UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A FORMA FRACA DO TEOREMA DE PEANO EM ESPAÇOS DE BANACH DE DIMENSÃO INFINITA

Abraão Caetano Mendes

MANAUS - 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Abraão Caetano Mendes

A Forma Fraca do Teorema de Peano em espaços de Banach de dimensão infinita

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Michel Pinho Rebouças

MANAUS - 2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M538f

Mendes, Abraão Caetano
A Forma Fraca do Teorema de Peano em Espaços de Banach de Dimensão Infinita / Abraão Caetano Mendes. 2015
55 f.: 31 cm.

Orientador: Michel Pinho Rebouças
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Forma Fraca do Teorema de Peano. 2. Espaço de Banach. 3. Subespaço Complementado. 4. Base de Schauder Incondicional. I. Rebouças, Michel Pinho II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

A Forma Fraca do teorema de Peano em espaços de Banach de dimensão infinita.

Abraão Caetano Mendes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Michel Pinho Rebouças

Prof. Dr. Michel Pinho Rebouças

Orientador - UFAM

Alfredo Wagner M. Pinto

Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto - UFAM

Marcus Marrocos

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos - UFABC

Manaus, 12 de Agosto de 2015

Agradecimentos

Quero primeiramente agradecer a Deus pelas ricas bençãos que ele tem concedido a mim durante estes meus 24 anos de vida, pela sabedoria, inteligência e conhecimento, e, em especial, por ter me dado o privilégio de ter feito o mestrado em matemática.
Quero também agradecer a meus pais José e Adalciete por tudo o que eles fizeram por mim, dentro de suas possibilidades, e por me ensinarem o caminho da educação em minha vida. Também agradeço aos meus irmãos Alexandre e Abigail pelo companheirismo fraternal e pela boa amizade durante todos esses anos.
Agradeço também aos professores Roberto Cristóvão e Karla Tribuzy por terem sido orientadores nos Pibic's 2010-2011 e 2011-2012, respectivamente, me apresentando o belo caminho da pesquisa científica.
Quero agradecer, de coração, aos professores Alfredo Wagner e Inês Padilha pelos bons conselhos durante o tempo de graduação, pela inspiração matemática, pelos ricos incentivos para ingressar no mestrado e pelas cartas de recomendação. A estes o meu MUITO OBRIGADO.
Também quero agradecer ao professor Michel Pinho pela boa orientação no mestrado, pela constante motivação para ingressar no doutorado, pela amizade e pela escolha do tema da dissertação.
E, por fim, agradeço a CAPES pelo financiamento dos meus estudos no mestrado.

Aos meus pais José e Adalciete e aos meus irmãos Alexandre e Abigail.

Resumo

Por muito tempo procurou-se responder à questão da validade (ou não-validade) do Teorema de Peano em espaços de Banach de dimensão infinita. Mas, em 1974, Godunov mostrou que o Teorema de Peano é válido em um espaço de Banach X se, e somente se, X tem dimensão finita (veja [13]). Voltou-se, então, a atenção para a Forma Fraca do Teorema de Peano no caso de dimensão infinita. Em 2003, Shkarin mostrou que se X é um espaço de Banach contendo um subespaço complementado com base de Schauder incondicional, então a Forma Fraca do Teorema de Peano não é válida (veja [14]). Veremos os detelhes deste resultado ao longo deste trabalho.

Palavras-Chave: Forma Fraca do Teorema de Peano, espaços de Banach, subespaço complementado e base de Schauder incondicional.

Abstract

For a long time one was looking for an answer of Peano's theorem in infinite-dimensional Banach spaces. In 1974, Godunov proved that the Peano's theorem holds in a Banach space X if and only if X has finite dimension. In the following, he turned all his attention to the weak form of Peano's theorem in the infinite-dimensional case. In 2003, Shkarin proved that if X is a Banach space containing a complemented subspace with an unconditional Schauder basis, then the weak form of Peano's theorem does not hold. In this work we try to show all details of the proof.

Key Words: Weak Form of Peano's Theorem, Banach spaces, complemented subspace and unconditional Schauder basis.

Sumário

Notação

Ω é o conjunto de funções contínuas e crescentes $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\omega(0) = 0$ e $\omega(t + s) \leq \omega(t) + \omega(s)$ para todo $t, s \in [0, +\infty)$.

$\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega : \omega \quad \text{diferencivel em } (0, +\infty) \text{ e } \sup\limits_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T}]} \mathrm{t}\omega'(\mathrm{t}) < +\infty \text{ para qualquer } \mathrm{T} > 0\}$.

$L_\omega(X)$ é o conjunto de funções contínuas $f : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \omega(\|x - y\|)$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in X$, onde X é um espaço de Banach e $\omega \in \Omega$.

U é a classe de espaços de Banach reais de dimensão infinita com base de Schauder incondicional.

W é a classe de espaços de Banach contendo um espaço da classe U como um subespaço complementado.

Introdução

O Teorema de Peano afirma que se X é um espaço de Banach de dimensão finita e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma aplicação contínua então o problema de Cauchy $x'(t) = f(t,x), x(t_0) = x_0$ admite alguma solução em algum intervalo aberto I contendo t_0. Surgiu, então, uma pergunta natural: O teorema de Peano continua válido em espaços de Banach de dimensão infinita? Infelizmente, a resposta, em geral, é não. O primeiro a dar um contra-exemplo foi Jean Dieudonné, em 1950 (veja [12]). Dieudonné construiu uma aplicação contínua no espaço c_0, para a qual o problema de Cauchy não admite solução. A resposta definitiva veio em 1974: Godunov mostrou que o Teorema de Peano é válido em um espaço de Banach X se, e somente se, X tem dimensão finita (veja [13]). Voltou-se, então, a atenção para a Forma Fraca do Teorema de Peano que afirma o seguinte: Se X é um espaço de Banach de dimensão finita e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma aplicação contínua então a equação diferencial $x'(t) = f(t,x)$ admite alguma solução em algum intervalo aberto da reta real. Novamente, veio a pergunta natural: A Forma Fraca do Teorema de Peano continua válida em espaços de Banach de dimensão infinita? Também, em geral, a resposta é não. Em 2003, Shkarin mostrou que se X é um espaço de Banach contendo um subespaço complementado com base de Schauder incondicional, então a Forma Fraca do Teorema de Peano não é válida neste caso (veja [14]). Este último resultado constitui a "alma"deste trabalho e veremos os detalhes de sua demonstração no capítulo 4.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

O capítulo 1 apresenta várias definições e resultados da Análise Funcional, Topologia Geral e EDO's em espaços de Banach, tais como: espaços de sequências, Teorema de

Hahn-Banach, subespaço complementado, base de Schauder incondicional, espaço vetorial topológico, espaço localmente convexo, teorema de Peano e a Forma Fraca do teorema de Peano. O principal objetivo deste capítulo é facilitar a leitura e o entendimento dos principais resultados contidos neste trabalho.

O capítulo 2 apresenta seis lemas, intitulados de "Lemas Auxilares", que nos serão muito úteis no desenvolvimento e demonstração dos resultados principais. Na verdade, estes lemas já nos dão os detalhes da prova de que a Forma Fraca do teorema de Peano não é válida em espaços de Banach contendo um subespaço complementado com base de Schauder incondicional.

O capítulo 3 apresenta três lemas, intitulados de "Lemas Principais", pois estes serão usados de uma forma "bem direta"na demonstração dos resultados principais. Neste capítulo definimos um conjunto Ξ formado por pares de funções (ω_1, ω_2), onde ω_1 e ω_2 são funções contínuas, crescentes e não-negativas em $[0, +\infty)$ tais que para qualquer espaço de Banach X de dimensão infinita com base de Schauder incondicional e $\epsilon > 0$ existe um campo de vetores contínuo $f : \mathbb{R} \times X \to X$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\|f(t,x)\| \leq 1$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$;

(ii) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega_1(\|x-y\|)$ para todo $x, y \in X,\ t \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq \omega_2(|t-s|)$ para todo $x \in X,\ t, s \in \mathbb{R}$;

(iv) Para $t_0 = 0$ e qualquer $x_0 \in X$ com $\|x_0\| < 1$, o problema de Cauchy $x^{'}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ não possui solução em nenhuma vizinhança do 0.

O capítulo 4 apresenta os resultados principais deste trabalho, provados em 2003 por Stanislav Shkarin: Se X é um espaço de Banach contendo um subespaço complementado com base de Schauder incondicional e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é um campo de vetores contínuo então a equação diferencial $x'(t) = f(t,x)$ não possui solução em nenhum intervalo da reta real. Apresentamos também um resultado similar para equações autônomas, em que sob certas condições, a equação $x' = f(x)$ não possui solução em nenhum intervalo da reta.

E por fim, no quinto e último capítulo deste trabalho, apresentamos, com propósito de aplicação direta do resultado de Shkarin, um resultado dos professores Cleon Barroso (UFC), Marcus Marrocos (UFABC) e Michel Rebouças (UFAM), no qual vemos um tipo de genericidade de soluções relativo a Forma Fraca do Teorema de Peano para campos autônomos em espaços de Banach (para mais detalhes veja [10]).

Capítulo 1

Preliminares

Ao escrever este capítulo, somos movidos por dois objetivos cruciais: o primeiro é tornar nosso trabalho mais acessível e interessante. O segundo é apresentar algumas definições e resultados da Análise Funcional, Topologia Geral e de EDO's em espaços de Banach, que serão necessários para o desenvolver deste trabalho. Assim sendo, não incluiremos demonstrações, mas sempre daremos referência de onde encontrá-las.

1.1 Espaços de sequências

Nesta seção definiremos alguns espaços de sequências que são exemplos clássicos de espaços normados. Todos estes espaços são completos, isto é, são espaços de Banach.

Definição 1. *Por c_0 denotamos o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo k} \in \mathbb{N} \text{ e } \mathrm{a_k} \to 0\}$$

É claro que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências (operações coordenada a coordenada). Também é fácil comprovar que a expressão

$$\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

torna c_0 um espaço normado.

Definição 2. *Para cada número real $p \geq 1$, definimos*

$$l_p = \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ e} \sum_{\mathrm{j=1}}^{\infty} |\mathrm{a_j}|^{\mathrm{p}} < \infty\}.$$

O espaço l_p é um espaço normado com a seguinte norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 3. *Para $p = \infty$, definimos l_∞ como o espaço das sequências limitadas de escalares, ou seja:*

$$l_\infty = \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ e} \sup_{\mathrm{j} \in \mathbb{N}} |\mathrm{a_j}| < \infty\}.$$

Temos que l_∞ é um espaço normado com a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}.$$

1.2 Operadores Lineares Contínuos e Isomorfismo

Os morfismos entre espaços normados são as funções que são simultaneamente lineares e contínuas. Tais funções são normalmente chamadas de operadores lineares contínuos. Temos então a seguinte definição:

Definição 4. *Um operador linear contínuo do espaço normado E no espaço normado F, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $T : E \to F$, que é linear, isto é*
(i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ para quaisquer $x, y \in E$ e
(ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e qualquer $x \in E$;
e contínua, isto é, para todos $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

Denotamos por $L(E, F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F. É claro que $L(E, F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. Quando F é o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $L(E, \mathbb{K})$, chamamos esse espaço de dual topológico de E, ou simplesmente dual de E, e dizemos que seus elementos são funcionais lineares contínuos.
Uma classe especial de operadores lineares contínuos são os isomorfismos:

Definição 5. *Dizemos que dois espaços normados são topologicamente isomorfos, ou simplesmente isomorfos, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \to F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \to E$ - que é sempre linear - é também contínuo. Tal operador T é chamado de isomorfismo topológico, ou simplesmente isomorfismo.*

1.2.1 Caracterizações dos operadores lineares contínuos

Teorema 1.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \to F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*
(a) T é lipschitziano.
(b) T é uniformemente contínuo.
(c) T é contínuo.

(d) T *é contínuo em algum ponto de* E*.*

(e) T *é contínuo na origem.*

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|\text{x}\| \leq 1\} < \infty$.

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *para todo* $x \in E$*.*

Demonstração. Veja [1], Teorema 2.1.1., p. 33.

Proposição 1.2. *Sejam* E *e* F *espaços normados.*

(a) A expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|\text{x}\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $L(E, F)$*.*

(b) $\|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\|$ *para todos* $T \in L(E, F)$ *e* $x \in E$*.*

(c) Se F *for Banach, então* $L(E, F)$ *também é Banach.*

Demonstração. Veja [1], Proposição 2.1.4., p. 34.

1.3 Teorema de Hahn-Banach

A seguir apresentamos o Teorema de Hahn-Banach, cujo alcance ultrapassa os limites da Matemática.

Teorema 1.3. *(Teorema de Hahn-Banach)*

Sejam E *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *e* $p : E \to \mathbb{R}$ *uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|p(x) \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in E, \text{ e}$$
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Se $G \subseteq E$ *é um subespaço vetorial e* $\varphi : G \to \mathbb{K}$ *é um funcional linear tal que* $|\varphi(x)| \leq p(x)$ *para todo* $x \in G$*, então existe um funcional linear* $\varphi^* : E \to \mathbb{K}$ *que estende* φ *a* E *e que satisfaz* $|\varphi^*(x)| \leq p(x)$ *para todo* $x \in E$*.*

Demonstração. Veja [1], Teorema 3.1.2., p. 58.

Corolário 1.4. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

1.4 Projeção e Subespaço Complementado

Definição 6. *Seja E um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : E \to E$ é uma projeção se $P^2 := P \circ P = P$. É claro que se $P \neq 0$ é uma projeção, então $\|P\| \geq 1$.*

Temos a seguinte caracterização para projeções:

Proposição 1.5. *Seja F um subespaço do espaço de Banach E. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) Existe uma projeção $P : E \to E$ cuja imagem coincide com F. Neste caso dizemos que P é uma projeção de E sobre F.
(ii) F é fechado e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$, isto é, $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$.
Neste caso $F = \{x \in E : P(x) = x\}$ e $G = Ker(P)$.

Demonstração. Veja [1], Proposição 3.2.2., p. 61.

Definição 7. *Um subespaço F do espaço de Banach E é complementado se satisfaz as condições equivalentes da Proposição 1.5. Dizemos que F é λ-complementado, $\lambda \geq 1$, se F é complementado por uma projeção de norma igual a λ.*

Exemplo 1. *Sejam E e F espaços de Banach. Por meio da projeção $(x, y) \in E \times F \mapsto (x, 0) \in E \times F$, vemos que $E = E \times \{0\}$ é 1-complementado em $E \times F$.*

1.5 Bases de Schauder

Antes de definir base de Schauder e base de Schauder incondicional, vamos apresentar os conceitos de série incondicionalmente convergente e de base incondicional.

Definição 8. *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *em um espaço de Banach* E *é incondicionalmente convergente se* $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ *converge para quaisquer escolhas de sinais* $\epsilon_n = \pm 1$*. Além disso, uma sequência básica é dita incondicional se para cada* $x \in \overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*, sua expansão* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *converge incondicionalmente.*

Na Análise Funcional, as bases algébricas dos espaços de Banach têm pouca utilidade pois, entre outros motivos, elas nunca são enumeráveis (ver [1], Proposição 10.3.1., p. 313). A seguir apresentamos o conceito que substitui as bases algébricas na Análise Funcional:

Definição 9. *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *no espaço de Banach* E *é chamada de base de Schauder de* E *se cada* $x \in E$ *tem uma representação única sob a forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares*

$$x_n^* : E \to \mathbb{K}, \;\; x_n^*(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j) = a_n$$

que são chamados de funcionais coeficientes ou funcionais coordenadas. Uma base de schauder é dita incondicional se, para cada $x \in E$*, a convergência da série é incondicional.*

Note que a unicidade da representação também garante que os vetores de uma base de Schauder são linearmente independentes.

Exemplo 2. *Os vetores unitários canônicos* $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ *formam uma base de Schauder incondicional para* c_0 *e para* l_p, $1 \leq p < \infty$.

1.6 Espaço Vetorial Topológico e Espaço Localmente Convexo

Nesta seção apresentaremos algumas noções básicas de Topologia Geral.

Definição 10. *Seja X um conjunto qualquer não-vazio. Uma topologia em X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
(ii) $\{A_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \in \mathcal{T}$;
(iii) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

Um conjunto X munido com uma topologia $\mathcal{T}$ será denominado de espaço topológico e será denotado por $(X, \mathcal{T})$. Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados de abertos de $(X, \mathcal{T})$.

Definição 11. *(Topologia Vetorial). Dado um espaço vetorial real X, uma topologia $\mathcal{T}$ em X é denominada topologia vetorial quando ela satisfaz as seguintes condições:*
(i) A operação adição é contínua, isto é, a aplicação $A : X \times X \to X$, dada por $A(x, y) = x + y$ é contínua.
(ii) A operação produto por escalar é contínua, ou seja, a aplicação $P : \mathbb{R} \times X \to X$ dada $P(\alpha, x) = \alpha.x$ é contínua.

Definição 12. *(Espaço Vetorial topológico). Um espaço vetorial X munido com uma topologia vetorial $\mathcal{T}$ é denominado espaço vetorial topológico e representado por $(X, \mathcal{T})$.*

Exemplo 3. (a) *Espaços normados são espaços vetoriais topológicos.*
(b) *Sejam X um espaço vetorial e $\mathcal{T}_c = \{\emptyset, X\}$ a topologia caótica em X. Então $(X, \mathcal{T}_c)$ é um espaço vetorial topológico.*

Definição 13. *(Espaço Localmente Convexo). Uma topologia $\mathcal{T}$ é dita ser uma topologia localmente convexa se ela possui uma base de vizinhanças convexas da origem. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, em que $\mathcal{T}$ é uma topologia localmente convexa, é denominado espaço localmente convexo.*

Exemplo 4. (a) *Espaços normados são espaços localmente convexos, pois, as bolas abertas* $(B(0;\epsilon))_{\epsilon>0}$ *formam uma base de vizinhanças convexas da origem.*

(b) *Se* X *é um espaço vetorial e* $\mathcal{T}_c = \{\emptyset, X\}$ *é a topologia caótica em* X*, então,* $(X, \mathcal{T}_c)$ *é um espaço localmente convexo.*

1.7 Alguns Resultados de EDO's em Espaços de Banach

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de Equações Diferenciais Ordinárias em espaços de Banach que são o "alicerce"do nosso trabalho. As demonstrações destes resultados podem ser verificadas em [3], [5], [12] e [21].

Teorema 1.6. *(Peano - 1886).*
Sejam X um espaço de Banach de dimensão finita, $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma aplicação contínua, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

admite uma solução em algum intervalo aberto I contendo t_0.

Teorema 1.7. *(Forma Fraca do Teorema de Peano).*
Se X é um espaço de Banach de dimensão finita e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma aplicação contínua, então a equação diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ possui uma solução em algum intervalo aberto.

Teorema 1.8. *(Teorema de Osgood).*
Se X é um espaço de Banach real de dimensão finita, f é contínua, $\omega \in \Omega$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\omega(t)} = +\infty$ e $f \in L_\omega(X)$, então para qualquer $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$ o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

possui uma única solução em $[t_0 - T, t_0 + T]$ para qualquer $T > 0$.

O teorema de Osgood também é válido em espaços de dimensão infinita. Isto segue do Teorema de Osgood e do teorema 3.4.3. do livro [3].

Teorema 1.9. *(Teorema de Osgood em espaços de dimensão infinita).*
Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita, $\omega \in \Omega$ tal que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\omega(t)} = +\infty$ e $f \in L_\omega(X)$. Então para qualquer $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$ e qualquer $T > 0$ o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

possui uma única solução em $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Capítulo 2

Lemas Auxiliares

Para qualquer $c > 0$ denotaremos o conjunto de todas as funções $f : Z \to Y$, onde Z, Y são espaços de Banach, tais que $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in Z$, por $Lip_c(Z, Y)$, e o conjunto de todas as funções lipschitzianas de Z em Y por

$$Lip(Z, Y) = \bigcup_{c>0} Lip_c(Z, Y)$$

Vamos considerar a seguinte função $\alpha : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad t \geq 2 \\ 2 - t, & \text{se} \quad 1 < t < 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Temos, então que α é lipschitziana com constante 1. De fato, $|\alpha^{'}(t)| \leq 1$ para todo $t \in [0, +\infty]$.

Sejam $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base de Schauder incondicional de um espaço de Banach X tal que $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n os funcionais-coordenadas da base e p a norma, definida por:

$$p(x) = \sup\{\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n(x) e_n\| : t_n \in \mathbb{R}, |t_n| \leq 1\} < \infty. \tag{2.2}$$

para qualquer $x \in X$. É um fato conhecido que a norma p é equivalente a norma inicial de X, isto é,

$$\|x\| \leq p(x) \leq c\|x\| \tag{2.3}$$

onde c é uma contante e $c \geq 1$. Temos que a norma p satisfaz a seguinte propriedade útil:

$$p(x) \leq p(y) \; se \; |f_n(x)| \leq |f_n(y)| \text{ para todo n} \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Com efeito, sejam $A = \{\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n(x) e_n\| : t_n \in \mathbb{R}, |t_n| \leq 1\} < \infty$ e $B = \{\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n(y) e_n\| : t_n \in \mathbb{R}, |t_n| \leq 1\} < \infty$, com $|f_n(x)| \leq |f_n(y)|$. Seja $m \in A$. Então $m = \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n(x) e_n\|$.
Note que:
(i) $f_n(y) \neq 0 \Rightarrow |\frac{f_n(x)}{f_n(y)}| \leq 1$. Então $t_n f_n(x) e_n = t_n \frac{f_n(x)}{f_n(y)} f_n(y) e_n$.
(ii) $f_n(y) = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0$.
Assim, $m = \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n(x) e_n\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{t_n} f_n(y) e_n\|$, onde $\tilde{t_n} = t_n \frac{f_n(x)}{f_n(y)}$ se $f_n(y) \neq 0$ e $\tilde{t_n} = t_n$ se $f_n(y) = 0$.
Logo, $m \in B$, ou seja, $A \subset B$. Como B é limitado temos $\sup A \leq \sup B \therefore p(x) \leq p(y)$.

Sejam também $\Phi, Q_n : X \to X$,

$$Q_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) e_k = x - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) e_k \tag{2.5}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(p(Q_n(x))) f_n(x) e_n \tag{2.6}$$

Como $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ e a base $\{e_n\}$ é incondicional, a função Φ está bem definida.

Lema 2.1. *A função Φ definida em (2.6) é limitada e pertence ao conjunto $Lip(X, X)$.*

Prova. Para qualquer $x \in X$ seja $k(x) = min\{m \in \mathbb{N} : p(Q_m(x)) < 2\}$. Como a norma p é equivalente a norma inicial de X temos que $p(Q_n(x)) \to 0$ $(n \to 0)$. Portanto $k(x)$ está bem definido. Usando (2.1), (2.4), (2.5) e (2.6) temos que

$$\Phi(x) = \sum_{n=k(x)}^{\infty} \alpha(p(Q_n(x))) f_n(x) e_n.$$

De acordo com (2.3) $\|\Phi(x)\| \leq p(\Phi(x)) \leq p(\sum_{n=k(x)}^{\infty} f_n(x)e_n) = p(Q_{k(x)}(x)) < 2$. Portanto, Φ é limitada. Seja $x, y \in X$ e $k(x) \leq k(y)$. Então usando (2.4) e a definição de $k(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}
p(\Phi(x) - \Phi(y)) &\leq p(\sum_{n=k(x)}^{\infty} (\alpha(p(Q_n(x)) - \alpha(p(Q_n(y)))f_n(x)e_n)) \\
&+ p(\sum_{n=k(y)}^{\infty} \alpha(p(Q_n(y))(f_n(x) - f_n(y))e_n) \\
&\leq p(\sum_{n=k(x)}^{\infty} (|p(Q_n(x)) - p(Q_n(y))|f_n(x)e_n) \\
&+ p(\sum_{n=k(y)}^{\infty} (f_n(x) - f_n(y))e_n) \\
&\leq p(\sum_{n=k(x)}^{\infty} p(Q_n(x-y))f_n(x)e_n) + p(Q_{k(y)}(x-y)) \\
&\leq p(\sum_{n=k(x)}^{\infty} p(x-y)f_n(x)e_n) + p(Q_{k(y)}(x-y)) \\
&\leq p(x-y)p(\sum_{n=k(x)}^{\infty} f_n(x)e_n) + p(x-y) \\
&= p(x-y)p(Q_{k(x)}(x)) + p(x-y) \\
&\leq 2p(x-y) + p(x-y) \\
&= 3p(x-y).
\end{aligned}$$

Como $\|x\| \leq p(x) \leq c\|x\|$, para todo $x \in X$, temos que $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq p(\Phi(x) - \Phi(y)) \leq 3p(x-y) \leq 3c\|x-y\|$.

Logo, $\Phi \in Lip(X, X)$. $\square$

Agora consideremos o seguinte conjunto

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} KerQ_n. \tag{2.7}$$

Temos que o conjunto E é um subespaço denso de X. Um cálculo simples mostra que E

é um subespaço de X. E E é denso em X pois dado $x \in X$ podemos escrevê-lo da forma $x = Q_n(x) + y_n$, onde $y_n = \sum_{n=1}^{n-1} f_n(x)e_n$. Observamos que $y_n \in KerQ_n$ para todo n $\in \mathbb{N}$ e que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

Lema 2.2. *Seja $\epsilon > 0$ e $x : [0, \epsilon] \to X$ uma função contínua, diferenciável em $(0, \epsilon]$ e tal que $x^{'}(t) = \Phi(\frac{x(t)}{t})$ para todo $t \in (0, \epsilon]$, onde Φ é a função definida em (2.6). Então $x(0) \in E$.*

Prova. Considere $b = x(\epsilon)$ e escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $p(Q_n(b)) < \epsilon$. Seja

$$\delta = inf\{r \in (0, \epsilon] : p(Q_n(x(s))) < s \text{ para todo s} \in \text{(r}, \epsilon)\}.$$

Dessa forma, $\delta < \epsilon$. Usando (2.1) temos que para todo $t \in [\delta, \epsilon]$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Q_n x(t)) = Q_n x^{'}(t) &= Q_n \Phi(\frac{x(t)}{t}) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha(p(Q_k \frac{x(t)}{t})) f_k(\frac{x(t)}{t}) e_k) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f_k(x(t))}{t} e_k = \frac{1}{t} Q_n x(t).
\end{aligned}$$

Ou seja, temos o seguinte problema com dados iniciais:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Q_n x(t)) &= \frac{1}{t} Q_n x(t) \\ Q_n(x(\epsilon)) &= Q_n(b) \end{cases} \tag{2.8}$$

Resolvendo (2.8) obtemos que $Q_n(x(t)) = tQ_n(\frac{b}{\epsilon})$ para todo $t \in [\delta, \epsilon]$. Suponhamos que $\delta > 0$. Usando o fato de δ ser ínfimo e x ser contínua temos que $p(Q_n(x(\delta))) = \delta$. Por outro lado, pela solução de (2.8), temos que $p(Q_n(x(\delta)) < \delta$. Contradição. Logo, $\delta = 0$. Assim, $Q_n(x(t)) = tQ_n(\frac{b}{\epsilon})$ para todo $t \in [0, \epsilon]$.

Portanto, $Q_n(x(0)) = 0$, isto é, $x(0) \in E$. $\square$

Como $E \neq X$, seja $a \in X \setminus E$ com $\|a\| \leq 1$.

Seja Γ o conjunto de todas as funções crescentes $\gamma \in C^1[0, +\infty)$ tais que $\gamma(0) = \gamma^{'}(0) = 0$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty$.

Lema 2.3. *Para qualquer $\gamma \in \Gamma$, as funções*

$$f_2(t,x) = \begin{cases} 0, & se \quad t = 0 \\ \gamma^{'}(t)\Phi(\dfrac{x}{\gamma(t)}), & se \quad t > 0 \\ -\gamma^{'}(-t)\Phi(\dfrac{x-a}{\gamma(-t)}), & se \quad t < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

e

$$f_3(t,x) = \alpha(|t|)\alpha(\|x\|)f_2(t,x) \tag{2.10}$$

são contínuas. Além disso, para qualquer $x_0 \in X$ com $\|x_0\| < 1$, os problemas

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= & f_2(t,x) \\ x(0) &= & x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^{'}(t) &= & f_3(t,x) \\ x(0) &= & x_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

não possuem soluções em nenhuma vizinhança de 0.

Prova. A continuidade de f_2 em pontos (t,x) com $t \neq 0$ segue do fato de $\gamma^{'}$ e Φ serem contínuas e em pontos onde $t = 0$ segue do fato de $\gamma^{'}$ ser contínua, $\gamma(0) = 0$ e Φ ser limitada. A continuidade de f_3 segue do fato de $\alpha, |.|, \|.\|$ e f_2 serem contínuas.

Passemos a segunda parte do lema. Suponhamos que $x : I \to X$ é uma solução de $x^{'}(t) = f_2(t,x), x(0) = x_0$ ou $x^{'}(t) = f_3(t,x), x(0) = x_0$, onde I é uma vizinhaça de 0, $x_0 \in X$ e $\|x_0\| < 1$.

Como γ é de classe C^1, seja $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ a função inversa de γ. Então podemos escolher $\epsilon \in (0, \gamma(1))$ tal que $[-\eta(\epsilon), \eta(\epsilon)] \subset I$ e $\|x(t)\| < 1$ para todo $t \in [-\eta(\epsilon), \eta(\epsilon)]$. Existem dois casos a considerar: $x_0 \in E$ ou $x_0 \notin E$.

Caso 1: $x_0 \notin E$.

Considere a função $y : [0, \epsilon] \to X$, $y(t) = x(\eta(t))$. Como

$$f_2(t, x) = f_3(t, x) = \gamma^{'}(t)\Phi(\frac{x}{\gamma(t)})$$

para $\|x\| \leq 1$ e $t \in (0, 1]$, temos que para todo $t \in (0, \epsilon]$,

$$\begin{aligned} y^{'}(t) &= x^{'}(\eta(t))\eta^{'}(t) \\ &= \gamma^{'}(\eta(t))\eta^{'}(t)\Phi(\frac{x(\eta(t))}{\gamma(\eta(t))}) \\ &= \Phi(\frac{y(t)}{t}) \end{aligned}$$

$\therefore y^{'}(t) = \Phi(\frac{y(t)}{t})$.

Pelo Lema 2.2, temos $y(0) = x_0 \in E$. Contradição, pois, consideramos $x_0 \notin E$.

Caso 2: $x_0 \in E$.

Considere a função $y : [0, \epsilon] \to X$, $y(t) = x(-\eta(t)) - a$. Como

$$f_2(t, x) = f_3(t, x) = -\gamma^{'}(-t)\Phi(\frac{x - a}{\gamma(-t)})$$

para $\|x\| \leq 1$ e $t \in [-1, 0)$, temos que para todo $t \in (0, \epsilon]$,

$$\begin{aligned} y^{'}(t) &= -x^{'}(-\eta(t))\eta^{'}(t) \\ &= \gamma^{'}(\eta(t))\eta^{'}(t)\Phi(\frac{x(-\eta(t)) - a}{\gamma(\eta(t))}) \\ &= \Phi(\frac{y(t)}{t}) \end{aligned}$$

$\therefore y^{'}(t) = \Phi(\frac{y(t)}{t})$.

Pelo Lema 2.2, temos $y(0) = x_0 - a \in E$. Logo, $a = x_0 - y(0) \in E$. Contradição, pois, $a \in X \setminus E$.

Entretanto, toda essa contradição veio da suposição de que os problemas (2.11) admitiam solução. Portanto, está provada a segunda parte do lema. $\square$

Lema 2.4. *Seja $\omega \in \Omega$ e $\epsilon > 0$. Então*

$$\sup_{t \geq \epsilon} \frac{\omega(t)}{t} \leq \frac{2\omega(\epsilon)}{\epsilon}. \tag{2.12}$$

Prova. Seja $t \geq \epsilon$. Então podemos escrever t da forma $t = \kappa\epsilon + \rho$, onde $\kappa \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \rho < \epsilon$.

Como ω é crescente e $\omega(t+s) \leq \omega(t) + \omega(s)$ temos

$$\frac{\omega(t)}{t} \leq \frac{\kappa\omega(\epsilon) + \omega(\rho)}{\kappa\epsilon} \leq \frac{(\kappa+1)\omega(\epsilon)}{\kappa\epsilon} \leq \frac{2\omega(\epsilon)}{\epsilon}.$$

Portanto, $\sup_{t \geq \epsilon} \frac{\omega(t)}{t} \leq \frac{2\omega(\epsilon)}{\epsilon}$. $\square$

Lema 2.5. *Seja $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função contínua, crescente e limitada, satisfazendo (2.12), $\omega(0) = 0$ e $\int_0^1 \frac{dt}{\omega(t)} < \infty$. Seja também $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por*

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)}$$

e $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ a função inversa de ψ. Então $\gamma \in \Gamma$ e existe $C > 0$ tal que $\|f_2(t,x)\| \leq C$ e $\|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| \leq C\omega(\|x-y\|)$ para quaisquer $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$, onde a função f_2 é a definida em (2.9).

Prova. Como $\omega(0) = 0$ e ω é crescente temos que $\omega(t) > 0$ para $t > 0$. Logo, γ é de classe C^1 em $(0, +\infty)$. Resta analisarmos em $t = 0$. Sabemos que vale a seguinte relação.

$$\gamma'(y) = \frac{1}{\psi'(x)}$$

onde $y = \psi(x)$. Queremos saber o que acontece quando $y \to 0$.

Quando $y \to 0$ temos $x \to 0$. Sabendo que $\psi'(x) = \frac{1}{\omega(x)}$ e ω é contínua, temos que $\psi'(x) \to +\infty$ quando $x \to 0$. Logo, $\gamma'(y) \to 0$, ou seja, γ é continuamente diferenciável em $[0, +\infty]$. Portanto, γ é de classe C^1 em $[0, +\infty]$.

Pela regra da cadeia temos que

$$\gamma^{'}(s) = \omega(\gamma(s)).$$

Logo, como γ é a inversa de ψ, temos $\gamma(0) = \gamma^{'}(0) = 0$. Portanto, $\gamma \in \Gamma$.

A última relação também nos diz que $\gamma^{'}$ é limitada. Pelo Lema 2.1, $\|\Phi(x)\| \leq A$ e $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq A\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$, onde $A = \max\{2, 3c\}$. Portanto f_2 é limitada.

Seja $\epsilon > 0,\ t \in \mathbb{R}$ e x, y $\in$ X tais que $\|x - y\| \leq \epsilon$. Temos que mostrar que $\|f_2(t, x) - f_2(t, y)\| \leq C\omega(\epsilon)$ para alguma constante C positiva. Existem três casos a considerar: $|t| \leq \psi(\epsilon),\ t > \psi(\epsilon)$ e t $< -\psi(\epsilon)$.

Caso 1: $|t| \leq \psi(\epsilon)$.

Usando as definições de f_2 e γ e a inequação $\|\Phi(x)\| \leq A$ temos

$$\begin{aligned}
\|f_2(t, x) - f_2(t, y)\| &= \|\gamma^{'}(|t|)\Phi(\frac{x(t)}{\gamma(|t|)}) - \gamma^{'}(|t|)\Phi(\frac{y(t)}{\gamma(|t|)})\| \\
&\leq \gamma^{'}(|t|)\|\Phi(\frac{x(t)}{\gamma(|t|)})\| + \gamma^{'}(|t|)\|\Phi(\frac{y(t)}{\gamma(|t|)})\| \\
&\leq 2A\gamma^{'}(|t|) \\
&\leq 2A\gamma^{'}(\psi(\epsilon)) = 2A\omega(\epsilon)
\end{aligned}$$

$\therefore \|f_2(t, x) - f_2(t, y)\| \leq 2A\omega(\epsilon)$.

Caso 2: $t > \psi(\epsilon)$.

Usando as definições de f_2, γ e a inequação $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq A\|x - y\|$ temos

$$\begin{aligned}
\|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| &= \|\gamma^{'}(t)\Phi(\frac{x}{\gamma(t)}) - \gamma^{'}(t)\Phi(\frac{y}{\gamma(t)})\| \\
&= \gamma^{'}(t)\|\Phi(\frac{x}{\gamma(t)}) - \Phi(\frac{y}{\gamma(t)})\| \\
&\leq \frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t)}A\|x - y\| \\
&\leq \frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t)}A\epsilon \\
&\leq A\epsilon \sup_{t \geq \psi(\epsilon)} \frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t)} \\
&= A\epsilon \sup_{s \geq \epsilon} \frac{\gamma^{'}(\psi(s))}{\gamma(\psi(s))} \\
&= A\epsilon \sup_{s \geq \epsilon} \frac{\omega(s)}{s} \\
&\leq 2A\omega(\epsilon)
\end{aligned}$$

$\therefore \|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| \leq 2A\omega(\epsilon)$.

Caso 3: $t < -\psi(\epsilon)$. De modo análogo ao Caso 2, temos:

$$\begin{aligned}
\|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| &= \|\gamma^{'}(-t)\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-t)}) - \gamma^{'}(-t)\Phi(\frac{y-a}{\gamma(-t)})\| \\
&= \gamma^{'}(-t)\|\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-t)}) - \Phi(\frac{y-a}{\gamma(-t)})\| \\
&\leq \frac{\gamma^{'}(-t)}{\gamma(-t)}A\|x - y\| \\
&\leq \frac{\gamma^{'}(-t)}{\gamma(-t)}A\epsilon \\
&\leq A\epsilon \sup_{-t \geq \psi(\epsilon)} \frac{\gamma^{'}(-t)}{\gamma(-t)} \\
&= A\epsilon \sup_{s \geq \epsilon} \frac{\gamma^{'}(\psi(s))}{\gamma(\psi(s))} \\
&= A\epsilon \sup_{s \geq \epsilon} \frac{\omega(s)}{s} \\
&\leq 2A\omega(\epsilon)
\end{aligned}$$

Em qualquer caso, temos $\|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| \le 2A\omega(\epsilon)$. Como ω é crescente e $\|x-y\| \le \epsilon$, temos $\|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| \le 2A\omega(\|x-y\|)$.

Portanto, $\|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| \le C\omega(\|x-y\|)$, onde $C = 2A$. $\square$

Lema 2.6. *Seja $\omega \in \tilde{\Omega}$, satisfazendo $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t\omega(t)}} < \infty$. Seja também $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$*

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau\omega(\tau)}}$$

e $\gamma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ a função inversa de ψ. Então $\gamma \in \Gamma$ e existe $C > 0$ tal que $\|f_3(t,x)\| \le C$, $\|f_3(t,x) - f_3(t,y)\| \le C\sqrt{\|x-y\|\omega(\|x-y\|)}$ e $\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| \le C\omega(|t-s|)$ para quaisquer $t,s \in \mathbb{R}$, $x,y \in X$, onde a função f_3 é a definida em (2.10).

Prova. Seja $\omega_1(t) = \sqrt{t\omega(t)}$, $\omega_2(t) = \omega_1(t)$ para todo $t \in [0,2]$ e $\omega_2(t) = \omega_1(2)$ para $t > 2$. Então, ω_2 é limitada, pois, ω é contínua, $[0,2]$ é compacto e para $t > 2$ ω_2 é constante. Logo, ω_2 é limitada e satisfaz $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\tau}{\omega_2(\tau)} < \infty$. Pelo Lema 2.4 temos que ω_2 satizfaz (2.12).

De acordo com o Lema 2.5 existe $C_1 > 0$ tal que $\|f_2^*(t,x)\| \le C_1$, $\|f_2^*(t,x) - f_2^*(t,y)\| \le C_1\omega_2(\|x-y\|)$ para quaisquer $x,y \in X, t \in \mathbb{R}$, onde f_2^* é definida em (2.9) com γ^* sendo a função inversa de

$$\psi^*(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\omega_2(\tau)}.$$

Como $\omega_2(t) = \omega_1(t)$ para todo $t \in [0,2]$, temos que $\gamma^*(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0,2]$ e $\alpha(s) = 0$ para $s > 2$. Temos então

$$f_3(t,x) = \alpha(\|x\|)\alpha(|t|)f_2(t,x) = \alpha(\|x\|)\alpha(|t|)f_2^*(t,x).$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$, onde f_2 é a função definida em (2.9). Como α é limitada, f_3 também é limitada. Como α é lipschitziana com constante 1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|f_3(t,x) - f_3(t,y)\| &= \|\alpha(\|x\|)\alpha(|t|)f_2^*(t,x) - \alpha(\|x\|)\alpha(|t|)f_2^*(t,y)\| \\
&= \alpha(|t|)\|\alpha(\|x\|)f_2^*(t,x) - \alpha(\|x\|)f_2^*(t,y)\| \\
&\leq \|\alpha(\|x\|)f_2^*(t,x) - \alpha(\|x\|)f_2^*(t,y)\| \\
&\leq \alpha(\|x\|)\|f_2^*(t,x) - f_2^*(t,y)\| + |\alpha(\|x\|) - \alpha(\|y\|)|\|f_2^*(t,y)\| \\
&\leq C_1\omega_2(\|x-y\|) + C_1\|x-y\|
\end{aligned}$$

Como $t = o(\omega_2(t))$ $(t \to 0)$ e f_3 é limitada temos que existe $C_2 > 0$ tal que

$\|f_3(t,x) - f_3(t,y)\| \leq C_2\omega_2(\|x-y\|) \leq C_2\omega_1(\|x-y\|)$ para quaisquer $t \in \mathbb{R}, x, y \in X$.

Portanto, $\|f_3(t,x) - f_3(t,y)\| \leq C_2\sqrt{\|x-y\|\omega(\|x-y\|)}$.

De acordo com o Lema 2.1 existe $A > 0$ tal que $\|\Phi(x)\| \leq A$ e $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq A\|x-y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

Seja $x \in X$, arbitrário, $t, s \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in (0,1]$ e $|t-s| \leq \epsilon$. Como f_3 é limitada, é suficiente mostrar que existe uma constante C positiva tal que $\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| \leq C\omega(\epsilon)$.

Pela definição de γ temos que $\gamma'(\psi(t)) = \sqrt{t\omega(t)}$. Como $\omega \in \tilde{\Omega}$, ω é diferenciável em $(0,+\infty)$. Então γ é duas vezes diferenciável em $(0,+\infty)$ e

$$\gamma''(\psi(t)) = \frac{1}{2}\omega(t) + \frac{1}{2}t\omega'(t). \tag{2.13}$$

Como $\omega \in \tilde{\Omega}$ e γ'' é contínua, temos que γ'' é limitada em $(0, T)$ para qualquer $T > 0$. Portanto, γ' é lipschitziana em $[0, T]$ para qualquer $T > 0$. Então existe $C_3 > 0$ tal que $|\gamma'(u) - \gamma'(v)| \leq C_3|u - v|$, para quaisquer $u, v \in [0, 3]$.

Como γ' é contínua, existe $C_4 > 0$ tal que $|\gamma'(u)| \leq C_4$ para qualquer $u \in [0, 3]$. Existem quatros casos a considerar:

Caso 1: $\|x\| \geq 2$ ou $\max\{|t|, |s|\} \geq 3$.

Então $\alpha(\|x\|) = 0$ ou $\alpha(|t|) = \alpha(|s|) = 0$. Portanto, $\|f_3(t, x) - f_3(s, x)\| = 0$.

Caso 2:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \|x\| & < & 2 \\ \max\{|t|, |s|\} & \leq & 3 \\ \min\{|t|, |s|\} & \leq & \psi(\epsilon) \end{array}\right. \quad ou \quad \left\{\begin{array}{ccc} \|x\| & < & 2 \\ \max\{|t|, |s|\} & \leq & 3 \\ t.s & \leq & 0 \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Usando as definições de f_3 e a inequação $\|\Phi(x)\| \leq A$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f_3(t, x) - f_3(s, x)\| &= \|\alpha(\|x\|)\alpha(|t|)\gamma'(|t|)\Phi(\frac{x(t)}{\gamma(|t|)}) - \alpha(\|x\|)\alpha(|s|)\gamma'(|s|)\Phi(\frac{x(t)}{\gamma(|s|)})\| \\ &\leq A\gamma'(|t|) + A\gamma'(|s|) \\ &= A(\gamma'(|t|) + \gamma'(|s|)) \end{aligned}$$

Como $\min\{|t|, |s|\} \leq \psi(\epsilon)$ e γ' é crescente, temos

$$\begin{gathered} |t| \leq \psi(\epsilon) + \epsilon \\ \gamma'(|t|) \leq \gamma'(\psi(\epsilon) + \epsilon) \\ \gamma'(|s|) \leq \gamma'(\psi(\epsilon) + \epsilon) \end{gathered}$$

Então,

$$\begin{aligned} A(\gamma'(|t|) + \gamma'(|s|)) &\leq 2A\gamma'(\psi(\epsilon) + \epsilon) \\ &\leq 2A\omega_1(\epsilon) + 2AC_3\epsilon \end{aligned}$$

Como $s + \omega_1(s) = o(\omega(s))$ $(s \to 0)$ e f_3 é limitada, existe $C_5 > 0$ tal que $\|f_3(t, x) - f_3(s, x)\| \leq C_5\omega(\epsilon)$.

Caso 3:

$$\begin{cases} \|x\| & < & 2 \\ \max\{|t|,|s|\} & < & 2 \\ \min\{|t|,|s|\} & > & \psi(\epsilon) \end{cases} \tag{2.15}$$

Sem perda de generalidade vamos assumir que $t \leq s$. Usando as definições de f_3 e γ, a inequação $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq A\|x - y\|$, a formula(2.12), e o fato de que $\gamma^{'}$ é crescente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| = \\
&= \|\alpha(\|x\|)\alpha(t)\gamma^{'}(t)\Phi(\frac{x}{\gamma(t)}) - \alpha(\|x\|)\alpha(s)\gamma^{'}(s)\Phi(\frac{x}{\gamma(s)})\| \\
&\leq \|\alpha(t)\gamma^{'}(t)\Phi(\frac{x}{\gamma(t)}) - \alpha(t)\gamma^{'}(t)\Phi(\frac{x}{\gamma(s)}) + \alpha(t)\gamma^{'}(t)\Phi(\frac{x}{\gamma(s)}) - \alpha(s)\gamma^{'}(s)\Phi(\frac{x}{\gamma(s)})\| \\
&= \|\alpha(t)\gamma^{'}(t)(\Phi(\frac{x}{\gamma(t)}) - \Phi(\frac{x}{\gamma(s)})) + \Phi(\frac{x}{\gamma(s)})(\alpha(t)\gamma^{'}(t) - \alpha(s)\gamma^{'}(s))\| \\
&= \|\alpha(t)\gamma^{'}(t)(\Phi(\frac{x}{\gamma(t)}) - \Phi(\frac{x}{\gamma(s)})) + \Phi(\frac{x}{\gamma(s)})((\alpha(t) - \alpha(s))\gamma^{'}(t) + \alpha(s)(\gamma^{'}(t) - \gamma^{'}(s)))\| \\
&\leq \alpha(t)\gamma^{'}(t)A\|\frac{x}{\gamma(t)} - \frac{x}{\gamma(s)}\| + \gamma^{'}(t)\|\Phi(\frac{x}{\gamma(s)})\||\alpha(t) - \alpha(s)| + \alpha(s)\|\Phi(\frac{x}{\gamma(s)})\||\gamma^{'}(t) - \gamma^{'}(s)| \\
&\leq A\gamma^{'}(t)\|x\||\frac{1}{\gamma(t)} - \frac{1}{\gamma(s)}| + AC_4|t-s| + AC_3|t-s| \\
&\leq 2A\frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t)\gamma(s)}|t-s| \sup_{\tau\in[t,s]} \gamma^{'}(\tau) + A(C_3 + C_4)\epsilon \\
&\leq 2A\frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t)}.\frac{\gamma^{'}(s)}{\gamma(s)}\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon \\
&\leq 2A(\sup_{u\geq\epsilon} \frac{\gamma^{'}(\psi(u))}{\gamma(\psi(u))})^2\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon \\
&= 2A(\sup_{u\geq\epsilon} \frac{\sqrt{u\omega(u)}}{u})^2\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon = 2A\sup_{u\geq\epsilon}(\frac{\sqrt{u\omega(u)}}{u})^2\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon \\
&= 2A\sup_{u\geq\epsilon}(\frac{\omega(u)}{u})\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon \\
&\leq 4A\omega(\epsilon) + A(C_3 + C_4)\epsilon
\end{aligned}$$

Como $u = o(\omega(u))$ $(u \to 0)$ e f_3 é limitada, existe $C_6 > 0$ tal que $\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| \leq C_6\omega(\epsilon)$.

Caso 4:

$$\begin{cases} \|x\| & < & 2 \\ \max\{|t|,|s|\} & < & 2 \\ \max\{|t|,|s|\} & < & -\psi(\epsilon) \end{cases} \tag{2.16}$$

Sem perda de generalidade vamos assumir que $t \geq s$. De modo análogo ao Caso 3, obtemos

$$\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| =$$
$$= \| - \alpha(\|x\|)\alpha(-t)\gamma^{'}(-t)\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-t)}) + \alpha(\|x\|)\alpha(-s)\gamma^{'}(-s)\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})\|$$
$$\leq \| - \alpha(-t)\gamma^{'}(-t)\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-t)}) + \alpha(-t)\gamma^{'}(-t)\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)}) + \alpha(-t)\gamma^{'}(-t)\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})$$
$$- \alpha(-s)\gamma^{'}(-s)\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})\|$$
$$= \|\alpha(-t)\gamma^{'}(-t)(\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-t)}) - \Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})) + \Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})(\alpha(-t)\gamma^{'}(-t) - \alpha(-s)\gamma^{'}(-s))\|$$
$$= \|\alpha(-t)\gamma^{'}(-t)(\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-t)}) - \Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})) + \Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})((\alpha(-t)-\alpha(-s))\gamma^{'}(-t) + \alpha(-s)(\gamma^{'}(-t) -$$
$$\gamma^{'}(-s)))\|$$
$$\leq \alpha(-t)\gamma^{'}(-t)A\|\frac{x-a}{\gamma(-t)} - \frac{x-a}{\gamma(-s)}\| + \gamma^{'}(-t)\|\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})\||\alpha(-t) - \alpha(-s)|$$
$$+ \alpha(-s)\|\Phi(\frac{x-a}{\gamma(-s)})\||\gamma^{'}(-t) - \gamma^{'}(-s)|$$
$$\leq A\gamma^{'}(-t)\|x-a\||\frac{1}{\gamma(-t)} - \frac{1}{\gamma(-s)}| + AC_4|t-s| + AC_3|t-s|$$
$$\leq 3A\frac{\gamma^{'}(-t)}{\gamma(-t)\gamma(-s)}|t-s| \sup_{\tau\in[-t,-s]} \gamma^{'}(\tau) + A(C_3 + C_4)\epsilon$$
$$\leq 3A\frac{\gamma^{'}(-t)}{\gamma(-t)}.\frac{\gamma^{'}(-s)}{\gamma(-s)}\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon$$
$$\leq 3A(\sup_{u\geq\epsilon} \frac{\gamma^{'}(\psi(u))}{\gamma(\psi(u))})^2\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon$$
$$= 3A(\sup_{u\geq\epsilon} \frac{\sqrt{u\omega(u)}}{u})^2\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon$$
$$= 3A\sup_{u\geq\epsilon}(\frac{\sqrt{u\omega(u)}}{u})^2\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon$$
$$= 3A\sup_{u\geq\epsilon}(\frac{\omega(u)}{u})\epsilon + A(C_3 + C_4)\epsilon$$
$$\leq 6A\omega(\epsilon) + A(C_3 + C_4)\epsilon$$

Como $u = o(\omega(u))$ $(u \to 0)$ e f_3 é limitada, existe $C_7 > 0$ tal que $\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| \leq C_7\omega(\epsilon)$

Portanto, em qualquer caso

$$\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| \leq C\omega(\|x-y\|)$$

onde $C = \max\{C_5, C_6, C_7\}$. $\square$

Capítulo 3

Lemas Principais

Por Ξ denotaremos o conjunto de pares (ω_1, ω_2) de funções contínuas, crescentes e não-negativas em $[0, +\infty)$ tais que para qualquer $X \in U$ e qualquer $\epsilon > 0$ existe uma função $f : \mathbb{R} \times X \to X$ satisfazendo as seguintes condições:
(i) $\|f(t,x)\| \leq 1$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$;
(ii) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega_1(\epsilon\|x - y\|)$ para todo $x, y \in X, t \in \mathbb{R}$;
(iii) $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq \omega_2(|t - s|)$ para todo $x \in X, t, s \in \mathbb{R}$;
(iv) Para $t_0 = 0$ e qualquer $x_0 \in X$ com $\|x_0\| < 1$, o problema de Cauchy $x^{'}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$ não possui solução em nenhuma vizinhança do 0.

Lema 3.1. *Seja $X \in W$ e $(\omega_1, \omega_2) \in \Xi$. Então existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que*
(i) $\|f(t,x)\| \leq 1$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$;
(ii) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega_1(\|x - y\|)$ para todo $x, y \in X,\ t \in \mathbb{R}$;
(iii) $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq \omega_2(|t - s|)$ para todo $x \in X,\ t, s \in \mathbb{R}$;
(iv) A equação diferencial $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ não possui solução em nenhum intervalo de $\mathbb{R}$.

Prova. De acordo com a definição da classe W existe um subespaço complementado $Y \subset X$ com uma base de Schauder incondicional $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como Y é complementado, existe uma projeção liner contínua $P : X \to Y$. Escolha conjuntos infinitos

$A_k \subset \mathbb{N}$ $(k \in \mathbb{N})$ dois a dois disjuntos e sejam Y_k e Z_k os subespaços gerados, fechados, dos conjuntos $\{e_j : j \in A_k\}$ e $\{e_j : j \notin A_k\}$ respectivamente.

De acordo com a definição de base de Schauder incondicional podemos escrever o conjunto Y da forma $Y = Y_k \oplus Z_k$ para qualquer k e $\sup\{\|P_k\| : k \in \mathbb{N}\} < +\infty$, onde as P_k são projeções lineares sobrejetivas de Y ao longo de Z_k em Y_k.

Escolha $q > 0$ tal que

$$\|P_k\|.\|P\| \leq \frac{1}{q} \text{ para qualquer k } \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Como $\{e_n : n \in A_k\}$ é uma base de Schauder incondicional em Y_k, temos que $Y_k \in U$.

De acordo com a definição de Ξ, existem funções contínuas $g_k : \mathbb{R} \times Y_k \to Y_k$ tal que

(i) $\|g_k(t, x)\| \leq 1$;

(ii) $\|g_k(t, x) - g_k(t, y)\| \leq \omega_1(q\|x - y\|)$;

(iii) $\|g_k(t, x) - g_k(s, x)\| \leq \omega_2(|t - s|)$ para quaisquer $x, y \in Y_k$, $t, s \in \mathbb{R}$;

(iv) para qualquer $x_0 \in Y_k$ com $\|x_0\| < 1$, o problema de Cauchy $x'(t) = g_k(t, x), x(0) = x_0$ não possui soluções em nenhuma vizinhança de 0.

Vamos definir a seguinte função $f : \mathbb{R} \times X \to X$ pela seguinte fórmula

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g_k(2^{-k}(t - q_k), P_k P(x)) \tag{3.2}$$

onde $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência densa em $\mathbb{R}$. Resta mostrar que f satisfaz todas as propriedades do Lema 3.1.

(i) $\|f(t, x)\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g_k(2^{-k}(t-q_k), P_k P(x))\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |2^{-k}| \|g_k(2^{-k}(t-q_k), P_k P(x))\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |2^{-k}| = 1$

(ii) $\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g_k(2^{-k}(t-q_k), P_k P(x)) - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g_k(2^{-k}(t-q_k), P_k P(y))\|$

Sejam $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ e $\|x - y\| \leq \epsilon$. De acordo com (3.1) temos $\|P_k P(x) - P_k P(y)\| \leq \|P_k\| \|P\| \|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{q}$

Como $\|g_k(t, x) - g_k(t, y)\| \leq \omega_1(q\|x - y\|)$, temos que

$\|2^{-k}g_k(2^{-k}(t-q_k), P_kP(x)) - 2^{-k}g_k(2^{-k}(t-q_k), P_kP(y))\| \leq 2^{-k}\omega_1(\epsilon)$.

Então $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\omega_1(\epsilon) = \omega_1(\epsilon)$, para $\|x-y\| \leq \epsilon$.

Logo, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega_1(\|x-y\|)$, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.

(iii) $\|f(t,x) - f(s,x)\| = \|\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}g_k(2^{-k}(t-q_k), P_kP(x)) - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}g_k(2^{-k}(s-q_k), P_kP(x))\|$

Sejam $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in X$, $\epsilon > 0$ e $|t-s| \leq \epsilon$.

Como $\|g_k(t,x) - g_k(s,x)\| \leq \omega_2(|t-s|)$, temos que

$\|2^{-k}g_k(2^{-k}(t-q_k), P_kP(x)) - 2^{-k}g_k(2^{-k}(s-q_k), P_kP(x))\| \leq 2^{-k}\omega_2(2^{-k}|t-s|) \leq 2^{-k}\omega_2(2^{-k}\epsilon) \leq 2^{-k}\omega_2(\epsilon)$.

Então $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\omega_2(\epsilon) = \omega_2(\epsilon)$, para $|t-s| \leq \epsilon$.

Logo, $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq \omega_2(|t-s|)$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

(iv) Resta mostrar que a equação $x'(t) = f(t, x(t))$ não possui solução em nenhum intervalo de $\mathbb{R}$. Suponha que $b < c$, $x : [b,c] \to X$ e $x'(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in [b,c]$.

Aplicando P_kP em ambos os membros da equação e usando (3.2) obtemos que

$\dfrac{d}{dt}P_kP(x(t)) = 2^{-k}g_k(2^{-k}(t-q_k), P_kP(x(t)))$ para todo $t \in (b,c)$.

Assim, $y_k' = g_k(t, y_k(t))$ para todo $t \in (2^{-k}(b-q_k), 2^{-k}(c-q_k))$, onde $y_k(t) = P_kP(x(2^kt + q_k))$. Como a sequência $\{q_k\}$ é densa em $\mathbb{R}$, o conjunto $\Lambda = \{n \in \mathbb{N} : q_n \in (b,c)\}$ é infinito.

Temos $S_k = \sup\{\|P_kP(x(t))\| : t \in [b,c]\} \to 0$. De fato,

$\|P_kP(x(t))\| = \| \int_b^c 2^{-k}g_k(2^{-k}(t-q_k), P_kP(x(t)))dt\| \leq \int_b^c \|2^{-k}g_k(2^{-k}(t-q_k), P_kP(x(t)))\|dt \leq 2^{-k}(c-b)$

$\therefore 0 \leq S_k \leq 2^{-k}(c-b)$. Quando $k \to +\infty$ temos $S_k \to 0$.

Portanto, existe $k \in \Lambda$ tal que $S_k < 1$. Para este k a função $y_k(t)$ é a solução da equação $y'(t) = g_k(t, y(t))$ em alguma vizinhança do zero e $\|y(0)\| = \|P_kP(x(q_k))\| \leq S_k < 1$, o que é uma contradição com a propriedade (iv) da definição de g_k.

Portanto, a equação $x'(t) = f(t, x(t))$ não possui solução em nenhum intervalo de $\mathbb{R}$.

$\square$

Lema 3.2. *Seja* $X \in U$*,* $\omega_1 \in \Omega$*, com* $\int_0^1 \frac{dt}{\omega_1(t)} < +\infty$*, e* $\omega_2(t) = 2$ *para todo* $t \in [0, +\infty)$*. Então* $(\omega_1, \omega_2) \in \Xi$*.*

Prova. Sem perda de generalidade vamos assumir que ω_1 é limitada. Pelo Lema 2.4 temos que ω_1 satisfaz as condições do Lema 2.5. Assim, pelos Lemas 2.3 e 2.5, existe $C > 0$ e uma função contínua $f_2 : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que

(i) $\|f_2(t, x)\| \leq C$;

(ii) $\|f_2(t, x) - f_2(t, y)\| \leq C\omega_1(\|x - y\|)$ para quaisquer $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$;

(iii) O problema de Cauchy $x^{'}(t) = f_2(t, x)$, $x(0) = x_0$ não possui solução em nenhuma vizinhança do zero para qualquer $x_0 \in X$, com $\|x_0\| < 1$.

Seja $c_1 > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < c_1$, e $\epsilon = \frac{1}{nC}$.

Considere a função $f : \mathbb{R} \times X \to X$ definida por $f(t, x) = \epsilon f_2(\epsilon t, x)$.

Então, f é contínua, pois f_2 é contínua e valem as seguintes propriedades:

(i) $\|f(t, x)\| = \|\epsilon f_2(\epsilon t, x)\| = \epsilon\|f_2(\epsilon t, x)\| \leq \epsilon C = \frac{1}{n} \leq 1$;

(ii) $\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|\epsilon f_2(\epsilon t, x) - \epsilon f_2(\epsilon t, y)\| = \epsilon\|f_2(\epsilon t, x) - f_2(\epsilon t, y)\| \leq \epsilon C\omega_1(\|x - y\|) = \frac{1}{n}\omega_1(\|x - y\|) \leq \omega_1(\frac{\|x - y\|}{n}) \leq \omega_1(c_1\|x - y\|)$;

(iii) $\|f(t, x) - f(s, x)\| = \|\epsilon f_2(\epsilon t, x) - \epsilon f_2(\epsilon s, x)\| \leq \epsilon\|f_2(\epsilon t, x)\| + \epsilon\|f_2(\epsilon s, x)\| \leq 2\epsilon C \leq \frac{2}{n} \leq 2 = \omega_2(t)$ para qualquer $t \in [0, +\infty]$;

(iv) Além disso, x é uma solução da equação $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ se, e somente se $x(t) = y(\epsilon t)$, onde y é uma solução da equação $y^{'}(t) = f_2(t, y(t))$. Logo, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

não possui solução em nenhuma vizinhança do zero para qualquer $x_0 \in X$, com $\|x_0\| < 1$.

Portanto, $(\omega_1, \omega_2) \in \Xi$. $\square$

Lema 3.3. *Seja $X \in U$, $\omega_2 \in \tilde{\Omega}$, com $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t\omega_2(t)}} < +\infty$, e $\omega_1(t) = \sqrt{t\omega_2(t)}$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Então $(\omega_1, \omega_2) \in \Xi$.*

Prova. Seja $\omega_1(t) = \sqrt{t\omega_2(t)}$. De acordo com os Lemas 2.3 e 2.6 existe $C > 0$ e uma função contínua $f_3 : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que

(i) $\|f_3(t,x)\| \leq C$;

(ii) $\|f_3(t,x) - f_3(t,y)\| \leq C\omega_1(\|x-y\|)$ para quaisquer $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$;

(iii) $\|f_3(t,x) - f_3(s,x)\| \leq C\omega_2(|t-s|)$

(iv) O problema de Cauchy $x^{'}(t) = f_3(t,x)$, $x(0) = x_0$ não possui solução em nenhuma vizinhança do zero para qualquer $x_0 \in X$, com $\|x_0\| < 1$.

Seja $c_1 > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < c_1$, e $\epsilon = \dfrac{1}{nC}$.

Considere a função $f : \mathbb{R} \times X \to X$ definida por $f(t,x) = \epsilon f_3(\epsilon t, x)$.

Então, f é contínua, pois f_3 é contínua e valem as seguintes propriedades:

(i) $\|f(t,x)\| = \|\epsilon f_3(\epsilon t, x)\| = \epsilon\|f_3(\epsilon t,x)\| \leq \epsilon C = \dfrac{1}{n} \leq 1$;

(ii) $\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|\epsilon f_3(\epsilon t,x) - \epsilon f_3(\epsilon t,y)\| = \epsilon\|f_3(\epsilon t,x) - f_3(\epsilon t,y)\| \leq \epsilon C\omega_1(\|x - y\|) = \dfrac{1}{n}\omega_1(\|x-y\|) \leq \omega_1(\dfrac{\|x-y\|}{n}) \leq \omega_1(c_1\|x-y\|)$;

(iii) $\|f(t,x) - f(s,x)\| = \|\epsilon f_3(\epsilon t,x) - \epsilon f_3(\epsilon s,x)\| \leq \epsilon\|f_3(\epsilon t,x) - f_3(\epsilon s,x)\| \leq \epsilon C\omega_2(\epsilon|t - s|) = \dfrac{1}{n}\omega_2(\epsilon|t-s|) \leq \omega_2(\epsilon|t-s|)$

Como $\epsilon = \dfrac{1}{nC}$ e $C \geq 2A \geq 4$, temos $\epsilon \leq 1$.

Logo, $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq \omega_2(|t-s|)$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

(iv) Além disso, x é uma solução da equação $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ se, e somente se $x(t) = y(\epsilon t)$, onde y é uma solução da equação $y^{'}(t) = f_3(t, y(t))$. Logo, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= f(t,x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

não possui solução em nenhuma vizinhança do zero para qualquer $x_0 \in X$, com $\|x_0\| < 1$.

Portanto, $(\omega_1, \omega_2) \in \Xi$. $\square$

Capítulo 4

Resultados Principais

Teorema 4.1. *(Shkarin - 2003) Seja* $X \in W$*,* $\omega \in \Omega$ *e* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\omega(t)} < +\infty$*. Então existe* $f \in L_\omega(X)$ *tal que a equação diferencial* $x'(t) = f(t, x(t))$ *não possui solução em nenhum intervalo da reta real.*

Prova. Como $X \in W$ temos que X contém um espaço $Y \in U$ tal que Y é subespaço complementado de X. Pelo Lema 3.2, o par $(\omega, 2) \in \Xi$. Pelo Lema 3.1, existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que

(i) $\|f(t,x)\| \leq 1$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$;

(ii) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega(\|x-y\|)$ para todo $x, y \in X,\ t \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq 2$ para todo $x \in X,\ t, s \in \mathbb{R}$;

(iv) A equação diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ não possui solução em nenhum intervalo de $\mathbb{R}$. $\square$

Obs.: Os espaços L_p, $1 \leq p < +\infty$, são exemplos de espaços de Banach contendo subespaço complementado com base de Schauder incondicional.

Teorema 4.2. *(Shkarin - 2003) Seja $X \in W$, $\omega \in \tilde{\Omega}$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t\omega(t)}} < +\infty$. Então existe $f : X \to X$ tal que*

(i) $\|f(x) - f(y)\| \leq \omega(\|x - y\|)$ para todo $x, y \in X$;

(ii) A equação $x' = f(x)$ não possui solução em nenhum intervalo da reta real.

Prova. Seja $e \in X$ com $\|e\| = 1$. De acordo com o Teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear contínuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(e) = 1$. É claro que $Y = Ker\varphi \in W$. Escolha $q > 0$ tal que $2\omega_1(t) + \omega_2(t) \leq \omega(t)$ para todo $t \geq 0$, onde $\omega_2(t) = q\min\{\omega(t), 1\}$ e $\omega_1(t) = \sqrt{t\omega_2(t)}$.

Claramente $\omega_2 \in \Omega$ e para qualquer $t \geq 0$ temos

$$\omega_1(2t) = \sqrt{2t\omega_2(2t)} \leq \sqrt{4t\omega_2(t)} = 2\sqrt{t\omega_2(t)} = 2\omega_1(t). \tag{4.1}$$

De acordo com o Lema 3.3 o par $(\omega_1, \omega_2) \in \Xi$. Pelo Lema 3.1 existe uma função contínua $g : \mathbb{R} \times Y \to Y$ tal que

(i) $\|g(t, x)\| \leq 1$;

(ii) $\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq \omega_1(\|x - y\|)$;

(iii) $\|g(t, x) - g(s, x)\| \leq \omega_2(|t - s|)$ para quaisquer $x, y \in Y$ e $t, s \in \mathbb{R}$;

(iv) A equação diferencial $y'(t) = g(t, y(t))$ não possui solução em nenhum intervalo da reta real.

Considere a função $f : X \to X$ dada por

$$f(x) = e + g(\varphi(x), x - \varphi(x)e) \tag{4.2}$$

Seja $\epsilon > 0$, $x, y \in X$, $\|x - y\| \leq \epsilon$. Então, usando (4.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\|f(x)-f(y)\| &= \|g(\varphi(x), x-\varphi(x)e) - g(\varphi(y), y-\varphi(y)e)\| \\
&\leq \|g(\varphi(x), x-\varphi(x)e) - g(\varphi(x), y-\varphi(y)e)\| \\
&+ \|g(\varphi(x), y-\varphi(y)e) - g(\varphi(y), y-\varphi(y)e)\| \\
&\leq \omega_1(\|x-y-(\varphi(x)-\varphi(y))e\|) + \omega_2(|\varphi(x)-\varphi(y)|) \\
&\leq \omega_1(\|x-y\| + \|(\varphi(x)-\varphi(y))e\|) + \omega_2(\|x-y\|) \\
&\leq \omega_1(2\|x-y\|) + \omega_2(\|x-y\|) \\
&\leq 2\omega_1(\|x-y\|) + \omega_2(\|x-y\|) \\
&\leq \omega(\|x-y\|)
\end{aligned}$$

$\therefore \|f(x)-f(y)\| \leq \omega(\|x-y\|)$.

Resta verificar que a equação $x' = f(x)$ não possui solução em nenhum intervalo real. Suponha que $x : (b,c) \to X$ é uma solução da equação $x' = f(x)$. Aplicando φ em ambos os membros da equação, obtemos $\dfrac{d}{dt}\varphi(x(t)) = 1$.

Portanto, $\varphi(x(t)) = t + a$, para alguma constante $a \in \mathbb{R}$. Seja $y : (b+a, c+a) \to Y$ dada por

$$y(t) = x(t-a) - \varphi(x(t-a))e \tag{4.3}$$

Então,

$$\begin{aligned}
y'(t) &= x'(t-a) - e \\
&= g(\varphi(x(t-a)), x(t-a) - \varphi(x(t-a))e) \\
&= g(t, y(t))
\end{aligned}$$

$\therefore y'(t) = g(t, y(t))$. Porém, isto contraria o fato de que a equação $y' = g(t,y)$ não possui solução.

Portanto, a equação diferencial $x' = f(x)$ não possui solução em nenhum intervalo da reta real. $\square$

Corolário 4.3. *Seja $X \in W$, $\alpha \in (0,1)$ e $\epsilon > 0$. Então existe $f : X \to X$ tal que*

(i) $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \|x - y\|^{\alpha}$ para quaisquer $x, y \in X$;

(ii) A equação $x' = f(x)$ não possui solução em nenhum intervalo da reta real.

Prova. Considere $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $\omega(t) = \epsilon t^{\alpha}$. Temos que $\omega \in \tilde{\Omega}$. Com efeito,

(i) ω é contínua e crescente em $[0, +\infty)$;

(ii) $\omega(0) = 0$ e $\omega(t + s) \leq \omega(t) + \omega(s)$;

(iii) ω é diferenciável em $(0, +\infty)$, pois, $\omega'(t) = \alpha \epsilon t^{\alpha - 1}$;

(iv) $\sup\limits_{t \in (0,T]} t\omega'(t) = \alpha \sup\limits_{t \in (0,T]} \omega(t) = \alpha \omega(T) < +\infty$, para qualquer $T > 0$.

Portanto, $\omega \in \tilde{\Omega}$. Também temos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t\omega(t)}} = \frac{2}{(1-\alpha)\sqrt{\epsilon}} < +\infty$.
Logo, pelo Teorema 4.2, existe uma função $f : X \to X$ tal que

(i) $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \|x - y\|^{\alpha}$ para quaisquer $x, y \in X$;

(ii) A equação $x' = f(x)$ não possui solução em nenhum intervalo da reta real. $\square$

Capítulo 5

Aplicação

Neste capítulo queremos estudar um tipo de genericidade de soluções relativo a Forma Fraca do Teorema de Peano para campos autônomos em espaços de Banach.
A fim de facilitar o entendimento, estabeleceremos algumas definições que serão importantes para o desenvolver deste capítulo.
Seja $(C(X), \mathcal{T}_{uc})$ o espaço localmente convexo de todos os campos vetoriais contínuos sobre X, munido com a topologia linear $\mathcal{T}_{uc}$ da convergência uniforme sobre conjuntos limitados.
Denote por $K(X)$ o subconjunto de $C(X)$ formado por todos os campos vetoriais contínuos para os quais a equação $u'(t) = f(u(t))$ não tem solução em qualquer instante.
Note que $K(X)$ não é necessariamente um espaço vetorial.
A questão central de nosso interesse é: Será que $K(X) \cup \{0\}$ contém algum espaço vetorial infinito-dimensional que seja $\mathcal{T}_{uc}$-fechado em $C(X)$? Isto nos leva à seguinte definição de genericidade algébrica

Definição 14. *Diremos que a propriedade de não-validade da Forma Fraca do Teorema de Peano é algebricamente genérica para $K(X)$ quando $K(X) \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial L de dimensão infinita e $\mathcal{T}_{uc}$-fechado.*

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 5.1. *(Barroso, Marrocos e Rebouças (2012)).*
Seja X um espaço de Banach contendo um subespaço complementado com base de Schauder incondicional. Então a propriedade da não validade da Forma Fraca do Teorema de Peano é algebricamente genérica para $K(X)$.

Prova. Esta prova utiliza um método conhecido como Técnica do Vetor Mãe. Por hipótese, X possui um subespaço complementado Y com base de Schauder incondicional $\{e_n, e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Como Y é complementado, existe uma projeção linear limitada $P : X \to Y$. Decomponha $\mathbb{N} = \bigcup_{i\geq 1} \mathbb{N}_i$, onde cada $\mathbb{N}_i$ tem cardinalidade $|\mathbb{N}_i| = \infty$ e $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Por convenção, escrevemos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$. Seja $Y_i = \overline{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}_i\}$. Defina para cada $i \in \mathbb{N}$ a $i-$ésima projeção $\pi_i : Y \to Y_i$ por

$$\pi_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (e_{\mathbb{N}_i}^*)_n(x) e_n, x \in Y \tag{5.1}$$

onde $(e_{\mathbb{N}_i}^*)_n(x) = e_n^*(x)$ se $n \in \mathbb{N}_i$ e $(e_{\mathbb{N}_i}^*)_n(x) = 0$ se $n \notin \mathbb{N}_i$. Como $\{e_n : n \in \mathbb{N}_i\}$ é uma base de Schauder incondicional para Y_i, segue que $\pi_i(x)$ está bem definido e $\sup \|\pi_i\| < \infty$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Também note que $Y_i = \pi_i(Y)$. Cumpre-nos mencionar que a construção feita acima é padrão e pode ser encontrada, por exemplo, em [16].
Agora fixe $\alpha \in (0, 1)$. Pelo Corolário 4.3, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $f_i : Y_i \to Y_i$ satisfazendo as condições (i) e (ii). Seja $h_i : X \to X$ um campo vetorial contínuo dado por

$$h_i(x) = f_i(\pi_i(P(x))), x \in X \tag{5.2}$$

Para cada $(a_n) \in l_1$, defina o campo vetorial $f_{(a_n)} : X \to X$ por

$$f_{(a_n)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x), x \in X. \tag{5.3}$$

um cálculo simples mostra que $f_{(a_n)} \equiv 0$ se, e só se $(a_n) = 0$.

Além disso, temos a seguinte relação

$$\|f_{(a_n)}(x) - f_{(a_n)}(y)\| \leq C\|x - y\|^{\alpha}, \forall x, y \in X \tag{5.4}$$

onde $C = (\sup_{i \in \mathbb{N}} \|\pi_i\| \|P\|)^{\alpha} \|(a_n)\|_{l_1}$.
Assim, é válida a seguinte proposição

Proposição 5.2. *A aplicação linear $T : l_1 \to C(X)$ dada por*

$$T((a_n)) = f_{(a_n)} \tag{5.5}$$

está bem definida, é injetiva e contínua.

Segue então da Proposição 5.2 que $T(l_1)$ é algebricamente isomorfo a l_1.

Afirmação 1. $T(l_1) \subset K(X) \cup \{0\}$.

De fato, seja $(a_n) \in l_1 \setminus \{0\}$. Então $a_m \neq 0$ para algum inteiro $m \geq 1$. Suponha que $T((a_n)) \notin K(X)$. Então existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que a EDO

$$u'(t) = f_{(a_n)}(u(t)) \tag{5.6}$$

tem uma solução u em I. Defina a função vetorial $v : I \to Y_m$ por $v(t) = (\pi_m \circ P)(u(\frac{t}{a_m}))$.

Vamos mostrar que

$$v'(t) = f_m(v(t)) \text{ para } t \in I.$$

De fato, seja $w(t) = P(u(\frac{t}{a_m}))$. Então $v(t) = \pi_m(w(t))$, e assim

$$\begin{aligned}
v'(t) &= \pi_m(w'(t)) \\
&= \pi_m(\frac{1}{a_m}P(u'(\frac{t}{a_m}))) \\
&= \pi_m(\frac{1}{a_m}P(f_{a_n}(u(\frac{t}{a_m})))) \\
&= \pi_m(\frac{1}{a_m}(f_{a_n}(u(\frac{t}{a_m})))) \\
&= \frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{\infty} a_j\pi_m(h_j(u(\frac{t}{a_m}))) \\
&= \pi_m(h_m(u(\frac{t}{a_m}))) \\
&= (h_m(u(\frac{t}{a_m}))) \\
&= f_m(\pi_m(P(u(\frac{t}{a_m})))) \\
&= f_m(v(t)).
\end{aligned}$$

Assim, $v'(t) = f_m(v(t))$ para todo $t \in I$. Mas isto contradiz o fato de que para o campo f_m, a Forma Fraca do Teorema de Peano não vale em Y_m.

Portanto, $T(l_1) \subset K(X) \cup \{0\}$.

Agora vamos mostrar que a **Afirmação 1** pode ser mais refinada.

Afirmação 2. $\overline{T(l_1)}^{\mathcal{T}_{uc}} \subset K(X) \cup \{0\}$.

De fato, se $h \in \overline{T(l_1)}^{\mathcal{T}_{uc}}$ então existe uma sequência $x_k = (a_n^k)_{n=1}^{\infty} \in l_1$ tal que $\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k f_n(\pi_n(P(x)))\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathcal{T}_{uc}$-converge para h em B_X. Do Corolário 4.3 (Shkarin) sabemos que $f_i(0) \neq 0$. Daí um cálculo simples mostra que

$$a_i^k \to \frac{\pi_i(P(h(0)))}{f_i(0)} \text{ para todo } i.$$

Seja $a_i = \dfrac{\pi_i(P(h(0)))}{f_i(0)}$. Segue que

$$\pi_i(P(h(x))) = a_i f_i(\pi_i(P(x))) \text{ para todo } x \in X.$$

Portanto, se (por contradição) $u'(t) = h(u(t))$ em algum instante t então fixado um inteiro $i \geq 1$, $v(t) = \pi_i(P(u(\frac{t}{a_i})))$ satisfaz $v'(t) = f_i(v(t))$. Porém, isto contradiz o Corolário 4.3 (Shkarin).

Portanto, $\overline{T(l_1)}^{\mathcal{T}_{uc}} \subset K(X) \cup \{0\}$.

Referências Bibliográficas

[1] Botelho, G., Pellegrino, D. e Teixeira, E. - *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, SBM, 2012.

[2] Brézis, H. - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[3] Deimling, K. - *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Springer-Verlag, 1977.

[4] Hale, J. K. - *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, 2a. Edição, 1980.

[5] Hartmann, P. - *Ordinary Partial Differential Equations*, BirKhauser, 1982.

[6] Oliveira, C. R. - *Introdução à Análise Funcional*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2a. Edição, 2008.

[7] Petrovski, I. G. - *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1966.

[8] Sotomayor Tella, J. M. - *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[9] Rebouças, M. P. - *A Conjectura do Quociente Separável, Uma Conjectura sobre EDO's em Espaços de Banach, Uma Teoria de Aproximação de Pontos Fixos e Contribuições*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, 2012.

[10] Barroso, C. S., Marrocos, M. A. M. e Rebouças, M. P. - *An interplay between the weak form of Peano's theorem ans structural aspects of Banach spaces*, Studia Mathematica 216 (3) (2013), 219-235.

[11] Botelho, G., Diniz e D., Pellegrino, D. - *Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 357, p. 171-175, 2009.

[12] Dieudonné, J. -*Deux examples singuliers d'equations differentielles*. Acta Sci. Math. (Szeged), v.12B, p. 38-40, 1950.

[13] Godunov, A. N.- *The Peano theorem in Banach spaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 9 (1974), 59-60.

[14] Shkarin, S.- *On Osgood theorem in Banach spaces*, Math. Nahchr. 257 (2003), 87-98.

[15] Botelho, G.- *Séries Incondicionalmente Convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers*, Matemática Universitária, nº 30, 2001, 103-111.

[16] Botelho, G., Pellegrino, D. - *Os problemas da base incondicional e do espaço homogêneo*, Matemática Universitária, nº 40, 2006, 7-20.

[17] Szufla, S. - *Osgood type conditions for an m-th order differential equation*, Discuss. Math. Differential Incl. 18, 45-55 (1988).