ldots,\frac{w_{i-1}}{w_i},\frac{w_{i+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_{j-1}}{w_i},\frac{1}{w_i},\frac{w_{j+1}}{w_i},\ldots,\frac{w_n}{w_i}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $f_i\circ f_j$ *é holomorfa, já que cada coordenada determina uma função holomorfa.*

1.6.2 Estrurura complexa de $\mathbb{C}P^n$

Pelo exemplo 3, vimos que $\mathbb{C}^*$ *age á esquerda sobre* $\mathbb{C}^{n+1}_*$. *A órbita de um elemento* $z\in\mathbb{C}^{n+1}_*$ *é dada por*

$$\mathbb{C}^*\cdot z=\{\lambda z;\lambda\in\mathbb{C}^*\}=[z].$$

Portanto,

$$\mathbb{C}^{n+1}_*/\mathbb{C}^*=\{[z];z\in\mathbb{C}^{n+1}_*\}=\mathbb{C}P^n.$$

Mostraremos agora que a projeção canônica

$$\pi:\mathbb{C}^{n+1}_*\to\mathbb{C}^{n+1}_*/\mathbb{C}^*=\mathbb{C}P^n,\ z\mapsto\mathbb{C}^*\cdot z=[z]$$

de $\mathbb{C}^{n+1}_*$ *sobre* $\mathbb{C}P^n$ *é diferenciável. Para isto, tomemos* $p=(p_1,\ldots,p_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}_*$ *e* $h:\mathbb{C}^{n+1}_*\to\mathbb{C}^{n+1}_*$ *dada por* $h(z)=z$ *um sistema de coordenadas em* $\mathbb{C}^{n+1}_*$. *Então*

$\pi(p) \in V_j$ para algum j, onde V_j é uma vizinhança coordenada de $\mathbb{C}P^n$ definida acima. Para provarmos que π é diferenciável, temos que mostrar que $f_j^{-1} \circ \pi \circ h$ é diferenciável em $h^{-1}(p) = p$. e para isto é suficiente mostrarmos que $f_j^{-1} \circ \pi \circ h$ é diferenciável no aberto $\pi^{-1}(V_j) = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}); z_j \neq 0\} \subset \mathbb{C}_*^{n+1}$, que contém $h^{-1}(p)$. Mas dado $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \pi^{-1}(V_j)$, tem-se

$$\begin{aligned} f_j^{-1} \circ \pi \circ h(z_1, \ldots, z_{n+1}) &= f_j^{-1} \circ \pi(z_1, \ldots, z_{n+1}) = f_j^{-1}([(z_1, \ldots, z_{n+1})]) \\ &= f_j^{-1}\left(\left[\left(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_j}\right)\right]\right) \\ &= \left(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_j}\right). \end{aligned}$$

Segue daí $f_j^{-1} \circ \pi \circ h$ é holomorfa em $\pi^{-1}(V_j)$, logo é diferenciável, como queríamos.

Conseguimos então mostrar que $M = \mathbb{C}P^n$, e a ação de $G = \mathbb{C}^*$ e $P = \mathbb{C}_*^{n+1}$ satisfazem as condições da definição 1.5.9 e portanto $\mathbb{C}_*^{n+1}$ e tal ação de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}P^n$ é um fibrado principal de $\mathbb{C}P^n$ com estrutura de $\mathbb{C}^*$.

Sejam $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ a projeção canônica de S^{2n+1} sobre $\mathbb{C}P^n$, $p = [z] \in \mathbb{C}P^n$ e $\sigma_{\mathbb{R}} = span_{\mathbb{R}}\{z, iz\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Então

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(p) &= \{w \in S^{2n+1}; z \sim w\} \\ &= \{w \in S^{2n+1}; w = \lambda z \text{ para algum } \lambda \in S^1\} \\ &= \{\lambda z; \lambda = a + bi \in S^1\} \\ &= \{(a+bi)z; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } |(a+bi)z| = 1\} \\ &= \{az + b(iz); a, b \in \mathbb{R} \text{ e } |az + b(iz)| = 1\} \\ &= S^{2n+1} \cap \{az + b(iz); a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= S^{2n+1} \cap \sigma_{\mathbb{R}} \cong S^1. \end{aligned}$$

Temos que $T_z S^{2n+1} = \{w \in \mathbb{C}^{n+1}; w \perp z\}$ e, portanto, $iz \in T_z S^{2n+1}$.

Como π é constante em $\pi^{-1}(p) \cong S^1$, tem-se $d\pi_p$ restrita ao subespaço tangente a $\pi^{-1}(p)$ é identicamente nula. Tal subespaço tem dimensão 1 e é gerado por um vetor perpendicular z e contido no plano $\sigma_{\mathbb{R}}$, ou seja, gerado por iz. Logo, $d\pi_z|_{span_{\mathbb{R}}\{iz\}} \equiv 0$.

Seja

$$\tilde{T}_z = (\{iz\}^{\perp} \text{ em } T_z S^{2n+1}) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1}; w \perp_{\mathbb{C}} z\}.$$

Então $T_zS^{2n+1} = \tilde{T}_z \oplus span_{\mathbb{R}}\{iz\}$, $\tilde{T}_z$ *tem dimensão* $2n$ *e, como* $d\pi_z(span_{\mathbb{R}}\{iz\}) = \{0\}$, *temos que* $d\pi_z(\tilde{T}_z) = d\pi_z(T_zS^{2n+1}) = T_p\mathbb{C}P^n$, *pois* $d\pi_z$ *tem posto 2. Portanto* $d\pi_z|_{\tilde{T}_z} : \tilde{T}_z \to T_p\mathbb{C}P^n$ *é um isomorfismo.*

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *o produto interno hermitiano sobre* $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$, *isto é,* $\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} z_k \overline{w}_k$. *Então o produto interno euclidiano* $(.,.)$ *sobre* $\mathbb{R}^{2n+2}$ *pode ser escrito como* $(X, Y) = \Re\langle X, Y \rangle$.

Seja g' *a métrica Riemaniana sobre* S^{2n+1} *obtida pela restrição de* $(.,.)$ *a* TS^{2n+1}. *Então* g' *é invariante sob a ação de* S^1, *ou seja,*

$$g'_{\lambda z}(\lambda X, \lambda Y) = g'_z(X, Y)\ \forall z \in S^{2n+1}, \lambda \in S^1,\ X, Y \in T_zS^{2n+1}.$$

Com efeito, dados $z \in S^{2n+1}, \lambda \in S^1,\ X, Y \in T_zS^{2n+1}$, *teremos*

$$\begin{aligned} g'_{\lambda z}(\lambda X, \lambda Y) &= (\lambda X, \lambda Y)_{\lambda z} = \Re\langle \lambda X, \lambda Y \rangle \\ &= \Re(\lambda\overline{\lambda}\langle X, Y \rangle) = \Re(|\lambda|^2\langle X, Y \rangle) \\ &= \Re\langle X, Y \rangle = (X, Y)_z = g'(X, Y). \end{aligned}$$

A partir daí definimos uma métrica Riemaniana g *sobre* $\mathbb{C}P^n$ *pondo*

$$g_p(X, Y) = g'_z(d\tilde{\pi}_z^{-1}(X), d\tilde{\pi}_z^{-1}(Y)),$$

onde $\pi(z) = p \in \mathbb{C}P^n$, $d\tilde{\pi}_z = d\pi_z|_{T'_z}$ *e* $X, Y \in T_p\mathbb{C}P^n$.

g *é chamada métrica de* $Fubini - Study$.

Exibiremos uma estrutura complexa J *sobre* $\mathbb{C}P^n$.

Sejam $p \in \mathbb{C}P^n$, $d\tilde{\pi} = d\pi|_{\tilde{T}_z}$, $\tilde{J} : \tilde{T}_z \to \tilde{T}_z$ *dada por* $\tilde{J}(w) = iw$, $z \in S^{2n+1}$ *tal que* $\pi(z) = p$ *e* $J = d\tilde{\pi}_z \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}_z^{-1} : T_P\mathbb{C}P^n \to T_p\mathbb{C}P^n$. *Mostraremos que* J *está bem definida e é uma estrutura complexa sobre* $\mathbb{C}P^n$. *Para que* J *esteja bem definida, não deve depender do elemento* z *escolhido tal que* $\tilde{\pi}(z) = p$. *Sejam então* $z_1, z_2 \in S^{2n+1}$ *tal que* $\tilde{\pi}(z_1) = \tilde{\pi}(z_2) = p$. *Então existe* $\lambda \in S^1$ *tal que* $z_2 = \lambda z_1$.

Observamos que $\tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ \lambda I$. *De fato,* $\tilde{\pi}(z) = [z] = [\lambda z] = [\lambda I(z)] = \tilde{\pi}(\lambda I(z)) = \tilde{\pi} \circ I(z)\ \forall z \in S^{2n+1}$.

Dado $X \in T_p\mathbb{C}P^n$, *existem* $w_1, w_2 \in \tilde{T}_z$ *tal que* $d\tilde{\pi}_{z_1}(w_1) = d\tilde{\pi}_{\lambda z_1}(w_2) = X$. *Mas, como* $\tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ \lambda I$, *usando a regra da cadeia teremos:*

$$d\tilde{\pi}_{\lambda z_1}(\lambda w_1) = d\tilde{\pi}_{z_1}(w_1) = d\tilde{\pi}_{\lambda z_1}(w_2) \Rightarrow w_2 = \lambda w_1,$$

pois $d\tilde{\pi}$ é um isomorfismo.

Assim, por um lado,

$$J(X) = d\tilde{\pi}_{z_1} \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}_{z_1}^{-1}(X) = d\tilde{\pi}_{z_1} \circ \tilde{J}(w_1) = d\tilde{\pi}_{z_1}(iw_1)) = d\tilde{\pi}_{\lambda z_1}(\lambda iw) = d\tilde{\pi}_{z_2}(iw_2)$$

e por outro,

$$J(X) = d\tilde{\pi}_{z_2} \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}_{z_2}^{-1}(X) = d\tilde{\pi}_{z_2} \circ \tilde{J}(w_2) = d\tilde{\pi}_{\lambda z_1}(i\lambda w_1)) = d\tilde{\pi}_{z_2}(iw_2).$$

E, portanto, J está bem definida.

J é de fato linear e

$$J^2 = d\tilde{\pi}_z \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}_z^{-1} \circ d\tilde{\pi}_z \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}_z^{-1} = d\tilde{\pi}_z \circ \tilde{J} \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}_z^{-1} = d\tilde{\pi}_z \circ (-I) \circ d\tilde{\pi}_z^{-1} = -I.$$

Portanto, J é uma estrutura complexa sobre $\mathbb{C}P^n$.

Observamos que se $X, Y \in T_p\mathbb{C}P^n$ então

$$g(JX, JY) = g(d\tilde{\pi} \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}^{-1}(X), d\tilde{\pi} \circ \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}^{-1}(Y)) = g'(\tilde{J} \circ d\tilde{\pi}^{-1}(X), \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}^{-1}(Y)) =$$

$$= \Re\langle \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}^{-1}(X), \tilde{J} \circ d\tilde{\pi}^{-1}(Y)\rangle = \Re\langle id\tilde{\pi}^{-1}(X), id\tilde{\pi}^{-1}(Y)\rangle = \Re(i\bar{i}\langle d\tilde{\pi}^{-1}(X), d\tilde{\pi}^{-1}(Y)\rangle) =$$

$$= \Re(\langle d\tilde{\pi}^{-1}(X), d\tilde{\pi}^{-1}(Y)\rangle) = g'(d\tilde{\pi}^{-1}(X), d\tilde{\pi}^{-1}(Y)) = g(X, Y).$$

Isto prova que a métrica de Fubini-Study é hermitiana com respeito a estrutura J.

1.6.3 Fibrado tautológico

Sejam, agora, $L = \{(p, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}; v \in p\}$, $1 \leq j \leq n+1$ e $f_j : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^{n+1} \to L$ dada por $f_j(w, \lambda) = ([\tilde{w}], \lambda\tilde{w})$, onde $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}P^n$ e $\tilde{w} = (w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Dado $(p, v) \in L$, podemos escrever $p = [(w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n)]$ para algum $1 \leq j \leq n+1$ e, já que $v \in p$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $v = \lambda\widetilde{(w_1, \ldots, w_{j-1}, 1, w_j, \ldots, w_n)}$. Segue daí que $(p, v) = f_j(w_1, \ldots, w_n, \lambda)$, de onde concluimos que $L = \bigcup_{j=1}^{n+1} f_j(\mathbb{C}^{n+1})$.

Se $(w_1, \lambda_1), (w_2, \lambda_2) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ são tais que $(w_1, \lambda_1) \neq (w_2, \lambda_2)$ então $w_1 \neq w_2$ ou $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Em quaisquer dos casos tem-se $\lambda_1\tilde{w}_1 \neq \lambda_2\tilde{w}_2$, e daí

$$f_j(w_1, \lambda_1) = ([\tilde{w}_1], \lambda_1\tilde{w}_1) \neq ([\tilde{w}_2], \lambda_2\tilde{w}_2) = f_j(w_2, \lambda_2).$$

Portanto, f_j é injetiva.

Suponhamos que $f_j(\mathbb{C}^{n+1}) \cap f_i(\mathbb{C}^{n+1}) = W \neq \emptyset$ para $i \neq j$. Usando argumentos análogo quando provamos que $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade complexa, conseguimos ver que $f_j^{-1}(W)$ é aberto e que $f_i^{-1} \circ f_j$ é holomorfa.

Os argumentos acima mostram L é uma variedade complexa de dimensão $n+1$.

Mostraremos que L é um fibrado vetorial dimensão complexa 1 sobre $\mathbb{C}P^n$, chamado fibrado linha tautológico.

Primeiro, definimos a projeção $\pi : L \to \mathbb{C}P^n$ pondo $\pi(p, v) = p$

Se $p \in \mathbb{C}P^n$, seja $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $p = [z]$. Então

$$L_p = \pi^{-1}(p) = \{p\} \times \{v \in \mathbb{C}^{n+1}; v \in p\} = \{p\} \times \{\lambda z \in \mathbb{C}^{n+1}; \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Então definimos a aplicação $T : E_p \to \mathbb{C}$ pondo $T(p, \lambda z) = \lambda$, que está bem definida(pois p e z são fixos) e é obviamente um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear entre a fibra L_p e o espaço vetorial $\mathbb{C}$ de dimensão complexa 1.

Dado $q \in \mathbb{C}P^n$, seja U um aberto contendo q e $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$ definida da seguinte maneira:

Dado $p \in U$, fixamos $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $p = [z]$. Então $v = \lambda z$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ e colocamos $\Phi_U(p, v) = (p, \lambda)$.

Φ_U é claramente um difemorfismo e $\Phi_U(E_p) = \{p\} \times \mathbb{C}$, como pode ser visto facilmente.

Além disso se U e $\tilde{U}$ são abertos tal que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ então $\Phi_U \circ \Phi_{\tilde{U}}^{-1} = I($ aplicação identidade $)$ e, portanto, é um isomorfismo entre fibrados vetoriais locais sobre a identidade, o que faltava para a provarmos o que havíamos afirmado a respeito de L.

Seja $L^\perp$ o subfibrado do fibrado trivial $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ cuja fibra, em cada ponto $p = [z]$, é

$$L_p^\perp = \{z\}_{\mathbb{C}}^\perp,$$

ou seja, a projeção $\pi : L^\perp \to \mathbb{C}P^n$ é tal que $\pi^{-1}(p) = \{z\}_{\mathbb{C}}^\perp$.

Consideremos a aplicação $\psi : T_P\mathbb{C}P^n \to Hom(L_p, L_p^\perp)$, definida para cada $v \in T_P\mathbb{C}P^n$ por $\psi(v) = f$ onde $f(z) = d\tilde{\pi}_z^{-1}(v)$.

Como $d\tilde{\pi}_z$ é um isomorfismo linear, ψ está bem definida e é linear. E mais ainda, ψ é injetiva, pois se $\psi(v) = \psi(w)$ então

$$d\tilde{\pi}_z^{-1}(v) = \psi(v)(z) = \psi(w)(z) = d\tilde{\pi}_z^{-1}(w) \Rightarrow v = w,$$

devido a $d\tilde{\pi}_z$ *ser isomorfismo.*

Dado $f \in Hom(L_p, L_p^{\perp})$, *tem-se* $f(z) \in \{z\}_{\mathbb{C}}^{\perp} = \tilde{T}_z$. *Então, se tomarmos* $v = d\tilde{\pi}_z(f(z)) \in \tilde{T}_z = \{z\}_{\mathbb{C}}^{\perp}$, *teremos* $f(z) = d\tilde{\pi}_z^{-1}(v)$, *e daí* $f = \psi(v)$, *de onde concluimos que a aplicação linear* ψ *é sobrejetiva, e uma vez que já provou-se que é injetiva, segue que é um isomorfismo linear.*

Definição 1.6.2. *Sejam* $X \in T_p\mathbb{C}P^n$, s *uma seção do fibrado homomorfismo* $Hom(L, L^{\perp})$ *e* γ *uma curva em* $\mathbb{C}P^n$ *tal que* $\gamma(0) = p$ *e* $\gamma'(0) = X$. *Escolhemos uma seção* $z(t)$ *de* L *sobre* $\gamma(t)$. *Então definimos a conexão sobre* $Hom(L, L^{\perp})$ *por*

$$(\nabla_X s)(z(0)) = (\nabla_X^{L^{\perp}}(sz(t))) - s(\nabla_X^{L^{\perp}} z(t))|_{t=0}.$$

Capítulo 2

Sequências Harmônicas

Aplicações harmônicas

Seja $\psi : M \to N$ *uma aplicação diferenciável entre as variedades* M *e* N*, onde* M *onde é compacta. a energia de* f *é dada por*

$$E(\psi) = \int_M |d\psi|^2 dVol.$$

A aplicação é dita um valor estacionário de E *se satisfaz a equação de Euler-Lagrange*

$$tr\nabla d\psi = 0,$$

onde $(\nabla d\psi)(X,Y) = (\nabla_X d\psi)(Y) = \nabla_X(d\psi(Y)) - d\psi(\nabla_X Y)$ *e*

$$tr\nabla d\psi = (\nabla d\psi)(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}) + (\nabla d\psi)(\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Y}).$$

Definição 2.0.3. *A aplicação* ψ *acima é dita harmônica quando* $tr\nabla d\psi = 0$*, ou seja,* ψ *é um valor estacionário de* E*.*

Quando M *é uma superfície de Riemann, isto equivale a*

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} d\psi)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0$$

ou

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} d\psi)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0.$$

2.1 Construção de sequências harmônicas

Consideramos S *uma superfície de Riemann,* $\psi_0 : S \to \mathbb{C}P^n$ *uma aplicação e* $f_0 : S \to \mathbb{C}^{n+1}_*$ *de tal forma que* $\psi_0(z) = [f_0(z)]$.

Sejam agora

$$L_0 = \{(z, v) \in S \times \mathbb{C}^{n+1}; v \in [f_0(z)]\}$$

e

$$L_0^\perp = \{(z, v) \in S \times \mathbb{C}^{n+1}_*; v \in [f_0(z)]^\perp\}$$

fibrados linha sobre S.

Uma seção de L_0 *é uma aplicação* $s : S \to L_0$ *satisfazendo*

$$s(z) \in L_{0z} = \underbrace{\{z\} \times \{v \in \mathbb{C}^{n+1}; v \in [f_0(z)]\}}_{fibra\ sobre\ z} \cong [f_0(z)] \subset \mathbb{C}^{n+1}\ \forall z \in M.$$

Portanto, podemos considerar uma seção de L_0 *como sendo uma aplicação* $s : S \to \mathbb{C}^{n+1}$ *satisfazendo*

$$s(z) \in [f_0(z)] \Rightarrow s(z) = \lambda f_0(z) \Rightarrow s = \lambda f_0,\ \textit{para algum}\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Isto quer dizer que as seções de L_0 *são da forma* λf_0.

Em particular, f_0 *é uma seção de* L_0.

Todo sub-fibrado vetorial complexo V *de* $S \times \mathbb{C}^{n+1}$ *herda uma estrutura holomorfa para a qual uma seção local* s *é holomorfa se e somente se a derivada* $\frac{\partial s}{\partial \bar{z}}$ *é ortogonal a* V. *Desse modo,* L_0 *admite uma estrutura de fibrado vetorial holomorfo sobre* M *e, portanto, podemos supor que a seção* f_0 *de* L_0 *seja holomorfa.*

ψ_0 *determina uma aplicação* $\partial_0 : L_0 \to L_0^\perp$ *da seguinte maneira:*

$$\partial_0 f_0 = d\psi_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) f_0 = \pi_{L_0^\perp} \left(\frac{\partial f_0}{\partial z} \right),$$

onde $\pi_{L_0^\perp}$ *é a projeção sobre* $L_0^\perp$.

∂_0 *está bem definida pois qualquer outra seção de* L_0 *é da forma* λf_0 *e daí* $\partial(\lambda f_0) = \lambda \partial f_0$.

Com isso, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1. ∂_0 *é uma aplicação holomorfa se, e somente se,* $\psi_0 = [f_0]$ *é uma aplicação harmônica*

Demonstração:

Sabemos que f_0 *é uma seção holomorfa não-nula de* $L_0^\perp$*, isto é,* $0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} f_0$.
Basta então provarmos que $\partial_0 f_0$ *é holomorfa se, e somente se,* ψ_0 *é harmônica.*
Mas,

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \partial_0) f_0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} (\partial_0 f_0) - \partial_0 (\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} f_0) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} (\partial_0 f_0).$$

Assim,

$$\psi_0 \text{ é harmônica} \Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \partial_0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} d\psi_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} (\partial_0 f_0) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \partial_0) f_0 = 0$$

Concluimos que

$$\psi_0 \text{ é harmônica} \Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} (\partial_0 f_0) = 0 \Leftrightarrow \partial_0 f_0 \text{ é holomorfa.}$$

$\Diamond$

Agora, suponhamos que $\partial_0 \neq 0$*. Então* $\partial_0 f_0 \neq 0$.

Defimos $\psi_1 : S \to \mathbb{C}P^n$ *pondo* $\psi_1(z) = [f_1(z)]$*, se* $f_1(z) \neq 0$*. Caso* $f_1(z_0) = 0$*, então podemos escrever* $f_1(z) = (z - z_0)^r g(z)$ *onde* $g(z_0) \neq 0$*. Observamos que, para* $z \neq z_0$, $[f_1(z)] = [g(z)]$ *e pomos* $\psi_1(z) = [g(z)]$.

Daí podemos construir subfibrados

$$L_1 = \{(z, v) \in S \times \mathbb{C}^{n+1}; v \in \psi_1(z)\}$$

e

$$L_1^\perp = \{(z, v) \in S \times \mathbb{C}^{n+1}; v \in \psi_1(z)^\perp\}$$

do fibrado trivial $S \times \mathbb{C}^{n+1}$.

Observamos que as seções de L_1 *são os múltiplos de* f_1 *e que dada uma seção* λf_0 *de* L_0*, tem-se* $\partial_0(\lambda f_0) = \lambda f_1$*, ou seja, as seções de* $\partial_0(L_0)$ *são seções* L_1*, e portanto* ∂_0 *aplica* L_0 *em* L_1.

Proposição 2.1.2. *Se* ψ_0 *é harmônica então* ψ_1 *também é.*

Definindo $\partial_1 : L_1 \to L_1^\perp$ *por* $\partial_1 = d\psi_1 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$*, e usando processos análogos aos usados acima, conseguimos construir aplicações* ψ_p, ∂_p *e subfibrados* L_p *com propriedades semelhantes apenas trocando o índice* 0 *por* $p \in \mathbb{N}$.

Definimos $\overline{\partial}_0 : L_0 \to L_0^{\perp}$ *pondo*

$$\overline{\partial}_0 f_0 = d\psi_0\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) f_0 = \pi_{L^{\perp}}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \bar{z}}\right).$$

Definimos também:

$$f_{-1} = -\frac{|f_0|^2}{|\overline{\partial}_0 f_0|^2}\overline{\partial}_0 f_0$$
$$L_{-1} = \{(z, v) \in S \times \mathbb{C}^{n+1}; v \in [f_{-1}(z)]\}$$

Observamos que as seções de $\overline{\partial}_0(L_0)$ *são seções de* L_{-1} *e, portanto,* $\overline{\partial}_0$ *aplica* L_0 *em* L_{-1}, *e a partir daí definimos* $\psi_{-1} = [f_{-1}]$ *e* $\overline{\partial}_{-1} = d\psi_{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$. *Seguindo tal processo, conseguimos aplicações* ψ_p, $\overline{\partial}_p$ *e subfibrados* L_p *satisfazendo, para* $p \in \mathbb{Z}_-$*:*

(i) $f_{p-1} = -\frac{|f_p|^2}{|\overline{\partial}_p f_p|^2}\overline{\partial}_p f_p \Rightarrow \overline{\partial}_p f_p = -\frac{|\overline{\partial}_p f_p|^2}{|f_p|^2} f_{p-1}$

(ii) ∂_p *é anti-holomorfa se, e somente se,* ψ_p *é harmônica;*

(iii) ψ_p *harmônica* $\Rightarrow \psi_{p-1}$ *harmônica.*

Podemos, assim, construir ∂_p *e* $\overline{\partial}_p$ *não somente para p segundo suas restrições acima, como para todo* $p \in \mathbb{Z}$ *de modo natural.*

$$\ldots L_{-2} \xrightarrow{\partial_{-2}} L_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} L_0 \xrightarrow{\partial_0} L_1 \xrightarrow{\partial_2} L_2 \ldots$$
$$\ldots L_{-2} \xleftarrow{\overline{\partial}_{-1}} L_{-1} \xleftarrow{\overline{\partial}_0} L_0 \xleftarrow{\overline{\partial}_1} L_1 \xleftarrow{\overline{\partial}_2} L_2 \ldots$$

2.2 Equações básicas

Supondo que f_p *seja holomorfa, temos que* $\partial_p f_p = f_{p+1}$ *também é e*

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} f_{p+1} = proj_{L_p^{\perp}} \frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}} \parallel f_p.$$

Segue daí que

$$\overline{\partial}_{p+1} f_{p+1} = proj_{L_{p+1}^{\perp}}\left(\frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}}\right) = proj_{L_p}\left(\frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}}. \tag{2.1}$$

$$\overline{\partial}_p f_p = -\frac{|\overline{\partial}_p f_p|^2}{|f_p|^2} f_{p-1} \Rightarrow |\overline{\partial}_p f_p| = \frac{|\overline{\partial}_p f_p|^2}{|f_p|^2}|f_{p-1}| \Rightarrow |\overline{\partial}_p f_p| = \frac{|f_p|^2}{|f_{p-1}|} \tag{2.2}$$

Substituindo a última na primeira igualdade de (2.2), temos

$$\overline{\partial}_p f_p = -\frac{|f_p|^2}{|f_{p-1}|^2} f_{p-1}. \tag{2.3}$$

Usando isso em (2.1), concluimos que

$$\frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}} = -\frac{|f_{p+1}|^2}{|f_p|^2} f_p. \tag{2.4}$$

Observamos que $f_{p-1} \perp f_p$, *já que* $f_p = \partial_{p-1} f_{p-1}$ *é uma seção de* $L_{p-1}^{\perp}$. *E como* $\frac{\partial f_p}{\partial \bar{z}} \parallel f_{p-1}$, *temos que* $f_p \perp \frac{\partial f_p}{\partial \bar{z}}$, *ou seja,* $\langle f_p, \frac{\partial f_p}{\partial \bar{z}} \rangle = 0$.

Então

$$\frac{\partial}{\partial z}(\ln |f_p|^2) = \frac{\frac{\partial}{\partial z}\langle f_p, f_p\rangle}{|f_p|^2} = \frac{\langle \frac{\partial f_p}{\partial z}, f_p\rangle + \langle f_p, \frac{\partial f_p}{\partial \bar{z}}\rangle}{|f_p|^2} = \frac{\langle \frac{\partial f_p}{\partial z}, f_p\rangle}{|f_p|^2}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial z} = \pi_{L_p^{\perp}}\left(\frac{\partial f_p}{\partial z}\right) + \pi_{L_p}\left(\frac{\partial f_p}{\partial z}\right) = \partial_p f_p + \pi_{L_p}\left(\frac{\partial f_p}{\partial z}\right)$$

Como as seções de L_p *são múltiplos de* f_p, *tem-se*

$$\frac{\partial f_p}{\partial z} = f_{p+1} + \pi_{L_p}\left(\frac{\partial f_p}{\partial z}\right) = f_{p+1} + proj_{f_p}\left(\frac{\partial f_p}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial z} = f_{p+1} + \frac{\langle \frac{\partial f_p}{\partial z}, f_p\rangle}{|f_p|^2} f_p = f_{p+1} + \frac{\partial}{\partial z}(\ln |f_p|^2) f_p. \tag{2.5}$$

2.3 Seqüências harmônicas com fim

Suponhamos que para algum $p \in \mathbb{Z}$, ψ_p *seja anti-holomorfa. Então*

$$\partial_p = d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0.$$

Assim, $f_{p+1} = 0$ *e* ψ_{p+1} *não pode ser definida e a seqüência harmônica fim à direita em* ψ_p.

Analogamente para o caso em que ψ_p *é holomorfa,* ψ_{p-1} *não poderá ser definida e a sequência harmônica contruída terá fim à esquerda em* ψ_p.

Definição 2.3.1. *Quando a seqüência harmônica tem fim à direita ou à esquerda, cada aplicação* ψ_p *é dita pseudo-holomorfa*

2.4 Os invariantes

Definição 2.4.1. *Seja* $I = \{p \in \mathbb{Z}; \psi_p$ *está definida*$\}$. *Definimos*

$$\gamma_p = \begin{cases} \dfrac{|f_{p+1}|^2}{|f_p|^2}, & se\ p \in I \\ 0, & se\ p \notin I \end{cases}$$

As formas $\Gamma_p = \gamma_p |dz|^2$ *são chamadas os* $\Gamma-$*invariantes da sequência harmônica.*

Da equação 2.5, teremos

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln |f_p|^2 \right) f_p + \frac{\partial}{\partial z} \ln |f_p|^2 \frac{\partial f_p}{\partial \bar{z}} \tag{2.6}$$

Usando a definição 2.4.1, podemos reescrever a equação 2.4 como

$$\frac{\partial f_{p+1}}{\partial \bar{z}} = -\gamma_p f_p \tag{2.7}$$

Substituindo a equação 2.7 em 2.6, obtemos

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial z \partial \bar{z}} = -\gamma_p f_p + \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln |f_p|^2 \right) f_p - \gamma_{p-1} \frac{\partial}{\partial z} \ln |f_p|^2 f_{p-1} \tag{2.8}$$

Agora usando novamente as equações 2.7 e 2.5, podemos ter

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{\partial}{\partial z}(\gamma_{p-1} f_{p-1}) = -\frac{\partial \gamma_{p-1}}{\partial z} f_{p-1} - \gamma_{p-1} \frac{\partial f_{p-1}}{\partial z} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{\partial \gamma_{p-1}}{\partial z} f_{p-1} - \gamma_{p-1}(f_p + \frac{\partial}{\partial z}(\ln |f_{p-1}|^2) f_{p-1}) \tag{2.10}$$

Comparando 2.8 como 2.10, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln |f_p|^2 \right) f_p &= \gamma_p f_p - \gamma_{p-1} f_p - \frac{\partial \gamma_{p-1}}{\partial z} f_{p-1} \\ &+ \gamma_{p-1} \frac{\partial}{\partial z} \ln |f_p|^2 f_{p-1} - \gamma_{p-1} \frac{\partial}{\partial z} (\ln |f_{p-1}|^2) f_{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln |f_p|^2 \right) f_p &= \gamma_p f_p - \gamma_{p-1} f_p - \frac{\partial \gamma_{p-1}}{\partial z} f_{p-1} \\ &+ \gamma_{p-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\ln |f_p|^2 - \ln |f_{p-1}|^2 \right) f_{p-1} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln |f_p|^2 \right) f_p = \gamma_p f_p - \gamma_{p-1} f_p - \frac{\partial \gamma_{p-1}}{\partial z} f_{p-1} + \gamma_{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{|f_p|^2}{|f_{p-1}|^2} \right) f_{p-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln|f_p|^2\right)f_p = \gamma_p f_p - \gamma_{p-1}f_p - \frac{\partial\gamma_{p-1}}{\partial z}f_{p-1} + \gamma_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\gamma_{p-1}\right)f_{p-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln|f_p|^2\right)f_p = \gamma_p f_p - \gamma_{p-1}f_p - \frac{\partial\gamma_{p-1}}{\partial z}f_{p-1} + \frac{\partial\gamma_{p-1}}{\partial z}f_{p-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln|f_p|^2\right)f_p = \gamma_p f_p - \gamma_{p-1}f_p$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln|f_p|^2 = \gamma_p - \gamma_{p-1} \tag{2.11}$$

De 2.11, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln|f_{p+1}|^2 = \gamma_{p+1} - \gamma_p. \tag{2.12}$$

Considerando a diferença entra as equações 2.11 e 2.12,obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln\frac{|f_p|^2}{|f_{p+1}|^2} = \gamma_p - \gamma_{p-1} - \gamma_{p+1} + \gamma_p$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln\frac{|f_{p+1}|^2}{|f_p|^2} = -\gamma_p + \gamma_{p-1} + \gamma_{p+1} - \gamma_p$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln\gamma_p = \gamma_{p+1} - 2\gamma_p + \gamma_{p-1}. \tag{2.13}$$

Segue imediatamente dessa equação o seguinte lema:

Lema 2.4.1. *Dois $\gamma-$invariantes consecutivos determinam todos os $\gamma-$invariantes.*

Observamos agora que

$$\partial_p f_p = f_{p+1} \Rightarrow |\partial_p|^2 \cdot |f_p|^2 = |f_{p+1}|^2 \Rightarrow \left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|^2 = |\partial_p|^2 = \frac{|f_{p+1}|^2}{f_p}^2 = \gamma_p$$

$$\therefore \left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|^2 = \gamma_p \tag{2.14}$$

Da equação 2.3, vem que

$$\left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\right|^2 = |\overline{\partial}_p|^2 = \frac{|f_p|^2}{|f_{p-1}|^2} = \gamma_{p-1}. \tag{2.15}$$

Definição 2.4.2. *Para cada para $p, q \in \mathbb{Z}$ com $p > q$, definimos*

$$u_{p,q} = \begin{cases} \dfrac{\langle f_p, f_q, \rangle}{|f_q|^2}, & se\ p \in I \\ 0, & se\ p \notin I \end{cases}$$

As formas $U_{p,q} = u_{p,q}dz^{p-q}$ são chamadas os $U-$invariantes da sequência harmônica.

Consideramos as equações

$$\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle = \langle \partial_p, \overline{\partial}_p\rangle = \left\langle \partial_p \frac{f_p}{|f_p|}, \overline{\partial}_p \frac{f_p}{|f_p|}\right\rangle .$$

Então

$$\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle = \frac{1}{|f_p|^2}\langle \partial_p f_p, \overline{\partial}_p f_p\rangle = -\frac{\left\langle \partial_p f_p, -\frac{|f_{p-1}|^2}{|f_p|^2}\overline{\partial}_p f_p\right\rangle}{|f_{p-1}|^2}$$

Assim, usando a equação 2.3, a definição dos $u-$invariantes e lembrando que $\partial_p f_p = f_{p+1}$, obtemos

$$\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle = -\frac{\langle f_{p+1}, f_{p-1}\rangle}{|f_{p-1}|^2} = -u_{p+1,p-1}. \tag{2.16}$$

Suponhamos que a sequência de aplicações harmônica ψ_p não seja pseudo-holomorfa. Então, para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$ como $p > q$, usando as equações 2.5 e 2.4 teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\langle f_p, f_q\rangle &= \left\langle \frac{\partial f_p}{\partial z}, f_q\right\rangle + \left\langle f_p, \frac{\partial f_q}{\partial \bar{z}}\right\rangle \\
&= \left\langle f_{p+1} + \frac{\partial}{\partial z}\ln|f_p|^2 f_p, f_q\right\rangle + \left\langle f_p, -\frac{|f_q|^2}{|f_{q-1}|^2} f_{q-1}\right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\ln|f_p|^2\langle f_p, f_q\rangle + \langle f_{p+1}, f_q\rangle - \frac{|f_q|^2}{|f_{q-1}|^2}\langle f_p, f_{q-1}\rangle
\end{aligned}$$

Apartir daí, usando a definição dos $u-$invariantes, concluimos que

$$\frac{1}{|f_q|^2}\frac{\partial}{\partial z}\langle f_p, f_q\rangle = u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln|f_p|^2 + u_{p+1,q} - u_{p,q-1}. \tag{2.17}$$

Usando a equação 2.5 e sabendo que $\frac{\partial f_q}{\partial \bar{z}} \perp f_q$ e $f_{q+1} \perp f_q$, vemos também que

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|f_q|^2} = -\frac{\left\langle \frac{\partial f_q}{\partial z}, f_q\right\rangle}{|f_q|^4} = -\frac{\left\langle f_{q+1} + \frac{\partial}{\partial z}\ln|f_q|^2 f_q, f_q\right\rangle}{|f_q|^4} = -\frac{1}{|f_q|^2}\frac{\partial}{\partial z}\ln|f_q|^2.$$

Segue que

$$\langle f_p, f_q\rangle\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|f_q|^2} = -\frac{\langle f_p, f_q\rangle}{|f_q|^2}\frac{\partial}{\partial z}\ln|f_q|^2 = -u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln|f_q|^2. \tag{2.18}$$

Combinando as equações 2.17 e 2.18, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}u_{p,q} &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\langle f_p, f_q\rangle}{|f_q|^2} = \langle f_p, f_q\rangle\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|f_q|^2} + \frac{1}{|f_q|^2}\frac{\partial}{\partial z}\langle f_p, f_q\rangle \\
&= -u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln|f_q|^2 + u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln|f_p|^2 + u_{p+1,q} - u_{p,q-1} \\
&= u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{|f_p|^2}{|f_q|^2} + u_{p+1,q} - u_{p,q-1} \\
&= u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\frac{|f_p|^2}{|f_{p-1}|^2}\cdot\frac{|f_{p-1}|^2}{|f_{p-2}|^2}\cdot\ldots\cdot\frac{|f_{q+1}|^2}{|f_q|^2}\right) + u_{p+1,q} - u_{p,q-1} \\
&= u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\gamma_{p-1}\cdot\gamma_{p-2}\cdot\ldots\cdot\gamma_q\right) + u_{p+1,q} - u_{p,q-1}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Observamos também que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u_{p,q} &= \frac{1}{|f_q|^2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\langle f_p, f_q\rangle + \langle f_p, f_q\rangle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{|f_q|^2} \\
&= \frac{1}{|f_q|^2}\left\langle \frac{\partial f_p}{\partial \bar{z}}, f_q \right\rangle + \frac{1}{|f_q|^2}\langle f_p, \frac{\partial f_q}{\partial z}\rangle - \langle f_p, f_q\rangle \frac{\left\langle f_q, \frac{\partial f_q}{\partial z}\right\rangle}{|f_q|^4} \\
&= \frac{1}{|f_q|^2}\left\langle -\gamma_{p-1} f_{p-1}, f_q\right\rangle_{\frac{1}{|f_q|^2}} \left\langle f_p, f_{q+1} + \frac{\partial}{\partial z}\ln |f_q|^2 f_q \right\rangle \\
&- \frac{\langle f_p, f_q\rangle}{|f_q|^2}\frac{\left\langle f_q, f_{q+1} + \frac{\partial}{\partial z}\ln |f_q|^2 f_q\right\rangle}{|f_q|^2} \\
&= -\gamma_{p-1}u_{p-1,q} + \frac{1}{|f_q|^2}\frac{|f_{q+1}|^2}{|f_{q+1}|^2}\langle f_p, f_{q+1}\rangle + u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln |f_q|^2 - u_{p,q}\frac{\partial}{\partial z}\ln |f_q|^2 \\
&= \gamma_q u_{p,q+1} - \gamma_{p-1}u_{p-1,q}. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Observação 2.4.1. *Reescrevendo a equação 2.19 para $q = p - 1$, obtemos*

$$u_{p+1,p-1} - u_{p,p-2} = \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{u_{p,p-1}}_{=0} - \underbrace{u_{p,p-1}}_{=0}\frac{\partial}{\partial z}\ln \gamma_{p-1} = 0 \Rightarrow u_{p+1,p-1} = u_{p,p-2} \ \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Assim, teremos

$$\ldots = u_{p,p-2} = \ldots = u_{1,-1} = u_{2,0} = u_{3,1} = \ldots = u_{p+1,p-1} = \ldots$$

Em particular, $u_{p+1,p-1} = u_{2,0}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 3

Teoremas da congruência

Neste capítulo, apresentaremos o teorema principal deste trabalho, o Teorema da congruência para $\mathbb{C}P^n$. Mas antes, precisamos ver mais algumas definições e resultados que serão usados na sua demonstração.

Aqui, serão honradas as mesmas notações do capítulo anterior

3.1 Lemas prévios

Definição 3.1.1. *Seja g_p a métrica induzida sobre S por ψ_p dada por*

$$g_p(X,Y) = \Re\langle d\psi_p(X), d\psi_p(Y)\rangle \ \forall X, Y \in TS.$$

Consideramos ω, $\omega(X,Y) = \Re\langle X, JY\rangle$, a forma de Kähler sobre $\mathbb{C}P^n$ e dA_p a forma área sobre S, com respeito a g_p e a orientação de S, isto é,

$$dA_p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sqrt{g_p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_p\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) - \left[g_p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^2}$$

Então em cada ponto sobre S tal que ψ_p é não singular, definimos o ângulo de Kähler θ_p de ψ_p por $\psi_p^*\omega = \cos\theta_p dA_p$.

Usando o fato que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

obtemos

$$g_p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \Re\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\rangle$$

Então

$$\begin{aligned} g_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|^2 + \left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right|^2 + \Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle \\ &+ \Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle = \Re\overline{\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle} = \Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle,$$

segue, usando as equações 2.14, 2.15 e 2.16, que

$$g_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right) = \gamma_p + \gamma_{p-1} - 2\Re u_{p+1,p-1}. \tag{3.1}$$

Usando o fato que

$$\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

conseguimos mostrar também (seguindo o mesmo raciocínio anterior) que

$$g_p\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right) = \gamma_p + \gamma_{p-1} + 2\Re u_{p+1,p-1}. \tag{3.2}$$

E mais,

$$g_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = \Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), i d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) - i d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle$$

$$\begin{aligned} g_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \Re\Bigg[i\left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|^2 + i\left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right|^2 - i\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle \\ &+ i\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle\Bigg] = -\Re(i u_{p+1,p-1}) + \Re(i\overline{u_{p+1,p-1}}) = \\ &= \Im u_{p+1,p-1} - \Im\overline{u_{p+1,p-1}} = \Im u_{p+1,p-1} + \Im u_{p+1,p-1} = 2\Im u_{p+1,p-1} \end{aligned}$$

$$\therefore g_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\Im u_{p+1,p-1} \tag{3.3}$$

Vejamos o que acontece se aplicarmos $\psi_p^*\omega$ *em* $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$*:*

$$\psi_p^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = \omega\left(d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) = \Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), J d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\rangle$$

Usando os fatos $J^2 = -I$, $d\psi_p(iX) = Jd\psi_p(X)$ *e ainda que* $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ *e* $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z})$, *conseguimos*

$$\begin{aligned}
\psi_p^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)+d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), J^2 d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle \\
&= \Re\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)+d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)-d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle \\
&= \left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|^2-\left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right|^2 \\
&+ \Re\left[\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle-\overline{\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle}\right] \\
&= \gamma_p-\gamma_{p-1}-\Re\left(i\cdot 2\Im\left\langle d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle\right) \\
&= \gamma_p-\gamma_{p-1}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Agora, usando as equações 3.1, 3.2 e 3.3, vemos que

$$\begin{aligned}
dA_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \sqrt{g_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)g_p\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)-\left[g_p\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^2} \\
&= \sqrt{(\gamma_p-\gamma_{p-1})^2-4(\Re u_{p+1,p-1})-4(\Im u_{p+1,p-1})^2} \\
&= \sqrt{\gamma_p-\gamma_{p-1}-|u_{p+1,p-1}|^2} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Sabendo que $\psi_p^*\omega = \cos\theta_p dA_p$ *e usando as equações 3.4 e 3.5, obtemos*

$$\cos\theta_p = \frac{\gamma_p-\gamma_{p-1}}{\sqrt{\gamma_p-\gamma_{p-1}-|u_{p+1,p-1}|^2}} \qquad (3.6)$$

Segue imediatamente das equações 3.1, 3.2, 3.3 e 3.6 a seguinte

Lema 3.1.1. *(i) A métrica* g_p *determina e é determinada por* $\Gamma_{p-1}+\Gamma_p$ *e* $U_{p+1,p-1}$*;*

(i) A métrica g_p *e o ângulo de Kähler* θ_p *de* ψ_p *determina e são determinados por* Γ_{p-1}*,* Γ_p *e* $U_{p+1,p-1}$*.*

Lema 3.1.2. *A métrica e o ângulo de Kähler de um elemento da sequência harmônica determina a métrica e o ângulo de Kähler de qualquer outro elemento da sequência.*

Demonstração:

Sejam g_p *e* θ_p *a métrica e o ângulo de Kähler de* ψ_p*. Pelo lema 3.1.1, conhecemos* Γ_{p-1}, Γ_p*,* $U_{p+1,p-1}$ *e para determinarmos a métrica* g_q *e o ângulo* θ_q *de um outro elemento* ψ_q*, basta* *sabermos os valores de* Γ_{q-1}, Γ_q *e* $U_{q+1,q-1}$. *Mas com estas informações, invocando lema 2.4.1, podemos saber exatamente que são* Γ_{q-1} *e* Γ_q. *Além disso, pela observação 2.4.1 temos que* $U_{p+1,p-1} = U_{2,0} = U_{q+1,q-1}$ *e isso conclui a demonstração.* $\Diamond$

Lema 3.1.3. *Seja* $k \in \mathbb{N}$ *fixo. Então os* $\Gamma-$*invariantes juntamente com* $\{U_{1,0}, \ldots, U_{k,0}\}$ *determinam* $\{U_{p+1,q}, \ldots, U_{p+k,p}\}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.1.2. *Uma aplicação* $\varphi : S \to \mathbb{C}P^n$ *é dita substancial quando sua imagem* $\varphi(S)$ *não está contida em nenhum subespaço próprio* $\mathbb{C}P^k$ *do espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}P^n$

Lema 3.1.4. *Seja* $V(z) = span\{f_0(z)\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{z}^q} f_0(z)\}$ *e suponhamos que* S *seja conexa. Então* V *é um subespaço constante de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *e* $\psi = \psi_0$ *é substancial em um subspaço de* $\mathbb{C}P^n$ *determinado por* V.

Lema 3.1.5. *Se* $V = V(z)$ *denota o subspaço descrito no lema 3.1.4 acima, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) ψ *é substancial.*

(ii) $V = \mathbb{C}^{n+1}$.

(iii) $\psi|_A$ *é substancial para qualquer aberto denso* $A \subset S$.

(iv) Cada conjunto de $n+1$ *fibrados linhas consecutivos da sequência harmônica construida apartir de* ψ *é L.I. sobre um aberto denso de* S.

Lema 3.1.6. *O subespaço* V *descrito acima é gerado pelas seções* f_p.

Demonstração:

Isto segue das equações 2.5 e 2.4, onde vemos que as derivadas parciais de primeira ordem de seções locais são geradas por seções locais e derivando elas ainda continuarão sendo geradas por seções locais. $\Diamond$

Lema 3.1.7. *Seja* $p \in I$. *Então*

(i) ψ_p *é holomorfa se, e somente se,* $\Gamma_{p-1} = 0$

(ii) ψ_p *é anti-holomorfa se, e somente se,* $\Gamma_p = 0$

Demonstração:

(i) ψ_p *é holomorfa* $\Leftrightarrow d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right) = 0 \Leftrightarrow \gamma_{p-1} = \left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)\right|^2 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{p-1} = 0.$

(ii) ψ_p *é anti-holomorfa* $\Leftrightarrow d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0 \Leftrightarrow \gamma_p = \left|d\psi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|^2 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_p = 0.$

$\Diamond$

Lema 3.1.8. *Suponhamos que* $\Gamma_p = \widetilde{\Gamma}_p$ *para todo* $p \in \mathbb{Z}$*. Então para cada* $x \in S$ *existe uma coordenada complexa* z *sobre um disco aberto* $D \ni x$ *e seções locais holomorfas não-nulas* f_0 *de* L_0 *e* $\widetilde{f}_0$ *de* $\widetilde{L}_0$ *sobre* D *tal que* $|f_p|^2 = |\widetilde{f}_p|^2$ *para todo* $p \in I$.

Demonstração:

Dado $x \in S$*, escolhemos uma coordenada* z *sobre um aberto* $D \ni x$ *tal que exista uma seções locais holomorfas não nulas* f_0 *de* L_0 *e* $\widetilde{f}_0$ *de* $\widetilde{L}_0$ *sobre* D*. Por hipótese,* $\gamma_{-1} = \widetilde{\gamma}_{-1}$ *e* $\gamma_0 = \widetilde{\gamma}_0$ *e usando a equação 2.11, obtemos*

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} \ln \frac{|\widetilde{f}_0|^2}{|f_0|^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}(\ln|\widetilde{f}_0|^2 - \ln|f_0|^2) = (\widetilde{\gamma}_0 - \widetilde{\gamma}_{-1}) - (\gamma_0 - \gamma_{-1}) = 0.$$

Assim, a função $\ln \frac{|\widetilde{f}_0|^2}{|f_0|^2}$ *é harmônica, logo é parte real de uma apalicação holomorfa, digamos com* $\ln \frac{|\widetilde{f}_0|^2}{|f_0|^2} = 2\Re h(z)$*. Portanto,*

$$e^{2\Re h(z)} = e^{\ln \frac{|\widetilde{f}_0|^2}{|f_0|^2}} = \frac{|\widetilde{f}_0|^2}{|f_0|^2} \Rightarrow |\widetilde{f}_0|^2 = e^{2\Re h(z)}|f_0|^2 = (e^{\Re h(z)})^2|f_0|^2 = |e^{h(z)}|^2|f_0|^2 = |e^h f_0|^2$$

Mas podemos considerar a seção $e^h f_0$ *no lugar de* f_0*, o que conclui a demonstração.* $\Diamond$

Lema 3.1.9. *Sejam* $\psi, \widetilde{\psi} : S \to \mathbb{C}P^n$ *aplicações harmônicas, onde* S *denota uma superfície de Riemann conexa. Sejam ainda* Γ *e* $\widetilde{\Gamma}$ *os* $\Gamma-$*invariantes de* ψ *e* $\widetilde{\psi}$*, respectivamente. Suponhamos que* $\Gamma_p = \widetilde{\Gamma}_p$ $\forall p \in \mathbb{Z}$ *e que alguma das condições seguintes seja verdadeira:*

(i) ψ *é pseudo-holomorfa.*

(ii) $\psi, \widetilde{\psi}$ *possuem os mesmos* $U-$*invariantes.*

Então ψ *é substancial se, e somente se,* $\widetilde{\psi}$ *também é*

Demonstração:

Pelo lema 3.1.7, ψ *é pseudo-holomorfa se, e somente se,* $\widetilde{\psi}$ *também é, já que* $\Gamma_p = \widetilde{\Gamma}_p$.

(i) ψ *e* $\widetilde{\psi}$ *são pseudo-holomorfa com mesmo comprimento, logo suas seções geram subspaços de mesma dimensão. Segue então dos lemas 3.1.5 e 3.1.6 que*

$$\psi \text{ é substancial } \Leftrightarrow V_\psi = \mathbb{C}^{n+1} \Leftrightarrow V_{\widetilde{\psi}} = \mathbb{C}^{n+1} \Leftrightarrow \widetilde{\psi} \text{ é substancial.}$$

Isto mostra a primeira parte.

(ii) Pelo lema 3.1.8, para cada $x \in S$, *existe uma coordenada* z *sobre uma disco aberto* D *contendo* x *e seções locais holomorfas não nulas* f_0 *e* $\tilde{f}_0$ *de* L_0 *e* $\tilde{L}_0$, *respectivamente, sobre* D *satisfazendo* $|f_p|^2 = |\tilde{f}_p|^2$. *Sendo assim, temos que* $\langle f_p, f_q\rangle = \langle \tilde{f}_p, \tilde{f}_q\rangle$ *para todos* $0 \leq p, q \leq n$, *já que os* $U-$*invariantes de* ψ *e* $\widetilde{\psi}$ *são iguais.*

Então, pelo lema 3.1.5, ψ *é substancial se, e somente se, os* $n+1$ *fibrados* $L_0, \ldots, L_n$ *são L.I, sobre uma aberto de aberto denso em* S, *ou seja, a matriz* $(\langle f_p, f_q\rangle) = (\langle \tilde{f}_p, \tilde{f}_q\rangle)$ *é invertível sobre um aberto denso em* S. *Isto quer dizer que os* $n+1$ *fibrado* $\tilde{L}_0, \ldots, \tilde{L}_n$ *são L.I. sobre um aberto denso em* S *e isto acontece se, e somente se,* $\widetilde{\psi}$ *é substancial.*

$\diamondsuit$

3.2 Teorema principal

Teorema 3.2.1 (Teorema da congruência para $\mathbb{C}P^n$)**.** *Sejam* S *uma superfície de Riemann conexa e* $\psi, \widetilde{\psi} : S \to \mathbb{C}P^n$ *aplicações harmônicas com* $\Gamma-$*invariantes* Γ_p *e* $\widetilde{\Gamma}_p$, *respectivamente. Suponhamos que* $\Gamma_{-1} = \widetilde{\Gamma}_{-1}$, $\Gamma_0 = \widetilde{\Gamma}_0$ *e, além disso, que uma das condições abaixo seja verdadeira:*

(i) ψ *é pseudo-holomorfa;*

(ii) Se $U_{p,q}$ *e* $\widetilde{U}_{p.q}$ *são os* $U-$*invariantes de* ψ *e* $\widetilde{\psi}$, *respectivamente, então* $\widetilde{U}_{p,0} = U_{p.0}$ *para* $= 2, \ldots, n+1$

Então existe uma isometria holomorfa g *de* $\mathbb{C}P^n$ *tal que* $\widetilde{\psi} = g\psi$. *Se* ψ *for substancial então* g *é única.*

Demonstração:

(i) Segue uma idéia análoga da demonstração do item (ii) abaixo, porém mais simples.

(ii) Como temos $\Gamma_{-1} = \widetilde{\Gamma}_{-1}$ e $\Gamma_0 = \widetilde{\Gamma}_0$, devido a equação 2.13, podemos determinar todos os $\Gamma-$invariantes de ψ e $\widetilde{\psi}$, tendo ainda $\Gamma_p = \widetilde{\Gamma}_p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Pelos lemas 3.1.4 e 3.1.9, podemos assumir que ψ e $\widetilde{\psi}$ sejam substancial em algum subspaço $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^n$, e daí e pelo lema 3.1.5, temos que os $k+1$ fibrados linha $L_0, \ldots, L_k$ (e também $L_0, \ldots, L_k$) são linearmente independente sobre um aberto denso $S' \subset S$.

Como $\Gamma_p = \widetilde{\Gamma}_p$ e $U_{p,0} = \widetilde{U}_{p,0}$ para $p = 2, \ldots, k+1$, teremos pelo lema 3.1.3 que $U_{p,q} = \widetilde{U}_{p,q}$ para quaisquer p, q com $0 \leq q < p \leq k+1$. Então na prova do item (ii) do lema 3.1.9, vimos que para cada $x \in S$, podemos encontrar um disco aberto $D \ni x$ e seções holomorfas $f_0, \widetilde{f}_0$ de $L_0, \widetilde{L}_0$ sobre D tal que $|f_0|^2 = |\widetilde{f}_0|^2$ para todo p e que $\langle f_p, f_q \rangle = \langle \widetilde{f}_p, \widetilde{f}_q \rangle$ $\forall 0 \leq q < p \leq k+1$. Assim, existe uma única matriz unitária A do tipo $k+1 \times k+1$ definida sobre $D \cap S'$ tal que $\widetilde{f}_p = Af_p$ $\forall p = 0. \ldots, k$.

Provaremos que A é constante. Por um lado temos

$$\frac{\partial \widetilde{f}_p}{\partial z} = \widetilde{f}_{p+1} \frac{\partial}{\partial z} \ln |\widetilde{f}_p|^2 \widetilde{f}_p = A(f_{p+1} \frac{\partial}{\partial z} \ln |f_p|^2 f_p).$$

E por outro,

$$\frac{\partial \widetilde{f}_p}{\partial z} = \frac{\partial A f_p}{\partial z} = A \frac{\partial f_p}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial z} f_p = A(f_{p+1} \frac{\partial}{\partial z} \ln |f_p|^2 f_p) + \frac{\partial A}{\partial z} f_p.$$

Portanto,

$$\frac{\partial A}{\partial z} f_p = 0 \ \forall \ p = 0, \ldots, k$$

Como os f_p são linearmente independentes, temos que $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ e, similarmente, mostramos que $\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = 0$, e isso mostra que A é uma matriz constante. Agora escolhemos C tal que para estender A a uma matriz unitária B do tipo $n+1 \times n+1$:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

E definimos a isometria holomorfa

$$g = [B] : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n, \ [z] \mapsto [Bz].$$

Então, para $p = 0, \ldots, k$, teremos em S':

$$g\psi_p = g([f_p]) = [Bf_p] = [Af_p] = [\widetilde{f}_p] = \widetilde{\psi}_p.$$

Como S' é um aberto denso em S, por continuidade, mostramos que $\widetilde{\psi} = g\psi$ sobre todo S. $\Diamond$

Teorema 3.2.2 (Extensão do Teorema). *Seja $\psi : S \to \mathbb{C}P^n$ uma aplicação harmônica de uma superfície de Riemann conexa S e seja $h : S \to S$ um difeomorfismo conforme tal que*

- $h^*\Gamma_p = \Gamma_p$ *para* $p = 0, -1,$
- $h^*U_{p,0} = U_{p,0}$ *para* $p = 2, \ldots, n+1.$

Então existe uma isometria g de $\mathbb{C}P^n$ tal que $g\psi = \psi h$. Se ψ é substancial então g é única com esta propriedade.

Demonstração:

Seja $\widetilde{\psi} = \psi h$. Então $\widetilde{\Gamma}_p = h^*\Gamma_P = \Gamma_p$. e $\widetilde{U} = h^*U_{p,q} = U_{p,q}$. Assim, pelo Teorema da Congruêcia, existe uma isometria g de $\mathbb{C}P^n$ tal que $g\psi = \widetilde{\psi}$, ou seja, $g\psi = \psi h$. Ainda pelo Teorema da Congruêcia, vemos que g é única com essa propriedade. $\Diamond$

Referências Bibliográficas

[1] Bolton, J., Jensen, G.R., Rigoli, M., Woodward, L.M. On Conformal Minimal Immersions of S^2 in $\mathbb{C}P^n$*, Math. Ann., vol. 279, pp 599-620, 1988.*

[2] Bolton,J.,Woodward,L.M. Congruence Theorem for Harmonic Maps from a Riemann Surface into $\mathbb{C}P^n$ e S^n*, J. London Math. Soc., vol. 45, pp 363-376, 1991.*

[3] Bolton, J., Woodward, L.M., Martins, J.K., Seminar Notes on Almost Complex Curves in S^6*, Durham University Press, 1997.*

[4] Berndt, J., Bolton, J., Woodward, L.M. Almost Complex Curves and Hopf Hypersurfaces in the Nearly Kahler 6-Sphere*, Geometria Dedicata, vol. 56, pp 237-247, 1995.*

*[5] Darling, R.W.R.,*Differential Forms and Connections*, Cambridge University Press, 1994.*

[6] Eells, J., and Wood, J.C., Harmonic Maps from Surfaces to Complex Projective Spaces, *Advances in Mathematics, vol. 49, pp. 217-263, 1983.*

*[7] Huybrechts, D.,*Complex Geometry*, Springer-Verlag, 2005.*