Universidade Federal do Amazonas

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

MULTIFRACTALIDADE DOS RIOS BRASILEIROS

Celso Ricardo Caldeira Rêgo

Manaus-AM, 27 de Janeiro de 2012

Universidade Federal do Amazonas

Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

MULTIFRACTALIDADE DOS RIOS BRASILEIROS

Aluno: Celso Ricardo Caldeira Rêgo

Orientadora: Dra. Marta Silva dos Santos Gusmão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Amazonas-UFAM para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Marta Silva dos Santos Gusmão (UFAM)

Prof. Dr. Fernando Fagundes Ferreira (USP)

Prof. Dr. Hidembergue Ordozgoith da Frota (UFAM)

Manaus-AM, 27 de Janeiro de 2012

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me dado força de vontade para perseverar até o término deste trabalho.

À professora Marta Silva dos Santos Gusmão pela paciência que ela teve comigo durante os anos de graduação e mestrado, período no qual sempre me incentivou e se dedicou o máximo possível para tentar ajudar no meu crescimento pessoal e intelectual.

À minha mãe Maria da Glória Caldeira Rêgo, por ter me dado a vida, seu amor e seu apoio nesta difícil caminhada. Às minhas duas outras mães Isabel Caldeira Rêgo (tia Isabel) e Maria Celeste Parente de Almeida que me deram o seu amor e apoio; à minha madrinha tia Roseli que esteve sempre presente na minha infância; aos meus sogros Maria Auxiliadora Farias de Matos e Jocermar Texeira (Cecé) por terem me dado a sua .filha (ainda que eles não quisessem muito!!!); ao meu tio Sebastião Caldeira Rêgo que sempre foi um pai amoroso e dedicado.

Às duas maiores razões da minha vida, Jorcemara Matos Cardoso (esposa) e Maria Cecilia Matos Cardoso Rêgo (filha).

Aos meus irmãos Fredson Charles Caldeira Rêgo, Luciana Caldeira Rêgo, Marcos Vinicios Caldeira Rêgo, Rafael Caldeira Rêgo e Igor Oliveira Rêgo, pelos nossos momentos na infância. Aos amigos, Léo Cesar Parente de Almeida (John Nash) e Antônio Rosinan Damasceno (Tony) pela nossa amizade que surgiu na infância e que dura até hoje. Ao amigo Janderson Pena Teixeira, pela sua coragem por ter deixado Santarém, para irmos estudar em Parintins, ainda que nós tivéssemos pouco dinheiro (bem pouco mesmo !!!).

Aos amigos da Casa do Estudante (CEU-AM): Leandro da Costa Dutra (Caveirinha),

Manoel de Jesus Miranda (Gaúcho), Chanderlei (Chandele), Vanderlei (Mata-Mata), João Rodrigo Leitão (Joãozinho) e Leonardo (Soldado), pelas dificuldades que vencemos juntos.

Aos amigos que eu encontrei no departamento de física: Dênis Mota, Andréia Baima, Márcio Gomes, Robson e Dilcelino, pelas piadas que Dênis contava e fazia a graça da turma. Aos amigos José Diego Quintiliano Meneses e Emanuel Bezerra Constabile e Adalberto Miranda, pelos obstáculos que vencemos.

À Universidade Federal Do Amazonas (UFAM) por ter me dado a oportunidade de fazer muitas amizades. Aos professores do departamento de Física da UFAM, pelos conselhos e incentivos que muito contribuiu para a minha formação, em particular ao professor Antonio Carlos Rodrigues Bittencourt, por acreditar que eu pudesse trilhar o meu próprio caminho no primeiro PIBIC. À todas as pessoas que de certa forma contribuíram para o sucesso de minha jornada.

Às agências FAPEAM, CNPQ e CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

Muitas séries temporais exibem propriedades de escala multifractais com importantes implicações físicas. Neste trabalho usamos o método para a caracterização multifractal MF-DFA para calcular o expoente de Hurst generalizado [11], das séries de níveis de água de dezesseis estações hidrológicas dos principais rios brasileiros, sediadas nas cidades de Manaus, Óbidos, Porto Velho, Fonte Boa, Tucuruí, Marabá, Santarém, Cruzeiro do Sul, Xambioá, Conceição do Araguaia, Guaíra, Altamira, Cáceres, Ladário, Barra e Piranhas. Essas estações estão localizadas em cidades de diferentes zonas climáticas do Brasil. Dessa análise, pudemos constatar que todas as séries exibem multifractalidade e comportamento não estacionário. Mostramos ainda, que o tipo de multifractalidade envolvido nesse processo é devido, essencialmente, a presença de diferentes tipos de correlações nas séries hidrológicas. Conseguimos exibir, de modo analítico, uma equação que gera todos os espectros multifractais nas estações trabalhadas, com erros máximos de 1%, a partir da generalização do d-Processo Multiplicativo Multinomial, sugerindo a existência de uma multifractalidade universal no ciclo hidrológico dos rios brasileiros e por que não do planeta? Este trabalho mostra que é possível tratar as séries dos níveis de água dos rios brasileiros a partir da perspectiva multifractal e, disso, compreender melhor os aspectos complexos das propriedades de escalas que essas séries apresentam.

Palavras-chave: Séries temporais; Níveis de água ; Multifractalidade; Expoente de Hurst.

Abstract

Many time series exihibit multifractal scale properties with important physical implications. We use the method for the multifractal characterization the MF-DFA (Mutifractal-Detrended Fluctuation Analysis) to calculate the generalized Hurst exponent [11] of water levels series of sixteen hydrological stations of the main Brazilian rivers, located in the cities of Manaus, Óbidos, Ladário, Porto Velho, Fonte Boa, Tucuruí, Marabá, Santarém, Cruzeiro do Sul, Xambioá, Conceição do Araguaia, Guaíra, Altamira, Cáceres, Barra e Piranhas. These stations are placed in cities with different climate zones in Brazil. From this analysis, we concluded that all series exhibit multifractality and non-stationary behavior. We also show that the type of multifractality involved in this process is mainly due to the presence of different types of correlations in hydrological time series. We derive an analytic equation that generates the multifractal spectra for all the stations studied, with maximum errors of 1%, from the generalization of the d-Process Multiplied Multinomial. It suggests the existence of a universal multifractality in the hydrologic cycle of the Brazilian rivers and why not of the planet? This work shows that it is possible to treat the time series of water levels of the Brazilian rivers from a multifractal perspective, and therewith to have a better understanding of the complex aspects of the scale properties that these series exhibit.

Keywords: Time series; Water levels; Multifractality; Hurst exponent.

Bíblia Sagrada, 1Cor 12-14.27 "...Como o corpo é um, embora tenha muitos membros, e como todos os membros do corpo, embora sejam muitos, formam um só corpo..."

Celso Ricardo Caldeira Rêgo, 2005. O principio do conhecimento reside na base dos questionamentos feito aos conceitos já arraigados na ciência e na sociedade.

As minhas fontes de inspiração Maria da Gloria (mãe),
Linda (amada esposa) e Maria Cecilia (filha querida).

Conteúdo

1 Introdução **1**

2 Fractal e Multifractal **8**

2.1 Autossimilaridade e Autoafinidade 8

2.2 Fractal e Multifractal 10

2.3 Lei de Potência ou Escala 14

3 Expoente de Hurst **17**

3.1 Histórico do Expoente de Hurst 17

3.2 Noções sobre Séries Temporais 20

3.3 Expoente de Hurst do Movimento Browniano Fracionário 21

4 Método MF-DFA **26**

4.1 MF-DFA 27

4.2 Relação entre o Formalismo Multifractal Padrão e o MF-DFA 29

4.3 Modelo Multifractal Binomial 31

5 Processos Multiplicativos **34**

5.1 Processo Multiplicativo Binomial 34

5.2 *d*-Processo Multiplicativo Multinomial 38

6 Hidrologia Básica das Principais Bacias Brasileiras **43**

6.1 Hidrológia Básica das Principais Bacias Brasileiras 43

6.1.1 Bacia do Prata 44

6.1.2 Bacia do São Francisco 44

6.1.3 Bacia dos Rios Tocantins e Araguaia 45

6.1.4 Bacia Amazônica 46

7 Resultados e Discussões **51**

7.1 Validação do Programa 51

7.2 Multifractalidade das Séries de Níveis de Água 54

7.2.1 Resultados 54

7.2.2 Discussão 54

7.3 Expressão Analítica para o Expoente de Hurst 62

7.3.1 Resultados 62

7.3.2 Discussão 62

7.4 Comparação Entrópica 72

8 Conclusões e Perspectiva **77**

A Sazonalidade **85**

Lista de Figuras

1.1 Localização geográfica das cidades que abrigam as estações hidrométricas dos principais rios do Brasil. 5

1.2 Espectro de potência das séries de vazões diárias de: (a) três rios da França [22]; (b) diferentes rios da bacia continetal do USA: a- Rio Missippi, b- Rio Susquehanna, c- Rio Arkansas, d- Rio Osage, e- Rio Colorado, f- Rio McCloud, g- Rio North Nashua, h- Rio Mill, i- Rio Pendleton Hill e j- Rio Rocky Brook [4]. 6

1.3 Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para séries de vazões diárias de rios. (a) a- Rio Amper, Alemanha, b- Rio Weser, Alemanha e c- Rio Susquehanna, USA, [12]. (b) das estações de Cuntan, Yichang, Hankou e Datong, estações situadas no Rio Yangtze, China [15]. Todos os valores de $h(q)$ nas figuras (a) e (b) foram obtidos via MF-DFA. 7

2.1 Exemplos de objetos autossimilares: (a) samambaia, (b) brócolis, (c) árvore Amazônica e (d) uma segmento de reta construído com segmentos menores de fator de escala ρ. 9

2.2 Exemplos de objetos que apresentam autoafinidade: (a) tempestade com raios, (b) teia de aranha, (c) pelagem de zebra e (d) furacão Catarina. . . . 12

2.3 Fractal curva de Koch, com dimensão de Hausdorff-Besicovitch $D = 1,2619$: (a) iniciador, $n = 0$, (b) gerador ou primeira geração, $n = 1$, (c) segunda geração, $n = 2$, (d) terceira geração, $n = 3$. 13

2.4 Gráfico log-log do tamanho da cabeça versus a altura do corpo. O eixo x cresce conforme a idade do indivíduo aumenta. As retas A e B, indicam, respectivamente, o primeiro e segundo estágio do crescimento dos humanos. Após três anos, a criança passa a crescer segunda a lei de potência da reta B 16

3.1 Esboço de um reservatório de água com um fluxo de entrada $\xi(t)$ e uma descarga média anual $\langle \xi(t) \rangle_\tau$, cuja diferença acumulada é $X(t,\tau) = \sum_1^t [\xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau]$. O alcance R, é a diferença entre o máximo, X_{max}, e o mínimo, X_{min}, conteúdo do reservatório [25]. 18

3.2 Descarga anual do Lago Albert (linha pontilhada) e a diferença da vazão média acumulada (linha cheia). O alcance é indicado por R [25]. 19

3.3 Série $x(t)$ em (a) e suas componentes: Sazonal $S(t)$ (b), Tendência $T(t)$ (c), aleatória $a(t)$ (d). 21

3.4 (a) A sequência de passos de uma particula executando MB unidimensional (b) Posição da partícula em um dado tempo t. A a reta $T(t)$ representa a tendência presente na série da posição $X(t)$, onde $\beta_0 = 10,7$ e $\beta_1 = 0,005$. 23

4.1 Série integrada de uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$. As retas são ajustes polinomiais de primeira ordem para a escala de $s = 500$. 27

5.1 Medida μ da célula para o processo multiplicativo binomial: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 5$ e (d) $n = 12$, com $p = 0,25$. O eixo x representa o índice de alocação do valor de μ. 36

5.2 Processo multiplicativo binomial com probabilidade $p = 0,25$ e n máximo $n = 12$, em (a) temos $\mu(x)$ da células como função de $x = i.2^{-12}$, (b) $M(x)$ para o intervalo $[0, x]$ como função de x. 37

6.1 Níveis de água em metros das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho e (d) Fonte Boa no período de 2005-2009. 47

6.2 Níveis de água em metros das estações de: (a) Tucuruí, (b) Marabá, (c) Santarém e (d) Cruzeiro do Sul no período de 2005-2009. 49

6.3 Níveis de água em metros das estações de: (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Guaíra e (d) Ladário no período de 2005-2009. 49

6.4 Níveis de água em metros das estações de: (a) Altamira, (b) Cáceres, (c) Barra e (d) Piranhas no período de 2005-2009. 50

7.1 Expoentes multifractais (a) $h(q)$, (b) $\tau(q)$ e (c) $D(q)$ para as séries do modelo multifractal binomial com parâmetros $a = 0,60; 0,75$ e $0,90$. As linhas contínuas representam os resultados analíticos, enquanto que os pontos em forma círculo, triângulo e quadrado são os valores simulados via MF-DFA. 52

7.2 Espectro de singularidade $f(\alpha)$ versus α para $a = 0,75$, determinado via transformada de Legendre, Eq.(4.14b). 53

7.3 DFA1 das séries de níveis de águas em escala log-log de $F_2(s)$ versus s das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (f) Cruzeiro do Sul. A reta vertical indica o valor de s no ponto da mudança de inclinação. h_1 é coeficiente angular da reta antes do ponto de mudança de inclinação. O intervalo usado foi de $10 \leq s \leq 2000$ dias. . . 56

7.4 DFA1 das séries de níveis de águas em escala log-log de $F_2(s)$ versus s das estações de: (a) Xambioá (b) Conceição do Araguaia, (c) Guaíra, (d) Ladário, (e) Cáceres e (f) Barra. A reta vertical indica o valor de s no ponto da mudança de inclinação. h_1 é coeficiente angular da reta antes do ponto de mudança de inclinação. O intervalo usado foi de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 57

7.5 DFA1 das séries de níveis de águas em escala log-log de $F_2(s)$ versus s das estações de: (a) Piranhas, (b) Tucuruí, (c) Marabá e (d) Altamira. A reta vertical indica o valor de s no ponto da mudança de inclinação. h_1 é coeficiente angular da reta antes do ponto de mudança de inclinação. O intervalo usado foi de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 58

7.6 Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para as séries originais e embaralhadas das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (f) Cruzeiro do Sul. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(q)$ obtidos a partir da Eq.(7.1), onde a e b são parâmetros da mesma, ($\triangle$) pontos de $h(q)_{shuf}$, ($\circ$) pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 59

7.7 Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para as séries originais e embaralhadas das estações de: (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Tucuruí, (d) Marabá, (e) Ladário e (f) Altamira. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(q)$ obtidos a partir da Eq.(7.1), onde a e b são parâmetros da mesma, ($\triangle$) pontos de $h(q)_{shuf}$, ($\circ$) pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 60

7.8 Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para as séries originais e embaralhadas das estações de: (a) Cáceres, (b) Barra, (c) Piranhas e (d) Guaíra. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(q)$ obtidos a partir da Eq.(7.1), onde a e b são parâmetros da mesma, ($\triangle$) pontos de $h(q)_{shuf}$, ($\circ$) pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 61

7.9 Expoente de Hurst generalizado para as séries de níveis de água das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (d) Cruzeiro do Sul. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(d, q)$ obtidos a partir da Eq.(5.24), p_i e d são parâmetros desta equação, o ($\circ$) são os pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 65

7.10 Expoente de Hurst generalizado para as séries de níveis de água das estações de (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Tucuruí, (d) Marabá, (e) Ladário e (d) Altamira. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(d, q)$ obtidos a partir da Eq.(5.24), p_i e d são parâmetros desta equação, o ($\circ$) são os pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 66

7.11 Expoente de Hurst generalizado para as séries de níveis de água das estações de (a) Cáceres, (b) Barra, (c) Piranhas e (d) Guaíra. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(d, q)$ obtidos a partir da Eq.(5.24), p_i e d são parâmetros desta equação, o ($\circ$) são os pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias. 67

7.12 Níveis de água em metros das estações de: (a) Manaus (1903-2009) e (b) Ladário (1900-2009). 70

7.13 Evolução temporal normalizada do parâmetro d para as estações de Manaus (preto) e Ladário (vermelho) no período de $1995 - 2009$. Nos quadros são mostrados os valores das correlações e significância (p-value) entre d e a evolução temporal do desvio padrão da amplitude sazonal dos níveis de água de cada estação. A normalização foi efetuada dividindo todos os valores de d pelo máximo valor no período de cada estação. 71

7.14 Entropias para um sistema equiprovável, onde $p_i = 1/W$, para três valores de $q = (0,2; 1; 2)$: (a) $S(d,q)$, (b) S_q^T e (c) comparação entre S_{BG}, S_q^T e $S(d,q)$ para $q = 1$. W no eixo das abscissas representa o número de estados do sistema. 73

7.15 Entropia $S(d,q)$ versus o expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, para as séries de níveis de água das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (d) Cruzeiro do Sul. 74

7.16 Entropia $S(d,q)$ versus o expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, para as séries de níveis de água das estações de (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Tucuruí, (d) Marabá, (e) Ladário e (d) Altamira. 75

7.17 Entropia $S(d,q)$ versus o expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, para as séries de níveis de água das estações de (a) Cáceres, (b) Barra, (c) Piranhas e (d) Guaíra. 76

A.1 Séries compostas de uma parte senoidal (sazonal) mais ruído com (a) $H = 0,3$, (b) $H = 0,4$. Séries exibindo apenas a parte senoidal (sazonal) (c). DFA1 das séries geradas pela equação $Z_i = x_i + 0.5\sin(2\pi i/T)$ em escala log-log de $F_2(s)$ versus s. Na legenda observamos os expoentes H de cada séries. 86

Lista de Tabelas

5.1 Ordem cronológica das propostas de entropias e seus autores. 42

6.1 Informações das estações hidrométricas situadas nos principais rios brasileiros. 48

7.1 Expoentes $h_1(2)$ e H para baixas escalas 55

7.2 Soma Quadrática dos Resíduos para os expoentes $h(q)_{modf}(q)$ e $h(d,q)$. . . 68

7.3 Soma Quadrática dos Residuos para $h(d,q)$, $SQR[h(d,q)]_{W+1}$, com $W+1$ probabilidades e para $h(1,q)$, $SQR[h(1,q)]_W$, com W probabilidades. Os valores de d usados na $SQR[h(d,q)]_{W+1}$ são os mesmos mostrados nas Figuras 7.9, 7.10 e 7.11. 69

Capítulo 1

Introdução

O fluxo dos rios representa um valioso registro histórico para o entendimento físico da hidrologia das bacias, tendo um importante papel na compreensão do clima, dos efeitos antropogênicos em ecossistemas de escala global, na física dos oceanos, incluindo os efeitos na circulação e salinidade próximo a sua foz [1, 2]. Como exemplo temos a circulação termohalina, que está intimamente relacionada ao equilíbrio de água doce da bacia do Oceano Ártico [3]. Além disso, os rios são os maiores controladores da química e biologia dos grandes estuários e costas pesqueiras do planeta [2].

Um dos principais componente do ciclo hidrológico é o escoamento, o qual percola e liga a bacia desde pequenos canais até a foz dos grandes rios. O escoamento em algumas bacias apresenta comportamento de escala no espaço e tempo [4]. Husrt[1] (1951) [5] mostrou que o fluxo de vários rios exibe uma correlação de longo alcance, que segue uma equação do tipo lei de potência. Outros cientistas também mostraram que características do escoamento como quantis e momentos estatísticos de enchentes seguem a mesma relação matemática encontrada por Hurst [6]. Dessa forma, é razoável esperar que os níveis de água dos rios, também, exibam um comportamento de escala do tipo lei de potência.

O domínio das propriedades de escala de séries hidrometeorológicas pode fornecer

[1]Harold Edwin Hurst (1880-1978) foi hidrólogo britânico que dedicou parte da sua vida estudando o fluxo de água do Rio Nilo e seus afluentes. Hurst se deparou com o problema de como construir um reservatório ideal, o qual nunca transbordaria ou secaria. Para resolver isto, estudou uma série de dados de mais de 800 anos de registros das cheias anuais do Nilo. Desse estudo, Hurst desenvolveu um novo método estatístico para analisar a entrada e saída de água de reservatórios, o que lhe permitiu quantificar correlações de longo alcance em séries temporais, atualmente denominado de Análise de Reescalonamento ou expoente de Hurst.

uma melhor compreensão dos mecanismos físicos envolvidos nos fenômenos de chuva e escoamento, propiciando dessa forma subsídio para uma melhor modelagem de enchentes e secas em sistemas de grandes rios, como a bacia Amazônica.

Nas últimas décadas, cientistas têm se debruçado e dado considerável atenção em compreender melhor os aspectos do comportamento de escala na natureza nas mais diversas áreas como: sequência de DNA [7, 8], batimentos cardíacos [9], manchas solares [10] e séries temporais de fenômenos climatológicos [11, 12, 13, 4, 15]. O comportamento complexo das séries estudadas nas áreas citadas acima pode ser caracterizado pelo conhecido expoente de Hurst, que essencialmente captura as propriedades de correlação dessas séries. Isso é útil para tratar os mais variados fenômenos, identificando similaridades entre diferentes sistemas [16].

O método da Análise da Flutuação Destendenciada (Detrended Fluctuation Analysis-DFA), desenvolvido por Peng et al., (1994) [7], tem sido uma técnica largamente usada na determinação de propriedades de escala e detectação de correlação de longo alcance em séries temporais monofractais não estacionárias. Este método foi aplicado com bastante êxito nas mais diversas áreas do conhecimento. Kantelhardt et al., (2002) [11], generalizou o método DFA, denominando-o de Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA). Através dele foi possível detectar as propriedades multifractais de uma infinidade de séries temporais relacionadas a fenômenos geofísicos, em particular na carcterização multifractal de séries hidrológicas.

A América do Sul é o continente mais rico do planeta em recursos hídricos, sendo o Brasil o país que possui a rede hidrográfica mais extensa do globo, com $55457km^2$, totalizando 12% dos recursos hídricos do planeta. Muitos de seus rios destacam-se pela profundidade, largura e extensão, o que constitui um importante recurso natural. O país ainda abriga a maior parte da bacia Amazônica [17], a qual é a maior fonte de água doce da Terra, além de constituir o maior bioma de florestas tropicais do mundo. Sua dinâmica está diretamente relacionada às atividades tais como: pesca, agricultura, transporte e economia o que causa grande impacto na vida dos 25 milhões de habitantes que vivem nessa região. O regime do seu escoamento é relativamente impactado pelas atividades humanas e está sujeito a variabilidade anual das chuvas tropicais. Nascendo nos Andes Peruano, os rios da Amazônia drenam uma área de $6.2 \times 10^6\ km^2$ e têm uma descarga média de 6300 km^3 de água anualmente no oceano Atlântico [18]. A inundação periódica

realizada pelo complexo Amazonas/Solimões causa uma elevação no nível de água que varia em média de 10 a 12 metros todos os anos, atingindo, na Amazônia Central, sua máxima inundação nos meses de junho-julho. Já a vazão mínima ocorre, em média, nos meses de outubro-novembro [19].

Nos últimos anos, a parte brasileira da bacia Amazônica vem exibindo uma maior variação na amplitude dos níveis de água, como as secas de 2005 e 2010 e a enchente de 2009, toda essa alteração é atribuida ao aquecimento global [14]. Isso tem causado sérios problemas, principalmente nas cidades que são banhadas pelos rios amazônicos. No médio Solimões alguns exemplos são Fonte Boa e Manaus, a maior metrópole da Amazônia; no alto Rio Juruá a cidade de Cruzeiro do Sul; Porto Velho no médio Rio Madeira e Santarém e Óbidos no baixo e médio Amazonas, respectivamente, (ver Figura 1.1). O Brasil ainda possui outros importantes rios para a América do Sul, tais como: São Francisco, Paraguai, Xingu, Tocantins e Araguaia, que juntamente com os rios Amazônicos têm os seus regimes hidrológicos afetado pelas variações de temperaturas da superfície dos Oceanos Atlântico e Pacífico [20, 18, 21]. A conexão dos rios brasileiros com a variabilidade das temperaturas na superfícies dos oceanos torna o Brasil um dos mais importantes países no cenário de recursos hídricos do planeta.

Baseado na análise do espectro de potência, Tessier et al., (1996) [22] e Pandey et al., (1998) [4] fizeram tratamentos multifractais de séries hidrológicas para vazões de rios da França e USA, obtendo resultados semelhantes ao observado na Figura 1.2. Note que os padrões dos gráficos em (a) e (b) são muito semelhantes. Anos depois, já utilizando o MF-DFA, Kantelhardt et al., (2003) [12] e Zhang et al., (2008) [15], calcularam os espectros multifractais para as séries de vazão de rios da Europa, África, USA e China, obtendo resultados análogos, como pode ser visto na Figura 1.3. Observe que o comportamento dos gráficos (a) e (b) são qualitativamente semelhantes, pois conforme q aumenta, os valores de $h(q)$ diminuem em ambos os gráficos. O comportamento multifractal do escoamento de um rio pode ser considerado como sua impressão digital, o que, entre outras coisas, pode servir como parâmetro para a melhor compreensão de sua dinâmica [12].

Motivado pela importância dos rios brasileiros para o planeta e pelos trabalho de Kantelhardt et al., 2003 [12] e Zhang et al., (2008) [15], tomamos como objetivo principal deste trabalho, investigar o comportamento complexo das propriedades de escala das séries de níveis de água a partir da perspectiva multifractal, usando o método MF-DFA, para

dezesseis estações brasileiras, sediadas nas cidades de Manaus, Óbidos, Porto Velho, Fonte Boa, Tucuruí, Marabá, Santarém, Cruzeiro do Sul, Xambioá, Conceição do Araguaia, Guaíra, Altamira, Cáceres, Ladário, Barra e Piranhas. Na Figura 1.1 mostramos as localizações das cidades que abrigam as estações, bem como os rios onde estão situadas.

O trabalho está organizado em oito Capítulos. No Capítulo 2, abordamos os conceitos de autossililaridade e autoafinidade, os quais são fundamentais para o entendimento das idéias de fractais e multifractais também tratadas neste capítulo, bem como um breve apanhado sobre Leis de Potência. No Capítulo 3, apresentamos algumas noções sobre séries temporais, assim como a caracterização do expoente de Hurst para o movimento browniano fracionário, que é imprescindível para a compreensão dos conceitos de persistência e antipersistência. No Capítulo 4 consta a descrição do método MF-DFA, e sua relação com formalismo multifractal. Este método será o caracterizador da multifractalidade dos níveis de água das estações em estudo. No Capítulo 5, apresentamos com uma demonstração sobre o Processo Multiplicativo Binomial, posteriormente incluimos uma generalização para o d-Processo Multiplicativo Multinomial, a partir do qual exibimos uma possível generalização para entropia. No Capítulo 6, são citados alguns aspectos hidrológicos sobre as bacias hidrográficas que abrigam os rios estudados. Os resultados são mostrados no Capítulo 7. Finalmente no Capítulo 8, apresentamos nossas conclusões, impressões e perspectiva futuras sobre este estudo.

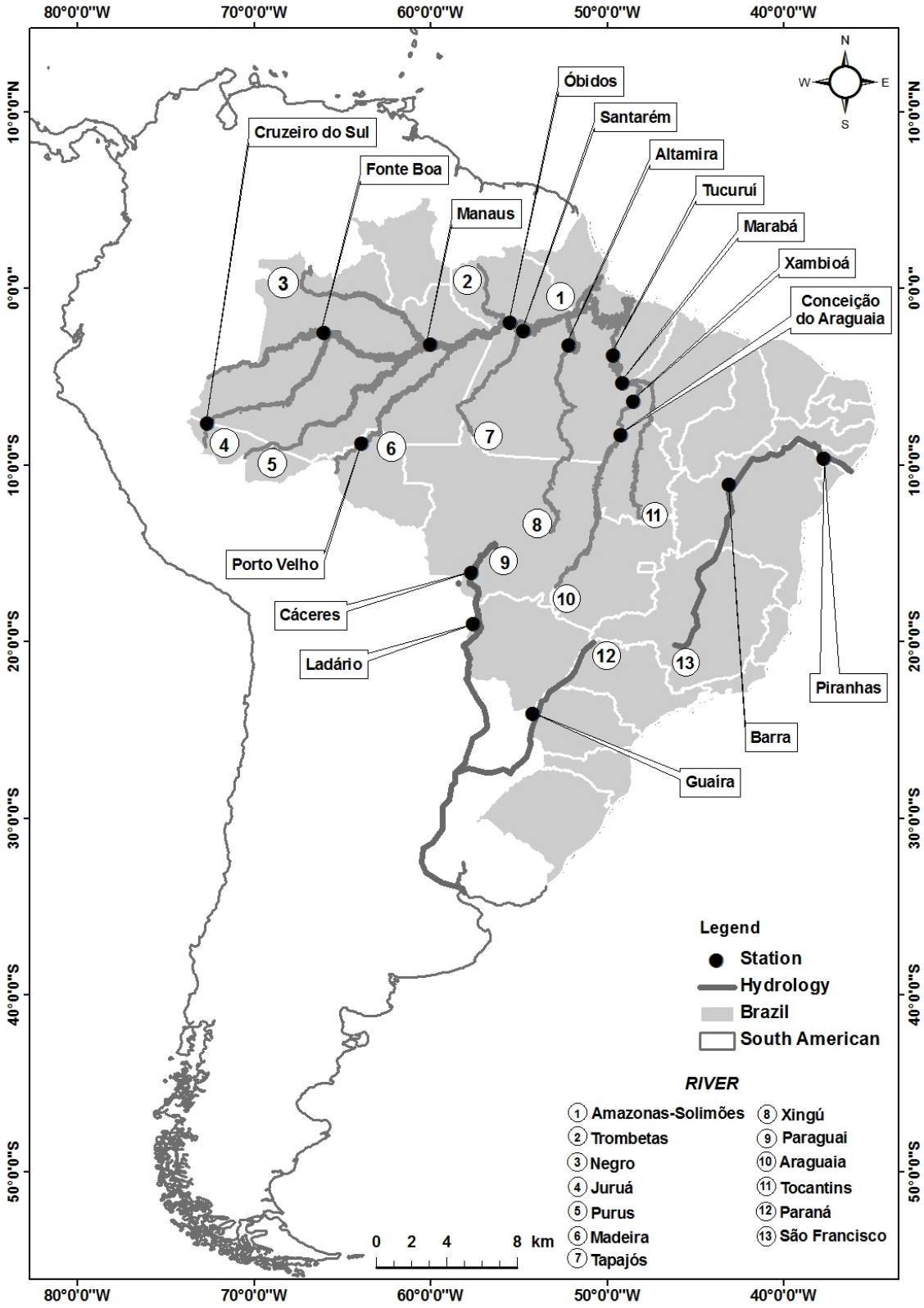

Figura 1.1: Localização geográfica das cidades que abrigam as estações hidrométricas dos principais rios do Brasil.

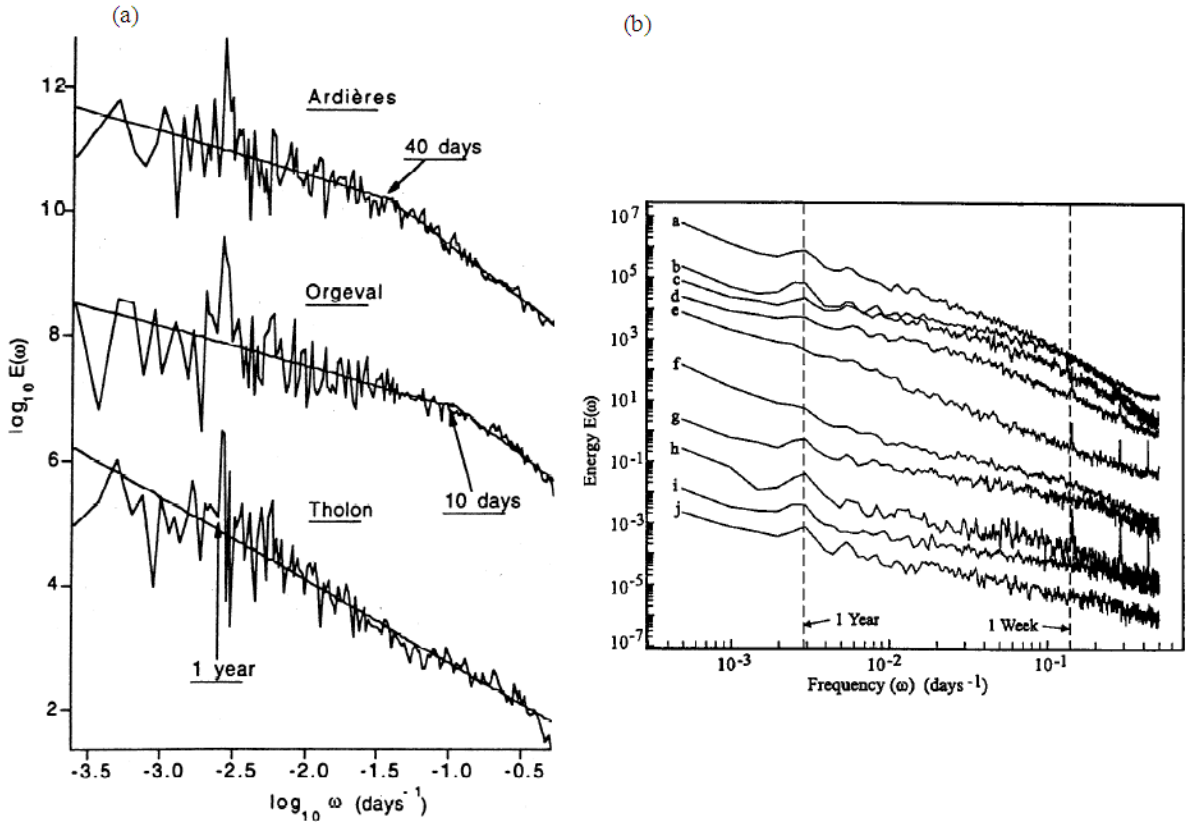

Figura 1.2: Espectro de potência das séries de vazões diárias de: (a) três rios da França [22]; (b) diferentes rios da bacia continetal do USA: a- Rio Missippi, b- Rio Susquehanna, c- Rio Arkansas, d- Rio Osage, e- Rio Colorado, f- Rio McCloud, g- Rio North Nashua, h- Rio Mill, i- Rio Pendleton Hill e j- Rio Rocky Brook [4].

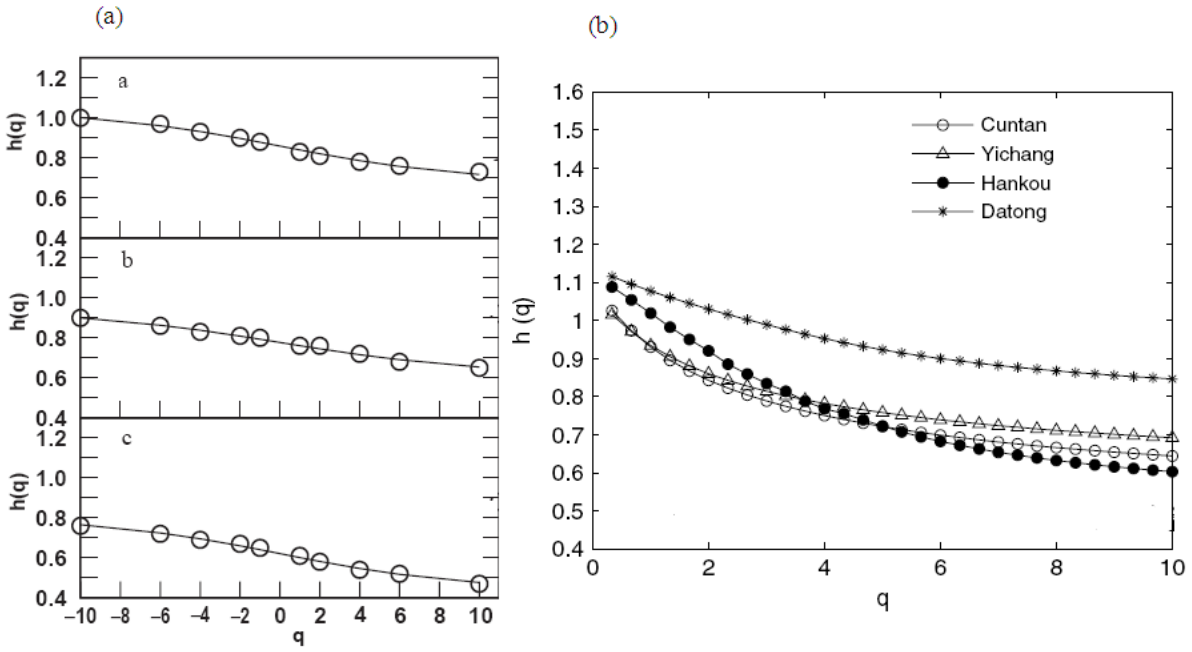

Figura 1.3: Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para séries de vazões diárias de rios. (a) a- Rio Amper, Alemanha, b- Rio Weser, Alemanha e c- Rio Susquehanna, USA, [12]. (b) das estações de Cuntan, Yichang, Hankou e Datong, estações situadas no Rio Yangtze, China [15]. Todos os valores de $h(q)$ nas figuras (a) e (b) foram obtidos via MF-DFA.

Capítulo 2

Fractal e Multifractal

A geometria de muitos objetos na natureza como montanhas, nuvens, rios, furacões, vales, florestas, sistemas biológicos e etc não podem ser representados por retas, planos ou cubos, isto é, a geometria Euclidiana não é suficiente para caracterizá-los. A fim de sanar essa dificuldade, Benoît Mandelbrot[1] e outros cientistas desenvolveram a geometria fractal. Dentro dessa nova geometria, o fractal é um objeto que tem suas partes semelhante ao todo. Com isso, a geometria fractal passou a ser a principal linguagem usada para descrever, modelar e analisar as formas complexas encontradas na natureza.

Neste Capítulo, vamos conceituar conjuntos autossililares e autoafins. Abordaremos, também, as diferenças entre fractais e multifractais a partir do fractal denominado de curva de Koch. Finalizaremos o Capítulo com um exemplo que mostra o surgimento de leis de potência (ou escala) através de um fenômeno dito complexo.

2.1 Autossimilaridade e Autoafinidade

A autossimilaridade descreve a geometria de objetos, que quando tem uma pequena parte aumentada é similar ao objeto inteiro. Além disso, ela se apresenta em objetos e/ou fenômenos de diferentes formas, algumas são contínuas outras são discretas. Diariamente, observamos objetos e/ou fenômenos que exibem autossimilaridade, e nem nos damos conta disso, alguns exemplos como o brócolis, a samambaia e as árvores são mostrados na Figura 2.1.

[1]Benoît B. Mandelbrot (Varsóvia 1924 — Cambridge 2010) foi um matemático francês de origem judaico-polonês. O objetivo dos fractal de Mandelbrot, foi minimizar as lacunas deixadas pela geometria Euclidiana no que diz respeito às formas existentes na natureza.

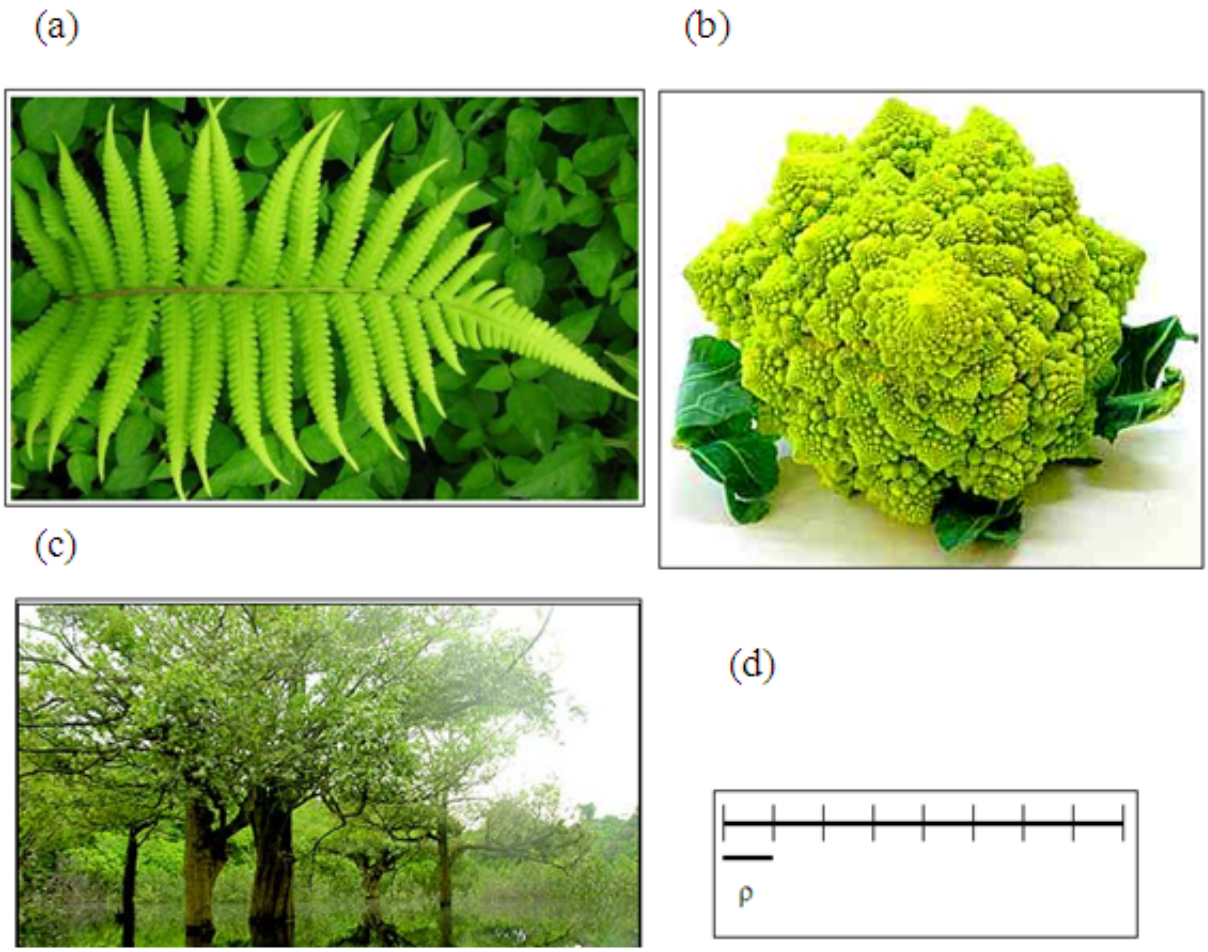

Figura 2.1: Exemplos de objetos autossimilares: (a) samambaia, (b) brócolis, (c) árvore Amazônica e (d) uma segmento de reta construído com segmentos menores de fator de escala ρ.

Para caracterizarmos a autossimilaridade, vamos considerar um segmento de reta unitário S, análogo ao mostrado no quadro (d) da Figura 2.1. Multiplicando o segmento S por um raio ou fator de escala ρ menor que 1, teremos um novo segmento $S' = \rho S$, que na realidade é um pedaço menor do segmento de reta unitário. O novo segmento S' pode ser transladado para cobrir uma parte do segmento original S. Escolhendo de forma correta o valor do fator ρ, podemos cobrir totalmente a reta original S, com N segmentos S' não sobrepostos, como mostrado no quadro (d) da Figura 2.1. Assim, podemos dizer que o segmento S é invariante pelo fator de escala ρ, ou seja, ele é autossimilar.

No caso do segmento de reta, podemos escolher $\rho = 1/N$, onde N é um número de

divisões que se pretende fazer. Um pedaço de um plano retangular pode ser coberto com um fator de escala $\rho = (1/N)^{1/2}$. Similarmente, um paralelepípedo pode ser coberto com $\rho = (1/N)^{1/3}$. Em geral, temos que o fator de escala é dado por $\rho = (1/N)^{1/d}$, onde d é a dimensão de similaridade, 1 para as retas, 2 para os planos e 3 para os cubos [25]. Uma definição para um conjunto autossimilar é dada por:

Definição 2.1 (Autossimilaridade) *Um conjunto de pontos S é dito autossimilar com respeito ao raio de escala ρ se S for a união de N subconjuntos não sobrepostos $S_1, ..., S_N$, onde cada um é obtido de S a partir da transformação $S_i = \rho S$ com $i = 1, ..., N$.*

Em vários fenômenos de interesse físico surgem conjuntos que não exibem autossimilaridade, quando isso ocorre lançamos mão do conceito de autoafinidade. Na Figura 2.2 são apresentados alguns sistemas que exibem características autoafins. Mas antes de definir conjuntos autoafins, vamos entender a ideia de transformação autoafim. Uma transformação é autoafim quando esta leva um ponto $X = (x_1, ..., x_N)$ em um novo ponto $X' = (\rho_1 x_1, ..., \rho_N x_N)$, onde os raios de escala $\rho_1, ..., \rho_N$ não são todos iguais.

Definição 2.2 (Autoafinidade) *Um conjunto de pontos S é dito autoafim com respeito ao vetor raio de escala $\rho = (\rho_1, ..., \rho_N)$ se S for a união de N subconjuntos não sobrepostos $S_1, ..., S_N$, onde cada $S_i = \rho_i S$, com $i = 1, ..., N$, é obtido de S a partir de um transformação autoafim.*

As ideias de autossimilaridade e autoafinidade podem ser resumidas assim, quando um objeto e/ou fenômeno exigir apenas um fator de escala ρ para sua caracterização, como no caso do segmento de reta do quadro (d) da Figura 2.1, teremos autossimilaridade, caso ele exija mais de um fator teremos a autoafinidade. Na Seção 2.3, que trata sobre leis de potência, apresentaremos um exemplo de um conjunto autoafim.

2.2 Fractal e Multifractal

As geometrias dos objetos da natureza variam de tamanhos que vão desde escalas atômicas até a imensidão do universo, então, compreender essas geometrias é imprescindível para um melhor entendimento da natureza. Tradicionalmente, a geometria Euclidiana tem servido como base na tentativa de descrever a natureza, porém essa abordagem tem falhado para uma série de fenômenos. No sentido de suprimir essa dificuldade,

Mandelbrot introduziu o conceito de fractal, o qual tem servido para descrever nuvens, montanhas, rios, crescimento biológico, fluxo hidrodinâmico, séries temporais e outros entes [25].

Para compreendermos a natureza multifractal, devemos antes entender o que é um fractal. Uma primeira tentativa de conceituar fractal foi dado, em 1982, por Benoît Mandelbrot, que o definiu como:

Definição 2.3 (Fractal) *Um fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica (dimensão do espaço Euclidiano).*

A Definição 2.3 exige uma caracterização em termos de conjunto, dimensão de Hausdorff-Besicovitch D e dimensão topológica D_T, que é sempre um inteiro. Contudo, em 1986, Mandelbrot considerou que os termos desta definição eram demasiadamente excessivos, então ele propôs uma definição mais relaxada de fractal, dada por:

Definição 2.4 (Fractal) *Um fractal é uma forma constituída de partes similares ao todo.*

Comparando as duas definições, temos que a primeira, apesar de correta e precisa é restritiva, pois deixa de fora fractais que são de interesse físico, como o fluxo turbulento de fluidos e séries temporais de medidas físicas. A segunda apresenta características que são facilmente identificáveis na natureza fractal, como a similaridade ou invariância por escala [25].

Como ilustração de fractal, podemos citar qualquer objeto da Figura 2.1. A seguir, mostraremos como construir e calcular a dimensão fractal ou dimensão de Hausdorff-Besicovitch D da curva de Koch[2], exibida na Figura 2.3.

A construção da curva de Koch inicia com uma reta de comprimento unitário, que vamos representar por $L(1) = 1$, chamado de iniciador, o qual é representado como nível $n = 0$ na Figura 2.3. No nível $n = 1$, substituímos o iniciador pelo gerador mostrado na mesma imagem. Note que o gerador tem 4 segmentos de tamanho $1/3$ do iniciador, sendo o comprimento da curva $L(1/3) = 4/3$. A próxima geração é obtida substituindo

[2]Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 1870-1924) foi um matemático sueco, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como floco de neve de Koch ou curva de Koch, é uma curva contínua e não diferenciável.

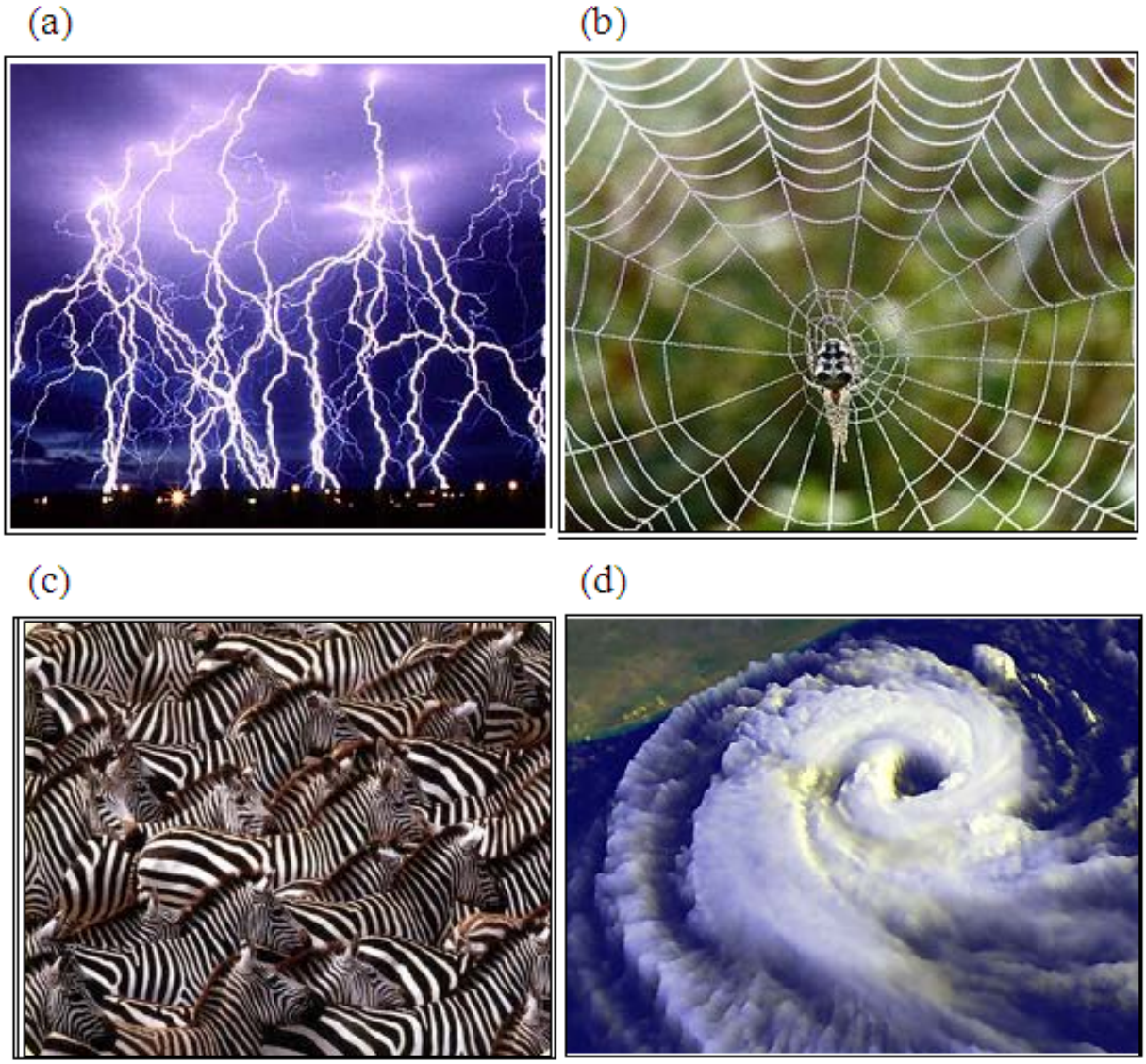

Figura 2.2: Exemplos de objetos que apresentam autoafinidade: (a) tempestade com raios, (b) teia de aranha, (c) pelagem de zebra e (d) furacão Catarina.

cada segmento de linha por uma versão do gerador. Assim, no nível $n = 2$, temos $4^2 = 16$ segmentos, cada um tendo comprimento $\rho = 3^{-2} = 1/9$. Neste nível, o comprimento da curva é $L(1/9) = (4/3)^2$. Seguindo esse raciocínio, no n-ésimo nível, a curva terá comprimento de

$$L(\rho) = (4/3)^n. \tag{2.1}$$

Empiricamente, a dimensão de qualquer objeto fractal D é dada pela relação [25],

$$L(\rho) \approx \rho^{1-D}. \tag{2.2}$$

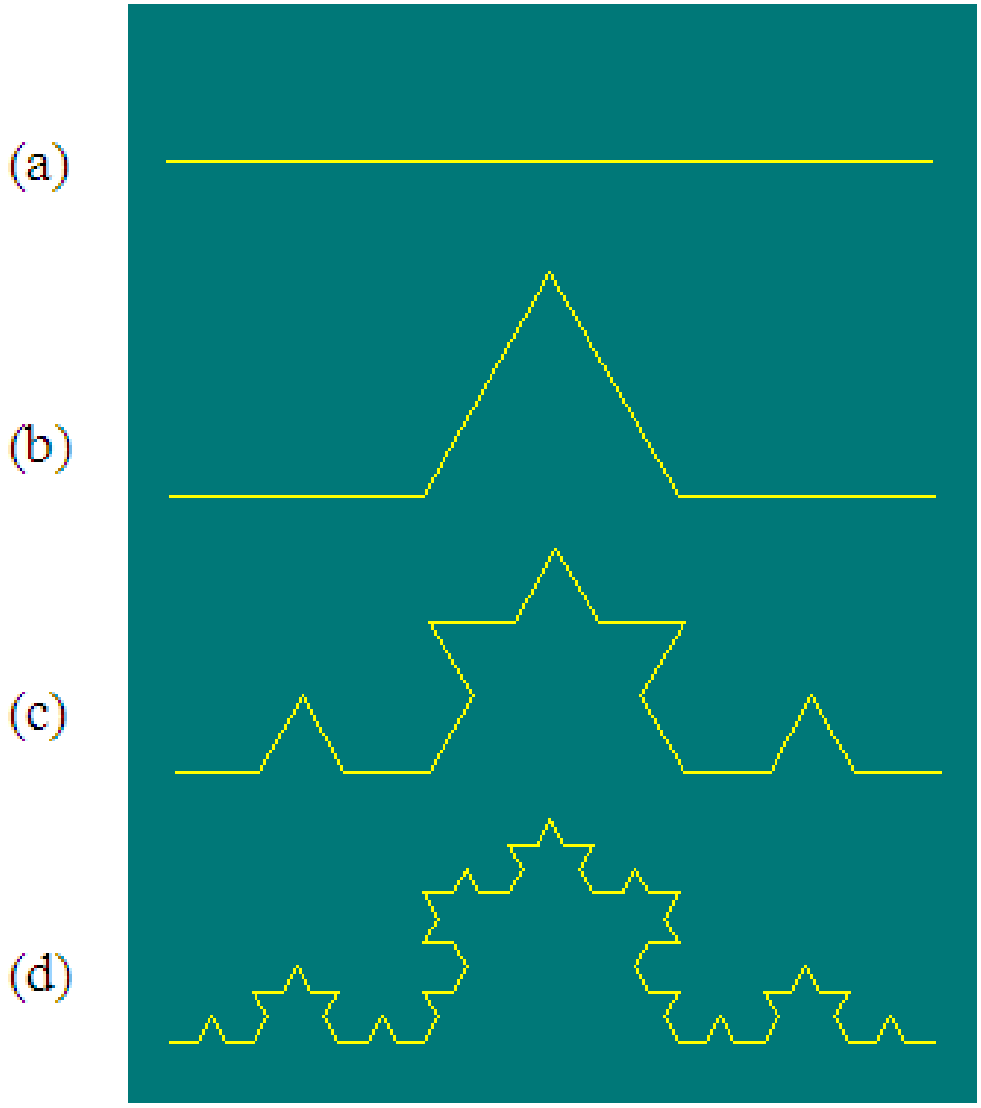

Figura 2.3: Fractal curva de Koch, com dimensão de Hausdorff-Besicovitch $D = 1,2619$: (a) iniciador, $n = 0$, (b) gerador ou primeira geração, $n = 1$, (c) segunda geração, $n = 2$, (d) terceira geração, $n = 3$.

Sendo o comprimento dos segmentos do n-ésimo nível dado por $\rho = (1/3)^n$, temos que

$$n = -\ln(\rho)/\ln(3). \tag{2.3}$$

A dimensão fractal D da curva de Koch é obtida tomando o logaritmo de $L(\rho)$ na Eq.(2.1) e igualando ao logaritmo da relação empírica, Eq.(2.2), e neste resultado é

substituído a Eq.(2.3), isto é,

$$\ln\left(L(\rho)\right) = n\ln(4/3) = (1-D)\ln(\rho)$$
$$D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1,2619. \tag{2.4}$$

Com os conceitos de fractal e dimensão fractal já bem estabelecidos, fica fácil caracterizar um multifractal. Observe que o parâmetro caracterizador de um fractal é o expoente D da lei de potência $L(\rho) = \rho^{1-D}$. Para a curva de Koch apenas um valor para o expoente D é suficiente para determinar a natureza fractal do objeto. Um multifractal, como o nome sugere, é um objeto que necessita de pelo menos dois expoentes de escala para caracterizar a sua forma, ou seja, é na realidade uma coleção de fractais (monofractais) com dimensões distintas. Todos os objetos da Figura 2.2 são exemplos de multifractais. A natureza fractal não se apresenta apenas em estruturas geométricas, podendo ocorrer tanto em notas musicais como em séries temporais.

2.3 Lei de Potência ou Escala

As leis de escala são propriedades que surgem em vários fenômenos naturais, geralmente são representadas por uma relação matemática do tipo

$$f(x) = bx^{\alpha}, \tag{2.5}$$

onde α e b são constantes de calibração, sendo b normalmente denominada de constante de normalização. Os termos $f(x)$ e x da equação são duas variáveis que podem ser as medidas de um dado ente físico, econômico, biológico ou qualquer outro que se pretenda estudar [28]. Por exemplo, para $\alpha = 1$ e $b = -k$, obtemos a conhecida força de restauração de uma mola com constante elástica k. Quando $\alpha = -2$, temos a famosa lei da atração gravitacional de Newton. Para $\alpha = 2$ recuperamos a equação da energia cinética de uma partícula com velocidade x. Como se pode notar, não faltam exemplos de leis de escala na física, porém esta não é uma exclusividade da física, e surge, também, no crescimento biológico, no comportamento populacional, nas séries temporais e em outros fenômenos da natureza. Frequentemente, as propriedades de leis de escala se manifestam em sistemas fractais e/ou multifractais. Tais sistemas evoluem longe do equilíbrio e exibem características denominadas de autossimilaridade e autoafinidade.

Outra interessante propriedade das leis de potência é a relação de homogeneidade, dada por

$$f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x). \tag{2.6}$$

A equação $f(x) = bx^{\alpha}$ é um exemplo de lei de potência que satisfaz esta relação. Caso $f(x)$ seja a função geradora do fractal de Koch, Figura 2.3, então isto torna essa curva um importante exemplo de fractal que obedece a relação de homogeneidade, pois fazendo $\lambda = \rho = (1/3)^n$ e $\alpha = 1$ podemos constatar que a Eq.(2.6) é satisfeita. Funções que satisfazem essa relação são denominadas de funções de escala e essas são muito importantes na descrição de transicão de fase de fenômenos críticos [25].

Como ilustração de um fenômeno que apresenta lei de escala, vamos analisar a curva de crescimento de uma pessoa. Os humanos crescem por diferentes leis de potência, ou seja, um adulto não é um simples bebê aumentado. Na fase de crescimento de um bebê para um adulto, partes do corpo seguem leis de escalas diferentes. Por exemplo, o tamanho da cabeça relativo ao corpo de um bebê é muito maior que de um adulto. Inclusive, as características faciais são desproporcionais. Comparando a altura do corpo com o tamanho da cabeça de uma pessoa em diferentes idades, verificamos que os humanos não crescem segundo um conjunto autossimilar, mas sim segundo um conjunto autoafim.

Quando o crescimento é proporcional, dizemos que o crescimento é isométrico, caso contrário dizemos que o crescimento é alométrico. Pelo gráfico da Figura 2.4, observamos que o corpo cresce mais rápido que a cabeça até a idade de três anos, ou seja, até essa idade ocorre um crescimento alométrico, a partir daí o crescimento passa a ser isométrico [27]. Ainda da Figura 2.4, notamos que a reta A segue a lei de potência $y \approx x^{3/2}$, enquanto que a reta B segue $y \approx x^{1/2}$, mostrando que existe dois estágios de crescimento para uma pessoa, portanto, a cabeça de um bebê e de um adulto não são autossimilares. Isso tudo sugere que a natureza parece seguir leis de potência conforme suas necessidades, quando determinados fenômenos apresentam tais características são ditos complexos [27].

Note que, no exemplo do fractal de Koch, a Definição 2.1 surge naturalmente como uma propriedade do fractal, propriedade essa que leva a uma invariância de escala, pois apresenta apenas um fator de escala e naturalmente uma lei de potência. No caso do exemplo sobre crescimento humano, é perceptível que se trata de um conjunto autoafim, pois tal exemplo satisfaz a Definição 2.2 exibindo dois fatores de escala distintos e duas leis de potência, o que nos leva a supor que se trata de uma estrutura multifractal. Conclui-se

que os fractais são sempre conjuntos autossimilares que exibem uma única lei de potência, enquanto que os multifractais são conjuntos autoafins que apresentam no mínimo duas leis de potências para sua plena caracterização.

As ideias de fractais, multifractais e leis de escalas, apresentadas aqui, são muito importantes para o entendimento dos Capítulos posteriores, principalmente do Capítulo 4 no qual abordaremos um método numérico para a caracterização da multifractalidade presente em séries temporais.

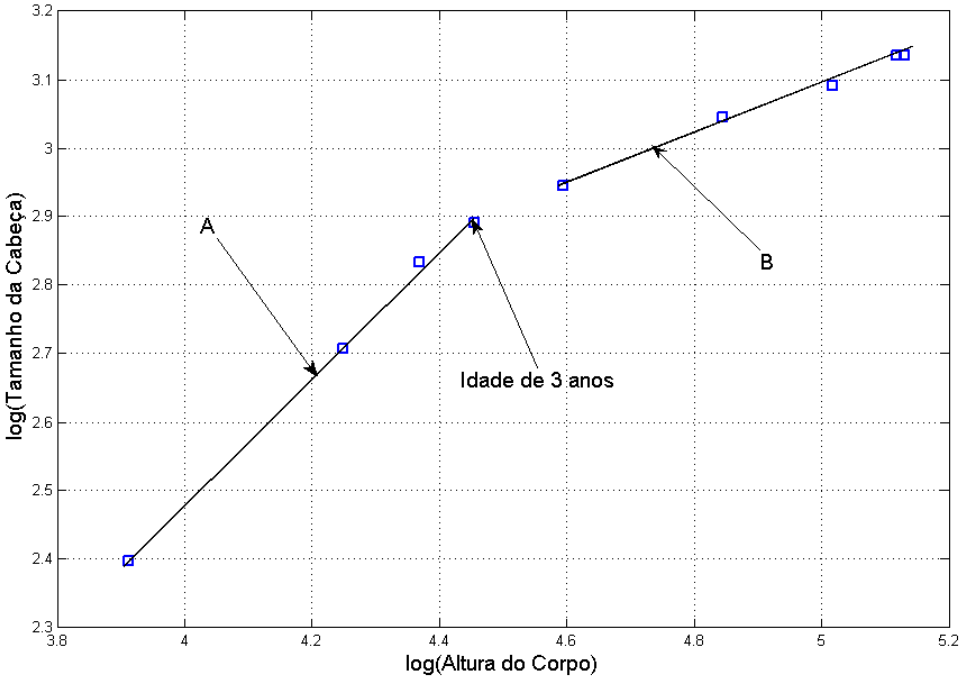

Figura 2.4: Gráfico log-log do tamanho da cabeça versus a altura do corpo. O eixo x cresce conforme a idade do indivíduo aumenta. As retas A e B, indicam, respectivamente, o primeiro e segundo estágio do crescimento dos humanos. Após três anos, a criança passa a crescer segunda a lei de potência da reta B

Capítulo 3

Expoente de Hurst

Muitas observações da natureza são constituídas de vários registros no decorrer do tempo. Por exemplo, existem um grande número de registros de temperatura, chuva, altura das maré, níveis de água de rios e outras variáveis de interesse físico, que são medidas diariamente. A sequência de todas essas medidas constituem uma série temporal. Essas séries periodicamente exibem flutuações, por exemplo, séries temporais de temperatura apresentam comportamento errático em grandes e pequenas escalas de tempo. Tais flutuações geralmente são analisadas a partir do cálculo da correlação entre os dados. O expoente de Hurst da série temporal é um expoente de escala capaz de fornecer informações sobre o tipo correlação presente na série.

A erraticidade ou randomicidade presente na série de temperatura, também se evidencia em cristais sob a forma de impurezas colocadas de maneira randômica no material. Isso mostra que a aleatoriedade é uma característica inerente da natureza. Um dos mais conhecidos fenômenos que exibe aleatoriedade, e que é extensivamente estudado na física, química e biologia, é chamado de Movimento Browniano Fracionário (MBF). Neste Capítulo, este fenômeno é utilizado como exemplo de aplicação do expoente de Hurst.

3.1 Histórico do Expoente de Hurst

Harold E. Hurst foi um hidrólogo que trabalhou no projeto de construção de uma represa no Rio Nilo, chegou nesta região por volta de 1907, permanecendo lá durante 40 anos. Seu objetivo era construir uma represa de tal sorte que esta não transbordasse e nem ficasse muito vazia. Seus estudos sobre o Nilo, o levou a analisar décadas de registros de

cheias e secas. A partir dessa análise, Hurst notou correlações nas séries de dados e seus estudos deram origem à análise do alcance reescalado (análise R/S) que levou ao cálculo do expoente de Hurst, H.

À analise R/S é um método de base empírica, e consiste na determinação do volume de um reservatório que tem influxo de água $\xi(t)$ e descarga anual de $\langle\xi(t)\rangle_\tau$, onde $t = 1, ..., \tau$. A Figura 3.1 ilustra bem esse processo. O volume médio, que deve ser liberado por um ano ou um período de τ anos, é dado por:

$$\langle\xi(t)\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t). \tag{3.1}$$

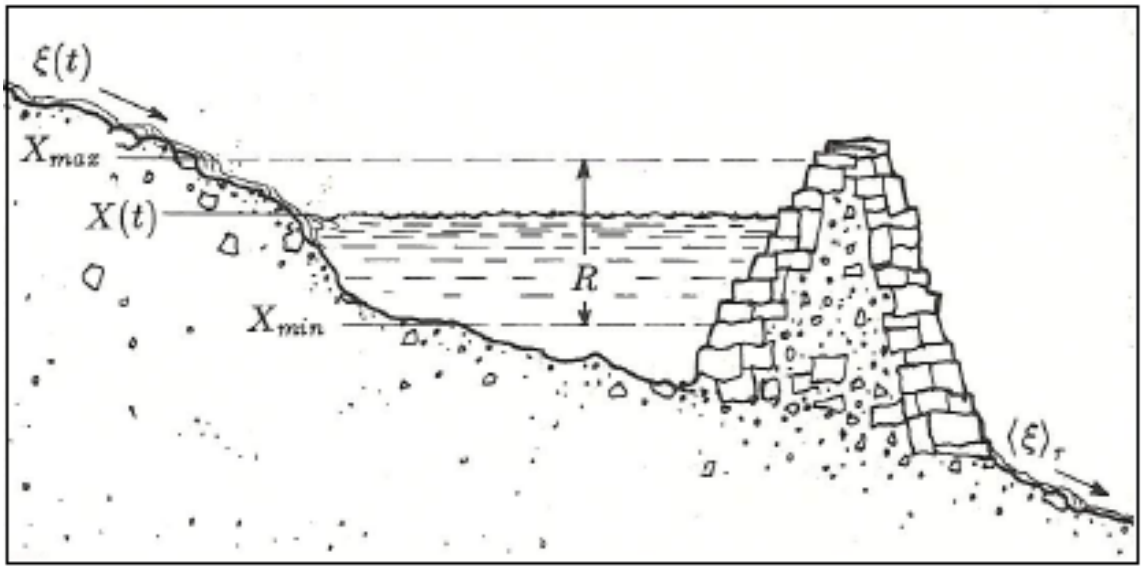

Figura 3.1: Esboço de um reservatório de água com um fluxo de entrada $\xi(t)$ e uma descarga média anual $\langle\xi(t)\rangle_\tau$, cuja diferença acumulada é $X(t,\tau) = \sum_1^t[\xi(u) - \langle\xi\rangle_\tau]$. O alcance R, é a diferença entre o máximo, X_{max}, e o mínimo, X_{min}, conteúdo do reservatório [25].

Seja $X(t)$ a diferença acumulada entre o fluxo de entrada e sua média dada por

$$X(t,\tau) = \sum_{u=1}^{t}[\xi(u) - \langle\xi(t)\rangle_\tau], \qquad 1 \leq t \leq \tau, \tag{3.2}$$

então o valor máximo e mínimo da Eq.(3.2) representa o volume máximo é mínimo que o reservatório poderá assumir no período τ. Portanto, considerando um reservatório suficientemente grande que nunca transborde ou seque, a representação da diferença entre o máximo e o mínimo da água contida no reservatório é expresso por,

$$R(\tau) = max_{1\leq t\leq\tau}X(t,\tau) - min_{1\leq t\leq\tau}X(t,\tau). \tag{3.3}$$

O alcance, R, depende do período τ considerado, e esperamos que aumente com o crescimento de τ. Na Figura 3.2 apresentamos as variáveis $X(t)$, $\xi(t)$ e R para o Lago Albert (Africa).

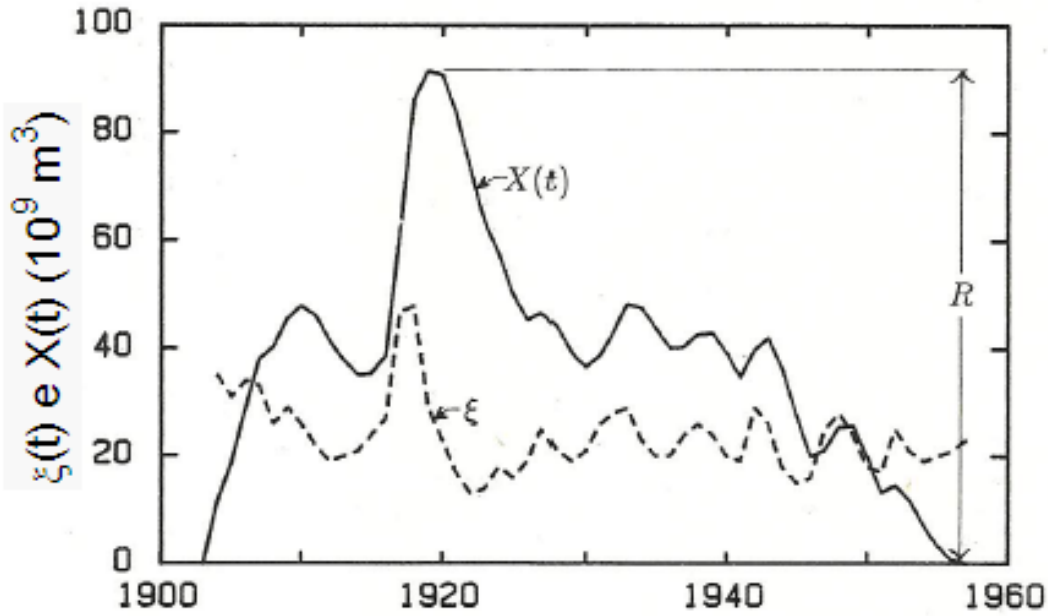

Figura 3.2: Descarga anual do Lago Albert (linha pontilhada) e a diferença da vazão média acumulada (linha cheia). O alcance é indicado por R [25].

Hurst investigou vários fenômenos, tais como: vazão de rios, chuvas, crescimento de anéis de árvores e outros. Ele usou a razão adimensional dado por R/S, onde S é o desvio padrão dado pela equação

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} [\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle_{\tau}]^2 \right)^{1/2}. \tag{3.4}$$

Esta razão permitiu comparar fenômenos de naturezas distintas, levando Hurst a encontrar que a relação R/S de muitas séries temporais seguem uma relação do tipo de lei potência descrita, empiricamente, por:

$$R/S = (\tau/2)^H. \tag{3.5}$$

H é conhecido como expoente de Hurst e varia entre $0 < H < 1$. Quando $H = 0,5$, os dados da série são ditos aleatórios ou descorrelacionados. Para $0 < H < 0,5$, a série apresenta antipersistência, ou seja, existe uma probabilidade maior do que 50% de que um valor negativo seja seguido de um valor positivo. E para $0,5 < H < 1$, a série é tida como

persistente, ou seja, existe uma probabilidade maior do que 50% que um valor positivo ou negativo seja precedido por um positivo ou negativo [25]. Portanto, o expoente de Hurst, H, é um importante parâmetro para a análise de séries temporais.

3.2 Noções sobre Séries Temporais

O conceito de séries temporais está relacionado a um conjunto de medidas ordenadas no tempo. Como exemplo, podemos citar as observações dos níveis de água dos rios do Brasil, o número de alunos aprovados por semestre e o índice da bolsa de valores Bovespa. Os principais interesses da análise de séries temporais são: descrever propriedades da série, construir modelos que permitam explicar o seu comportamento e prever valores futuros com base em medidas passadas.

De modo geral, uma série temporal, $x(t)$, pode ser escrita como a soma de três componentes não observáveis,

$$x(t) = T(t) + S(t) + a(t), \tag{3.6}$$

onde $T(t)$, $S(t)$ e $a(t)$ são, respectivamente, as componentes tendência e sazonalidade, enquanto $a(t)$ é a componente aleatória de média zero e variância constante σ_a^2. Quando $a(t)$ é descorrelacionada, dizemos que esta caracteriza uma série ruído branco. Comumente, denotada por uma distribuição $(\text{média}, \text{variância}) = (0; \sigma_a^2)$ [30].

A componente tendência tem a função de dar a informação sobre como e para onde a série está evoluindo, isto é, se a série cresce ou decresce com o passar do tempo. Já a componente sazonal é a repetição de um dado fenômeno em determinado período, como exemplo temos as cheias e secas que ocorrem todos os anos na Amazônia. A componente aleatória está relacionada com a correlação presente na série. O nosso interesse neste trabalho será apenas na componente tendência. A Figura 3.3 ilustra uma série e suas respectivas componentes.

Uma maneira de estimar a tendência, $T(t)$, é através do ajuste polinomial dos dados existentes. Suponha que a componente tendência possa ser escrita como uma série de potência, isto é,

$$T(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_m t^m, \tag{3.7}$$

onde m é o grau do polinômio. Para estimar os parâmetros β_m, utilizamos o método dos

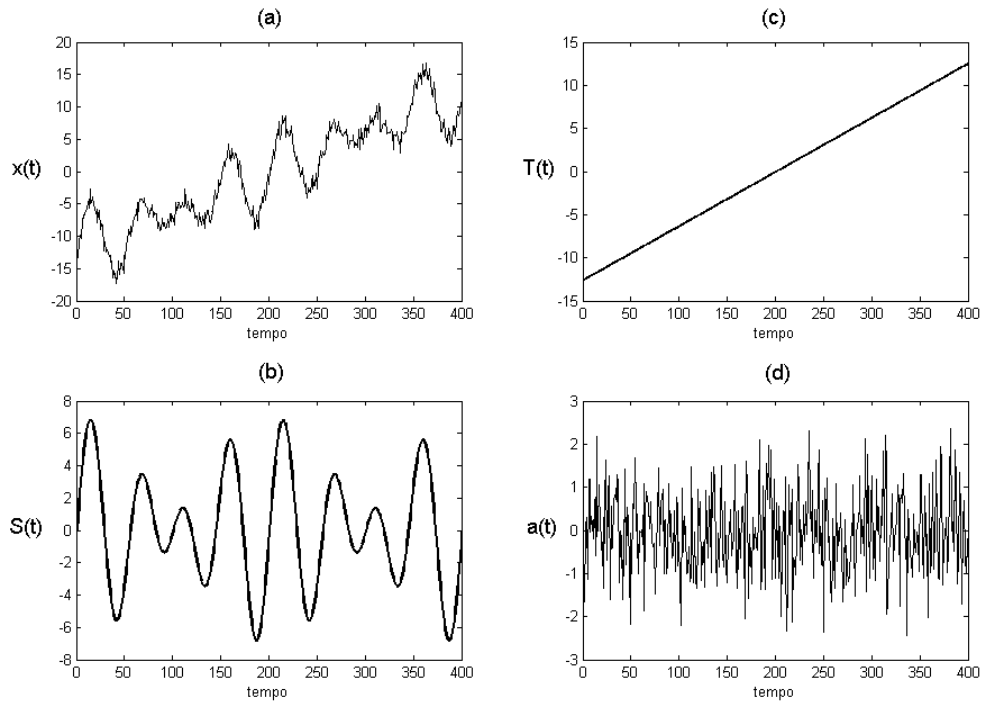

Figura 3.3: Série $x(t)$ em (a) e suas componentes: Sazonal $S(t)$ (b), Tendência $T(t)$ (c), aleatória $a(t)$ (d).

mínimos quadrados, que consiste na minimização da equação em relação a cada parâmetro β_m

$$f(\beta_0, \ldots, \beta_m) = \sum_{t=1}^{N} (x(t) - \beta_0 - \beta_1 t - \beta_2 t^2 - \ldots - \beta_m t^m)^2. \tag{3.8}$$

Uma partícula que se movimenta em uma linha (no eixo x, por exemplo), e dá passos aleatórios de comprimento $+\xi$ ou $-\xi$ em τ intervalos regulares de tempo é um interessante fenômeno físico que exibe tendência em sua série temporal da posição. Tal fenômeno é denominado de Movimento Browniano (MB) ou caminhada aleatória e será melhor detalhado na próxima Seção (veja Figura 3.4).

3.3 Expoente de Hurst do Movimento Browniano Fracionário

Em 1882, Robert Brown foi a primeira pessoa a notar que o movimento errático do pólen microscópico era de natureza física e não biológica, como se acreditava na época.

Ocorria que as micropartículas de pólen estavam sujeitas a flutuações térmicas, e colidiam de maneira randômica umas com as outras caracterizando um movimento errático. Tal fenômeno ficou conhecido como movimento browniano ou caminhada aleatória.

É importante ressaltar que neste movimento não é a posição da partícula em um tempo que é independente da posição dela em outro tempo, e sim o deslocamento da partícula em um intervalo de tempo que é independente de outro deslocamente em outro intervalo de tempo [25].

Para caracterizar o MB ordinário em uma dimensão, vamos considerar uma partícula que se movimenta em uma linha (no eixo x, por exemplo) e dá passos aleatórios de comprimento $+\xi$ ou $-\xi$ em τ intervalos regulares de tempo. O conjunto formado por $\xi_1, \xi_2, ...$ é uma sequência de passos aleatório do tipo ruído branco, enquanto a posição $X(t)$ da partícula no eixo x é dada por:

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i. \tag{3.9}$$

Assume-se que a distribuição de probabilidades do deslocamento da partícula, $X(t) - X(t_0)$, é dada por uma Gaussiana,

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D|t - t_0|}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4D|t - t_0|}\right), \tag{3.10}$$

onde o parâmetro D é o coeficiente de difusão. Observe que a Eq.(3.10) apresenta invariância de escala,

$$P(b^{1/2}[X(bt) - X(bt_0)]) = b^{-1/2} P(X(t) - X(t_0)), \tag{3.11}$$

conforme descreve a Eq.(2.6). A Eq.(3.11) mostra que a distribuição do deslocamento do MB é invariante por uma transformação que muda a escala temporal por um fator b e o tamanho do deslocamento por um fator $b^{1/2}$. Na Figura 3.4, mostramos a sequência $\xi_1, \xi_2, ...$ dos passos da partícula, bem como sua posição $X(t)$ para um dado tempo t [25].

Com esta distribuição de probabilidade para o deslocamento da partícula, segue que a média e variância são dadas por

$$\langle X(t) - X(t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0 \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle (X(t) - X(t_0))^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X \\ &= 2D|t - t_0| \end{aligned} \tag{3.13}$$

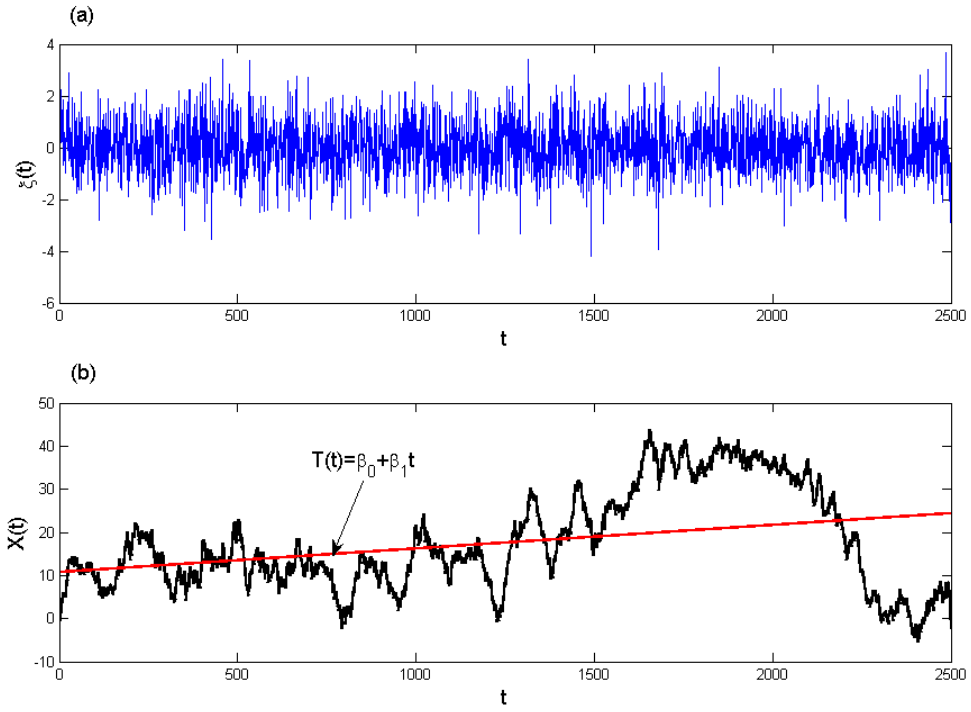

Figura 3.4: (a) A sequência de passos de uma particula executando MB unidimensional (b) Posição da partícula em um dado tempo t. A a reta $T(t)$ representa a tendência presente na série da posição $X(t)$, onde $\beta_0 = 10,7$ e $\beta_1 = 0,005$.

Em 1923, Wiener apresentou um formalismo para o MB, no qual considerou que uma partícula executando MB tem incrementos na posição dados por:

$$X(t) - X(t_0) \approx \xi |t - t_0|^{1/2}, \qquad t \geq t_0. \tag{3.14}$$

Mandelbrot, em 1982, introduziu o conceito de Movimento Browniano Fracionáro (MBF) trocando o expoente $H = 1/2$ da Eq.(3.14) por um número real no intervalo $0 < H < 1$. O objetivo dele era caracterizar as correlações presentes em sistemas descritos a partir do MBF em termos de H, onde H é o expoente de Hurst discutido na primeira Seção deste Capítulo [25].

Baseado na Eq.(3.10), foi proposto uma distribuição de probabilidade para a o deslocamento da partícula, $X(t) - X(t_0)$ [25], dada por:

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\,|t - t_0|^{2H}}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4D\,|t - t_0|^{2H}}\right). \tag{3.15}$$

Observe que para $H = 1/2$, recuperamos a distribuição dada pela Eq.(3.10) do MB ordinário.

Através da distribuição de probabilidade para o deslocamento da partícula, Eq.(3.15), obtemos a média e a variância do deslocamento da partícula, dados por:

$$\langle X(t) - X(t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0, \tag{3.16}$$

$$\left\langle [X(t) - X(t_0)]^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X \approx 2 \left| t - t_0 \right|^{2H}, \tag{3.17}$$

onde foi utilizado a integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2)dx = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$, sendo que $X(t_0)$ é a posição da partícula em algum tempo de referência t_0 e ΔX é o incremento nesta posição.

No MBF incrementos passados são correlacionados com incrementos futuros. As correlações são medidas pela função de correlação $C(t)$, definida como a probabilidade da partícula ter um deslocamento $X(t) - X(0)$ quando o tempo evolui de $-t$ para 0, mediada sobre a distribuição no incremento passado $X(0) - X(-t)$,

$$C(t) = \frac{\langle [X(0) - X(-t)]\,[X(t) - X(0)]\rangle}{\langle X(t)^2\rangle}. \tag{3.18}$$

Assumindo que $X(0) = 0$, então a Eq.(3.18) fica

$$C(t) = \frac{\langle -X(-t)X(t)\rangle}{\langle X(t)^2\rangle}. \tag{3.19}$$

Pela Eq.(3.17), temos

$$\left\langle X(t)^2 \right\rangle = \left\langle X(-t)^2 \right\rangle = 2t^{2H}, \tag{3.20}$$

$$\left\langle [X(t) - X(-t)]^2 \right\rangle = 2(2t)^{2H}. \tag{3.21}$$

O valor médio $\langle -X(-t)X(t)\rangle$ pode ser reescrito como:

$$\langle -X(-t)X(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\left\langle [X(t) - X(-t)]^2 \right\rangle - \left\langle X(t)^2 \right\rangle - \left\langle X(-t)^2 \right\rangle\right]. \tag{3.22}$$

Substituindo este resultado e as equações (3.20) e (3.21) na Eq.(3.19), temos

$$C(t) = \frac{2t^{2H}(2^{2H-1} - 1)}{2t^{2H}} = (2^{2H-1} - 1). \tag{3.23}$$

Podemos observar da Eq.(3.23) que para $H = 1/2$ não existe correlação entre os incrementos passados e futuros, como é exigido para um conjunto de variáveis aleatórias descorrelacionadas. Contudo, se $H \neq 1/2$ teremos $C(t) \neq 0$, surgindo assim a possibilidade do movimento browniano ser persistente ou antipersistente. Para $H > 1/2$, temos

a persistência, ou seja, se em dado t temos um aumento (diminuição) do incremento, então em um tempo $t+1$ teremos uma tendência de aumento (diminuição) do incremento futuro. Para o caso de $H < 1/2$, temos a antipersistência, nessa situação se ocorrer um aumento (diminuição) do incremento em um tempo t, teremos uma tendência de diminuição (aumento) do incremento futuro.

As noções sobre séries temporais e a caracterização do expoente de Hurst do MBF, tratadas neste Capítulo, serão de grande importância para o entendimento dos Capítulos posteriores, em particular do Capítulo 4 onde apresentamos um método numérico de caracterização da multifractalidade presente em séries temporais.

Capítulo 4

Método MF-DFA

Nas últimas décadas do século XX, parte da comunidade dos físicos passou a se interessar pela dinâmica de sistemas ditos complexos, cujas partes interagem de forma não-linear. Uma das propriedades marcantes de tais sistemas é a presença de efeitos de escala em suas séries de dados.

Nos últimos anos, a Análise da Flutuação Destendenciada (Detrended Fluctuation Analysis-DFA), desenvolvida por Peng et al., (1994) [7], foi um método largamente utilizado na determinação das propriedades de escala de séries temporais monofractais não estacionárias. Contudo, muitas séries não exibem um simples comportamento fractal, tornando o DFA um método impreciso na caracterização das propriedades de escala de séries temporais multifractais. Kantelhardt et al., (2002) [11], generalizaram o método DFA, denominando-o de Análise Multifractal da Flutuação Destendenciada (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis-(MF-DFA)). Através dele foi possível detectar as propriedades multifractais de uma infinidade de séries temporais.

Neste Capítulo, apresentamos o método MF-DFA, bem como as suas relações com o formalismo multifractal padrão. O MF-DFA é método utilizado para caracterizar a multifractalidade das séries de níveis de água das estações estudadas neste trabalho. Na Figura 1.1 apresentamos as localizações dessas estações. Essencialmente, o MF-DFA serve para determinar o expoente de Hurst generalizado, $h(q)$, de uma série temporal, x_k, não estacionária, que no presente estudo são as séries temporais de níveis de água.

4.1 MF-DFA

Considere que x_k seja uma série de suporte compacto, com $k = 1, ..., N$, sendo N seu tamanho, onde o suporte é definido como o conjunto de índices k com valores de x_k diferentes de zero. O suporte é compacto se $x_k = 0$ para uma fração insignificante da série, quando $x_k = 0$ estes são considerados como não tendo valor no índice k.

Kantelhardt et al., (2002) [11], descrevem o procedimento MF-DFA, dividindo-o em cinco passos dados a seguir, onde os três primeiros são os mesmos do DFA padrão:

- Passo 1: Determine o "perfil"

$$Y(i) = \sum_{k=1}^{i} [x_k - \langle x \rangle], \qquad i = 1, ..., N, \tag{4.1}$$

onde $\langle x \rangle$ é a média de x_k. O procedimento realizado pela Eq.(4.1) é comumente chamado de integração da série. Na Figura 4.1, vemos uma série integrada para uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$, obtida pelo ambiente Matlab 7.0 usando a função $randn(5000, 1)$.

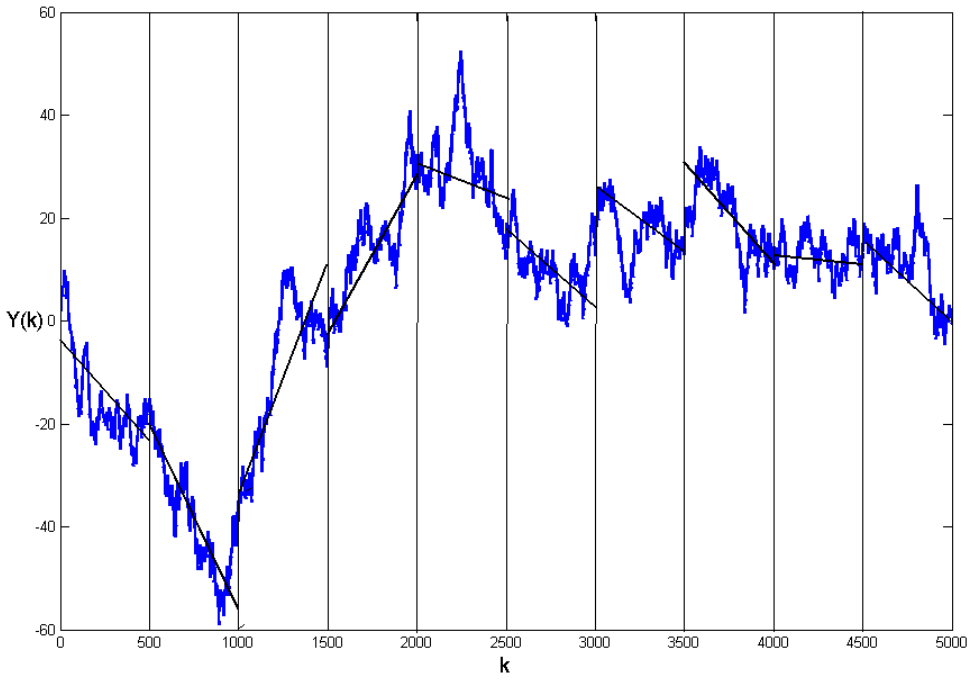

Figura 4.1: Série integrada de uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$. As retas são ajustes polinomiais de primeira ordem para a escala de $s = 500$.

- Passo 2: Divide-se o perfil $Y(i)$ em $N_s = int(N/s)$ segmentos não sobrepostos de igual tamanho s, aqui $int(N/s)$ é um número inteiro. Uma vez que N não é frequentemente um múltiplo da escala s, uma pequena parte da série sobra. A fim de não descartar esta parte da série, o mesmo procedimento é repetido iniciando pelo fim da série, dessa forma, obtém-se $2N_s$ segmentos de tamanho s.

- Passo 3: Calcule a tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos por um ajuste polinomial da série. Feito isso, determine a variância pela equação abaixo:

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\{Y[(\nu-1)s+i] - \gamma_\nu(i)\}^2 \tag{4.2}$$

  para cada segmento ν, onde $\nu = 1, ..., N_s$ e

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\{Y[N-(\nu-N_s)s+i] - \gamma_\nu(i)\}^2 \tag{4.3}$$

  para $\nu = N_s+1, ..., 2N_s$, sendo que $\gamma_\nu(i)$ é o ajuste polinomial no segmento ν, que pode ser linear, quadrático, cúbico ou de ordem superior, comumente chamado de DFA1, DFA2, DFA3..., DFAm, onde m é a ordem do polinômio usado no ajuste [31].

- Passo 4: Calcule a média sobre todos os segmentos, de modo que se obtenha a q-ésima ordem da função de flutuação dada por

$$F_q(s) = \left\{\frac{1}{2N_s}\sum_{\nu=1}^{2N_s}[F^2(\nu, s)]^{q/2}\right\}^{1/q}. \tag{4.4}$$

  Neste trabalho, utilizamos $q \neq 0$ e $q > 0$, sendo $s \geq m + 2$.

- Passo 5: Determine o comportamento da função de flutuação analisando o gráfico log-log de $F_q(s)$ versus s para cada valor de q. Se a série x_k apresentar correlação de longo alcance, $F_q(s)$ aumentará para valores maiores de s, na forma de uma equação tipo lei de potência,

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}. \tag{4.5}$$

Escalas com $s \geq N/4$ devem ser excluídas do processo de médias do Passo 4, pois $F_q(s)$ fica, estatisticamente, não confiável, dado que existirá poucos segmentos para o cálculo das médias feitas pela Eq.(4.4). Em séries estacionárias, o expoente $h(2)$ é idêntico

ao bem conhecido expoente de Hurst H [25], por isso, diz-se que $h(q)$ é o expoente de Hurst generalizado [11].

Em séries não estacionárias, a relação entre H e $h(2)$ para pequenas escalas, que denominaremos de $h_1(2)$, é dada por $H = h_1(2) - 1$. Quando o efeito da tendência sinusoidal não é pronunciado, temos $h_1(2) > 1$ indicando que a série temporal é não estacionária [10].

Uma série temporal que apresenta expoente $H = 0,5$ é dita descorrelacionada. Quando $0,5 < H < 1$ diz-se que ela exibe correlação de longo alcance ou persistência e para $0 < H < 0,5$ temos uma série com correlação de curto alcance ou anti-persistência, conforme o explanado na Seção 3.3 do Capítulo 3 [25].

Quando o espectro de $h(q)$ depende de q, dizemos que a série estudada apresenta multifractalidade, caso $h(q)$ seja independente de q, diz-se que a série não exibe multifractalidade. Frequentemente, uma série temporal exibe dois tipos de multifractalidade: (i) Multifractalidade devido a um alargamento da função densidade de probabilidade (PDF) para valores da série; (ii) Multifractalidade devido a diferentes flutuações de correlações para pequenas e grandes escalas. Uma maneira fácil de distingui-las é analisando a correspondente série temporal embaralhada [11]. No processo de embaralhamento, os valores da série são colocados de forma randômica, assim, todas as correlações são destruídas. Se a série embaralhada apresentar somente multifractalidade do tipo (ii), então ela exibirá um comportamento aleatório, ou seja, $h_{shuf}(q) = 0,5$, onde $h_{shuf}(q)$ é o expoente de Hurst generalizado para a série embaralhada. Caso a série tenha somente multifractalidade do tipo (i), então, $h(q) = h_{shuf}$, não sendo a série afetada pelo procedimento de embaralhamento. Caso a série em estudo exiba multifractalidade de ambos os tipos, então a série embaralhada irá mostrar uma fraca multifractalidade em relação à série original [11].

4.2 Relação entre o Formalismo Multifractal Padrão e o MF-DFA

Na Seção anterior, apresentamos um método numérico que caracteriza a multifractalidade de uma dada série temporal a partir o expoente de Hurst generalizado, $h(q)$. Contudo, segundo o formalismo multifractal padrão, existem outros expoentes que também são usados para caracterizar a multifractalidade, e nesta Seção vamos mostrar a relação

desses expoentes com o $h(q)$.

Quando existe uma série normalizada e estacionária, o expoente $h(q)$, definido na Eq.(4.5), está diretamente relacionado com um expoente de escala $\tau(q)$, definido via função de partição do formalismo multifractal, como veremos a seguir [11, 25, 26].

Supondo que a série x_k de tamanho N seja estacionária, normalizada e positiva, isto é, $x_k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{N} x_k = 1$. Então, o procedimento do Passo 3 do método MF-DFA, Secão 4.1, é desnecessário, uma vez que não existe tendência para ser eliminada na série. Assim, o DFA pode ser substituído pela Análise de Flutuação (Fluctuation Analysis-FA) padrão, que é equivalente ao DFA exceto pela simplificada definição da variância em cada segmento ν, $\nu = 1, \ldots, N_s$, que é

$$F_{FA}^2(\nu, s) \equiv [Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s)]^2. \tag{4.6}$$

Inserindo a Eq.(4.6) na Eq.(4.4) e usando a Eq.(4.5), obtemos

$$\left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} |Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s)|^q \right\}^{1/q} \sim s^{h(q)}. \tag{4.7}$$

Considerando que o tamanho N da série é um múltiplo inteiro da escala s, temos $N_s = N/s$ e dessa forma a Eq.(4.7) fica

$$\sum_{\nu=1}^{N/s} |Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s)|^q \sim s^{qh(q)-1}. \tag{4.8}$$

Esta equação corresponde ao formalismo multifractal padrão usado nas referências [32], [25] e [27].

Para relacionarmos o MF-DFA com o formalismo da contagem de caixa [25, 27], vamos empregar a definição do perfil dado pela Eq.(4.1). O termo $Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s)$ na Eq.(4.6) é idêntico à soma dos números x_k dentro de cada segmento ν de tamanho s. Esta soma é conhecida no formalismo multifractal padrão como caixa de probabilidade, $p_s(\nu)$,

$$p_s(\nu) \equiv \sum_{k=(\nu-1)s+1}^{\nu s} x_k = Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s). \tag{4.9}$$

O expoente de escala $\tau(q)$ no formalismo padrão é definido via função de partição, $Z_q(s)$, como:

$$Z_q(s) \equiv \sum_{\nu=1}^{N/s} |p_s(\nu)|^q \sim s^{\tau(q)}, \tag{4.10}$$

onde q é um parâmetro real como no MF-DFA [25]. Substituindo a Eq.(4.9) na Eq.(4.10), notamos que esse resultado é idêntico ao da Eq.(4.8). Portanto, obtemos analiticamente a relação entre os dois conjuntos de expoentes de escala multifractais,

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \tag{4.11}$$

Dessa forma, mostramos que $h(q)$, definido na Eq.(4.5) do MF-DFA, está diretamente relacionado com o expoente de escala do formalismo multifractal padrão, $\tau(q)$.

A dimensão fractal D, calculada para a curva de Koch no Capítulo 2, ganha aqui uma generalização $D(q)$ [25, 26], e está relaciona com $\tau(q)$ pela equação

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{qh(q)-1}{q-1}. \tag{4.12}$$

Note que $h(q)$ é independente de q para séries monofractais, enquanto $D(q)$ depende de q neste caso.

Outra forma de caracterizar a multifractalidade em séries temporais é através do espectro de singularidade, denotado por $f(\alpha)$, que está relacionado com $\tau(q)$ via transformada de Legendre [25, 27, 26] pela equação

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \tag{4.13a}$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \tag{4.13b}$$

Aqui, α é denominado de força da singularidade ou expoente de Holder, enquanto $f(\alpha)$ denota a dimensão do subconjunto da série que é caracterizado por α. Usando a Eq.(4.11), podemos relacionar diretamente $\alpha(q)$ e $f(\alpha)$ com $h(q)$,

$$\alpha(q) = h(q) + qh'(q) \tag{4.14a}$$

$$f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1. \tag{4.14b}$$

Como exemplo de caracterização multifractal, vamos mostrar na Seção abaixo como obter analiticamente os coeficientes $h(q)$, $\tau(q)$, $D(q)$, $f(q)$ e $\alpha(q)$ para o Modelo Multifractal Binomial.

4.3 Modelo Multifractal Binomial

No modelo multifractal binomial [11, 25, 32, 27], a série de tamanho $N = 2^{n_{max}}$ é dada por

$$x_k = a^{n(k-1)}(1-a)^{n_{max}-n(k-1)}, \tag{4.15}$$

com $k = 1, ..., N$, onde a pode ser uma medida de probabilidade que varia $0,5 < a < 1$ e $n(k)$ é o número de dígitos iguais a 1 na representação binária do índice k, por exemplo, $n(15) = 4$, já que 15 corresponde ao binário 1111.

A partir das Eq.(4.15) e Eq.(4.9), obtemos a caixa de probabilidade $p_{2s}(\nu)$ no ν-ésimo segmento de tamanho $2s$, dado por

$$p_{2s}(\nu) = p_s(2\nu - 1) + p_s(2\nu) = [(1 - a)/a + 1]p_s(2\nu) = p_s(2\nu)/a. \tag{4.16}$$

Separando os termos pares e ímpares da Eq.(4.10) e substituindo a Eq.(4.15) nesse resultado, temos:

$$Z_q(s) = \sum_{\nu=1}^{N/s} [p_s(\nu)]^q = \sum_{\nu=1}^{N/2s} \{[p_s(2\nu - 1)]^q + [p_s(2\nu)]^q\}$$

$$Z_q(s) = \left[\frac{(1 - a)^q}{a^q} + 1\right] \sum_{\nu=1}^{N/2s} [p_s(2\nu)]^q$$

$$Z_q(s) = [(1 - a)^q + a^q] \sum_{\nu=1}^{N/2s} [p_{2s}(\nu)]^q = [(1 - a)^q + a^q] Z_q(2s). \tag{4.17}$$

Agora, substituindo a Eq.(4.10) na Eq.(4.17) encontramos o expoente de escala $\tau(q)$,

$$\tau(q) = -\frac{\ln[a^q + (1 - a)^q]}{\ln(2)}, \tag{4.18}$$

ou pela Eq.(4.11) temos

$$h(q) = \frac{1}{q} - \frac{\ln[a^q + (1 - a)^q]}{q \ln(2)}. \tag{4.19}$$

Substituindo a Eq.(4.19) nas Eqs.(4.14a), (4.14b) e (4.12), obtemos $\alpha(q)$, $f(\alpha(q))$ e a dimensão fractal generalizada, $D(q)$,

$$\alpha(q) = -\frac{a^q \ln(a) + (1 - a)^q \ln(1 - a)}{(a^q + (1 - p)^q) \ln(2)}, \tag{4.20}$$

$$f(\alpha) = -\left[\frac{\sum_{i=1}^{2} p_i^q \ln(p_i^q) - \sum_{i=1}^{2} p_i^q \ln(\sum_{i=1}^{2} p_i^q)}{(\sum_{i=1}^{2} p_i^q) \ln(2)}\right], \tag{4.21}$$

onde $p_1 = a$ e $p_2 = 1 - a$,

$$D(q) = -\frac{\ln(a^q + (1 - a)^d)}{(q - 1) \ln(2)}. \tag{4.22}$$

Analisando as equações (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) e (4.22), facilmente se observa que todas exibem uma dependência não linear em q indicando, a existência de multifractalidade na série binomial x_k [11, 25].

O método MF-DFA apresentado neste Capítulo é a principal fonte geradora de resultados deste trabalho. Na Seção 4.3, do Capítulo 7, são apresentados os espectros multifractais $h(q)$ obtidos via MF-DFA para a série do Modelo Multifractal Binomial, bem como os expoentes $\tau(q)$, $D(q)$, $\alpha(q)$ e $f(q)$, os quais são relacionados com $h(q)$ conforme mostramos acima. Além disso, também são apresentados no Capítulo 7 os $h(q)$ dos níveis de água dos rios estudados neste trabalho.

Capítulo 5

Processos Multiplicativos

Neste Capítulo, demonstramos como obter o expoente de Holder, α, para o Processo Multiplicativo Binomial, em seguida, fizemos uma d-generelização para Processo Multiplicativo Multinomial, obtendo assim um d-expoente de Holder, o qual relaciona a multifractalidade com uma possível d-entropia $S(d,q) = f(d,q)$. Mostramos que para $q = 1$, esta equação recupera uma famosa relação da física, a entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon.

5.1 Processo Multiplicativo Binomial

Nesta Seção vamos caracterizar o processo multiplicativo binomial, e obter dele o expoente de Holder de forma analítica.

As populações ou distribuições geradas por um processo multiplicativo têm muitas aplicações e a vantagem de que várias propriedades dessas distribuições podem ser facilmente analisadas. Consideremos uma população com η elementos distribuídos sobre o segmento de linha $L = [0, 1]$. Para caracterizar essa distribuição, vamos dividir o segmento de linha em células de comprimento $\delta = 2^{-n}$, tal que $N = 2^n$ células são necessárias para cobrir o segmento L, onde n é número de geração na subdivisão binária do segmento. Cada célula é indiciada por $i = 0, 1, 2, ..., N - 1$. A distribuição da população sobre o segmento de reta é especificada por η_i membros na i-ésima célula com uma resolução δ. A fração da população total contida nesta i-ésima célula é $\mu_i = \eta_i/\eta$. Um tratamento mais profundo sobre o processo multiplicativo binomial pode ser obtido nas referências [25, 27, 32].

O conjunto $\mathcal{M}_n$, dado por

$$\mathcal{M}_n = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}, \tag{5.1}$$

dá uma completa descrição da população na resolução δ. A medida $M(x)$ de uma parte, ou subregião x, do segmento de linha L é dada por

$$M(x) = \sum_{i \in x} \mu_i. \tag{5.2}$$

Em geral este é o fim da história, pois a única forma de descrever a distribuição dos membros ao longo do segmento L é dada por $\mathcal{M}$. No entanto, quando $\mathcal{M}_n$ exibe propriedade de escala, novas informações surgem da distribuição, como ilustrado no exemplo a seguir.

Consideremos o seguinte processo multiplicativo, o qual gera as medidas $\mu(L_x)$ no intervalo específico L_x, onde $L_x \in L$. Denotaremos o intervalo unitário $[0, 1]$ por L_0. No gerador temos $\mu(L_0) = 1$, pois não houve nenhuma divisão do segmento L. Na primeira geração, $n = 1$, dividimos L_0 em duas partes de tamanhos iguais $L_{0,0}$ e $L_{0,1}$ e multiplicamos o lado esquerdo, $L_{0,0} = [0, 1/2]$, por uma probabilidade p, onde $0 \leq p \leq 1$, e o lado direito, $L_{0,1} = [1/2, 1]$, por $1 - p$, conforme a Figura 5.1 (a). Denotaremos as medidas para o primeiro e segundo intervalo, respectivamente, por $m_0 = p$ e $m_1 = 1-p$. A medida inicial de L_0 é mantida constante, dado que $m_1 + m_0 = 1$.

Na segunda geração, $n = 2$, cada subintervalo $L_{0,0}$ e $L_{0,1}$ é dividido em duas partes de forma similar, assim temos quatro subconjuntos indiciados por $L_{0,00}$, $L_{0,01}$, $L_{0,10}$ e $L_{0,11}$, com frações da população em células dado por

$$\mathcal{M}_2 = \{\mu_i\}_{i=0}^{4-1} = m_0m_0, m_0m_1, m_1m_0, m_1m_1. \tag{5.3}$$

Note que, a medida inicial é mantida a mesma, isto é, $\mu(L_{0,00}) + \mu(L_{0,01}) + \mu(L_{0,10}) + \mu(L_{0,11}) = m_0m_0 + m_0m_1 + m_1m_0 + m_1m_1 = 1$, veja Figura 5.1 (b). Nesta mesma figura, mostramos também o processo multiplicativo binomial para $n = 5$ e $n = 12$. É importante frisar que em cada geração do processo a medida é preservada.

A fração da população total na i-ésima célula é $\mu_i = m_0^{n_0}m_1^{n_1}$, onde n_0 e n_1 são, respectivamente, os números de zeros e uns na representação da fração binária do número $x = i/2^n$. Por exemplo, na segunda geração $n = 2$, na célula $i = 2$, temos $x = 0, 10$ na representação da fração binária, portanto, $n_0 = 1$ e $n_1 = 1$, logo $\mu_2 = m_0m_1$. Observe que $n_0 + n_1 = n$. Assim, são necessárias frações binárias tendo n dígitos para representar

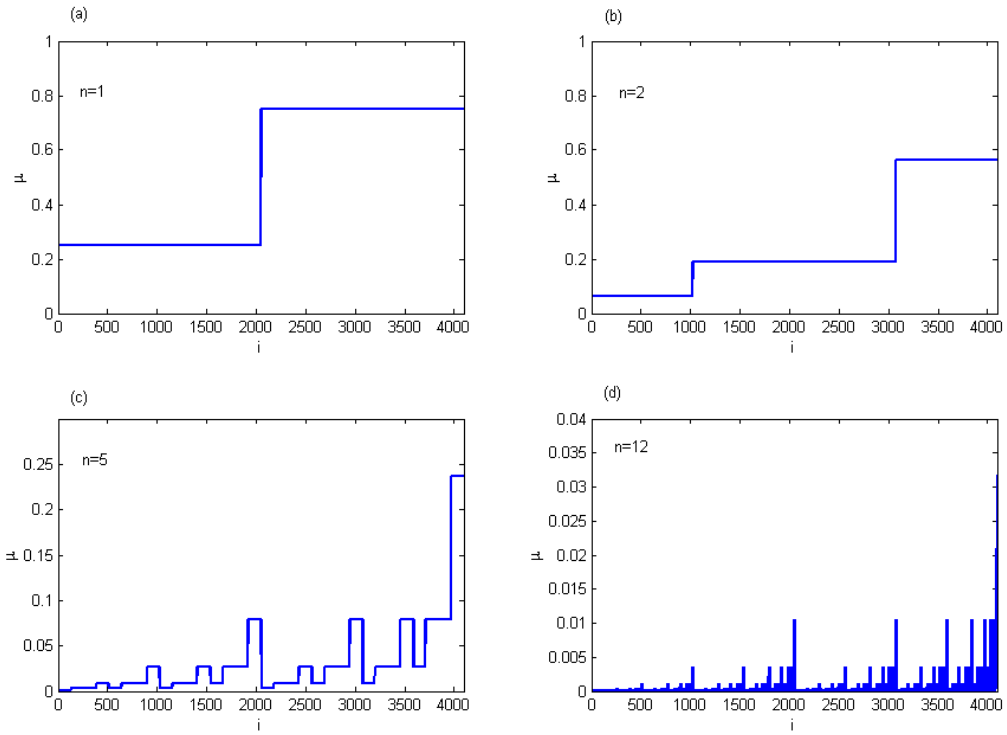

Figura 5.1: Medida μ da célula para o processo multiplicativo binomial: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 5$ e (d) $n = 12$, com $p = 0,25$. O eixo x representa o índice de alocação do valor de μ.

todas as células na n-ésima geração. Na Figura 5.2, mostramos as medidas $\mu(x)$ da célula localizada em x e $M(x)$ para a região de $[0, x]$, para $n = 12$, onde

$$M(x) = \sum_{i=0}^{x.2^n} \mu_i. \tag{5.4}$$

O processo multiplicativo binomial é, essencialmente, caracterizado por apresentar dois tipos diferentes de probabilidade p e $1-p$, que vamos representar aqui por $b = 2$. Portanto, podemos escrever um relação mais geral para a medida $\mu(x)$ da i-ésima célula, como:

$$\mu(x) = \prod_{i=0}^{n-1} m_i = \prod_{i=0}^{b-1} m_i^{n_i} = m_0^{n_0} m_1^{n_1}. \tag{5.5}$$

Note que esta relação, além de recuperar o caso binomial, vale para qualquer conjunto de probabilidades. Como consequência da generalização, temos $n = \sum_{i=0}^{b-1} n_i$. Observe que se fizermos $\mu = x_k$, $m_0 = a$, $m_1 = 1-a$ e $n_1 = n-n_0$, a Eq.(5.5) fica $x_k = a^{n_0}(1-a)^{n-n_0}$. Esta é a Eq.(4.15) dada no Modelo Multifractal Binomial do Capítulo 4, isto é, as propriedades multifractais do processo multiplicativo binomial são as mesmas do Modelo Multifractal

Binomial.

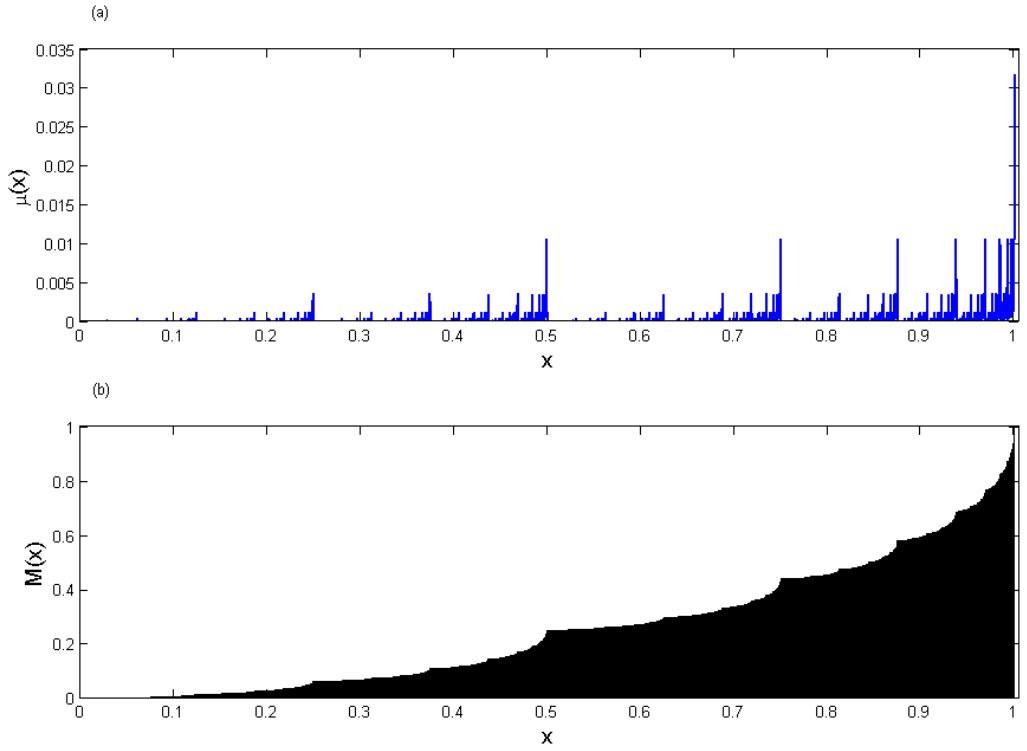

Figura 5.2: Processo multiplicativo binomial com probabilidade $p = 0,25$ e n máximo $n = 12$, em (a) temos $\mu(x)$ da células como função de $x = i.2^{-12}$, (b) $M(x)$ para o intervalo $[0, x]$ como função de x.

Para caracterizarmos as propriedades de escala do processo multifractal binomial, vamos tomar um ponto x, próximo da origem no intervalo unitário. A medida desse intervalo na n-ésima geração é

$$\mu([0, 2^{-n}]) = m_0^n = (2^{-n})^\alpha$$
$$\alpha = -\log_2(m_0). \tag{5.6}$$

Isso que dizer que próximo de zero, μ apresenta a propriedade de escala, $\mu([0, \rho]) \approx \rho^\alpha$. Dividindo essa equação por ρ, ficamos com

$$\frac{\mu[0, \rho]}{\rho} \approx \rho^{(\alpha-1)}. \tag{5.7}$$

Note que a Eq.(5.7) tende para 0 ou ∞, se $\alpha \neq 1$. Isso evidencia que a medida μ próximo de zero, segue uma relação governada por uma lei de potência, conforme tratamos no Capítulo 2. O expoente de escala α é denominado de expoente de Holder e é a medida

da força da singularidade. Este expoente é definido como:

$$\alpha(x_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\log \mu(B_{x_0}(\rho))}{\log(\rho)}, \tag{5.8}$$

onde $B_{x_0} = \{x : |x - x_0| < \rho\}$ é o conjunto de pontos em torno de x_0 que estão a uma distância menor que ρ [25]. Para um i-ésimo intervalo, de tamanho 2^{-n}, a Eq.(5.8) fica

$$\alpha(x) = \frac{\log(\mu(x))}{\log(2^{-n})} = \frac{\log[m_0^{n_o} m_1^{n_1}]}{-n \log(2)}$$
$$\alpha(x) = -\frac{n_0}{n} \log_2 m_0 - \frac{n_1}{n} \log_2 m_1. \tag{5.9}$$

Por enquanto, vamos nos dar por satisfeitos, pois conseguimos caracterizar o expoente de Holder para o caso do processo multiplicativo binomial. Na Seção seguinte, vamos caracterizar o expoente de Holder fazendo uma d-generalização para o processo multifractal multinomial.

5.2 d-Processo Multiplicativo Multinomial

Para generalizar o processo multiplicativo binomial, deve-se dividir o intervalo unitário L em b partes, e multiplicar cada uma pelos multiplicadores $m_0, m_1, m_2, ..., m_{b-1}$, onde m_i é uma probabilidade. Assim, na n-ésima geração, teremos b^n células de tamanho $\delta = b^{-n}$. Então, da Eq.(5.5) temos que uma d-medida é dada por

$$[\mu(L_b^n)]^d = \left[m_0^{n_0} m_1^{n_1} ... m_{b-1}^{n_{b-1}}\right]^d = \left[\prod_{i=0}^{b-1} m_i^{n_i}\right]^d = \left[\prod_{i=0}^{b-1} m_i^{h_i n}\right]^d, \tag{5.10}$$

onde d é um parâmetro que estamos inserindo no expoente, e que será melhor detalhado no Capítulo de resultados e discussões. O valor de $h_i = n_i/n$ é a porcentagem do número de vezes que o i-ésimo multiplicador é repetido no processo, onde n_i é o número de multiplicadores m_i. Observe que para $d = 1$ e $b = 2$, recuperamos o processo multiplicativo binomial. Um tratamento mais aprofundado sobre Processo Multiplicativo Multinomial pode ser encontrado na referência [52].

A fim de observarmos os efeitos da d-generalização no expoente de Holder, substituiremos a Eq.(5.10) na Eq.(5.8),

$$\alpha(d) = -d \frac{\log_b(\prod_{i=0}^{b-1} m_i^{h_i n})}{n} = -d \sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b(m_i). \tag{5.11}$$

Com a finalidade de facilitar a análise do expoente de Holder, $\alpha(d)$, definimos o número de células que tem $\alpha(d)$ como seu expoente de Holder na n-ésima geração por $N_n(\alpha(d))$. Nesta geração do d-processo existem $n!$ formas dos multiplicadores serem arranjados nas células. Os multiplicadores podem ser arranjados de $n_i!$ maneiras, onde $i = 0, 1, ..., N-1$. $N_n(\alpha(d))$ é análogo ao número de estados de uma caminhada aleatória, só que em vez de o caminhante ir para o sentindo da direita ou esquerda, ele poderá ir para n_i sentidos. Assim, temos que $N_n(\alpha(d))$ pode ser escrito como

$$N_n(\alpha(d)) = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{b-1} n_i!}. \tag{5.12}$$

Tirando o log na base b da Eq.(5.12), e utilizando a expansão de Stirling, $\log(n!) = n\log(n) - n$, obtemos,

$$\log_b N_n(\alpha(d)) = n\log_b(n) - n - \sum_{i=0}^{b-1} n_i \log_b(n_i) + \sum_{i=0}^{b-1} n_i$$

ou

$$\log_b N_n(\alpha_d) = n\log_b(n) - \sum_{i=0}^{b-1} n_i \log_b(n_i), \tag{5.13}$$

onde $\sum_{i=0}^{b-1} n_i = n$. Substituindo $n_i = h_i n$ na Eq.(5.13), ficamos com

$$\log_b N_n(\alpha(d)) = n\log n - n\sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b h_i - n\log_b n \sum_{i=0}^{b-1} h_i$$

$$\log_b N_n(\alpha(d)) = -n\sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b(h_i). \tag{5.14}$$

Lembrando que $\sum_{i=0}^{b-1} h_i = 1$, pois h_i é uma porcentagem. Esta equação pode ser reescrita como:

$$N_n(\alpha(d)) = \left(b^{-n}\right)^{-\omega}, \text{ onde } \omega = -\sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b h_i. \tag{5.15}$$

Para um dado $\alpha(d)$, notamos que o problema da Eq.(5.15) consiste em encontrar o h_i que maximiza a função $-\sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b h_i$, a qual está sujeita aos seguintes vínculos $\sum_{i=0}^{b-1} h_i = 1$ e $\alpha(d) = -d\sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b(m_i)$. Para resolver esse problema, foi lançado mão dos multiplicadores de Lagrange.

Definindo G como segue:

$$G = -\sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b h_i + q\left[\alpha(d) + d\sum_{i=0}^{b-1} h_i \log_b m_i\right], \tag{5.16}$$

e fazendo $\frac{\partial G}{\partial h_i} = 0$ para obter os pontos críticos, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial h_i} &= -\left(\log_b h_i + 1\right) + qd \log_b m_i = 0 \\ \log_b h_i &= \left(\log_b m_i^{qd} - 1\right) \\ h_i &= b^{\left(\log_b m_i^{qd} - 1\right)},\end{aligned} \tag{5.17}$$

e usando o vínculo $\sum_{i=0}^{b-1} h_i = 1$, temos

$$\sum_{i=0}^{b-1} b^{\left(\log_b m_i^{qd} - 1\right)} = 1,$$

ou ainda,

$$\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd} = b. \tag{5.18}$$

Portanto, substituindo a Eq.(5.18) na Eq.(5.17), temos

$$h_i = \left(\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd}\right)^{\left(\log_b m_i^{qd} - 1\right)}$$

$$h_i = \frac{\left(\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd}\right)^{\log_b m_i^{qd}}}{\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd}} = \frac{b^{\log_b m_i^{qd}}}{\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd}} = \frac{m_i^{qd}}{\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd}}. \tag{5.19}$$

Substituindo este resultado para h_i na Eq.(5.11), obtemos

$$\alpha(d,q) = -d \sum_{i=0}^{b-1} \frac{m_i^{qd} \log_b m_i}{\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd}}$$

ou

$$\alpha(d,q) = -k \sum_{i=0}^{b-1} \frac{m_i^{qd} \ln(m_i^d)}{\sum_{i=0}^{b-1} m_i^{qd}}. \tag{5.20}$$

Nesta última equação usamos a propriedade logaritma $\log_b(P) = \ln(P)/\ln(b)$, onde $k = 1/\ln(b)$. Vale lembrar que o multiplicador m_i é uma medida de probabilidade, conforme já mencionamos anteriormente. Note que fazendo $d = 1$ e $b = 2$ na Eq.(5.20), recuperamos a Eq.(4.20) e, consequentemente, a Eq.(4.21), o que é esperado para qualquer proposta de generalização.

A fim de tornar a notação mais familiar com a termodinâmica, vamos adotar a seguinte notação: $m_i = p_i$ e $b = W$. Para caracterizar o espectro de singularidade,

$f(d,q)$, em termos de $\alpha(d,q)$, devemos primeiro obter um expoente de escala do formalismo multifractal padrão, $\tau(d,q)$. Então, usando as Eqs.(4.13a) e (5.20), obtemos

$$\tau(d,q) = \int \alpha(d,q)dq = -k\ln(\sum_{i=1}^{W} p_i^{qd}), \tag{5.21}$$

e substituindo as Eqs.(5.20) e (5.21) na Eq.(4.13b), ficamos com

$$f(d,q) = -k\left[\sum_{i=1}^{W} \frac{p_i^{qd}\ln(p_i^{qd})}{\sum_{i=1}^{W} p_i^{qd}} - \ln(\sum_{i=1}^{W} p_i^{qd})\right]. \tag{5.22}$$

Tomando $\tau(q) = \tau(d,q)$ a Eq.(4.11) torna-se,

$$h(d,q) = \frac{\tau(d,q)+1}{q}. \tag{5.23}$$

Substituindo nesta relação a Eq.(5.21) obtemos,

$$h(d,q) = \frac{-\ln(\sum_{i=1}^{W} p_i^{qd})}{q\ln(W)} + \frac{1}{q}. \tag{5.24}$$

Fazendo $d=1$, $W=2$, $p_1 = a$, $p_2 = 1-a$ na equação acima, temos

$$h(q) = \frac{1}{q} - \frac{\ln(a^q + (1-a)^q)}{q\ln(2)}, \tag{5.25}$$

que é o expoente de Hurst generalizado do Modelo Multifractal Binomial, Eq.(4.19), ou seja, a proposta de generalização do expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, é capaz de recuperar resultados já conhecidos.

Outra importante observação é que a Eq.(5.22) para $d = q = 1$ recupera a equação da entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon, $S_{BG} = -k\sum_{i=1}^{W} p_i \log p_i$ [43]. Por esse forte motivo, vamos a partir daqui considerar que $f(d,q)$ seja uma possível entropia que depende de (d,q), ou seja,

$$S(d,q) = f(d,q) = -k\left[\sum_{i=1}^{W} \frac{p_i^{qd}\ln(p_i^{qd})}{\sum_{i=1}^{W} p_i^{qd}} - \ln(\sum_{i=1}^{W} p_i^{qd})\right]. \tag{5.26}$$

A ideia de caracterizar a entropia a partir do formalismo multifractal não é nova, pois existe na literatura trabalhos que estabelecem que $f(\alpha(q))$ e $\alpha(q)$ são os análogos da entropia, $S(q)$, e energia interna, $u(q)$, da termodinâmica, isto é, $S(q) = f(\alpha(q))$ e $u(q) = \alpha(q)$ [51].

Uma outra característica interessante de $S(q,d)$ é que para sistemas equiprováveis, os seus valores são idênticos aos de S_{BG}. Para demonstrar essa peculiaridade, iremos

assumir que $p_i = p$, então da Eq.(5.26) temos

$$S(d,q) = -k\left[\frac{\sum_{i=1}^{W} p^{dq}\ln(p^{dq})}{\sum_{i=1}^{W} p^{dq}} - \ln(\sum_{i=1}^{W} p^{dq})\right]$$

$$S(d,q) = -k\left[\frac{Wp^{dq}\ln(p^{dq})}{Wp^{dq}} - \ln(Wp^{dq})\right]$$

$$S(d,q) = k\ln(W), \tag{5.27}$$

onde W é o número de estados.

Nas últimas décadas, a proposta de Tsallis, (1988) [44] para uma generalização da entropia, veja Tabela 5.1, tem sido amplamente usada na caracterização de vários sistemas físicos. Contudo, a ideia de uma entropia geral não é nova, antes mesmo da entropia de Tsallis, já existiam possíveis generalizações da mesma. Tais generalizações remontam de no mínimo desde 1960, quando Rényi e, posteriormente, outros pesquisadores propuseram suas generalizações de entropia. Na Tabela 5.1 exibimos as equações das entropias com seus respectivos autores.

Tabela 5.1: Ordem cronológica das propostas de entropias e seus autores.

Autor	**Equação**	**Ano**
Rényi [45]	$S_q^R = \frac{1}{q-1}\ln(\sum_{i=1}^{W} p_i^q)$	1960
Sharma-Mitall [50]	$S_{q,r}^{SM} = -\sum_{i=1}^{W} p_i^r \frac{p_i^q - p_i^{-q}}{2q}$	1975
Tsallis [44]	$S_q^T = k\frac{1-\sum_i^W p_i^q}{q-1}$	1988
Abe [48]	$S_q^A = -\sum_{i=1}^{W} \frac{p_i^q - p_i^{-q}}{q-p_i^{-q}}$	1997
Landsberg-Vetral [47]	$S_q^L = \frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{W} p_i^q} - 1\right)$	1998
Kaniadakis [49]	$S_q^K = \sum_{i=1}^{W} \frac{p_i^{1+q} - p_i^{1-q}}{2q}$	2002

Este Capítulo é uma importante fonte geradora de resultados deste trabalho, pois foi a partir deste que relacionamos a possível entropia $S(d,q)$, Eq.(5.26), com a multifractalidade, $h(q)$, das séries temporais. Além disso, conseguimos exibir uma equação geral para a multifractalidade $h(d,q)$, Eq.(5.24). No Capítulo 7 mostraremos as equações $S(d,q)$ e $h(d,q)$ aplicadas as séries de níveis de água dos rios estudados.

Capítulo 6

Hidrologia Básica das Principais Bacias Brasileiras

Diariamente, os níveis de água das estações hidrométricas dos rios brasileiros são medidos pelos técnicos do Serviço Geológico do Brasil (CPRM) e repassados à Agência Nacional de Águas (ANA). Para este trabalho, escolhemos dezesseis estações hidrométricas da ANA, que apresentavam a maior quantidade de medidas contínuas no tempo, situadas em diferentes rios e zonas climáticas.

Para se ter ideia do comportamento temporal dos níveis de água, apresentamos nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 intervalos das séries hidrológicas de cada estação. O tamanho dessas séries varia entre 32 e 109 anos, com dados medidos até o ano de 2009. A localização geográfica das estações estão apresentadas na Figura 1.1 e algumas informações hidrológicas das mesmas são dadas na Tabela 6.1.

Neste Capítulo, apresentamos uma breve discussão sobre a hidrologia básica das bacias hidrográficas que abrigam os rios estudados. Com exceção da Figura 1.1, as demais figuras e tabelas usadas neste Capítulo se encontram no final do mesmo.

6.1 Hidrológia Básica das Principais Bacias Brasileiras

Nesta Seção fazemos uma breve explanação sobre a hidrologia das bacias hidrográficas que tem pelo menos um dos rios estudado neste trabalho.

6.1.1 Bacia do Prata

A bacia que abriga os rios Paraná e Paraguai, denominada de Bacia do Prata, é a segunda maior bacia hidrográfica da América do Sul. Os dois rios juntos tem uma área de drenagem de $3,2$ milhões km^2, sendo que desse total $1,4$ minlhões de km^2 estão em solo brasileiro, o que corresponde a $10,5\%$ do território do país. A Bacia do Prata se estende pelo Brasil, Uruguai, Bolívia, Paraguai e Argentina. Possui cerca de 61% das hidrelétricas em operação ou construção do Brasil [38].

O rio Paraná possui cerca de 4.900 km de extensão e é o segundo em extensão na América. É formado pela junção dos rios Grande e Parnaíba. Apresenta o maior aproveitamento hidrelétrico do Brasil, abrigando a Usina de Itaipu, entre outras. Os afluentes do Paraná, como o Tietê e o Paranapanema, também apresentam grande potencial hidrelétrico. Sua navegabilidade e a de seus afluentes vem aumentando devido a construção da hidrovia Tietê-Paraná. A hidrovia serve para o transporte de cargas, pessoas e veículos, tornando-se uma importante ligação com os países do Mercosul. São 2.400 km de percurso navegável ligando as localidades de Anhembi e Foz do Iguaçu. Em função de suas diversas quedas, o rio Paraná possui navegação de porte até a cidade argentina de Rosário, sendo o quarto do mundo em drenagem, drenando todo o centro-sul da América do Sul, desde as encostas dos Andes até a Serra do Mar.

O rio Paraguai possui cerca de 2.550 km de extensão ao longo dos territórios brasileiro e paraguaio. Tem sua origem na serra de Araporé, a 100 km de Cuiabá (MT). Seus principais afluentes são os rios Miranda, Taquari, Apa e São Lourenço. Antes de se juntar ao rio Paraná para formarem o rio da Prata, o rio Paraguai banha o Paraguai e a Argentina, além disso, ele drena o Pantanal Mato-Grossense que é uma área de grande interesse ecológico [38].

6.1.2 Bacia do São Francisco

A Bacia do São Francisco, com área de drenagem de 640.000 km^2, estende-se pelos Estados de Minas Gerais, Bahia, Goiás, Pernambuco, Sergipe e Alagoas, além do Distrito Federal, representando $7,5\%$ do território nacional e, devido a sua extensão e aos diferentes ambientes percorridos, ela se divide em quatro unidades fisiográficas: na região do Alto São Francisco, correspondente a 19% da área da bacia, que vai da nascente até a cidade de Pirapora, MG; no Médio São Francisco, que se estende de Pirapora a Remanso,

BA, correspondente a 50% da bacia; no Submédio São Francisco, de Remanso até Paulo Afonso, BA correspondente a 24% da bacia e no Baixo São Francisco, que vai de Paulo Afonso até a foz correspondente a 7% da bacia [39].

O rio São Francisco nasce em Minas Gerais, na serra da Canastra, e atravessa o sertão semi-árido mineiro e baiano, o que possibilita a sobrevivência da população ribeirinha de baixa renda, a irrigação de pequenas propriedades e a criação de gado. Possui grande aproveitamento hidrelétrico, abastecendo não só a região Nordeste, como também parte da região Sudeste. Até a sua foz, na divisa dos estados de Alagoas e Sergipe, o São Francisco percorre 3.160 km. Seus principais afluentes são os rios Paracatu, Carinhanha e Grande na margem esquerda e os rios Salitre, das Velhas e Verde Grande na margem direita. Embora atravesse um longo trecho em clima semi-árido, é um rio perene e navegável por cerca de 1.800 km, desde Pirapora (MG) até a cachoeira de Paulo Afonso. Apresenta fortes quedas em alguns trechos, e tem seu potencial hidrelétrico aproveitado através das Usinas de Paulo Afonso, Sobradinho, Três Marias e Moxotó, entre outras. O rio São Francisco liga as duas regiões mais populosas e de mais antigo povoamento: Sudeste e Nordeste.

6.1.3 Bacia dos Rios Tocantins e Araguaia

A bacia dos rios Tocantins-Araguaia tem área de drenagem de 767.164 km^2, e constitui a maior bacia hidrográfica inteiramente situada em território brasileiro (9% do território nacional), abrangendo os estados de Goiás (25, 7%), Tocantins (36, 3%), Pará (16, 5%), Maranhão (3, 8%), Mato Grosso (17, 6%) e o Distrito Federal (0, 1%). Na região da bacia estão presentes os biomas Floresta Amazônica, ao norte e noroeste, e Cerrado nas demais áreas, incluindo a transição Floresta-Cerrado [40, 41].

Seu rio principal, o Tocantins, nasce na confluência dos rios Maranhão e Paraná, em Goiás, percorrendo 2.640 km até desembocar na foz do Amazonas. Durante o período de cheias, seu trecho navegável é de 1.900 km, entre as cidades de Belém (PA) e Peixe (GO). Em seu curso inferior, situa-se a Hidrelétrica de Tucuruí, a segunda maior do país, que abastece os projetos de mineração da Serra do Carajás e da Albrás.

O rio Araguaia nasce na serra das Araras, no Mato Grosso, na fronteira com Goiás. Tem cerca de 2.600 km de extensão e desemboca no rio Tocantins em São João do Araguaia, logo antes de Marabá (Pa). No extremo Nordeste de Mato Grosso, o rio divide-

se em dois braços, pela margem esquerda o rio Araguaia e pela margem direita o rio Javaés, por aproximadamente 320 km, formando a ilha do Bananal, maior ilha fluvial do mundo. O rio é navegável por cerca de 1.100 km, entre São João do Araguaia e Beleza, porém, não possui nenhum centro urbano de destaque ao longo desse trecho.

O regime hidrológico da bacia é bem definido. No Tocantins, a época de cheia estende-se de outubro a abril, com pico em fevereiro, no curso superior, e março, nos cursos médio e inferior. No Araguaia, as cheias são maiores e um mês atrasadas com relação ao Tocantins, isso em decorrência do extravasamento da planície do Bananal. Os dois rios secam entre maio e setembro, com picos de seca em setembro [38].

6.1.4 Bacia Amazônica

A bacia Amazônica abriga o sistema fluvial mais extenso e de maior massa líquida da Terra, sendo coberta pela maior floresta tropical do planeta. É delimitada ao norte e ao sul, respectivamente, pelos maciços das Guianas e do Brasil Central, a oeste pela Cordilheira dos Andes e aberta a leste, onde é acessível a plena entrada dos ventos alísios. O sistema Amazonas/Solimões, principal hidrovia da região tem uma área de drenagem em torno de 7 milhões de km^2 de terras e possui uma vazão anual média de cerca de 176.000 m^3/s, sendo responsável por em torno de 15% de toda água doce despejada anualmente nos oceanos[42]. Tem extensão de 6.868 km de comprimento, tornando o sistema Amazonas/Solimões o maior rio em volume de água e extensão do planeta. Experimentos recentes comprovam que durante o período de águas altas, as larguras médias deste rio variam de 1 km em Tabatinga a 7 km em Almeirim (Pará) para profundidades que vão de 30 m em Tefé (Amazonas) até 100 m em Itacoatiara (Amazonas) [38, 17].

A parte brasileira da Amazônia abrange os estados do Amazonas, Pará, Amapá, Acre, Roraima, Rondônia e Mato Grosso. O sistema Amazonas/Solimões é atravessado pela linha do Equador, portanto possui afluentes nos dois hemisférios. Os principais afluentes da margem esquerda são o Japurá, o Negro e o Trombetas e da margem direita o Juruá, o Purus, o Madeira, o Xingu e o Tapajós. Esses rios são de grande importância econômica, agropecuária, pesqueira e transporte, pois navios oceânicos de grande porte podem navegar até Manaus, capital do Estado do Amazonas, enquanto embarcações menores com até seis metros de calado, podem alcançar a cidade de Iquitos no Peru, distante 3.700 km do Oceano Atlântico [38].

No cenário global, a Amazônia tem um importante papel na manutenção do clima do planeta, pois sequestra carbono da atmosfera diminuindo assim o efeito estufa, o que nos faz pensar a Amazônia como o ar condicionado do planeta. Existe, também, uma interessante relação da região com a variação da temperatura na superfície do mar dos Oceanos Atlântico e Pacífico, em particular com os eventos El-Nino e La-Nina, que causam respectivamente, períodos de poucas e muitas chuvas na Amazônia [24].

O Brasil é sem dúvida um dos mais importantes, se não a mais importante nação, no âmbito de recursos naturais do globo, pois o seu pujante sistema hídrico, aliado as suas imensas florestas tem importante papel para a manutenção da vida na Terra. Cada cidadão que vive nesse país é responsável, mesmo que indiretamente, pela qualidade de vida dos outros habitantes do planeta, pois cada brasileiro tem a responsabilidade de preservar todo esses imenso patrimonio natural que o Brasil abriga.

As informações sobre a hidrologia básica das bacias apresentadas neste Capítulo, mostram a importância do sistema hídrico brasileiro para o mundo.

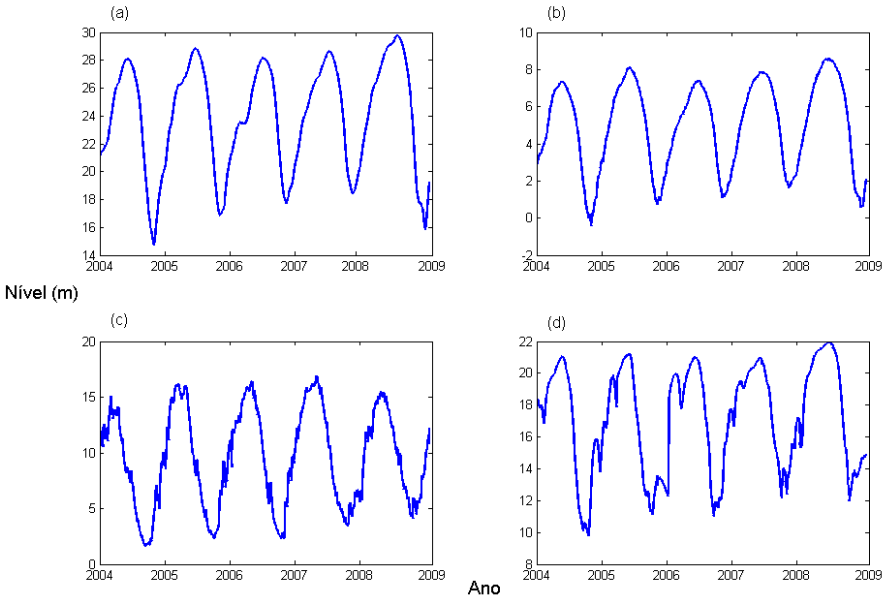

Figura 6.1: Níveis de água em metros das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho e (d) Fonte Boa no período de 2005-2009.

Tabela 6.1: Informações das estações hidrométricas situadas nos principais rios brasileiros.

Rio	**Estação**	**Área de Drenagem** ($10^3 km^2$)	**Período**
Negro	Manaus	696,808	1903-2009
Amazonas	Óbidos	4680	1968-2009
Madeira	Porto Velho	954,285	1967-2009
Solimões	Fonte Boa	1227,819	1977-2009
Tocantins	Tucuruí	764	1970-2009
Tocantins	Marabá	703	1972-2009
Tapajós	Santarém	493	1976-2009
Juruá	Cruzeiro do Sul	38,537	1968-2009
Araguaia	Xambioá	377	1970-2009
Araguaia	Conceição do Araguaia	332	1970-2009
Paraná	Guaíra	802,150	1921-2009
Paraguai	Ladário	459,990	1900-2009
Xingu	Altamira	446,203	1969-2009
Paraguai	Cáceres	32,774	1966-2009
São Francisco	Barra	425	1926-2009
São Francisco	Piranhas	610	1927-2009

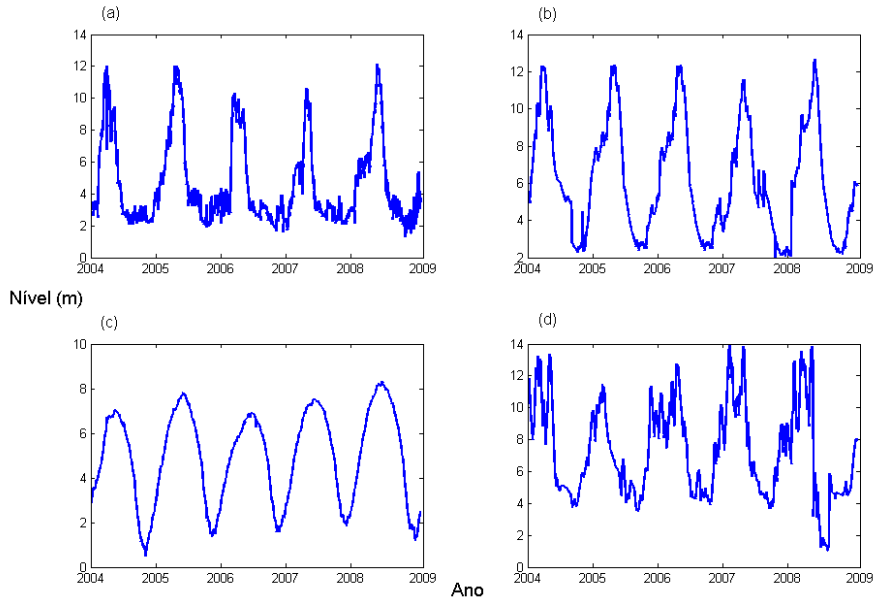

Figura 6.2: Níveis de água em metros das estações de: (a) Tucuruí, (b) Marabá, (c) Santarém e (d) Cruzeiro do Sul no período de 2005-2009.

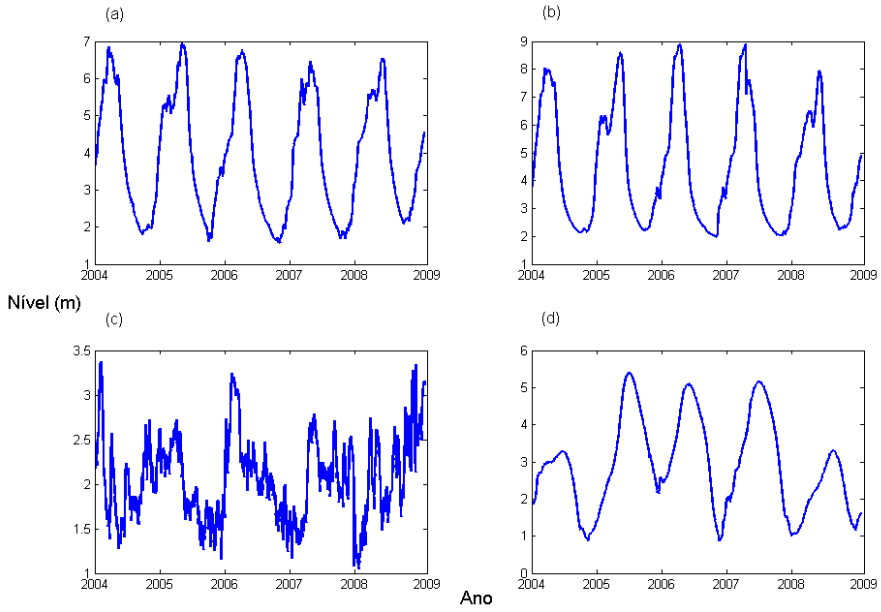

Figura 6.3: Níveis de água em metros das estações de: (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Guaíra e (d) Ladário no período de 2005-2009.

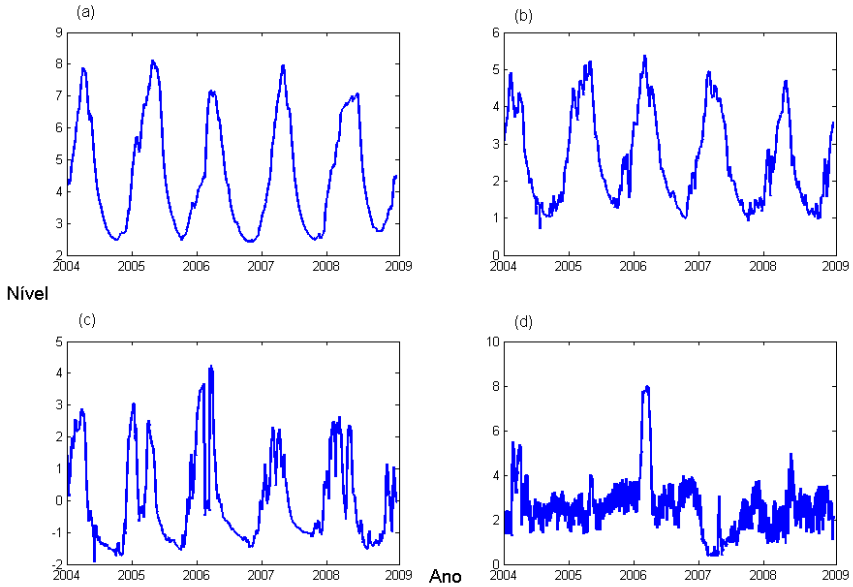

Figura 6.4: Níveis de água em metros das estações de: (a) Altamira, (b) Cáceres, (c) Barra e (d) Piranhas no período de 2005-2009.

Capítulo 7

Resultados e Discussões

Neste Capítulo, calculamos via método MF-DFA, a multifractalidade das séries de níveis de água das estações de Manaus, Óbidos, Porto Velho, Fonte Boa, Santarém, Cruzeiro do Sul, Xambioá, Conceição do Araguaia, Tucuruí, Marabá, Ladário, Altamira, Cáceres, Barra, Piranhas e Guaíra, as quais podem ser localizadas na Figura 1.1. Exibimos ainda, uma expressão analítica para o expoente de Hurst generalizado. Comparamos, também, a possível entropia $S(d, q)$, Eq.(5.26), com a conhecida entropia de Tsallis [44].

Para a obtenção dos espectros multifractais das séries de níveis de água das estações hidrométricas estudadas, desenvolvemos um programa em linguagem MatLab 7.0, que segue o conjunto de equações que compõem o MF-DFA, exposto na Seção 4.1. O computador usado para rodar o programa foi um Acer TravelMate $2480 - 2779$, processador Intel Celeron com $1,73$ GHz. O tempo médio de execução do programa para as séries supracitadas foi de, aproximadamente, 20 minutos. A validação do programa foi feita através dos resultados analíticos da multifractalidade do Modelo Multifractal Binomial.

7.1 Validação do Programa

Nesta Seção, comparamos os resultados analíticos obtidos para a multifractalidade do Modelo Multifractal Binomial com os resultados númericos via MF-DFA, objetivando validar o nosso programa em linguagem Matlab 7.0.

Na validação do programa, geramos três séries temporais do modelo binomial multifractal, Eq.(4.15). Os valores do parâmetro a deste modelo foram $(0,60; 0,75; 0,90)$. Calculamos os espectros de $h(q)$ através do método MF-DFA e comparamos com valores

analíticos, Eq.(4.19). Comparamos, ainda, os valores simulados e analíticos dos expoentes $\tau(q)$, Eq.(4.18) e $D(q)$, Eq.(4.22). O expoente $f(\alpha)$, Eq.(4.21), foi calculado apenas para $a = 0,75$. Os resultados podem ser observados nas Figuras 7.1 e 7.2, onde notamos uma boa concordância, com erros em torno de $\pm 1\%$, entre os valores analíticos e os simulados via MF-DFA.

Nos limitaremos apenas ao cálculo do expoente $h(q)$ das séries de níveis de água, visto que os expoente $\tau(q)$, $D(q)$ e $f(\alpha)$ medem a mesma propriedade das séries temporais.

Uma vez demonstrada a confiabilidade do programa, utilizamos as séries de níveis de água como dados de entrada, e assim obtivemos os expoentes de Hurst generalizados.

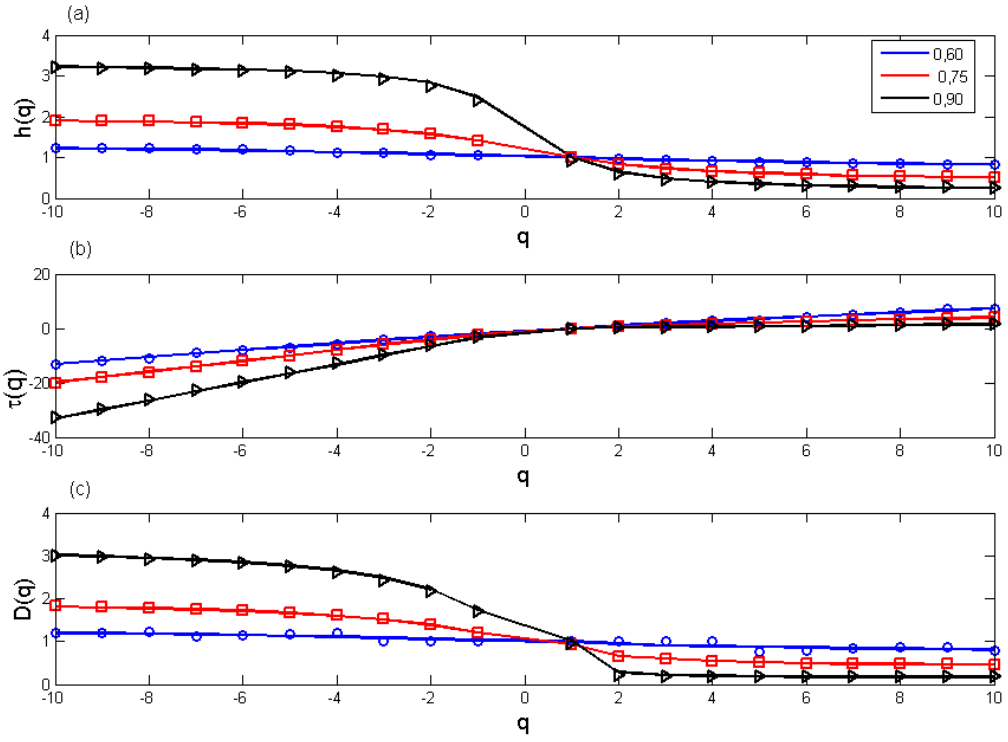

Figura 7.1: Expoentes multifractais (a) $h(q)$, (b) $\tau(q)$ e (c) $D(q)$ para as séries do modelo multifractal binomial com parâmetros $a = 0,60; 0,75$ e $0,90$. As linhas contínuas representam os resultados analíticos, enquanto que os pontos em forma círculo, triângulo e quadrado são os valores simulados via MF-DFA.

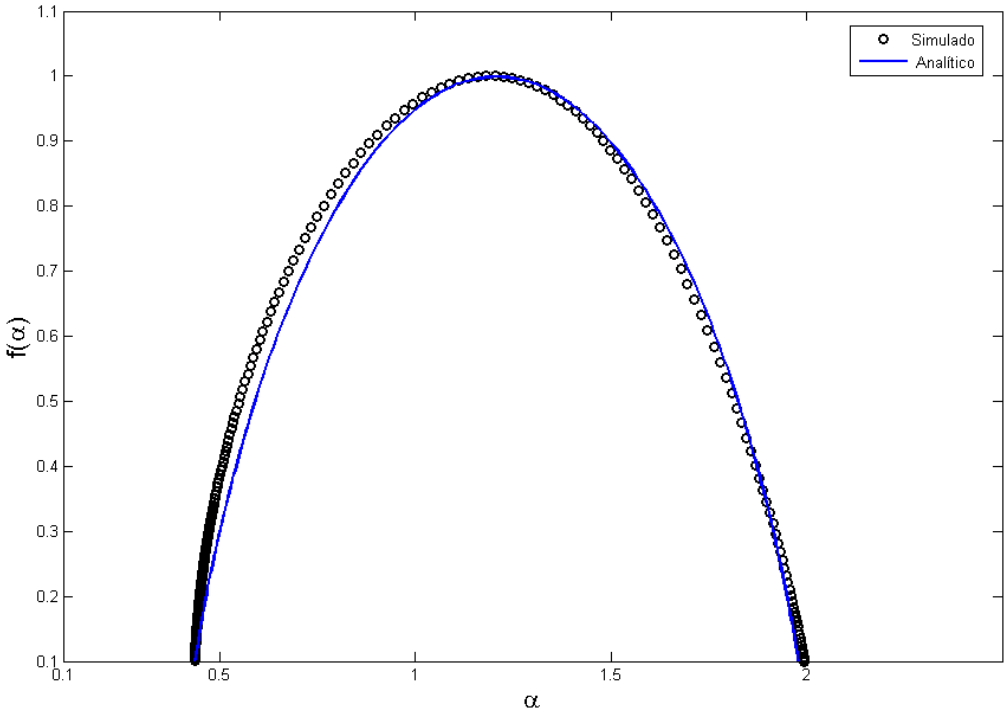

Figura 7.2: Espectro de singularidade $f(\alpha)$ versus α para $a = 0,75$, determinado via transformada de Legendre, Eq.(4.14b).

7.2 Multifractalidade das Séries de Níveis de Água

7.2.1 Resultados

As Figuras 7.3, 7.4 e 7.5 mostram o DFA1 para os níveis de água das estações em estudo neste trabalho. Da análise dos gráficos log-log de $F_2(s)$ versus s, observamos a existência de uma mudança de inclinação, a qual ocorre entre 300 e 366 dias. Esse efeito é devido ao ciclo hidrológico, ou seja, devido a componente sazonal presente nas séries temporais. No Apêndice A mostramos detalhadamente o surgimento desse efeito.

Para caracterizar as propriedades estatísticas da flutuação dos níveis de água, calculamos os expoentes de Hurst para pequenas escalas temporais, $H = h_1(2) - 1$, até o ponto da mudança de inclinação. Os valores de $h_1(2)$ e H para cada estação estão apresentados na Tabela 7.1. Como se pode notar, todas as séries tratadas apresentam $h_1(2) > 1$, portanto, são séries não estacionárias.

A existência de multifractalidade nas séries foi analisada a partir do MF-DFA através da obtenção dos expoentes de Hurst generalizados, $h(q)$, apresentados nas Figuras 7.6, 7.7 e 7.8. Outro interesse deste trabalho foi identificar o tipo de multifractalidade presente nos dados. Para isso, embaralhamos as séries de níveis de água e calculamos os $h_{shuf}(q)$, como pode ser observado nas figuras citadas acima.

7.2.2 Discussão

Das Figuras 7.6, 7.7 e 7.8, notamos que os $h(q)$ dos níveis de água apresentam forte dependência em q, indicando a presença de multifractalidade nas séries. Observamos ainda que as linhas de $h(q)_{shuf}$ são, praticamente, independente de q, isto é, $h_{shuf}(q) \approx 0,5$. Portanto, o tipo de multifractalidade presente nas séries das estações é do tipo (ii), ou seja, a multifractalidade, essencialmente, ocorre devido as diferentes correlações nas séries hidrológicas (ver Seção 4.1).

Através dos expoentes de Hurst, H, mostrados na Tabela 7.1, observamos que as séries das estações de Xambioá, Guaíra e Cruzeiro do Sul apresentam correlações de curto alcance, isto é, antipersistência, pois $H < 0,5$. Para as estações de Piranhas e Barra, temos $H \approx 0,5$, caracterizando séries descorrelacionadas. Para as demais estações, as séries exibem persistência, visto que $H > 0,5$. Para as estações situadas em pontos de confluência na Bacia Amazônica, os dados de níveis de água apresentam uma forte

correlação tendo $H \approx 0,85$, isto quer dizer, que os ciclos hidrológicos passados da Bacia Amazônica tem forte influência em seus ciclos atuais. É possível, que essa característica esteja relacionada com o fato da Amazônia ser considerada como um regular térmico do planeta [17].

Tabela 7.1: Expoentes $h_1(2)$ e H para baixas escalas

Estação	$\mathbf{h_1(2)}$	$\mathbf{H = h_1(2) - 1}$
Ladário	$1,86 \pm 0,01$	$0,86 \pm 0,01$
Óbidos	$1,86 \pm 0,01$	$0,86 \pm 0,01$
Manaus	$1,85 \pm 0,01$	$0,85 \pm 0,01$
Santarém	$1,84 \pm 0,01$	$0,84 \pm 0,01$
Conceição do Araguaia	$1,80 \pm 0,01$	$0,80 \pm 0,01$
Altamira	$1,76 \pm 0,01$	$0,76 \pm 0,01$
Porto Velho	$1,73 \pm 0,01$	$0,73 \pm 0,01$
Marabá	$1,711 \pm 0,009$	$0,711 \pm 0,009$
Fonte Boa	$1,69 \pm 0,01$	$0,69 \pm 0,01$
Tucuruí	$1,663 \pm 0,008$	$0,663 \pm 0,008$
Cáceres	$1,652 \pm 0,006$	$0,652 \pm 0,006$
Piranhas	$1,527 \pm 0,006$	$0,527 \pm 0,006$
Barra	$1,514 \pm 0,006$	$0,514 \pm 0,006$
Xambioá	$1,419 \pm 0,005$	$0,419 \pm 0,005$
Guaíra	$1,385 \pm 0,007$	$0,385 \pm 0,007$
Cruzeiro do Sul	$1,323 \pm 0,005$	$0,323 \pm 0,005$

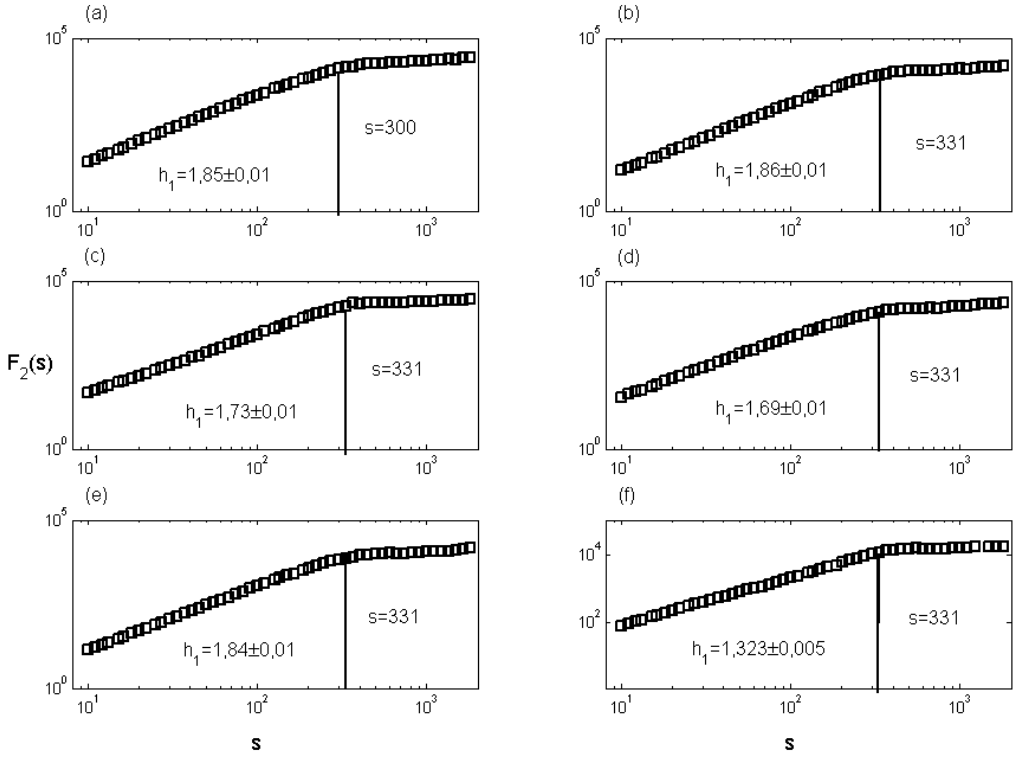

Figura 7.3: DFA1 das séries de níveis de águas em escala log-log de $F_2(s)$ versus s das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (f) Cruzeiro do Sul. A reta vertical indica o valor de s no ponto da mudança de inclinação. h_1 é coeficiente angular da reta antes do ponto de mudança de inclinação. O intervalo usado foi de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

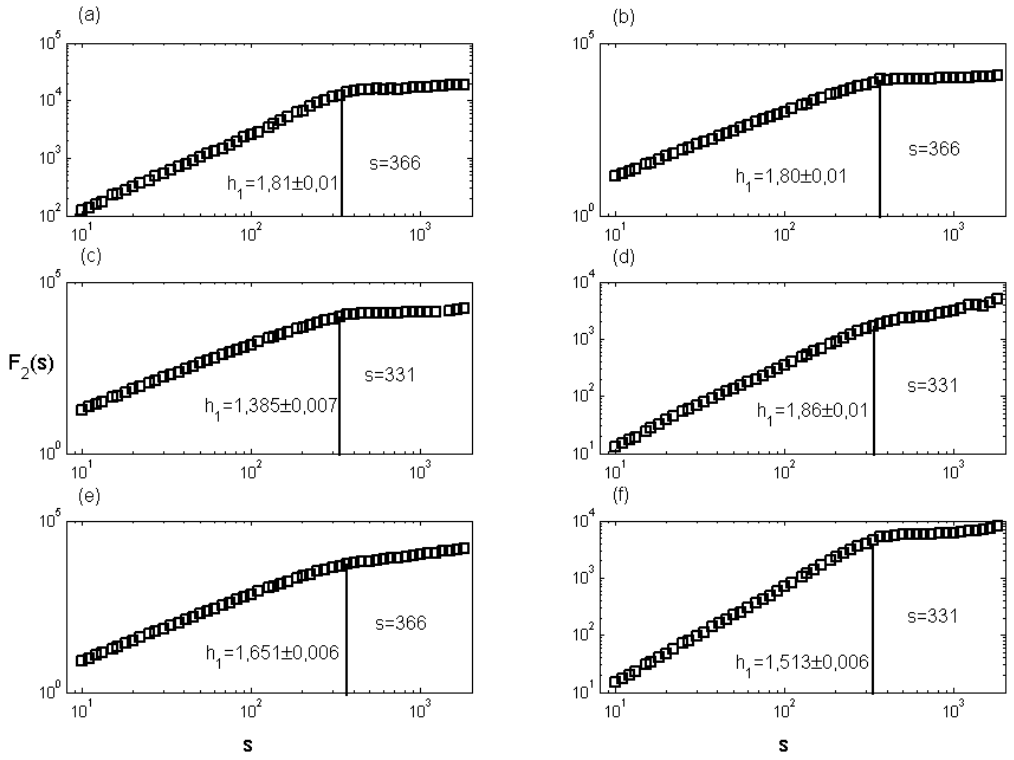

Figura 7.4: DFA1 das séries de níveis de águas em escala log-log de $F_2(s)$ versus s das estações de: (a) Xambioá (b) Conceição do Araguaia, (c) Guaíra, (d) Ladário, (e) Cáceres e (f) Barra. A reta vertical indica o valor de s no ponto da mudança de inclinação. h_1 é coeficiente angular da reta antes do ponto de mudança de inclinação. O intervalo usado foi de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

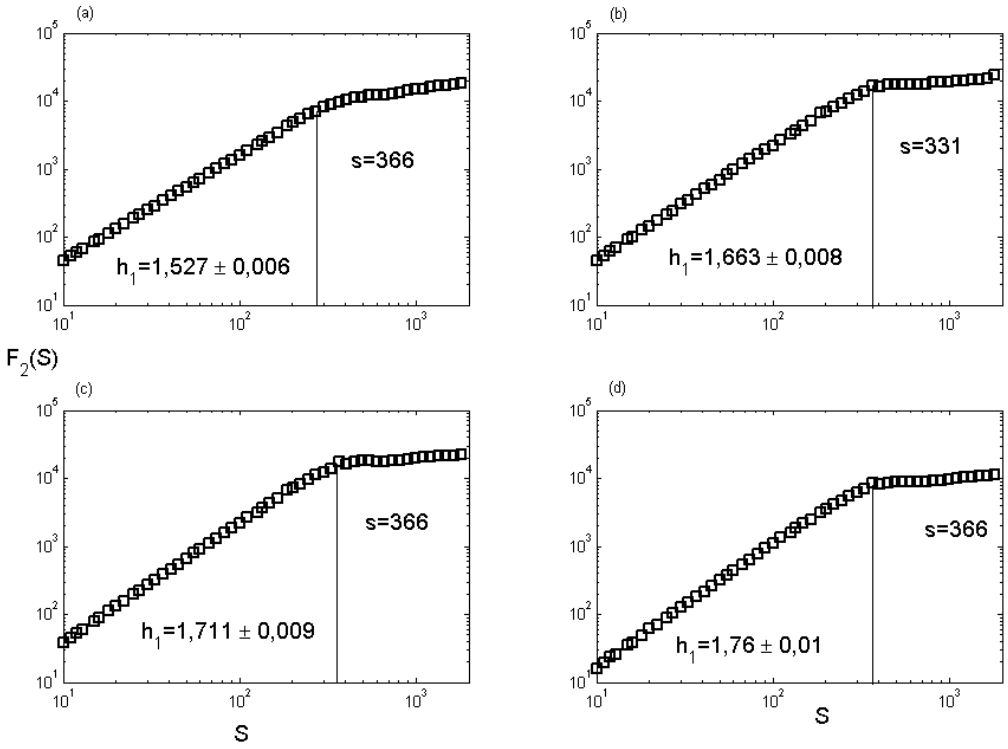

Figura 7.5: DFA1 das séries de níveis de águas em escala log-log de $F_2(s)$ versus s das estações de: (a) Piranhas, (b) Tucuruí, (c) Marabá e (d) Altamira. A reta vertical indica o valor de s no ponto da mudança de inclinação. h_1 é coeficiente angular da reta antes do ponto de mudança de inclinação. O intervalo usado foi de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

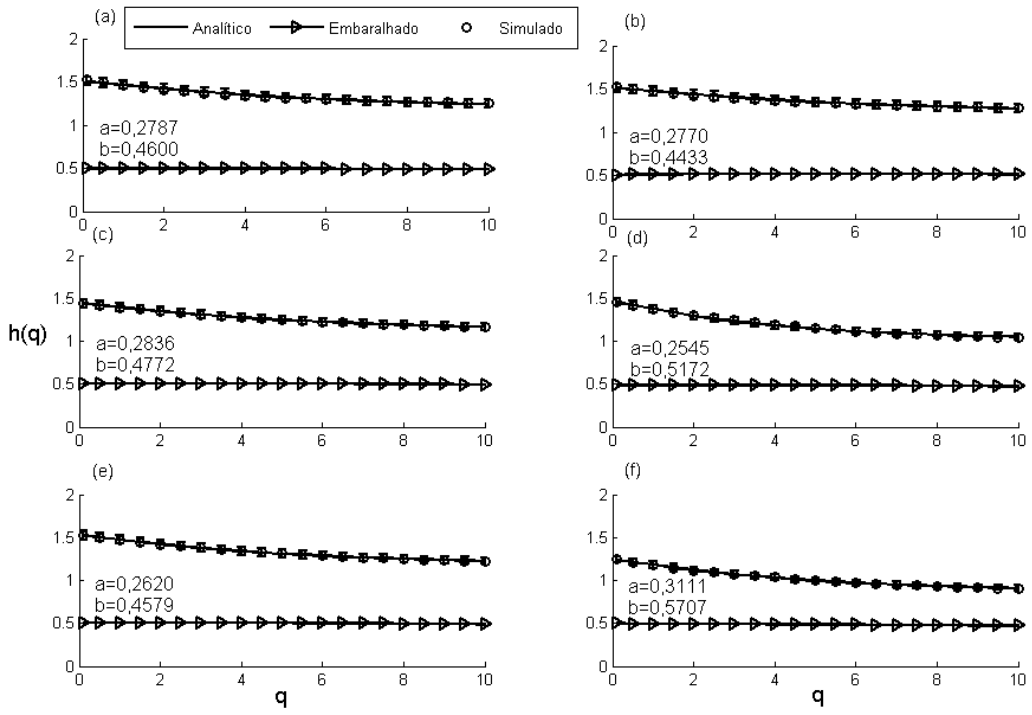

Figura 7.6: Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para as séries originais e embaralhadas das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (f) Cruzeiro do Sul. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(q)$ obtidos a partir da Eq.(7.1), onde a e b são parâmetros da mesma, ($\triangle$) pontos de $h(q)_{shuf}$, ($\circ$) pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

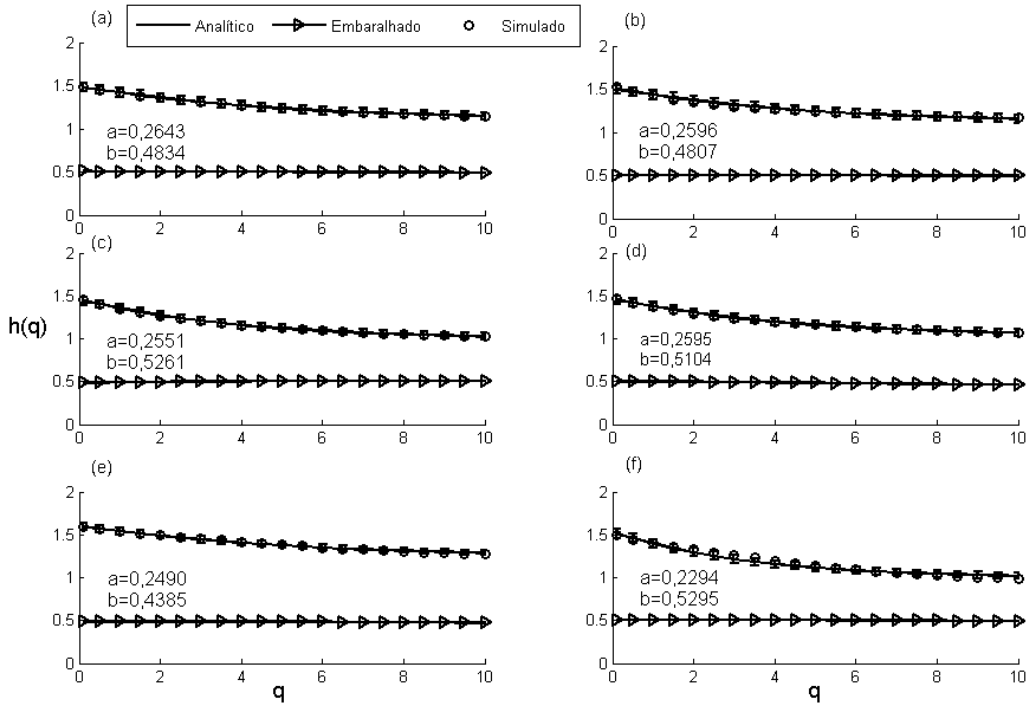

Figura 7.7: Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para as séries originais e embaralhadas das estações de: (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Tucuruí, (d) Marabá, (e) Ladário e (f) Altamira. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(q)$ obtidos a partir da Eq.(7.1), onde a e b são parâmetros da mesma, ($\triangle$) pontos de $h(q)_{shuf}$, ($\circ$) pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

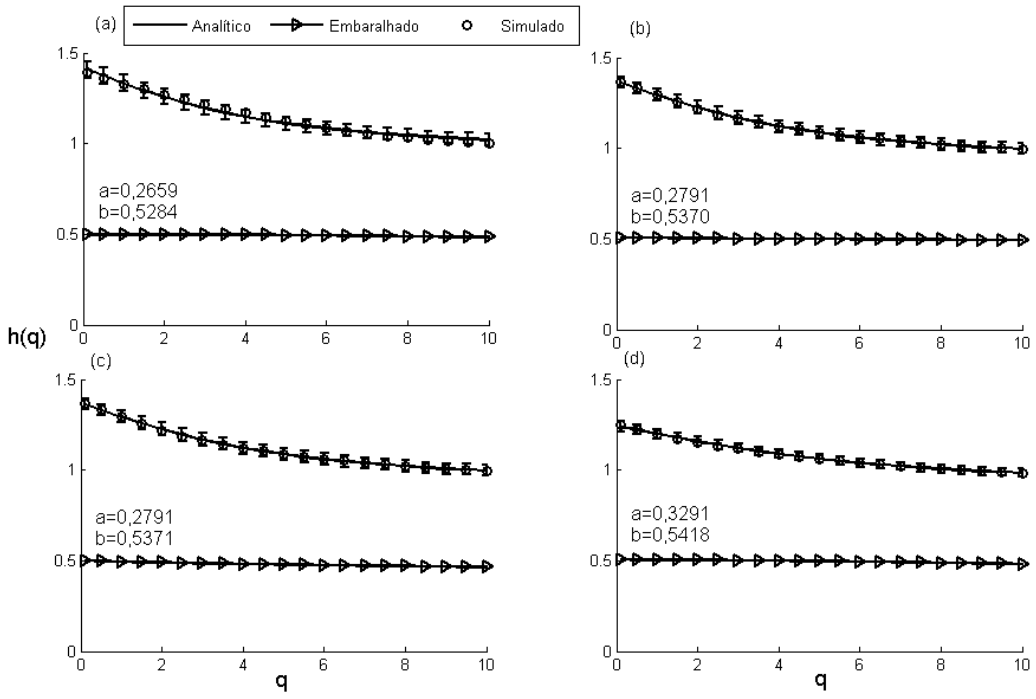

Figura 7.8: Expoente de Hurst generalizado $h(q)$ para as séries originais e embaralhadas das estações de: (a) Cáceres, (b) Barra, (c) Piranhas e (d) Guaíra. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(q)$ obtidos a partir da Eq.(7.1), onde a e b são parâmetros da mesma, ($\triangle$) pontos de $h(q)_{shuf}$, ($\circ$) pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

7.3 Expressão Analítica para o Expoente de Hurst

Na Seção 4.3, demonstramos como obter analiticamente o expoente de multifractalidade para o modelo binomial, Eq.(4.15). Esta equação é análoga a de um sistema de competição do tipo mapa logístico [37]. Kantelhardt et al., (2003) [12], ao caracterizar a multifractalidade de séries de vazão de rios na Europa, USA e África, propôs trocar $(1-a)$ por b na Eq.(4.19), isto é,

$$h_{modf}(q) = \frac{1}{q} - \frac{ln[a^q + b^q]}{qln(2)}. \tag{7.1}$$

Adotando esta proposta, assumimos também que o expoente de multifractalidade das séries de níveis de água obedeça a Eq.(7.1). Os parâmetros a e b foram estimados a partir de um ajuste por mínimos quadrados dos $h(q)$ simulados via MF-DFA e estão mostrados nas Figuras 7.6, 7.7 e 7.8. Para todas as séries tratadas, a referida equação ajustou-se aos pontos simulados com erros de até 3%.

Apesar da Eq.(7.1) se ajustar aos pontos simulados via MF-DFA, verificamos que a soma dos parâmetros a e b não é igual à unidade, o que contraria o Modelo Binomial Multifractal. A fim de sanar esse problema, lançamos mão da Eq.(5.24). Esta equação impõe a condição de que a soma dos coeficietes p_i seja igual a unidade, visto que tais parâmetros são probabilidades.

7.3.1 Resultados

Nas Figuras 7.9, 7.10 e 7.11, mostramos as curvas multifractais, $h(d,q)$, geradas a partir da Eq.(5.24), e $h(q)$ simulados via MF-DFA, onde exibimos os valores de d e os coeficientes p_i. Obtivemos um excelente ajuste entre $h(d,q)$ e a simulação via MF-DFA com erros inferiores a 1%. Na Tabela 7.2 estão apresentados os valores da Soma Quadrática dos Resíduos, SQR $= \sum_j (F_j - F_{(MF-DFA)j})^2$, onde o F pode ser tanto $h_{modf}(q)$ do modelo binomial quanto $h(d,q)$ e F_{MF-DFA} são os pontos calculados via MF-DFA.

7.3.2 Discussão

Segundo vários estudos, o principal fator que influencia a variação anual dos níveis de água dos rios brasileiros é a chuva, que cai sobre o país, oriunda e influenciada pelos Oceanos Atlântico e Pacífico [33, 34, 24, 35]. Em determinado período do ano, o padrão

de chuvas é controlado pelo Oceano Atlântico e no outro pelo Pacífico, o que configura um sistema de competição [36]. Quando o fenômeno atmosférico El Ninõ-Southern Oscilation surge, ele força a componente precipitação e, com isso, a variação dos níveis de água pode ser menor ou maior na América do Sul [20, 23]. Portanto, os níveis de água dos rios do Brasil são resultados de uma complexa correlação entre as variáveis climáticas em escalas locais, regionais e globais. Isso mostra que, se levarmos em conta apenas o sistemas Atlântico/Pacífico, é conveniente escolher o número de probabilidades da Eq.(5.24) como $W = 2$. No entanto, as bacias brasileiras são grandes demais para terem o seu ciclo hidrológico controlado apenas pelos oceanos supracitados. Devido a essa peculiaridade, supomos que cada bacia deva ter outros mecanismos de controle das chuvas. Caso essa suposição seja verdadeira, as chuvas na Ámerica do Sul e em particular no Brasil seguem um sistema tríade composto por Atlântico-Bacia-Pacífico. Esta suposição não significa um número de termos $W = 3$ na Eq.(5.24), pois as bacias tem grandes dimensões e podem possuir outros mecanismos intrínsicos a cada bacia. Como exemplo, citamos a Bacia Amazônica que em sua parte central se divide em duas grandes bacias, a do Rio Solimões e a do Rio Negro. Na região do encontro das águas, próximo a estação hidrométrica de Manaus, o nível de água dessa estação sofre influência tanto do Rio Solimões quanto do Rio Negro, o que nos permite inferir que $W \geq 3$.

Na Tabela 7.3 exibimos as SQR de ajustes feitos pela Eq.(5.24) aumentado o número de termos de probabilidade para $W + 1$. Quando comparamos os valores da $SQR[h(d, q)]$ da Tabela 7.2 com os $SQR[h(d, q)]_{W+1}$ da Tabela 7.3, observamos o aumento desta medida para $W + 1$ termos, o que mostra que a Eq.(5.24) não trata-se apenas de uma simples expansão de termos. Ainda na Tabela 7.3, notamos que a $SQR[h(1, q)]$ aumenta quando $d = 1$, mostrando assim que o parâmetro d é importante na Eq.(5.24), pois possue valor definido e diferente de 1 para cada estação.

Os valores do parâmetro d apresentados nas Figuras 7.9, 7.10 e 7.11 das estações situadas em rios que possuem sazonalidade bem definida, flutuam em torno de um valor médio, por exemplo: Manaus, Óbidos e Santarém, localizadas nas emediações do médio Solimões/Amazonas, são em torno de $1,46$. As estações de Barra e Piranhas, situadas no Rio São Francisco, apresentam valores de d próximos a $1,25$. As estações de Conceição do Araguaia e Xambioá, situadas no Rio Araguaia, apresentam $d \approx 1,45$. Tucuruí e Marabá, localizadas no Rio Tocantins, exibem valores de $d \approx 1,40$.

Observe que, para as estações de Cáceres e Ladário no Rio Paraguai, os valores de d são diferentes, isso parece contrariar o padrão observado em outras estações que estão localizadas na mesma bacia. Na realidade isso reforça, haja vista que o parâmetro d está relacionado com a variabilidade espaçial da sazonalidade dos níveis da água de cada estação. No caso de Cáceres e Ladário, é possível que essa diferença surja em virtude de alguma anomalia climática ou geológicas na região dessas estações.

A amplitude sazonal[1] das estações de Manaus, Óbidos e Santarém não apresenta grande diferença de um ano para outro, conforme é mostrado nas Figuras 6.1 e 6.2. Enquanto as estações de Cáceres e Ladário, o pulso sazonal apresenta tais diferenças, observe as Figuras 6.3 e 6.4. A fim evidenciar a relação entre a sazonalidade e o parâmetro d, calculamos a evolução temporal do parâmetro d e do desvio padrão da amplitude sazonal no período de $1995-2009$ das estações de Manaus e Ladário, na Figura 7.12 notamos que a estação de Manaus apresenta uma amplitude sazonal mais comportada que a estação de Ladário. A evolução temporal de d foi efetuada, levando em conta as séries dos anos anteriores mais a contribuição do respectivo ano. Por exemplo o valor de d de 1995 para a estação de Manaus foi obtido a partir dos dados no período de $1903-1995$, em 1996 o período mudou para $1903-1996$ e assim por diante. Para o cálculo do desvio padrão da amplitude sazonal, procedemos de maneira análoga ao caso do parâmetro d.

De posse desses resultados, calculamos a correlação entre o parâmetro d e o desvio padrão da amplitude sazonal. Na Figura 7.13, apresentamos a evolução temporal de d normalizado[2], bem como os valores das correlações. Nesta figura, notamos pelos valores das correlações que realmente existe uma relação entre o parâmetro d e o desvio da amplitude sazonal dos níveis de água das respectivas estações. Na mesma figura, observamos que em Manaus a sazonalidade é bem definida, uma vez que o valor anual de d varia na terceira casa decimal. Em Ladário o parâmetro d varia na segunda casa decimal, o que vamos tomar como sazonalidade não bem comportada. Isso evidência, que o parâmetro d serve como uma espécie de assinatura em cada trecho de um determinado rio.

[1] Considere a amplitude sazonal como sendo a diferença entre o nível máximo e mínimo em um ciclo hidrológico

[2] A normalização foi efetuada dividindo todos os valores pelo máximo valor do período.

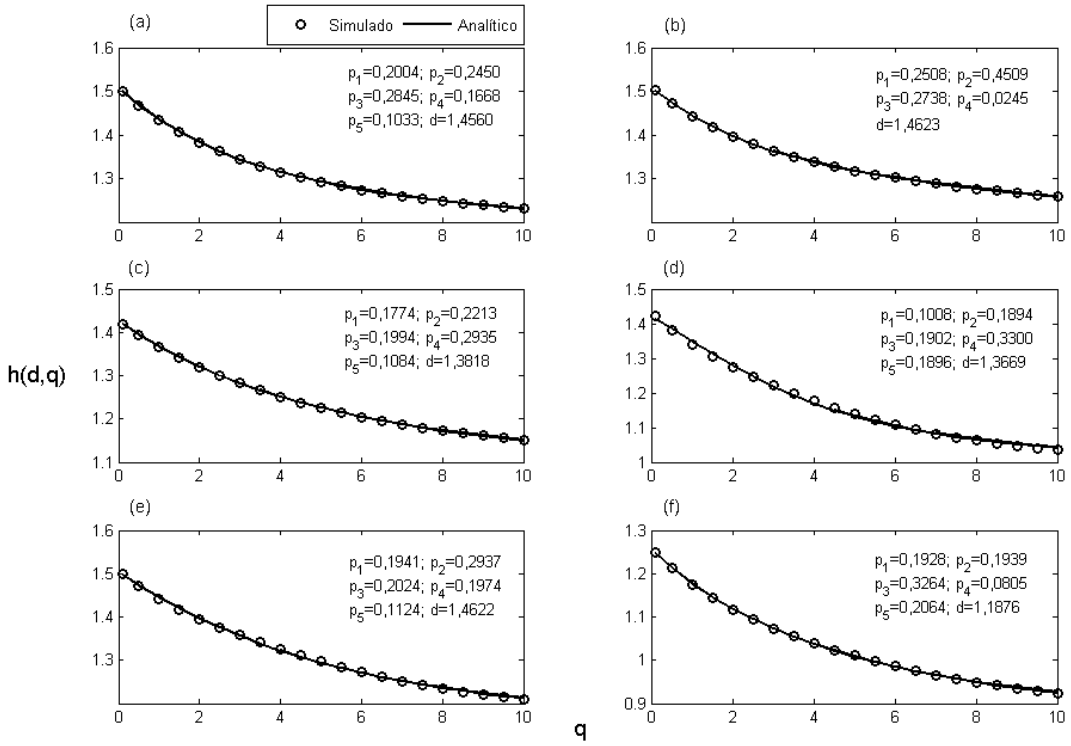

Figura 7.9: Expoente de Hurst generalizado para as séries de níveis de água das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (d) Cruzeiro do Sul. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(d,q)$ obtidos a partir da Eq.(5.24), p_i e d são parâmetros desta equação, o ($\circ$) são os pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

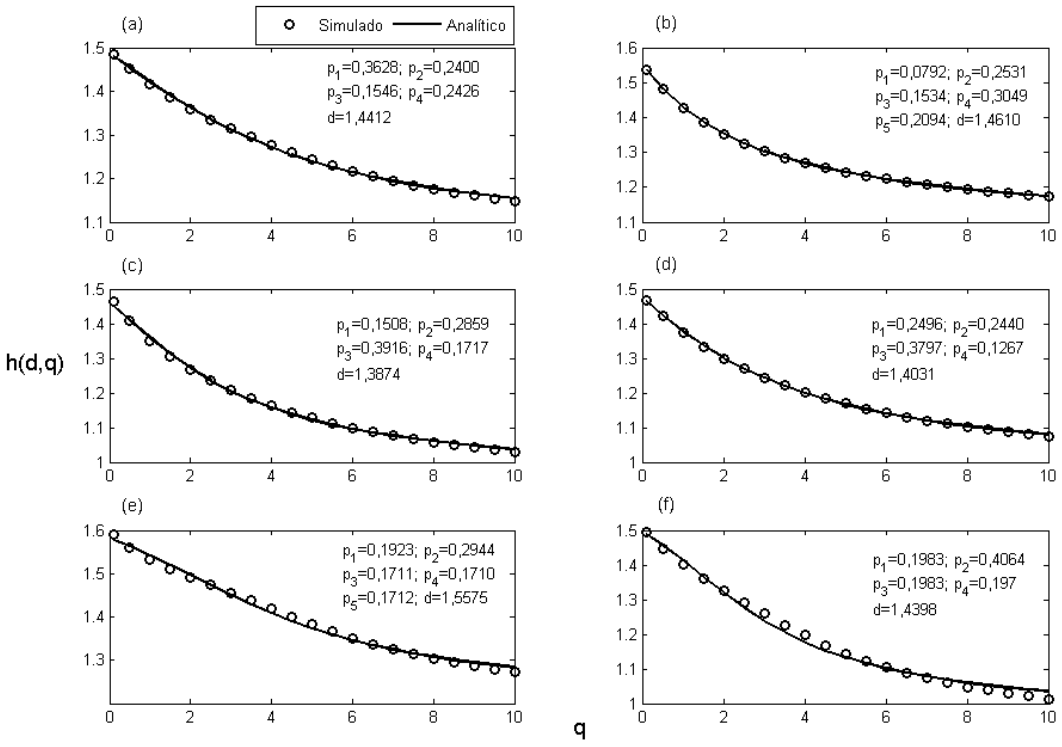

Figura 7.10: Expoente de Hurst generalizado para as séries de níveis de água das estações de (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Tucuruí, (d) Marabá, (e) Ladário e (d) Altamira. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(d,q)$ obtidos a partir da Eq.(5.24), p_i e d são parâmetros desta equação, o ($\circ$) são os pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

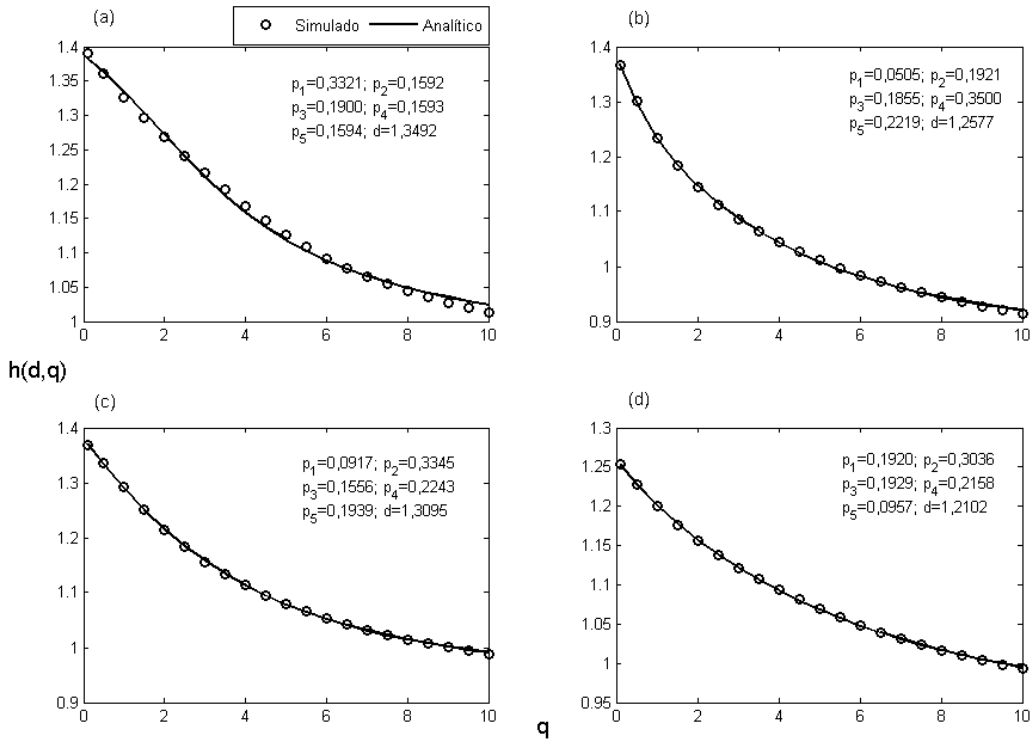

Figura 7.11: Expoente de Hurst generalizado para as séries de níveis de água das estações de (a) Cáceres, (b) Barra, (c) Piranhas e (d) Guaíra. Os símbolos (—) representam os pontos de $h(d,q)$ obtidos a partir da Eq.(5.24), p_i e d são parâmetros desta equação, o ($\circ$) são os pontos de $h(q)$ simulados via MF-DFA, todos obtidos no intervalo de $10 \leq s \leq 2000$ dias.

Tabela 7.2: Soma Quadrática dos Resíduos para os expoentes $h(q)_{modf}(q)$ e $h(d,q)$.

Estação	$\mathbf{SQR[h(q)_{modf}]}$	$\mathbf{SQR[h(d,q)]}$	$\mathbf{SQR[h(q)_{modf}]/SQR[h(d,q)]}$
Manaus	$1,90 \times 10^{-3}$	$1,30 \times 10^{-5}$	$1,46 \times 10^{2}$
Óbidos	$1,90 \times 10^{-3}$	$1,16 \times 10^{-5}$	$1,63 \times 10^{2}$
Porto Velho	$1,51 \times 10^{-4}$	$8,28 \times 10^{-7}$	$1,83 \times 10^{2}$
Fonte Boa	$2,10 \times 10^{-4}$	$1,50 \times 10^{-4}$	$1,40$
Santarém	$6,11 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-4}$	$3,51$
Cruzeiro do Sul	$7,32 \times 10^{-4}$	$6,61 \times 10^{-5}$	$1,11 \times 10^{1}$
Xambioá	$4,43 \times 10^{-4}$	$2,73 \times 10^{-4}$	$1,63$
Conceição do Araguaia	$48,00 \times 10^{-4}$	$2,02 \times 10^{-6}$	$2,38 \times 10^{3}$
Tucuruí	$1,00 \times 10^{-3}$	$6,16 \times 10^{-4}$	$1,62$
Marabá	$5,06 \times 10^{-4}$	$9,00 \times 10^{-5}$	$5,62$
Ladário	$1,90 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-4}$	$1,73$
Altamira	$14,30 \times 10^{-3}$	$4,0 \times 10^{-3}$	$3,50$
Cáceres	$4,40 \times 10^{-3}$	$8,95 \times 10^{-4}$	$4,92$
Barra	$2,85 \times 10^{-4}$	$1,19 \times 10^{-4}$	$2,39$
Piranhas	$2,85 \times 10^{-4}$	$3,64 \times 10^{-5}$	$7,83$
Guaíra	$2,43 \times 10^{-4}$	$1,59 \times 10^{-5}$	$1,53 \times 10^{1}$

Tabela 7.3: Soma Quadrática dos Residuos para $h(d,q)$, $SQR[h(d,q)]_{W+1}$, com $W+1$ probabilidades e para $h(1,q)$, $SQR[h(1,q)]_W$, com W probabilidades. Os valores de d usados na $SQR[h(d,q)]_{W+1}$ são os mesmos mostrados nas Figuras 7.9, 7.10 e 7.11.

Estação	W	$\mathbf{SQR[h(d,q)]_{W+1}}$	$\mathbf{SQR[h(1,q)]_W}$
Manaus	5	$0,35$	$8,71$
Óbidos	4	$0,38$	$2,52$
Porto Velho	5	$0,29$	$9,25$
Fonte Boa	5	$0,28$	$5,69$
Santarém	5	$0,21$	$8,92$
Cruzeiro do Sul	5	$0,41$	$3,41$
Xambioá	4	$0,31$	$4,32$
Conceição do Araguaia	5	$0,29$	$10,08$
Tucuruí	4	$0,40$	$0,91$
Marabá	4	$0,18$	$1,34$
Ladário	5	$0,12$	$3,54$
Altamira	4	$0,31$	$1,18$
Cáceres	5	$0,31$	$5,42$
Barra	5	$0,27$	$3,54$
Piranhas	5	$0,27$	$4,62$
Guaíra	5	$0,39$	$4,20$

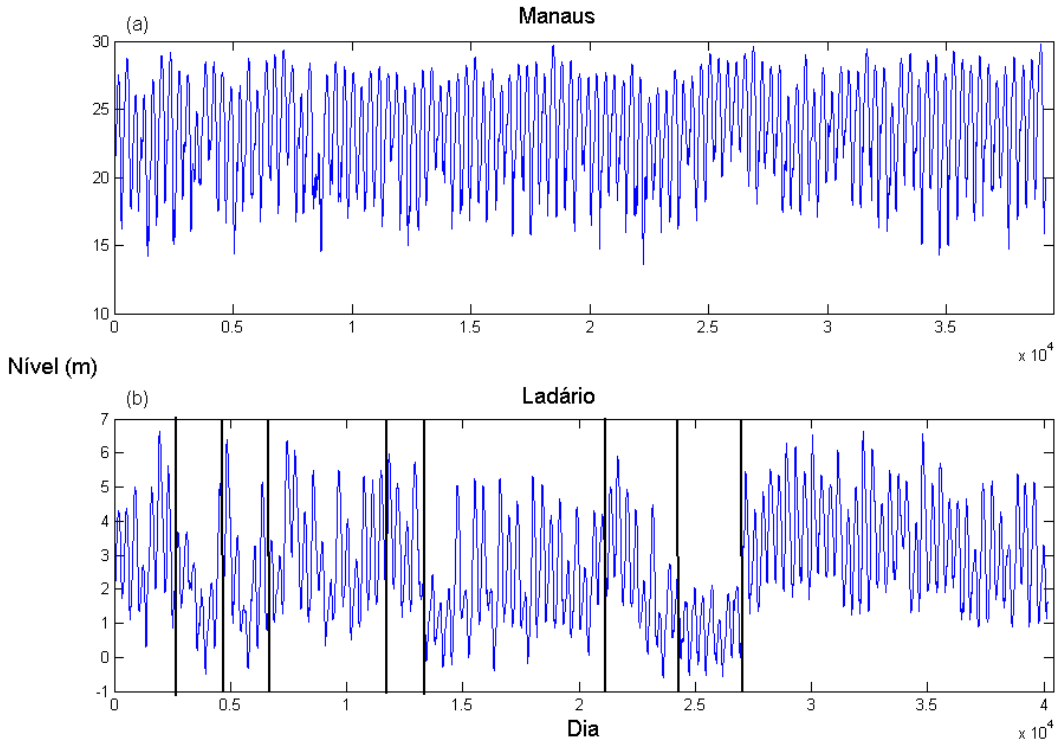

Figura 7.12: Níveis de água em metros das estações de: (a) Manaus (1903-2009) e (b) Ladário (1900-2009).

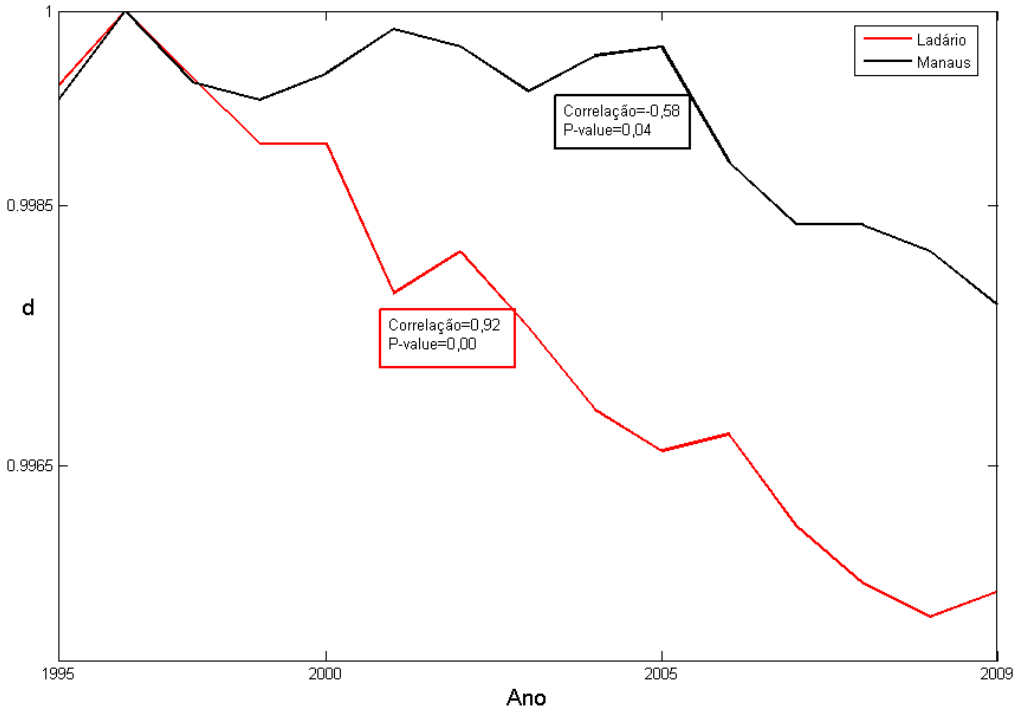

Figura 7.13: Evolução temporal normalizada do parâmetro d para as estações de Manaus (preto) e Ladário (vermelho) no período de $1995 - 2009$. Nos quadros são mostrados os valores das correlações e significância (p-value) entre d e a evolução temporal do desvio padrão da amplitude sazonal dos níveis de água de cada estação. A normalização foi efetuada dividindo todos os valores de d pelo máximo valor no período de cada estação.

7.4 Comparação Entrópica

Nesta Seção fazemos uma breve comparação entre as entropias de Boltzmann-Gibbs-Shannon S_{BG}, Tsallis S_q^T [44] com a possível entropia $S(d,q)$, Eq.(5.26), veja Tabela 5.1. Na Figura 7.14, temos S_{BG}, S_q^T e $S(d,q)$ para um sistema equiprovável em que o número de estados aumenta conforme a relação $p_i = 1/W_i$, por exemplo, se $W = 2$, então $p_1 = p_2 = 1/2$, ou $W = 3$, então $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ e assim por diante.

Uma vez que a soma dos coeficientes p_i na Eq.(5.24) é igual a unidade, podemos, então, caracterizar $S(d,q)$ em função do expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, Eq.(5.20). Nas Figuras 7.15, 7.16 e 7.17, apresentamos as entropias $S(d,q)$ versus $\alpha(d,q)$, onde é observado que para um determinado par (d,q) existe uma entropia máxima que é igual a unidade para todas séries hidrológicas. Os valores de q variam no intervalo $-40 \leq q \leq 40$ e o parâmetro d usado é o mesmo apresentado nas Figuras 7.9, 7.10 e 7.11.

Mostramos na Eq.(5.27), que para sistemas equiprováveis, temos $S(d,q) = S_{BG}$, o que é observado na Figura 7.14, ou seja, o comportamento de $S(d,q)$ independe dos valores de d e q, enquanto S_q^T varia com q. Para $q = 1$ e $d = 1$, tanto $S(d,q)$ quanto S_q^T aumentam conforme o valor W aumenta, tendo os seus valores idênticos a entropia S_{BG}. Este resultado é esperado, uma vez que a entropia de S_{BG} estabelece que quanto maior o número de estados acessíveis, W, maior a desordem, ou seja, maior a entropia.

Em linhas gerais, mostramos que a possível entropia $S(d,q)$ recupera resultados clássicos, tais como: a entropia de S_{BG} e a independência de d e q para sistemas equiprováveis. Esse último efeito não é observado na proposta S_q^T. Além disso, a equação $S(d,q) \geq 0$ é côncava, isto é, é uma função que apresenta um só um máximo, o que é observado nas Figuras 7.15, 7.16 e 7.17. Porém, a estimação da distribuição de probabilidade e os aspectos de extensividade e aditividade não foram tratados por não ser o foco deste trabalho.

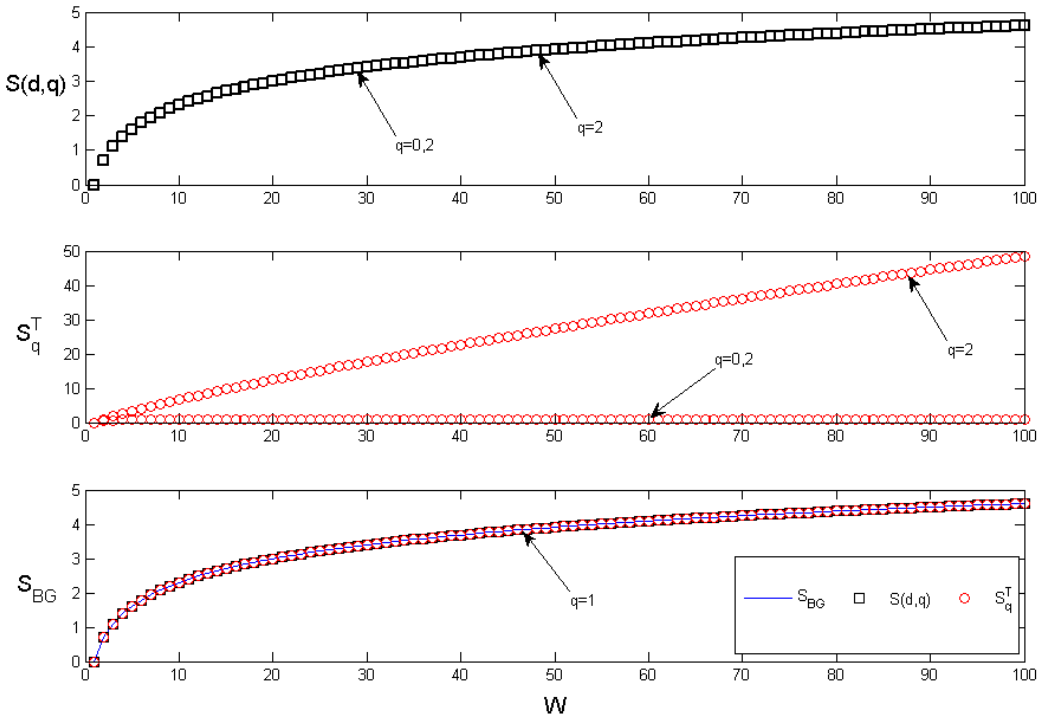

Figura 7.14: Entropias para um sistema equiprovável, onde $p_i = 1/W$, para três valores de $q = (0,2; 1; 2)$: (a) $S(d,q)$, (b) S_q^T e (c) comparação entre S_{BG}, S_q^T e $S(d,q)$ para $q = 1$. W no eixo das abscissas representa o número de estados do sistema.

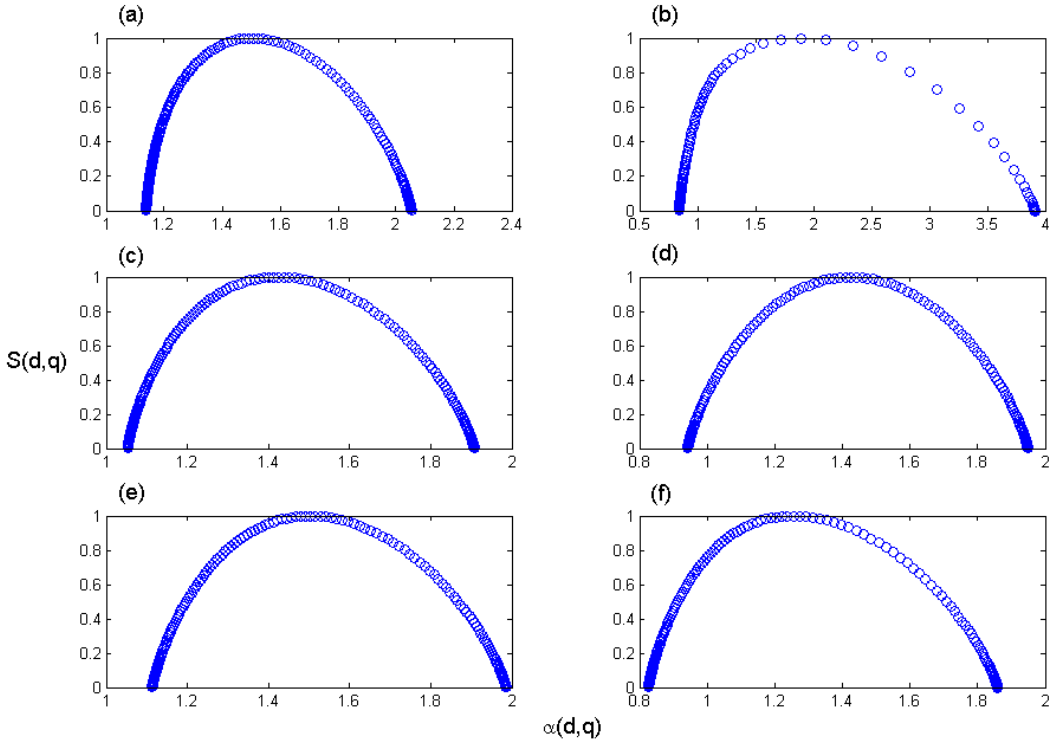

Figura 7.15: Entropia $S(d,q)$ versus o expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, para as séries de níveis de água das estações de: (a) Manaus, (b) Óbidos, (c) Porto Velho, (d) Fonte Boa, (e) Santarém e (d) Cruzeiro do Sul.

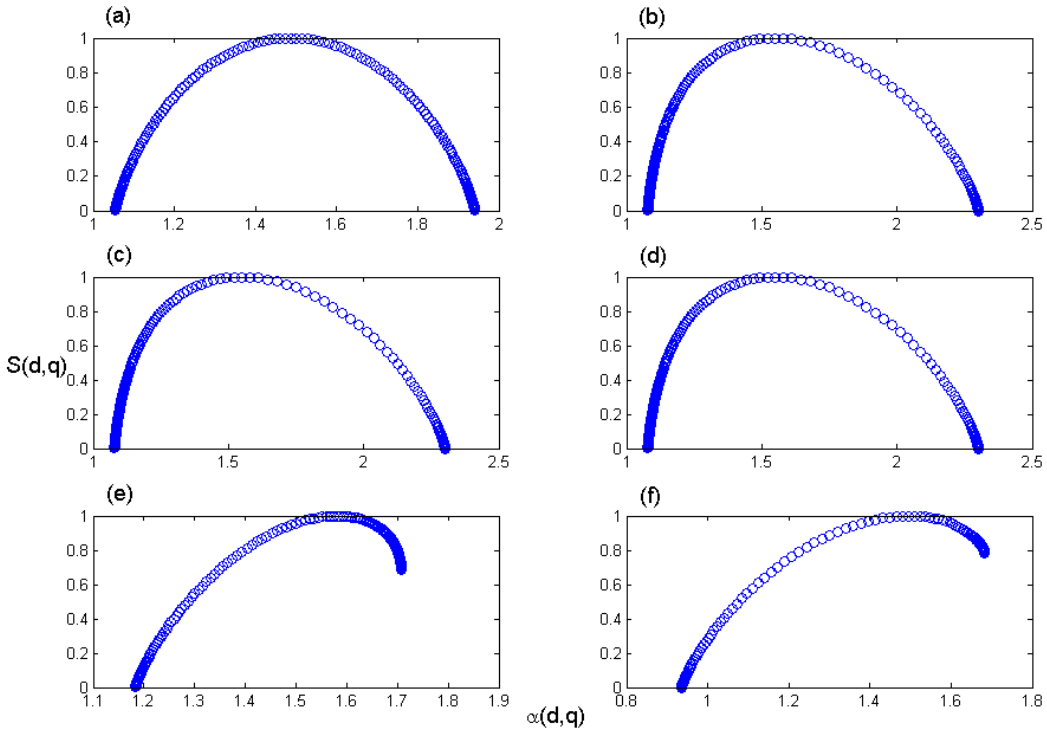

Figura 7.16: Entropia $S(d,q)$ versus o expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, para as séries de níveis de água das estações de (a) Xambioá, (b) Conceição do Araguaia, (c) Tucuruí, (d) Marabá, (e) Ladário e (d) Altamira.

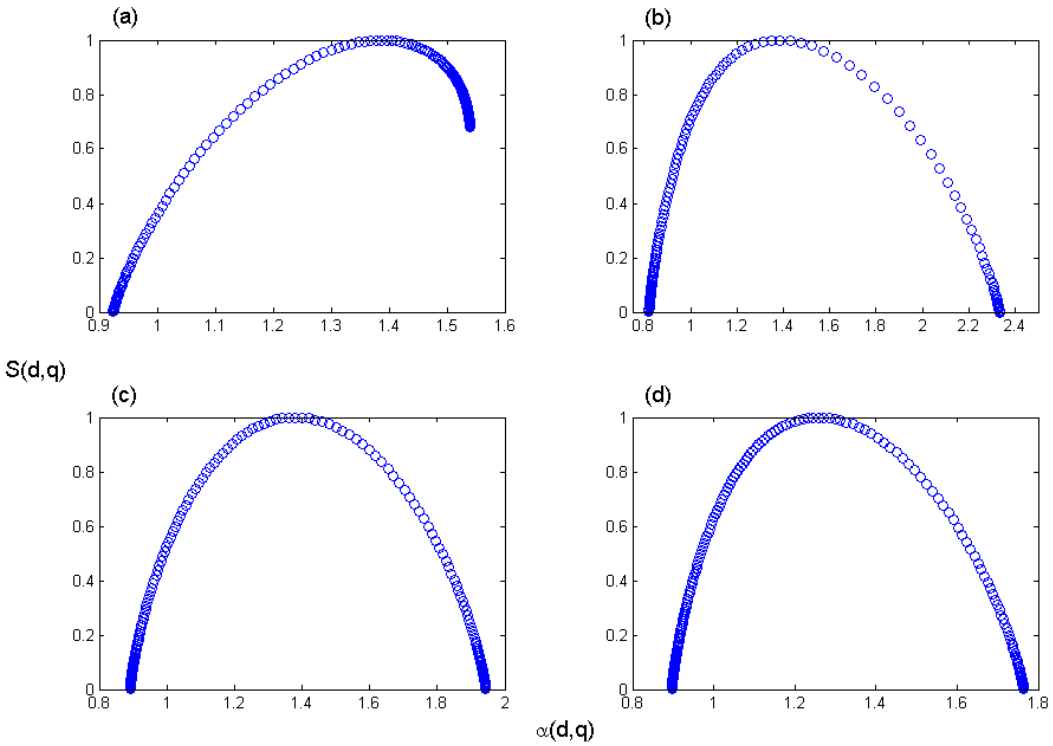

Figura 7.17: Entropia $S(d,q)$ versus o expoente de Holder, $\alpha(d,q)$, para as séries de níveis de água das estações de (a) Cáceres, (b) Barra, (c) Piranhas e (d) Guaíra.

Capítulo 8

Conclusões e Perspectiva

Neste trabalho, usamos o método MF-DFA para investigar o comportamento complexo das propriedades de escala das séries de níveis de água a partir da perspectiva multifractal para dezesseis estações brasileiras. Estas estações se encontram sediadas nas cidades de Manaus, Óbidos, Porto Velho, Fonte Boa, Tucuruí, Marabá, Santarém, Cruzeiro do Sul, Xambioá, Conceição do Araguaia, Guaíra, Altamira, Cáceres, Barra e Piranhas (veja Figura 1.1).

A análise multifractal via MF-DFA das séries dos níveis de água das estações hidrológicas estudadas revelam que essas séries exibem multifractalidade, uma vez que os expoentes de Hurst generalizados, $h(q)$, dependem fortemente de q. Além disso, o tipo de multifractalidade presente é devido essencialmente à existência de diferentes tipos de correlações nas séries temporais. Nas Figuras 7.6, 7.7 e 7.8, observamos que o expoente $h(2)$ de todas as séries estudadas apresentam uma mudança de inclinação, a qual ocorre entre os dias 330 e 360 de um ano, coincidindo com um período do ciclo hidrológico, o que está de acordo com trabalho de Zhang et al., (2008) [15]. Observamos ainda, que os valores do expoente até o ponto da mudança de inclinação, $h_1(2)$, mostrados na Tabela 7.1, são próximos para as estações localizadas em Manaus, Óbidos e Santarém, que têm como principal característica física comum o fato de serem pontos de confluência de rios e pertencerem a mesma bacia, a bacia Amazônica. Vale ressaltar que apesar de Fonte Boa na Figura 1.1 aparecer como localizada em um ponto de confluência, na realidade ela está situada a aproximadamente 150 km deste ponto.

Verificamos que o tratamento multifractal, dispensado a cada série de níveis de água, exibe famílias de expoentes de Hurst generalizados que são únicas de cada estação

hidrológica (veja Figuras 7.6, 7.7 e 7.8). Este fato nos permite afirmar que o expoente de Hurst é como uma impressão digital de cada estação hidrológica, o que corrobora com o trabalho de Kantelhardt et al., (2003) [12].

O trabalho apresenta duas equações analíticas capazes de fitar o espectro multifractal das séries de níveis de água: a primeira foi obtida através do Modelo Multifractal Binomial, Eq.(7.1), e a segunda a partir da generalização do $d-$Processo Multiplicativo Multinomial, Eq.(5.24). Nas Figuras 7.6, 7.7 e 7.8, notamos que embora a Eq.(7.1) fite os pontos simulados via MF-DFA, com erros em torno de 3%, esta apresenta o vies de não ter a soma dos parâmetros igual a unidade, o que é um aspecto indesejável, haja vista que a mesma tem origem no Modelo Multifractal Binomial, o qual preconiza que a soma dos parâmetros seja igual a unidade. Contornamos esse problema usando a Eq.(5.24). No decorrer da generalização do $d-$Processo Multiplicativo Multinomial deduzimos um expoente de Holder, $\alpha(d, q)$, que depende dos parâmetros d e q, e não apenas de q como é apresentado na literatura [25, 27]. A partir disso, exibimos um expoente de Hurst generalizado $h(d, q)$, Eq.(5.24), de tal sorte que além da soma dos coeficientes retornarem à unidade, o ajuste dos espectros por essa equação em algumas estações, chega a ser mais de cem vezes melhor que o realizado pela Eq.(7.1), como mostrado na Tabela (7.2). Nas Figuras 7.9, 7.10 e 7.11, apresentamos os expoentes de Hurst simulados via MF-DFA e analíticos dados pela Eq.(5.24). Para esta equação, foi mostrado que aumentando o número de probabilidade para $W + 1$ termos, temos uma piora na qualidade do ajuste. Mostramos assim, que as séries dos níveis de água dos principais rios do Brasil seguem uma mesma equação para a geração dos espectros multifractais, e que esta não é uma simples expansão de termos.

A multifractalidade, gerada pela Eq.(5.24), mostrou um interessante padrão nos valores de d das estações localizadas em rios que apresentam sazonalidade bem definida, conforme explanamos no Capítulo 7. A partir desses padrões, o nosso estudo sugere que cada trecho de um determinado rio exibe um parâmetro d característico dele, ou seja, o d serve como uma espécie de assinatura de estações com sazonalidade bem definida, mostrando a importância desse parâmetro na Eq.(5.24).

A Eq.(5.24) sugere uma universalidade para a multifractalidade dos fenômenos de escoamento de rios. Supomos que essa universalidade seja devida a existência de uma invariância de escala espaço-tempo existente no ciclo hidrológico. A invariância espacial é

proposta em virtude das séries estudadas serem provenientes de diversas regiões do Brasil com zonas climáticas distintas. O fato das séries serem de tamanhos que variam entre 32 e 109 sugere uma invariância temporal. A proposta dessa universalidade é refoçada pelo trabalho de Kantelhardt et al., (2003) [12], pois neste a Eq.(7.1), que é um caso particular da Eq.(5.24), é usada para fitar os espectros multifractais de vários rios do globo. Por isso, acreditamos que Eq.(5.24) represente a multifractalidade de níveis de água e vazões dos principais sistemas hidrológicos do planeta.

Nesse trabalho, propomos uma possível entropia $S(d,q)$, Eq.(5.26), e comparamos essa com a entropia S_q^T de Tsallis para um sistema equiprovável (veja Tabela 5.1 e Figura 7.14). Um importante resultado de $S(d,q)$ é que seu valor, em sistemas equiprováveis, é idêntico ao conhecido resultado da entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon, ou seja, para $p_i = p$ temos que $S(d,q)$ independe de d e q. Este fato não ocorre para S_q^T, pois esta depende de q mesmo em sistemas equiprováveis.

Nas Figuras 7.15, 7.16 e 7.17, exibimos a possível entropia $S(d,q)$ versus o expoente de Holder $\alpha(d,q)$. Todos os gráficos dessas figuras apresentam uma entropia máxima igual a unidade para um par específico de d e q, o que mostra que $S(d,q)$ é côncava. Disso, temos que a caracterização multifractal dos níveis de água está diretamente relacionada com a possível entropia $S(d,q)$.

Esse trabalho se mostra útil do ponto de vista acadêmico, pois propõe uma possível entropia, que poderá ser explorada tanto no campo do formalismo multifractal, quanto no termodinâmico. O trabalho colabora, também, para uma melhor compreenssão das propriedades de escala dos processos hidrológicos dos rios brasileiros, propiciando assim um entendimento físico mais detalhado do comportamento sazonal dos níveis de água dos rios. Os resultados do trabalho podem ainda ser usados nas questões relacionadas ao gerenciamento hídrico, dando a este uma significativa relevância social.

Como perspectiva futura, um estudo considerando o $DFA2$ ou de ordens superiores, poderá ser feito com o objetivo de verificar se as propriedades de escala observadas no $DFA1$ para as séries analisadas são mantidas. Outra parte desse trabalho que necessita de atenção é a possível entropia $S(d,q)$, que deverá ser explorada quanto a caracterização de sua distribuição de probabilidade, e os aspectos de extensividade e aditividade, que no presente estudo não foram tratados por não ser o foco principal do trabalho.

Bibliografia

[1] Vörösmarty, C.J., Sahagian , D., 2000. Anthropogenic disturbance of the terrestrial water cycle. BioScience 50, 753-765.

[2] Potter, C., Zhang, P., Klooster, S., Genovese, V., Shekhar, S., Kumar, V., 2004. Understanding controls on historical river discharge in the world's largest drainage basins. Earth Interactions 8 (2), 1-21.

[3] Driscoll, N.W., Haug, G. H., 1998. A short circuit in thermohaline circulation: A cause for Northern Hemisphere glaciation? Science 282, 436-438.

[4] Pandey, G., Lovejoy, S., Schertzer, D., 1998. Multifractal analysis of daily river flows including extremes for basins of five to two million square kilometers, one day to 75 years. Journal of Hydrology 208, 62 81.

[5] Hurst, H.E., 1951. Long-term storage capacity of reservoirs. Trans. Am. Soc. Civil. Eng. 116, 770-808.

[6] Thomas, D.M. and Benson, M.A., 1970. Generalization of streamflow characteristic from from drainage basin characteristics. US GeologicalSurvey, Water Supply Paper 1975, 75 pp.

[7] Peng, C.-K., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H.E., Goldberger., A.L., 1994. Mosaic organization of DNA nucleotides. Physical Review E 49(2), 1685-1689.

[8] Yu Z.G., Anh V., Wang B., 2001. Correlation property of lenght sequences based on global structure of clomplet genome. Physical Review E 63, 011903.

[9] Peng, C.-K., Havlin, S., Stanley, H.E., Goldberger, A.L., 1995. Quantification of scaling exponetes and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. Chaos 5(1), 82-87.

[10] Movahed, M.S., Jafari, G.R., Ghasemi, F., Rahvar, S., Tabar, M.R.R. 2006. Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series, Journal of Statistical Mechanics, P02003.

[11] Kantelhardt, J.W., Zschiegner S.A., Koscielny-Bunde, E., Bunde, A., Stanley, H.E., 2002. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. Physica A 316, 87-114.

[12] Kantelhardt, J.W., Rybski , D., Zschiegner, S.A., Braun P,, Koscielny-Bunde, E., Livina, V., Havlin, S., Bunde, A,. 2003. Multifractality of river runoff and precipitation: comparation of fluctuation nalysis and wavelet methods. Physica A 330, 240-245.

[13] Lovejoy, S., Mandelbrot, B., 1985. Fractal properties of rain and a fractal model. Tellus 37A. 209-232.

[14] Marengo, J. A., 2006. On the Hydrological Cycle of the Amazon Basin: historical review and current State-of-the-art. Revista Brasileira de Meteorologia, 21, 1-19.

[15] Zhang, Q., Xu, C-Y., Chen, Y.D., Yu, Z., 2008. Multifractal detrended fluctuation analysis of streamflow series of the Yangtze River basin, China. Hydrological Processes 22, 4997-5003.

[16] Chianca, C.V., Ticona, A., Penna, T.J.P, 2005. Fourier-detrended fluctuation analysis. Physica A 357, 447-454.

[17] Freitas, M., Castro Jr, W.E., 2006. O Ciclo Hidrológico-Amazônia-Homem-Mundo. T & C 09, 59-70.

[18] Marengo, J.A,. 2005. The characteristics and variability of the atmospheric water balance in the Amazon basin: Spatial and temporal variability. Climate Dynamics 24, 11-22.

[19] Piedade, M.T.F., Junk, W.J., Parolin, P., 2000. The flood pulse and photosynthetic response of trees in a white water floodplain (várzea) of the Central Amazon, Brazil. Verh. Internat. Verein. Limnol. (27):1-6.

[20] Amarasekera, K.N., Lee, R.F., Williams, E.R., Eltahir, E.A.B., 1997. ENSO and the natural varabiality in the flow of tropical rivers. Journal of Hydrology 200, 24-39.

[21] Robertson, A.W., Mechoso , C.R., Garcia, N.O., 2001. Interanual prediction of the Parana river. Geophysical Research Letters 22, 4235-4238.

[22] Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., Schertzer, D., Pecknold, S., 1996. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions, Journal of Geophysical Research 101 (D21), 26427-26440.

[23] Mechoso, C.R., Iribarren, G.P., 1992. Streamflow in southeastern South America and the Southern Oscillation. Journal of Climate 5(12), 1535-1539.

[24] Liebmann, B., Marengo, J., 2001. Interannual variability of the rainy season and rainfall in the Brazilian Amazon basin. Journal of Climate 14, 4308-4318.

[25] Feder, J., 1988. Fractals, Plenum Press, New York.

[26] Schroeder, M., 2009. Fractals, Chaos, Power Laws, Dover, New York.

[27] H.-O. Peitgen., H. Jurgens., D. Saupe., 1992. Chaos and Fractals, Springer, New York.

[28] A.L.A. Penna, F.A. Oliveira. Leis de escala e a dinâmica do crescimento em estruturas biológicas. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n.3, (2008) 3301.

[29] Hu. K, P.Ch. Ivanov, Z. Chen, P. Carpena, H.E. Stanley, 2001. Effect of trends on detrended fluctuation analysis.Physical Review E. 64 011114.

[30] Morettin, P. A.; Toloi, C. M. Análise de Séries Temporais. 2 ed. São Paulo: Edgar Blucher, 2006.

[31] Peng, C.-K., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H.E., Goldberger., A.L., 1994. Mosaic organization of DNA nucleotides. Physical Review E 49(2), 1685-1689.

[32] A.-L. Barabási, T. Vicsek, Phys. Rev. A 44 (1991) 2730.

[33] Marengo, J., Liebmann, B., Kousky , V.E., Filizola, N.P., Wainer, I.C., 2001. Onset and end of the rainy season in the Brazilian Amazon basin. Journal of Climate 14, 833-852.

[34] Uvo, C., Repelli , A. A., Zebiak., S. E, Kushnir, Y., 1998. The relationships between tropical Pacific and Atlantic SST and northeast Brazil monthly precipitation. Journal of Climate 11, 551-562.

[35] Diaz, A.F., Studzinski, C.D., Mechoso , C.R., 1998. Relationships between precipitation anomalies in Uruguay and southern Brazil and sea surface temperature in the Pacific and Atlantic Oceans. Journal of Climate 11, 251-271.

[36] Paegle, J.N., Mo, K.C., 2002. Linkages between Summer Rainfall Variability over South America and Sea Surface Temperature Anomalies Journal of Climate 15, 1390-1407.

[37] Falconer, K., 2003. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application. John Wiley & Sons. Chichester, England.

[38] www.frigoletto.com.br/GeoFis/Bacias/m enubacias.html

[39] Silvio, B. P., Fernando F. P., Demetrius D.S., Márcio M. R., 2007. Estudo do comportamento hidrológico do Rio São Francisco e seus principais afluentes. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental v.11, n.6, p.615–622.

[40] Tannus, R. N., 2004. Funcionalidade e sazonalidade sobre Cerrado e sobre ecótono Floresta-Cerrado: uma investigação com dados micrometeorológicos de energia e CO2. Tese de Mestrado. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz. Universidade de São Paulo. Piracicaba.

[41] Ricardo, A. C., 2007. Um Modelo Biosfera-Hidrosfera Para a Bacia do Tocantins-Araguaia. Tese de Mestrado. Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas. Universidade de São Paulo. São Paulo.

[42] Achard, F., Eva, H.D., Stibig H. J., Mayaux P., Gallego, J., Richards, T., Malingreau, J. P., 2002. Determination of Deforestation rates of the word's humid tropical forest. Science 297, 999-1002.

[43] Tsallis, C., 2006. Occupancy of phase space, extensivity of S_q, and q-generalized central limit thorem. Physyca A 365, 7-16.

[44] Tsallis, C., 1999. Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections. Brazilian Journal of Physics 29, 1.

[45] Rényi, A., 1970. On measures of entropy and information, in Proc. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1, 547, Amsterdam.

[46] Havrda, J. H., Charvat, F., 1967. Quantification methods classificatory processes, concept of structural α entropy. Kybernetika 3, 30-35.

[47] P. T. Landsberg., P. T., Vedral. V., 1998. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics. Phys. Lett. A 247, 211.

[48] Abe, S., 1997. A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics. Phys. Lett. A 224, 326.

[49] G. Kaniadakis. G., 2002. Statistical mechanics in the context of special relativity. Phys. Rev E 66, 056125.

[50] Sharma, B. D., Mittal, D. P., 1975. New Nonadditive Measures of Inaccuracy, J. Math. Sci., 10, 122-133.

[51] Ott, E., 2002. Chaos in Dynamical Systems. Second edition, Cambridge press, Cambridge.

[52] Krishna M. P,. 2003. Multifractal Based Network Traffic Modeling, Kluwer Academic Publishers.

Apêndice A

Sazonalidade

Neste apêndice, mostramos de maneira empírica, que a sazonalidade presente em séries temporais causa uma forte mudança de inclinação no gráfico gerado via DFA1.

Para a geração das série, usamos uma equação senoidal que simula a sazonalidade, a esta adicionamos de um ruído com H pré determinado. Assim a equação é dada por, $Z_i = x_i + A\sin(2\pi i/T)$, onde T é o período da série e i indica a posição de Z_i na série de tamanho N.

Todos as séries usadas neste trabalho são de tamanho $N = 39162$. Na Figura A.1 apresentamo a série geradas a partir da equação $0.5\sin(2\pi i/T)$, onde $i = 1, ..., N$. Na mesma figura mostramos, duas séries compostas pela função seno mais o ruído x_i com H pré determinado. No quadro (d) desta figura observamos que todas as séries tem uma forte mudança de inclinação que ocorre exatamente no período, T, da parte sazonal.

Testamos ainda várias séries do tipo Z_i com valores de H variando no intervalo de $0 < H < 1$, em todos os casos sempre observamos que a mudança de inclinação ocorria no período. Dessa maneira podemos afirmar categoricamente que a variação na inclinação é devido a componente sazonal da série temporal, e assim deve ser em todos os casos.

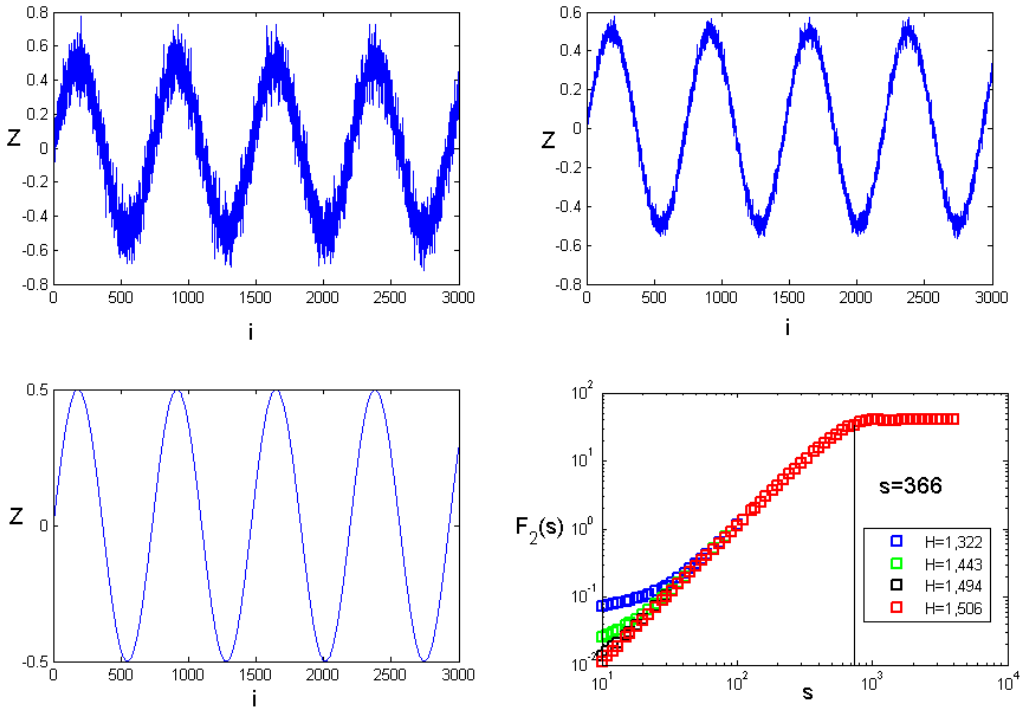

Figura A.1: Séries compostas de uma parte senoidal (sazonal) mais ruído com (a) $H = 0,3$, (b) $H = 0,4$. Séries exibindo apenas a parte senoidal (sazonal) (c). DFA1 das séries geradas pela equação $Z_i = x_i + 0.5\sin(2\pi i/T)$ em escala log-log de $F_2(s)$ versus s. Na legenda observamos os expoentes H de cada séries.