UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

Valéria Folz de Oliveira

MANAUS
2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

	Oliveira, Valéria Folz de
O48á	ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO / Valéria Folz de Oliveira. 2015 44 f.: 31 cm.
	Orientador: Disney Douglas de Lima Oliveira Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.
	1. Álgebra Geométrica. 2. Plano. 3. Matemática atual. 4. Ensino médio. 5. Aplicações. I. Oliveira, Disney Douglas de Lima II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

VALÉRIA FOLZ DE OLIVEIRA

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS
2015

VALÉRIA FOLZ DE OLIVEIRA

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Antônio Ferreira Santana Filho
Membro

Prof. Dr. Wilhelm Alexander Steinmetz
Membro

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, a minha amiga Mileny Santos que me hospedou durante o mestrado, e a minha família: meu esposo Cicero Mota cuja ajuda foi valiosa, e meus filhos Raquel Folz Cavalcante e Rafael Folz Cavalcante aos quais dedico este trabalho.

RESUMO

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

Orientador: Disney Douglas de Lima Oliveira
Programa de Pós-Graduação em Matemática (Profmat)

Este trabalho apresenta uma introdução à Álgebra Geométrica construindo-a no plano a partir de axiomas, permitindo assim que possa ser generalizada para o espaço e outras dimensões. Acreditamos que ela pode ser introduzida no Ensino Médio e aplicada com sucesso como alternativa metodológica ao ensino de conceitos básicos de matemática. Trata-se de uma abordagem moderna que reflete o conhecimento matemático atual, unificando o ensino de conceitos que envolvem geometria, trigonometria, sistemas de equações, números complexos, entre outros e que, usualmente, são apresentados de forma separada.

Palavras-chave: Álgebra Geométrica, Plano, Matemática atual, Ensino Médio, Aplicações.

ABSTRACT

GEOMETRIC ALGEBRA OF THE PLANE

This work presents an introduction to Geometric Algebra building it on the plane from axioms. This approach allows for easy generalization to space and other dimensions. We believe that it can be introduced in high school and be successfully applied as a methodological alternative to teaching basic math concepts. This is a modern approach that reflects the current mathematical knowledge, unifying concepts involving geometry, trigonometry, systems of equations, complex numbers, and others which are usually presented in separation.

Keywords: Geometric Algebra, Plane, Current Mathematics, High School, Applications.

Sumário

Prefácio

No ano de 2008 participei de um evento para professores de Matemática em Itacoatiara (AM) em que descobri a Álgebra Geométrica durante uma palestra do Professor Dr. Cicero Mota. Minha primeira sensação foi de inquietação: essa é uma estrutura matemática poderosa! Como eu me formei em Matemática e nunca ouvi falar nisso? De imediato me senti fortemente atraída. Saí da palestra impelida a pesquisar e a aprender mais. Fiquei bastante decepcionada ao descobrir que não havia literatura em Português sobre o assunto. A partir de então participei de diversos minicursos de Álgebra Geométrica entre os quais destaco, entre outros, os ministrados na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia de Itacoatiara e na Reunião anual da SBPC em Manaus, ambos em 2009. Em janeiro de 2011, quando soube por um colega que haveria um mestrado para professores de Matemática do Ensino Básico, eu imediatamente soube sobre o que iria escrever.

A pesquisa sobre o assunto, levou-me a descobrir que a Álgebra Geométrica, também conhecida como Álgebra de Clifford, tem uma relação natural com a Geometria; que físicos como o Professor David Hestenes (EUA) aplicam os métodos de Álgebra e Cálculo Geométricos nas Mecânicas Clássica e Quântica, e na Eletrodinâmica. Relações entre conceitos aparentemente desconexos surgiram: números complexos, vetores nulos, elementos algébricos cujos quadrados são números reais negativos, bivetores, trivetores, uma miríade de conceitos e relações que desconhecia. Aprendi que posso dividir, girar e refletir vetores de forma fácil e intuitiva. A Álgebra Geométrica produz equações mais sintéticas, uniformiza conceitos matemáticos e pode substituir com vantagens o ensino tradicional de álgebra linear no plano.

O objetivo deste trabalho é fornecer uma introdução a Álgebra Geométrica, com o formalismo da Álgebra; apresentar seus conceitos e mostrar que é possível aplicá-la no Ensino Básico. O trabalho mostra por meio da Álgebra Geométrica que matrizes, determinantes, números complexos, geometria analítica, vetores, sistemas de equações são conceitos que se relacionam e se completam naturalmente.

Escolhemos como metodologia para a apresentação da Álgebra Geométrica a abordagem Axiomática. Essa abordagem reflete o modo como se dá o estudo de estruturas algébricas nos dias atuais e assim permite que o aluno tenha contato como o formalismo utilizado pelos matemáticos no cotidiano de sua profissão; permite que o aluno aprenda por meio de pequenos passos os principais paradigmas que levam à descoberta em Matemática e aprecie o caráter lógico e dedutivo dessa ciência. Além disso, ela permite que se dê interpretações distintas aos elementos da álgebra, ampliando assim o horizonte de aplicações. A Abordagem axiomática separa a estrutura algébrica da interpretação geométrica permitindo assim que ao mesmo tempo que se pode usá-la para resolver problemas de Geometria, se possa também generalizar para dimensões que vão além da experiência cotidiana dos nossos sentidos.

Capítulo 1

A Álgebra Geométrica do Plano

1.1 Axiomas

A álgebra geométrica do plano é uma extensão dos números reais. Isso significa que ela consiste de um conjunto $\mathbb{G}$ que contém o conjunto dos números reais e em que estão definidas operações de *adição* $(+)$ e *produto* $(\cdot)$ *geométricos* que estendem as operações de adição e produto de números reais. Um elemento da álgebra geométrica $\mathbb{G}$ será chamado de *multivetor.* $\mathbb{G}$ é algebricamente fechado, isto é, a soma ou o produto de qualquer par de multivetores é um único multivetor.

A adição e o produto geométricos de multivetores $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$, e $\mathcal{C}$,... têm as seguintes propriedades:

A1 A adição é comutativa:

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}. \tag{1.1}$$

A2 A adição e o produto são associativos:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}) \tag{1.2}$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}=\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}). \tag{1.3}$$

Então indicaremos por $\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}$ e por $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ para simplificar a notação

A3 O produto é distributivo em relação à adição:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}; \tag{1.4}$$
$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}. \tag{1.5}$$

A4 Os números reais 0 e 1 são os elementos neutro da adição e do produto, respectivamente:

$$0+\mathcal{A} = \mathcal{A} \tag{1.6}$$
$$1\mathcal{A} = \mathcal{A}. \tag{1.7}$$

A5 Todo multivetor $\mathcal{A}$ possui um único inverso aditivo indicado por $-\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = 0. \tag{1.8}$$

A6 Os números reais comutam com todos os multivetores: se $\alpha \in \mathbb{R}$ então:

$$\alpha\mathcal{A} = \mathcal{A}\alpha. \tag{1.9}$$

A7 Existe um subconjunto não-vazio $\mathbb{V}$ de $\mathbb{G}$, cujos elementos são chamados vetores, tal que se $u,\ v \in \mathbb{V}$ e λ é um número real, então $\lambda v,\ u+v \in \mathbb{V}$.

A8 Se v é um vetor, então v^2 é um número real e $v^2 \geq 0$; $v^2 = 0$ se somente se $v = 0$.

A9 Existe um subconjunto não-vazio $\mathbb{B}$ de $\mathbb{G}$, cujos elementos são chamados bivetores, tal que $\mathbb{B} = \{B = uv \,|\, u,\ v \in \mathbb{V} \text{ e } uv = -vu\} \neq \{0\}$.

A10 Se B é um bivetor não-nulo, então para todo vetor u, $uB = Bu$ implica $u = 0$.

A11 Cada multivetor $\mathcal{A}$ se escreve de maneira única na forma

$$\mathcal{A} = \alpha + v + B, \tag{1.10}$$

em que α é um número real, v é um vetor e B é um bivetor

Os axiomas descrevem regras de composição e de interação entre multivetores. O multivetor nulo, isto é o número real zero, é também um vetor e um bivetor. O número real α, o vetor

v e o bivetor B na Equação (1.10) são chamados de *componente real, vetorial e bivetorial* do multivetor $\mathcal{A}$, respectivamente.

O produto geométrico apresenta algumas vantagens em relação ao produto vetorial usual: é associativo e admite a existência de um elemento inverso, pode ser definido em espaços de qualquer dimensão.

Vetores podem ou não ter significado geométrico. Queremos aplicar a geometria mas eles são basicamente um objeto algébrico.

Vejamos alguns exemplos simples de como usar os axiomas para demonstrar propriedades da álgebra geométrica.

Exemplo 1.1. Se B é um bivetor, então B^2 é um número real e $B^2 \leq 0$, $B^2 = 0$ se e somente se $B = 0$.

Demonstração. Seja um bivetor, então existem vetores u e v tais que $B = uv$ e $uv = -vu$. Portanto, por A6:

$$B^2 = (uv)^2 = uvuv = u(-uv)v = -u^2v^2.$$

Como u é um vetor, então, por A8, $u^2 \in \mathbb{R}$, $u^2 \geq 0$ e $u^2 = 0$ se somente se $u = 0$. Analogamente, $v^2 \in \mathbb{R}$, $v^2 \geq 0$ e $v^2 = 0$ se somente se $v = 0$. Daí segue que $B^2 \in \mathbb{R}$, $B^2 \leq 0$ e $B^2 = 0$ se e somente se $B = 0$.

□

Exemplo 1.2. Se B é um bivetor e λ é um número real, então λB é um bivetor.

Demonstração. $B = uv$, em que u, v são vetores e $uv = -vu$. Como λ é um número real, por A7, λu é um vetor e, $\lambda(uv) = -\lambda(vu)$ então $(\lambda u)v = -v(\lambda u)$ Temos, $\lambda B = \lambda(uv) = (\lambda u)v$ é um bivetor pois λu , $v \in \mathbb{V}$ e $(\lambda u)v = -v(\lambda u)$. □

1.2 Elementos Inversíveis

Um multivetor $\mathcal{A}$ é *inversível* se existe um multivetor $\mathcal{A}^{-1}$ tal que

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = 1. \tag{1.11}$$

Se os multivetores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ comutam entre si e $\mathcal{B}$ é inversível, podemos usar a notação de fração para $\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}. \tag{1.12}$$

Em geral, $\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1} \neq \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ e, nesse caso, a notação de fração é ambígua. Os números reais comutam com todos os multivetores, portanto, se λ é um número real não-nulo, usaremos:

$$\frac{\mathcal{A}}{\lambda} \tag{1.13}$$

para representar $\lambda^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\lambda^{-1}$.

Exemplo 1.3. Um vetor não-nulo v é inversível e seu inverso $v^{-1} = v/v^2$ é um vetor.

Demonstração. Seja v um vetor não-nulo, então, por A8, v^2 é um número real não-nulo e, por A7, v/v^2 é um vetor. Além disso,

$$v\frac{v}{v^2} = \frac{v^2}{v^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{v}{v^2}v = \frac{v^2}{v^2} = 1,$$

logo $v^{-1} = v/v^2$.

□

Exemplo 1.4. Um bivetor não-nulo B é inversível e seu inverso é um bivetor:

$$B^{-1} = \frac{B}{B^2}. \tag{1.14}$$

Demonstração. Mostrou-se no Exemplo 1.1 que se B é um bivetor não-nulo então B^2 é um número real não-nulo e, no Exemplo 1.2 que o produto de um número real por um bivetor é um bivetor. Logo B/B^2 é um bivetor e

$$B\frac{B}{B^2} = \frac{B^2}{B^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{B}{B^2}B = \frac{B^2}{B^2} = 1.$$

Portanto, B é inversível e $B^{-1} = \frac{B}{B^2}$.

□

Para facilitar os cálculos apresentaremos a seguir duas ferramentas úteis.

1.3 Produto Interno

O *produto interno* entre dois vetores a e b é definido por:

$$\langle a, b\rangle = \frac{ab + ba}{2}. \tag{1.15}$$

O produto interno entre vetores produz um número real. De fato, se a e b são vetores, $a + b$ também o é, portanto, a^2, b^2 e $(a + b)^2$ são números reais e:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2\langle a, b\rangle.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Portanto,

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - a^2 - b^2] \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Exemplo 1.5. $v^2 = \langle v, v\rangle$, qualquer que seja o vetor v.

Demonstração.

$$\langle v, v\rangle = \frac{vv + vv}{2} = \frac{2v^2}{2} = v^2. \tag{1.18}$$

□

A Equação (1.15) implica que $\langle a, b\rangle = 0$ se e somente se $ab = -ba$. Nesse caso, dizemos que os vetores a e b são *ortogonais* e indicamos essa propriedade por $a \perp b$:

$$a \perp b \quad \iff \quad \langle a, b\rangle = 0. \tag{1.19}$$

Essa é a primeira correspondência entre a geometria e a álgebra

Exemplo 1.6. $\mathbb{B} = \{uv \,|\, u,\ v \in \mathbb{V} \text{ e } \langle u, v\rangle = 0\}$.

Demonstração. B é bivetor se e somente se existem vetores u e v tais que $B = uv$ e $uv = -vu$. A última igualdade é verdadeira se e somente se $uv + vu = 0$ se e somente se $\langle u, v\rangle = 0$. Portanto,

$$\mathbb{B} = \{uv \,|\, u,\ v \in \mathbb{V} \text{ e } \langle u, v\rangle = 0\}.$$

$\square$

Exemplo 1.7. Se u é um vetor e $\langle u, v\rangle = 0$ para todo vetor v, então $u = 0$.

Demonstração. Em particular para $v = u$, tem-se $\langle u, u\rangle = u^2 = 0$. Logo $u = 0$. $\square$

O produto interno possui boas propriedades algébricas, ele é comutativo, distributivo e homogêneo:

Proposição 1. *Se a, b e c são vetores e se λ é um número real, então:*

I1 *Comutatividade:*

$$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle. \tag{1.20}$$

I2 *Distributividade:*

$$\langle a, b + c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle. \tag{1.21}$$

I3 *Homogeneidade:*

$$\langle \lambda a, b\rangle = \langle a, \lambda b\rangle = \lambda\langle a, b\rangle. \tag{1.22}$$

Demonstração. .

I1 Usando a definição de produto interno e o Axioma A1, tem-se:

$$\langle a, b\rangle = \frac{ab + ba}{2} = \frac{ba + ab}{2} = \langle b, a\rangle.$$

I2

$$\langle a, b + c\rangle = \frac{a(b + c) + (b + c)a}{2}.$$

Por A3,

$$\langle a, b + c\rangle = \frac{ab + ac + ba + ca}{2}.$$

Por A1,

$$\langle a, b+c\rangle = \frac{ab+ba+ac+ca}{2} = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle.$$

I3

$$\langle \lambda a, b\rangle = \frac{\lambda ab + b\lambda a}{2}.$$

Por A3 e A6,

$$\langle \lambda a, b\rangle = \frac{\lambda ab + \lambda ba}{2} = \frac{\lambda(ab+ba)}{2} = \lambda\langle a, b\rangle.$$

A segunda igualdade é análoga.

□

Exemplo 1.8. Se u e v são vetores ortogonais não-nulos, a única solução real da equação

$$xu + yv = 0 \tag{1.23}$$

é $x = y = 0$.

Demonstração. Operando internamente ambos os membros da Equação (1.23) com o vetor u, obtém-se $\langle u, xu + yv\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$. Daí, pela propriedade I2, $\langle u, xu\rangle + \langle u, yv\rangle = 0$ e, pela propriedade I3, $x\langle u, u\rangle + y\langle u, v\rangle = 0$. Como u e v são vetores não-nulos e ortogonais, tem-se $\langle u, u\rangle = u^2 \neq 0$ e $\langle u, v\rangle = 0$, portanto, $x = 0$. Analogamente, $\langle v, xu+yv\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$ implica $y = 0$. □

Exemplo 1.9. Seja a um vetor não-nulo e b um vetor qualquer, então:

$$b^N = b - \frac{\langle a, b\rangle}{a^2}a \tag{1.24}$$

é um vetor ortogonal ao vetor a.

Demonstração.

$$\begin{aligned}\langle a, b^N\rangle &= \langle a, b - \frac{\langle a,b\rangle}{a^2}a\rangle\\ &= \langle a,b\rangle - \frac{\langle a,b\rangle}{a^2}\langle a,a\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

1.4 Produto Exterior

O *produto exterior* entre os vetores a e b é definido por:

$$a \wedge b = \frac{ab - ba}{2}. \tag{1.25}$$

Segue-se imediatamente da definição que $a \wedge a = 0$ e

$$a \wedge b = ab \iff ab = -ba \iff a \perp b. \tag{1.26}$$

O produto exterior entre dois vetores é um bivetor. De fato, se $a = 0$ não há o que se demonstrar. Caso contrário, seja

$$b^N = b - \frac{\langle a,b\rangle}{a^2}a, \tag{1.27}$$

então a é ortogonal a b^N e

$$a \wedge b = ab^N, \tag{1.28}$$

que é um bivetor.

O produto exterior também tem boas propriedades algébricas, ele é anticomutativo, distributivo e homogêneo.

Proposição 2. *Se λ é um número real e a, b e c são vetores, então:*

E1 *Anticomutatividade:*

$$a \wedge b = -b \wedge a. \tag{1.29}$$

E2 *Distributividade:*

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c. \tag{1.30}$$

E3 *Homogeneidade:*

$$(\lambda a) \wedge b = a \wedge (\lambda b) = \lambda\, a \wedge b. \tag{1.31}$$

O produto geométrico de vetores se escreve naturalmente em termos dos produtos interno e exterior:

Proposição 3. *Se a e b são vetores, então:*

$$ab = \langle a, b\rangle + a \wedge b. \tag{1.32}$$

Demonstração. Imediata a partir das definições de produto interno e exterior:

$$\langle a, b\rangle + a \wedge b = \frac{ab + ba}{2} + \frac{ab - ba}{2} = ab.$$

□

Concluímos daí que o produto geométrico de vetores tem duas componentes, uma real dada pelo produto interno e uma bivetorial dada pelo produto exterior entre eles.

Exemplo 1.10. Se a e b são vetores, então ab é um bivetor se e somente se a é ortogonal a b.

Demonstração. ab é $bivetor \iff ab = -ba \iff ab + ba = 0 \iff \langle a, b\rangle = 0 \iff a \perp b$ □

Dizemos que os vetores a e b são colineares (ou paralelos), e indicamos essa propriedade por $a \parallel b$, se $a = \lambda b$ ou $b = \lambda a$, para algum número real λ.

Exemplo 1.11. a e b são vetores, então a é paralelo a b se e somente se $a \wedge b = 0$.

Demonstração. Sejam a e b vetores paralelos, então $a = \lambda b$ ou $b = \lambda a$, para algum número real λ. Suponha $a = \lambda b$, então

$$a \wedge b = (\lambda b) \wedge b = \lambda\, b \wedge b = 0. \tag{1.33}$$

Reciprocamente, suponha que $a \wedge b = 0$. Se $a = 0$, então a e b são paralelos. Logo, podemos supor $a \neq 0$. Como $a \wedge b = 0$. tem-se a igualdade:

$$ab = \langle a, b\rangle, \tag{1.34}$$

que pode ser resolvida para b :

$$b = \frac{\langle a, b\rangle}{a^2} a. \tag{1.35}$$

Nesse caso, a e b também são paralelos pois a^2 e $\langle a, b\rangle$ são escalares. $\square$

Os produtos interno e exterior de vetores são conceitos duais assim como as noções de ortogonalidade e paralelismo de vetores:

$$\begin{aligned} a \perp b &\iff \langle a, b\rangle = 0 \iff a \wedge b = ab, \\ a \parallel b &\iff a \wedge b = 0 \iff \langle a, b\rangle = ab. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Exemplo 1.12. Seja a um vetor não-nulo, decompor um vetor b na forma:

$$b = b^T + b^N, \tag{1.37}$$

em que as componentes b^T e b^N são, respectivamente, vetores paralelo e ortogonal ao vetor a.

Solução. Por um lado, b^T é paralelo ao vetor a se e somente se $a \wedge b^T = 0$. Por outro lado a é ortogonal a b^N se e somente se $\langle a, b^N\rangle = 0$. Portanto, se b^T e b^N são como no enunciado, então:

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle = \langle a, b^T\rangle = ab^T, \\ a \wedge b = a \wedge b^N = ab^N. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Como o vetor a é não-nulo, podemos resolver as igualdades acima para b^T e b^N :

$$\begin{aligned} b^T &= \frac{1}{a}\langle a, b\rangle, \\ b^N &= \frac{1}{a} a \wedge b. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Mostraremos primeiro que $b^T + b^N = b$. De fato,

$$\begin{aligned} b^T + b^N &= \frac{1}{a}\,\langle a, b\rangle + \frac{1}{a}\,a \wedge b \\ &= \frac{1}{a}(\langle a, b\rangle + a \wedge b) = \frac{1}{a}(ab) = b. \end{aligned}$$

Da expressão para o inverso do vetor $a \neq 0$, segue que

$$b^T = \frac{\langle a, b\rangle}{a^2}a$$

é um vetor paralelo ao vetor a. Além disso, tem-se

$$b^N = b - b^T = b - \frac{\langle a, b\rangle}{a^2}a,$$

que, pelo Exemplo 1.9, é um vetor ortogonal ao vetor a.

□

Proposição 4. *Se a e b são vetores, então:*

$$\langle a, b\rangle^2 - (a \wedge b)^2 = a^2b^2 \tag{1.40}$$

Demonstração. Usando as definições:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab + ba}{2}\right)^2 - \left(\frac{ab - ba}{2}\right)^2 &= \frac{abba + baab}{2} \\ &= \frac{ab^2a + ba^2b}{2} \\ &= 2\frac{a^2b^2}{2} = a^2b^2. \end{aligned}$$

□

1.5 Normas

O *módulo* ou *norma* de um vetor a, indicado por $\|a\|$, é o número real:

$$\|a\| = \sqrt{a^2}. \tag{1.41}$$

O módulo está bem definido, pois $a^2 \geq 0$.

Exemplo 1.13. Se a é um vetor, então:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}. \tag{1.42}$$

Demonstração. Se a é um vetor, então $\langle a, a\rangle = a^2 = \|a\|^2$, logo $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$.

□

Definimos o *módulo* ou *norma* de um bivetor B por

$$\|B\| = \sqrt{-B^2}. \tag{1.43}$$

Exemplo 1.14. (Desigualdades de Cauchy-Schwartz) Se a e b são vetores, então:

a) $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\|\|b\|$ e a igualdade ocorre se e somente se $a||b$

b) $\|a \wedge b\| \leq \|a\|\|b\|$ e a igualdade ocorre se e somente se $a \perp b$.

Demonstração.

a) Como $a \wedge b$ é um bivetor, temos $(a \wedge b)^2 \leq 0$ e $a \wedge b = 0$ se e somente se os vetores a e b são paralelos. Portanto, pela Proposição 4 temos:

$$\langle a, b\rangle^2 = (a \wedge b)^2 + a^2b^2 \leq a^2b^2 \tag{1.44}$$

em que a desigualdade é uma igualdade se e somente $a \parallel b$. O resultado segue-se por extração da raiz quadrada dos membros extremos.

b) Tem-se $\langle a, b\rangle = 0$ se e somente se os vetores a e b são ortogonais. Novamente, pela Proposição 4 temos:

$$-(a \wedge b)^2 = a^2b^2 - \langle a, b\rangle^2 \leq a^2b^2 \tag{1.45}$$

em que a desigualdade é uma igualdade se e somente se $a \perp b$ e o resultado obtém-se por extração da raiz quadrada dos membros extremos da desigualdade.

□

Mostraremos na próxima seção que se A e B são bivetores, então $A + B$ é um bivetor. Aceitando esse fato a ser demonstrado, podemos relacionar as principais propriedades das normas de vetores e bivetores em uma única proposição.

Proposição 5. *Se os multivetores a e b são vetores ou A e B bivetores, então:*

N1 *Homogeneidade positiva:*

$$\begin{aligned} \|\lambda a\| &= |\lambda|\|a\| \\ \|\lambda A\| &= |\lambda|\|A\|. \end{aligned} \tag{1.46}$$

N2 *Desigualdade triangular:*

$$\begin{aligned} \|a+b\| &\leq \|a\| + \|b\| \\ \|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\|. \end{aligned} \tag{1.47}$$

N3 *Positividade:*

$$\begin{aligned} \|a\| \geq 0 \quad &e \quad \|a\| = 0 \iff a = 0 \\ \|A\| \geq 0 \quad &e \quad \|A\| = 0 \iff A = 0. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Demonstração.

N1 Essas propriedades são obtidas diretamente das definições:

$$\|\lambda a\| = \sqrt{(\lambda a)^2} = \sqrt{(\lambda^2 a^2)} = |\lambda|\|a\|$$

e

$$\|\lambda A\| = \sqrt{-(\lambda A)^2} = \sqrt{-(\lambda A \lambda A)} = \sqrt{-(\lambda^2 A^2)} = |\lambda|\|A\|.$$

N2 Um cálculo direto produz:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2\langle a, b\rangle \\ &\leq a^2 + b^2 + 2\|a\|\|b\| \\ &= (\|a\| + \|b\|)^2 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Na passagem da primeira para a segunda linha usou-se Cauchy-Schwartz. A desigualdade final é obtida por extração da raiz quadrada dos membros extremos.

Adiaremos a demonstração da outra desigualdade para a próxima Seção, Corolário 4, na qual teremos recursos mais apropriados para fazê-la.

N3 Direto a partir das definições.

$\square$

Vetores ou bivetores são ditos *unitários* se eles têm norma um. Vetores são *ortonormais*, se são ortogonais e unitários. Os vetores $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ são *ortonormais*.

Em geral, temos usado letras itálicas minúsculas para indicar vetores. Excepcionalmente, usaremos a letra romana 'e' para indicar vetores ortonormais. Usaremos a letra em negrito **i** para indicar um bivetor unitário, em contraste com a prática de representar bivetores por letras itálicas maiúsculas exercida até agora.

Exemplo 1.15. Um bivetor **i** é unitário se e somente se existem vetores ortonormais e_1 e e_2 tais que:

$$\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2. \tag{1.50}$$

Demonstração. Suponha que **i** é unitário. Existem vetores a e b ortogonais tais que $\mathbf{i} = ab$. Como **i** é unitário, a e b são não-nulos. Defina

$$\mathrm{e}_1 = \frac{a}{\|a\|}, \qquad \mathrm{e}_2 = \frac{b}{\|b\|}. \tag{1.51}$$

Então $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ são vetores ortonormais e:

$$\mathbf{i} = ab = \|a\|\|b\|\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2. \tag{1.52}$$

Como

$$1 = \|\mathbf{i}\|^2 = -\mathbf{i}^2 = \|a\|^2\|b\|^2, \tag{1.53}$$

tem-se $\|a\|\|b\| = 1$ e, portanto:

$$\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2. \tag{1.54}$$

Reciprocamente, se $\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$, em que e_1 e e_2 são ortonormais, então

$$\mathbf{i}^2 = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_1^2\mathrm{e}_2^2 = -1.$$

Portanto, **i** é unitário. $\square$

Exemplo 1.16. Existem bivetores unitários. De fato, pelo Axioma **A9**, existe um bivetor $B \neq 0$, então o bivetor $\mathbf{i} = B/\|B\|$ é unitário.

1.6 Bases

Um par $\mathcal{B} = \{a,\, b\}$ de vetores é uma *base* do conjunto de vetores $\mathbb{V}$ se todo vetor v se escreve de maneira única na forma

$$v = \alpha a + \beta b, \tag{1.55}$$

em que $\alpha,\ \beta$ são números reais. A base de $\mathcal{B}$ é *ortogonal* se é composta por vetores ortogonais.

Proposição 6. *Se os vetores a e b são ortogonais e não-nulos, então $\mathcal{B} = \{a,\, b\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{V}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{V}$. Seja v um vetor, então existem números reais α e β tais que:

$$v = a\alpha + b\beta. \tag{1.56}$$

Multiplicando internamente pelos vetores a e b, obtemos:

$$\langle a, v\rangle = \langle a, \alpha a + \beta b\rangle = \alpha\langle a, a\rangle + \beta\langle a, b\rangle = \alpha a^2$$

logo

$$\alpha = \frac{\langle a, v\rangle}{a^2}, \qquad \beta = \frac{\langle v, b\rangle}{b^2}. \tag{1.57}$$

Portanto, se os números α e β existem, então eles são únicos. Vamos mostrar que o vetor v se escreve de fato na forma acima.

Sejam

$$v' = v - a\alpha - b\beta, \tag{1.58}$$

em que os números α e β têm os valores acima obtidos. $\square$

Multiplicando internamente essa equação pelos vetores a e b, conclui-se que:

$$\langle a, v' \rangle = \langle a, v \rangle - \alpha \langle a, a \rangle - \beta \langle a, b \rangle = \alpha a^2 - \alpha a^2 = 0$$

$$\langle a, v' \rangle = \langle b, v' \rangle = 0. \tag{1.59}$$

Portanto, por um lado o vetor v' anticomuta com os vetores a e b ,
$\langle a, v' \rangle = 0$ logo $av' + v'a = 0$ ou seja $av' = -v'a$
Por outro lado $B = ab$ é um bivetor, pois a e b são ortogonais. Logo,

$$v'B = v'ab = -av'b = abv' = Bv'. \tag{1.60}$$

Em consequência, pelo Axioma **A10**, $v' = 0$. Conclui-se que o vetor v se escreve de modo único na forma

$$v = a\alpha + b\beta. \tag{1.61}$$

Corolário 1. *Se $B = ab$ é um bivetor não-nulo, então $\mathcal{B} = \{a,\ b\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{V}$.*

Demonstração. Como $B = ab$ é um bivetor, os vetores a e b são ortogonais. Pela Proposição 6 $\mathcal{B} = \{a,\ b\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{V}$. $\square$

Proposição 7. *Se $\mathbf{i}$ é um bivetor unitário, então para todo bivetor B existe um número real λ tal que*

$$B = \lambda\,\mathbf{i} \tag{1.62}$$

e $|\lambda| = \|B\|$.

Demonstração. Como $\mathbf{i}$ é unitário, existem vetores ortonormais e_1 e e_2 tais que $\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$. Pelo corolário anterior $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1,\ \mathrm{e}_2\}$ é uma base. Sejam a e b vetores tais que $B = ab$. Sejam os reais α_1, α_2, β_1 e β_2 tais que $a = \alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2$, e $b = \beta_1\mathrm{e}_1 + \beta_2\mathrm{e}_2$. Então:

$$B = (\alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2) \wedge (\beta_1\mathrm{e}_1 + \beta_2\mathrm{e}_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{i}.$$

Tome $\lambda = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ e o resultado se segue.

$$B^2 = (\lambda \mathbf{i})^2 = \lambda^2\mathbf{i}^2 = -\lambda^2$$
$$\|B\| = \sqrt{-B^2} = \sqrt{\lambda^2} = |\lambda|.$$

□

Corolário 2. *Se A e B são bivetores e λ é um número real, então λA e $A + B$ são bivetores.*

Demonstração. Seja **i** um bivetor unitário, pela proposição acima demonstrada, existem números reais λ_A e λ_B tais que $A = \lambda_A\mathbf{i}$ e $B = \lambda_B\mathbf{i}$. Daí seque que

$$\lambda A = (\lambda\lambda_A)\mathbf{i} \quad \text{e} \quad A + B = (\lambda_A + \lambda_B)\mathbf{i}$$

são bivetores. □

Corolário 3. *O produto geométrico de dois bivetores é um número real e os bivetores comutam entre si.*

Demonstração. Sejam $A = \lambda_A\mathbf{i}$ e $B = \lambda_B\mathbf{i}$, então

$$AB = (\lambda_A\mathbf{i})(\lambda_B\mathbf{i}) = -\lambda_A\lambda_B = BA.$$

□

Corolário 4 (Desigualdade Triangular para Bivetores)**.** *Se A e B são bivetores então*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|. \tag{1.63}$$

Demonstração. Pelo corolário anterior, temos

$$\begin{aligned} -(A + B)^2 &= -A^2 - B^2 - 2AB \\ &\leq -A^2 - B^2 + 2\|A\|\|B\| \\ &= (\|A\| + \|B\|)^2. \end{aligned}$$

O resultado se segue por extração de raízes dos membros extremos. □

Corolário 5. *O produto de um bivetor por um vetor é um vetor e os vetores anticomutam com os bivetores.*

Demonstração. Pela Proposição 7, basta mostrar o resultado para bivetores unitários. Seja $\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$, em que e_1 e e_2 são ortonormais e v um vetor. Como $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$ é uma base, existem números reais λ e α tais que $v = \alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} v\mathbf{i} &= (\alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2)\mathbf{i} = -\alpha_2\mathrm{e}_1 + \alpha_1\mathrm{e}_2 \\ &= -(\alpha_2\mathrm{e}_1 - \alpha_1\mathrm{e}_2) = -\mathbf{i}(\alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2) = -\mathbf{i}v. \end{aligned}$$

O último membro na sequência de igualdades da primeira linha é um vetor, portanto, $v\mathbf{i}$ é um vetor. Os membros extremos da sequência de mostram que $\mathbf{i}$ anticomuta com v. □

Proposição 8. *Se o vetor a e o bivetor B são não-nulos, então $\mathcal{B} = \{a, aB\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{V}$.*

Demonstração. Pelo corolário acima, aB é um vetor. Mas $a(aB) = a^2B \neq 0$. Temos que a e aB são vetores e $a(aB) = a^2B$ é bivetor não-nulo . Logo pelo Corolário 1, $\mathcal{B} = \{a, aB\}$ é uma base ortogonal. □

Proposição 9. *Se os vetores a e b não são colineares, então $\mathcal{B} = \{a, b\}$ é uma base de $\mathbb{V}$.*

Demonstração. Como a e b não são colineares, então a e

$$b^N = b - \frac{\langle a, b\rangle}{a^2}a \tag{1.64}$$

são não-nulos e ortogonais. Portanto, $\mathcal{B} = \{a, b^N\}$ é uma base de $\mathbb{V}$. Consequentemente, existem reais α_0 e β_0 tais que

$$v = \alpha_0 a + \beta_0 b^N = (\alpha_0 - \beta_0\frac{\langle a, b\rangle}{a^2})a + \beta_0 b = \alpha a + \beta b \tag{1.65}$$

Para mostrar que os números reais α e β acima obtidos são únicos, vamos recalculá-los a partir do produto exterior dos vetores a e b. Multiplicando exteriormente a equação

$$v = a\alpha + b\beta. \tag{1.66}$$

à esquerda por a e à direita por b, tem-se:

$$\alpha\, a \wedge b = v \wedge b \quad \text{e} \quad \beta\, a \wedge b = a \wedge v. \tag{1.67}$$

Como a e b são não-colineares, $a \wedge b \neq 0$. Portanto:

$$\alpha = \frac{v \wedge b}{a \wedge b} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{a \wedge v}{a \wedge b}. \tag{1.68}$$

$\square$

Teorema 1 (Caraterização de $\mathbb{G}$)**.** *Para todo multivetor $\mathcal{A}$ existem números reais α_0, α_1, α_2, α_3 tais que*

$$\mathcal{A} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{i}, \tag{1.69}$$

em que $\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$ é um bivetor unitário e e_1, e_2 são vetores ortonormais.

Demonstração. Seja A um multivetor, pelo Axioma **A11** existem um número real α_0, um vetor v e um bivetor B tais quem

$$\mathcal{A} = \alpha_0 + v + B. \tag{1.70}$$

Pelo Exemplo 1.16 existe um bivetor unitário, digamos $\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$, em que e_1 e e_2 são ortonormais; pelo Corolário 1 existem números reais α_1, α_2, tais que $v = \alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2$; pela Proposição 7, existe um número real α_3 tal que $B = \alpha_3\mathbf{i}$. Portanto, todo multivetor $\mathcal{A}$ pode ser escrito na forma

$$\mathcal{A} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{i}, \tag{1.71}$$

conforme o enunciado. $\square$

Exemplo 1.17. Dados os vetores $\mathcal{A} = 1 + 3\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 + 3\mathbf{i}$ e $\mathcal{B} = 2 + 3\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + 4\mathbf{i}$ calcule $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

Solução. $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 1 + 2 + 3\mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 + 2\mathrm{e}_2 + 3\mathbf{i} + 4\mathbf{i} = 3 + 6\mathrm{e}_1 + 6\mathrm{e}_2 + 7\mathbf{i}$.

e

$\mathcal{A} - \mathcal{B} = 1 - 2 + 3\mathrm{e}_1 - 3\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 - 2\mathrm{e}_2 + 3\mathbf{i} - 4\mathbf{i} = -1 + 0\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 - \mathbf{i}$.

$\square$

1.7 Bases Ortonormais

Uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ é *ortonormal* se é composta por vetores ortonormais. Ter uma base ortonormal a disposição além de simplificar os cálculos permite relacionar alguns conceitos da álgebra geométrica do plano com seus correspondentes clássicos.

Sejam a, b vetores e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ números reais tais que $a = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2$, $b = \beta_1 \mathrm{e}_1 + \beta_2 \mathrm{e}_2$ e $\mathbf{i} = \mathrm{e}_1 \mathrm{e}_2$, em que $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1,\ \mathrm{e}_2\}$ é uma base ortonormal. Então o produto interno é dado por:

$$\langle a, b \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \tag{1.72}$$

e o produto exterior por:

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \mathbf{i}. \tag{1.73}$$

Exemplo 1.18. Sejam $a = 2\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2$ e $b = 3\mathrm{e}_1 - 2\mathrm{e}_2$. Calcule $\langle a, b \rangle$ e $a \wedge b$.

Solução.

$$\langle a, b \rangle = 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = -2$$

e

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} = [2 \cdot (-2) - 3 \cdot 4]\mathbf{i} = -16\mathbf{i}.$$

□

Exemplo 1.19. Obter uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1,\ \mathrm{e}_2\}$ a partir de um vetor não-nulo a qualquer.

Solução. Seja

$$\mathrm{e}_1 = \frac{a}{\|a\|} \quad \text{e} \quad \mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_1 \mathbf{i}. \tag{1.74}$$

Já sabemos pela proposição 8 que e_1 e e_2 são ortogonais. Como e_1 foi definido de modo a ser unitário, basta mostrar que e_2 é unitário. De fato,

$$\langle \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_2 \rangle = \mathrm{e}_2 \mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_1 \mathbf{i}\, \mathrm{e}_1 \mathbf{i} = -\mathrm{e}_1^2\, \mathbf{i}^2 = 1. \tag{1.75}$$

□

Exemplo 1.20. Escrever o vetor v na base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1,\ \mathrm{e}_2\}$.

Solução. Sejam α_1 e α_2 números reais tais que $v = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2$. Operando internamente ambos os membros dessa equação primeiro por e_1, depois por e_2, obtêm-se

$$\alpha_1 = \langle v, \mathrm{e}_1 \rangle \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \langle v, \mathrm{e}_2 \rangle. \tag{1.76}$$

□

Capítulo 2

Aplicações

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações da teoria desenvolvida no capítulo anterior.

2.1 Sistemas de Equações Lineares

Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se conhecermos uma base qualquer $\mathcal{B} = \{f_1,\ f_2\}$, podemos usar os métodos da seção anterior para resolvê-lo. Para isso, sejam

$$\begin{aligned} a &= a_1f_1 + a_2f_2 \\ b &= b_1f_1 + b_2f_2 \\ c &= c_1f_1 + c_2f_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Então o sistema se escreve em forma vetorial como:

$$ax + by = c. \tag{2.3}$$

Temos, portanto, dois casos principais:

1. *Os vetores a e b não são colineares:* nesse caso eles formam uma base e a única solução

do sistema é:

$$(ax+by)\wedge b = c\wedge b$$

$$x = \frac{c\wedge b}{a\wedge b}, \qquad\qquad y = \frac{a\wedge c}{a\wedge b}, \tag{2.4}$$

2. *Os vetores a e b são colineares*: digamos que seja $b = \lambda a$.

   (a) Se $a = 0$, então $b = 0$ e o sistema possui solução se e somente se $c = 0$. Se existirem soluções, o conjunto solução é $\mathbb{R}^2 = \{(x,\, y)\,|\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Se $a \neq 0$, então o sistema possui solução se e somente se a, b e c são colineares ou, equivalentemente, se e somente se

   $$a\wedge c = c\wedge b = 0. \tag{2.5}$$

   Caso existam soluções, elas são os pares de números reais $(x,\, y)$ tais que

   $$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Exemplo 2.1. Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x - y &= 2. \end{aligned}$$

Seja a base $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1,\, \mathrm{e}_2\}$.

Solução. Sejam

$$\begin{aligned} a &= 2\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 \\ b &= 3\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2 \\ c &= 8\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2. \end{aligned}$$

Então o sistema se escreve em forma vetorial como $ax + by = c$. Lembrando que $\mathrm{e}_1\wedge\mathrm{e}_1 = 0$, $\mathrm{e}_2\wedge\mathrm{e}_2 = 0$ e $\mathbf{i} = \mathrm{e}_1\wedge\mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_2\wedge\mathrm{e}_1$.

Os vetores a e b não são colineares, nesse caso eles formam uma base e a única solução do sistema é:

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} = (-2 - 12)\mathbf{i} = -14\mathbf{i}$$
$$a \wedge c = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} = (4 - 32)\mathbf{i} = -28\mathbf{i}$$
$$c \wedge b = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} = (-8 - 6)\mathbf{i} = -14\mathbf{i}.$$

$$x = \frac{c \wedge b}{a \wedge b} = \frac{-14\mathbf{i}}{-14\mathbf{i}} = 1, \qquad y = \frac{a \wedge c}{a \wedge b} = \frac{-28\mathbf{i}}{-14\mathbf{i}} = 2,$$

□

Exemplo 2.2. Resolva o sistema de equações lineares

$$2x + 4y = 10$$
$$5x + 10y = 25.$$

Tome a base $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$.

Solução. Sejam

$$a = 2\mathrm{e}_1 + 5\mathrm{e}_2$$
$$b = 4\mathrm{e}_1 + 10\mathrm{e}_2$$
$$c = 10\mathrm{e}_1 + 25\mathrm{e}_2.$$

Então o sistema se escreve em forma vetorial como $ax + by = c$. Lembrando que $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_1 = 0$, $\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_2 = 0$ e $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_1$.

Os vetores a e b são colineares, $b = \lambda a$ nesse caso:

$$a \wedge c = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} \mathbf{i} = (50 - 50)\mathbf{i} = 0$$
$$c \wedge b = \begin{vmatrix} 10 & 25 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} \mathbf{i} = (100 - 100)\mathbf{i} = 0.$$

$$\langle a, a\rangle = 2^2 + 5^2 = 29.$$
$$\langle a, b\rangle = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 10 = 58.$$
$$\langle a, c\rangle = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 25 = 145.$$

então, multiplicando internamente a equação $ax + by = c$ por a temos

$\langle a, a\rangle x + \langle a, b\rangle y = \langle a, c\rangle$

ou seja $29x - 58y = 145$ portanto $x = 5 - 2y$ $\square$

2.2 Complexos e Perplexos

Um subconjunto não-vazio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{G}$ é uma *subálgebra* se dados um número real λ e elementos $z,\ w$ de $\mathbb{S}$ então: (i) λz; (ii) $z + w$; (iii) zw são elementos de $\mathbb{S}$. A álgebra geométrica do plano tem como subálgebras cópias das álgebras dos números complexos e dos números perplexos.

Números Complexos Seja $\mathbf{i}$ um bivetor unitário e

$$\mathbb{C} = \{\alpha + \beta\mathbf{i} \,|\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}. \tag{2.7}$$

Sejam $z = \alpha_1 + \beta_1\mathbf{i}$ e $w = \alpha_2 + \beta_2\mathbf{i}$, então

$$zw = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mathbf{i} \tag{2.8}$$

Isso mostra que $\mathbb{C}$ goza da propriedade (iii). As outras duas são imediatas. Além disso a regra de multiplicação acima é a mesma dos números complexos e, portanto, a subálgebra $\mathbb{C}$ é uma cópia da álgebra dos números complexos onde $i^2 = -1$.

Podemos usar a subálgebra para entender melhor o que acontece com o produto geométrico de dois vetores. Seja a e b vetores, então

$$ab = \langle a, b\rangle + a \wedge b = \langle b, a\rangle - b \wedge a = \overline{ba}. \tag{2.9}$$

Concluímos que produto geométrico dos vetores a e b é um número complexo e ba é o conjugado de ab.

Exemplo 2.3. Sejam os vetores $a = 2\mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2$ e $a = 4\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2$. Calcule ab e ba

Solução.

$$ab = \langle a, b\rangle + a \wedge b = 2.4 + 3.(-1) + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} = 5 - 14\mathbf{i}. \tag{2.10}$$

$$ba = \langle b, a\rangle + b \wedge a = 4.2 + (-1).3 + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{i} = 5 + 14\mathbf{i}. \tag{2.11}$$

logo $ab = \overline{ba}$ □

Números Perplexos Seja e um vetor unitário qualquer e

$$\mathbb{P} = \{\alpha + \beta \mathrm{e} \,|\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}. \tag{2.12}$$

Verificaremos a propriedade (iii), as outras duas também são imediatas. Sejam $z = \alpha_1 + \beta_1 \mathrm{e}$ e $w = \alpha_2 + \beta_2 \mathrm{e}$, então

$$zw = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mathrm{e}, \tag{2.13}$$

que é a regra de multiplicação dos números perplexos. Portanto, a subálgebra $\mathbb{P}$ é uma cópia da álgebra dos números perplexos.

2.3 Funções Trigonométricas

Nessa seção suporemos estabelecida a correspondência entre vetores e segmentos de retas orientados. Se escolhermos uma base ordenada ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$, fica definido o ângulo orientado entre dois vetores não-nulos a e b. Esse ângulo toma valores no intervalo $[0, 2\pi)$.

Sejam a e b vetores unitários e α o ângulo orientado entre eles, define-se as funções trigonométricas $\sin,\ \cos : [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}$, por

$$\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha = ab. \tag{2.14}$$

O produto geométrico de dois vetores é um número complexo.

A título de exemplo, mostraremos as três identidades básicas da trigonometria.

Proposição 10. *Sejam α e β ângulos tais que $0 \leq \alpha + \beta < 2\pi$. Então:*

1. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

2. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$;

3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Demonstração.

1. Sejam a e b vetores unitários tais que α é o ângulo orientado entre a e b, então

$$ba = \overline{ab} = \cos\alpha - \mathbf{i}\sin\alpha.$$

Logo,

$$1 = a^2b^2 = aab^2 = abba = ab\overline{ab} = (\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\alpha - \mathbf{i}\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha.$$

2 e 3. Seja c um vetor unitário tal que α é o ângulo orientado entre a e b, e β é o ângulo orientado entre b e c. Então $\alpha+\beta$ é o ângulo orientado entre a e c. Logo

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha+\beta) &= ac = a1c = ab^2c \\ &= abbc = (\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \mathbf{i}(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

e

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

□

2.4 Geometria Analítica sem Coordenadas

Um das grandes vantagens da teoria apresentada reside na facilidade de escrever expressões algébricas para conceitos geométricos sem o uso de coordenadas. Ilustraremos esse fato por meio de exemplos.

Exemplo 2.4. Sejam r a reta determinada pelos pontos A, B e s a reta determinada pelos pontos C e D. Coloque $a = \overrightarrow{AB}$ e $c = \overrightarrow{CD}$. Então r e s são concorrentes se e somente se $a \wedge c \neq 0$. Se elas forem concorrentes, o ponto de interseção E fica determinado por

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AC} \wedge c}{a \wedge c} a. \tag{2.15}$$

Demonstração. De fato, as retas r e s são paralelas ou coincidentes se e somente se os vetores a e c são paralelos, e isso ocorre, se e somente se $a \wedge c = 0$. Suponha que r e s são concorrentes, obteremos o ponto de interseção: por um lado, existe t tal que $\overrightarrow{AE} = ta$. Por outro lado, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$. Portanto,

$$ta = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}.$$

Operando exteriormente os membros da equação em destaque com c,

$$ta \wedge c = \overrightarrow{AC} \wedge c + \overrightarrow{CE} \wedge c$$

Os vetores c e $\overrightarrow{CE}$ são paralelos, pois possuem representantes na retas s, logo $\overrightarrow{CE} \wedge c = 0$. Portanto, obtém-se

$$ta \wedge c = \overrightarrow{AC} \wedge c.$$

ou seja

$$t = \frac{\overrightarrow{AC} \wedge c}{a \wedge c}$$

Daí se obtém o valor do coeficiente t, cuja substituição em $\overrightarrow{AE} = ta$ produz

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AC} \wedge c}{a \wedge c} a. \tag{2.16}$$

$\square$

Exemplo 2.5. Dadas as retas r : x = 1 + 2t, y = 2 - t e s: x = 2 + t, y = 2 - t calcule o ponto E.

Solução. Sejam $A(1,2)$ em r e $C(2,2)$ em s, logo $\overrightarrow{AC} = (1,0)$, ou seja $\overrightarrow{AC} = 1\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}_1$.

$$a = 2\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2,$$
$$c = \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2,$$

Sendo $E(x_0, y_0)$ temos

$$\overrightarrow{AE} = (x_0 - 1)\mathrm{e}_1 + (y_o - 2)\mathrm{e}_2$$

logo

$$t = \frac{\overrightarrow{AC} \wedge c}{a \wedge c} = \frac{-\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2}{-2\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2} = \frac{-\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2}{-\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2} = 1$$

então $\overrightarrow{AE} = ta = a = 2\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2$

Portanto $x_0 - 1 = 2$, $y_0 - 2 = -1$ ou seja , $x_0 = 3$ e $y_0 = 1$ então $E(3,1)$

□

2.4.1 Áreas

No estudo de geometria plana, a noção de área de figuras costuma ser introduzida por meio de axiomas complementares aos axiomas básicos, veja por exemplo [1]. Conforme veremos a seguir, a teoria apresentada nessa dissertação permite abordar o conceito de área de forma bastante direta e sem a necessidade de axiomas extras.

Proposição 11. *Sejam ABC um triângulo e P um ponto qualquer, defina $a = \overrightarrow{PA}$, $b = \overrightarrow{PB}$ e $c = \overrightarrow{PC}$, então o número*

$$\alpha = \|a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a\|. \tag{2.17}$$

não depende:

a) da escolha de P;

b) do vértice inicial;

c) e da ordem em que se percorre os vértices do triângulo;

d) e, além disso,

$$\alpha = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|. \tag{2.18}$$

Demonstração. De fato, sejam Q um outro ponto:

$$\tilde{a} = \overrightarrow{QA}, \qquad \tilde{b} = \overrightarrow{QB}, \qquad \tilde{c} = \overrightarrow{QC}. \tag{2.19}$$

Então:

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{PQ} + \tilde{a} \\ b &= \overrightarrow{PQ} + \tilde{b} \\ c &= \overrightarrow{PQ} + \tilde{c}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Daí,

$$a \wedge b = \tilde{a} \wedge \tilde{b} + \tilde{a} \wedge \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \wedge \tilde{b} \tag{2.21}$$

$$b \wedge c = \tilde{b} \wedge \tilde{c} + \tilde{b} \wedge \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \wedge \tilde{c} \tag{2.22}$$

$$c \wedge a = \tilde{c} \wedge \tilde{a} + \tilde{c} \wedge \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \wedge \tilde{a}. \tag{2.23}$$

Adicionando os membros das igualdades acima, têm-se:

$$\begin{aligned} \alpha &= \|\tilde{a} \wedge \tilde{b} + \tilde{b} \wedge \tilde{c} + \tilde{c} \wedge \tilde{a} + (\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}) \wedge \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \wedge (\tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{a})\| \\ &= \|\tilde{a} \wedge \tilde{b} + \tilde{b} \wedge \tilde{c} + \tilde{c} \wedge \tilde{a}\|. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Se mudarmos o vértice inicial, digamos de A para B, apenas reordenaremos as parcelas na definição de α, enquanto se mudarmos a ordem em que percorremos o vértices do triângulo, mudaremos a ordem e o sinal das parcelas na definição de α, mas isso não o altera.

Como escolha do ponto P não altera o valor do número α, podemos escolher $P = A$ e, daí, concluir que

$$\alpha = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|. \tag{2.25}$$

$\square$

Uma *região triangular* é o conjunto dos pontos que pertencem a segmentos cujos extremos estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é a *fronteira* e o conjunto dos pontos da região que não estão na fronteira é o *interior* da região triangular. A *área* da região triangular determinada pelo triângulo ABC é o número:

$$\text{área}(ABC) = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|. \tag{2.26}$$

Exemplo 2.6. Dados os pontos A(1,0), B(4,3), C(2,2) Calcule a área do triângulo

Demonstração. Sejam

$$\overrightarrow{AB} = 3\mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2.$$
$$\overrightarrow{AC} = \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2$$

Portanto,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} == (6-3)\mathbf{i} = 3\mathbf{i}.$$

Então

$$\alpha = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{-(3i)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{área}(ABC) = \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

Exemplo 2.7. A área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

Demonstração. Seja ABC um triângulo e $h = \overrightarrow{AC}^N$ o vetor altura relativo à base AB, então,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = AB \wedge h = \overrightarrow{AB}\,h.$$

Portanto,

$$-4\,\text{área}(ABC)^2 = (\overrightarrow{AB}\,h)^2 = ABhABh = -\overrightarrow{AB}^2 h^2 = -\|\overrightarrow{AB}\|^2\|h\|^2.$$

Logo,

$$\text{área}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\|h\|.$$

□

Um *polígono* é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_N$ e pela sequência de segmentos, chamados de *arestas*, A_1A_2, $A_2A_3, \cdots, A_{N-1}A_N$, A_NA_1 respeitadas as seguintes condições: (a) uma aresta intercepta exatamente as arestas que lhe são imediatamente anterior e posterior na sequência; (b) entende-se por aresta imediatamente anterior a primeira como sendo a última; por aresta imediatamente posterior a última como sendo a primeira; (c) duas arestas não se interceptam ou se interceptam exatamente em pontos que lhes são extremos; (d) duas arestas que se interceptam não pertencem à mesma reta.

Uma *região poligonal* é uma união de regiões triangulares que duas a duas não têm pontos interiores em comum. Um ponto é interior à região a uma região poligonal se ele é interior a um triângulo contido na região poligonal. O *interior* de uma região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A *fronteira* de uma região poligonal é o conjunto de pontos da região que não pertencem ao seu interior. Uma região poligonal é *simples* se sua fronteira é um polígono. Podemos indicar uma região poligonal simples por meio de uma sequência de pontos que determinam sua fronteira.

A demonstração da proposição anterior é facilmente adaptável para a proposição mais geral a seguir.

Proposição 12. *Seja $A_1, A_2, \ldots, A_N$ uma sequência circular de pontos, P um ponto qualquer e $a_n = \overrightarrow{PA_n}$, $n = 1, \ldots, N$. Então o número*

$$\alpha = \|a_1 \wedge a_2 + a_2 \wedge a_3 + \cdots + a_{N-1} \wedge a_N + a_N \wedge a_1\| \tag{2.27}$$

não depende:

a) da escolha de P;

b) do ponto inicial;

c) e do sentido em que se percorre os pontos da sequência.

Demonstração. A demonstração é a mesma da proposição anterior, exceto por uma lista maior de equações envolvendo os bivetores $a_n \wedge a_{n+1}$ ($n = 1, \ldots, N$) e $a_N \wedge a_1$.

□

Seja $\mathcal{P} = A_1A_2\cdots A_N$ uma região poligonal simples e $a_n = \overrightarrow{PA_n}$, $n = 1, \ldots, N$, em que P é um ponto qualquer, define-se a área de $\mathcal{P}$ por

$$\text{área}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}\|a_1 \wedge a_2 + a_2 \wedge a_3 + \cdots + a_N \wedge a_1\|. \tag{2.28}$$

Exemplo 2.8. A área de um paralelogramo $ABCD$ é dada por

$$\text{área}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|. \tag{2.29}$$

Demonstração. Tome na definição de área de um polígono, $P = A$, então,

$$\text{área}(ABCD) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\|.$$

Temos que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Como $ABCD$ é um paralelogramo $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Logo, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$. Portanto,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \wedge \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}.$$

Daí segue que

$$\text{área}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|.$$

□

Exemplo 2.9. A área de um paralelogramo é o produto de uma base pela altura correspondente.

Demonstração. A demonstração é mesma feita para o triângulo, exceto pelo fator $1/2$. □

Ainda como um exemplo, utilizaremos a relação entre áreas e produto exterior para obter um expressão para a distância de um ponto a uma reta.

Exemplo 2.10. Seja A um ponto e r a reta determinada pelos pontos B e C. Ponha $a = \overrightarrow{BC}$. Mostre que a distância de A a r é dada por

$$\text{dist}(A, r) = \frac{\|\overrightarrow{BA} \wedge a\|}{\|a\|}. \tag{2.30}$$

Solução. A distância de A a r é a altura h do paralelogramo determinado pelos segmentos AB e

BC relativa ao lado BC. Logo, pelos dois exemplos anteriores, vale a igualdade

$$\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = h\|\overrightarrow{BC}\|.$$

Como $a = \overrightarrow{BC}$, segue que

$$\text{dist}(A, r) = h = \frac{\|\overrightarrow{BA} \wedge a\|}{\|a\|}.$$

$\square$

2.5 Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho a Álgebra Geométrica do Plano segundo o formalismo da álgebra a partir de um mínimo de axiomas possível, que foram escolhidos de forma a tornar mais simples nossas demonstrações. Essa abordagem não relaciona imediatamente conceitos algébricos e geométricos, mas permite estender naturalmente as fórmulas apresentadas ao espaço e a outras dimensões. Há assim um ganho conceitual e prático inestimável. De fato, ao apresentarmos vetores como objetos puramente algébricos, sem qualquer significado geométrico, embora nosso objetivo fosse aplicar a geometria, deixamos abertas as possibilidades para um horizonte maior de aplicações. Entre as vantagens de se estudar geometria através da álgebra geométrica destacamos a naturalidade com que aparecem os números complexos, e como as interseções de retas se escrevem como produto de elementos da álgebra sem a necessidade de explicitar coordenadas.

A Álgebra Geométrica é uma estrutura matemática que permite aplicações na Física, Engenharia, Computação Gráfica e Matemática Avançada. Acreditamos que a Álgebra Geométrica do plano pode ser introduzida no Ensino Médio como alternativa ao ensino tradicional de Matemática e mostramos nas aplicações como essa álgebra unifica em uma única teoria conceitos atualmente apresentados de forma dissociada como sistemas de equações, geometria, geometria analítica, números complexos, funções trigonométricas, etc.

Os métodos apresentados neste trabalho permitem estender facilmente a álgebra ao espaço. Nesse caso, os quatérnios de Hamilton aparecem naturalmente como elementos da álgebra, assim como se deu com complexos e perplexos na álgebra do plano. Operações geométricas no espaço, como rotações e reflexões, tornam-se simples e intuitivas. Pode-se ainda verificar que a teoria dos determinantes também está incluída e acrescentar outros tópicos de geometria analítica como posições relativas de retas.

Enfim, é possível reescrever com vantagens a Matemática básica por meio dos conceitos e métodos da Matemática atual.

Referências Bibliográficas

[1] Cicero Mota e Marrocos Marrocos. *Intodrução à Álgebra Geométrica*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste 2013.

[2] David Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics*, volume 99. Springer, 1999.

[3] David Hestenes e Garret Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*, volume 5 of *Fundamental Theories of Physics*. Springer, 1984.

[4] Euclides. *Os Elementos*. UNESP, 2009. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo.

[5] Hermann Grassmann. *Extension Theory*. American Mathematical Society, 2000.

[6] João Lucas Marques Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1994.

[7] Nathan Moreira dos Santos. *Vetores e Matrizes*. Livros Técnicos e Cientificos, 1970.