UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O CAMPO DE TENSÃO DA APLICAÇÃO DE GAUSS

ALMIR CUNHA DA GRAÇA NETO

MANAUS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALMIR CUNHA DA GRAÇA NETO

O CAMPO DE TENSÃO DA APLICAÇÃO DE GAUSS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy
Co-Orientador: Prof^o. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy

MANAUS 2007

ALMIR CUNHA DA GRAÇA NETO

O CAMPO DE TENSÃO DA APLICAÇÃO DE GAUSS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 18.° de Setembro de 2007.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof^o Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof^o Dr. José Kenedy Martins, Membro
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof^o Dr. Abdênago Alves de Barros, Membro
Universidade Federal do Ceará.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela minha existência.

Ao meu pai e minha mãe, pelo amor e incentivo.

Aos professores do mestrado, pelo conhecimento transmitido durante todo o curso.

Aos meus amigos.

RESUMO

O CAMPO DE TENSÃO DA APLICAÇÃO DE GAUSS

Este trabalho apresenta uma demonstração detalhada do teorema que caracteriza as imersões isométricas $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{p+n}$ de uma variedade Riemanniana n-dimensional no espaço Euclidiano $(p+n)$-dimensional com vetor curvatura média paralelo como sendo aquelas cuja aplicação de Gauss associada é harmônica. O resultado deve-se a E.A.Ruh e J. Vilms.

ABSTRACT

THE TENSION FIELD OF THE GAUSS MAP

This dissertation is concerned with a detailed proof of a Ruh-Vilms theorem which characterize the isometric immersion of a Riemannian manifold into the Euclidean space whose the mean curvature vector is parallel as being that immersion whose the associated Gauss map is harmonic.

Sumário

Introdução

O estudo de superfícies com curvatura média constante tem sido classicamente um dos problemas mais importante da geometria diferencial. Destaca-se o estudo das superfícies mínimas, os teoremas de Hopf e Alexandrov.

As superfícies mínimas são superfícies de menor área limitadas por um contorno dado. Em 1760, Lagrange caracterizou tais superfícies como sendo aquelas que tem a curvatura média sempre igual a zero. Uma maneira de obter superfícies mínimas foi observada em 1847 pelo físico belga Antoine Ferdnand Plateau, através de experiências feitas com películas de líquido sob a ação da tensão superficial. A experiência consistia em tomar um contorno, mergulhar em água com sabão e, então, a superfície desejada é a representada pela bolha de sabão que aparecer.

O teorema de Hopf (1951) afirma que se uma superfície do espaço Euclidiano usual é homeomorfa à esfera e tem curvatura média constante, então ela é isométrica a uma esfera. Pelas questões que levantou e pelos métodos desenvolvidos em sua prova, este teorema foi fundamental para o estudo de superfícies de curvatura média constante. Em 1956, Alexandrov provou que a esfera é a única superfície compacta e mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante. Este resultado havia sido conjecturado por Hilbert, e sua demostracão foi a primera aplicação do princípio do máximo de Hopf em geometria.

O objetivo deste trabalho é caracterizar as imersões isométricas com curvatura média paralela através da aplicação de Gauss.

Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{p+n}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional M no espaço Euclidiano $(p+n)$-dimensional. A aplicação de Gauss associada a essa imersão é a aplicação $g : M^n \longrightarrow G(n, \mathbb{R}^{p+n})$, onde $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ denota a variedade de Grassmann dos n-planos em $\mathbb{R}^{p+n}$, tal que a imagem $g(q)$ de um ponto $q \in M$ é definida como sendo o plano tangente à $f(M)$ em $f(q)$. O vetor curvatura média H de f é dito paralelo se $\nabla^{\perp} H$ é identicamente nulo. Observemos que se $\nabla^{\perp} H = 0$ então o módulo de H é constante. A caracterização é dada através da harmonicidade da aplicação de Gauss, e foi obtida por E.A.Ruh e J.Vilms em [8].

O estudo de aplicações harmônicas tem origem no problema de minimizar a energia de uma aplicação entre variedades Riemannianas. Dada uma aplicação $C^\infty \quad h : M \longrightarrow N$ entre variedades Riemannianas, o campo de tensão de h denotado por $\tau(h)$, é o traço da sua segunda forma fundamental, ou seja, a derivada de dh como tensor. A aplicação h é dita harmônica se $\tau(h)$ for identicamente nulo. Aplicações com essa propriedade são pontos críticos da integral de energia $E(h)$, isso generaliza a integral clássica de Dirichlet[8]. Geodésicas, superfícies mínimas e funções harmônicas reais resolvem casos particulares do problema. No caso de uma subavriedade mínima no espaço euclidiano tanto a imersão como a aplicação de Gauss são harmônicas.

O trabalho está dividido em três capítulos: no capítulo 1, apresentamos definições e alguns resultados sobre variedades Riemannianas. No capítulo 2 mostramos que o conjunto $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ é uma variedade diferenciável de dimensão pn, compacta e que $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ pode ser imerso no espaço das matrizes simétricas $(p + n) \times (p + n)$. Através dessa imersão definimos em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ uma estrutura Riemanniana. Finalmente, no capítulo 3 demonstramos o resultado principal.

Capítulo 1

Generalidades

Neste capítulo serão apresentados conceitos e resultados fundamentais da geometria Riemanniana, os quais são imprescindíveis para o desenvolvimento do trabalho. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [5] e [1].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um par ordenado $(M,\mathcal{U})$ tal que:

(1) M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

(2) $\mathcal{U}$ é uma coleção de homeomorfimos $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de conjuntos abertos $U \subset M$ sobre abertos $x(U) \subset \mathbb{R}^n$.

(3) Os domínios U dos homeomorfismos $x \in \mathcal{U}$ cobrem M.

(4) Dados $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pertencentes a $\mathcal{U}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, então a aplicação $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V)$ é diferenciável.

(5) Dado um homeomorfismo $z : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de um aberto $W \subset M$ sobre um aberto $z(W) \subset \mathbb{R}^n$, tal que as aplicações $x \circ z^{-1}$ e $z \circ x^{-1}$ são diferenciáveis para cada $x \in \mathcal{U}$, então $z \in \mathcal{U}$.

A coleção $\mathcal{U}$ é chamada de um *atlas* de dimensão n sobre M. Um homeomorfismo $x \in \mathcal{U}$ é chamado um *sistema de coordenadas locais* ou *carta local* em M. Para cada $p \in U$ tem-se $x(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$, os números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, ..., n$ são chamados as coordenadas do ponto $p \in M$ no sistema x.

Definição 1.1.2. Seja $(M,\mathcal{U})$ uma variedade diferenciável de dimensão n e $x : U \longrightarrow x(U) \in \mathcal{U}$. Dado $p \in U$, a aplicação $x^{-1} : x(U) \longrightarrow U$ é chamada uma *parametrização* de M em p ; U é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p. A coleção de parametrizações é chamada uma *estrutura diferenciável* em M.

Pode-se definir variedade diferenciável utilizando, em vez de cartas locais, parametrizações. Tal definição é evidentemente equivalente a definição dada. Em algumas ocasiões neste trabalho utilizaremos parametrizações em vez de cartas. De agora em diante, uma variedade diferenciável $(M,\mathcal{U})$ de dimensão n será denotada por M^n, o índice superior indicará a dimensão de M.

Exemplo 1. O par $(\mathbb{R}^n,\mathcal{U})$, onde $\mathcal{U}$ é o atlas contendo o único sistema de coordenadas $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (id denota a aplicação identidade em $\mathbb{R}^n$), é uma variedade diferenciável de diemensão n.

Definição 1.1.3. Sejam M^n, N^m variedades diferenciáveis. Diz-se que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é diferenciável no ponto $p \in M$ se existem sistemas de coordenadas $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em M, $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que a aplicação $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow y(V)$ é diferenciável no ponto $x(p)$. Dizemos que f é diferenciável se f for diferenciável em todos os pontos de M.

Definição 1.1.4. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação $\gamma : I \longrightarrow M$, onde I é um intervalo aberto da reta real, chama-se uma *curva* em M. Caso γ seja diferenciável em I então γ chama-se uma *curva diferenciável* em M

Definição 1.1.5. Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $p \in M$. Indicaremos por $\mathcal{C}_p$ o conjunto de todas as curvas $\lambda : J \longrightarrow M$ definidas num intervalo aberto J, contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0. Se $\lambda \in \mathcal{C}_p$ e $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema da coordenadas em M, com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja inteiramente contida em U. Em vista disso, toda vez que escrevermos $x \circ \lambda$, estamos admitindo que o domínio de λ foi suficientemente reduzido a um intervalo aberto menor $\overline{J}$, contendo 0, tal que $\lambda(\overline{J}) \subset U$. Diremos que duas curvas $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$ são equivalentes, e escrevemos $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em M, com $p \in U$, tal que $x \circ \lambda : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $x \circ \mu : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazem a igualdade que $(x\circ\lambda)'(0) = (x\circ\mu)'(0)$. A igualdade $(x\circ\lambda)'(0) = (x\circ\mu)'(0)$ será verdadeira para todo sistema de coordenadas $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em M, $p \in U$. Resulta daí que a relação $\lambda \sim \mu$ é de fato uma relação de equivalência em $\mathcal{C}_p$.

O *vetor tangente* em $t = 0$ de uma curva $\lambda \in \mathcal{C}_p$ é a classe de equivalência de λ, ou seja, $\lambda'(0) = \{\mu \in \mathcal{C}_p \mid \mu \sim \lambda\}$. Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\lambda \in \mathcal{C}_p$.

Definição 1.1.6. (O espaço tangente). O *espaço tangente* a uma variedade M^n em um ponto p, denotado por T_pM, é o conjunto quociente $\mathcal{C}_p/\sim$, ou seja, é o conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a M passando por p. Mostra-se que o T_pM é um espaço vetorial de dimensão n e que a escolha de um sistema de coordenadas locais $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $p \in U$, determina uma base associada $\left\{(\frac{\partial}{\partial x^1})(p), ..., (\frac{\partial}{\partial x^n})(p)\right\}$ em T_pM, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende do sistema de coordenadas x.

Definição 1.1.7. (O Fibrado Tangente). Seja M^n uma variedade diferenciável, $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável em M e $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. O espaço TM munido com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha)\}$ onde $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ é dada por:

$$\gamma_\alpha(x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n, u^1, ..., u^n) = (x_\alpha(x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n), \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}),$$

$(u^1, ..., u^n) \in \mathbb{R}^n$, é definido como o *fibrado tangente* de M.

Proposição 1.1.1. Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis e seja $\phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\lambda \in \mathcal{C}_p$, com $\lambda'(0) = v$. Faça $\beta = \phi \circ \lambda$. A aplicação $d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}N$ dada por $d\phi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de λ.

Definição 1.1.8. A aplicação linear $d\phi_p$ dada pela proposição anterior é chamada *diferencial* de ϕ em p.

Definição 1.1.9. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ é um *difeomorfismo* se ela é bijetiva, diferenciável e sua inversa ϕ^{-1} é diferenciável. ϕ é um *difeomorfismo local* em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\phi(p)$ tais que $\phi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.

1.2 Imersões e Mergulhos

Definição 1.2.1. Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \subset N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N. Se $\varphi : M^n \longrightarrow N^m$ é uma imersão, então $n \leq m$; a diferença $m - n$ é chamada *codimensão* da imersão φ.

Proposição 1.2.1. Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão da variedade M na variedade N. Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : V \longrightarrow N$ é um mergulho.

1.3 Campos de Vetores

Definição 1.3.1. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde cada $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ é a base associada a x, $i = 1, \ldots, n$. X é diferenciável se e somente se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente utilizar a idéia sugerida acima e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$, do conjunto $\mathcal{D}(M)$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}(M)$ das funções em M, definida por:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização x.

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M.

Lema 1.3.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.

Definição 1.3.2. O campo vetorial Z dado pelo lema anterior é chamado *colchete* $[X,Y] = XY - YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

Proposição 1.3.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$ (anticomutatividade),
(ii) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ (linearidade),
(iii) $[[X,Y]Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (identidade de Jacobi),
(iv) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Definição 1.3.3. Um campo de vetores V ao longo de uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ é uma aplicação que associa a cada $t \in \mathbb{R}$ um vetor tangente $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Definição 1.3.4. Uma curva diferenciável $\gamma : I \longrightarrow M$ que satisfaz às condições $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ e $\gamma(0) = p$ é chamada uma *trajetória* do campo V que passa por p para $t = 0$.

1.4 Métricas Riemannianas

Definição 1.4.1. Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ (isto é uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x^1, \ldots, x^n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = dx_q(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(q), \frac{\partial}{\partial x^j}(q) \rangle = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ é uma função diferenciável em U. Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V. Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica Riemanniana é denominada *Variedade Riemanniana*.

Definição 1.4.2. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma *isometria* se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \text{ para todo } p \in M,\ u, v \in T_pM.$$

Exemplo 2. Se $M = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x^i}$ identificado com $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, a métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o *símbolo de Kronecker*: $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$. $\mathbb{R}^n$ é chamado o *espaço euclidiano de dimensão* n e a geometria deste espaço é a geometria métrica euclidiana.

Proposição 1.4.1. Uma variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana.

Definição 1.4.3. Seja M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(M^n)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, formam uma base ortonormal de T_qM; diremos, neste caso, que $\{E_i\}$ é um *referencial ortonormal* em U.

1.5 Conexões Afins e Riemannianas

Definição 1.5.1. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

indicada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, que tem as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.5.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de γ, denominado *derivada covariante* de V ao longo de γ, tal que:

i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de γ,

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I,

iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(\gamma(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{d\gamma/dt} Y$.

Definição 1.5.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\gamma : I \to M$ é chamado *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.5.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $\gamma : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$ ($V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de γ, tal que $V(t_0) = V_0$; $V(t)$ é chamado o *transporte paralelo* de $V(t_0)$ ao longo de γ.

Definição 1.5.3. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \; , \; \rangle$. A conexão ∇ é dita *compatível* com a métrica $\langle \; , \; \rangle$ se o transporte paralelo preserva o produto interno. Em outras palavras, quando para toda curva diferenciável γ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de γ, tivermos $\langle P, P' \rangle = constante$.

Proposição 1.5.3. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $\gamma : I \to M$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Definição 1.5.4. Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma conexão afim ∇ em M é:
a) simétrica, se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
b) compatível com a métrica Riemanniana, se $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 1.5.1. (Levi-Cevita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:
$i)$ ∇ é simétrica;
$ii)$ ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Tal conexão é chamada *conexão de Levi-Cevita* ou *conexão Riemanniana.*

1.6 Curvaturas

Definição 1.6.1. A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por:

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Com efeito, indicando o campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, isto é, $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ obtem-se

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

o que implica que

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0,$$

como havia sido afirmado. Pode-se, portanto, pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.6.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana satifaz:

i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M),\ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, ou seja,

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M),\ Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.6.2. (Identidade de Bianchi)

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Proposição 1.6.3. $i)\langle R(X,Y)Z,T\rangle + \langle R(Y,Z)X,T\rangle + \langle R(Z,X)Y,T\rangle = 0;$
$ii)\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(Y,X)Z,T\rangle;$
$iii)\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(X,Y)T,Z\rangle;$
$iv)\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(Z,T)X,Y\rangle.$

Definição 1.6.2. Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e $\{x,y\}$ uma base qualquer de σ. A *curvatura seccional* de σ em p, $K(\sigma) = K(x,y)$, é por definição

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in \sigma$. Esta definição não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. De fato, observemos inicialmente que podemos passar da base $\{x,y\}$ de σ para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iteração das seguintes transformações elementares:
a) $\{x,y\} \longrightarrow \{y,x\}$,
b) $\{x,y\} \longrightarrow \{\lambda x, y\}$,
c) $\{x,y\} \longrightarrow \{x+\lambda y, y\}$.

Agora veremos que $K(x,y)$ é invariante por tais transformações, o que demonstra o afirmado. Para o que se segue denotaremos $\langle K(x,y)x,\ y\rangle$ por (x,y,x,y).

$a) K(y,x) = \frac{(y,x,y,x)}{|y\wedge x|^2} = \frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} = K(x,y)$

$b) K(\lambda x,y) = \frac{(\lambda x,y,\lambda x,y)}{|\lambda x\wedge y|^2} = \frac{\lambda^2(x,y,x,y)}{\lambda^2|x\wedge y|^2} = K(x,y)$

$$\begin{aligned} c) K(x+\lambda y,y) &= \frac{(x+\lambda y,y,x+\lambda y,y)}{|(x+\lambda y)\wedge y|^2} \\ &= \frac{(x,y,x,y)+(x,y,\lambda y,y)+(\lambda y,y,x,y)+(\lambda y,y,\lambda y,y)}{|x\wedge y+\lambda y\wedge y|^2} \\ &= \frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} \\ &= K(x,y). \end{aligned}$$

□

A importância da curvatura seccional é que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente a curvatura R.

A partir de agora, escreveremos por simplicidade, $\langle R(x,y)z,t\rangle = (x,y,z,t)$.

Lema 1.6.1. Seja W um espaço vetorial n-dimensional ($n \geq 2$), munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sejam $R : W \times W \times W \to W$ e $T : W \times W \times W \to W$ aplicações trilineares tais que as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da proposição 1.6.3 sejam satisfeitaspara R e T. Se $\{x, y\}$ é uma base de σ, escrevamos

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{\langle T(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

Se para todo $\sigma \subset W$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então R=T.

Demonstração: Basta provar que $\langle R(x,y)z, t\rangle = \langle T(x,y)z, t\rangle$ para quaisquer $x, y, z, t \in W$. Escrevendo $(x,y,z,t) = \langle R(x,y)z, t\rangle$ e $(x,y,z,t)' = \langle T(x,y)z, t\rangle$, tem-se, por hipótese, $(x,y,x,y) = (x,y,x,y)'\ \ \forall x, y \in W$, logo

$$(x+z, y, x+z, y) = (x+z, y, x+z, y)'$$

o que implica

$$(x,y,x,y) + 2(x,y,z,y) + (z,y,z,y) = (x,y,x,y)' + 2(x,y,z,y)' + (z,y,z,y)'$$

e, portanto

$$(x,y,z,y) = (x,y,z,y)' \quad \forall x, y, z \in W.$$

Assim

$$(x, y+t, z, y+t) = (x, y+t, z, y+t)',$$

o que implica

$$(x,y,z,t) - (x,y,z,t)' = (y,z,x,t) - (y,z,x,t)',$$

e a expressão $(x,y,z,t) - (x,y,z,t)'$ é invariante por permutações cíclicas dos três primeiros elementos. Portanto

$$\begin{aligned}
3[(x,y,z,t) - (x,y,z,t)'] &= (x,y,z,t) - (x,y,z,t)' + (x,y,z,t) \\
&\quad -(x,y,z,t)' + (x,y,z,t) - (x,y,z,t)' \\
&= (x,y,z,t) - (x,y,z,t)' + (y,z,x,t) \\
&\quad -(y,z,x,t)' + (z,x,y,t) - (z,x,y,t)' \\
&= (x,y,z,t) + (y,z,x,t) + (z,x,y,t) \\
&\quad -[(x,y,z,t)' + (y,z,x,t)' + (z,x,y,t)'] \\
&= 0 \ \ (\textit{por } (i) \textit{ da} \text{ proposição 1.6.3}),
\end{aligned}$$

logo

$$(x,y,z,t) = (x,y,z,t)'$$

para todo $x, y, z, t \in W$.

$\square$

Proposição 1.6.4. Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $T : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ por

$$\langle T(X,Y)Z,W\rangle = \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle,$$

para todo $X,Y,Z,W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a c se e somente se $R = cT$, onde R é a curvatura de M.

Demonstração: Suponha que $K(p,\sigma) = c \ \forall\, \sigma \subset T_pM$, então

$$c = K(p,\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)X,Y\rangle &= c(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2) \\ &= c(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle Y,X\rangle\langle X,Y\rangle) \\ &= c\langle T(X,Y)X,Y\rangle \end{aligned}$$

e como T satisfaz as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) da proposição 1.6.3 podemos utilizar o lema 1.6.1 para concluir que

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\langle T(X,Y)Z,W\rangle$$

para todo $X,Y,Z,W \in T_pM$. A reciproca é imediata. $\square$

Corolário 1.6.1. Seja M uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante c e seja R a curvatura de M, então podemos escrever

$$R(X,Y)Z = c(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X)$$

Demonstração: Pela proposição anterior

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,W\rangle &= c\langle T(X,Y)Z,W\rangle \\ &= c(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle), \end{aligned}$$

logo

$$\langle R(X,Y)Z - c\langle X,Z\rangle Y + c\langle Y,Z\rangle X\ ,\ W\rangle = 0,$$

portanto

$$R(X,Y)Z = c\langle X,Z\rangle Y - c\langle Y,Z\rangle X.$$

$\square$

1.7 Fibrados Vetoriais

Definição 1.7.1. Sejam E e M variedades diferenciáveis e seja $\rho : E \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\rho : E \longrightarrow M$ é um *fibrado vetorial* de dimensão k quando, para cada ponto $p \in M$,

(i) $\rho^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k.

(ii) existe uma vizinhança aberta U de p em M e um difeomorfismo $\Phi : \rho^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a $\rho^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, para cada $q \in U$.

Definição 1.7.2. Seja $\rho : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$ chamamos o espaço $E_p = \rho^{-1}(p)$ a *fibra* de ρ sobre p.

Definição 1.7.3. Sejam $\rho_1 : E^1 \longrightarrow M$ e $\rho_2 : E^2 \longrightarrow M$ fibrados vetoriais. Definimos a projeção $\rho : \mathcal{L}(E^1, E^2) \longrightarrow M$ por $\rho^{-1}(p) = \mathcal{L}(E^1_p, E^2_p)$, onde o conjunto $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ é a união dos espaços das aplicações lineares de E^1_p sobre E^2_p, $p \in M$. Munindo $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ com a estrutura diferenciável natural induzida pela projeção ele torna-se um fibrado vetorial, chamado fibrado das aplicações lineares. A soma $\rho_1 \oplus \rho_2$ dos fibrados vetoriais $\rho_1 : E^1 \longrightarrow M$ e $\rho_2 : E^2 \longrightarrow M$ é definida como a projeção

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : E^1 \oplus E^2 \longrightarrow M,$$

dada por $\rho_1 \oplus \rho_2((e_1, e_2)) = \rho_1(e_1) = \rho_2(e_2)$, onde

$$E^1 \oplus E^2 = \{(e_1, e_2) \in E^1 \times E^2 : \rho_1(e_1) = \rho_2(e_2)\}.$$

Exemplo 3. Seja $TM = \{(p, v_p)| \ p \in M, \ v_p \in T_pM\}$. A aplicação $\rho : TM \longrightarrow M$, dada por $\rho(p, v_p) = p$, é um espaço fibrado vetorial de classe C^∞, chamado o *espaço fibrado tangente* a M.

Exemplo 4. Sejam $\langle \ , \ \rangle$ uma métrica Riemanniana em M^n e $N^m \subset M^n$ uma subvariedade de M. Dado $p \in M$, seja $T_pN^\perp \subset T_pM$ o subespaço de vetores normais a T_pN; definimos $\nu(N) = \{(p, v_p)| \ p \in N, \ v_p \in T_pN^\perp\}$. A aplicação $\rho : \nu(N) \longrightarrow N$, dada por $\rho(p, v_p) = p$ é um espaço fibrado vetorial, chamado o *espaço fibrado normal*.

Por um abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\rho : E \longrightarrow M$ quando estamos trabalhando com fibrados cuja aplicação é natural, mas sim às variedades E e M.

1.8 Imersões Isométricas

Definição 1.8.1. Uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ entre duas variedades Riemannianas com as métricas $\langle\ ,\ \rangle_M$ e $\langle\ ,\ \rangle_{\overline{M}}$ respectivamente, é chamada *imersão isométrica* se:

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{\overline{M}}$$

para todo $p \in M,$ e $X, Y \in T_pM.$

Se $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ é uma imersão, isto é, f é diferenciável e $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo p em M, e $\langle\ ,\ \rangle_{\overline{M}}$ é uma métrica Riemanniana em $\overline{M}$, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle X,\ Y\rangle_M = \langle df_p(X),\ df_p(Y)\rangle_{\overline{M}},\ X, Y \in T_pM$. A métrica de M é chamada então a *métrica induzida* por f, e f passa a ser uma imersão isométrica.

Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Pela proposição 1.2.1, dado $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$. Portanto podemos identificar U com $f(U)$, e considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente a $\overline{M}$ em p e escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

onde $T_pM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $TM^{\perp} = \bigcup\limits_{p\in M} T_pM^{\perp}$, chamado fibrado normal a M.

Deste modo, o fibrado vetorial

$$T\overline{M}|_{f(M)} = \{X \in T\overline{M} : \pi(X) \in f(M),\ \text{onde } \pi : T\overline{M} \longrightarrow \overline{M} \text{ é a projeção}\}$$

é a soma do fibrado tangente TM com $TM^{\perp}$, que é

$$T\overline{M}|_{f(M)} = TM \oplus TM^{\perp}.$$

Com respeito a esta decomposição temos as projeções

$$\begin{array}{l}(\ )^T : T\overline{M}\ |_{\ f(M)} \longrightarrow TM \\ (\ )^{\perp} : T\overline{M}\ |_{\ f(M)} \longrightarrow TM^{\perp}\end{array}$$

que são chamadas tangencial e normal, respectivamente.

Seja $\overline{M}^{n+m}$ uma variedade Riemanniana com conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$, e seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Dados campos de vetores $X, Y \in TM$, tem-se que

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Segue da unicidade da conexão Riemanniana que $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ é a conexão Riemanniana de M, que será denotada por ∇.

Definição 1.8.2. Seja $B : TM \times TM \longrightarrow TM^{\perp}$ definida por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

A aplicação B é chamada a *segunda forma fundamental* de f, e a equação

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$$

é denominada *Fórmula de Gauss* .

Das propriedades das conexões Riemannianas $\overline{\nabla}$ e ∇ temos que B é bilinear e simétrica sobre $\mathcal{D}(M)$.

Consideremos campos de vetores X de TM e ξ de $TM^{\perp}$, e denotemos por $\mathcal{A}_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é

$$\mathcal{A}_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T.$$

Para todo $Y \in TM$ tem-se que

$$\begin{array}{rcl} 0 \;=\; X\langle \xi, Y\rangle & = & \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\ 0 & = & \langle -\mathcal{A}_\xi X, Y\rangle + \langle \xi, B(X, Y) + \nabla_X Y\rangle \end{array}$$

assim,

$$\langle \mathcal{A}_\xi X, Y\rangle = \langle B(X, Y), \xi\rangle.$$

Em particular, a aplicação $\mathcal{A} : TM \times TM^{\perp} \longrightarrow TM$ dada por $\mathcal{A}(X, \xi) = \mathcal{A}_\xi X$ é bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$, e a aplicação $\mathcal{A}_\xi : TM \longrightarrow TM$ é linear sobre $\mathcal{D}(M)$ e também simétrica, ou seja, $\langle \mathcal{A}_\xi X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{A}_\xi Y\rangle$ para todo $X, Y \in TM$. A aplicação $\mathcal{A}_\xi$ é chamada *Operador de Weingarten* ou, por um abuso de linguagem, segunda forma fundamental na direção de ξ.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X\xi$, que denotamos por $\nabla^{\perp}_X\xi$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal $TM^{\perp}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal de f, assim obtemos a *Fórmula de Weingarten*

$$\overline{\nabla}_X\xi = -\mathcal{A}_{\xi}X + \nabla^{\perp}_X\xi.$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten obteremos as equações básicas de uma imersão isométrica, denominadas as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Sejam $X, Y, Z \in TM$, então

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(B(Y,Z) + \nabla_Y Z)\\ &= \overline{\nabla}_X B(Y,Z) + \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z\\ &= \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - \mathcal{A}_{B(Y,Z)}X + \nabla_X\nabla_Y Z + B(X,\nabla_Y Z),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - \mathcal{A}_{B(Y,Z)}X + \nabla_X\nabla_Y Z + B(X,\nabla_Y Z),$$

onde a segunda igualdade vem das fórmulas de Gauss e Weingarten.

Similarmente,

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) - \mathcal{A}_{B(X,Z)}Y + \nabla_Y\nabla_X Z + B(Y,\nabla_X Z)$$

Novamente pela fórmula de Gauss, temos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + B([X,Y],Z)$$

Substituindo esses resultados em

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,$$

tem-se que:

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - B(X,\nabla_Y Z) + B(Y,\nabla_X Z) + B([X,Y],Z)$$
$$+\mathcal{A}_{B(Y,Z)}X - \mathcal{A}_{B(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z), \quad (1.1)$$

onde R e $\overline{R}$ são os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente.

Tomando a componente tangencial, de $\overline{R}$ em (1.1) temos

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle \quad = \quad \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle \mathcal{A}_{B(Y,Z)}X,W\rangle - \langle \mathcal{A}_{B(X,Z)}Y,W\rangle,$$

obtendo assim, a *Equação de Gauss*,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle - \langle B(X,W),B(Y,Z)\rangle + \langle B(X,Z),B(Y,W)\rangle.$$

Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)X,Y\rangle$ e $\overline{K}(X,Y) = \langle \overline{R}(X,Y)X,Y\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X,Y \in T_pM$, a equação de Gauss torna-se

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle B(X,X),B(Y,Y)\rangle - \langle B(X,Y),B(X,Y)\rangle.$$

Por outro lado, tomando a componente normal de $\overline{R}$ em (1.1) obtemos

$$\begin{array}{rcl}
(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} & = & (R(X,Y)Z)^{\perp} - B(X,\nabla_Y Z) + B(Y,\nabla_X Z) + B([X,Y],Z) \\
 & & -\nabla^{\perp}_X B(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) \\
 & = & -B(X,\nabla_Y Z) + B(Y,\nabla_X Z) + B(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
 & & -\nabla^{\perp}_X B(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) \\
 & = & -B(X,\nabla_Y Z) + B(Y,\nabla_X Z) + B(\nabla_X Y,Z) - B(\nabla_Y X,Z) \\
 & & -\nabla^{\perp}_X B(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) \\
 & = & -(\nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - B(\nabla_X Y,Z) - B(Y,\nabla_X Z)) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) \\
 & & -B(\nabla_Y X,Z) - B(X,\nabla_Y Z),
\end{array}$$

o que implica na *Equação de Codazzi*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_Y B)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z),$$

onde por definição

$$(\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - B(\nabla_X Y,Z) - B(Y,\nabla_X Z).$$

Observe que $\nabla^{\perp} B$ é multilinear sobre $\mathcal{D}(M)$.

Denotaremos por $R^\perp$ o tensor curvatura do fibrado normal $TM^\perp$, que é

$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi + \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi,$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$.

Novamente, utilizando as fórmulas de Gauss e Weingarten temos

$$\begin{array}{rcl}
\overline{R}(X,Y)\xi &=& \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi + \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi \\
&=& \overline{\nabla}_Y(-\mathcal{A}_\xi X) + \overline{\nabla}_Y\nabla^\perp_X\xi - \overline{\nabla}_X(-\mathcal{A}_\xi Y) - \overline{\nabla}_X\nabla^\perp_Y\xi - \mathcal{A}_\xi[X,Y] \\
&& +\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi \\
&=& B(Y,-\mathcal{A}_\xi X) + \nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla^\perp_X\xi}Y + \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi + B(X,\mathcal{A}_\xi Y) \\
&& +\nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla^\perp_Y\xi}X - \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \mathcal{A}_\xi[X,Y] + \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi,
\end{array}$$

logo

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)\xi = R^\perp(X,Y)\xi + B(X,\mathcal{A}_\xi Y) + \nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla^\perp_Y\xi}X \\
-B(Y,\mathcal{A}_\xi X) - \nabla_Y(\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla^\perp_X\xi}Y - \mathcal{A}_\xi[X,Y] \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Tomando a componente normal de $\overline{R}(X,Y)\xi$ em (1.2) temos, a *Equação de Ricci*

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^\perp = R^\perp(X,Y)\xi + B(X,\mathcal{A}_\xi Y) - B(Y,\mathcal{A}_\xi X).$$

Agora tomando em (1.2) o produto interno por $\eta \in TM^\perp$, temos

$$\begin{array}{rcl}
\langle\overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle &=& \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle B(X,\mathcal{A}_\xi Y),\eta\rangle - \langle B(Y,\mathcal{A}_\xi X),\eta\rangle \\
&=& \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle \mathcal{A}_\eta X,\mathcal{A}_\xi Y\rangle - \langle \mathcal{A}_\eta Y,\mathcal{A}_\xi X\rangle \\
&=& \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle \mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta X, Y\rangle - \langle Y,\mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi X\rangle \\
&=& \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle [\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y\rangle,
\end{array}$$

e a equação de Ricci pode ser escrita na forma

$$\langle\overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle [\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y\rangle,$$

onde $[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta] = \mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi$.

Observação 1. No caso em que o espaço ambiente $\overline{M}$, tem curvatura seccional constante, para $X, Y, Z \in TM$ e $\xi, \eta \in TM^{\perp}$, as equações de Codazzi e Ricci se resumem, respectivamente, a:

i) $(\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y B)(X,Z)$;

ii) $\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = -\langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]X, Y\rangle$.

Definição 1.8.3. O *vetor curvatura média* de uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{\,n+p}$ no ponto p de M é o vetor normal a M em p, definido por $H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(X_i, X_i)$, onde $\{X_1, ..., X_n\}$ é um referencial ortonormal tangente a M em p e B é a segunda forma fundamental de f. Dizemos que uma subvariedade é mínima se $H(p) = 0$ para todo $p \in M$. O vetor curvatura média é dito *paralelo* no ponto p se $\nabla^{\perp}H(p) = 0$.

1.9 Aplicações Harmônicas

Definição 1.9.1. Sejam M^n e N^m variedades Riemannianas. Dada uma $f : M^n \longrightarrow N^m$ de classe C^{∞}, definimos a *forma fundamental* de f por:

$$\Upsilon(X,Y) = \nabla^N_{(dfX)}(dfY) - df(\nabla^M_X Y),$$

onde X e Y são campos tangentes de M, e ∇^N e ∇^M denotam as conexões Riemannianas de N e M respectivamente.

Observemos que $\Upsilon(X,Y)$ é um campo ao longo de f, ou seja, $\Upsilon(X,Y)(p) \in T_{f(p)}N, p \in M$. Além disso, Υ é bilinear e simétrica e $\Upsilon(X,Y)(p)$ só depende dos valores de X e Y em p.

Definição 1.9.2. Seja $f : M^n \longrightarrow N^m$ uma aplicação de classe C^{∞} e Υ a sua forma fundamental. O traço de Υ, denotado por $\tau(f)$, é chamado o *campo de tensão* de f. Dizemos que f é uma *aplicação harmônica* se $\tau(f)$ é nulo.

Escolhendo um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ de $p \in M$, podemos escrever

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \Upsilon(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \{\nabla^N_{dfe_i}(dfe_i) - df(\nabla^M_{e_i} e_i)\}.$$

Exemplo 5. *Funções harmônicas reais.* Se $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação de classe C^∞ então, escolhendo um referencial ortonormal $E_1, ..., E_n$ em uma vizinhança $U \subset M$ de $p \in M$, tem-se que

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i(f)) - df(\nabla^M_{E_i} E_i)\} .$$

O operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ dado por $\Delta f = \tau(f)$ é denominado o *Laplaciano* de M. Caso $M = V \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, fazendo $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, tem-se que:

$$\Delta f = \tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} .$$

Exemplo 6. *Geodésicas.* Se M é um intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ e $f : (a, b) \longrightarrow N$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco, temos que $\tau(f) = \Upsilon(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt})$ é precisamente a aceleração da curva. Uma curva é geodésica se tem aceleração nula.

Exemplo 7. *Imersões Mínimas.* Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica. A segunda forma fundamental da imersão coincide com Υ, logo o vetor curvatura média de f é $\tau(f)$. Uma imersão é mínima se a curvatura média se anula.

Capítulo 2

Variedades de Grassmann

2.1 Variedades de Grassmann

Definição 2.1.1. *A variedade de Grassmann*, denotada por $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$, é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão n do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{p+n}$.

$$G(n, \mathbb{R}^{p+n}) = \{P \subset \mathbb{R}^{p+n} \mid P \text{ é subespaço de } \mathbb{R}^{p+n} \text{ e } dim(P) = n\}$$

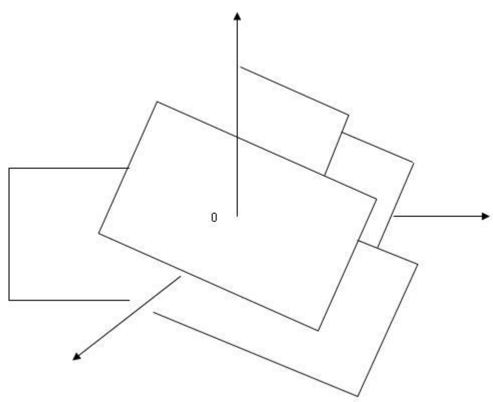

Figura 2.1: $G(2, \mathbb{R}^3)$

Mostraremos que $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ é uma variedade diferenciável de dimensão pn, compacta. Para isto verificaremos as condições da definição 1.1.1.

Estabeleçamos, inicialmente, algumas notações. Denotaremos por $M(p \times n)$ o espaço das matrizes reais $p \times n$. Dados um subconjunto $\alpha = \{i_1 < \ldots < i_n\} \subset \{1 < \ldots < p+n\}$ com n elementos e uma matriz $a \in M((p+n) \times n)$, denotaremos por $\alpha(a)$ a submatriz $n \times n$ de a formada pelas linhas de ordem $i_1 < \ldots < i_n$. Analogamente, indicamos por α^* o complementar de α em $\{1 < \ldots < p+n\}$ e $\alpha^*(a)$ a submatriz $p \times n$ de a formada pelas linhas que não foram usadas em $\alpha(a)$. Valem as equações:

$$\alpha(a.c) = \alpha(a).c \text{ e } \alpha^*(a.c) = \alpha^*(a).c, \ c \in GL(\mathbb{R}^n),$$

onde $GL(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço das matrizes $n \times n$ invertíveis. Para cada $\alpha = \{i_1, \ldots, i_n\}$ como acima, seja $\mathbb{R}^n_\alpha$ o subespaço gerado pelos vetores básicos $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ e $U_\alpha \subset G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ o conjunto de todos os n-planos $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ tais que a projeção ortogonal $\pi_\alpha : \mathbb{R}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n_\alpha$ leva P isomorficamente sobre $\mathbb{R}^n_\alpha$. Isto significa que para cada matriz a cujas colunas geram P, $\alpha(a)$ é invertível. Uma matriz cujas colunas geram o subespaço P é denominada *matriz de coordenadas homogêneas* de P. Vamos definir agora uma bijeção $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{pn}$ que será um sistema de coordenadas em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$. Os valores de x_α serão dados como matrizes $p \times n$ como se segue: dado um subespaço $P \in U_\alpha$, seja a uma matriz qualquer de coordenadas homogêneas de P. Escrevemos

$$x_\alpha(P) = \alpha^*(a.\alpha(a)^{-1}) = \alpha^*(a).\alpha(a)^{-1}.$$

Notemos que $a_0 = a.\alpha(a)^{-1}$ é a única matriz de coordenadas homogêneas de P tal que $\alpha(a_0) = I_n$, onde I_n denota a matriz identidade $n \times n$. Então x_α está bem definida . Além disso, x_α é injetiva. De fato, se $P, Q \in U_\alpha$ são representados por matrizes $a_0 = a.\alpha(a)^{-1}$ e $b_0 = b.\alpha(b)^{-1}$ respectivamente com $\alpha(a_0) = \alpha(b_0) = I_n$ e $x_\alpha(P) = x_\alpha(Q)$, então $\alpha^*(a.\alpha(a)^{-1}) = \alpha^*(b.\alpha(b)^{-1})$, ou seja, $\alpha^*(a_0) = \alpha^*(b_0)$, logo $a_0 = b_0$, donde $P = Q$. Notemos finalmente que $x_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^{pn}$: por construção tem-se que $x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^{pn}$, reciprocamente dada uma matriz $d \in \mathbb{R}^{pn}$, seja $\widetilde{d}$ a única matriz $(p+n) \times n$ tal que $\alpha^*(\widetilde{d}) = d$ e $\alpha(\widetilde{d}) = I_n$. É claro que $\widetilde{d}$ tem posto n. Seja P o subespaço de $\mathbb{R}^{p+n}$ gerado pelas colunas de $\widetilde{d}$. Então $P \in U_\alpha$ e $x_\alpha(P) = d$. Portanto, pode-se concluir as duas primeiras afirmaçõs abaixo:

(1) Cada $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{pn}$ é uma bijeção.

(2) Os domínios U_α cobrem $G(n, \mathbb{R}^{n+p})$.

(3) Sejam α, β dois subconjuntos de $\{1 < \ldots < p+n\}$, com n elementos, tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Consideremos as aplicações contínuas $\widetilde{\alpha} : M(p \times n) \longrightarrow M((p+n) \times n))$, dada por $\widetilde{\alpha}(d) = \widetilde{d}$ $(\alpha^*(\widetilde{d}) = d, \alpha(\widetilde{d}) = I_n)$, e $\beta : M((p+n) \times n) \longrightarrow M(n \times n)$, $a \longmapsto \beta(a)$. Então $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = (\beta \circ \widetilde{\alpha})^{-1}[GL(\mathbb{R}^n)]$. Com efeito, tem-se que $(\beta \circ \widetilde{\alpha})(x_\alpha(P)) = \beta(\widetilde{\alpha}(x_\alpha(P))) = \beta(\widetilde{d})$. Se $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ então $P \in U_\alpha$ e $P \in U_\beta$ e portanto dada qualquer matriz a de coordenadas homogêneas de P, $\alpha(a)$ e $\beta(a)$ são invertíveis. Como $\widetilde{d}$ é uma matriz de coordenadas homogêneas de P, conclui-se que $\beta(\widetilde{d})$ é invertível, ou seja, $\beta(\widetilde{d}) \in GL(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em $\mathbb{R}^{pn}$, pois $GL(\mathbb{R}^n)$ é aberto em $M(n \times n)$ e a imagem inversa de $GL(\mathbb{R}^n)$ pela aplicação contínua $(\beta \circ \widetilde{\alpha})$ é um aberto. Além disso , dada $d \in M(p \times n)$, o subespaço $P = x_\alpha^{-1}(d)$ tem por base as colunas da matriz $\widetilde{d} = \widetilde{\alpha}(d)$. Logo $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(d) = \beta^*(\widetilde{\alpha}(d)).\beta(\widetilde{\alpha}(d))^{-1}$. Isto evidencia claramente que a mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é diferenciável.

(4) As $\begin{pmatrix} p+n \\ n \end{pmatrix}$ bijeções $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{pn}$ definem uma topologia em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$, em relação à qual formam um atlas $\mathcal{U}$ sobre $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$. Como $\mathcal{U}$ é finito, esta topologia possui base enumerável.

(5) $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ é um espaço de Hausdorff. De fato, sejam $\alpha \neq \beta$ e $d_i \in x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ uma sequência tendendo para $d \in x_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$. Então $\beta(\widetilde{\alpha}(d))$ não é invertível. Logo a sequência $[\beta(\widetilde{\alpha}(d_i))]^{-1}$ não converge e portanto $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(d_i) = \beta^*(\widetilde{\alpha}(d_i)).\,[\beta(\widetilde{\alpha}(d_i))]^{-1}$ não converge.

A variedade de Grassmann é compacta. Com efeito, seja $V(n, \mathbb{R}^{p+n})$ o conjunto de todas as matrizes $(p+n) \times n$ de posto n. Para cada $a \in V(n, \mathbb{R}^{p+n})$ seja $P = \pi(a)$ o subespaço gerado pelas colunas de a. Isto define uma aplicação natural

$$\pi : V(n, \mathbb{R}^{p+n}) \longrightarrow G(n, \mathbb{R}^{p+n})$$

Provemos inicialmente que π é contínua: para cada $\alpha = \{i_1 < \ldots < i_n\}$, denotamos por $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ o conjunto de todas as matrizes $a \in V(n, \mathbb{R}^{p+n})$ tais que $\alpha(a)$ é invertível. Como V_α é aberto em $V(n, \mathbb{R}^{p+n})$, basta provar que $\pi \mid V_\alpha$ é contínua. Considerando o sistema de coordenadas $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{pn}$, vê-se que $x_\alpha \circ (\pi | V_\alpha)$ é dada por $x_\alpha(\pi(a)) = \alpha^*(a).\alpha(a)^{-1}$, para cada $a \in V_\alpha$. Logo $\pi | V_\alpha$ é contínua. Consideremos agora o conjunto C de todas as matrizes $(p \times n) \times n$ cujas colunas $v_1, ..., v_n$ satisfazem à condição $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. Evidentemente C é fechado e limitado em $\mathbb{R}^{(p+n)n}$, logo compacto. Como cada

$P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ possui uma base ortonormal, $G(n, \mathbb{R}^{p+n}) = \pi(C)$ é compacto.

Definiremos uma imersão de $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ no espaço das matrizes simétricas $(p+n) \times n$, tal espaço será denotado por $S(p+n)$.

Dado $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$, sejam $\{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^{p+n}$ uma base ortonormal de P e $a = [a_{ij}] \in M((p+n) \times n)$ cujas colunas são os vetores $v_1, ..., v_n$.

$$v_j = (a_{1j}, ..., a_{ij}, ..., a_{(p+n)j}), \text{ onde } j \in \{1, ..., n\}.$$

Definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G(n, \mathbb{R}^{p+n}) & \longrightarrow & S(p+n) \\ P & \longmapsto & a.a^{\,t} \quad . \end{array}$$

A aplicação φ está bem definida. De fato, sejam $\{u_1, ..., u_n\} \subset \mathbb{R}^{p+n}$ uma outra base ortonormal de P e $\widehat{a} = [\widehat{a}_{ij}] \in M((p+n) \times n)$ cujas colunas são os vetores $u_1, ..., u_n$.

$$u_j = (\widehat{a}_{1j}, ..., \widehat{a}_{ij}, ..., \widehat{a}_{(p+n)j}), \text{ onde } j \in \{1, ..., n\}.$$

Por outro lado, como $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de P, tem-se que:

$$\begin{array}{rcl} u_j & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{kj} v_k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{kj} (a_{1k}, ..., a_{ik}, ..., a_{(p+n)k}) \\ & = & (\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{kj} a_{1k}, ..., \sum_{k=1}^{n} c_{kj} a_{ik}, ..., \sum_{k=1}^{n} c_{kj} a_{(p+n)k}). \end{array}$$

Denotaremos por $c = [c_{ij}] \in M(n \times n)$. O produto da matriz a pela matriz c é a matriz $a.c = [(a.c)_{ij}] \in M((p+n) \times n)$, onde

$$(a.c)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \widehat{a}_{ij}.$$

Logo, tem-se que

$$\widehat{a} = a.c \Rightarrow \widehat{a}^{\,t} = (a.c)^t = c^t.a^t.$$

O produto da matriz c^t pela matriz c é a matriz $c^t.c = [(c^t.c)_{ij}] \in M(n \times n)$, onde

$$(c^t.c)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj},$$

e, por outro lado, como $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base ortonormal de P, tem-se:

$$\delta_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki}v_k, \sum_{k=1}^{n} c_{kj}v_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj} = (c^t.c)_{ij}.$$

Portanto, $c^t.c = c.c^t = I_n$ e daí conclui-se que:

$$\widehat{a}.\widehat{a}^{\,t} = (a.c).(c^t.a^t) = a.(c.c^t).a^t = a.I_n.a^t = a.a^t.$$

A aplicação φ é diferenciável. Com efeito, dado $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ seja $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{pn}$ um sistema de coordenadas locais em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ tal que $P \in U_\alpha$. Consideremos as aplicações $\widetilde{\alpha} : M(p \times n) \longrightarrow M((p+n) \times n))$, dada por $\widetilde{\alpha}(d) = \widetilde{d}\,(\alpha^*(\widetilde{d}) = d, \alpha(\widetilde{d}) = I_n)$, $\phi : \widetilde{\alpha}(M((p+n)\times n)) \longrightarrow M((p+n)\times n)$, onde ϕ é dada do seguinte modo: dada uma matriz $\widetilde{d} \in \widetilde{\alpha}(M((p+n) \times n))$, cujas colunas são os vetores $v_1, ..., v_n$, seja $\{u_1, ..., u_n\}$ o conjunto obtido aplicando-se o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt no conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$. Põe-se $\phi(\widetilde{d}\,) = \overline{d}$, onde $\overline{d}$ é uma matriz $((p + n) \times n)$ cujas colunas são os vetores $u_1, ..., u_n$, e $\psi : M((p + n) \times n) \longrightarrow S(p + n)$ dada por $\psi(\overline{d}) = \overline{d}.\overline{d}^{\,t}$. As aplicações $\widetilde{\alpha}$, ϕ, e ψ são, evidentemente, diferenciáveis e como $\varphi(P) = \psi \circ \phi \circ \widetilde{\alpha} \circ x_\alpha(P)$, pode-se concluir que φ é diferenciável em P.

A aplicação $d\varphi$ é injetiva. De fato, seja $b \in \varphi(G(n, \mathbb{R}^{p+n}))$, isto é, $b = \varphi(P) \in S(p+n)$, $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$. Os $(p+n)$ vetores-coluna de b geram o subespaço P. Como $dim(P) = n$, podemos escolher n vetores-coluna de b de ordem $i_1 < \ldots < i_n$ linearmente independentes. Tais vetores escolhidos geram P. Denotaremos por $\widehat{b}$ a submatriz $(p + n) \times n$ de b, formada pelas colunas de ordem $i_1 < \ldots < i_n$, ou seja,

$$\widehat{b} = (b.e_{i_1}, ..., b.e_{i_n}).$$

Escolhamos α de modo que $\alpha(\ \widehat{b}\ )$ seja invertível, isto é, $det(\alpha(\ \widehat{b}\ )) \neq 0$. O conjunto $\mathcal{V} = \{x \in S(p + n) \mid det(\alpha(\widehat{x})) \neq 0, \widehat{x} = (x.e_{i_1}, ..., x.e_{i_n})\}$, é um aberto em $S(p + n)$ contendo b. Consideremos a aplicação: $\zeta : \mathcal{V} \longrightarrow G(n, \mathbb{R}^{n+p})$, dada por $\zeta(x) = X =$ subespaço gerado pelas colunas de $\widehat{x}$ e seja $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{pn}$ um sistema de coordenadas locais em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ tal que $P \in U_\alpha$. A aplicação $x_\alpha \circ \zeta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{pn}$ dada por $x_\alpha \circ \zeta(x) = x_\alpha(\zeta(x)) =$

$x_\alpha(X) = \alpha^*(\widehat{x}).\alpha(\widehat{x})^{-1}$ é evidentemente diferenciável donde conclui-se que ζ é diferenciável. Portanto, a aplicação $\zeta \circ \varphi|U_\alpha = id \mid U_\alpha$ é diferenciável. Consequentemente $d\varphi$ é injetiva.

Mostraremos que para cada $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$, $\varphi(P)$ é exatamente a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^{p+n}$ sobre P. Com efeito, aplicando $\varphi(P)$ nos vetores da base $\{v_1, ..., v_n\}$, obtém-se:

$$\varphi(P).v_l = a.a^t.v_l, \text{ onde } \; l \in \{1, ..., n\}.$$

O produto da matriz a^t pelo vetor coluna v_l é a matriz $a^t.v_l = [(a^t.v_l)_{ij}] \in M(n \times 1)$, onde

$$(a^t.v_l)_{ij} = \sum_{k=1}^{p+n} a_{ki}a_{kl} = \langle v_i, v_l \rangle = \delta_{il}.$$

Logo, o produto da matriz a pela matriz $a^t.v_l$ é a matriz $a.a^t.v_l = [(a.a^t.v_l)_{ij})] \in M((p+n) \times 1)$, onde

$$(a.a^t.v_l)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kl} = a_{il},$$

ou seja

$$\varphi(P).v_l = a.a^t.v_l = v_l.$$

Portanto $\varphi(P).v = v$ para todo $v \in P$.

Seja $w = (w_{11}, ..., w_{i1}, ..., w_{p+n1}) \in P^\perp$, portanto $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $v \in P$. Temos que,

$$\varphi(P).w = a.a^t.w$$

e observemos que o produto da matriz a^t pelo vetor coluna w é a matriz $a^t.w = [(a^t.w)_{ij}] \in M(n \times 1)$, onde

$$(a^t.w)_{ij} = \sum_{k=1}^{p+n} a_{ki}w_{k1} = \langle v_i, w \rangle = 0, \text{ pois } \; v_i \in P,$$

consequentemente $\varphi(P).w = a.a^t.w = 0$.

Se tomarmos em $\mathbb{R}^{p+n}$ uma base ortonormal $\{w_1, ..., w_{n+p}\}$ cujos n primeiros elementos, $w_1, ..., w_n$, formam uma base de P e os últimos, $w_{n+1}, ..., w_{n+p}$, uma base de $P^{\perp}$(começa-se com uma base qualquer de P, estende-se a uma base de $\mathbb{R}^{p+n}$ e depois aplica-se Gram-Schimidt), teremos:

$$\varphi(P).u_1 = u_1, \ldots, \varphi(P).u_n = u_n, \varphi(P).u_{n+1} = 0, \ldots, \varphi(P).u_{n+p} = 0$$

logo, a matriz de $\varphi(P)$ nesta base terá os n primeiros termos da diagonal iguais a 1 e todos os demais iguais a 0. Seu formato será

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

onde os termos fora da diagonal, não indicados acima, são todos zero. Essas matrizes são simétricas, além disso $\varphi(P)$ é idempotente, isto é, $\varphi(P)^2 = \varphi(P)$, onde $\varphi(P)^2 = \varphi(P) \circ \varphi(P)$.

Identificaremos os elementos $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ com $\varphi(P) = \widetilde{P}$, ou seja, $G(n, \mathbb{R}^{n+p}) \approx \widetilde{G}(n, \mathbb{R}^{p+n})$, onde $\widetilde{G}(n, \mathbb{R}^{p+n}) = \{\widetilde{P} \in S \mid \widetilde{P}^2 = \widetilde{P}\}$ e S denota o conjunto das aplicações lineares simétricas.

Dado $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$, o espaço tangente de $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ em P será indicado por $T_P G$. Um vetor $W \in T_P G$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\gamma : I \longrightarrow G(n, \mathbb{R}^{n+p})$ tal que $\gamma(t) = P(t)$ com $\gamma(0) = P(0) = P$ e $\gamma'(0) = P'(0) = P' = W$. Como $P(t) \circ P(t) = P(t)$, tem-se, derivando com respeito a t, que $P'(t).P(t) + P(t).P'(t) = P'(t) \in S$ para todo t em I.

Logo, dados $v \in P$ e $w \in P^{\perp}$ tem-se que:

$$\begin{aligned} P'.v = P'.P.v + P.P'.v = P'.v + P.P'.v \quad &\Rightarrow \quad P'.v - P'.v - P.P'.v = 0 \\ &\Rightarrow \quad P.P'.v = 0 \\ &\Rightarrow \quad P'.v \in P^{\perp} \end{aligned}$$

$$P'.w = P'.P.w + P.P'.w = P'.0 + P.P'.w = P.P'.w \quad \Rightarrow \quad P.P'.w = P'.w$$
$$\Rightarrow \quad P'.w \in P.$$

Conclui-se que o vetor tangente $W = P'$ é um operador linear simétrico em $\mathbb{R}^{p+n}$ com a seguinte propriedade:

$$W(P) \subset P^{\perp} \ \text{ e } \ W(P^{\perp}) \subset P.$$

Consideremos o seguinte conjunto: $A = \{F \in S | F(P) \subset P^{\perp}$ e $F(P^{\perp}) \subset P\}$. É claro que $T_P G \subset A$. Seja $F \in A$ e tomemos uma base de $\mathbb{R}^{p+n}$ cujos n primeiros elementos formam uma base de P e os últimos uma base de $P^{\perp}$. A matriz de F nessa base terá o seguinte formato:

$$\begin{pmatrix} 0_n & b^t \\ b & 0_p \end{pmatrix},$$

onde 0_n e 0_p denotam a matriz nula $n \times n$ e $p \times p$ respectivamente e $b \in M(p \times n)$. Portanto, $dim(A) = pn$ e como $dim(T_P G) = pn$ conclui-se que $T_P G = A$.

Definiremos a derivada covariante de um campo de vetores ao longo de uma curva em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$.

Seja V um campo de vetores ao longo de γ, isto é, $V(t) = V(\gamma(t))$ para todo $t \in I$. Como $V(t) \in S$ tem-se que $V'(t) \in S$, ou seja, $V'(t)$ é um operador linear simétrico em $\mathbb{R}^{p+n}$. Seja $P_0 = P(t_0) = \gamma(t_0)$, $t_0 \in I$, definimos a derivada covariante $\frac{DV}{dt}(t_0)$ de V ao longo de γ em t_0, como sendo a projeção ortogonal de $V'(t_0)$ no espaço das aplicações lineares simétricas que leva P_0 em $P_0^{\perp}$ e $P_0^{\perp}$ em P_0, ou seja, projeta-se $V'(t_0)$ ortogonalmente sobre $T_{P_0} G$. Isto significa que dados $w \in P_0$ e $\overline{w} \in P_0^{\perp}$ tem-se que $V'(t_0).w = u + v$ e $V'(t_0).\overline{w} = \overline{u} + \overline{v}$ onde $u, \overline{u} \in P_0$ e $v, \overline{v} \in P_0^{\perp}$, logo

$$\frac{DV}{dt}(t_0).w = \mathcal{P}_{P_0^{\perp}}(V'(t_0).w) = v$$

$$\frac{DV}{dt}(t_0).\overline{w} = \mathcal{P}_{P_0}(V'(t_0).\overline{w}) = \overline{u},$$

onde $\mathcal{P}_{P_0^{\perp}}$ e $\mathcal{P}_{P_0}$ denotam a projeção ortogonal sobre $P_0^{\perp}$ e P_0 respectivamente.

Dada uma matriz $c = [c_{ij}] \in M(n \times n)$, denotaremos o seu traço por $tr[c]$. A imersão φ induz uma estrutura Riemanniana em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ dada por $\langle W, \overline{W} \rangle_P = tr[(d\varphi_P(W)).(d\varphi_P(\overline{W}))^t]$, onde $P \in G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ e $W, \overline{W} \in T_PG$, que é exatamente a métrica euclidiana em $S(p+n)$. Usualmente, a estrutura Riemanniana em $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ é definida pela identificação de $G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ com o espaço simétrico $O(n+p)/O(n) \times O(p)$, onde $O(n+p)$ denota o grupo ortogonal operando em $\mathbb{R}^{p+n}$.

2.2 Aplicação de Gauss

Definição 2.2.1. Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{p+n}$ uma imersão isométrica. A *aplicação de Gauss* associada a essa imersão é a aplicação $g : M^n \longrightarrow G(n, \mathbb{R}^{p+n})$, onde a imagem $g(q)$ de um ponto $q \in M$ é definida como sendo o plano tangente a $f(M)$ em $f(q)$.

Capítulo 3

Resultado Principal

Utilizando os resultados obtidos anteriormente será apresentado, neste capítulo, o teorema principal.

Teorema 3.0.1. Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{p+n}$ uma imersão isométrica e $g : M^n \longrightarrow G(n, \mathbb{R}^{p+n})$ a aplicação de Gauss associada a essa imersão. Então:

$$\nabla^{\perp} H = 0 \Longleftrightarrow g \text{ é harmônica.}$$

Demonstração: Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$ de $q \in M$ tal que $(\nabla_{e_j} e_i)_q = 0, \quad i, j = 1, ..., n$. O campo de tensão de g em q é dado por:

$$\tau(g)(q) = \sum_{i=1}^{n} \{(\nabla^G_{e_i} dg e_i)_q - (dg(\nabla_{e_i} e_i))_q\} = \sum_{i=1}^{n} \{(\nabla^G_{e_i} dg e_i)_q\},$$

onde ∇ e ∇^G denotam a conexão de M e $G(n, \mathbb{R}^{n+p})$ respectivamente. Seja $\gamma : I \longrightarrow M$ uma trajetória de e_i em U tal que $\gamma(0) = q$ e X um campo de vetores ao longo de γ tal que $(\nabla X)_q = 0$. Tem-se que,

$$g_{\gamma(t)} X(t) = X(t) \ \forall \ t \in I, \ \text{onde } g_{\gamma(t)} = g(\gamma(t)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_{i(t)}} g_{\gamma(t)} X(t) = \overline{\nabla}_{e_{i(t)}} X(t) \quad &\Rightarrow \quad (dg_q) e_i X + g_q(\overline{\nabla}_{e_i} X) = \nabla_{e_i} X + B(X, e_i) \\
&\Rightarrow \quad (dg_q) e_i X + g_q(\nabla_{e_i} X + B(X, e_i)) = \nabla_{e_i} X + B(X, e_i) \\
&\Rightarrow \quad (dg_q) e_i X + \nabla_{e_i} X = \nabla_{e_i} X + B(X, e_i) \\
&\Rightarrow \quad (dg_q) e_i X = B(X, e_i),
\end{aligned}$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de $\mathbb{R}^{p+n}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\tau(g)(q)X &= \sum_{i=1}^{n}(\nabla^G_{e_i}B(X,e_i))_q, \text{ donde, pela fómula de Weingarten,}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_{(TM)^\perp}(-\mathcal{A}_{B(X,e_i)}e_i + \nabla^\perp_{e_i}B(X,e_i))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^\perp_{e_i}B(X,e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\{\nabla^\perp_{e_i}B(X,e_i) - B(\nabla_{e_i}X,e_i) - B(X,\nabla_{e_i}e_i)\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\nabla^\perp_{e_i}B)(X,e_i), \text{ donde, pelas equações de Codazzi,}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\nabla^\perp_{X}B)(e_i,e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\{\nabla^\perp_{X}B(e_i,e_i) - B(\nabla_X e_i,e_i) - B(e_i,\nabla_X e_i)\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^\perp_{X}B(e_i,e_i)\\
&= \nabla^\perp_X\sum_{i=1}^{n}B(e_i,e_i)\\
&= \nabla^\perp_X n.H\\
&= n.\nabla^\perp_X H \quad .
\end{aligned}
$$

■

Referências Bibliográficas

[1] CARMO, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição(Projeto Euclides).

[2] CHERN, S.S., *Minimal surfaces in a Euclidean space of N dimensions*, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princenton Univ. Press, Princenton, N. J., pp.187 – 198.MR 31, 1965.

[3] EELLS, J. and SAMPSON, J.H., *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer.J. Math. 86, 109 – 160. MR 31, 1964.

[4] LEITE, M.L., XIV Colóquio Brasileiro de Matemática, *Aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas*. Poços de Caldas. Atas, 1983.

[5] LIMA, E.L., *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1973.

[6] LIMA, E.L., *Álgebra Linear*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1973.

[7] RODRIGUEZ,L., *Geometria das subvariedades*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

[8] RUH, E.A. and VILMS, J., *The tension field of the Gauss map*, Trans. Amer. Math. Soc. 149, 569 – 573, 1970.