UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um caso particular da desigualdade de Heintze e Karcher

Andrea Martins da Mota

Manaus

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Andrea Martins da Mota

Um caso particular da desigualdade de Heintze e Karcher

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Manaus
2014

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M917u

Mota, Andrea Martins da
Um caso particular da desigualdade de Heintze e Karcher / Andrea Martins da Mota. 2014
66 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Hipersuperfície. 2. Curvatura média. 3. Espaço euclidiano. 4. Problema de Dirichlet. I. Gomes, José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Andrea Martins da Mota

Um caso particular da desigualdade de Heintze e Karcher

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 15 de setembro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. Ferry Henrik Kwakkel, Membro
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos, Membro
Universidade Federal do ABC.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo apoio e encorajamento constantes que recebi ao longo desses anos.

Aos colegas de estudo pelos bons momentos que passamos juntos e a todos os professores do Departamento de Matemática da UFAM que de alguma forma colaboraram para o êxito desse trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador, José Nazareno, pelo tempo gasto na correção dessa dissertação e por ter sido responsável por muito do que aprendi na pós-graduação.

E a ti Jesus, por permaneceres ao meu lado em cada instante da minha vida.

RESUMO

Um caso particular da desigualdade de Heintze e Karcher

O objetivo deste trabalho é demonstrar em detalhes um teorema devido a Ernst Heintze e Hermann Karcher que estabelece uma cota superior para o volume de domínios compactos em uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada no espaço euclidiano E. Como aplicação será dada uma prova alternativa do Teorema de Alexandrov, que caracteriza as esferas euclidianas como as únicas hipersuperfícies conexas, fechadas e mergulhadas de curvatura média constante em E.

Palavras-chave: Problema de Dirichlet, curvatura média, espaço euclidiano, hipersuperfície.

ABSTRACT

A particular case of the Heintze-Karcher inequality

The objective of this notes is to prove in detail a theorem, due to Ernst Heintze and Hermann Karcher, establishing an upper bound for the volume of compact domains in a connected closed hypersurface immersed in Euclidean space E. As application we will give an alternative proof of the Alexandrov's theorem, which states that the Euclidean spheres are the only embedded closed hypersurfaces of constant mean curvature in E.

Keywords: Dirichlet problem, mean curvature, Euclidean space, hipersurface.

Conteúdo

Introdução

Com o teorema da esfera demonstrado pela primeira vez por Rauch [18] tornou-se necessário caracterizar a topologia de uma variedade por meio da curvatura ou, se necessário, da curvatura e de outros elementos geométricos simples, tais como o diâmetro e o volume. Klingenberg [12] e Cheeger [8] fizeram importantes contribuições ao teorema. Em 1958 Klingenberg introduziu ao problema a consideração do "cut locus"(união dos pontos mínimos de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p) e obteve uma estimativa para a distância de um ponto ao seu "cut locus". Cheeger, por sua vez, afirmou que, fixada a dimensão, só existe um número finito de tipos de homotopia no conjunto das variedades Riemannianas compactas com volume limitado inferiormente, diâmetro limitado superiormente e curvatura seccional limitada em valor absoluto.

Em 1978, Heintze e Karcher [11] generalizaram e refinaram o resultado obtido por Cheeger dando uma prova mais direta. Nosso interesse estará em um caso mais particular da desigualdade obtida por Heintze e Karcher. O teorema a seguir é o principal resultado desta dissertação.

Teorema Principal. *Sejam M^n uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$, e Ω um domínio compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M$. Considerando sobre M a orientação dada pelo campo normal unitário ν interior a Ω, e denotando por H a curvatura média correspondente. Se $H \neq 0$ sobre M, então*

$$Vol(\Omega) \leq \frac{1}{n+1}\int_M \frac{1}{H}\, dM$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, M for uma esfera.

Como aplicação deste resultado também será demonstrado um teorema devido a Alexandrov [1], a saber:

Aplicação do Teorema Principal. *Se $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante, então M é uma esfera.*

Existem outras variações destes resultados, por exemplo: Em 1987, Antonio Ros [19] considerou uma variedade Riemanianna compacta Ω com curvatura de Ricci não-negativa, e com bordo M de curvatura média positiva, para obter a mesma desigualdade de Heintze e Karcher. Além disso, Ros estendeu a prova do teorema de Alexandrov para o caso de hipersuperfíces mergulhadas no espaço hiperbólico ou em um hemisfério aberto da esfera. Recentemente, Simon Brendle [3] deu uma nova versão para o teorema de Ros [19], onde Ω no caso é um domínio compacto de $\mathbb{H}^n$ ou de $\mathbb{S}^n$.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro veremos alguns conceitos e resultados básicos de geometria Riemanniana. Muitos resultados serão admitidos neste capítulo sem as demonstrações, que podem ser encontradas nas referências desta dissertação. No segundo capítulo veremos algumas definições sobre imersões isométricas e alguns resultados que serão fundamentais para o entendimento do teorema principal. O terceiro capítulo é destinado a um resultado de bastante relevância neste trabalho: a existência e unicidade da solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson, que será utilizado na prova do teorema principal.

No quarto e último capítulo é demonstrado um caso particular da desigualdade de Heintze e Karcher, nosso teorema principal. A prova do teorema será baseada na existência de uma função dada por um problema de Dirichlet e integração da fórmula de Bochner-Lichnerowicz, demonstrada no fim do primeiro capítulo. Como aplicação do teorema principal daremos uma prova alternativa do Teorema de Alexandrov.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos exibir definições, resultados e exemplos da teoria básica geral da geometria Riemanniana, os quais serão utilizados no decorrer desta dissertação. Especificamente, vamos disponibilizar os conceitos de variedades diferenciáveis, métricas, conexões, curvaturas e operadores diferenciais.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. *Dizemos que um conjunto M é uma variedade diferenciável (Hausdorff e com base enumerável) n-dimensional se existir uma família de aplicações diferenciáveis e injetivas $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:*

(*i*) $M = \bigcup_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$;

(*ii*) *Para todo par α, β, com $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha$ e $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\beta$ são diferenciáveis.*

(*ii*) *A família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ é máxima em relação as condições (i) e (ii).*

Observação 1.1. *Dado $p \in \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$, a aplicação $\boldsymbol{x}_\alpha$ ou o par $(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p e $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ uma vizinhança coordenada em p. Uma família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M. Denotaremos apenas por M^n uma variedade diferenciável M de dimensão n.*

Observação 1.2. (*a*) *M ser Hausdorff significa que quaisquer dois pontos de M têm vizinhanças disjuntas;* (*b*) *Dizemos que M possue base enumerável* *para sua topologia se M pode ser coberto por uma quantidade enumerável de vizinhaças coordenadas.*

Definição 1.2. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $\boldsymbol{y} : V \subset \mathbb{R}^n \to N$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ em p tal que $\varphi(\boldsymbol{x}(U)) \subset \boldsymbol{y}(V)$ e a aplicação $\boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ \ \boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $\boldsymbol{x}^{-1}(p)$. Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Decorre da condição (ii) da Definição 1.1 que a Definição 1.2 independe da escolha das parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Definição 1.3. *Um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis M e N é uma aplicação $\varphi : M \to N$ diferenciável com inversa diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \to V$ é um difeomorfismo.*

Definição 1.4. *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

(i) para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é não-orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição (i) é chamada uma orientação de M e M é, então, orientada. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem a condição (i) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição (i).

Definição 1.5. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left.\tfrac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0}$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p com as operações usuais de funções forma um espaço vetorial n-dimensional e será indicado por T_pM.

Escolhendo uma parametrização $\mathbf{x} : U \to M^n$ em $p = \mathbf{x}(0)$ as representantes locais da função f e da curva α nesta parametrização são respectivamente

$$\widetilde{f}(q) = f \circ \mathbf{x}(q),\ q = (x_1, \ldots, x_n) \in U$$

$$\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Restringindo f a α, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\widetilde{f}(x_1(t), \ldots, x_n(t))\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\right)_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)(\widetilde{f}). \end{aligned}$$

Logo, a expressão local de $\alpha'(0)$ em termos da parametrização $\mathbf{x}$ é:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0.$$

Note que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \in T_pM$, pois é o vetor tangente em p à curva coordenada $x_i \mapsto \mathbf{x}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$. O fato de $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ ser linearmente independente juntamente com a expressão local (o que mostra que gera), prova que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ forma uma base de T_pM chamada base coordenada. O espaço vetorial T_pM é chamado espaço tangente de M em p.

Proposição 1.1. *Seja $\varphi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. Esta aplicação é chamada diferencial de φ em p.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{x} : U \to M$ e $\mathbf{y} : V \to N$ parametrizações em p e $\varphi(p)$, respectivamente. A expressão local de φ é dada por:

$$\widetilde{\varphi}(q) = \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m))$$
$$q = (x_1, \ldots, x_m) \in U \text{ e } (y_1, \ldots, y_n) \in V$$

Por outro lado, a expressão local de α é dada por:

$$\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)).$$

Portanto,

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \beta(t) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\alpha}(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_m(t)), \ldots, y_n(x_1(t), \ldots, x_m(t))).$$

e assim a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$ de $T_{\varphi(p)}N$ é dada por:

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}\bigg|_q x_i'(0), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\bigg|_q x_i'(0) \right), \; q = \mathbf{x}^{-1}(p).$$

Isto mostra que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. E também podemos escrever

$$\begin{aligned} d\varphi_p(v) &= \beta'(0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}\Big|_q \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m}\Big|_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m}\Big|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \\ \vdots \\ x_n'(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pM em $T_{\varphi(p)}N$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é precisamente a matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

Definição 1.6 (Fibrado tangente)**.** *Seja M^n uma variedade diferenciável. O fibrado tangente de M é a união disjunta de todos os espaços tangentes. Formalmente,*

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

O conjunto TM definido acima tem uma estrutura diferenciável, ver por exemplo [5]. Agora faz sentido considerarmos a seguinte aplicação entre variedades diferenciáveis como segue. Seja $X : M \to TM$ uma aplicação diferenciável que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Para esclarecermos a diferenciabilidade de X no sentido da Definição 1.2, convém considerarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ para então escrevermos para cada $p \in \mathbf{x}(U)$,

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a $\mathbf{x}$, $i = 1, \ldots, n$. Isso permite afirmarmos que X é diferenciável se, e só se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e portanto para qualquer) parametrização. Assim podemos considerar X como um operador atuando nas funções $f \in C^\infty(M)$ do seguinte modo

$$(Xf)(p) = X(p)(f)\sum_{i=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p)$$

onde $\tilde{f} = f \circ \mathbf{x}^{-1}$ é a expressão local de f na parametrização $\mathbf{x}$. Sendo assim, X é diferenciável se $Xf \in C^\infty(M)$ para todo $f \in C^\infty(M)$. Vamos nos referir a aplicação X como um campo de vetores em M e denotaremos $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞.

Observação 1.3. *Cada campo de vetores é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear de $C^\infty(M)$ em $C^\infty(M)$ tal que $X(fg) = fXg + gXf$.*

Definição 1.7. *Sejam X e Y campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$. Definimos o colchete de Lie dos campos X e Y, denotado por $[X,Y]$ como*

$$[X,Y]f := X(Yf) - Y(Xf),\ \ f \in C^\infty(M)$$

Dado um sistema com coordenadas locais $(x_1,\ldots,x_n)$, temos que o colchete de Lie dos campos de vetores coordenados é:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0$$

Proposição 1.2. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M e sejam $X = \sum_{i=1} a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{j=1} b_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ as expressões de X e Y associadas a um sistema de coordenadas locais $x : U \to M$. Então $[X,Y]$ tem a seguinte expressão em coordenadas locais*

$$[X,Y] = \sum_{i,j}\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.1}$$

Demonstração. Para todo $f \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= \sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j b_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \sum_j b_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\\
&= \sum_{i,j} a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{i,j} b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\\
&\quad -\sum_{i,j} b_j a_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, segue que

$$\begin{aligned} [X,Y]f &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(f). \end{aligned}$$

Consequentemente $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

É imediato da definição acima as propriedade seguintes do colchete de Lie.

Proposição 1.3. *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$, então:*

(a) *Bilinearidade:*
$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$
$[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$

(b) *Anticomutatividade:*
$[X,Y] = -[Y,X]$

(c) *Identidade de Jacobi:*
$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

(d) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Definição 1.8. *Chamaremos de semi-espaço $\mathbb{H}^n$ ao conjunto dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0\}.$$

Um subconjunto aberto V no semi-espaço $\mathbb{H}^n$ tem a forma $V = U \cap \mathbb{H}^n$, onde U é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Diremos que uma função $f : V \to \mathbb{R}$, definida em um aberto V de $\mathbb{H}^n$ é diferenciável se existir uma função diferenciável $\overline{f} : U \to \mathbb{R}$ de um aberto $U \supset V$ de $\mathbb{R}^n$, tal que a restrição de $\overline{f}$ a V seja igual a f. Se f é diferenciável em V a diferencial df_p é definida por $df_p = d\overline{f}_p$.

Uma definição que generaliza a Definição 1.1 é a de variedade com bordo. Sua definição é praticamente a mesma das variedades sem bordo com a diferença que as parametrizações têm como domínios conjuntos abertos em semi-espaços do espaço Euclidiano, isto é:

Definição 1.9. *Uma variedade diferenciável de dimensão n com bordo é um conjunto M e uma família de aplicações $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{H}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{H}^n$ em M tais que* *(i)* $\bigcup_\alpha (U_\alpha) = M$;

(ii) *Para todo par* α, β, *com* $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, *os conjuntos* $f_\alpha^{-1}(W)$ *e* $f_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{H}^n$ *e as aplicações* $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ *e* $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ *são diferenciáveis.*

Definição 1.10. *Um ponto* $p \in M$ *é dito ponto de bordo de* M *se para um sistema de coordenadas* $f : U \to M$ *em torno de* p *se tem* $f(0, x_2, \ldots, x_n) = p$. *O conjunto dos pontos de bordo de* M*, é chamado o bordo de* M *e indicado por* ∂M.

Além disso, é possível provar que a definição de ponto de bordo independe do sistema de coordenadas e que o bordo de uma variedade diferenciável de dimensão n com $\partial M \neq \emptyset$ é uma variedade diferenciável (sem bordo) de dimensão $n-1$. Para mais detalhes consultar [6].

As definições de diferenciabilidade de funções, plano tangente, orientabilidade, etc., para variedades com bordo são introduzidas de maneira inteiramente análogaa às correspondentes definições para variedades diferenciáveis (sem bordo).

Definição 1.11. *Seja* M *uma variedade diferenciável. O suporte de uma função* $f : M \to \mathbb{R}$*, denotado por supp*(f)*, é o fecho do conjunto dos pontos onde* f *não se anula, isto é,*

$$supp(f) = \overline{\{p \in M; f(p) \neq 0\}}.$$

Se supp(f) *é compacto, dizemos que* f *tem suporte compacto.*

Diz-se que uma cobertura $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de uma variedade diferenciável M é localmente finita se qualquer ponto $p \in M$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos da cobertura $\mathcal{X}$. Em particular, p pertence somente a um número finito de conjuntos de $\mathcal{X}$.

Definição 1.12. *Seja* M *uma variedade diferenciável e* $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *uma cobertura aberta de* M*. Uma partição diferenciável da unidade com relação a* $\mathcal{X}$ *é uma família de funções diferenciáveis* $\{f_\alpha : M \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *tais que, para todo* $\alpha \in \mathcal{A}$,

1. $f_\alpha \geq 0, \forall p \in M$.

2. *supp* $(f_\alpha) \subset X_\alpha$.

3. *cada ponto* $p \in M$ *possui uma vizinhança na qual apenas um número finito de funções* f_α *são diferentes de* 0.

4. $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(p) = 1, \forall p \in M.$

Note que as condições 3 e 4 garantem que a coleção $\{supp\ (f_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é localmente finita. Costuma-se dizer que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade está subordinada à cobertura $\mathcal{X}$.

Teorema 1.1. *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se, e só se, toda componente conexa de M é de Haussdorff e tem base enumerável.*

Demonstração. ver [4]. □

1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.13. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ (uma forma bilinear, simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Considere um sistema de coordenadas locais $(U, \boldsymbol{x})$ e sejam $X, Y \in T_pM$. Temos que,*

$$X = \sum_i a_i \partial_i \quad e \quad Y = \sum_j b_j \partial_j\ ,$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Assim,

$$g(X,Y) \;=\; \langle X, Y\rangle = \langle \sum_i a_i \partial_i, \sum_j b_j \partial_j \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle \partial_i, \partial_j \rangle.$$

Portanto, dizer que a métrica varia diferenciavelmente é dizer que as funções coordenadas $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, dada por $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$, são funções diferenciáveis em U. Uma variedade diferenciável M com uma dada métrica Riemanniana g chama-se variedade Riemanniana (M, g).

Utilizando a partição da unidade podemos ver que toda variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana. De fato, seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade de M subordinada a cobertura $\{X_\alpha\}$ de M por vizinhanças coordenadas. Logo, podemos definir uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle_\alpha$ em cada X_α: a induzida pelo sistema de coordenadas. Façamos então

$$\langle u, v\rangle_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(p) \langle u, v\rangle_p^\alpha \tag{1.2}$$

para todo $p \in M, u, v \in T_pM$. A verificação da simetria, bilinearidade e diferenciabilidade são imediatas. Agora, se $u \in T_pM$ é um vetor não nulo, então $\langle u, u \rangle_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(p) \langle u, u \rangle_p^\alpha$ é uma soma não-negativa, pois cada termo é não-negativo e, além disso, como uma das funções f_α é estritamente positiva (pois a soma delas é 1), temos que $\langle u, u \rangle_p^\alpha > 0$ e, portanto, $\langle u, v \rangle_\alpha > 0$, o que mostra a positividade. Assim (1.2) define uma métrica Riemanniana.

Definição 1.14 (Isometria). *Um difeomorfismo $F : M \to N$ entre duas variedades diferenciáveis é uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle = \langle dF_p(u), dF_p(v) \rangle, \forall p \in M, u, v \in T_pM.$$

Definição 1.15 (Isometria Local). *Dizemos que a aplicação diferenciável $F : M \to N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $F : U \to F(U)$ é um difeomorfismo de acordo com a definição anterior.*

1.3 Conexão Riemanniana

Definição 1.16. *Uma conexão de Levi- Civita (ou Riemanniana) ∇ em uma variedade Riemanniana é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

definida por $\nabla(X, Y) := \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ *($C^\infty(M)$-linear na primeira variável)*

(2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ *($\mathbb{R}$-linear na segunda variável)*

(3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ *(regra de Leibniz)*

(4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ *(simetria)*

(5) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ *(compatibilidade com a métrica)*

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. $\nabla_X Y$ também é chamada de derivada covariante do campo Y em relação ao campo X.

Uma correspondência em uma variedade diferenciável que satisfaça as três primeiras propriedades é chamada conexão afim.

Observação 1.4. *Dados dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e um sistema de coordenadas locais $(U, \boldsymbol{x})$ em torno de um ponto $p \in M$, temos que $X = \sum_i a_i \partial_i$ e $Y = \sum_j b_j \partial_j$. Assim, utilizando as propriedades da conexão obtemos uma expressão para $\nabla_X Y$ da seguinte forma:*

$$\nabla_X Y = \sum_i a_i \nabla_{\partial_i}\Big(\sum_j b_j \partial_j\Big) = \sum_{i,j} a_i(\partial_i(b_j)\partial_j + b_j \nabla_{\partial_i}\partial_j).$$

Fazendo $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$, onde Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis em U, assim

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i,j} a_i\big(\partial_i(b_j)\partial_j + b_j \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k\big) = \sum_k \Big(\sum_i a_i \partial_i(b_k) + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k\Big)\partial_k \\ &= \sum_k (X(b_k) + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k)\partial_k. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\nabla_X Y$ depende de $a_i(p), b_k(p)$ e das derivadas $X(b_k)(p)$ de b_k segundo X. As funções Γ_{ij}^k são chamadas símbolos de Christoffel da conexão.

Teorema 1.2. *Em uma variedade Riemanniana (M, g) existe uma única conexão Riemanniana ∇.*

Demonstração. Provaremos inicialmente a unicidade. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Suponha que exista uma conexão Riemanniana ∇, utilizando a equação de compatibilidade três vezes com X, Y, Z permutando ciclicamente, obtemos:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

Usando a simetria de ∇ no último termo de cada uma das igualdades acima, podemos reescrevê-las como

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle \quad (1)$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle \quad (2)$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle \quad (3).$$

Somando (1) e (2) e subtraindo (3), obtemos:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle \\ &\quad + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ &\quad -\langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle. \end{aligned}$$

Esta fórmula é chamada fórmula de Koszul. Logo, se existem duas conexões ∇^1 e ∇^2, uma vez que na expressão acima o lado direito da igualdade depende só da métrica, não dependendo da conexão, segue que $\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z\rangle = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Como a métrica é uma forma bilinear não-degenerada, $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$, para todo X e Y e, portanto, $\nabla^1 = \nabla^2$. Para mostrar a existência, defina ∇ pela expressão acima. É imediato verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

Observação 1.5. *Em um sistema de coordenadas $(U, \boldsymbol{x})$, a conexão dos campos coordenados sempre comuta. De fato, temos para todo $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = [\partial_i, \partial_j] \overset{(1.1)}{=} 0. \tag{1.3}$$

E de acordo com a definição dos símbolos de Christoffel, isto equivale a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, o que justifica o nome simetria no item (4) da Definição 1.16. Além disso, aplicando a fórmula de koszul aos campos de vetores coordenados, os quais o colchete de Lie é zero, obtemos:

$$2\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\rangle = \partial_i\langle \partial_j, \partial_l\rangle + \partial_j\langle \partial_l, \partial_i\rangle - \partial_l\langle \partial_i, \partial_j\rangle.$$

Reescrevendo, temos

$$\sum_m \Gamma^m_{ij} g_{ml} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}),$$

onde $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle$ e $\displaystyle\sum_m \Gamma^m_{ij}\partial_m = \nabla_{\partial_i}\partial_j$. Como a matriz (g_{lk}) admite uma inversa (g^{lk}), multiplicando ambos os lados da igualdade acima, e observando que $\sum_l g_{ml}g^{lk} = \delta^k_m$, teremos que

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) g^{lk} \tag{1.4}$$

que é a expressão para os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em um sistema de coordenadas qualquer.

1.4 Tensores em Variedades Riemannianas

Relembremos que um $(1,r)$-tensor em uma variedade diferenciável M é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r-fatores)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Enquanto que, num $(0,r)$-tensor, o contradomínio é o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Além disso, dados $Y_1,\ldots,Y_r \in \mathfrak{X}(U)$, pede-se que $T(Y_1,\ldots,Y_r)$ seja uma função diferenciável em um aberto $U \subset M$ e T é $C^\infty(U)$-linear em cada variável, isto é,

$$T(Y_1,\ldots,fX+hY,\ldots,Y_r) = fT(Y_1,\ldots,X,\ldots,Y_r) + hT(Y_1,\ldots,Y,\ldots,Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $f, h \in C^\infty(U)$.

Definição 1.17. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $\partial_1,\ldots,\partial_n \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{\partial_i\}$, $i = 1,\ldots,n$, formam uma base de T_qM. Dizemos que $\{\partial_i\}$ é um referencial móvel. Se o conjunto de campos $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ forma uma base ortonormal de T_qM para cada $q \in U$, então dizemos que $\{\partial_i\}$, $i = 1,\ldots,n$, é um referencial ortonormal.*

Exemplo 1.1. *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o produto interno de X e Y na métrica Riemanniana de M, isto é, $g_p(X,Y) = \langle X, Y \rangle_p$. g é um $(0,2)$-tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Exemplo 1.2. *Toda k-forma diferencial ω em M é automaticamente um $(0,k)$-tensor em M.*

Observação 1.6. *Em uma variedade Riemanniana a métrica Riemanniana faz corresponder a cada campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma forma diferencial $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por*

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Neste sentido, um campo de vetores diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um tensor $X : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dado por

$$X(Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante a tensores como veremos na seguinte definição:

Definição 1.18. *A derivada covariante de um $(1,r)$-tensor T é um $(1,r+1)$-tensor ∇T dado por*

$$\begin{aligned} \nabla T(X,Y_1,\dots,Y_r) =& \nabla_X(T(Y_1,\dots,Y_r)) - T(\nabla_X Y_1,\dots,Y_r) \\ & -\dots - T(Y_1,\dots,\nabla_X Y_r) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1,\dots Y_r) := \nabla T(X,Y_1,\dots,Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0,r)$-tensor T é um $(0,r+1)$-tensor ∇T dado por (1.5).

Observação 1.7. *Dizemos que um tensor é paralelo quando $\nabla T \equiv 0$.*

Exemplo 1.3. *Em uma variedade Riemanniana (M,g) com a conexão de Levi-Civita ∇, temos que $\nabla g \equiv 0$. (A derivada covariante do tensor métrico é o tensor nulo). Com efeito, dados $Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(M)$, teremos*

$$\begin{aligned} \nabla g(X,Y_1,Y_2) &= (\nabla_X g)(Y_1,Y_2) \\ &= \nabla_X(g(Y_1,Y_2)) - g(\nabla_X Y_1,Y_2) - g(Y_1,\nabla_X Y_2) \\ &= g(\nabla_X Y_1,Y_2) + g(Y_1,\nabla_X Y_2) - g(\nabla_X Y_1,Y_2) - g(Y_1,\nabla_X Y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 1.4. *Seja $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$. Utilizando a Observação 1.6 a derivada covariante de ω_X em relação ao campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned} (\nabla_Z \omega_X)(Y) &= Z(\omega_X(Y)) - \omega_X(\nabla_Z Y) = Z\langle X,Y\rangle - \langle X,\nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_Z X,Y\rangle + \langle X,\nabla_Z Y\rangle - \langle X,\nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_Z X,Y\rangle = \langle \nabla X(Z),Y\rangle. \end{aligned}$$

Decorre daí que $\nabla_Z \omega_X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$, ou equivalentemente, $\nabla \omega_X$ pode ser identificado ao operador ∇X. Isto mostra que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivação covariante de campos (derivar um campo é o mesmo que derivar covariantemente o seu dual).

Definição 1.19. *Seja T um $(1,1)$-tensor. Define-se a derivada covariante de segunda ordem $\nabla^2 T = \nabla\nabla T$ como o $(1,3)$-tensor, dado por*

$$\nabla^2 T(X,Y,Z) = (\nabla_X \nabla_Y T)(Z) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(Z).$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla T(X,Y,Z) &= (\nabla_X \nabla T)(Y,Z) \\
&= \nabla_X \nabla T(Y,Z) - \nabla T(\nabla_X Y, Z) - \nabla T(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla_X (\nabla_Y T)(Z) - (\nabla_Y T)(\nabla_X Z) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(Z) \\
&= (\nabla_X \nabla_Y T)(Z) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(Z).
\end{aligned}$$

□

Para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante de segunda ordem $\nabla^2_{X,Y} T$ em relação a X, Y como um tensor de mesma ordem que T, dado por

$$\nabla^2_{X,Y} T(Z) := \nabla^2 T(X,Y,Z).$$

Seja $Z \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o $(1,1)$-tensor $\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Assim, para todo $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{X,Y} Z(W) &= \nabla\nabla Z(X,Y,W) \\
&= (\nabla_X \nabla_Y Z)(W) - (\nabla_{\nabla_X Y} Z)(W) \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{Y,X} Z(W) &= \nabla\nabla Z(Y,X,W) \\
&= (\nabla_Y \nabla_X Z)(W) - (\nabla_{\nabla_Y X} Z)(W) \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Subtraindo (1.7) de (1.6) obtemos

$$\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

O que motiva a seguinte definição.

Definição 1.20. *Seja M uma variedade riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Exemplo 1.5. *Seja* $M = \mathbb{R}^n$*, então* $R(X,Y)Z = 0$ *para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*. De fato, seja* $Z = (z_1, \ldots, z_n)$*, então* $\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n)$ *e* $\nabla_Y Z = (Yz_1, \ldots, Yz_n)$*. Logo,*

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \ldots, XYz_n), \quad \nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, \ldots, [X,Y]z_n).$$

Portanto, $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$*.*

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$-tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dado por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle$$

Proposição 1.4. *o tensor curvatura de Riemann* $R(X,Y,Z,W)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z)$

(2) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

(3) $R(X,Y)Z + +R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi)*

Demonstração. a primeira parte de (1) segue diretamente da definição de R. Para provarmos a segunda parte, note que a segunda igualdade é equivalente a $\langle R(X,Y)Z, Z \rangle = 0$, o que provaremos a seguir:

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z, Z \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z \rangle \\
&= X\langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y\langle \nabla_X Z, Z \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z \rangle \\
&= \frac{1}{2}X(Y\langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2}Y(X\langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z \rangle \\
&= \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z \rangle = 0
\end{aligned}$$

Para provarmos (3) usamos a simetria da conexão e a identidade de Jacobi para campos de vetores como segue:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y &= \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\\
&\quad+\nabla_Y\nabla_Z X-\nabla_Z\nabla_Y X-\nabla_{[Y,Z]}X\\
&\quad+\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y)\\
&\quad+\nabla_Y(\nabla_Z X-\nabla_X Z)\\
&\quad+\nabla_Z(\nabla_X Y-\nabla_Y X)\\
&\quad-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla_{[Y,Z]}X-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&= \nabla_X[Y,Z]+\nabla_Y[Z,X]+\nabla_Z[X,Y]\\
&\quad-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla_{[Y,Z]}X-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&= [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\\
&= 0
\end{aligned}$$

O item (2) é uma consequência puramente algébrica de (1) e (3):

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) &= -R(Y,Z,X,W)-R(Z,X,Y,W)\\
&= R(Y,Z,W,X)+R(Z,X,W,Y)\\
&= -R(Z,W,Y,X)-R(W,Y,Z,X)\\
&\quad-R(X,W,Z,Y)-R(W,Z,X,Y)\\
&= 2R(Z,W,X,Y)+R(W,Y,X,Z)+R(X,W,Y,Z)\\
&= 2R(Z,W,X,Y)-R(Y,X,W,Z).
\end{aligned}$$

Assim, $R(Z,W,X,Y)=R(Y,X,W,Z)$. □

A partir do tensor curvatura definiremos os seguintes entes geométricos:

Definição 1.21. *A curvatura seccional $K(x,y)$ segundo $\sigma\subset T_pM$ (subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM), onde $x,y\in\sigma$ são vetores linearmente independentes, é definida por:*

$$K(x,y)=\frac{\langle R(x,y)y,x\rangle}{|x\wedge y|^2}$$

onde $|x\wedge y|^2=|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2$.

Segue-se da Álgebra linear que esta definição não depende da escolha dos vetores $x,y\in\sigma$. Além disso, note que, se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, temos

$$K(e_i,e_j)=\langle R(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle=R(e_i,e_j,e_j,e_i)$$

Definição 1.22. *Definimos o tensor curvatura de Ricci como o traço do tensor curvatura de Riemann. Se $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM$ é uma base ortonormal, então*

$$Ric(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, v)w, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, w)v, e_i \rangle,$$

onde a última igualdade segue da Proposição 1.4.

1.5 Operadores Diferenciais

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais (gradiente, laplaciano, etc.) de uso frequente no $\mathbb{R}^n$. Passaremos a uma exposição de alguns destes operadores. Em tudo que segue, $(M, \langle , \rangle)$ denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica $\langle , \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇.

Definição 1.23. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f) = df \tag{1.8}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Então, pela definição de gradiente, teremos em U

$$\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, e_i \rangle e_i = \sum_i e_i(f) e_i.$$

Isto é,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i. \tag{1.9}$$

Mais geralmente, se $\partial_i, \ldots, \partial_j$ são campos coordenados em U, teremos

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \partial_j(f) \partial_i, \tag{1.10}$$

onde $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}). Além disso, é imediato das propriedades de derivação o resultado seguinte:

Proposição 1.5. *Se $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então:*

(*i*) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

(*ii*) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

Definição 1.24. *Seja X um campo de vetores suave em M. A divergência de X é a função diferenciável $divX : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$(divX)(p) = tr\{v \in T_pM \mapsto \nabla_v X\}, \tag{1.11}$$

onde tr denota o traço do operador linear $v \in T_pM \mapsto \nabla_v X$.

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Proposição 1.6. *Seja X um campo diferenciável em M e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então*

$$(divX)(p) = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle). \tag{1.12}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, temos que

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i) \tag{1.13}$$

Demonstração. Pela definição de divergência de um campo vetorial, obtemos

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}(e_i\langle X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(e_i\langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_i\rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle) = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.7. *Se X, Y são campos vetoriais suaves em M e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

(*i*) $div(X + Y) = divX + divY$

(*ii*) $div(fg) = fdivX + \langle \nabla f, X\rangle$

Demonstração.

$$\begin{aligned} div(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}(X+Y),e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X+\nabla_{e_i}Y,e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\langle\nabla_{e_i}X,e_i\rangle+\langle\nabla_{e_i}Y,e_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X,e_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}Y,e_i\rangle \\ &= divX+divY \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} div(fX) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}(fX),e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle f\nabla_{e_i}X+e_i(f)X,e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\langle f\nabla_{e_i}X,e_i\rangle+\langle e_i(f)Xe_i,X\rangle) \\ &= f\sum_{i=1}^{n}(\langle\nabla_{e_i}X,e_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle e_i(f)Xe_i,X\rangle \\ &= fdivX+\langle\nabla f,X\rangle \end{aligned}$$

□

Definição 1.25. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f) \tag{1.14}$$

Proposição 1.8. *Dadas $f, g : M \to \mathbb{R}$ funções suaves, tem-se*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle\nabla f,\nabla g\rangle \tag{1.15}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= div(\nabla(fg)) = div(g\nabla f)+div(f\nabla g) \\ &= g\ div(\nabla f)+\langle\nabla g,\nabla f\rangle+f\ div(\nabla g)+\langle\nabla f,\nabla g\rangle \\ &= g\Delta f+f\Delta g+2\langle\nabla f,\nabla g\rangle \end{aligned}$$

□

Definição 1.26. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$(Hessf)(X) = \nabla_X\nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.16}$$

Ou como $(0,2)$-tensor, dado por

$$Hessf(X,Y) = \langle\nabla_X\nabla f,Y\rangle \tag{1.17}$$

Proposição 1.9. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave então $(Hessf) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é um tensor simétrico.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle (Hessf)(X), Y \rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Analogamente,

$$\langle (Hessf)(Y), X \rangle = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f). \tag{1.19}$$

Subtraindo (1.19) de (1.18) obtemos

$$\langle (Hessf)(X), Y \rangle = \langle (Hessf)(Y), X \rangle.$$

□

Proposição 1.10. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(Hessf) \tag{1.20}$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e considere $U \subset M$ uma vizinhança coordenada de p onde esteja definido um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$tr(Hessf)_p = \sum_{i=1}^{n} \langle (Hessf)_p(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = div(\nabla f)(p) = \Delta f(p)$$

□

Observação 1.8. *Relembremos que o produto interno de Hilbert-Schmidt entre os $(0,2)$-tensores T e S é dado por*

$$\langle T, S \rangle = tr(TS^*) \tag{1.21}$$

onde estamos identificando os $(0,2)$-tensores T e S com seus respectivos $(1,1)$-tensores, dados por

$$T(X,Y) = \langle T(X), Y \rangle \ \text{ e } \ S(X,Y) = \langle S(X), Y \rangle.$$

Desta forma, temos $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $S : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Além disso, $S^* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\langle S(X), Y \rangle = \langle X, S^*(Y) \rangle$.

Em particular, para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T(e_i, e_j) = \langle Te_i, e_j\rangle$, logo podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle T, S\rangle &= \sum_i \langle TS^*(e_i), e_i\rangle = \sum_i \langle S^*(e_i), T^* e_i\rangle \\
&= \sum_i \Big\langle \sum_j \langle S^* e_i, e_j\rangle e_j, \sum_k \langle T^*(e_i), e_k\rangle e_k \Big\rangle \\
&= \sum_i \Big\langle \sum_j \langle e_i, Se_j\rangle e_j, \sum_k \langle e_i, T(e_k)\rangle e_k \Big\rangle = \sum_{i,j} \langle e_i, Se_j\rangle\langle e_i, Te_j\rangle \\
&= \sum_j \big\langle \sum_i \langle e_i, Te_j\rangle e_i, Se_j \big\rangle = \sum_j \langle Te_j, Se_j\rangle.
\end{aligned}$$

Por exemplo, sendo S o tensor métrico g, teremos $\langle T, g\rangle = tr(T)$ e sendo $S = T$, teremos $|T|^2 = \sum_i |Te_i|^2$.

Exemplo 1.6. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional. Definimos*

$$\mathring{T} := T - \frac{tr(T)}{n} g.$$

Então

$$0 \le |\mathring{T}|^2 = \left| T - \frac{tr(T)}{n} g \right|^2 = |T|^2 - \frac{tr(T)^2}{n}.$$

Assim,

$$|T|^2 \ge \frac{tr(T)^2}{n},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se,

$$T = \frac{tr(T)}{n} g.$$

Em particular, se $T = Hessf$, temos

$$|Hessf|^2 \ge \frac{(\Delta f)^2}{n}. \tag{1.22}$$

Teorema 1.3 (Fórmula de Bochner)**.** *Se M^n é uma variedade Riemanniana e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |Hessf|^2 \tag{1.23}$$

Demonstração. Fixado $p \in M$ seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$ de p, geodésico em p. Então temos em p

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle Hess|\nabla f|^2(e_i), (e_i)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i(e_i\langle \nabla f, \nabla f\rangle) = \sum_{i=1}^{n} e_i\langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle).
\end{aligned}$$

Pela definição da norma de Hilbert-Schmidt, temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + |Hessf|^2. \tag{1.24}$$

Agora para $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle = \langle \nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f - \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle. \tag{1.25}$$

Como o referencial é geodésico em p, temos que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$, daí

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle = X(\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle) = X(\Delta f) = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle. \tag{1.26}$$

Agora vamos analisar a parcela $P := \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f, e_i\rangle + \langle \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle)$.

Para isso, vamos novamente utilizar que o referencial é geodésico em p, juntamente com o fato de $Hessf$ ser um operador linear auto-adjunto, para obtermos

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{i=1}^{n}(e_i\langle \nabla_X\nabla f, e_i\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, [X, e_i]\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i\langle \nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_X e_i - \nabla_{e_i}X\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}X\rangle - \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}X\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Somando (1.25) e substituindo (1.26) e (1.27) em (1.25), segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,e_i)\nabla f, e_i\rangle = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,e_i)\nabla f, e_i\rangle + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(X,e_i)e_i, \nabla f\rangle + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle\\ &= Ric(X,\nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle.\end{aligned}$$

Basta agora fazer $X = \nabla f$ na última relação acima substituindo o resultado em (1.24), que obtemos a fórmula desejada. $\square$

Capítulo 2

Imersões Isométricas

Definição 2.1. *Sejam M^n e $\widetilde{M}^{n+m}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to \widetilde{M}$ é uma imersão se a diferencial $d\varphi_p$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamado a codimensão de φ. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset \widetilde{M}$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por $\widetilde{M}$, diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset \widetilde{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de $\widetilde{M}$. Neste caso, chamamos $\widetilde{M}$ de variedade ambiente.*

Observação 2.1. *O caso particular em que a codimensão da imersão é 1, $\varphi(M)$ é denominada uma hipersuperfície.*

Definição 2.2. *Uma imersão $\varphi : M^n \to \widetilde{M}^{n+m}$ entre duas variedades Riemannianas com as métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widetilde{M}}$, respectivamente, é chamada imersão isométrica (ou Riemanniana) se*

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y) \rangle_{\widetilde{M}}$$

para todo ponto $p \in M$ e todo par $X, Y \in T_pM$.

Seja $\varphi : M^n \to \widetilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de φ a U é um mergulho sobre $\varphi(U)$, ver por exemplo [5]. Assim podemos identificar U com sua imagem $\varphi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM, q \in U$ com $d\varphi_q(v) \in T_{\varphi(q)}\widetilde{M}$. Com esta identificação o espaço tangente de M em p se torna um subespaço do espaço tangente de $\widetilde{M}$ em p. Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\widetilde{M}$ o decompõe na soma direta

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$$

onde $T_pM^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\widetilde{M}$. Sendo assim, podemos coinsiderar as seguintes projeções:

$$(\ )^\top : T_p\widetilde{M} \longmapsto T_pM \ \text{ e } \ (\ )^\perp : T_p\widetilde{M} \longmapsto (T_pM)^\perp$$

Seja $\widetilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\widetilde{M}^{n+m}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ são extensões locais a $\widetilde{M}$ temos que

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top} + (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\perp}. \tag{2.1}$$

Além disso, $(\widetilde{\nabla})^{\top}$ é a conexão de Levi-Civita de M. Com efeito, sejam $U \subset M$ e $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ extensões locais dos campos X, Y, Z a $\widetilde{M}$. Definimos $D : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ por $D_X Y := (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top}$. Assim,

(i) D independe das extensões, pois $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ em $p \in U \subset M$ só depende de $\widetilde{X}(p) = X(p)$ e dos valores de $\widetilde{Y}$ ao longo de alguma curva tangente a $\widetilde{X}(p) = X(p)$ (podemos tomar a curva contida em $U \subset M$ onde $\widetilde{Y} = Y$).

(ii)

$$\begin{aligned} D_{fX+gY}Z &= (\widetilde{\nabla}_{f\widetilde{X}+g\widetilde{Y}}\widetilde{Z})^{\top} = (f\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} + g\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z})^{\top} \\ &= f(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})^{\top} + g(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z})^{\top} = fD_X Z + gD_Y Z \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} D_X(Y+Z) &= (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}(\widetilde{Y}+\widetilde{Z}))^{\top} = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})^{\top} \\ &= (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top} + (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})^{\top} = D_X Y + D_X Z \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} D_X(fY) &= (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}(f\widetilde{Y}))^{\top} = (f\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \widetilde{X}(f)\widetilde{Y})^{\top} \\ &= f(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top} + (\widetilde{X}(f)\widetilde{Y})^{\top} = fD_X Y + X(f)Y \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \widetilde{X}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\rangle + \langle \widetilde{Y}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}\rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, Z\rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}\rangle = \langle (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top}, Z\rangle + \langle Y, (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})^{\top}\rangle \\ &= \langle (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top}, \widetilde{Z}\rangle + \langle \widetilde{Y}, (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})^{\top}\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\top} - (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^{\top} = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^{\top} \\ &= [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^{\top} \overset{(1.1)}{=} [X, Y]. \end{aligned}$$

E pela unicidade da conexão de Levi-Civita provamos o resultado.

Denotaremos a conexão de Levi-Civita de M por ∇. Portanto, reescrevendo (2.1), obtemos

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \nabla_X Y + (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\perp}. \tag{2.2}$$

Para o que segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos de vetores (diferenciáveis em U) normais aos campos tangentes diferenciáveis em U.

Definição 2.3. *Seja $\varphi : M^n \to \widetilde{M}^{n+m}$ uuma imersão isométrica. A aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ definida por*

$$\alpha(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\perp} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y \tag{2.3}$$

é chamada a segunda forma fundamental de φ.

Proposição 2.1. *A aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ definida acima é simétrica e bilinear sobre $C^{\infty}(U)$, isto é,*

(i) $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$

(ii) $\alpha(X+Y,Z) = \alpha(X,Z) + \alpha(Y,Z)$

(iii) $\alpha(fX,Y) = f\alpha(X,Y)$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ e $f \in C^{\infty}(U)$.

Demonstração. ver [5] □

Em particular, escrevendo $\alpha(X,Y)$ em coordenadas locais ver [5], para cada $p \in M$ a aplicação $\alpha_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^{\perp}$ dada por $\alpha_p(X,Y) = \alpha(X,Y)(p)$ depende somente dos valores de X e Y em p. A igualdade

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \tag{2.4}$$

é conhecida como a fórmula de Gauss.

Agora seja $\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$. Para cada $\nu_i, i = 1, \ldots, k$ defina a aplicação $\mathcal{A}_{\nu_i} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$\mathcal{A}_{\nu_i} X = -(\widetilde{\nabla}_X \nu_i)^{\top}.$$

Observe que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} 0 = X\langle \nu_i, Y\rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_X \nu_i, Y\rangle + \langle \nu_i, \widetilde{\nabla}_X Y\rangle = \langle (\widetilde{\nabla}_X \nu_i)^{\top}, Y\rangle + \langle \nu_i, \alpha(X,Y)\rangle \\ &= -\langle \mathcal{A}_{\nu_i} X, Y\rangle + \langle \alpha(X,Y), \nu_i\rangle. \end{aligned}$$

Assim,
$$\langle \mathcal{A}_{\nu_i} X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \nu_i\rangle. \tag{2.5}$$
Em particular, podemos definir $\mathcal{A}_{\nu_i}$ como sendo um $(0,2)$-tensor em $\mathfrak{X}(M)$, da seguinte maneira: $\mathcal{A}_{\nu_i}(X,Y) := \langle \mathcal{A}_{\nu_i} X, Y\rangle$, o qual é simétrico, isto é, $\langle \mathcal{A}_{\nu_i} X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{A}_{\nu_i} Y\rangle$ e linear sobre $C^\infty(M)$. A aplicação $\mathcal{A}_{\nu_i}$ é chamada de *operador de Weingerten* ou *operador de forma.*

Um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}\}$ em uma vizinhança $V \subset \widetilde{M}$ de p é dito adaptado à imersão φ quando restritos a M os vetores $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a M e os vetores $e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}$ são normais a M ao longo de $U = V \cap \widetilde{M}$.

De acordo com a equação (2.5) e do fato do operador $\mathcal{A}_{\nu_i}$ ser simétrico, convém considerarmos o traço do operador $\mathcal{A}_{\nu_i}$, para isso vamos definir o vetor curvatura média $\mathbf{H}$ da imersão φ como
$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha(e_j, e_j)$$
onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em T_pM. Segue que $\mathbf{H}$ não depende do referencial escolhido. Ademais, consideremos $\{\nu_i\}$, $i = n+1, \ldots, k$, um referencial ortonormal em $T_pM^\perp$ para deduzirmos que
$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha(e_j, e_j) = \frac{1}{n}\sum_{j}^{n}\sum_{i}^{k}\langle \alpha(e_j, e_j), \nu_i\rangle \nu_i\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n}\langle \mathcal{A}_{\nu_i} e_j, e_j\rangle \nu_i = \frac{1}{n}\sum_{i}^{k} tr(\mathcal{A}_{\nu_i})\nu_i.\end{aligned}$$

Definição 2.4. *Dizemos que uma imersão isométrica φ é mínima em $p \in M$ quando $\boldsymbol{H}(p) = 0$ e que φ é uma imersão mínima quando é mínima em todos os pontos de M.*

Quando a codimensão da imersão φ é 1, com ν normal a M, basta estudarmos a função curvatura média de φ que definiremos por
$$H = \frac{1}{n} tr \mathcal{A}_\nu.$$
Neste caso, segue que $\mathbf{H} = H\nu$.

Para o que segue, ∇, Δ e $Hess$ denotarão o gradiente, o laplaciano e o Hessiano calculados na métrica de M, enquanto que $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Delta}$ e $\widetilde{Hess}$ os respectivos entes calculados na métrica de $\widetilde{M}$.

Lema 2.1. *Seja $\varphi : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $f : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então em cada $p \in M$*

(i) $\widetilde{\nabla} f = \nabla f + f_\nu \nu$;

(ii) $\frac{1}{2}\langle \widetilde{\nabla} |\widetilde{\nabla} f|^2, \nu\rangle = \widetilde{Hess} f(\nu, \widetilde{\nabla} f)$;

(iii) $\widetilde{\Delta} f = \Delta f - nHf_\nu + \widetilde{Hess} f(\nu, \nu)$,

onde ν é um campo de vetores unitários normais a M em uma vizinhança de p e $\boldsymbol{H} = H\nu$ é o vetor curvatura média da imersão φ.

Demonstração. Denotaremos por ∇ e $\widetilde{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civita de M e $\widetilde{M}$ e por α a segunda forma fundamental de φ. Se $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = \nu\}$ é um referencial adaptado a M, temos para todo $p \in M$

$$\widetilde{\nabla} f = \sum_{i=1}^{n+1} e_i(f) e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i + \nu(f)\nu = \nabla f + f_\nu \nu,$$

o que prova o primeiro item. Para provarmos o segundo, notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle \widetilde{\nabla} |\widetilde{\nabla} f|^2, \nu\rangle &= \frac{1}{2}\langle \sum_{i=1}^{n+1} e_i(|\widetilde{\nabla} f|^2) e_i, \nu\rangle = \frac{1}{2}\nu(|\widetilde{\nabla} f|^2) \\
&= \frac{1}{2}\nu\langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f\rangle = \langle \widetilde{\nabla}\nu \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f\rangle = \widetilde{Hess} f(\nu, \widetilde{\nabla} f).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta} f &= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i(e_i(f)) - (\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i)(f)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - (\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i)(f)\} + \nu(\nu(f)) - (\widetilde{\nabla}_\nu \nu)(f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i} e_i(f) - \alpha(e_i, e_i)(f)\} + \widetilde{Hess} f(\nu, \nu) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i} e_i(f)\} - \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i)(f) + \widetilde{Hess} f(\nu, \nu) \\
&= \Delta f - n\mathbf{H}(f) + \widetilde{Hess} f(\nu, \nu) \\
&= \Delta f - nHf_\nu + \widetilde{Hess} f(\nu, \nu).
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2. *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta M^n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Então existe um ponto $q_0 \in M^n$ e um vetor normal $\nu \in T_{q_0}M$ tais que $\mathcal{A}_\nu(q_0)$ é positivo definido.*

Demonstração. Seja $h : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, dada por

$$h(p) = \frac{1}{2}||\vec{p}||^2.$$

Como M é compacta, a função h assume seu valor máximo em algum ponto $q_0 \in M$ e assim,

$$0 = X(h)(q_0) = \langle \widetilde{\nabla}_X \vec{q_0}, \vec{q_0} \rangle = \langle X(q_0), \vec{q_0} \rangle, \quad \forall X \in T_{q_0}M,$$

ou seja, o vetor posição $\vec{q_0}$ é normal M em q_0. Além disso,

$$0 \geq XX(h)(q_0) = \langle \widetilde{\nabla}_X X, \vec{q_0} \rangle + ||X(q_0)||^2 = \langle \alpha(X,X), \vec{q_0} \rangle + ||X(q_0)||^2.$$

Então para $\nu = -\vec{q_0}$, temos

$$\langle \mathcal{A}_\nu X, X \rangle \geq ||X||^2, \quad \forall X \in T_{q_0}M.$$

$\square$

Observação 2.2. *Seja N uma variedade Riemanniana orientável. A forma diferencial w de grau $n = dimN$ definida em cada ponto $p \in N$ por*

$$w_p(v_1, \dots, v_n) = det(\langle v_i, e_j \rangle) = \textit{ volume orientado } \{v_1, \dots, v_n\}$$

onde $v_i \in T_pN$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal positiva de T_pN é chamada o elemento de volume (ou forma volume) de N, o qual também denotaremos por dN. É imediato que w está bem definida, isto é, $w_p(v_1, \dots, v_n)$ não depende da base ortonormal positiva escolhida.

Suponha agora que N é uma variedade com bordo $\partial N = M$. Denotamos por ν o campo unitário normal exterior a N ao longo de M. A orientação de N induz uma orientação em M como segue: dado $p \in M$ e dada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \subset T_pM$, dizemos que β é positiva se $\{\nu, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base positiva de T_pN.

Definição 2.5. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. O produto interior de uma k-forma ω na direção de X é a $(k-1)$-forma $\iota_X\omega$ definida através da seguinte regra:*

$$(\iota_X\omega)_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega_p(X_p, v_1, \dots, v_{k-1}) \tag{2.6}$$

para todos $p \in M$ e $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_pM$. Também denotamos $\iota_X\omega$ por $X \lrcorner \omega$.

Por exemplo, se w é a forma volume de N e ν o normal unitário exterior a N ao longo de ∂N, segue da Observação 2.2 que $\nu \lrcorner w$ é a forma volume de ∂N induzida por N.

Proposição 2.3. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada, com elemento de volume dM. Então*

$$d(X \lrcorner dM) = (divX)dM \tag{2.7}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$

Demonstração. ver [6] □

Precisaremos da seguinte versão do teorema da divergência:

Teorema 2.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzidas por M e ν denota o normal unitário exterior a M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M (divX)dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M)$$

Demonstração. Segue da Proposição 2.3 e do teorema de Stokes [13], que

$$\begin{aligned} \int_M divX\ dM &= \int_M d(X \lrcorner dM) = \int_{\partial M} X \lrcorner dM = \int_{\partial M} (X^\top + X^\perp) \lrcorner dM \\ &= \int_{\partial M} (\langle X, \nu \rangle \nu) \lrcorner dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \nu \lrcorner dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle\ d(\partial M). \end{aligned}$$

□

Note que no caso de ν ser o normal unitário interior a M ao longo de ∂M, o segundo membro da igualdade no Teorema 2.1 muda de sinal.

As fórmulas da proposição a seguir são conhecidas como as *identidades de Green.*

Proposição 2.4. *Sejam $f, g : M \to \mathbb{R}$ funções suaves e ν o campo de vetores normais unitários exterior a M ao longo de ∂M, então:*

(a) (Primeira identidade de Green)

$$\int_M g\Delta f dM = -\int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle dM + \int_{\partial M} g\frac{\partial f}{\partial \nu} d(\partial M) \tag{2.8}$$

(b) (Segunda identidade de Green)

$$\int_M (g\Delta f - f\Delta g)dM = \int_{\partial M} (g\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\frac{\partial g}{\partial \nu})d(\partial M). \tag{2.9}$$

Demonstração. Para o item (a) aplicamos o teorema da divergência ao campo $X = g\nabla f$. O item (b) segue agora imediatamente de (a), trocando g por f em (a) e subtraindo membro a membro as duas indentidades assim obtidas. $\square$

Capítulo 3

Método de Perron

Neste capítulo apresentaremos um resultado importante: a existência e unicidade de solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson.

3.1 Método de Perron

Definição 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio (aberto e conexo) e $u \in C^2(\Omega)$. A equação homogênea*

$$\Delta u = 0$$

onde Δ é o operador laplaciano, é chamada equação de Laplace.

A equação de Laplace não-homogênea é chamada equação de Poisson:

$$\Delta u = f$$

onde f está no conjunto das funções contínuas em Ω, cuja notação clássica é $C^0(\Omega)$.

Definição 3.2. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω se satisfaz a equação*

$$\Delta u = 0$$

- *Se $\Delta u(x) \geq 0$ em Ω, dizemos que u é subharmônica.*
- *Se $\Delta u(x) \leq 0$ em Ω, dizemos que u é superharmônica.*

Agora vamos generalizar o conceito de função subharmônica e superharmônica para o caso em que $u \in C^0(\Omega)$.

Definição 3.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Uma função $u \in C^0(\Omega)$ será dita subharmônica (respectivamente superharmônica) em Ω, se para toda bola*

$B \subset\subset \Omega$ (isto é, o fecho de B é compacto e está contido em Ω) e toda função harmônica h em B, satisfazendo $u \leq h (u \geq h)$ em ∂B, tivermos também $u \leq h (u \geq h)$ em B.

Citaremos agora um problema relacionado com a equação de Laplace.

Problema de Dirichlet para a equação de Laplace: Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $g \in C^0(\partial\Omega)$, o problema consiste em encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definimos também o problema de Dirichlet para a equação de Poisson de maneira análoga: Dada uma função $f \in C^0(\Omega)$ e uma função $g \in C^0(\partial\Omega)$, o problema consiste em encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaça

$$(P) \begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 3.1 (Propriedade da Média)**.** *Seja $u \in C^2(\Omega)$ harmônica. Então para toda bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$ vale*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y \tag{3.1}$$

ou equivalentemente

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy \tag{3.2}$$

onde ω_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Defina a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(r) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um aberto tal que $x + rz \in \Omega \quad \forall z \in \partial B(0,1)$ e $r \in I$. Inicialmente vamos mostrar que φ não depende do raio r, para isso será conveniente calcular φ'. Ora, lembrando que $\partial B(0,1) = \{z \in \mathbb{R}^n; |z| = 1\}$, considere a seguinte a aplicação:

$$\begin{aligned} h :\ \partial B(0,1) &\longrightarrow \partial B(x,r) \\ z &\longmapsto x + rz = y \end{aligned}$$

Observe que $dh = rId_{\partial B(0,1)}$. Logo, h é um difeomorfismo com jacobiano igual a r^{n-1} e $\partial B(x,r) = h(\partial B(0,1))$. Utilizando o teorema de mudança de variáveis para integrais temos:

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y = \int_{h(\partial B(0,1))} u(y)\, dS_y = \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) r^{n-1}\, dS_z.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) r^{n-1}\, dS_z \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS_z.\end{aligned}$$

Derivando com respeito a r, temos pelo teorema da convergência dominada e pela regra da cadeia,

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\, dS_z.$$

Analogamente ao que fizemos na definição de h podemos retornar ao $\partial B(x,r)$ para escrever

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y-x}{r}\right)\, dS_y.$$

Agora vamos notar que o normal exterior unitário no ponto $y \in \partial B(x,r)$ é exatamente $\nu = \frac{y-x}{r}$. Então, pelo teorema da divergência

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \nu dS_y = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0. \quad (3.3)$$

Donde $\varphi(r) = cte$, $\forall B(x,r) \subset\subset \Omega$. Assim,

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x+tz)\, dS_z \\ &= \frac{1}{n\omega_n} u(x) \int_{\partial B(0,1)} dS_z = \frac{1}{n\omega_n} u(x) n\omega_n = u(x).\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares, teremos

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} u(y)\, dy &= \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u(y)\, dS_y\, ds = \int_0^r \varphi(s) n\omega_n s^{n-1}\, ds \\ &= \int_0^r u(x) n\omega_n s^{n-1}\, ds = u(x) n\omega_n \frac{r^n}{n} = u(x)\omega_n r^n.\end{aligned}$$

Isto é,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

$\square$

Observação 3.1. *Para o caso de funções $u \in C^2(\Omega)$ subharmônicas (superharmônicas), a propriedade da média é descrita como segue: para toda bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$ vale*

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y$$

ou equivalentemente

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

De fato, basta considerar a equação (3.3), um argumento de monotonicidade e continuidade para obtermos as devidas desigualdades nas equações anteriores.

Teorema 3.2. *Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz a propriedade da média em Ω, então u é harmônica.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que u satisfaça a propriedade da média em Ω mas não seja harmônica. Então existe $x \in \Omega$ tal que $\Delta u(x) \neq 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\Delta u(x) > 0$. Como $u \in C^2(\Omega)$, o laplaciano de u é uma função contínua. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset\subset \Omega$ e $\Delta u(x) > 0$ em $B(x,r)$. De acordo com o Teorema 3.1,

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y = u(x)$$

e pela equação (3.3)

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy > 0,$$

o que é absurdo. Portanto, $\Delta u = 0$. $\square$

Teorema 3.3. *Princípio do Máximo (Mínimo) Forte. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma função subharmônica (superharmônica) em Ω e suponha que exista $y \in \Omega$ tal que*

$$u(y) = \sup_{\Omega} u \; (\inf_{\Omega} u).$$

Então u é contante. Consequentemente uma função harmônica não pode assumir valor máximo (ou mínimo) em um ponto do interior de Ω, a menos que ela seja constante.

Demonstração. Provaremos o teorema para u subharmônica. A prova para funções superharmônicas é análoga. Considere o conjunto

$$\Phi = \{x \in \Omega : u(x) = \sup_{\Omega} u = A\}.$$

Temos que $\Phi \neq 0$, pois $y \in \Phi$. Além disso, Φ é fechado em Ω, pois $\Phi = u^{-1}(\{A\})$. Ademais, Φ é aberto em Ω. Com efeito, seja $x_0 \in \Phi$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. Então,

$$\begin{aligned} A &= u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)\, dy \leq \frac{A}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} dy \\ &= \frac{A r^n}{\omega_n r^n} \int_{B_1(x_0)} dy = A. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy = A \Rightarrow \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} (u(y) - A)dy = 0.$$

Mas $u(y) - A \leq 0, \forall y \in B_r(x_0)$. Logo, $u \equiv A$ em $B_r(x_0)$ e, portanto, $B_r(x_0) \subset \Phi$. Consequentemente, $\Phi \neq \emptyset$ é aberto e fechado no conjunto conexo Ω, donde $\Phi = \Omega$, ou seja, $u = cte$. □

Teorema 3.4. *Princípio do Máximo (Mínimo) Fraco. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma função subharmônica (superharmônica) em Ω. Então desde que Ω seja limitado, temos*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u),$$

consequentemente, segue que

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u, \ \textit{para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração. Segue imediatamente do princípio do máximo (mínimo) forte, uma vez que, sendo Ω limitado teremos $\overline{\Omega}$ compacto e portanto $u \in C^0(\overline{\Omega})$ atinge um máximo e um mínimo, os quais devem ser atingidos no $\partial\Omega$, a menos que u seja constante. □

Teorema 3.5. *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta u = \Delta v$ em Ω um domínio limitado e $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u = v$ em Ω.*

Demonstração. Defina $w = u - v$. Assim, temos

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \;\; w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Pelo teorema anterior,

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w(x) \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w(x) = 0, \; x \in \Omega.$$

Isto é, $u = v$ em Ω. □

Corolário 3.1 (Unicidade do Problema de Dirichlet)**.** *Sejam $g \in C^0(\partial\Omega)$ e $f \in C^0(\Omega)$. Se existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ do problema*

$$(\underline{P}) \begin{cases} \Delta u = f & em\ \Omega \\ u = g & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então ela é única.

Demonstração. Suponhamos que existam $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluções de $(\underline{\mathrm{P}})$. Definimos $u = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então

$$\begin{cases} \Delta u = f - f = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo princínpio do Máximo e do Mínimo,

$$u \leq \sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u = 0 \;\; \text{e} \;\; u \geq \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u = 0.$$

Logo, $u = 0$ em Ω, o que prova a unicidade. □

Corolário 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & em\ \Omega \\ u = g & em\ \partial\Omega \quad com\ g \geq 0. \end{cases}$$

Se existe $x \in \partial\Omega$ tal que $g(x) > 0$ então $u > 0$ em Ω.

Demonstração. Pelo princípio do máximo, como u é harmônica,

$$\inf_{\partial\Omega} u(x) \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u(x), \forall x \in \Omega.$$

Por outro lado, $u = g \geq 0$ em $\partial\Omega$. Assim, $u(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$. Agora, suponhamos que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$. Então, a função u atingiria o mínimo em Ω, logo seria constante. Como $u(x_0) = 0$, segue que $u \equiv 0$, o que é absurdo. □

Observação 3.2. *Um outro resultado que obtemos a partir do princípio do máximo é que se u é subharmônica no sentido clássico, isto é, $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \geq 0$, então u é subharmônica no sentido da Definição 3.3. Com efeito, seja $B \subset\subset \Omega$ e h uma função tal que*

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u \leq h & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Então a função $w := u - h$ satisfaz: $\Delta w \geq 0$ em B e $w \leq 0$ em ∂B. Segue do princípio do Máximo Fraco que $w \leq 0$ em B, isto é, $u \leq h$ em B.

Esta mesma observação vale para funções superharmônicas. A prova é feita de maneira análoga.

As propriedades a seguir serão provadas apenas para as funções subharmônicas (no sentido da Definição 3.3), pois a prova para as funções superharmônicas é análoga. Além disso, segundo a observação anterior, tais propriedades serão trivialmente verificadas para as funções subharmônicas (superharmônicas) no sentido clássico.

P1) Se u é subharmônica então $-u$ é superharmônica.

Demonstração. Devemos provar que para toda bola $B \subset\subset \Omega$ e qualquer função h tal que

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ -u \geq h & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

implica $-u \geq h$ em B. Com efeito, $\Delta h = \Delta(-h) = 0$. Como u é subharmônica,

$$\begin{cases} \Delta(-h) = 0 & \text{em } B \\ u \leq -h & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow u \leq -h \text{ em } B \Rightarrow -u \geq h \text{ em } B.$$

□

P2) Se u e v são subharmônicas em Ω, então $u + v$ é subharmônica em Ω.

Demonstração. Devemos provar que para todo $B \subset\subset \Omega$ e uma função h qualquer satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u + v \leq h & \text{em } \partial B \end{cases}, \text{ tem-se } u + v \leq h \text{ em } B.$$

Com efeito, seja w solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } B \\ u = w & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Como u é subharmônica, temos $u \leq w$ em B e como $u = w$ em ∂B teremos

$$\begin{cases} \Delta(h-w) = 0 & \text{em } B \\ w + v \leq h & \text{em } \partial B \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \Delta(h-w) = 0 & \text{em } B \\ v \leq h - w & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow v \leq h - w \text{ em } B$$

pois v é subharmônica. Como $u \leq w$ em B e $v \leq h - w$ em B, segue que $u + v \leq h$ em B. □

P3) As funções subharmônicas verificam a Propriedade da Média. Em particular, elas verificam o Princípio do Máximo.

Demonstração. Sejam $u \in C^0(\Omega)$ uma função subharmônica, $x \in \Omega$, $B(x,r) \subset\subset \Omega$ e h uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B(x,r) \\ u = h & \text{em } \partial B(x,r) \end{cases} \Rightarrow u \leq h \text{ em } B(x,r).$$

Então,

$$u(x) \leq h(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} h(y) dS_y = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y.$$

Em particular, elas verificam o Princípio do Máximo, pois na prova deste último fato só precisávamos da Propriedade da Média e da continuidade da u. □

P4) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $u, v \in C^0(\Omega)$, onde u é subharmônica e v é superharmônica em Ω tal que $u \leq v$ em $\partial\Omega$. Então $u \leq v$ em Ω. Em particular, segue do Corolário 3.2, que ou $u < v$ em Ω, ou $u = v$ em Ω.

Demonstração. Utilizando as propriedades $(P1)$ e $(P2)$, temos que $-v$ e $u+(-v)$ são funções subharmônicas em Ω. Como por hipótese $u - v \leq 0$ em $\partial\Omega$, fazendo $w = u - v$, temos pelo Princípio do Máximo que

$$\sup_{\Omega} w = \sup_{\partial\Omega} w \leq 0 \Rightarrow u - v \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

ou seja, $u \leq v$ em Ω. □

P5) Se $u_1, \ldots, u_n$ são funções subharmônicas em Ω então a função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \max_{1 \leq i \leq n} u_i(x)$$

é subharmônica em Ω.

Demonstração. Observe que $u_i \in C^0(\Omega) \Rightarrow u \in C^0(\Omega)$.
Seja $B \subset\subset \Omega$ e h satisfazendo

$$(*) \begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u \leq h & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Devemos mostrar que $(*) \Rightarrow u \leq h$ em B. Com efeito, como para todo i, $u_i \leq u$, temos

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u_i \leq h & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow u_i \leq h \text{ em } B.$$

Logo, $u = \max u_i \leq h$ em B. □

P6) O limite de uma sequência uniformemente convergente de funções harmônicas é harmônica.

Demonstração. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções harmônicas em Ω convergindo para u. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para toda bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$,

$$u_k(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u_k(y) dS_y.$$

Usando o fato de que a convergência $u_k \to u$ é uniforme,

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{k \to \infty} u_k(x) \\ &= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u_k(y) dS_y \right) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \lim_{k \to \infty} u_k(y) dS_y \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y. \end{aligned}$$

Logo, u satisfaz a propriedade da média, segue do Teorema 3.2 que u é harmônica. □

Continuando, vamos provar o seguinte fato: o operador laplaciano é invariante por translação e rotação. De fato, basta provar que se $v(x) = u(R(x))$, onde R é uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^n$, então $\Delta v(x) = \Delta u(R(x))$. Vejamos: Primeiro vamos escrever

$$R(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)),$$

onde $y_1 = \sum_j a_{1j}x_j, \ldots, y_n = \sum_j a_{nj}x_j$ e (a_{ij}) é a matriz de R na base canônica do $\mathbb{R}^n$. Segue que $v(x) = u(y_1(x), \ldots, y_n(x))$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) &= \sum_k a_{ki}\frac{\partial u}{\partial y_k}(R(x)), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) &= \sum_{k,j} a_{ki}a_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}(R(x)). \end{aligned}$$

Como R é uma transformação linear ortogonal, vamos ter $\delta_{kj} = \sum_i a_{ki}(a_{ij})^t$. Portanto

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \sum_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{k,j}\sum_i a_{ki}(a_{ij})^t\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}(R(x)) \\ &= \sum_{k,j} \delta_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}(R(x)) = \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}(R(x)) = \Delta u(R(x)). \end{aligned}$$

Como havíamos afirmado. Sendo assim, para analisarmos a equação $\Delta u = 0$ nos interessa supor que u é radial (isto é que só dependa de $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$). Veremos agora que a solução de Laplace possui uma solução radial. Para isso, seja $u(x) = v(|x|) = v(r)$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_j} &= \frac{x_j}{|x|}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x_j^2} &= \frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} = v'\frac{x_j}{|x|}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} &= v''\frac{x_j^2}{r^2} + v'(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}). \end{aligned}$$

Donde

$$\Delta u = v'' + n\frac{v'}{r} - \frac{v'}{r} = v'' + \frac{(n-1)}{r}v'.$$

Fazendo $w = v'$, temos

$$w' + \frac{(n-1)}{r}w = 0.$$

Integrando em r, obtemos $w = cr^{(1-n)}$. Assim, podemos escrever

$$v(r) = \begin{cases} a \ \ln r + c, & \text{se } n = 2 \\ b \, r^{2-n} + d, & \text{se } n \geq 3 \end{cases},$$

onde a, b, c, d são constantes.

Mais geralmente, fixando $y \in \mathbb{R}$ e sendo $r = |x - y|$, teremos

$$v(|x-y|) = \begin{cases} a \ \ln|x+y| + c, & \text{se } n = 2 \\ b \, |x+y|^{2-n} + d, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Definição 3.4. *A função*

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \, |x-y|^{2-n}, & se \ n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \, \log|x-y|, & se \ n = 2 \end{cases}$$

definida para $x \neq y$ ($y \in \Omega$ fixado) é a Solução Fundamental da Equação de Laplace.

Observação 3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio onde vale o teorema da divergência e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS, \\ \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dx &= \int_{\partial\Omega} \big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \big) dS, \end{aligned}$$

onde ν denota a normal exterior unitária em $\partial\Omega$, dx o elemento de volume de Ω e dS o elemento de área de $\partial\Omega$.

Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ queremos obter uma expressão para $u(y)$ em termos da solução fundamental $\Gamma(x-y)$ onde $y \in \Omega$ é um ponto arbitrário.

Como $\Delta\Gamma = 0$ para $x \neq y$, a singularidade em $x = y$ nos impede de usarmos diretamente Γ no lugar de v na segunda identidade de Green. Para superarmos esta dificuldade, aplicaremos a segunda identidade de Green na região $\Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon(y)$, onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $B_\varepsilon(y) \subset\subset \Omega$. Assim,

$$\int_{\Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon(y)} \big(\Gamma\Delta u - u\Delta\Gamma\big) dx = \int_{\partial(\Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon(y))} \Big(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\Big) \, dS.$$

Como $\partial(\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y)) = \partial\Omega \cup \partial\overline{B}_\varepsilon(y)$ e Γ é harmônica em $\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y)$, segue que

$$\int_{\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y)} \Gamma\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right) dS + \int_{\partial B_\varepsilon(y)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right) dS. \tag{3.4}$$

Agora, olhando apenas para a última integral e observando que o vetor normal unitário é dado por $\nu = \frac{x-y}{|x-y|}$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\, dS\right| &= \left|\Gamma(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial\nu}\, dS\right| \\
&\leq |\Gamma(\varepsilon)| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right| dS \\
&= |\Gamma(\varepsilon)| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} |\langle\nabla u, \nu\rangle|\, dS \\
&\leq |\Gamma(\varepsilon)| \sup_{B_\varepsilon(y)} |\nabla u| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} dS \\
&= n\omega_n\varepsilon^{n-1}|\Gamma(\varepsilon)| \sup_{B_\varepsilon(y)} |\nabla u|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\, dS\right| \to 0 \quad (\text{quando } \varepsilon \to 0).$$

Além disso, para o caso $n \geq 3$ (o caso $n = 2$ é análogo) note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) &= \sum_i \partial_i\Gamma\nu_i = \sum_i \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n}(x_i-y_i)\frac{(x_i-y_i)}{\varepsilon} \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}|x-y|^{-n}\sum_i(x_i-y_i)^2 = \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}|x-y|^{-n}\cdot|x-y|^2 \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}|x-y|^{-n+2}.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando o Teorema 3.1,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)\, dS &= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u|x-y|^{-n+2}\, dS \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\varepsilon^{-n+2}\, dS \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\, dS \;=\; u(y).
\end{aligned}$$

Portanto, tomando o limite quando ε tende pra zero em (3.4), concluímos que

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y) \right) dS - \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u \, dx \quad (3.5)$$

que é conhecida como *fórmula de representação de Green.*

Observação 3.4. *Note que se u for harmônica em Ω, temos a seguinte representação*

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y) \right) dS$$

e se u possuir suporte compacto em Ω, então (3.5) *resultará em*

$$u(y) = -\int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u \, dx$$

Definição 3.5 (Potencial Newtoniano com densidade f)**.** *Para uma função integrável f, a integral*

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f \, dx$$

é o potencial newtoniano de f. Note que se $f \in C_0^\infty(\Omega)$, de acordo com (3.5) a solução da equação de Poisson $-\Delta u = f$ deve ser o potencial Newtoniano de f. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções suaves com suporte compacto em Ω.

Os dois teoremas a seguir serão úteis apenas para justificar provas posteriores e as demonstrações podem ser encontradas em [10].

Teorema 3.6. *Qualquer sequência limitada de funções harmônicas em um domínio Ω contém uma subsequência convergindo uniformemente em subdomínios compactos de Ω para uma função harmônica em Ω.*

Teorema 3.7. *Seja $B = B_R(0)$ e φ uma função contínua em $\partial\Omega$. Então a função u definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, dS_y & \text{se } x \in B \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \partial B \end{cases}$$

pertence a $C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em B.

Sendo assim, faz sentido considerar a definição seguinte.

Definição 3.6 (levantamento harmônico)**.** *Sejam u subharmônica em Ω, $B \subset\subset \Omega$ uma bola qualquer e $\overline{u}$ uma solução do problema de Dirichlet, tal que*

$$\begin{cases} \Delta\overline{u} = 0 & \text{em } B \\ \overline{u} = u & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Definimos o levantamento harmônico de u em Ω com relação a B por

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B \\ u(x), & x \in \Omega \backslash B. \end{cases}$$

Observação 3.5. *Note que $u \leq U$ em Ω, pois $U = u$ em $\Omega\backslash B$ e como u é subharmônica, segue que $\begin{cases} \Delta\overline{u} = 0 & \text{em } B \\ u = \overline{u} & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow u \leq \overline{u} = U$ em B.*

Proposição 3.1. *O levantamento harmônico de uma função subharmônica é uma função subharmônica.*

Demonstração. Sejam U o levantamento harmônico de uma função subharmônica u em Ω com relação a B. Considere $B' \subset\subset \Omega$ e h uma função satisfazendo

$$(*)\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B' \\ U \leq h & \text{em } \partial B'. \end{cases}$$

Precisamos provar que $U \leq h$ em B'. De fato, para:

1. $B' \cap B = \emptyset$, temos: $U = u$ em B' e pela subharmonicidade de u em Ω, segue que $U \leq h$ em B'.

2. $B' \cap B \neq \emptyset$, temos as seguintes possibilidades:

   (i) $B' \subset B$. Dessa forma, $U = \overline{u}$ que é harmônica em B e, portanto, subharmônica em B. Logo, $U \leq h$ em B'.

   (ii) $B' \not\subset B$. Pela Observação 3.5 e por $(*)$, temos que $u \leq U$ em Ω que implica $u \leq h$ em $\partial B'$ e como u é subharmônica em Ω, $u \leq h$ em B'. Como $U = u$ em $\Omega\backslash B$ temos que $U \leq h$ em $B'\backslash B$ e como U é harmônica em B temos que U é harmônica $B \cap B'$. Assim, $\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{em } B \cap B' \\ U \leq h & \text{em } \partial(B \cap B') \end{cases} \Rightarrow U \leq h$ em $B \cap B'$,

   onde a última implicação é decorrente do princípio do máximo.

□

Definição 3.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e φ uma função limitada em $\partial\Omega$. Uma função $u \in C^0(\overline{\Omega})$ subharmônica (respectivamente superharmônica) em Ω é chamada subfunção (respect. superfunção) com relação a φ, se $u \leq \varphi$ (respect. $u \geq \varphi$) em $\partial\Omega$.*

Observação 3.6. *Denotamos por S_φ o conjunto das subfunções com relação a φ, isto é,*

$$S_\varphi = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : u \text{ é subharmônica em } \Omega \text{ e } u \leq \varphi \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Observe que este conjunto é não vazio, pois como φ é limitada, digamos, $m \leq \varphi(x) \leq M, \forall x \in \partial\Omega$, basta tomarmos $u(x) = m$, $\forall x \in \Omega$.

Proposição 3.2. *Toda subfunção com relação a φ é menor do que ou igual a qualquer superfunção com relação a φ.*

Demonstração. Seja $u \in C^0(\overline{\Omega})$ uma subfunção com relação a φ, isto é, u é subharmônica em Ω e $u \leq \varphi$ em $\partial\Omega$ e seja $v \in C^0(\overline{\Omega})$ uma superfunção com relação a φ, i.e., v é superharmônica em Ω e $v \geq \varphi$ em $\partial\Omega$. Defina $w := u - v$. Assim, temos que w é subharmônica em Ω e $u - v \leq 0$ em $\partial\Omega$. Pelo princípio do máximo, $u \leq v$ em Ω. □

Definição 3.8 (Função de Perron)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Defina $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por*

$$u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$$

que é conhecida como função de Perron.

Teorema 3.8. *A função de Perron é harmônica em Ω.*

Demonstração. Inicialmente afirmamos que u está bem definida. Com efeito, para qualquer $v \in S_\varphi$ vale o princípio do máximo, logo

$$v(x) \leq \sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi = M \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall v \in S_\varphi$$

isto é, $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$. Logo, u está bem definida.

Agora, mostraremos que u é harmônica em Ω. Seja $y \in \Omega$ fixo. Como $u(y) = \sup_{v \in S_\varphi} v(y)$, então existe uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S_φ tal que $v_n(y) \to u(y)$.

Trocando, se necessário, v_n por $v_n' = \max\{v_n, m = \inf_{\partial\Omega} \varphi\}$ ainda temos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e $v_n \in S_\varphi$ (pois tanto v_n quanto $\inf_{\partial\Omega} \varphi$ estão em S_φ). Além disso, como $v_n(y) \leq v_n'(y) \leq u(y)$, temos $v_n'(y) \to u(y)$.

Escolhendo $R > 0$ de modo que $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ e definindo para cada $n \in \mathbb{N}$, o levantamento harmônico de v'_n em B, isto é,

$$V_n(x) = \begin{cases} \overline{v'_n}(x), & x \in B \\ v'_n(x), & x \in \Omega \backslash B \end{cases}$$

Temos que

- $V_n \in S_\varphi$, pois V_n é subharmônica em Ω e $V_n = v'_n$ em $\partial\Omega$.
- $V_n(y) \to u(y)$, pois $v'_n(y) \leq V_n(y) \leq \sup\limits_{v \in S_\varphi} v(y) = u(y), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $v'_n(y) \to u(y)$ para cada $y \in \Omega$.

Como $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e V_n é harmônica em B $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 3.6 temos que a sequência $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contém uma subsequência (V_{n_k}) convergindo uniformemente em qualquer bola $\overline{B}_\rho(y)$ com $\rho < R$, para uma função $\widetilde{v}$ que é harmônica em $\overline{B}_\rho(y)$. Então $\widetilde{v}(y) = u(y)$ (unicidade do limite) e $\widetilde{v} \leq u$ em $B_\rho(y)$, pois $V_{n_k}(x) \leq \sup\limits_{v\in S_\varphi} v(x) = u(x) \Rightarrow \lim V_{n_k} \leq u$ para k suficientemente grande.

Afirmamos que: $\widetilde{v} = u$ em $B_\rho(y)$, isto é, u será harmônica em $B_\rho(y)$ e provará o teorema. Com efeito, suponha, por absurdo, que $\widetilde{v}(z) < u(z)$ para algum $z \in B_\rho(y)$. Então, como u é definida pelo supremo, existe $\widetilde{u} \in S_\varphi$ tal que $\widetilde{v}(z) < \widetilde{u}(z) \leq u(z)$.

Definindo $w_k := \max\{\widetilde{u}, V_{n_k}\}$ e considerando o seu levantamento harmônico em $B_\rho(y)$, isto é,

$$W_k(x) = \begin{cases} \overline{w_k}(x), & x \in B_\rho(y) \\ w_k(x), & x \in \Omega \backslash B_\rho(y) \end{cases}$$

temos que $W_k \in S_\varphi$ e, como antes, obtemos uma subsequência de $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo uniformemente em $\overline{B}_r(y)$ $(\forall r < \rho)$, para uma função w que é harmônica em $\overline{B}_r(y)$.

Escolhendo $r \in (0, \rho)$ tal que $z \in \overline{B}_r(y)$ e observando que $V_{n_k} \leq w_k \leq W_k \leq \sup\limits_{v\in S_\varphi} v = u$ $\forall k \in \mathbb{N}$ chegamos a $\widetilde{v} \leq w \leq u$ em $\overline{B}_r(y)$ e $\widetilde{v}(y) \leq w(y) \leq u(y) = \widetilde{v}(y)$, isto é, $\widetilde{v}(y) = w(y)$ e como $\widetilde{v}$ é subharmônica e w é harmônica em $\overline{B}_r(y)$ temos que $\widetilde{v} - w$ é subharmônica em $\overline{B}_r(y)$. Além disso, $\widetilde{v} - w \leq 0$ em $\partial\overline{B}_r(y)$. Então pelo princípio do máximo, concluímos que $\widetilde{v} = w$ em $\overline{B}_r(y)$. Absurdo, pois $\widetilde{v}(z) < \widetilde{u}(z) < w_k(z) \leq W_k(z)$, o que conclui a prova do teorema. $\square$

Observação 3.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Se $w \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Dirichlet*

$$(\underline{P})\begin{cases} \Delta w = 0 & em\ \Omega \\ w = \varphi & em\ \partial\Omega, \quad \varphi \in C^0(\partial\Omega) \end{cases}$$

Então w é a função de Perron. Com efeito, seja $v \in S_\varphi$. Por ($\underline{P}$) temos que $w \in S_\varphi$ e $v-w$ é uma função subharmônica em Ω. Como $v-w \leq \varphi-\varphi = 0$ em $\partial\Omega$, pelo princípio do máximo, $v-w \leq 0$ em Ω. Logo, $\sup\limits_{S_\varphi} v \leq w$ e uma vez que $w \in S_\varphi$ segue que $\sup\limits_{S_\varphi} v = w$.

O próximo passo é estabelecer condições em $\partial\Omega$ para que a função de Perron seja solução do problema ($\underline{\text{P}}$).

Definição 3.9 (função barreira)**.** *Uma função $w = w_\xi \in C^0(\overline{\Omega})$ é chamada barreira em $\xi \in \partial\Omega$ relativa a Ω se*

(i) w é superharmônica em Ω;

(ii) $w(x) > 0$ em $\overline{\Omega}\backslash\{\xi\}$ e $w(\xi) = 0$.

Definição 3.10 (ponto de fronteira regular)**.** *Diremos que um ponto $x \in \partial\Omega$ é regular se existir uma função barreira neste ponto.*

Lema 3.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, u a função de Perron e φ uma função limitada em $\partial\Omega$. Se φ é contínua em $\xi \in \partial\Omega$ e ξ é regular, então $u(x) \to \varphi(\xi)$ quando $x \to \xi$.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $M = \sup\limits_{x\in\partial\Omega} |\varphi(x)|$. Como $\xi \in \partial\Omega$ é um ponto regular, existe $w \in C^0(\overline{\Omega})$ função barreira em ξ. Pela continuidade de φ no ponto ξ, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon \text{ sempre que } x \in B_\delta(\xi).$$

Além disso, considere $m = \min\limits_{\overline{\Omega}\backslash B_\delta(\xi)} w > 0$. Então $w(x) \geq m, \forall x \in \overline{\Omega}\backslash B_\delta(\xi)$. Tomando $k > 0$ tal que $km \geq 2M$, temos que

$$kw(x) \geq 2M \text{ se } |x-\xi| \geq \delta.$$

Agora, considere as funções

$$f(x) = \varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$

definidas em $\overline{\Omega}$. Temos, respectivamente, uma subfunção e uma superfunção com relação a φ. Provaremos que $f(x)$ é uma subfunção com relação a φ. Com efeito, seja $B \subset\subset \Omega$ uma bola e h uma função harmônica em B tal que

$$f(x) \leq h(x), \ \forall x \in \partial B,$$

ou seja,

$$-kw(x) \leq h(x) - \varphi(\xi) + \varepsilon, \ \forall x \in \partial B.$$

É imediato que $h(x)-\varphi(\xi)+\varepsilon$ é harmônica em B e como $-kw$ é subharmônica em Ω (uma vez que w é superharmônica em Ω e $k > 0$), segue que

$$-kw(x) \leq h(x) - \varphi(\xi) + \varepsilon, \quad \forall x \in B,$$

isto é, $f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in B$, o que mostra que $f(x)$ é subharmônica em Ω.

Agora mostraremos que $f(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in \partial\Omega$. Para isso, seja $x_0 \in \partial\Omega$. Precisamos analisar os seguintes casos:

- Se $x_0 \in B_\delta(\xi)$, então para $x_0 = \xi$, $f(\xi) = \varphi(\xi) - \varepsilon - kw(\xi) = \varphi(\xi) - \varepsilon < \varphi(\xi)$. E para $x_0 \neq \xi$, $-\varepsilon < \varphi(x_0) - \varphi(\xi)$. Como $-kw(x_0) < 0$, obtemos $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x_0) < \varphi(x_0)$, isto é, $f(x_0) < \varphi(x_0)$.

- Se $x_0 \notin B_\delta(\xi)$, sabemos que $kw(x_0) \geq 2M \geq -2\varphi(x_0) \Leftrightarrow -kw(x_0) \leq 2\varphi(x_0)$. Daí concluímos que

  $$-\varepsilon - kw(x_0) \leq 2\varphi(x_0).$$

  Por outro lado, $kw(x_0) \geq 2M \geq 2\varphi(\xi)$. Consequentemente,

  $$-\varepsilon - kw(x_0) \leq -2\varphi(\xi).$$

Somando as duas desigualdades anteriores, obtemos

$$-\varepsilon - kw(x_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(\xi) \Leftrightarrow \varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x_0) \leq \varphi(x_0)$$

isto é, $f(x_0) \leq \varphi(x_0)$. O que conclui a prova de que $f(x)$ é uma subfunção em relação a φ. A prova de que $g(x)$ é uma superfunção com relação a φ segue os passos da demonstração anterior.

Por fim, usando a definição de u e o fato de que toda superfunção domina qualquer subfunção, temos em Ω,

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x),$$

ou equivalentemente,

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Como $w(x) \to w(\xi) = 0$ quando $x \to \xi$, (pois $w \in C^0(\overline{\Omega})$), obtemos $u(x) \to \varphi(\xi)$ quando $x \to \xi$. $\square$

Teorema 3.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O problema clássico de Dirichlet*

$$(\underline{P}) \begin{cases} \Delta w = 0 & em\ \Omega \\ w = \varphi & em\ \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução se, e somente se, todos os pontos do bordo são regulares.

Demonstração. Suponha que todos os pontos de $\partial\Omega$ são regulares. Defina a função $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{em } \Omega \\ \varphi(x) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde u é a função de Perron. Então v é harmônica em Ω e como para todo $\xi \in \partial\Omega$, $u(x) \to \varphi(\xi)$ quando $x \to \xi$ segue que $v \in C^0(\overline{\Omega})$ e portanto, $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução de $(\underline{P})$.

Reciprocamente, fixe $\xi \in \partial\Omega$ e suponha que o problema de Dirichlet $(\underline{P})$ tenha uma solução w para $\varphi = \Phi_\xi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dada por $\Phi_\xi(x) = |x - \xi|$. É imediato que w é uma função barreira em ξ. $\square$

Uma condição suficiente para que o problema $(\underline{P})$ tenha solução em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é que Ω verifique a condição da esfera exterior, isto é, para qualquer $\xi \in \partial\Omega$ existe uma bola $B = B_R(y) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ tal que $\partial B \cap \partial\Omega = \{\xi\}$. Neste caso, a função $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por

$$w(x) = \begin{cases} \log \frac{|x-y|}{R} & \text{se } n = 2 \\ R^{2-n} - |x - y|^{2-n} & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

é uma função barreira com relação a Ω em ξ. De fato,

- $w \in C^0(\overline{\Omega})$, pois $w \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{y\})$
- w é superharmônica em Ω, pois w é harmônica em $\mathbb{R}^n \backslash \{y\}$.
- Para $x = \xi$ temos $R = |\xi - y|$. Assim,

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2 \\ 0 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

  ou seja, $w(\xi) = 0$
- Para $x \in \Omega \backslash \{\xi\}$ temos $R < |x - y|$. Assim,

$$\frac{|x-y|}{R} > 1 \ \text{ para } \ n = 2 \ \text{ e } \ |x - y|^{2-n} < R^{2-n} \ \text{ para } \ n \geq 3.$$

Portanto, $w(x) > 0$ em $\Omega \backslash \{\xi\}$, como havíamos afirmado.

Proposição 3.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com bordo de classe C^2. Então $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera exterior.*

Demonstração. Como $\partial\Omega$ é compacto e de classe C^2, vale o teorema da vizinhança tubular para $\partial\Omega$, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(\partial\Omega) = \cup_{p\in\partial\Omega} B_\varepsilon^\perp(p)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ (chamado de vizinhança tubular de $\partial\Omega$ de raio ε), onde

$$B_\varepsilon^\perp(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, v\rangle = 0, \forall v \in T_p(\partial\Omega) \text{ com } |x - p| < \varepsilon\}.$$

Além disso, se $p \neq q$ em $\partial\Omega$, então $B_\varepsilon^\perp(p) \cap B_\varepsilon^\perp(q) = \emptyset$, e a aplicação $\pi : V_\varepsilon(\partial\Omega) \to \partial\Omega$ que associa a cada $q \in V_\varepsilon(\partial\Omega)$ o pé do único segmento normal que o contém é de classe C^1.

Agora, sejam η o campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e $\xi \in \partial\Omega$. Considere $y = \xi + \frac{\varepsilon}{2}\eta(\xi)$. Afirmamos que $\partial B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap \partial\Omega = \{\xi\}$.

Com efeito, suponha que existe $\overline{\xi} \neq \xi$ tal que $\overline{\xi} \in \partial B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap \partial\Omega$. Então

$$y - \overline{\xi} = \frac{\varepsilon}{2}\eta(\overline{\xi}) \quad \text{e} \quad y - \xi = \frac{\varepsilon}{2}\eta(\xi)$$

daí,

$$|y - \overline{\xi}| = \frac{\varepsilon}{2} = |y - \xi|$$

e como $\langle y - \xi, v\rangle = 0 = \langle y - \overline{\xi}, v\rangle, \forall v \in T_\xi\partial\Omega$, segue que $y \in B_\varepsilon^\perp(\xi) \cap B_\varepsilon^\perp(\overline{\xi})$, o que é absurdo. Como ξ é arbitrário concluímos que Ω verifica a condição da esfera exterior e $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ é a bola procurada. □

Teorema 3.10 (Existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira satisfaz a condição da barreira, $f \in C_0^\infty(\Omega)$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$. Então o problema de Dirichlet para a equação de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = -f & em\ \Omega \\ u = g & em\ \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Seja v o potencial Newtoniano de f. Pela Definição 3.5, $\Delta v = -f$ em Ω e pelo Teorema 3.9 existe uma única w tal que

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega \\ w = v - g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

uma vez que $\partial\Omega$ é constituído de pontos regulares e $v-g \in C^0(\partial\Omega)$. Definindo $u = v - w$, temos

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v - \Delta w = -f & \text{em } \Omega \\ u = v - w = v - v + g = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

A unicidade já foi estabelecida no Corolário 3.1. $\square$

Capítulo 4

Teoremas Principais

Neste capítulo será demonstrado o teorema principal desta dissertação. Para este fim, consideraremos uma variedade Riemanniana orientável, conexa e fechada M^n mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, além disso Ω será um domínio compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ com conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ tal que o bordo de Ω seja M com a orientação dada pelo campo de vetores normais unitários ν interior a Ω ao longo de M, H denotará a curvatura média de M com respeito a ν. Relembremos que estamos denotando por ∇, Δ e $Hess$ o gradiente, o laplaciano e o hessiano calculados na métrica de M, enquanto que $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Delta}$ e $\widetilde{Hess}$ os respectivos entes calculados na métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.1. *Se $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \widetilde{\Delta} f = 1 & \text{em } \Omega \\ f = 0 & \text{em } M = \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

$$n \int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2 \, dM = \int_\Omega (1 - |\widetilde{Hess} f|^2) \, dx.$$

Demonstração. Sabendo que no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, $Ric(\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f) = 0$, substituindo f na fórmula de Bochner (1.23), temos

$$\frac{1}{2}\widetilde{\Delta}|\widetilde{\nabla} f|^2 = \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle + |\widetilde{Hess} f|^2.$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima para Ω e f, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{\Delta}|\widetilde{\nabla} f|^2 \, dx = \int_\Omega \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle \, dx + \int_\Omega |\widetilde{Hess} f|^2 \, dx. \tag{4.1}$$

Agora utilizando os itens (i) e (ii) do Lema 2.1 e lembrando que $\nabla f = 0$ em M, temos para a primeira integral que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{\Delta}|\widetilde{\nabla} f|^2\, dx &= -\frac{1}{2}\int_M \langle \widetilde{\nabla}|\widetilde{\nabla} f|^2, \nu\rangle\, dM = -\int_M \widetilde{Hess} f(\nu, f_\nu \nu)\, dM \\ &= -\int_M \widetilde{Hess} f(\nu,\nu) f_\nu\, dM. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pela primeira identidade de Green, podemos reescrever

$$\int_\Omega \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle\, dx = -\int_\Omega dx - \int_M \widetilde{\Delta} f f_\nu dM.$$

Utilizando o item (iii) do Lema 2.1 na igualdade acima, temos que

$$\int_\Omega \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle\, dx = \int_M nH f_\nu^2\, dM - \int_M \widetilde{Hess} f(\nu,\nu) f_\nu\, dM - \int_\Omega dx. \tag{4.3}$$

Por fim, substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1), obtemos

$$\int_M nH f_\nu^2\, dM = \int_\Omega (1 - |\widetilde{Hess} f|^2)\, dx.$$

$\square$

4.1 Desigualdade de Heintze e Karcher

Teorema 4.1 (Heintze-Karcher). *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada, e Ω o domínio compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M$. Consideramos sobre M a orientação dada pelo normal unitário ν interior a Ω, e denotamos por H a curvatura média correspondente a ν. Se $H \neq 0$ sobre M, então*

$$Vol(\Omega) \leq \frac{1}{n+1}\int_M \frac{1}{H}\, dM \tag{4.4}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, M for uma esfera.

Demonstração. Inicialmente, como $H \neq 0$ e M é conexa, segue da Proposição 2.2 que $H > 0$ sobre M. Consideremos a função f como no Lema 4.1, então

$$n\int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2\, dM = \int_\Omega (1 - |\widetilde{Hess} f|^2)\, dx. \tag{4.5}$$

Agora utilizando a desigualdade (1.22), temos

$$1 = (\widetilde{\Delta} f)^2 \leq (n+1)|\widetilde{Hess} f|^2 \tag{4.6}$$

ou equivalentemente,

$$1 - |\widetilde{Hess} f|^2 \leq \frac{n}{n+1}.$$

Então

$$n\int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2 dM \leq \frac{n}{n+1}\int_\Omega dx = \frac{n}{n+1}Vol(\Omega).$$

Por outro lado, como $\widetilde{\Delta} f = 1$ em Ω e ν é o normal interior a Ω,

$$Vol(\Omega) = \int_\Omega \widetilde{\Delta} f \, dx = -\int_M \frac{\partial f}{\partial \nu}\, dM.$$

Portanto, a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais nos dá

$$\begin{aligned}
Vol(\Omega)^2 &= \Big(\int_M \frac{\partial f}{\partial \nu}\, dM\Big)^2 = \Big(\int_M \sqrt{H}\frac{\partial f}{\partial \nu}\cdot\frac{1}{\sqrt{H}}\, dM\Big)^2 \\
&\leq \int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2 dM \cdot \int_M \frac{1}{H}\, dM \\
&\leq \frac{1}{n+1}Vol(\Omega)\cdot\int_M \frac{1}{H}\, dM
\end{aligned}$$

isto é,

$$Vol(\Omega) \leq \frac{1}{n+1}\int_M \frac{1}{H}\, dM.$$

Ocorrendo a igualdade em $x \in \Omega$ se, e só se, ocorre a igualdade em (4.6), isto é

$$\widetilde{Hess} f = \frac{1}{n+1} Id : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

Por integração direta, segue que f deve ser da forma

$$f(x) = \frac{1}{2(n+1)}|x|^2 + \langle x, v\rangle + c$$

para algum $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $c \in \mathbb{R}$. Completando quadrados, temos

$$f(x) = \frac{1}{2(n+1)}|x + (n+1)v|^2 + c - \frac{n+1}{2}|v|^2.$$

Como $f = 0$ em M, vamos fazer $a = -(n+1)v$ e $d = -c + \frac{n+1}{2}|v|^2$, para obtermos

$$M = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x-a|^2 = 2(n+1)d\}$$

isto é, M é uma esfera de centro a e raio $\sqrt{2(n+1)d}$. □

Como aplicação do Teorema de Heintze e Karcher daremos uma demonstração do seguinte teorema devido a Alexandrov.

4.2 Teorema de Alexandrov

Teorema 4.2 (Alexandrov)**.** *Se $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante H, então M é uma esfera.*

Demonstração. Seja $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $\Delta\varphi = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n+1})$ e $\nabla\varphi = (\nabla x_1, \ldots, \nabla x_{n+1})$. Pelo item (iii) do Lema 2.1, temos para cada $i = 1, \ldots, n+1$,

$$\widetilde{\Delta} x_i = \Delta x_i - nH\nu(x_i) + \widetilde{Hess}\ x_i(\nu, \nu).$$

Como $\widetilde{\Delta} x_i = 0$ e $\widetilde{Hess}\ x_i = 0$, segue que $\Delta x_i = nH\nu(x_i)$. Dessa forma, temos

$$\Delta\varphi = nH(\nu x_1, \ldots, \nu x_{n+1}) = nH\nu(\varphi). \tag{4.7}$$

Além disso, pelo item (i) do Lema 2.1, $\widetilde{\nabla} x_i = \nabla x_i + \nu(x_i)\nu$. Por outro lado, $\widetilde{\nabla} x_i = E_i$, onde $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim,

$$\begin{aligned} |\nabla x_i|^2 &= |\widetilde{\nabla} x_i - \nu(x_i)\nu|^2 = |\widetilde{\nabla} x_i|^2 - 2\nu(x_i)\langle \widetilde{\nabla} x_i, \nu\rangle + \nu(x_i)^2|\nu|^2 \\ &= 1 - 2\nu(x_i)\cdot\nu(x_i) + \nu(x_i)^2 = 1 - \nu(x_i)^2. \end{aligned}$$

e

$$|\nabla\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{n+1}(1 - \nu(x_i)^2) = n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1}\nu(x_i)^2 = n + 1 - |\nu|^2 = n.$$

Agora, o fato de $\widetilde{\Delta}\varphi = (0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\nabla}\varphi = (\widetilde{\nabla} x_1, \ldots, \widetilde{\nabla} x_{n+1})$ e $H > 0$ (pois H é constante e M é compacta) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \langle \varphi, \widetilde{\Delta}\varphi\rangle dx = -\int_\Omega |\widetilde{\nabla}\varphi|^2 dx - \int_M \langle \varphi, \varphi_\nu\rangle dM \\ &= -(n+1)\cdot Vol(\Omega) - \int_M \langle \varphi, \nu(\varphi)\rangle dM \\ &\overset{(4.7)}{=} -(n+1)\cdot Vol(\Omega) - \frac{1}{nH}\int_M \langle \varphi, \Delta\varphi\rangle dM \\ &= -(n+1)\cdot Vol(\Omega) - \frac{1}{nH}\Big[-\int_M |\nabla\varphi|^2 dM\Big] \\ &= -(n+1)\cdot Vol(\Omega) - \frac{1}{H}Vol(M), \end{aligned}$$

isto é,

$$Vol(M) = (n+1)HVol(\Omega). \tag{4.8}$$

Finalmente, a partir do Teorema 4.1 podemos concluir que M é uma esfera. □

Bibliografia

[1] Alexandrov, A. D. *Uniqueness Theorems for surfaces in the Large I.* Vestnik Leningrad univ. 11 (1956) 5-17.

[2] Biezuner, R. J. *Equações Diferenciais Parciais I/II.* Notas de Aula, Minas Gerais, 2010.

[3] Brendle, S. *Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 117 (2013) 247-269.

[4] Brickell, F.; Clark, R. S. *Differrential Manifolds.* Van Nostrand Reinhold Co., London, 1973.

[5] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[6] Carmo, M. P. *O Método do Referencial Móvel.* Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[7] Carmo, M. P. *Formas Diferenciais e Aplicações.* 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.

[8] Cheeger, J. *Finiteness theorems for Riemannian manifolds.* Amer. J.Math. 92 (1970) 61-74.

[9] Furlanetto, J. R. *Sobre Equações Elípticas e Aplicações.* Dissertação(Mestrado em Matemática), Curitiba, 2007.

[10] Gilbarg, D.; Trudinger N. S. *Eliptic Partial Differrential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[11] Heintze, E.; Karcher H. *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds.* Ann. Sci. École Norm. 11 (1978) 451-470.

[12] Klingenberg, W. *Contributions to Riemannian Geometry in the large*. Ann. of Math. 69 (1959) 654-666.

[13] Lee, J. M. *Introduction to smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[14] Lee, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2011.

[15] Lee, J. M. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[16] Lima, E. L. *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[17] Petersen, P. *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[18] Rauch, H. E. *A contribution to differential geometry in the large*. Ann. of Math. 54 (1951) 38-55.

[19] Ros, A. *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures.* Revista Matemática Iberoamericana 3 (1987) 447-453.