UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: APLICAÇÕES DO MODELO DE MALTHUS

Tacilene Campos Pereira

MANAUS
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Tacilene Campos Pereira

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: APLICAÇÕES DO MODELO DE MALTHUS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

MANAUS
2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P436m

Pereira, Tacilene Campos
Modelagem matemática no ensino médio: aplicações do modelo de Malthus / Tacilene Campos Pereira. 2015
46 f.: 31 cm.

Orientador: Roberto Antonio Cordeiro Prata
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Modelagem matemática. 2. Modelo de Malthus. 3. Estratégia de Ensino. 4. Aprendizagem. I. Prata, Roberto Antonio Cordeiro II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

TACILENE CAMPOS PEREIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: APLICAÇÕES DO MODELO DE MALTHUS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em de junho de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Presidente

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Membro

Profa. Dra. Jeanne Moreira de Sousa
Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado disposição, perseverança, força, saúde física e mental e por ter me protegido em minhas viagens de Parintins a Manaus nos fins de semana de aula.

Agradeço a meus pais Adnelson Silva Pereira e Maria Trindade Campos Pereira por me apoiarem sempre, por mais que, não entendam direito o que isso significa pra mim, mas que ficam felizes com a minha felicidade.

Agradeço a todos os meus irmãos que sempre estiveram do meu lado me incentivando e ficando orgulhosos com minhas conquistas.

Agradeço em especial aos meus irmãos Adailson e Welder por fazerem-me o favor de acordar um pouco mais cedo e me levarem até a lancha para que eu viajasse até Manaus.

Agradeço especialmente também ao meu irmão Denilson, e aos seus filhos Yasmim, Débora e Henrique, que me acolheram em sua casa durante todo o período de estudo. Muito obrigada mesmo!

Agradeço aos professores do PROFMAT polo Manaus, muito especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata.

Agradeço aos colegas da turma, que constituíram um grupo muito unido e humilde com a finalidade de ajudar um ao outro a alcançar essa conquista.

Agradeço, finalmente ao meu querido noivo, Ricardo Santos, que me apoiou e ajudou desde a etapa de estudo para Exame de Acesso ao PROFMAT e que mostrou que eu podia mais quando pensei que já não fosse mais conseguir. Sem ele não sei se teria alcançado mais essa conquista.

RESUMO

Este trabalho visa evidenciar a Modelagem Matemática como excelente estratégia de ensino que possibilita ao aluno investigar, questionar, e buscar compreender, por meio de instrumentos matemáticos, situações do seu cotidiano. Nele são apresentadas duas modelagens, especificamente do modelo de Malthus, que foram realizadas com alunos do Ensino Médio, um relacionado a gravidez na adolescência e outro tratando do analfabetismo no Brasil, temas comuns ao cotidiano do aluno.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Modelo de Malthus; Estratégia de Ensino; Aprendizagem.

ABSTRACT

This piece of work aims to make clear the Mathematics Moulding as an excellent strategy of teaching that makes possible to the student investigate, discuss and search to understand through mathematics instruments, situations of his quotidian. Two mouldings are presented in this work, specifically the model of Malthus, that were achieved with secondary students, one related to pregnancy in adolescence and another dealing with analphabetism in Brazil, common themes in the quotidian of the student.

Key-words: Mathematics Moulding; Model of Malthus; Teaching Strategy; Learning.

Sumário

Introdução

A Matemática constitui parte essencial do conhecimento humano, pois, desenvolve a capacidade para analisar, avaliar e argumentar situações, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações que são necessárias à formação do homem. Além disso, suas características próprias de investigação e de linguagem são importantíssimas junto às demais Ciências. Dessa forma, deve-se recorrer frequentemente a novas estratégias de ensino da Matemática de modo a promover a aprendizagem significativa do aluno, uma dessas estratégias é a Modelagem Matemática, pois, ela vai além das simples resoluções de questões matemáticas que são muitas vezes enfadonhas e sem significado para o aluno.

A Modelagem Matemática expressa situações cotidianas através de linguagem matemática e está presente desde os tempos mais primitivos, surgindo de aplicações no dia a dia dos povos antigos. Atualmente, a Modelagem Matemática constitui ramo da Matemática que procura traduzir situações reais em linguagem matemática, a fim de que se possa compreender, simular e prever comportamentos futuros do objeto em estudo, podendo este, ser de qualquer campo da atividade humana, como: Física, Química, Economia, Demografia, Comunicação, etc.

A Modelagem Matemática na educação é recente. No Brasil, teve início no final da década de 1970 com o professor Aristides Camargos Barreto, da PUC do Rio de Janeiro, sendo consolidada e difundida logo depois por diversos professores, em particular, pelo professor Rodney Carlos Bassanezi, da Unicamp de Campinas.

Hoje, a Modelagem Matemática vem adquirindo cada vez mais admiradores e pesquisadores que a defendem como excelente estratégia de ensino que possibilita um conhecimento mais crítico e reflexivo, uma vez que trata, de forma matemática, situações envolvendo a realidade do aluno, o que desperta um maior interesse e gosto pela Matemática. É importante que o aluno veja significado no que ele estuda, o que não acontece em diversas vezes e a famosa pergunta "Vou estudar isso por quê?" sempre aparece. Geralmente, são utilizados somente os exemplos contidos nos livros didáticos, que na maioria das vezes o aluno resolve sem saber ao certo o que aquela resolução representa.

É com o sentido de construir significado que a Modelagem Matemática é vista como estratégia de ensino que pode ser utilizada em sala de aula, entretanto, é preciso retirar a barreira que naturalmente foi criada pelo ensino tradicional, que culmina na maioria dos casos com a preocupação excessiva com o cumprimento do cronograma da disciplina.

Afim de evidenciar a Modelagem Matemática como uma excelente estratégia de ensino que pode ser desenvolvida em sala de aula, este trabalho foi dividido em três capítulos.

O primeiro capítulo aborda sobre Modelagem Matemática, seu conceito, quais as etapas que a constituem, como iniciou no Brasil e qual sua importância para o ensino. Traz também um trecho sobre funções e é apresentado o modelo matemático de Malthus.

No segundo capítulo são mostradas duas aplicações do modelo de Malthus que foram desenvolvidas com alunos do Ensino Médio, uma para construção de uma função que descreve o percentual de gravidez na adolescência no Brasil e outra para construção de uma função que descreve o percentual de analfabetos no Brasil.

Finalmente, no terceiro capítulo, serão feitas as considerações finais sobre o tema abordado.

Capítulo 1

Modelagem Matemática

1.1 Modelo e Modelagem Matemática

O termo modelo pode ser compreendido como a representação de algo (a planta de uma casa), um padrão ou parâmetro a ser seguido ou admirado (geralmente as filhas gostariam que fossem iguais às mães), ou também um tipo particular dentro de um todo (modelos de celulares).

Para Grangner (1969, apud BIEMBENGUT; HEIN, [7]) o modelo é uma imagem que se forma na mente quando o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido, efetuando deduções. Policiais, por exemplo, precisam adotar procedimentos utilizados em situações parecidas para resolver certa ocorrência.

Segundo Biembengut e Hein [7] (p. 11) "a ideia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila, produzindo um objeto". Este objeto produzido, que representa alguma concepção ou ideia do escultor, é justamente o modelo e o processo para se chegar a ele é a modelagem.

Os modelos são tão comuns que estão presentes em quase todas as áreas. Na Economia podemos citar os modelos econômicos de cada país, no Esporte a forma de jogar de cada time, na Moda os diversos modelos de vestidos, na Arquitetura os modelos das casas, na Matemática o comportamento de funções, entre outros.

Como no exemplo dos policiais, muitas situações do mundo real, exigem tomada de decisões. E muitas dessas decisões, são baseadas em uma formulação matemática. Quando temos essa situação, ou seja, para compreensão e resolução de um problema é exigido um instrumental matemático, a ideia de modelo apresentada anteriormente passa a receber o nome de modelo matemático.

Um modelo matemático é "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real"[1].

Para Bassanezi [2] (p. 20) "modelo matemático de um fenômeno, é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem de alguma forma o objeto em estudo".

Segundo Sodré [29] um modelo matemático consiste de um conjunto de equações que representam de forma quantitativa, as hipóteses que foram utilizadas, as quais se apoiam sobre um sistema real.

O modelo matemático é dessa forma uma aproximação do processo real. Sendo assim, o modelo não pode incorporar todas as características da realidade.

Os modelos matemáticos explicam situações reais de forma quantitativa e uma parte muito importante do modelo é a comparação entre as informações do mundo real e as obtidas através do modelo.

O processo de criação dos modelos é chamado de Modelagem Matemática. Consiste na tentativa de descrever matematicamente um fenômeno. De acordo com Bassanezi [3] nesse processo estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador. Para Biembengut e Hein [7], a Modelagem Matemática pode ser considerada um processo artístico, uma vez que, para se elaborar um modelo matemático, além do conhecimento de Matemática, o modelador precisa ter intuição e criatividade para interpretar o contexto e saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta ao problema.

A Modelagem Matemática constitue, assim, uma estratégia utilizada para se conseguir alguma explicação ou entendimento do comportamento de determinadas situações reais, inclusive seu comportamento futuro. E, durante a modelagem, são selecionados os argumentos considerados mais importantes para a solução do problema, que são as variáveis, e buscada uma formalização (modelo matemático) que contemple as relações que envolvam esses argumentos.

Alguns modelos matemáticos são mais simples que outros e para eles é suficiente uma Matemática mais elementar, entretanto, algumas situações exigem modelos matemáticos mais sofisticados que melhor expliquem o objeto em estudo, para estes é importante ter um conhecimento matemático mais aprofundado. Quanto maior o conhecimento matemático do modelador, mai-

[1] Id. p. 12.

ores são as possibilidades de obtenção de um modelo que explique melhor o problema.

Pode-se afirmar que a Modelagem Matemática é um meio de interação entre matemática e realidade, pois, busca explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o, assim, a tomar decisões.

1.2 Etapas de uma Modelagem Matemática

A modelagem matemática é constituída de etapas que podem variar de autor para autor.

Para Biembengut e Hein [7] a Modelagem Matemática consiste de três etapas, subdivididas em seis subetapas. Sendo elas:

1ª Interação
. Reconhecimento da situação problema;
. Familiarização com o assunto e ser modelado: referencial teórico.
2ª Matematização
. Formulação do problema: hipótese;
. Resolução do problema em termos do modelo.
3ª Modelo matemático
. Interpretação da solução;
. Validação do modelo: avaliação.

Burak [12] inclui cinco etapas em uma modelagem, a saber:

1ª escolha do tema;
2ª pesquisa exploratória;
3ª levantamento do problema;
4ª resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema;
5ª análise crítica da(s) solução(ões).

Bassanezi [3] apresenta quatro etapas como constituindo a Modelagem. São elas:

1ª escolha do tema;
2ª coleta de dados;
3ª análise de dados e formulação do modelo;
4ª validação do modelo.

Pode-se observar que as etapas elencadas em um autor e outro são bem semelhantes, em especial a apresentada por Burak e Bassanezi. Entretanto, neste trabalho optou-se por detalhar as etapas de Modelagem Matemática sugeridas por Bassanezi. Assim:

Etapa 1: escolha do tema

Para iniciar uma modelagem é preciso escolher um tema. Faz-se um levantamento de possíveis situações que podem ser estudas, de preferência abrangentes, para que possam ser estudadas em diferentes direções. Por exemplo, se o tema escolhido for educação pode-se pensar em problemas relacionados a evasão escolar, índice de rendimento dos alunos, reprovação, entre outros. Se o tema for saúde pode-se estudar sobre atendimentos realizados de emergência, quantidades de cirurgias, mortes ocorridas por uma doença em particular, e muitos outros.

Etapa 2: coleta de dados

Uma vez que o tema foi escolhido, a próxima etapa é realizar a busca de informações relacionadas com o assunto. A coleta de dados quantitativos pode ser realizada de diversas formas:

- Através de entrevistas e pesquisas executadas com os métodos de amostragem - Neste caso é preciso elaborar questionários eficientes que atendam muito bem o objetivo da pesquisa, além de possuir um certo conhecimento de estatística;

- Através de pesquisa bibliográfica, utilizando dados já obtidos em pesquisas e catalogados em livros ou revistas especializadas;

- Através de experiências programadas pelo modelador - Pode-se citar como exemplo a medição mensal ou anual do crescimento de uma árvore.

Algumas vezes os dados coletados na primeira vez não possibilitam uma compreensão do objeto e a continuação da modelagem. Deve-se, então, buscar outras formas de se obter dados mais significativos sobre o tema.

Sugere-se que os dados coletados sejam organizados em tabelas, pois favorecem uma análise mais prática e podem ser utilizadas para a construção de gráficos para verificação visual do comportamento do objeto em estudo. Para se ter uma ideia de como isso pode ser feito, vejamos

Tabela 1.1: Dados fictícios

variável tempo (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
variável altura (h_t)	3,15	6,0	8,5	10,6	12,5	14	15,1	16,2	16,4	16,6	16,5	16,1

o exemplo:

Considere que, em alguma situação hipotética tenham-se obtidos os valores mostrados na tabela 1.1.

Neste caso, temos uma relação entre as variáveis tempo e altura. As variáveis são as grandezas que estão sendo relacionadas. Quando queremos verificar, por exemplo, o índice de evasão escolar, podemos considerar o tempo como variável, o nível de escolarização dos pais dos alunos, a satisfação dos alunos com a escola, entre muitos outros. É importante que a escolha das variáveis seja muito bem analisada, pois, muitas vezes o excesso de variáveis torna o modelo inviável de ser concluído.

Tendo a tabela 1.1 como base, podemos organizar graficamente os dados.

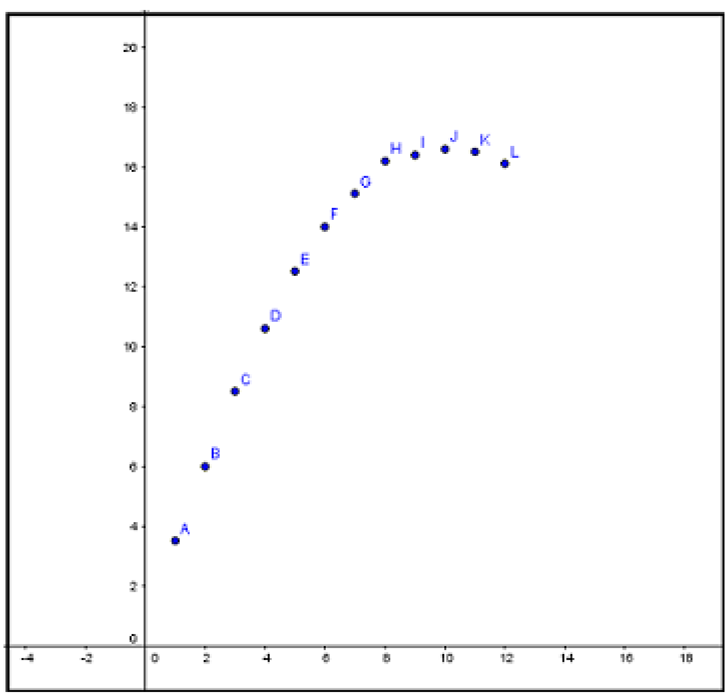

Figura 1.1: Organização gráfica dos dados fictícios.

A representação gráfica dos pontos oferece uma certa visão de como deve se comportar o modelo matemático, ou sua provável tendência.

Etapa 3: análise de dados e formulação do modelo

Essa etapa consiste em analisar as variáveis e encontrar um modelo que expresse a relação entre elas. Quando temos uma variável y dependendo de uma variável x podemos, muitas vezes, construir o modelo através das características variacionais destas variáveis, ou seja, o modelo é formulado através das variações dessas grandezas.

Retomando ao exemplo anterior, precisamos verificar a dinâmica dos pontos da sequência $\{h_t\}$, o que pode ser feito calculando a diferença entre cada elemento da sequência, ou seja, $\Delta h_t = h_{t+1} - h_t$.

Tabela 1.2: Variação de $\{h_t\}$

tempo (t)	altura (h_t)	variação $(h_{t+1} - h_t)$
1	3,15	
2	6,00	2,85
3	8,50	2,50
4	10,60	2,10
5	12,50	1,90
6	14,00	1,50
7	15,10	1,10
8	16,10	1,00
9	16,40	0,30
10	16,60	0,20
11	16,50	-0,10
12	16,10	-0,40

A tabela 1.2 apresenta as tendências de variações $\Delta h_t = h_{t+1} - h_t$ em relação aos valores de h_t. Uma curva que se ajusta a esses pontos deve ter um ponto de máximo e apresentar concavidade voltada para baixo. Podemos considerar assim que a curva que se ajusta a esses pontos é uma parábola.

Etapa 4: validação do modelo

A etapa de validação de um modelo consiste em aceitar ou rejeitar o mesmo, verificando se os valores obtidos com o modelo estão próximos o suficiente dos reais ou não. Um bom modelo deve servir para explicar os resultados e prever novos.

Quando o modelo obtido não traduz o comportamento do objeto em estudo, sendo, desta forma rejeitado, é necessária sua reformulação, que pode ser obtida com modificações nas variáveis ou nas leis de formação previamente estabelecidas.

Concluído e validado o modelo, é interessante que se registre detalhadamente todos os passos do desenvolvimento, com isso o modelo poderá ser utilizado de forma mais adequada (BIEMBENGUT, [5]).

1.3 Modelagem Matemática na Educação Brasileira

Segundo registros, as experiências de Modelagem Matemática iniciaram no Brasil no final da década de 70 com o professor Aristides Camargos Barreto que inclusive representou o Brasil em congressos internacionais apresentando trabalhos sobre o tema, além de divulgar seus trabalhos em cursos de pós-graduação, artigos em revistas e anais de congressos (BIEMBENGUT, [6]).

Além de Barreto, um dos precursores da Modelagem no Brasil foi o professor Rodney Carlos Bassanezi, que fez seu trabalho, em especial, por meio dos cursos de formação continuada que ministrou e de pós-graduação de modelagem que coordenou em instituições de quase todos os estados brasileiros. No início, os estudos de Bassanezzi na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) envolviam modelos de crescimento cancerígenos (BURAK, [12]).

Biembengut [6] destaca outras pessoas que também foram fundamentais para impulsionar e consolidar a Modelagem Matemática no ensino brasileiro, tais como: Eduardo Sebastiani, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Ubiratan D'Ambrosio.

Na década de 80 a Modelagem Matemática foi incluída em cursos de especialização para professores na que é hoje a Universidade Estadual do Centro-Oeste.

A Modelagem Matemática gerou mais interessados quando teve início o Programa de Mestrado de Matemática pela UNESP - Campus de Rio Claro. A grande preocupação era buscar formas alternativas para o Ensino de Matemática, que partissem de situações vivenciadas pelo aluno da educação básica, tornando, assim, o aprendizado significativo para eles.

Com o passar do tempo, a Modelagem Matemática atingiu um número expressivo de adeptos e foi trabalhada de diferentes formas.

1.4 Modelagem Matemática no Ensino

A Matemática possibilita a representação da realidade por meio de instrumentos que permitam interpretar, criar significados, desenvolver habilidade de pensamento para resolver problemas, participar do meio em que vive e agir sobre ele. Devido a esse seu caráter, a Matemática é necessária em uma diversidade de situações, incluindo o apoio à outras ciências. O que evidencia sua importância no processo de aquisição de conhecimentos na escola e na própria estrutura social (BARBIERI, [1]).

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais [9], em especial no Ensino Médio, a Matemática deve ser entendida como uma parte do conhecimento humano para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver competências que lhes são exigidas ao longo da vida social e profissional.

A Matemática deve ser aprendida de forma integrada e relacionada com outros conhecimentos de modo que haja o desenvolvimento de habilidades e competências que permitem estruturar o pensamento do aluno, a fim de que ele possa analisar, argumentar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras situações necessárias à sua formação.

O ensino da Matemática não pode ser entendido como algo mágico ou alheio a sociedade, nem deve ser exclusivo de uma ou de outra classe social. Entretanto, deve-se levar em consideração a realidade sócio cultural do aluno, o ambiente em que ele vive e o conhecimento que ele traz de casa.

Nesse sentido, em entrevista a Hubner (p. 3) [15], o professor Ubiratan D'Ambrósio afirma que

> Os professores precisam aproximar a disciplina do que é espontâneo, deixar a criança à vontade, propor jogos, distribuir balas, objetos, para que o aluno se sinta bem. A criança adquire habilidades para a matemática em casa, no meio em que vive. Cada um tem um modo próprio de aplicá-la. Só que na escola dizem que a matemática não se faz do jeito de casa. Rechaçam esse conhecimento que o aluno traz e isso cria conflito.

Nota-se, então, que o ensino de Matemática merece um especial comprometimento com o aluno e com a sociedade, pois está presente na vivência social do homem, tanto que nos últimos anos, pesquisadores de diferentes áreas de conhecimento, sejam eles matemáticos, antropólogos, psicólogos ou pedagogos passaram a questionar, a tentar entender e compreender uma matemática ligada à vivência social do homem, ao invés de, talvez, compreender melhor a vivência social e seu conjunto de práticas e explicações (BELLO, [4]).

Em relação ao ensino da Matemática um fator que pode beneficiar o processo de ensino-aprendizagem do aluno é a Modelagem Matemática, pois esta prioriza a construção do conhecimento por parte do aluno, uma vez que deixa de lado a visão empirista de que a Matemática é pronta e acabada apontando para uma nova forma no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas.

Essa visão em que o sujeito constrói seu conhecimento a partir de sua interação com o objeto ou com o meio que o cerca, começou a ser difundida e praticada por alguns professores no ensino de Matemática no início da década de 80, como consequência da Educação Matemática, que tem em Ubiratan D'Ambrósio um dos seus principais representantes (SOISTAK, [30]).

A Educação Matemática é vista como uma tendência de ensino que proporciona ao aluno construir o conhecimento matemático necessário a sua formação como ser humano crítico, reflexivo e comprometido com a transformação social, pois, ela possui um dinamismo próprio, tanto na aceitação de metodologias alternativas, quanto por não poder desvincular sua prática de pesquisa da ação pedagógica, pela tendência em valorizar o processo em detrimento do produto ou por suas várias tentativas de estabelecer para si própria, parâmetros próprios para qualificar suas ações (BICUDO, 2003 apud SOISTAK, [30]).

Uma das maneiras de ensinar matemática voltando-se mais para a construção do conhecimento, está presente a Etnomatemática, que valoriza a Matemática encontrada no contexto cultural e social dos indivíduos envolvidos no processo, estudando a Matemática construída historicamente (SOISTAK, [30]).

Vale destacar a conexão da Etnomatemática com a Modelagem Matemática. Enquanto o pesquisador da Modelagem Matemática tenta entender a realidade (do grupo em estudo) para pensar em um modelo de resolução do problema que o sistema escolar valida, o pesquisador em Etnomatemática, por sua vez, validará o modelo que determinado segmento constrói para a resolução do problema que aparece, procurando entender o modelo apresentado. Além disso, a Etnomatemática pode ser entendida como uma forma de entendimento do pensamento matemático dos grupos culturais e a Modelagem atua como uma ferramenta que se torna importante para que os indivíduos possam atuar e agir no mundo (ESQUINCALHA, [14]).

A Modelagem Matemática torna-se grande ferramenta para o ensino e aprendizagem da Matemática e pode ser concebida como "um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões" (BURAK, p. 62, [11]). Uma vez que a Modelagem propicia um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são chamados a se questionar, indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações referentes a realidade. Tornando assim, a sala de aula um ambiente favorável à discussão, que vai além das teorias, dinamizando o ensino e aprendizagem e ofertando aos alunos condições de uma formação matemática mais crítica (TORTOLA, [31]).

Mais do que uma alternativa ou metodologia de ensino, a Modelagem Matemática deve ser vista como um sistema de aprendizagem, onde é possível questionar os conteúdos, dinamizar sua compreensão e possibilitar um currículo mais dinâmico e crítico, de acordo com as necessidades da época e da sociedade (CALDEIRA, 2004 apud TORTOLA, [31]).

Além disso, a modelagem matemática explora as interações sociais, os aspectos da cultura matemática não escolar e prepara o aluno para enfrentar sua realidade, por meio de uma participação ativa na sala de aula, dessa forma, os alunos são capazes de problematizar, elaborar suas próprias perguntas, desenvolver por meio da pesquisa, refletir e tirar suas próprias conclusões.

Portanto, a Modelagem Matemática é essencial no processo de ensino de tal forma que pode cativar o aluno a explorar os conteúdos matemáticos em seus aspectos do cotidiano.

1.5 Função

Viu-se anteriormente que a Matemática tem a qualidade de traduzir e prever resultados por meio de modelos matemáticos. Esses modelos relacionam variáveis envolvidas nos fenômenos em estudo, ou seja, percebe-se que grandezas estão relacionadas sob certas condições de dependência ou sob uma lei que permite tal relação, fato esse que, definimos como **função**. Desta forma, salienta-se algumas definições necessárias a este trabalho.

Os conceitos citados nesta seção podem ser mais explorados em Dante [13] e Lima [27].

Definição 1.1. *Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y) é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$, onde o conjunto X é chamado de* **domínio** *da função e o conjunto Y é chamado de* **contradomínio** *da mesma. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se* **imagem** *de x pela função f, ou* **valor** *assumido pela função f no ponto $x \in X$. Simbolicamente,*

$$f \text{ é uma função de } X \text{ em } Y \iff \forall\, x \in X\ \exists|\ y \in Y;\ (x, y) \in f.$$

Exemplos elementares de funções são a **função identidade** $f : X \to X$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$ e as **funções constantes** $f : X \to Y$, onde se toma um elemento $c \in Y$ e se põe $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

Particularmente, uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função *real* de variável real. Nessas condições, o gráfico de f é um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in X \text{ e } y = f(x)\}.$$

Então, $(x, y) \in G(f)$ se, e somente se $x \in X$ e os números reais x e y satisfazem a lei de formação da f.

Exemplo 1.1. *Determine o valor que deve ser pago por um motorista que abastecer seu carro com* 35 *litros de gasolina a R\$* $3,55$*, o litro.*

Solução:

Observe que o valor que se deve pagar depende do número de litros comprados. Modelando a situação, temos a função valor $v : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $v(l) = 3,55 \cdot l$, onde l é a quantidade de litros de gasolina comprados e $v(l)$ é o valor que deve ser pago. Então, $v(35) = 124,25$, isto é, o valor a ser pago é de R\$ $124,25$ pela compra de 35 litros de gasolina.

1.5.1 Função Exponencial

Definição 1.2. *Consideremos* **a** *um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A* **função exponencial de base a***,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*, é indicada pela notação* $f(x) = a^x$*, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer* x*,* $y \in \mathbb{R}$*:*

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ *quando* $a > 1$ *e* $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ *quando* $o < a < 1$.

Exemplo 1.2. *Uma pessoa faz um empréstimo no banco no valor de R\$* $10\,000,00$ *para pagar depois de* 6 *meses, à taxa de juros de* 3% *ao mês no regime de juros compostos. Determine o valor que deve ser pago após os* 6 *meses.*

Solução:

Ao final do **1o.** mês o valor devido, que chamaremos montante M_1, será de:
$M_1 = 10\,000 + 3\%$ de $10\,000$
$M_1 = 10\,000 + 0,03 \cdot 10\,000$
$M_1 = 10\,000 \cdot (1 + 0,03)$

Ao final do **2o.** mês o valor devido, que chamaremos montante M_2, será de:
$M_2 = M_1 + 3\%$ de M_1
$M_2 = M_1 + 0,03 \cdot M_1$
$M_2 = M_1 \cdot (1 + 0,03)$
$M_2 = 10\ 000 \cdot (1 + 0,03) \cdot (1 + 0,03)$
$M_2 = 10\ 000 \cdot (1 + 0,03)^2$

Ao final do **3o.** mês o valor devido, que chamaremos montante M_3, será de:
$M_3 = M_2 + 3\%$ de M_2
$M_3 = M_2 + 0,03 \cdot M_2$
$M_3 = M_2 \cdot (1 + 0,03)$
$M_3 = 10\ 000 \cdot (1 + 0,03)^2 \cdot (1 + 0,03)$
$M_3 = 10\ 000 \cdot (1 + 0,03)^3$

Observe que se continuarmos seguindo esse raciocínio, chegaremos ao montante $M_6 = 10\ 000 \cdot (1 + 0,03)^6$ que deve ser pago ao final de 6 meses totalizando R\$ $11.940,52$.

1.5.2 Logaritmo

Definição 1.3. *Dados os números reais positivos a e x com $a \neq 1$ se $x = a^y$, então o expoente y chama-se* **logaritmo de x na base a**, *ou seja,* $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, *com a e b positivos e $a \neq 1$.*

Consequências da definição de logaritmo

1a.) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$;

2a.) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$;

3a.) $\log_a a^x = x$, pois $a^x = a^x$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo x;

4a.) $a^{\log_a x} = x$, com $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;

Justificativa: $\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$

Substituindo y: $a^{\log_a x} = a^y = x$

5a.) $\log_a x = \log_a z \Leftrightarrow x = z$, com $x > 0$, $z > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: se $\log_a x = r$ e $\log_a z = s$, isto é, $a^r = x$ e $a^s = z$, temos:

$$. \ x = z \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow r = s \Rightarrow \log_a x = \log_a z$$

$$. \ \log_a x = \log_a z \Rightarrow r = s \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow x = z$$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Para a, X e Z números reais positivos e $a \neq 1$, temos:

1a.) **Logaritmo de um produto:** $\log_a(X \cdot Z) = \log_a X + \log_a Z$

Demonstração. Considere $\log_a(X \cdot Z) = r$; $\log_a X = x$ e $\log_a Z = z$.

Dessas igualdades, tiramos $a^r = X \cdot Z$; $a^x = X$ e $a^z = Z$.

Então: $a^r = X \cdot Z = a^x \cdot a^z = a^{x+z}$

Se $a^r = a^{x+z}$, então $r = x + z$, ou seja:

$\log_a(X \cdot Z) = \log_a X + \log_a Z$

$\square$

2a.) **Logaritmo de um quociente:** $\log_a \frac{X}{Z} = \log_a X - \log_a Z$

Demonstração. Considere $\log_a \frac{X}{Z} = s$; $\log_a X = x$ e $\log_a Z = z$.

Daí tiramos $a^s = \frac{X}{Z}$; $a^x = X$ e $a^z = Z$.

Então: $a^s = \frac{X}{Z} = \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$

Se $a^s = a^{x-z}$, então $s = x - z$, ou seja:

$\log_a \frac{X}{Z} = \log_a X - \log_a Z$

$\square$

3a.) **Logaritmo de uma potência:** $\log_a X^Z = Z \cdot \log_a X$

Demonstração. Considere $\log_a X^Z = t$; $\log_a X = x$.

Daí tiramos $a^t = X^Z$; e $a^x = X$.

Então: $a^t = X^Z = (a^x)^Z = a^{Zx}$

Se $a^t = a^{Zx}$, então $t = Zx$, ou seja:

$\log_a X^Z = Z \cdot \log_a X$

$\square$

Exemplo 1.3 (DANTE, p. 185, [13])**.** *A expressão $M = C \cdot (1 + i)^n$ nos permite calcular o montante M, resultante de uma aplicação do capital C a juros compostos, à taxa anual i, ao completar um período de n anos. Nessas condições, se o capital de R\$ $800\,000,00$ for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ $700\,000,00$?*

Solução:

O montante é o valor que se obtém somando o capital investido e os juros. Com isso temos que $M = 800\ 000 + 700\ 000 = 1\ 500\ 000$. Substituindo os valores do problema e o montante calculado na expressão dada, e utilizando as propriedades e consequência da definição dos logaritmos, temos:

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i)^n \\ 1\ 500\ 000 &= 800\ 000 \cdot (1+0,12)^n \\ \frac{1\ 500\ 000}{800\ 000} &= 1,12^n \\ \frac{15}{8} &= 1,12^n \\ \log\frac{15}{8} &= log 1,12^t \\ log 15 - \log 8 &= t \cdot \log 1,12 \\ \frac{log 15 - \log 8}{\log 1,12} &= t \\ \frac{1,1761 - 0,9031}{0,0492} &\cong t \\ 5,5 &\cong t \end{aligned}$$

Assim temos que, após passados cerca de 5 anos e meio da aplicação os juros obtidos serão no valor de R\$ $700\ 000,00$.

1.6 Um modelo matemático: modelo de Malthus

1.6.1 Equações de Diferenças

Na Economia, na Engenharia, na Matemática e tantas outras áreas utilizamos as equações de diferenças para descrever diversos fenômenos. Uma das situações mais utilizadas, em especial no Ensino Médio, é o estudo de problemas envolvendo juros compostos, que foi tratado anteriormente e será visto um pouco mais.

Definição 1.4. *Uma equação na forma*

$$y_{n+k} = f(y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, ..., y_n)$$

onde k é um inteiro positivo fixo é chamada de equação de diferenças de ordem k, pois cada número depende de k anteriores.

Em particular, se ela puder ser representada na forma

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + ... + a_n y_n = f_n$$

onde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *são números reais, com* $a_n \neq 0$ *e* f_n *é uma função de* n*, dizemos que é uma equação de diferenças linear de ordem* k*, não homogênea e com coeficientes constantes.*

Definição 1.5. *As equações lineares de primeira ordem são do tipo*

$$y_{n+1} + a y_n = f_n.$$

Dessa forma, uma equação de diferenças de primeira ordem é uma sequência $\{y_n\}$ dada por uma fórmula de recorrência, isto é, cada termo y_{n+1} depende do anterior y_n.

Exemplo 1.4. *Considerando a situação apresentada no exemplo 1.2, vamos determinar o valor que deve ser pago após* n *meses do início do empréstimo.*

Solução:

Seja M_n o montante após n meses do empréstimo. Como esse valor é igual ao valor do mês anterior M_{n-1} mais o juros temos:

$$M_n = M_{n-1} + 0,03M_{n-1} = 1,03M_{n-1}.$$

Assim temos uma equação linear homogênea de primeira ordem dada pela fórmula de recorrência $M_n = 1,03M_{n-1}$. Desenvolvendo cada termo e efetuando a multiplicação dos mesmos tem-se:

$$n\left\{\begin{array}{c} M_1 = 1,03M_0 \\ M_2 = 1,03M_1 \\ M_3 = 1,03M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} = 1,03M_{n-2} \\ \underline{M_n = 1,03M_{n-1}} \end{array}\right.$$

$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot ... \cdot M_{n-1} \cdot M_n = 1,03M_0 \cdot 1,03M_1 \cdot 1,03M_2 \cdot ... \cdot 1,03M_{n-2} \cdot 1,03M_{n-1}$$

$$(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot ... \cdot M_{n-1})M_n = 1,03^n M_0 (M_1 \cdot M_2 \cdot ... \cdot M_{n-2} \cdot M_{n-1})$$

$$M_n = 1,03^n M_0$$

Como $M_0 = 10\ 000$, temos para qualquer período n de pagamento, a função exponencial $M : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $M_n = 10\ 000 \cdot 1,03^n$, onde n é tempo decorrido desde o início do empréstimo e M_n é o valor a ser pago após n meses do início do empréstimo.

1.6.2 O modelo discreto de Malthus

Em 1798, o economista inglês Thomas Robert Malthus formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo (SODRÉ, [29]). O modelo de Malthus, ou modelo exponencial, é um dos mais simples e mais utilizados para descrever o crescimento populacional de algumas espécies.

Considere P no número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Este número é dependente do tempo e assim podemos escrever:

$$\frac{dP}{dt} = P_t$$

Admitimos que a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população. Admitimos também que as taxas de fertilidade n e de mortalidade m sejam constantes.

Temos que $\alpha = n - m$ (coeficientes de natalidade menos o de mortalidade) é a taxa de crescimento específico da população P_t, aqui considerada constante. Assim:

$$\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = n - m = \alpha$$

Esta formulação indica que a variação da população é constante, ou seja, que a variação da população entre os instantes t e $t + 1$ é proporcional à população no instante t.

Assim temos a equação de diferenças linear de primeira ordem:

$$P_{t+1} - P_t = \alpha P_t$$

$$P_{t+1} = P_t + \alpha P_t$$

$$P_{t+1} = (1 + \alpha) P_t$$

Considerando dada a população inicial $P(0) = P_0$, a solução é obtida resolvendo a recorrência:

$$t\left\{\begin{array}{c} P_1 = (1+\alpha)P_0 \\ P_2 = (1+\alpha)P_1 \\ P_3 = (1+\alpha)P_2 \\ \vdots \\ P_{t-1} = (1+\alpha)P_{t-2} \\ \underline{P_t = (1+\alpha)P_{t-1}} \end{array}\right.$$

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot ... \cdot P_{t-1} \cdot P_t = (1+\alpha)P_0 \cdot (1+\alpha)P_1 \cdot (1+\alpha)P_2 \cdot ... \cdot (1+\alpha)P_{t-2} \cdot (1+\alpha)P_{t-1}$$

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot ... \cdot P_{t-1})P_t = (1+\alpha)^t P_0(P_1 \cdot P_2 \cdot ... \cdot P_{t-2} \cdot P_{t-1})$$

$$P_t = (1+\alpha)^t P_0$$

Concluímos então que, a quantidade de indívíduos dessa população é dada por $P_t = (1+\alpha)^t P_0$ em que, P_t é a quantidade de indivíduos em t anos, P_0 é a quantidade inicial de indivíduos, α é a taxa de crescimento da população e t é o tempo.

Capítulo 2

Utilização do modelo de Malthus

Viu-se anteriormente que a Modelagem Matemática em sala de aula é uma excelente estratégia de ensino visto que desenvolve no aluno o conhecimento matemático e a habilidade de utilizá-lo. Isso porque é oportunizado a ele estudar e resolver situações do seu cotidiano através da pesquisa, despertando seu interesse e desenvolvendo seu senso crítico.

São apresentadas neste capítulo duas modelagens que foram realizadas com alunos do Ensino Médio, uma tratando do tema gravidez na adolescência e a outra sobre o analfabetismo. A intenção é corroborar com a afirmativa de que com a Modelagem Matemática a aprendizagem do aluno torna-se mais significativa, além de servir como norteadores aos trabalhos em sala de aula.

Para realizar as modelagens foi utilizado o modelo de Malthus, pois, os temas em estudo são referentes à população, além de ser um modelo com elementos matemáticos compatíveis aos alunos do Ensino Médio.

A Modelagem Matemática foi desenvolvida com alunos do Centro Educacional de Tempo Integral Deputado Gláucio Gonçalves, localizado no município de Parintins. A modelagem sobre gravidez na adolescência foi desenvolvida com alunos do 3o. Ano e a modelagem sobre o analfabetismo foi realizada com alunos do 1o. Ano. As formas de desenvolvimento foram diferentes e são descritas a seguir.

2.1 Gravidez na Adolescência

A adolescência compreende uma fase de desenvolvimento na qual ocorrem diversas mudanças significativas a nível físico, familiar, social e psicológico. Nesta fase o indivíduo descobre novas relações e experiências, em especial de caráter afetivo e sexual, o que pode gerar situações conflitivas e de risco se não forem levadas a sério. Uma dessas situações de risco neste período é a gravidez, pois nesse momento a mente ainda está em processo de amadurecimento, apesar de o corpo está pronto para tal risco.

Para os adolescentes que se tornam pais precocemente o impacto não é muito acentuado quanto para as adolescentes que geram um filho nesta etapa. Para elas, em especial, a gravidez provoca uma passagem abrupta para a idade adulta, o que pode deixar marcas profundas em suas vidas. Neste caso, pode-se salientar duas situações dentre as várias que ocorrem durante a gravidez nesse período. Uma delas é o problema de relacionamento entre as adolescentes grávidas e seus familiares e, a outra é a contribuição para o aumento da pobreza na sociedade. Na primeira situação muitas adolescentes acreditam que decepcionaram os pais e, estes se perguntam onde podem ter falhado com a criação de seus filhos. Na segunda, geralmente uma das primeiras decisões que a adolescente grávida toma, é a de abandonar a escola, prejudicando assim, sua formação profissional e inserção no mercado de trabalho.

Observando essa situação constantemente em sua escola, é importante que o educador encontre uma forma de intervir nessa realidade.

2.2 Utilização do modelo de Malthus para construção de uma função que descreve o percentual de gravidez na adolescência no Brasil

Para a construção de uma função que descreve o percentual de gravidez na adolescência no Brasil foram colhidos dados referentes a quantidade de nascidos vivos e a quantidade desses nascidos que são filhos de mães adolescentes na faixa etária de 15 a 19 anos. Foi escolhida essa faixa etária porque pesquisas de mesmo gênero referenciam-se a esta mesma faixa.

Os dados foram obtidos do Sistema de Informação sobre Nascidos Vivos (SINASC) que tem por objetivo reunir informações relativas aos nascimentos ocorridos em todo o território nacional. Os números obtidos pelo SINASC são maiores que os números obtidos pelos Cartórios de Registro Civil, por isso a escolha desse órgão de pesquisa para o realização do trabalho.

Para suas pesquisas, o SINASC utiliza como fonte a Declaração de Nascido Vivo (DN), que é padronizada pelo Ministério da Saúde. A DN elenca variáveis tais como: duração da gravidez, peso do recém-nascido, idade da mãe, local de ocorrência e tipo de parto. Vale destacar desde o início que uma vez que o SINASC utiliza a DN, teremos uma pequena diferença em relação à realidade posto que não estão incluídos os casos de crianças nascidas mortas.

Uma vez que o SINASC utiliza essa declaração, é preciso destacar que nascimento vivo

> é o produto de concepção expulso ou extraído do corpo materno, independentemente da duração da gravidez, que, depois da separação respire ou apresente qualquer sinal de vida como batimentos do coração, pulsações do cordão umbilical ou movimentos efetivos dos músculos de contração voluntária, estando ou não cortado o cordão umbilical e estando ou não desprendida a placenta (MINISTÉRIO DA SAÚDE, p. 25, [10]).

Os dados obtidos junto ao SINASC englobam os números de nascidos vivos do ano 2000 a 2010 e aparecem organizados na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Percentual anual de adolescentes grávidas no Brasil, segundo a idade (15-19 anos) da mãe na ocasião do parto

Ano	**Total de nascidos vivos**	**Filhos de mães adolescentes (15 a 19)**	**Percentual (%)**
2000	3206761	721564	22,50
2001	3115474	696955	22,37
2002	3059402	665437	21,75
2003	3038251	645806	21,26
2004	3026548	635014	20,98
2005	3035096	634385	20,90
2006	2944928	605270	20,55
2007	2891328	582409	20,14
2008	2934828	570560	19,44
2009	2881581	546959	18,98
2010	2861868	525581	18,36

Fonte: SINASC, [28].

Após organizados os dados, a próxima etapa da modelagem é analisar os mesmos e formular o modelo.

Para elaboração da função que descreve o percentual de gravidez na adolescência, é preciso analisar o comportamento do total de nascidos vivos e a quantidade desses nascidos filhos de mães adolescentes na faixa etária em estudo. Na elaboração da função, utilizou-se o modelo discreto de Malthus para a construção da lei de formação da mesma.

A princípio considere A_t como a quantidade de nascidos vivos filhos de mães adolescentes em um instante t anos após o ano 2000 tal que $A_{t+1} = A_t + \alpha \cdot A_t$, de acordo com o modelo de Malthus, com α sendo a constante real que é a taxa de crescimento populacional. Observando a tabela 2.1 temos os valores de A_t e A_{t+1}, mas não temos o valor de α, devemos calculá-lo, então

$$A_{t+1} = A_t + \alpha \cdot A_t$$

$$A_{t+1} = A_t \cdot (1 + \alpha)$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + \alpha$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} - 1 = \alpha$$

Observando a tabela 2.1 e utilizando o arredondamento na quarta casa decimal após a vírgula, tem-se:

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A_0} - 1 = \frac{696955}{721564} - 1 \cong -0,0341$$

$$\alpha_2 = \frac{A_2}{A_1} - 1 = \frac{665437}{696955} - 1 \cong -0,0452$$

$$\alpha_3 = \frac{A_3}{A_2} - 1 = \frac{645806}{665437} - 1 \cong -0,0295$$

$$\alpha_4 = \frac{A_4}{A_3} - 1 = \frac{635014}{645806} - 1 \cong -0,0169$$

$$\alpha_5 = \frac{A_5}{A_4} - 1 = \frac{634385}{635014} - 1 \cong -0,0010$$

$$\alpha_6 = \frac{A_6}{A_5} - 1 = \frac{605270}{634385} - 1 \cong -0,0459$$

$$\alpha_7 = \frac{A_7}{A_6} - 1 = \frac{582409}{605270} - 1 \cong -0,0378$$

$$\alpha_8 = \frac{A_8}{A_7} - 1 = \frac{570560}{582409} - 1 \cong -0,0203$$

$$\alpha_9 = \frac{A_9}{A_8} - 1 = \frac{546959}{570560} - 1 \cong -0,0414$$

$$\alpha_{10} = \frac{A_{10}}{A_9} - 1 = \frac{525581}{546959} - 1 \cong -0,0391$$

Calculando α com média aritmética simples, temos seu valor:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10}}{10}$$

$$\alpha \cong -0,0311$$

Encontrada a constante real α o próximo passo a ser feito é encontrar A_t resolvendo a recorrência:

$$t\left\{\begin{array}{c} A_1 = A_0 \cdot (1+\alpha) \\ A_2 = A_1 \cdot (1+\alpha) \\ A_3 = A_2 \cdot (1+\alpha) \\ \vdots \\ A_{t-1} = A_{t-2} \cdot (1+\alpha) \\ \underline{A_t = A_{t-1} \cdot (1+\alpha)} \end{array}\right.$$
$$A_t = A_0 \cdot (1+\alpha)^t$$

Com isso, considerando $A_0 = 721564$ e $\alpha = -0,0311$, conclui-se que a função $A : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$ que descreve em um instante t anos após o ano 2000 a quantidade de nascidos vivos que são filhos de mães adolescentes é dada por:

$$A_t = A_0 \cdot (1+\alpha)^t$$

$$A_t = 721564 \cdot [1 + (-0,0311)]^t$$

$$A_t = 721564 \cdot [1 - 0,0311]^t$$

$$\mathbf{A_t = 721564 \cdot 0,9689^t}$$

Tome agora N_t como a quantidade de nascidos vivos em um instante t anos após o ano 2000 tal que $N_{t+1} = N_t + \beta \cdot N_t$, de acordo com o modelo de Malthus, com β sendo uma constante real que indica a taxa de crescimento da população.

Analogamente ao processo anterior, precisamos encontrar a constante real que é dada por $\beta = \frac{N_{t+1}}{N_t} - 1$.

Baseado também nos números da tabela 2.1 e utilizando o mesmo arredondamento na quarta casa decimal após a vírgula, tem-se:

$$\beta_1 = \frac{N_1}{N_0} - 1 = \frac{3115474}{3206761} - 1 \cong -0,0285$$

$$\beta_2 = \frac{N_2}{N_1} - 1 = \frac{3059402}{3115474} - 1 \cong -0,0180$$

$$\beta_3 = \frac{N_3}{N_2} - 1 = \frac{3038251}{3059402} - 1 \cong -0,0069$$

$$\beta_4 = \frac{N_4}{N_3} - 1 = \frac{3026548}{3038251} - 1 \cong -0,0039$$

$$\beta_5 = \frac{N_5}{N_4} - 1 = \frac{3035096}{3026548} - 1 \cong +0,0028$$

$$\beta_6 = \frac{N_6}{N_5} - 1 = \frac{2944928}{3035096} - 1 \cong -0,0297$$

$$\beta_7 = \frac{N_7}{N_6} - 1 = \frac{2891328}{2944928} - 1 \cong -0,0182$$

$$\beta_8 = \frac{N_8}{N_7} - 1 = \frac{2934828}{2891328} - 1 \cong +0,0150$$

$$\beta_9 = \frac{N_9}{N_8} - 1 = \frac{2881581}{2934828} - 1 \cong -0,0181$$

$$\beta_{10} = \frac{N_{10}}{N_9} - 1 = \frac{2861868}{2881581} - 1 \cong -0,0068$$

Utilizando média aritmética simples obtemos:

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 + \beta_9 + \beta_{10}}{10}$$
$$\beta \cong -0,0112$$

Agora é preciso encontrar N_t. Assim, analogamente ao visto anteriormente, temos $N_t = N_0 \cdot (1 + \alpha)^t$.

Considerando $N_0 = 3206761$ e $\beta = -0,0112$ conclui-se que a função $N : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$ que descreve em um instante t anos após o ano 2000 a quantidade de nascidos vivos é dada por:

$$N_t = N_0 \cdot (1 + \beta)^t$$

$$N_t = 3206761 \cdot [1 + (-0,0112)]^t$$

$$N_t = 3206761 \cdot [1 - 0,0112]^t$$

$$\mathbf{N_t = 3206761 \cdot 0,9888^t}$$

Utilizando os dois resultados anteriores tem-se a lei de formação da função P_t que descreve em um instante t anos após o ano 2000 o percentual de nascidos vivos filhos de mães adolescentes:

$$P_t = \frac{A_t}{N_t} \cdot 100$$
$$P_t = \frac{721564 \cdot 0,9689^t}{3206761 \cdot 0,9888^t} \cdot 100$$
$$P_t = \frac{721564}{3206761} \cdot \left(\frac{0,9689}{0,9888}\right)^t \cdot 100$$
$$\mathbf{P_t = 22,5 \cdot 0,9799^t}$$

Com isso, temos a função $P : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$, tal que $P_t = 22,5 \cdot 0,9799^t$ que descreve em um instante t anos após o ano 2000 o percentual de gravidez na adolescência no Brasil.

Construído modelo, a próxima etapa é realizar sua validação, ou seja, é preciso compará-lo com os dados reais e verificar se o mesmo é aceitável. O que é realizado na tabela 2.2.

Tabela 2.2: Comparação entre os percentuais reais e modelados

Ano	**% Real** (P_R)	**% Modelado** (P_M)	**%** ($P_M - P_R$)
2000	22,50	22,50	0
2001	22,37	22,05	-0,32
2002	21,75	21,60	-0,15
2003	21,26	21,17	-0,09
2004	20,98	20,74	-0,24
2005	20,90	20,33	-0,57
2006	20,55	19,92	-0,63
2007	20,14	19,52	-0,62
2008	19,44	19,13	-0,31
2009	18,98	18,74	-0,24
2010	18,36	18,37	0,01

Podemos visualizar a comparação também em gráfico.

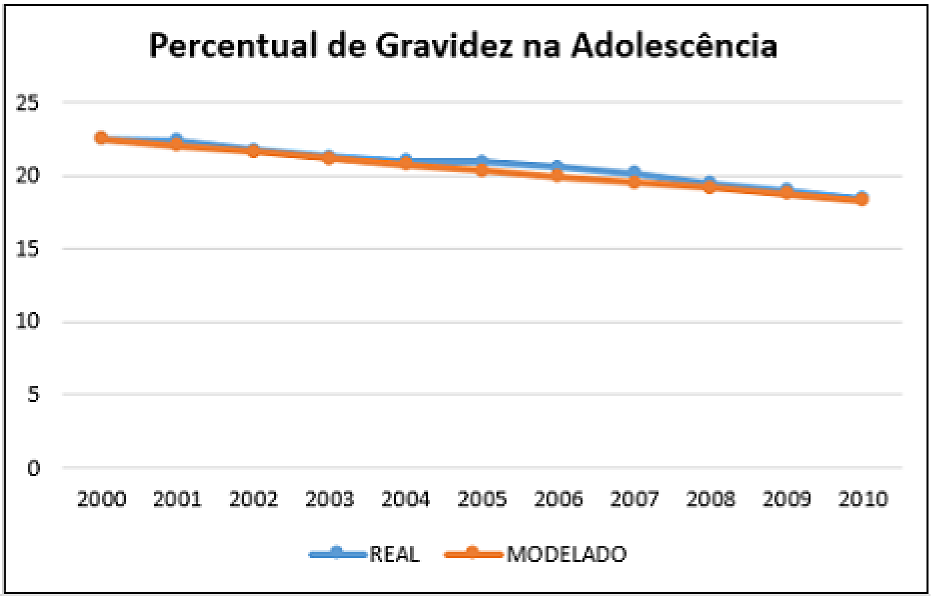

Figura 2.1: Gráfico de comparação entre os percentuais reais e modelados

Pode-se comparar e observar através da tabela e do gráfico que os valores obtidos com a modelagem são muito próximos dos reais, desta forma, o modelo criado descreve muito bem o comportamento da situação analisada, sendo, portanto válido.

2.3 Aplicação em sala de aula do modelo de Malthus para cálculo do percentual de gravidez na adolescência

Viu-se anteriormente que a adolescência é uma fase na qual ocorrem diversas mudanças significativas em vários aspectos. E que muitas dessas mudanças afetam toda a vida do adolescente, como é o caso da gravidez. Diante dessa situação frequente nas escolas, educadores podem buscar formas de intervir positivamente nessa realidade e garantir um dos direitos do adolescente que é receber informações e atividade educativa em torno do tema educação sexual e reprodutiva (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, [8]). E uma forma encontrada de tratar o assunto e agregá-lo aos conteúdos vistos em sala de aula foi através da modelagem de uma função que descrevesse o percentual de gravidez na adolescência.

Inicialmente o tema foi escolhido pela professora e sugerido aos alunos do 3º Ano do Ensino Médio do Centro Educacional de Tempo Integral Deputado Gláucio Gonçalves, localizado no município de Parintins.

Os alunos mostraram interesse logo de início e relataram alguns casos ocorridos na escola e o conhecimento sobre algum tipo de prevenção. Apresentado o assunto, os alunos foram divididos em grupos e realizaram a pesquisa bibliográfica acerca do assunto, tratando os seguintes tópicos: o que é a adolescência; quais as possíveis causas de uma gravidez na adolescência; quais os riscos e consequências de se conceber uma criança nessa etapa da vida; quantitativo de gravidez ocorrida na adolescência. E os dados referentes ao quantitativo foram criteriosamente avaliados e foram obtidos através de pesquisa na internet junto a dois órgãos estatísticos: o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e o Sistema de Informação sobre Nascidos Vivos (SINASC).

O IBGE anualmente publica um livro intitulado Estatísticas do Registro Civil. Este livro traz diversas informações tais como: nascidos vivos, óbitos, casamentos, entre outros. O que interessa para essa pesquisa no entanto, são as crianças nascidas vivas. Referente a isso, os dados contidos nesse livro são obtidos junto aos Cartórios de Registro Civil de todo Brasil que informam a quantidade de crianças que nasceram vivas e que foram registradas.

O SINASC, por sua vez, obtém suas informações através da Declaração de Nascido Vivo (DN) que é um documento provisório de identificação do recém-nascido, tendo eficácia em todo o território nacional até o registro de nascimento em cartório. Analisando essas duas fontes de informação percebeu-se, em ambos os casos, que a incidência de gravidez na adolescência vem diminuindo, entretanto, ainda é um número expressivo.

Afim de analisar melhor esse decrescimento, escolheu-se o SINASC como órgão de pesquisa uma vez que os números obtidos pelo mesmo são mais abrangentes que os obtidos pelos Cartórios de Registro Civil. Com a fonte de pesquisa escolhida, professora e alunos partiram para a tabulação e interpretação dos dados de modo que se pudesse obter uma função que permitisse verificar o comportamento do percentual de gravidez na adolescência e fazer previsões sobre esse índice.

O percentual de gravidez na adolescência em um período qualquer de tempo é calculado da seguinte forma:

$$\text{Percentual} = \frac{\text{quantidade de nascidos vivos filhos de mães adolescentes}}{\text{quantidade de nascidos vivos}} \cdot 100.$$

Sendo assim, foi preciso encontrar uma função que descrevesse a quantidade de nascidos vivos, e outra que descrevesse a quantidade de nascidos vivos que são filhos de mães adolescentes. Vale ressaltar que foi selecionada a faixa de 15 a 19 anos de idade observando que pesquisas sobre o assunto referenciam essa faixa etária. Além disso, consideramos para essa pesquisa que cada mãe tem apenas um filho por parto.

Analisando os dados de 2000 a 2010, e utilizando o modelo de Malthus chegou-se ao seguinte resultado: (Vale lembrar que a construção do modelo foi detalhada anteriormente).

Seja a função $A : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$, a quantidade de nascidos vivos, filhos de mães adolescentes, em um instante t anos após o ano 2000, tal que $A_t = 721564 \cdot (0,9689)^t$

Seja a função $N : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$, a quantidade de nascidos vivos em um instante t anos após o ano 2000, tal que $N_t = 3206761 \cdot 0,9888^t$.

Realizando a substituição chegou-se à função $P : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, tal que $P_t = 22,5 \cdot 0,9799^t$.

Como se tratava de construção de funções, que foi trabalhado no 1º Ano do Ensino Médio, o assunto foi brevemente revisado. A seguir foi apresentado o modelo de Malthus como base para a construção, pois, descreve o comportamento de populações e é de fácil compreensão por alunos do Ensino Médio. O cálculo da constante que aparece no modelo que é a taxa de crescimento populacional foi trabalhoso, mas realizado sem dificuldade pelos alunos com o auxílio de calculadoras.

Figura 2.2: Alunos realizando os cálculos com auxílio da calculadora.

A parte que mereceu muita atenção foi obter a função sem utilizar claramente a recorrência linear, pois, os alunos não trabalham com esse conteúdo. Então foi desenvolvido passo a passo iniciando do N_1, depois N_2, N_3, e assim sucessivamente até chegarmos ao $N_t = N_{t-1} \cdot (1 + \alpha)$. Então foi realizada a multiplicação de todos os resultados obtidos, observando que havia termos iguais em ambos os membros da igualdade e que poderia ser realizado o cancelamento desses termos para então chegarmos ao N_t final e substituir a constante encontrada anteriormente e o valor inicial contido na tabela 2.1.

Com a função obtida, partiu-se para a verificação de sua validade. Realizando a comparação com os percentuais reais, o resultado foi muito positivo, uma vez que os dados modelados foram muito próximos dos dados reais. Sendo assim, a função obtida foi aceitável para descrever o percentual de gravidez na adolescência. Cabe ressaltar aqui que o interessante e animador foi verificar que realmente os percentuais obtidos foram bem próximos dos percentuais reais.

Através da função modelada previu-se que a incidência de gravidez na adolescência no ano de 2014 é de $16,93\%$.

Tendo todos os dados selecionados, organizados e analisados, construído e validado o modelo, os alunos do 3o. Ano socializaram os conhecimentos obtidos em uma apresentação aos demais alunos do Ensino Médio da escola.

Figura 2.3: Alunos apresentando os resultados obtidos.

Pode-se afirmar que o desenvolvimento da atividade teve muito êxito. Os alunos puderam debater questões relevantes acerca do tema de forma muito proveitosa e participativa, além de conhecer como se constrói um modelo matemático para verificar o comportamento de algo que está relacionado ao cotidiano.

2.4 Analfabetismo no Brasil

Ainda hoje, o índice de analfabetismo no Brasil é grande. Acredita-se que isso se deve a dificuldades de acesso ou a ausência de escolas na zona rural que impediram ou limitaram os estudos dessas pessoas na infância e adolescência, ou ainda pelos modelos de educação arcaicos que podem ser geradores de insatisfação pessoal, ou também devido a dificuldades financeiras da família que acabam por obrigar as pessoas a abandonarem as escolas e irem trabalhar para ganharem ao menos o suficiente para sua alimentação.

Seja qual for o motivo, a realidade das pessoas não alfabetizadas é bem difícil. No trabalho são mal remuneradas, limitam geralmente a funções de limpeza, em virtude de ter pouco contato com o público, ficam submissas a funções pouco ou não valorizadas pela sociedade.

Quanto a este fato, a escola precisa alertar os alunos, bem como promover mecanismos de permanência do mesmo par que essa não seja sua futura realidade.

2.5 Utilização do modelo de Malthus para construção de uma função que descreve o percentual de analfabetos no Brasil

Para a construção da função que descreve o percentual de analfabetos no Brasil é preciso analisar a quantidade de pessoas analfabetas e o crescimento populacional. O universo da pesquisa são pessoas com idade maior ou igual a 7 anos.

Os dados foram obtidos da Projeção da População do Brasil de 2000 a 2060, da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio (PNAD) e do Censo Demográfico, sendo todas essas pesquisas realizadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

O Censo Demográfico investiga decenalmente, características gerais da população, como educação, trabalho, rendimento e habitação e outras. A PNAD investiga essas mesmas características, entretanto, anualmente e em caráter amostral. A PNAD somente não é realizada nos anos em que ocorre o Censo.

Vale ressaltar que para o IBGE, é considerado analfabeto quem não consegue ler nem escrever um bilhete simples em língua materna.

Como mencionado anteriormente, é preciso analisar a quantidade de pessoas não alfabetizadas e o crescimento populacional, precisamos então construir duas funções que descrevam esses comportamentos.

Para sabermos a quantidade de pessoas analfabetas utilizaremos inicialmente os dados do Censo Demográfico 2000 e da PNAD de 2001 a 2009. Esses dados aparecem organizados na tabela 2.3 bem como a porcentagem de pessoas analfabetas de 2000 a 2009.

Tabela 2.3: Percentual anual de analfabetos no Brasil

Ano	**Total de pessoas**	**Total de analfabetos**	**Percentual (%)**
2000	146747599	18832866	12,83
2001	147298611	17583011	11,94
2002	150195166	17270808	11,50
2003	152960197	17129873	11,20
2004	160344875	17809876	11,11
2005	163022751	17422910	10,69
2006	166566	16722	10,04
2007	169831	16503	9,72
2008	170502	16283	9,55
2009	172628	15971	9,25

Fonte: IBGE, [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25].

Com os dados organizados, o próximo passo é analisá-los e formular o modelo.

Observando a tabela 2.3 verifica-se que os números a partir do ano de 2006 são muito inferiores aos anteriores. Isso ocorre devido a forma como foram realizadas as pesquisas.

Os números referentes ao ano 2000 foram retirados do Censo Demográfico que faz sua pesquisa da seguinte forma:

- São obtidas informações referentes a toda população, entretanto, há alguns casos em que o pesquisador visitou o domicílio algumas vezes, mas o morador estava sempre ausente e, com isso, deixou de ser pesquisado. Esses domicílios são então considerados fechados, e a eles são projetados os quantitativos referentes a média dos moradores que foram entrevistados.

Os números referentes aos anos de 2001 a 2009 foram retirados da PNAD que realiza sua pesquisa da seguinte forma:

- Apenas parte da população participa da pesquisa, pois, como o próprio nome diz, é uma pesquisa de caráter amostral. A partir dos resultados da amostra são realizadas as projeções para toda população. Nos anos de 2006 a 2009 não foram realizadas essas projeções, por isso os números são inferiores, trazendo os números absolutos da amostra.

Tabela 2.4: Projeção da População do Brasil

Ano	População total
2000	149234372
2001	151654362
2002	154069811
2003	156479993
2004	158884304
2005	161282493
2006	163672575
2007	166043739
2008	168432977
2009	170766518

Fonte: IBGE, [26].

Devido a essa situação, foi preciso recorrer à Pesquisa de Projeção da População com idade em estudo, que aparece na tabela 2.4.

Da tabela 2.3 retiramos o percentual de analfabetos nos anos de 2000 a 2009, em seguida, precisamos calcular, em valores absolutos esse percentual em relação a projeção populacional encontrada na tabela 2.4. Assim temos:

Tabela 2.5: Projeção da população de analfabetos do Brasil

Ano	Projeção da população	Percentual de analfabetos	Total de analfabetos
2000	149234372	12,83	19146770
2001	151654362	11,94	18107531
2002	154069811	11,50	17718029
2003	156479993	11,20	17525760
2004	158884304	11,11	17652047
2005	161282493	10,69	17241099
2006	163672575	10,04	16432727
2007	166043739	9,72	16139452
2008	168432977	9,55	16085350
2009	170766518	9,25	15795903

Fonte: IBGE, [26], Tabela 2.3.

Com os dados analisados e reorganizados, será construída inicialmente a função N_t que descreve a quantidade de analfabetos em um instante t anos após o ano 2000 tal que $N_{t+1} = N_t + \alpha \cdot N_t$, de acordo com o modelo de Malthus, com α sendo uma constante real que indica a taxa de crescimento populacional. De modo análogo ao utilizado na modelagem anterior temos os valores de N_t e N_{t+1} e precisamos encontrar a constante α que é dada por $\alpha = \frac{N_{t+1}}{N_t} - 1$. Assim:

$$\alpha_1 = \frac{N_1}{N_0} - 1 = \frac{18107531}{19146770} - 1 \cong -0,5430$$

$$\alpha_2 = \frac{N_2}{N_1} - 1 = \frac{17718029}{18107531} - 1 \cong -0,0215$$

$$\alpha_3 = \frac{N_3}{N_2} - 1 = \frac{17525760}{17718029} - 1 \cong -0,0109$$

$$\alpha_4 = \frac{N_4}{N_3} - 1 = \frac{17652047}{17525760} - 1 \cong -0,0072$$

$$\alpha_5 = \frac{N_5}{N_4} - 1 = \frac{17241099}{17652047} - 1 \cong -0,0233$$

$$\alpha_6 = \frac{N_6}{N_5} - 1 = \frac{16432727}{17241099} - 1 \cong -0,0469$$

$$\alpha_7 = \frac{N_7}{N_6} - 1 = \frac{16139452}{16432727} - 1 \cong -0,0179$$

$$\alpha_8 = \frac{N_8}{N_7} - 1 = \frac{16085350}{16139452} - 1 \cong -0,0034$$

$$\alpha_9 = \frac{N_9}{N_8} - 1 = \frac{15795903}{16085350} - 1 \cong -0,0180$$

Utilizando média aritmética simples, temos que:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9}{9}$$

$$\alpha \cong -0,021$$

Agora é preciso encontrar $N : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$. Analogamente ao realizado anteriormente, utilizando recorrência linear de primeira ordem, sendo $N_0 = 19146770$ e $\alpha = -0,021$, obtemos:

$$N_t = N_0 \cdot (1 + \alpha)^t$$

$$N_t = 19146770 \cdot [1 + (-0,021)]^t$$

$$N_t = 19146770 \cdot [1 - 0,021]^t$$

$$\mathbf{N_t = 19146770 \cdot 0,979^t}$$

Tome agora a função C_t que descreve o crescimento populacional em um instante t anos após o ano 2000 sendo $C_{t+1} = C_t + \beta \cdot C_t$, conforme o modelo de Malthus, com a constante β dada por $\beta = \frac{C_{t+1}}{C_t} - 1$. Utilizando os dados da tabela 2.5 temos:

$$\beta_1 = \frac{C_1}{C_0} - 1 = \frac{151654362}{149234372} - 1 \cong 0,0162$$

$$\beta_2 = \frac{C_2}{C_1} - 1 = \frac{154069811}{151654362} - 1 \cong 0,0159$$

$$\beta_3 = \frac{C_3}{C_2} - 1 = \frac{156479993}{154069811} - 1 \cong 0,0156$$

$$\beta_4 = \frac{C_4}{C_3} - 1 = \frac{158884304}{156479993} - 1 \cong 0,0154$$

$$\beta_5 = \frac{C_5}{C_4} - 1 = \frac{161282493}{158884304} - 1 \cong 0,0151$$

$$\beta_6 = \frac{C_6}{C_5} - 1 = \frac{163672575}{161282493} - 1 \cong 0,0148$$

$$\beta_7 = \frac{C_7}{C_6} - 1 = \frac{166043739}{163672575} - 1 \cong 0,0145$$

$$\beta_8 = \frac{C_8}{C_7} - 1 = \frac{168432977}{166043739} - 1 \cong 0,0144$$

$$\beta_9 = \frac{C_9}{C_8} - 1 = \frac{170766518}{168432977} - 1 \cong 0,0139$$

Utilizando média aritmética simples, vem que:

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 + \beta_9}{9}$$
$$\beta \cong 0,0151$$

Substituindo $\beta = 0,0151$, $C_0 = 149234372$ em $C_t = C_0 \cdot (1+\beta)^t$, que foi obtido igual ao apresentado anteriormente, obtemos $C : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$:

$$C_t = C_0 \cdot (1+\beta)^t$$

$$C_t = 149234372 \cdot [1 + (-0,021)]^t$$

$$C_t = 149234372 \cdot [1 + 0,0151]^t$$

$$\mathbf{C_t = 149234372 \cdot 1,0151^t}$$

Utilizando os dois resultados encontrados tem-se a lei de formação da função A_t que descreve em um instante t anos após o ano 2000 o percentual de analfabetos no Brasil:

$$A_t = \frac{N_t}{C_t} \cdot 100$$

$$A_t = \frac{19146770 \cdot 0,979^t}{149234371 \cdot 1,0151^t} \cdot 100$$

$$A_t = \frac{19146770}{149234371} \cdot \left(\frac{0,979}{1,0151}\right)^t \cdot 100$$

$$\mathbf{A_t = 12,83 \cdot 0,9644^t}$$

Desta forma, temos a função $A : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$, tal que $A_t = 12,83 \cdot 0,9644^t$ que descreve em um instante t anos após o ano 2000 o percentual de analfabetos no Brasil.

Encontrada a função, o próximo passo é compará-la com os dados reais e verificar se a mesma pode ser validada. Essa comparação é apresentada na tabela 2.6.

Tabela 2.6: Comparação entre os percentuais reais e modelados

Ano	**% Real** (P_R)	**% Modelado** (P_M)	**%** ($P_M - P_R$)
2000	12,83	12,83	0
2001	11,94	12,37	0,43
2002	11,50	11,93	0,43
2003	11,20	11,51	0,31
2004	11,11	11,10	-0,01
2005	10,69	10,70	0,01
2006	10,04	10,32	0,28
2007	9,72	9,95	0,23
2008	9,55	9,60	0,05
2009	9,25	9,26	0,01

Podemos visualizar a comparação também em gráfico.

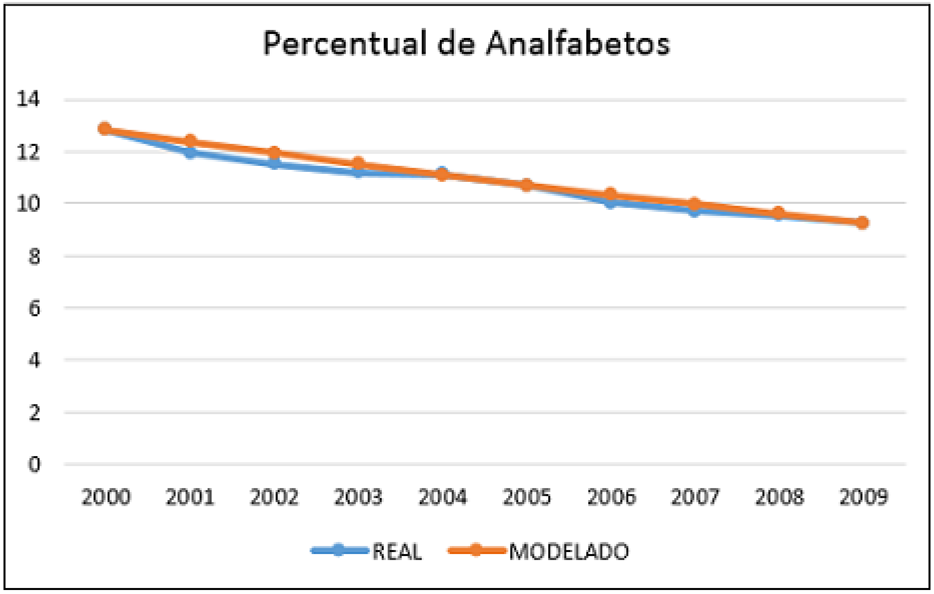

Figura 2.4: Gráfico de comparação entre os percentuais reais e modelados.

Através da tabela e do gráfico podemos observar que os dados obtidos através da modelagem são muito próximos dos reais, descrevendo de forma muito aceitável o fenômeno em estudo, sendo, portanto, válido o modelo.

2.6 Aplicação em sala de aula do modelo de Malthus para cálculo do percentual de analfabetos no Brasil

Devido ao analfabetismo ainda ser uma realidade bem evidente no Brasil, é importante que se promova ações de debate com os alunos sobre o tema, evidenciando suas possíveis causas e analisando suas consequências para a sociedade em geral, sendo também uma forma de promover a valorização por parte dos alunos, da educação que lhe é acessível, uma vez que, por incrível que pareça, muitas pessoas não tiveram a oportunidade de entrar em uma sala de aula. Diante disso, o analfabetismo foi selecionado com objeto a ser estudado através da Modelagem Matemática.

A modelagem de uma função que descrevesse o percentual de analfabetos foi apresentada aos alunos do 1o. Ano do Ensino Médio como uma das aplicações da função exponencial. Muitos alunos questionam a aplicabilidade de determinados conteúdos que são estudados e é importante que o professor faça a ligação da aplicabilidade desses conceitos.

Outro ponto que merece atenção é de que em livros didáticos aparece, por exemplo, que o comportamento de certo fenômeno segue uma função específica, e é apresentada a função. É interessante que o aluno tenha noção do porquê desse fenômeno seguir aquela função, como isso foi verificado, como foi constatado. Com essa modelagem os alunos tiveram a oportunidade de fazer toda a construção e saber como surge uma função em especial.

Inicialmente foram trabalhadas as primeiras noções sobre função exponencial, partindo a seguir para a definição e construção de seu gráfico. Finalizada essa primeira parte partimos para as aplicações com a utilização de alguns exemplos já prontos e em seguida para a construção do modelo.

O percentual de analfabetos em um período qualquer de tempo é calculado da seguinte forma:

$$\text{Percentual} = \frac{\text{total de pessoas analfabetas}}{\text{total de pessoas}} \cdot 100.$$

Para realizar essa construção, foram colhidos dados de pesquisas realizadas pelo IBGE.

Para encontrar a função e como a ideia era fazer com que os alunos compreendessem toda a parte de construção, os mesmos iniciaram organizando os dados das pesquisas selecionadas em tabelas no programa Excel.

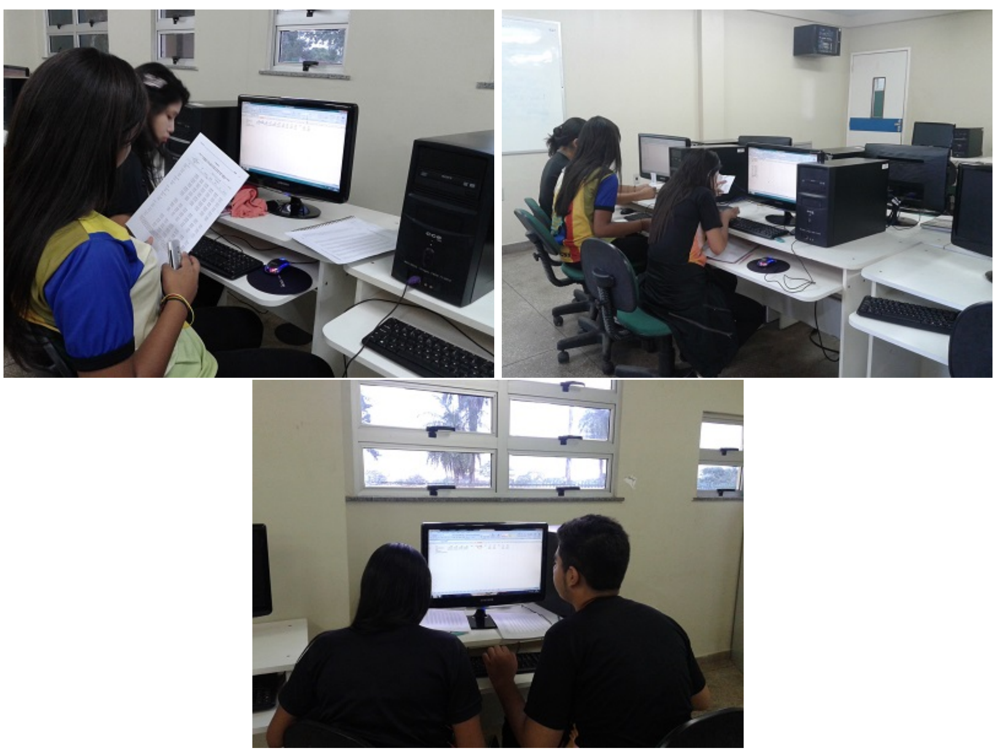

Figura 2.5: Alunos realizando a tabulação dos dados no programa Excel.

A primeira parte era calcular o percentual de analfabetos em cada ano desde o ano 2000 até 2009. Observou-se que as tabelas do IBGE traziam dados do total de pessoas pesquisadas e do total de analfabetos de cada idade, inclusive de pessoas com idade inferior a idade em estudo, então foi preciso realizar a subtração da quantidade de pessoas que não faziam parte da pesquisa. Esse cálculo foi realizado com auxílio de calculadoras e colocado em planilha do programa Excel. Com o auxílio do programa foi calculado o percentual de analfabetos em cada ano. Essa etapa foi um pouco demorada, uma vez que as tabelas do IBGE podem confundir de início e além disso alguns alunos não estão familiarizados com o computador.

Calculado o percentual, o mesmo precisava ser relacionado com a projeção da população. O IBGE apresenta esses dados separados por idade. Com o auxílio do programa foram somados os totais de pessoas na faixa etária em estudo e obtido o quantitativo absoluto de pessoas.

Figura 2.6: Alunos realizando os cálculos com utilização do programa Excel

Com isso, o próximo passo era utilizar essas informações com base no modelo de Malthus. Inicialmente foi apresentado o modelo e explicado sobre cada elemento que o mesmo contém. Vimos como encontrar a constante real que aparece no modelo, que é a taxa de crescimento populacional, e esta foi calculada sempre com o programa de computador. Para chegar a função final no modelo de Malthus, foi realizado o mesmo procedimento utilizado com os alunos do 3o. Ano, entretanto, com um pouco mais de repetições.

Analisando os dados e utilizando modelo de Malthus chegou-se ao seguinte resultado: (Lembrando que a construção do modelo foi detalhada anteriormente).

Seja a função $N : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$, a quantidade de analfabetos em um instante t anos após o ano 2000 tal que $N_t = 19146770 \cdot 0,979^t$.

Seja $C : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, a função C_t que descreve o crescimento populacional em um instante t anos após o ano 2000, tal que $C_t = 149234372 \cdot 1,0151^t$.

Realizando a substituição chegou-se a função $A : \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $A_t = 12,83 \cdot 0,9644^t$ que descreve em um instante t anos após o ano 2000 o percentual de analfabetos no Brasil.

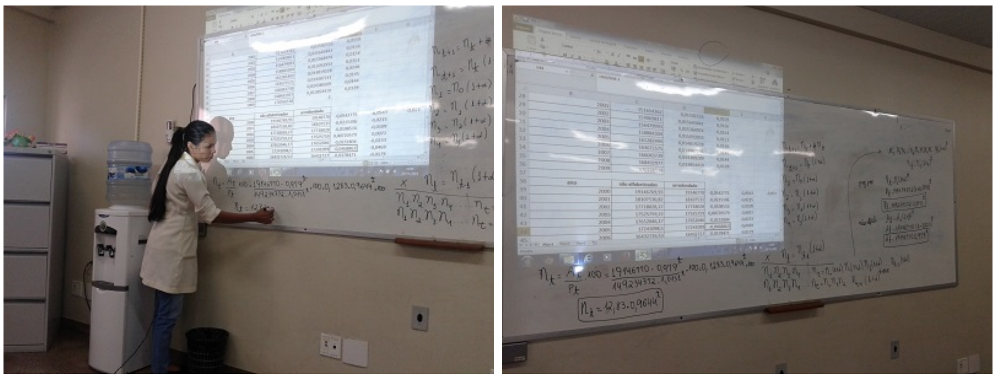

Figura 2.7: Professora concluindo a construção do modelo.

Viu-se também graficamente o comportamento do modelo construído utilizando o programa Geogebra.

Figura 2.8: Utilização do programa Geogebra para verificação do comportamento da função.

Concluído o modelo, partiu-se para a etapa de sua validade. Comparando os percentuais modelados com os percentuais reais, vimos que os mesmos se aproximaram bastante e o modelo descreve de forma muito boa o comportamento do objeto em estudo, sendo, portanto, considerado válido. Através da função modelada previu-se que o índice de analfabetos no Brasil no ano de 2014 é de $7,72\%$.

Em ambas as modelagens realizadas, o modelo conseguiu êxito logo de início, o que não ocorre sempre. Viu-se anteriormente que em alguns casos é preciso rever a escolha das variáveis, pois o modelo não conseguiu descrever de forma satisfatória o comportamento do objeto em estudo. Mas observando de uma outra perspectiva, a construção do modelo em si, mesmo este não conseguindo validação, traz consigo uma valorização da própria Matemática e o desenvolvimento do aluno.

Considerações Finais

A utilização da Modelagem Matemática é um meio que permite ao professor elevar o nível de ensino a um patamar mais próspero da aprendizagem, proporcionando ao aluno alcançar um melhor desempenho, tornando-o um dos principais agentes de construção de conhecimentos.

Quando é desenvolvido um trabalho de Modelagem Matemática, é revelado para muitos uma nova concepção da disciplina, há uma interação entre teoria e realidade, o que se aprendeu e o que se é executado faz sentido para o alunos e isso permite acreditar que os mesmos conseguirão compreender o sentido em aprender Matemática, e o professor torna-se mais entusiasta em exercer o papel que cabe a ele de instruir seus alunos com um conhecimento cada vez mais completo, o qual também seja útil para enfrentar as adversidades da vida.

Em diversos trabalhos acadêmicos observa-se o desenvolvimento impecável da Matemática, entretanto, ainda são poucos os trabalhos científicos que mostram a aplicabilidade dessa ciência numa visão mais acessível e dinâmica para que alunos da Educação Básica possam compreender e gostar. Sabe-se que o conhecimento é importante, no entanto a maioria das pessoas não sabem como e nem onde utilizá-lo. A antipatia de grande parte dos alunos em relação a Matemática é uma prova disso, onde muitos a veem inútil. Sendo assim, o docente deve usar a realidade do aluno como um meio de mostrar a relevância dessa ciência. Essa é a forma ideal para adquirir respeito e confiabilidade dos jovens que desconhecem a maravilha do mundo matemático.

A aprendizagem da Matemática com a utilização da Modelagem é mais motivadora, uma vez que o aluno aprende participando, pesquisando temas que lhes são atraentes, selecionando procedimentos para atingir seus objetivos. Dessa forma, o aluno tende a compreender com maior facilidade e profundidade os conteúdos matemáticos. Além disso, o professor, consciente de seu papel educativo estará fazendo com que o ensino se torne mais compreensivo, envolvente e interdisciplinar, no sentido de que cada tema escolhido pode pertencer a diferentes áreas de conhecimento e, com certeza, serão geradores de interessantes debates em sala.

A Modelagem Matemática é uma estratégia de ensino essencial para o aluno compreender a importância dessa ciência na vida do homem. Ela é a inspiração matemática mais completa para a construção de mentes brilhantes, uma vez que a mesma une teoria e realidade, estimula a criatividade e, principalmente, contribui para o desenvolvimento da autonomia do indivíduo.

Referências Bibliográficas

[1] BARBIERI, Daniele Donisete. *Modelagem matemática e suas implicações para a aprendizagem significativa*. [2005]. Disponível em: <media.wix.com/ugd/2d4976_a282a648e05a4bb3bd46d2696fb3bcf8.pdf>. Acesso em: 22 out. 2014.

[2] BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

[3] ________. *Temas e modelos*. Santo André: Universidade Federal do ABC, [ca. 2011]. Disponível em: <gradmat.ufabc.edu.br/livros/Temas%20&Modelos-%20o%20livro.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2014.

[4] BELLO, Samuel Edmundo López. *Etnomatemática: dimensões sociais e políticas na pedagogia da matemática*. [ca. 2001]. Disponível em: <www.ufrgs.br/faced/educacaomatematica/Publicacoes/jornada%20UNIOESTE.pdf>. Acesso em: 06 maio 2015.

[5] BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem matemática e implicações no ensino-aprendizagem de matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

[6] ________. *30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das primeiras propostas às propostas atuais*. 2009. Disponível em: <www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_VI/pdf/30%20anos%20de%20modelagem.pdf>. Acesso em: 08 maio 2015.

[7] BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

[8] BRASIL. Ministério da Educação. *Guia escolar: métodos para identifiação de sinais de abuso e exploração sexual de crianças e adolecentes*. Brasília: MEC, 2004.

[9] ________. Ministério da Educação. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2009.

[10] ________. Ministério da Saúde. *Manual de Vigilância do Óbito Infantil e Fetal e do Comitê de Prevenção do Óbto Infantil*. Brasília: MS, 2009.

[11] BURAK, Dionísio. *Modelagem matemática e interações no processo de ensino-aprendizagem*. Tese de doutorado. Campinas, Unicamp, 1992. Disponível em: <www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=vtls000046190>. Acesso em: 03 maio 2015.

[12] ________. *Modelagem matemática e a sala de aula*. [2011]. Disponível em: <www.joinville.udesc.br/portal/professores/regina/materiais/modelagem.pdf>. Acesso em: 22 out. 2014.

[13] DANTE, Luis Roberto. *Matemática: constexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[14] ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição. *Etnomatemática: um estudo da evolução das ideias*. [ca. 2003]. Disponível em: <www.ufrj.br/leptrans/arquivos/etnomatematica.pdf>. Acesso em: 05 maio 2015.

[15] HUBNER. L. Etnomatemática. *Diário na escola*, Santo André, p. 3, 31 out. 2003. Disponível em: <etnomatematica.org/articulus/boletin.pdf>. Acesso em: 07 maio 2015.

[16] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Censo Demográfico 2000: educação - resultados da amostra*. Rio de Janeiro: IBGE, 2003.

[17] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios: síntese dos indicadores 2001*. Rio de Janeiro: IBGE, 2002.

[18] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 23. Rio de Janeiro: IBGE, 2003.

[19] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 24. Rio de Janeiro: IBGE, 2004.

[20] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 25. Rio de Janeiro: IBGE, 2005.

[21] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 26. Rio de Janeiro: IBGE, 2006.

[22] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 27. Rio de Janeiro: IBGE, 2007.

[23] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 28. Rio de Janeiro: IBGE, 2008.

[24] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 29. Rio de Janeiro: IBGE, 2009.

[25] ________. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*. v. 30. Rio de Janeiro: IBGE, 2009.

[26] ________. *Brasil: projeção da população por sexo e idades simples, em 1o. de julho - 2000/2060*. 2013. Disponível em: <ftp://ftp:ibge.gov.br/Projecoes_da_Populacao_2013/projecoes_2013_populacao_xls.zip>. Acesso em: 29 out. 2014.

[27] LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[28] SISTEMA DE INFORMAÇÃO SOBRE NASCIDO VIVO. *Nascidos vivos - Brasil*. Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?sinasc/cnv/nvut.def>. Acesso em: 05 maio 2014.

[29] SODRÉ, Ulisses. *Modelos matemáticos*. Londrina: UEL, 2007. Disponível em: <www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>. Acesso em: 22 out. 2014.

[30] SOISTAK, Alzenir Virginia Ferreira; BURAK, Dionísio. *O conhecimento matemático elaborado via metodologia alternativa da modelagem matemática*. [2005]. Disponível em: <media.wix.com/ugd/2d4976_25b07ad9cd144fd19b7bbde7deb9ea5d.pdf>. Acesso em: 10 out. 2014.

[31] TORTOLA, Emerson; REZENDE, Veridiana; SANTOS, Talita Secorun dos. *Modelagem matemática no ensino fundamental: o custo da construção da quadra esportiva de uma escola por alunos de 5a. série (6o. ano)*. 2009. Disponível em: <www.fecilcam.br/nupem/anais _ iv _ epct/PDF/ciencias _ exatas/03 _ TORTOLA _ REZENDE _ SANTOS.pdf>. Acesso em: 22 out. 2014.