UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SUPERFÍCIES COM CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE E VETOR CURVATURA MÉDIA NORMALIZADO PARALELO

JOSÉ ROBERTO GUIMARÃES DE SOUZA

Rio Branco - 2014

SUPERFÍCIES COM CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE E VETOR CURVATURA MÉDIA NORMALIZADO PARALELO

JOSÉ ROBERTO GUIMARÃES DE SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Interinstitucional CAPES/-FUNTAC/UFAM/UFAC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM
Orientador: Prof. Dr. José Kenedy Martins

Rio Branco, Junho de 2014

SUPERFÍCIES COM CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE E VETOR CURVATURA MÉDIA NORMALIZADO PARALELO

José Roberto Guimarães de Souza

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Interinstitucional CAPES/ FUNTAC/UFAM/UFAC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

BANCA EXAMINADORA:

....

Prof°. Dr. José Kenedy Martins, Presidente

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof°. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Membro

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof°. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev, Membro

Professor Visitante - UFAM

Manaus, 20 de Junho de 2014

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Souza, José Roberto Guimarães de

S729s Superfícies com Curvatura Gaussiana Constante e Vetor Curvatura Média Normalizado Paralelo / José Roberto Guimarães de Souza. 2014

55 f.: 31 cm.

Orientador: José Kenedy Martins

Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Superfície Analítica. 2. Curvatura Gaussiana. 3. Curvatura Média. 4. Superfície Mínima. I. Martins, José Kenedy II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

À minha família e, especialmente,
ao meu irmão Pepes(in memorian)
dedico.

"Peça que Deus abençoe seus planos, e eles darão certo."
— Provérbios 13:03

Agradecimentos

Ao final deste trabalho, agradeço:

- Primeiro a Deus por me dar força e discernimento nos momentos difíceis.
- Aos meus pais, Pedro Francisco e Marli de Melo, pelo amor incondicional e por me ensinarem o valor do trabalho.
- Às minhas irmãs, Ângela Maria e Rosângela Maria, pelo companheirismo e apoio a ao meu irmão José Pepes (in memoriam), por me ensinar a como se comportar nas adversidades.
- À minha esposa, Eliete Margarida, pela compreensão, ajuda e carinho.
- Aos meus filhos, Ricardo Augusto e Lilian Campos, por me darem alegrias.
- Aos meus amigos de sempre, Edcarlos Miranda e Altemir Braga, pela presteza e incentivos.
- Aos professores colaboradores do MINTER, Flávia Morgana, Inês Padilha, Sérgio Brazil e em especial aos professores Renato Tribuzy, José Kennedy Martins e José Ivan por acreditarem neste projeto e nos darem esta oportunidade.
- Aos meus colegas de mestrado Cléber Pereira, Márcio Costa, José Genivaldo e Josean da Silva pela companhia nos momentos bons e ruins.
- Finalmente a todos que de forma direta ou indireta contribuiram para a concretização deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrarmos que se M é uma superfície analítica, orientada e fechada do espaço euclideano E^m com curvatura Gaussiana constante e vetor curvatura médio normalizado paralelo, então ou M está em uma hiperesfera de E^m como uma superfície mínima ou M é uma superfície produto de dois círculos planos.

Palavras-chave: Superfície analítica, curvatura Gaussiana, curvatura média, superfície mínima

Abstract

The objective of this work is to show that if M is an analytic, oriented, closed surface of the Eucliden space E^m with constant Gaussian curvature and parallel normalized mean curvature vector , then either M is a hypersphere of E^m as a minimal surface or M is product of two flat circles.

Keywords: Analytical surface, Gaussian curvature, mean curvature, minimal surfaces .

Sumário

Introdução

Para obtermos o resultado pretendido, primeiro estudaremos as superfícies com vetor curvatura média normalizado paralelo que são superfícies em que o vetor curvatura média é não nulo e o vetor unitário dado por esta direção é paralelo no fibrado normal. Em verdade, vamos mostrar o seguinte teorema auxiliar: "Seja M uma superfície analítica em uma variedade Riemanniana $R^m(c)$, completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante igual a c. Se M tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M está em uma hiperesfera de $R^m(c)$ como uma superfície mínima ou M está em uma subvariedade totalmente geodésica de $R^m(c)$".

Com referência ao teorema auxiliar, em [3] e [12] Chen e Yau provaram que uma superfície M em um espaço m-euclidiano E^m tem vetor curvatura médio paralelo se, e somente se, M é uma superfície mínima em E^m, ou uma superfície mínima de uma hiperesfera de E^m ou uma superfície em E^4 o qual está em E^3 ou uma hiperesfera de E^4 com curvatura média constante.

Em [9] ,Leung diz que uma superfície M tem o vetor curvatura média H normalizado paralelo se H não se anula e se o campo $\frac{H}{|H|}$ é paralelo e prova que existem muitas superfícies analíticas em uma variedade Riemanniana 4-dimensional cujo vetor curvatura médio normalizado seja paralelo. Ainda com relação ao teorema auxiliar, em [8] Eschemburg e Tribuzy mostram que se a variedade é homeomorfa à $2-esfera$ o resultado é obtido sem a hipótese de analiticidade.

Neste trabalho, é acrescentado ao teorema auxiliar a hipótese que M tem curvatura Gaussiana constante. Mostraremos então o seguinte

Teorema 0.1. *Seja M uma superfície analítica, orientada e fechada do espaço euclidiano E^m. Se M tem curvatura Gaussiana constante e tem vetor curvatura média normalizado* *paralelo, então ou M é uma superfície mínima de uma hiperesfera de E^m ou M é uma superfície produto de dois círculos planos.*

Capítulo 1

Generalidades

Neste capítulo vamos exibir definições, resultados e exemplos da teoria básica geral da Geometria Riemanniana, os quais serão utilizados no decorrer desta dissertação. Especificamente, vamos disponibilizar os conceitos de variedades diferenciáveis, métricas, conexões, geodésicas, curvaturas, fibrados e imersões isométricas. As demonstrações omitidas podem ser vistas nas referências [1] e [3].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. *Dizemos que um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n, se satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) $\displaystyle\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$

(2) *Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos do $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*

(3) *A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal relativamente às condições (1) e (2).*

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistemas de coordenadas) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p; Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada *estrutura diferenciável* em M. A condição (3) aparece na definição acima por razões técnicas.

Vamos agora estender para variedades a noção do Cálculo Diferencial.

Definição 1.2. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ em m tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Pela condição (2) da definição 1 temos que a definição deda acima independe da escolha das parametrizações e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada de *expressão de φ nas paremátrizações x e y.*

Definição 1.3. *Seja M uma variedade de diferenciável. Uma aplicação difereciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ é chamada uma curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0} \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Proposição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Definição 1.4. *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada acima é chamada de diferencial de φ em p.*

Definição 1.5. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo se é uma bijeção diferenciável com inversa φ^{-1} diferenciável. φ é* *um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.*

Provavelmente, o teorema local mais importante mais no Cálculo é o teorema da função inversa. Sendo um teorema local, este se estende naturalmente à variedades diferenciáveis.

Teorema da Função Inversa. *Suponha M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se é invertível em todo ponto $p \in M$, então existem vizinhanças $U \subset M$ de p e $V \subset N$ de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow N$ é um difeomorfismo.*

Uma importante consequência do teorema da função inversa é o seguinte.

Proposição 1.2. *Suponha que M e N sejam variedades diferenciáveis de mesma dimensão e $\varphi : M \longrightarrow N$ um imersão. Então φ é um difeomorfismo local. Se φ é bijetiva, então φ é um difeomorfismo.*

Definição 1.6. *Seja M uma variedade n-dimensional. O conjunto*

$$TM = (p, v); p \in M, v \in T_pM$$

munido com a estrutura diferenciável $(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha)$ sendo $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, u_1, \ldots, u_n) = \big(X_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_i^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\big)$$

onde $(\bigcup_\alpha, X_\alpha)$ é a estrutura diferenciável de M, $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$ e $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, é chamado fibrado tangente.

Definição 1.7. *Um caminho em uma variedade M é uma aplicação contínua $\xi : [0, 1] \to M$. Dizemos que ξ é um caminho fechado em $p \in M$ se $\xi(0) = \xi(1) = p$. Em particular o caminho constante $c_p : [0, 1] \to M$ definido por $c_p(s) = p$, para todo $s \in [0, 1]$, é um caminho fechado.*

Definição 1.8. *Uma variedade M é dita conexa quando, dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, existe sempre um caminho ligando p e q, isto é, existe uma aplicação contínua $\xi : [0, 1] \to M$, tal que $\xi(0) = p$ e $\xi(1) = q$*

Definição 1.9. *Uma variedade M é chamada simplesmente conexa se todo caminho fechado em M puder ser continuamente deformado em um ponto.*

Definição 1.10. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência $p \longmapsto X(p)$ que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. Dizemos que o campo X é diferenciável se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável.*

Lema 1.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo de vetores Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

O campo de vetores $Z = [X, Y] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ dado por $[X, Y] = XY - YX$ é chamado de colchete de X e Y, o qual possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.3. *Se X, Y e Z são campos de vetores diferenciáveis em M, α, β são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então valem as seguintes propriedades:*

(*a*) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anti-comutatividade*)

(*b*) $[\alpha X + \beta Y, Z] = a[X, Z] + \beta[Y, Z]$ (*linearidade*)

(*c*) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*)

(*d*) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.11. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que $p \longmapsto \langle\ ,\ \rangle_p$ que associa a cada ponto $p \in M$ a um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$, ou seja, uma forma bilinear simétrica positiva definida, no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Definição 1.12. *Sejam M e N variedade Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado de isometria se:*

$(\diamond) \qquad \langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, *para todo* $p \in M$ *e para todos* $u, v \in T_pM$

Definição 1.13. *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável* $f : M \longrightarrow N$ *é uma isometria local em* $p \in M$ *se existe uma vizinhança* $U \subset M$ *de* p *tal que* $f : U \longrightarrow f(U)$ *é um difeomorfismo satisfazendo* $(\diamond)$.

Exemplo 1.1 $(M = \mathbb{R}^n)$. *Considere* $M = \mathbb{R}^n$ *o espaço euclideano de dimensão* n *com* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *identificado com* $e_i = (0, \ldots, 0)$, *então a métrica é dada por* $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, *chamada de geometria metrica euclideana.*

Exemplo 1.2. *Sejam* M_1 *e* M_2 *variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano* $M_1 \times M_2$ *com estrutura diferenciável produto. Sejam* $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ *e* $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ *as projeções naturais. Vamos munir* $M_1 \times M_2$ *com uma métrica Riemanniana pondo:*

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_q$$

para todos $(p, q) \in M_1 \times M_2$ *e* $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$. *Como exemplo, temos que o toro* $S^1 \times S^1 = T^2$ *tem uma estrutura Riemannianna obtida escolhendo no círculo* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *a métrica induzida por* $\mathbb{R}^2$ *e tomando a métrica produto. O toro* T^2 *com tal métrica é chamado toro plano.*

Definição 1.14. *Uma aplicação* $c : I \longrightarrow M$ *de um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *em uma variedade diferenciável* M *chama-se uma curva parametrizada. Observe que uma curva parametrizada pode admitir auto-intersecções ou pontas.*

Definição 1.15. *Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \longrightarrow M$ *é um aplicação* $t \longmapsto V(t)$ *que a cada* $t \in I$ *associa um vetor tangente* $V(t) \in T_{c(t)}M$. *Dizemos que* V *é diferenciável se para toda função diferenciável* f *em* M, *a função* $t \longmapsto V(t)f$ *é uma função diferenciável em* I.

O campo vetorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado *campo velocidade* ou tangente de c. A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um *segmento.* Se M é Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$l_a^b = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle} dt.$$

O teorema a seguir garante a existência de métrica Riemannianas.

Teorema 1.1. *Uma variedade diferenciável M, a qual satisfaz os axiomas de Hausdorff e da base enumerável, possui uma métrica Riemanniana.*

1.3 Conexões

Nesta seção vamos indicar por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funçõs reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.16. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

indicada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

A seguir, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência*

$$V \longmapsto \frac{DV}{dt}$$

que associa a cada campo de vetores V ao longo de um curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo da curva c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

(a) $\dfrac{D}{dt}(V + W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$

(b) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$, *onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

(c) *Se* V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathcal{X}(M)$, *ou seja,* $V(t) = Y(c(t))$, *então* $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Observação 1.1. *A Proposição acima mostra que a escolha de uma conexão afim* ∇ *em* M *dá origem a uma derivada satisfazendo as condições* (a) *e* (b) *de campos de vetores ao longo de curvas. A conexão, desta forma, fornece uma forma de derivar vetores ao longo de curvas. Surge de maneira natural a noção de paralelismo.*

Definição 1.17. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \longrightarrow M$ *é chamado campo paralelo quando* $\frac{DV}{dt} = 0$, *para todo* $t \in I$

Proposição 1.5. *Seja* (M, ∇) *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Seja* $c : I \longrightarrow M$ *uma curva diferenciável em* M *e* V_0 *um vetor tangente a* M *em* $c(t_0)$, $t_o \in I$, *ou seja,* $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. *Então existe um único campo de vetores paralelo* V *ao longo de* c, *tal que* $V(t_0) = V_0$.

A partir da proposição acima podemos definir o seguinte:

Definição 1.18. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Seja* $c : I \longrightarrow M$ *uma curva diferenciável em* M *e* V_0 *um vetor tangente a* M *em* $c(t_0)$. *O campo de vetores paralelo* V *ao longo de* $c : I \longrightarrow M$ *tal que* $V(t_0) = V_0$, *é chamado o transporte paralelo de* $V(t_0)$ *ao longo de* c.

Definição 1.19. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *e uma métrica Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$. *A conexão é dita ser compatível com a métrica* $\langle\ ,\ \rangle$, *quando para toda curva diferenciável* $\alpha : I \longrightarrow M$ *e quaisquer pares de campos de vetores paralelos* P *e* P' *ao longo de* α, *tivermos* $\langle P, P' \rangle = constante$.

Observação 1.2. *A proposição a seguir garante que se a conexão* ∇ *em uma variedade Riemanianna* M *é compatível com a métrica, então podemos diferenciar produto interno pela regra do produto usual, fato que justifica a definição dada acima.*

Proposição 1.6. *Seja* M *uma variedade Riemanianna. Uma conexão* ∇ *em* M *é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par* V *e* W *de campos de vetores ao longo* *da curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$ tem-se:*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle, \ t \in I. \tag{1}$$

Corolário 1.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{2}$$

Definição 1.20. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita ser simétrica quando:*

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3}$$

Observação 1.3. *Em um sistema de coordenadas (U, x), dizer que ∇ é simétrica implica que, para todo $i, j = 1, \ldots, n$, tem-se*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j] = 0, \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3'}$$

O teorema a seguir (teorema de Levi-Civita) é o principal resultado desta seção.

Teorema 1.2 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanianna M, existe um única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

(a) ∇ *é simétrica.*

(b) ∇ *é compatível com a métrica*

Tal conexão é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana de M.

1.4 Geodésicas

Nesta seção, M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 1.21. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{dx}{dt} = 0)$ no ponto t_0. Dizemos que γ é uma geodésica se γ for geodésica para todo $t \in I$*

Observação 1.4. *O comprimento do vetor tangente de uma geodésica $\gamma : I \to M$ é constante, pois:*

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

O comprimento de arcos de γ de $t_0 \in I$ a $t \in I$ é dado por:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\frac{d\gamma}{dt}| = c(t - t_0)$$

Portanto, o parâmentro de uma geodésica é proporcional ao comprimrnto de arco. Quando o parâmentro é o próprio comprimento de arco, isto é, quando $c = 1$, diremos que γ está normalizado.

Exemplo 1.3. *Todas as geodésicas do $\mathbb{R}^n$ são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, pois o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p é identificado com o $\mathbb{R}^n$ e, neste caso, a derivada covariante coincide com a derivada usual.*

Exemplo 1.4. *Todas as geodésicas da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ são os círculos máximos parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco. De fato, dados $p \in S^n$ e um vetor unitário $\in T_pS^n$, a interseção com S^n do plano que contém a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, o ponto p e o vetor v é um círculo máximo que pode ser parametrizado como a geodésica por p com velocidade v. A unicidade segue da proprosição anterior.*

Definição 1.22. *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$*

Observação 1.5. *É possível mostrar que toda variedade Riemanniana conexa e compacta é completa (Teorema de Hopf-Rinow)*

Proposição 1.7. *Dado $p \in M$ existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números reais $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ e uma aplicação C^∞*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U, U = (q, v); q \in v, v \in T_qM, |v| < \epsilon$$

tais que a curva $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-1, 1)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ cada $v \in T_qM$ com $|v| < \epsilon$

1.5 Curvaturas

Definição 1.23. *A curvatura K de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência $(X,Y) \longrightarrow K(X,Y)$ que associa a cada par $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $K(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$K(X,Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.8. *A curvatura K de uma variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:*

(i) K é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, ou seja,

$$K(fX_1 + gX_2, Y_1) = fK(X_1,Y_1) + gK(X_2,Y_1)$$

$$K(X_1, fY_1 + gY_2) = fK(X_1,Y_1) + gK(X_1,Y_2)$$

onde $f,g \in \mathcal{D}(M)$, $\quad X_i, Y_i \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) Para todo par $X,y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $K(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, ou seja,

$$K(X,Y)(Z+W) = K(X,Y)Z + K(X,Y)W,$$

$$K(X,Y)fZ = fK(X,Y)Z,$$

onde $f \in \mathcal{D}(M)$, $\quad Z,W \in \mathcal{X}(M)$.

Proposição 1.9 (Primeira Identidade de Bianchi)**.**

$$K(X,Y)Z + K(Y,Z)X + K(Z,X)Y = 0$$

Por questões de conveniência, indentificamos o operador quadrilinear

$$\langle K(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que para cada quádrupla $(X, Y, Z, W) \in (\mathcal{X}(M))^4$ associa o número $\langle K(X, Y)Z, W\rangle$, simplesmente por

$$(X, Y, Z, W) = \langle K(X, Y)Z, W\rangle\,.$$

Proposição 1.10. *O operador definido acima possui as seguintes propriedades:*

(*a*) $(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0$

(*b*) $(X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W)$

(*c*) $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$

(*d*) $(X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y)$

No que segue, vamos usar a seguinte notação: dado uma espaço vetorial V, indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in V$.

Proposição 1.11. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subspaço de dimensão 2 do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,*

$$k(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

A proposição acima permite definirmos o seguinte:

Definição 1.24. *Dado um ponto $p \in M$ e um subspaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $k(x, y) = k(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado **curvatura seccional** de σ em p.*

Lema 1.2. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, com $\dim V \geq 2$. Sejam*

$$K : V \times V \times V \longrightarrow V \quad e \quad K' : V \times V \times V \longrightarrow V$$

aplicações tri-lineares tais que as condições (a), (b), (c) e (d) da proposição 9 sejam satisfeitas para

$$(x, y, z, t) = \langle K(x, y)x, y\rangle\,, \qquad (x, y, z, t)' = \langle K'(x, y)x, y\rangle\,.$$

Se x, y são dois vetores linearmente independentes, vamos escrever,

$$k(\sigma) = \frac{(x, y, z, t)}{|x \wedge y|^2}, \qquad k'(\sigma) = \frac{(x, y, z, t)'}{|x \wedge y|^2},$$

onde $\sigma = [x, y]$ é o subespaço bi-dimensional gerado por x, y. Se para todo $\sigma \subset V$, $k(\sigma) = k'(\sigma)$, então $K = K'$.

Lema 1.3. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação tri-linear $K' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por*

$$\langle K'(X, Y, W), Z\rangle = \langle X, W\rangle \langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle \langle X, Z\rangle$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_mM$. Então M tem curvatura seccional constante k se, e somente se, $K = kK'$, onde K é a curvatura de M.

A seguir vamos apresentar algumas combinações das curvaturas seccionais de uma variedade.

Definição 1.25. *Para qualquer vetor unitário qualquer $v \in T_pM$, a curvatura de Ricci de M na direção do vetor $v \in T_pM$ é definida pela média*

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} k(v, v_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \langle R(v, v_i)v, v_i\rangle\,,$$

das curvaturas seccionais $k(v, v_i)$, onde $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Definição 1.26. *A Curvatura Escalar (ou média) de M no ponto $p \in M$ é definida pela média*

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(v_i) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n} \langle R(v_i, v_j)v_i, v_j\rangle\,,$$

das curvaturas de Ricci $\mathrm{Ric}_p(v_i)$*, onde* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *é qualquer base ortonormal de* T_pM*.*

Observação 1.6. *A seguir, vamos mostrar que as definições acima não dependem da escolha das parametrizações. Primeiro, vamos definir uma forma bilinear em T_mM como segue: Sejam $v, w \in T_pM$ e faça*

$$Q(v, w) = \textit{traço da aplicação } [z \longrightarrow K(v, z)w].$$

Temos que Q é bilinear e, além disso, escolhendo um vetor unitário $v \in T_pM$ e completando em uma base ortonormal $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de T_pM temos que

$$\begin{aligned} Q(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} \langle K(v, v_i)w, v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle K(w, v_i)v, v_i\rangle \\ &= Q(w, v) \end{aligned}$$

ou seja, isso mostra que $Q(v, w) = Q(w, v)$ e $Q(v, v) = (n-1)\,\mathrm{Ric}_m(v)$; isto prova que $\mathrm{Ric}_p(v)$ *(só depende de $v \in T_pM$) é um conceito intrínseco. Por outro lado, a forma bilinear Q em T_pM corresponde uma aplicação linear auto-adjunta R dada por*

$$\langle R(v), w\rangle = Q(v, w)$$

Tomando uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* T_pM*, temos que*

$$\begin{aligned} \textit{Traço de } R &= \sum_{j=1}^{n} \langle R(v_j), v_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} Q(v_j, v_j) \\ &= (n-1)\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_m(v_j) \\ &= n(n-1)R(m). \end{aligned}$$

o que prova o que foi afirmado. A forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ *é, algumas vezes, chamada de tensor de Ricci.*

1.6 Fibrados Vetoriais

Definição 1.27. *Sejam* E *e* M *variedades diferenciáveis e seja* $\rho : E \to M$ *uma aplicação diferenciável. Dizemos que* ρ *é um fibrado vetorial de dimensão* k *quando para cada* $P \in M$

(i) $\rho^{-1}(p)$ *é um espaço vetorial real de dimensão* k*; e*

(ii) existe uma vizinhança aberta U *de* p *em* M *e um difeomorfismo* $\phi : \rho^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ *cuja restrição* $\rho^{-1}(q)$ *é um isomorfismo sobre* $\{q\} \times \mathbb{R}^k$*, para cada* $q \in U$*.*

Dado um fibrado vetorial $\rho : E \to M$ e um subconjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\rho\ |_F : F \to M$ é também um fibrado vetorial, dizemos que F é um subfibrado vetorial de E se a inclusão $i : F \hookrightarrow E$ leva $(\rho\ |_F)^{-1}(p)$ linearmente sobre $\rho^{-1}(p)$, para todo $p \in M$.

Por abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\rho : E \to M$ quando trabalhamos com fibrados cuja aplicação é natural, mas sim às variedades E e M.

Definição 1.28. *Seja* $\rho : E \to M$ *um fibrado vetorial. Para cada* $p \in M$ *chamamos o espaço* $E_p = \rho^{-1}(p)$ *a fibra de* ρ *sobre* p*. Uma seção de um espaço fibrado é uma aplicação* $\sigma : M \to E$ *tal que* $\rho \circ \sigma = id_M$*.*

Exemplo 1.5. *Seja* $TM = (p, v_p)\Big|_P \in M, v_p \in T_pM$*. A aplicação* $\rho : TM \to M$ *dada por* $\rho(p, v_p) = p$*, é um espaço fibrado vetorial de classe* C^∞*, chamado o espaço fibrado tangente a* M*.*

Uma seção do espaço fibrado tangente TM é um campo de vetores em M. Assim,um campo de vetores X, é para todos os efeitos,uma aplicação que a cada $p \in M$ associa o vetor $X(p) \in T_pM$

Exemplo 1.6. *Seja $\langle\ ,\ \rangle$ um métrica Riemanniana em M^n e seja $N^m \subset M^n$ uma subvariedade de M. Dado $p \in M$, seja $T_pN^\perp \subset T_pM$ o subespaço de vetores normais a T_pN; definimos $\omega(N) = (p, v_p); p \in N, v_p \in T_pN^\perp$. A aplicação $\rho : \omega(N) \to N$, dada por $\rho(p, v_p) = p$ é um espaço fibrado vetorial, chamado o espaço fibrado normal.*

Definição 1.29. *Sejam $\rho : E \to M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇ e $\Gamma(\rho)$ o conjunto das seções de ρ. Dizemos que a seção $\sigma \in \Gamma(\rho)$ é paralela quando $\nabla_X^\sigma = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Um subfibrado vetorial F de E é dito paralelo se, para toda seção η de F e todo $X \in \mathcal{X}(M)$, tivermos que ∇_X^η é uma seção de F.*

1.7 Imersões Isométricas

Definição 1.30. *Sejam M^n e $\overline{M}^{k=n+m}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamdo a codimensão de f. Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, diz-se que f é um mergulho. Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de $\overline{M}$.*

Definição 1.31. *Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{k=n+m}$ entre duas variedades Riemannianas com métricas $\langle\ ,\ \rangle_M$ e $\langle\ ,\ \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente, é chamada imersão isométrica (ou Riemanniana) se:*

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{\overline{M}}$$

para todo $p \in M$, e todo par $X, Y \in T_pM$

Proposição 1.12. *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$.*

De acordo com a proposição anterior podemos identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usando esta identificação podemos estender um campo local U de vetores de M a um campo local $\overline{U}$ de vetores de $\overline{M}$. Também podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em p e escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, então podemos escrever $v = v^T + v^N$, com $v^T \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^{\perp}$. Neste caso, denominamos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v. Essa decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de TM em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \longmapsto (p, v^T) \quad \text{e} \quad (p, v) \longmapsto (p, v^N)$$

são diferenciáveis. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X, Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$. Pelo teorema de existência e unicidade de Levi-Civita, sabemos que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Definição 1.32. *Sejam X, Y campos locais a M, então vamos definir uma aplicação h da seguinte forma*

$$h(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \tag{1.1}$$

Segue que $h(X, Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M e $h(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Portanto $h(X, Y)$ está bem definida. Daqui em diante, vamos indicar por $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 1.13. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $h : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$h(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Observação 1.7. *Essa aplicação é chamada a segunda forma fundamental de f, onde a equação*

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{1.2}$$

é chamada a fórmula de Gauss.

Note que $h(X,Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal M, pois

$$h(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}$$

Consideremos agora campos de vetores X de TM e ξ de $TM^{\perp}$, e denotemos por $\mathcal{A}_{\xi}X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X\xi$, isto é

$$\mathcal{A}_{\xi}X = -(\overline{\nabla}_X\xi)^T$$

. Note que para todo $Y \in TM$, temos

$$\begin{aligned} X\langle\xi, Y\rangle &= \left\langle\overline{\nabla}_X\xi, Y\right\rangle + \left\langle\xi, \overline{\nabla}_X Y\right\rangle \\ &= \left\langle(\overline{\nabla}_X\xi)^T + (\overline{\nabla}_X\xi)^{\perp}, Y\right\rangle + \langle\xi, \nabla_X Y + h(X,Y)\rangle \\ &= \langle -\mathcal{A}_{\xi}X, Y\rangle + \langle\xi, h(X,Y)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle\mathcal{A}_{\xi}X, Y\rangle = \langle h(X,Y), \xi\rangle$$

Portanto fica bem definida a aplicação $\mathcal{A} : TM \times TM^{\perp} \to TM$ dada por $\mathcal{A}(X,\xi) = \mathcal{A}_{\xi}X$, que é bilinear sobre o anel $\mathcal{D}(M)$ das funções C^{∞} ,pois a aplicação h e a métrica são bilineares sobre $\mathcal{D}(M)$. Sendo h simétrica a aplicação $\mathcal{A}_{\xi} : TM \to TM$ também é simétrica e, além disso, é linear sobre $\mathcal{D}(M)$. A aplicação $\mathcal{A}_{\xi}$ é chamada Operador de Weingarten.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X\xi$ que denotamos por $\nabla^{\perp}_X\xi$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal $TM^{\perp}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal de f e assim obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X\xi = -\mathcal{A}_{\xi}X + \nabla^{\perp}_X\xi \tag{1.3}$$

Observação 1.8. *Para a segunda forma h a derivação covariante pode ser estendida de maneira natural da seguinte forma*

$$\left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp}\left(h(Y,Z)\right) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{1.4}$$

Definição 1.33. *Dizemos que uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em um ponto $p \in M$ se para todo $\xi \in T_pM^{\perp}$ temos $\mathcal{A}_\xi \equiv 0$ em p. A imersão f é totalmente geodésica se é geodésica em todo $p \in M$.*

Definição 1.34. *O vetor curvatura média de uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{k=n+m}$ no ponto $p \in M$ é o vetor normal a M, definido por $H_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i, Y_i)$, onde $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é um referencial ortonormal tangente a M em p e h é a segunda forma fundamental de f*

Observação 1.9. *Uma subvariedade é dita mínima se $H_p \equiv 0$ para todo ponto p da subvariedade.*

1.8 As Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica

O objetivo desta seção é apresentar as equações de Gauss, Ricci e Codazzi.

Proposição 1.14. *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ uma imersão isométrica. Então são válidas as seguintes equações:*

(a) *Equação de Gauss:*

$$\left\langle \overline{K}(X,Y)Z, W\right\rangle = \langle K(X,Y)Z, W\rangle - \langle h(Y,W), h(X,Z)\rangle + \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle . \tag{1.5}$$

onde $K(X,Y)$ e $\overline{K}(X,Y)$ denotam as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$

(b) *Equação de Ricci:*

$$\left\langle \overline{K}(X,Y)\xi, \eta\right\rangle - \left\langle K^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\right\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta](X), Y\rangle , \tag{1.6}$$

para todo $X, Y \in TM$ *e* $\xi, \eta \in TM^{\perp}$ *onde* $[A_{\xi}, A_{\eta}] = A_{\xi} \circ A_{\eta} - A_{\eta} \circ A_{\xi}$.

(c) *Equação de Codazzi:*

$$(\overline{K}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{Y} h)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_{X} h)(Y,Z) \tag{1.7}$$

Para todo$X, Y, Z \in TM$.

As equações de Gauss e de Ricci são expressões que relacionam, respectivamente, as curvaturas dos fibrados tangente e normal com a segunda forma fundamental da imersão. Uma relação não algébrica é dada pela equação de Codazzi. Neste caso, precisamos "derivar"a segunda forma fundamental considerada como tensor.

A importância das equações de Gauss, Ricci e Codazzi é que, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel análogo ao das equações de compatibilidade na teoria das superfícies.

Capítulo 2

Variedades Analíticas e Superfícies com Seção Mínima Paralela

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados que serão utilizados nas demonstrações feitas na capítulo 3.

2.1 Variedades Analíticas

Definição 2.1. *Uma variedade complexa M de dimensão (complexa) n é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional (dimensão real), munida de um atlas formado por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo a seguinte condição: sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a mudança de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é uma função holomorfa de n variáveis complexas. Nesse caso, cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ é uma carta coordenada holomorfa ou ainda um sistema de coordenadas complexas em M, e o conjunto das $\varphi_\alpha^{'s}$ é um atlas complexo de M.*

Toda variedade complexa é, de fato, uma variedade analítica real; ademais, se $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ é uma carta coordenada holomorfa em M com $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ e $z_i = x_j + iy_j$, para $1 \leq j \leq n$, então $\varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ é uma carta coordenada analítica de M, vista como variedade analítica real.

Observação 2.1. *As variedades anlíticas complexas de dimensão 1 são as superfícies de Riemann.*

Podemos então identificar a parametrização (x, y) em $U \subset M$, onde M representa uma superfície de Riemann, com o parâmetro complexo $z = x + iy$ e denotarmos por $T_p^{\mathbb{C}}M$ o plano tangente complexificado de T_pM.

Assim, dado um parâmetro $z = x + iy$ podemos definir campos de vetores em U por:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

de modo que $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\}$ é uma base de $T_p^{\mathbb{C}}M$.

Definimos a base dual de $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\}$ como sendo as 1-formas complexas locais

$$dz := dx + idy$$

$$d\overline{z} := dx - idy$$

. Uma função $f : M \to \mathbb{C}$ será dita holomorfa se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ para toda parametrização local de M.

Seja então M uma superfície analítica conexa em uma variedade Riemanniana analítica R^m. Considere ∇ e ∇' as derivadas covariantes de M e R respectivamente. Sejam X e Y campos vetoriais tangentes em M. Então por (1.1) e (1.2) temos que a segunda forma fundamental h é dada por

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.1}$$

Sabemos que $h(X, Y)$ é um campo vetorial normal em M e que h é simétrico em X e Y. Considere um campo vetorial normal qualquer ξ em M e escrevamos:

$$\nabla'_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi \tag{2.2}$$

onde $-A_\xi(X)$ e $\nabla^\perp_X \xi$ denotam respectivamente os componetes tangencial e normal do vetor $\nabla'_X \xi$, então obtemos

$$\langle A_\xi(X), Y\rangle = \langle h(X, Y), \xi\rangle \tag{2.3}$$

onde $\langle , \rangle$ denota a métrica riemanniana de R. Diz-se que um campo normal ξ em M é paralelo no fibrado normal se $\nabla^{\perp}_{X}\xi \equiv 0$ para cada campo tangente $X \in \Gamma(TM)$ o vetor curvatura média H é definido por:

$$H = \frac{1}{2}trh \tag{2.4}$$

Definição 2.2. *Se para todo sistema de vizinhanças coordenadas cobrindo a variedade M, existe um número finito de vizinhanças coordenadas que cobrem toda a variedade, então a variedade m é dita compacta.*

Proposição 2.1. *Seja M^n uma subvariedade de N^m. Então a conexão normal $\nabla^{\perp}$ de M em N é flat se, e somente se, existem $(m-n)$ campos ortonormais e paralelos no fibrado normal.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Temos $\nabla^{\perp}_{\xi_j} = 0$ para $j = 1, ..., m-2$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Logo $R^N(X,Y)\xi_j = 0$. Dado qualquer campo normal $\sum_{j=1}^{n} f_j\xi_j$ de M. Então temos:

$$\begin{aligned} R^N(X,Y) &= \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\left(\sum_{j=1}^{m-2} f_j\xi_j\right) - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\left(\sum_{j=1}^{m-2} f_j\xi_j\right) - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\left(\sum_{j=1}^{m-2} f_j\xi_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m-2}[(XY-YX)f_j]\xi_j - \sum_{j=1}^{m-2}([X,Y]f_j)\xi_j = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, a conexão normal $\nabla^{\perp}$ é flat.

$(\Rightarrow)$ Assumamos que $\nabla^{\perp}$ é flat. Então para quaisquer conjunto de $(m-n)$ campos normais ortonormais ξ_i de M, temos:

$$\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi_j - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi_j - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi_j = 0, \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Definindo $\nabla^{\perp}_X\xi_j = \sum_{i=1}^{n}\omega^i_j(X)\xi_i$, temos $\omega^i_j = -\omega^j_i$ e também

$$0 = \sum_{j=1}^{n}[X\omega^j_i(Y) - Y\omega^j_i(X) - \omega^j_i([X,Y])]\xi_j + \sum_j\left\{\sum_k[\omega^k_i(Y)\omega^j_k(X) - \omega^k_i(X)\omega^i_k(Y)]\right\}\xi_j$$

ou seja, $d\omega^j_i = -\sum\omega^k_i \wedge \omega^j_k$ e $\omega^j_i = -\omega^i_j$. É possível então obter uma matriz de ordem

$(m-n), A=(a_i^j)$ de funções a_i^j satisfazendo:

$$dA = -A\Omega, A^T = A^{-1} \tag{2.6}$$

onde $\Omega = (\omega_i^j)$. Esta equação (2.6) tem a expressão local:

$$da_i^k = \sum a_i^j \omega_k^j = -\sum a_i^j \omega_j^k \tag{2.7}$$

colocando

$$\xi_i' = \sum_j a_i^j \xi_j \tag{2.8}$$

os campos ξ_i' são também $m-n$ campos ortonormais.

Usando (2.7) e (2.8) obtemos:

$\omega_i'^j a_j^k = da_i^k + a_i^j \omega_j^k = 0$, onde $\omega_i'^j$ são definidos por $\nabla^\perp \xi_i' = \omega_i'^j \xi_j'$. Isto prova que cada ξ_i' é paralelo no fibrado normal.

■

Proposição 2.2. *Seja M uma subvariedade m-dimensional de uma variedade riemanniana n-dimensional N. Sejam $\{\xi_i\}$ e $\{\xi_i'\}$ conjuntos de $(n-m)$ campos normais ortonormais de M, ambos conjuntos de campos paralelos no fibrado normal. Se tivermos $\xi_i' = \sum_j a_i^j \xi_j$ em uma componente de interseção dos domínios de definição dos campos, então as funções a_i^j são todas constantes. Em particular, se cada $\xi_i = \xi_i'$ em um ponto, então $(a_i^j) = (\delta_i^j)$.*

A proposição acima é consequência imediata da definição de campos paralelos.

É possível escolher um sistema de coordenadas isotérmicas $\{x_1, x_2\}$ cobrindo M. O tensor métrica induzida g tem a seguinte forma:

$$g = E\{(dx_1)^2 + (dx_2)^2\}. \tag{2.9}$$

A seguir, façamos $X_i = \partial/\partial x_i$ e consideremos,

$$L = h(X_1, X_1), M = h(X_1, X_2), N = h(X_2, X_2). \tag{2.10}$$

Para as coordenadas isotérmicas x_1, x_2 com tensor métrico dado por (2.9), veremos que

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{E}, \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = \frac{X_1(E)}{2E}, \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \frac{X_2(E)}{2E} \tag{2.11}$$

em que os Γ^h_{ji} são dados por

$$\nabla_{X_j} X_i = \Gamma^h_{ji} X_h. \tag{2.12}$$

De fato, como $g(X_1, X_1) = E = g(X_2, X_2)$, obtemos:

$$\frac{1}{2}X_1(E) = \frac{1}{2}X_1[g(X_1, X_1)] = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_1}X_1, X_1)] = \frac{1}{2}[g(\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2, X_1)] = \frac{1}{2}2E\Gamma^1_{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma^1_{11} = \frac{X_1(E)}{2E};$$

$$\frac{1}{2}X_2(E) = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_2}X_1, X_1)] = \frac{1}{2}[2g(\Gamma^1_{12}X_1 + \Gamma^2_{12}X_2, X_1)] = \frac{1}{2}2E\Gamma^1_{12} \Rightarrow \Gamma^1_{12} = \frac{X_2(E)}{2E};$$

$$\frac{1}{2}X_1(E) = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_1}X_2, X_2)] = \frac{1}{2}[2g(\Gamma^1_{12}X_1 + \Gamma^2_{12}X_2, X_2)] = \frac{1}{2}2E\Gamma^2_{12} \Rightarrow \Gamma^2_{12} = \frac{X_1(E)}{2E};$$

$$\frac{1}{2}X_2(E) = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_2}X_2, X_2)] = \frac{1}{2}[2g(\Gamma^1_{22}X_1 + \Gamma^2_{22}X_2, X_2)] = \frac{1}{2}2E\Gamma^2_{22} \Rightarrow \Gamma^2_{22} = \frac{X_2(E)}{2E};$$

E ainda,

$$g(X_1, X_2) = 0 \Rightarrow g(\nabla_{X_1}X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_1}X_2) = 0 \Rightarrow E\Gamma^2_{11} + E\Gamma^1_{12} = 0 \Rightarrow \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11}$$

$$g(X_1, X_2) = 0 \Rightarrow g(\nabla_{X_2}X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_2}X_2) = 0 \Rightarrow E\Gamma^2_{12} + E\Gamma^1_{22} = 0 \Rightarrow \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22}$$

Pela equação de Codazzi, temos $(\overline{\nabla}_{X_1}h)(X_2, X_1) = (\overline{\nabla}_{X_2}h)(X_1, X_1)$ e pela equação

(1.4), tem-se

$$(\overline{\nabla}_{X_1}h)(X_2,X_1) = \nabla^{\perp}_{X_1}(h(X_2,X_1)) - h(\nabla_{X_1}X_2,X_1) - h(X_2,\nabla_{X_1}X_1),$$

e

$$(\overline{\nabla}_{X_2}h)(X_1,X_1) = \nabla^{\perp}_{X_2}(h(X_1,X_1)) - h(\nabla_{X_2}X_1,X_1) - h(X_1,\nabla_{X_2}X_1)$$

Logo,

$$\nabla^{\perp}_{X_2}M - h(\nabla_{X_1}X_2,X_1) - h(X_2,\nabla_{X_1}X_1) = \nabla^{\perp}_{X_2}L - h(\nabla_{X_2}X_1,X_1) - h(X_1,\nabla_{X_2}X_1)$$

Devido h ser bilinear e simétrica e $\nabla_{X_2}X_1 = \nabla_{X_1}X_2$, temos

$$\begin{aligned}\nabla^{\perp}_{X_2}L - \nabla^{\perp}_{X_2}M &= h(\nabla_{X_2}X_1,X_1) - h(X_2,\nabla_{X_1}X_1)\\ &= h(\Gamma^1_{12}X_1 + \Gamma^2_{12}X_2,X_1) - h(X_2,\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2)\\ &= \Gamma^1_{12}h(X_1,X_1) + \Gamma^2_{12}h(X_2,X_1) - \Gamma^1_{11}h(X_2,X_1) - \Gamma^2_{11}h(X_2,X_2)\end{aligned}$$

Mas, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{11}$ e $\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11}$, daí

$$\nabla^{\perp}_{X_2}L - \nabla^{\perp}_{X_2}M = \Gamma^1_{12}[h(X_1,X_1) + h(X_2,X_2)].$$

Uma vez que

$$H = \frac{1}{2}trh = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} g(h(X_i,X_i),X_i) = \frac{1}{2}[g(h(X_1,X_1),X_1) + g(h(X_2,X_2),X_2)] \Rightarrow$$

$$H = \frac{1}{2}[\frac{1}{E}h(X_1,X_1) + \frac{1}{E}h(X_2,X_2)] \Rightarrow h(X_1,X_1) + h(X_2,X_2) = 2EH$$

e $\Gamma^1_{12} = \frac{X_2(E)}{2E}$, temos

$$\nabla^{\perp}_{X_2}L - \nabla^{\perp}_{X_1}M = \frac{X_2(E)}{2E}[h(X_1,X_1) + h(X_2,X_2)] = \frac{X_2(E)}{2E}2EH = X_2(E)H. \tag{2.13}$$

Analogamente,

$$\nabla^{\perp}_{X_2} M - \nabla^{\perp}_{X_1} N = \frac{-X_1(E)}{2E}[h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2)] = -X_1(E)H. \tag{2.14}$$

Pela definição de vetor curvatura média H, temos

$$\nabla^{\perp}_{X_i}(EH) = E\nabla^{\perp}_{X_i}H + X_i(E)H \Rightarrow X_i(E)H = -E\nabla^{\perp}_{X_i}H + \nabla^{\perp}_{X_i}[E.\frac{1}{2E}(h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2))] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_i(E)H = -E\nabla^{\perp}_{X_i}H + \frac{1}{2}\left(\nabla^{\perp}_{X_i}L + \nabla^{\perp}_{X_i}N\right).$$

Substituindo $X_i(E)H$ em (2.13) e (2.14), obtemos:

$$\nabla^{\perp}_{X_2}L - \nabla^{\perp}_{X_1}M = -E\nabla^{\perp}_{X_2}H + \frac{1}{2}\nabla^{\perp}_{X_2}(L+N) \Rightarrow \nabla^{\perp}_{X_2}\left(\frac{L-N}{2}\right) - \nabla^{\perp}_{X_1}M = -E\nabla^{\perp}_{X_2}H \tag{2.15}$$

e

$$\nabla^{\perp}_{X_2}M - \nabla^{\perp}_{X_1}N = E\nabla^{\perp}_{X_1}H - \frac{1}{2}\nabla^{\perp}_{X_1}(L+N) \Rightarrow \nabla^{\perp}_{X_1}\left(\frac{L-N}{2}\right) + \nabla^{\perp}_{X_2}M = E\nabla^{\perp}_{X_1}H. \tag{2.16}$$

Assim, temos o seguinte:

Lema 2.1. *Seja M uma superfície em uma variedade Riemanniana m-dimensional de curvatura constante. Se existe uma seção isoperimétrica paralela ξ em M, então a função*

$$\varphi(\xi) = \left\langle \frac{L-N}{2}, \xi \right\rangle - \langle M, \xi\rangle i \tag{2.17}$$

é analítica em $z = x_1 + ix_2$ para todo conjunto de coordenadas isotérmicas x_1, x_2, onde uma seção ξ isoperimétrica em M significa um campo vetorial normal unitário definido globalmente em M com $M_1(\xi) = \frac{1}{2}trA_{\xi}$ =constante e $\langle , \rangle$ significa $\widetilde{g}(,)$. Em particular, se o vetor curvatura média H é paralelo e não-nulo, então a função

$$\varphi\left(\frac{H}{|H|}\right) = \left\langle \frac{L-N}{2}, \frac{H}{|H|} \right\rangle - \left\langle M, \frac{H}{|H|} \right\rangle i \tag{2.18}$$

é analítica em $z = x_1 + ix_2$.

2.2 Superfícies com Seção Mínima Paralela

Definição 2.3. *Seja M uma subvariedade n-dimensional em uma variedade N. Para um campo normal unitário de vetores ξ de M em N, se temos $M_1(\xi) = \frac{1}{2}trA_\xi \equiv 0$, então ξ é chamada uma seção mínima de M; se o tensor segunda forma $\mathcal{A}_\xi$ não é proporcional à identidade, então ξ é chamada uma seção umbílica-livre de M; se o determinante de $\mathcal{A}_\xi$ é não nulo, então ξ é chamada uma seção não degenerada; e se $\mathcal{A}_\xi$ não é identicamente nulo, então ξ é chamada seção não geodésica.*

Proposição 2.3. *Seja M uma superfície fechada em um 4-espaço euclideano $\mathbb{E}^4$ tal que a curvatura Gaussiana de M não muda de sinal. Então M é o produto de dois círculos planos se e somente se existe uma seção mínima não degenerada em M*

Se a curvatura gaussiana é nula em M, então temos o seguinte resultado local.

Proposição 2.4. *Seja M uma superfície em um espaço euclidiano 4-dimensional E^4 com curvatura Gaussiana nula. Então M é um subconjunto aberto da superfície produto de dois circulos planos se, e somente se, existe uma seção minimal paralela não geodésica em M.*

Lema 2.2 (Yau-1974)**.** *Seja M^2 uma superfície com vetor curvatura média paralelo em uma variedade com curvatura constante. Então ou M^2 é uma superfície mínima de uma subvariedade umbílica de N ou a segunda forma fundamental de M^2 pode ser diagonalizada simultaneamente.*

Teorema 2.1. *(Chen, 1973c; Yau, 1973) Seja M uma superfície em uma forma espacial $R^m(c)$ de dimensão m com curvatura constante c. Se o vetor curvatura média H é paralelo no fibrado normal, então M é uma das seguintes superfícies:*

- *(i) Uma superfície mínima de $R^m(c)$*
- *(ii) Uma superfície mínima de uma pequena hiperesfera de $R^m(c)$, ou*
- *(iii) Uma superfície com curvatura média H constante em uma 3-esfera de $R^m(c)$*

2.3 O Teorema de Erbach e o Teorema de Hopf

Nesta seção apresentaremos o *Teorema de Erbach* e o *Teorema de Hopf* que serão usados nas demonstrações do capitulo 3.Antes, porém, de enunciá-los, faremos algumas definições.

Definição 2.4. *Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se harmônica em Ω se é de classe C^2 em Ω e verifica a equação de Laplace:*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em todo ponto de Ω.

Como o operador de Laplace é linear, o conjunto das funções harmônicas nuna dada região Ω é um espaço vetorial que denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$.

Usando os operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

vemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\Delta u$$

Assim, outra forma de escrever a equação de Laplace $\Delta u = 0$ é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$$

Teorema 2.2 (Teorema de Hopf)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana orientável, compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em M tal que $\Delta f \geq 0$.Então f é constante. Em particular, as funções harmônicas em M, isto é, aquelas para as quais $\Delta f = 0$ são constantes.*

Definição 2.5. *Seja $f : M^m \to \overline{M}^n$ uma imersão isométrica. Definimos o primeiro espaço normal de f em $p \in M$ por*

$$N_1^f(p) = \{h(X,Y); X, Y \in T_pM\}$$

.

Claramente $N_1^f(p)$ é um subespaço vetorial de $T_pM^\perp$ e portanto $\dim N_1^f(p) \leq n - m$. O primeiro espaço normal também pode ser descrito como

$$N_1^f(p) = \{\xi \in T_pM^\perp; \mathcal{A}_\xi \equiv 0\}^\perp$$

Proposição 2.5 (*Teorema de Erbach*)**.** *Considere $\psi : M_n \to \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa n-dimensional M^n em uma variedade riemanniana $(n+p)$-dimensional $\overline{M}_c^{n+p}$ de curvatura seccional constante c. Se o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é invariante por transporte paralelo com respeito à conexão no fibrado normal e a dimensão de N_1 é constante igual a l, então existe uma subvariedade $(n+l)$-dimensional L^{n+l} totalmente geodésica de $\overline{M}_c^{n+p}$, tal que $\psi(M) \subset L^{n+l}$.*

Definição 2.6. *Seja M uma variedade n-dimensional de uma variedade Riemanniana m-dimensional e E um subfibrado do fibrado normal $T^\perp M$. Então E é dito paralelo no fibrado normal se, para toda seção ξ de E e todo vetor X tangente a M, tivermos $\nabla_X \xi \in E$.*

Combinando a definição (2.6) e a proposição (2.5) temos o seguinte:

Corolário 2.1. *Seja M uma subvariedade de uma variedade Riemanniana m-dimensional $R^m(c)$ completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante c. Se existe um subfibrado normal E de dimensão l que é paralelo no fibrado normal e o primeiro espaço normal N_x^1, gerado por $\{h(X,Y); X, Y \in T_xM\}$, está contido em E_x para cada $x \in M$, então M está contida em uma subvariedade totalmente geodésica $(n+l)$-dimensional de $R^m(c)$.*

Capítulo 3

Superfícies com curvatura Gaussiana constante e vetor curvatura média normalizado paralelo

Este capítulo é reservado à demonstração do teorema principal. Mas primeiro faremos a demonstração o teorema auxiliar.

3.1 Demonstração dos Lemas

Nesta seção apresenteremos alguns resultados e demostraremos os lemas que serão utilizados na demonstração do teorema auxiliar.

Seja M uma superfície analítica em uma variedade riemanniana $R^m(c)$ completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante c. Então é bem sabido que $R^m(c)$ é analítica e é isométrica a uma das formas espaciais construidas em [3] [pag. 21 e 22].

Considere K', K, K^N os tensores curvaturas associados com ∇', ∇ e $\nabla^{\perp}$. Vimos em (1.5) e (1.6) que para quaisquer campos de veotores tangentes X, Y, Z, W e campos normais ξ, η em M, as equações de Gauss e Ricci são, respectivamente, dadas por:

$$\langle K'(X,Y)Z, W\rangle = \langle K(X,Y)Z, W\rangle + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(Y,Z), h(X,W)\rangle \quad (3.1)$$

$$\langle K^N(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A\eta](X), Y\rangle \quad (3.2)$$

Em (1.4) vimos que a derivada covariante de h é dada por:

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{3.3}$$

Uma vez que $R^m(c)$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi fica reduzida a:

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{3.4}$$

Por hipótese assumimos que M tem vetor curvatura média normalizado paralelo e portanto podemos considerar campos unitários e mutuamente ortogonais $\xi_3, ..., \xi_m$ com $\xi_3 = \frac{H}{|H|}$. Então temos para cada campo $X \in \Gamma(TM)$

$$\nabla^{\perp}_X \xi_3 = 0. \tag{3.5}$$

Assim a equação (3.2) de Ricci nos dá:

$$\langle K^N(X,Y)\xi_3, \xi_r\rangle = \langle [\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_r](X), Y\rangle$$

como $K^N(X,Y)\xi_3 = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi_3 - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi_3 + \nabla_{[X,Y]}\xi_3 = 0 - 0 + 0 = 0$, teremos:

$$[\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_r] = 0 \tag{3.6}$$

para cada $r = 4, ..., m$ onde $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{\xi_i}$. Por outro lado, sendo $\xi_3, ..., \xi_m$ uma base ortonormal do espaço normal $T^{\perp}_p(M)$, então $H = \frac{1}{2}\sum_{r=3}^m (tr\mathcal{A}_r)\xi_r$ e usando que $\xi_3 = \frac{H}{|H|}$ obtemos:

$$|H|\xi_3 = \frac{1}{2}(tr\mathcal{A}_3)\xi_3 + \frac{1}{2}\sum_{r=4}^{m}(tr\mathcal{A}_r)\xi_r \Rightarrow (\frac{1}{2}tr\mathcal{A}_3 - |H|)\xi_3 + \frac{1}{2}\sum_{r=4}^{m}(tr\mathcal{A}_r)\xi_r = 0$$

Como $\xi_3, ..., \xi_m$ são linearmente independentes, concluímos que:

$$tr\mathcal{A}_r = 0 \; para \; r = 4, ..., m \tag{3.7}$$

Combinando (3.6) e (3.7), vemos que se $\mathcal{A}_3$ não for proporcional à transformação identidade I em um ponto $p \in M$, então $[\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_s] = 0$ em p para todos $r, s = 3, ..., m$.

De fato, como $\mathcal{A}_r$ é auto-adjunta e $tr\mathcal{A}_r = 0$ para todo $r = 4, \ldots, m$, existe uma base ortonormal β tal que

$$[\mathcal{A}_3]_\beta = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; \qquad [\mathcal{A}_r]_\beta = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \qquad e \qquad [\mathcal{A}_s]_\beta = \begin{bmatrix} p & q \\ q & -p \end{bmatrix}$$

Assim

$$[\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_s] = 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A}_r]_\beta[\mathcal{A}_s]_\beta = [\mathcal{A}_s]_\beta[\mathcal{A}_r]_\beta \Leftrightarrow xq = py$$

Mas,

$$[\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_r] = 0 \Rightarrow [\mathcal{A}_3]_\beta[\mathcal{A}_r]_\beta = [\mathcal{A}_r]_\beta[\mathcal{A}_3]_\beta \Rightarrow ay = yb \Rightarrow (a-b)y = 0$$

Como $\mathcal{A}_3 \neq \lambda I$ temos $y = 0$. Vale também que

$$[\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_r] = 0 \Rightarrow [\mathcal{A}_3]_\beta[\mathcal{A}_s]_\beta = [\mathcal{A}_s]_\beta[\mathcal{A}_3]_\beta \Rightarrow aq = qb \Rightarrow (a-b)q = 0$$

logo, $q = 0$. Assim vemos que $xq = 0 = py$, ou seja, $[\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_s] = 0$, para todo $r = 3, \ldots, m$. Consequentemente obtemos de (3.6) o seguinte:

Lema 3.1. *Seja $M_1 = \{p \in M; \mathcal{A}_3 = \lambda I$ em algum $\lambda \in \mathbb{R}\}$. Então $K^N \equiv 0$ sobre o fecho de $(M - M_1)$.*

Considerando que ξ_3 é paralelo a equação (3.3) nós dá:

$$\begin{aligned} \langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z), \xi_3\rangle &= \langle\nabla^\perp_X(h(Y,Z)), \xi_3\rangle - \langle h(\nabla_X Y, Z), \xi_3\rangle - \langle h(Y, \nabla_X Z), \xi_3\rangle \\ &= \langle\nabla^\perp_X(h(Y,Z)), \xi_3\rangle - \langle\mathcal{A}_3(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle\mathcal{A}_3(Y), \nabla_X Z\rangle \end{aligned}$$

Como

$$X\left\langle(Y,Z), \xi_3\right\rangle = \left\langle\nabla^\perp_X(h(Y,Z)), \xi_3\right\rangle + \left\langle(h(Y,Z)), \nabla^\perp_X \xi_3\right\rangle = \left\langle\nabla^\perp_X(h(Y,Z)), \xi_3\right\rangle$$

temos

$$\langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z),\xi_3\rangle = X\langle h(Y,Z),\xi_3\rangle - \langle \mathcal{A}_3(\nabla_X Y),Z\rangle - \langle \mathcal{A}_3(Y),\nabla_X Z\rangle \tag{3.8}$$

Sobre o interior de M_1 que denotamos por $int(M_1)$, temos $\mathcal{A}_3 = \lambda I$. Logo, usando (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z),\xi_3\right\rangle &= X\left\langle h(Y,Z),\xi_3\right\rangle - \left\langle \lambda\nabla_X Y,Z\right\rangle - \left\langle \lambda Y,\nabla_X Z\right\rangle \\
&= X\left\langle A_3(Y),Z\right\rangle - \lambda\left\langle \nabla_X Y,Z\right\rangle - \lambda\left\langle Y,\nabla_X Z\right\rangle \\
&= X(\lambda\left\langle Y,Z\right\rangle) - \lambda(\left\langle \nabla_X Y,Z\right\rangle + \left\langle Y,\nabla_X Z\right\rangle) \\
&= \lambda X\left\langle Y,Z\right\rangle + X(\lambda)\left\langle Y,Z\right\rangle - \lambda X\left\langle Y,Z\right\rangle
\end{aligned}$$

o que implica,

$$\langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z),\xi_3\rangle = X(\lambda)\langle Y,Z\rangle \tag{3.9}$$

De modo análogo, obtemos

$$\left\langle(\overline{\nabla}_Y h)(X,Z),\xi_3\right\rangle = Y(\lambda)\left\langle X,Z\right\rangle \tag{3.10}$$

Da equação de Codazzi (3.4) temos que: $(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z)$. Então de (3.9) e (3.10), obtemos:

$$(X\lambda)\langle Y,Z\rangle = Y(\lambda)\langle X,Z\rangle \tag{3.11}$$

Uma vez que (3.11) vale para quaisquer X,Y e Z tangentes a $int(M_1)$ vemos que λ é constante em cada componente de $int(M_1)$, pois

$$X(\lambda)\langle Y,Z\rangle - Y(\lambda)\langle X,Z\rangle = 0 \Rightarrow \langle X(\lambda)Y - Y(\lambda)X,Z\rangle = 0 \Rightarrow X(\lambda)Y - Y(\lambda)X = 0$$

para todo X,Y,Z tangentes a $int(M_1)$. Logo, $X(\lambda) = Y(\lambda) = 0$, ou seja, λ é constante.

A funçao $\langle H, H\rangle$ é analítica em M e igual a λ^2 em M_1. Veja

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{m}(trA_{\xi_i})\xi_i = \frac{1}{2}(traA_3)\xi_3$$

pois $trA_r = 0, r = 4, \ldots, m$. Logo,

$$\langle H, H\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(trA_3)\xi_3, \frac{1}{2}(trA_3)\xi_3 \right\rangle = \frac{1}{4}(trA_3)^2$$

Como em M_1 temos $A_3 = \lambda I$ segue que $trA_3 = 2\lambda$, e daí

$$\langle H, H\rangle = \frac{1}{4}(2\lambda)^2 = \lambda^2$$

Tem-se então que $\langle H, H\rangle$ ou é constante em toda M ou não é constante em qualquer aberto de M.

No primeiro caso temos que o vetor curvatura média H é paralelo e aplicando o Teorema (2.1) de Chen e Yau, temos que M é uma superfície como descrita no teorema.

No segundo caso, temos $int(M_1)$ vazio e portanto pelo lema (3.1) tem-se K^N anulando-se em M.

Estes fatos ficam entao sumarizados no seguinte:

Lema 3.2. *Sob certas hipóteses do teorema auxiliar, ou M é uma superfície mínima de uma hiperesfera de $R^m(c)$ ou M tem um tensor curvatura normal nulo.*

Agora, nós assumimos que o tensor curvatura normal K^N de M é nulo. Seja $T_pM^{\perp}$ o espaço normal de M em $R^m(c)$ no ponto $p \in M$, colocamos $N_p = \{\xi \in T_pM^{\perp}; \langle \xi, H\rangle = 0\}$. Definimos uma aplicação linear γ entre N_p e o espaço das matrizes de ordem 2, simétricas:

$$\gamma(\xi) = A_\xi \tag{3.12}$$

Consideremos $O_p = \gamma^{-1}(0)$ e $N_p^{'}$ o espaço de N_p dado por

$$N_p = N_p^{'} \oplus O_p, \qquad N_p^{'} \perp O_p$$

Definimos $M_2 = \{p \in \text{M}; dimN_p' = 0\}$ e $M_3 = \{p \in M; dimN_p' = 1\}$. Então $M = M_2 \cup M_3$. Além disso, é fácil ver que M_3 é um subconjunto aberto de M.

Lema 3.3. Lema 3: *O fecho de cada componente de $int(M_2)$ está em uma subvariedade totalmente geodésica e 3-dimensional de $R^m(c)$.*

Demonstração. Uma vez que $Imh = \{h(X,Y); X, Y \in \mathcal{X}(M)\}$ é um subfibrado normal de dimensão 1 sobre M_2 e também é paralelo, então pelo corolário (2.1) implica que cada componente conexão de $int(M_2)$ e assim seu fecho está uma subvariedade totalmente geodésica 3-dimensional de $R^m(c)$. ∎

Lema 3.4. *O fecho de cada componente conexa de M_3 está em uma subvariedade totalmente geodésica e de dimensão 4 em $R^m(c)$.*

Demonstração. Consideremos uma componente conexa M_3^0 de M_3. Considerando que $dimN_p' = 1$ para cada $p \in M_3^0$, podemos escolher um vetor $\xi_4 \in N_p'$. Assim temos :

$$A_r = 0, \qquad r = 5, ..., m \tag{3.13}$$

A partir de (3.3) obtemos:

$$\langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z), \xi_r\rangle = \langle\nabla_X^\perp(h(Y,Z)), \xi_r\rangle = -\langle h(Y,Z), \nabla_X^\perp \xi_r\rangle \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.4) temos:

$$\langle h(Y,Z), \nabla_X^\perp \xi_r\rangle = \langle h(Y,Z), \nabla_Y^\perp \xi_r\rangle \qquad r = 5, ..., m \tag{3.15}$$

Colocando

$$\nabla_X^\perp \xi_r = \sum_{s=3}^{m} \omega_r^s \xi_s, \qquad r = 3, ..., m \tag{3.16}$$

temos $\omega_r^s + \omega_s^r = 0$. Além disso, usando (3.5) vemos que $\omega_r^3 = 0$. Consequentemente a partir de (3.15) e (3.16) chegamos a

$$\omega_r^4 \langle A_4(Y), Z\rangle = \omega_r^4(Y)\langle A_4(X), Z\rangle \qquad r = 5, ..., m \tag{3.17}$$

Uma vez que A_4 é não-singular em M_3, tem-se de (3.17) que $\omega_r^4 = 0$ para cada $r = 5, ..., m$. Por outro lado, usando que $\omega_3^4 = 0$ e ω_r^s é anti-simétrico obtemos que ξ_4 é paralelo. Concluímos portanto que Imh é um subfibrado normal bidimensional e paralelo sobre $int(M_3)$. Assim, o corolário (2.1) implica que cada componente de M_3 está em uma subvariedade 4-dimensional e totalmente geodésica de $R^m(c)$. ■

Lema 3.5. *Se K é identicamente nulo então ou M_2 é a superfície M inteira ou o fecho de M_3 é toda a superfície M.*

Demonstração. O subconjunto M_2 é fechado em M. Se M_2 é um subconjunto própio de M então M_3 é um subconjunto não-vazio e aberto de M. Assuma que M_2 tem interior não-vazio e p é um ponto comum aos bordos de $int(M_2)$ e M_3. Então devido ao anulamento de K^N a proposição (2.1) nos garante a existência de $(m-2)$ campos vetoriais ortonormais $\eta_3, ..., \eta_m$ em uma vizinhança U de $p \in M$, suficientemente pequena tal que η_r é paralelo no fibrado normal. Além disso, uma vez que ξ_3 é paralelo em M e $\xi_4 \in N'$ é paralelo em M_3, a proposição (2.2) nos diz que podemos escolher $\eta_3, ..., \eta_m$ em U tais que $\eta_3 = \xi_3$ em U e $\eta_4 = \xi_4$ em $U \cap M_3$.

Seja x_1, x_2 um sistema de coordenadas isotérmicas em U, com o tensor métrico g dado por

$$g = E((dx_1)^2 + (dx_2)^2)$$

Consideramos $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e definimos:

$$L = h(X_1, X_1); M = h(X_1, X_2) \text{ e } N = h(X_2, X_2)$$

Então de acordo com (2.15) e (2.16), obtemos:

$$\nabla^{\perp}_{X_2}\left(\frac{L-N}{2}\right) - \nabla^{\perp}_{X_1} M = -E\nabla^{\perp}_{X_2} H \tag{3.18}$$

$$\nabla^{\perp}_{X_1}\left(\frac{L-N}{2}\right) - \nabla^{\perp}_{X_2} M = -E\nabla^{\perp}_{X_1} H \tag{3.19}$$

Considerando que η_4 é uma seção mínima no fibrado normal e ainda das equações (3.17) e (3.18) temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\langle \frac{L-N}{2}, \eta_4 \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_1}\langle M, \eta_4\rangle = 0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\langle \frac{L-N}{2}, \eta_4 \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_2}\langle M, \eta_4\rangle = 0 \tag{3.21}$$

Isso implica a analiticidade da função $f(z)$, em que $z = x_1 + ix_2$, dada abaixo:

$$f = \left\langle \frac{L-N}{2}, \eta_4 \right\rangle - \langle M, \eta_4\rangle i, i = \sqrt{-1}$$

Desse modo, devemos ter $f \equiv 0$ em U, uma vez que no subconjunto aberto e não-vazio $U \cap M_2$ a função f é nula. Em particular, temos então:

$$\langle L, \eta_4\rangle = \langle N, \eta_4\rangle \tag{3.22}$$

Por outro lado, uma vez que η_4 é uma seção mínima

$$\langle L, \eta_4\rangle + \langle N, \eta_4\rangle = 0 \tag{3.23}$$

Assim provamos que $A_{\eta 4} = 0$ em $U \cap M_3$. Isso contradiz a definição de M_3 e portanto o Lema está provado. ■

3.2 Demonstração do Teorema auxiliar:

Nesta seção vamos demonstrar o teorema auxiliar.

Teorema 3.1 (Teorema auxiliar). *Seja M uma superfície analítica em uma variedade Riemanniana $R^m(c)$, completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante igual a c. Se M tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M está em uma hiperesfera de $R^m(c)$ como uma superfície mínima ou M está em uma subvariedade totalmente geodésica de $R^m(c)$.*

Demonstração. Para demonstrar o Teorema (3.1), observamos pelos lemas (3.2), (3.3) e (3.5) que uma das 3 afirmações seguintes é válida:

(i) A superfície M é mínima em uma hiperesfera de $R^m(c)$;

(ii) A superfície M está em uma subvariedade 3-dimensional de $R^m(c)$;

(iii) O fecho de M_3 é toda a superfície M e o tensor curvatura normal é identicamente zero em M.

No caso em que a terceira afirmação acima é válida e que M_3 tenha apenas uma componente conexa, então pelo lema (3.4), a superfície M está em uma subvariedade totalmente geodésica 4-dimensional de $R^m(c)$ e o teorema é verdadeiro.

Agora assumamos que aconteça (iii) mas que M_3 tenha mais de uma componente conexa. Sejam N_1 e N_2 componentes de M_3 tais que N_1 e N_2 tenham um ponto $p \in \partial N_1 \cap \partial N_2$ em comum. Devido o anulamento de K^N em M e a proposição (2.1), existe uma vizinhança U de p suficientemente pequena e existem $m-2$ campos ,normais unitários e mutuamente ortogonais, paralelos em U, digamos $\eta_3, ..., \eta_m$ tais que $\eta_3 = \xi_3 = \frac{H}{|H|}$ em U e $\eta_4 = \xi_4 \in N'$ em $U \cap N_1$. Uma vez que cada η_r com $r = 5, ..., m$ é uma seção mímina paralela em U, temos usando o Lema (2.1), que as funções $f_r(z)$ com $z = x_1 + ix_2$ dadas a seguir são analíticas:

$$f_r = \langle \tfrac{L-N}{2}, \eta_r \rangle + \langle M, \eta_r \rangle i \text{ com } r = 5, ..., m$$

Considerando que $\langle L, \eta_r \rangle = \langle M, \eta_r \rangle = \langle N, \eta_r \rangle = 0$ com $r = 5, ..., m$ em $U \cap N_1$, temos $f_r \equiv 0$ em U. Combinando isto com a condição

$$\langle L, \eta_r \rangle + \langle N, \eta_r \rangle = 0 \text{ com } r = 5, ..., m$$

vemos que $A_{\eta_r} \equiv 0$ em U. Isto implica que N_1 e N_2 estão em uma mesma subvariedade totalmente geodésica 4-dimensional de $R^m(c)$. Isto conclui a prova do Teorema. ∎

3.3 Demonstração do Teorema Principal

Teorema 3.2. *Seja M uma superfície analítica, orientada e fechada do espaço euclidiano E^m. Se M tem curvatura Gaussiana constante e tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M é uma superfície mínima de uma hiperesfera de E^m ou M é uma superfície produto de dois círculos planos.*

Demonstração. Pelo Teorema (3.1), a superfície M ou é uma superfície mínima de uma hiperesfera de E^m ou M está em um subespaço linear E^4 de E^m. Assumiremos que ocorre o segundo caso.

Consideremos campos ortonormais $\xi_3 = \frac{H}{|H|}$ e ξ_4 em E^4, então a partir do paralelismo de ξ_3 obtemos o paralelismo de ξ_4 e está seção é mínima e globalmente definida em M. Portanto, pelo Lema (2.1), a função

$$\varphi = \langle \tfrac{L-N}{2}, \xi_4 \rangle - \langle M, \xi_4 \rangle i$$

é analítica em $z = x_1 + ix_2$ para cada conjunto de coordenadas isotérmicas x_1, x_2. Assim, a função $log|\varphi^2|$ é harmônica pois

$$\Delta(log|\varphi^2|) = 0 \tag{3.24}$$

Seja $A_4 = A_{\xi_4}$. Usando a métrica induzida $g = E(dx_1)^2 + (dx_2)^2$ e sabendo que: $\langle L, \xi_4 \rangle = \langle h(X_1, X_1), \xi_4 \rangle = \langle A_4(X_1), X_1 \rangle$, $\langle N, \xi_4 \rangle = \langle A_4(X_2), X_2 \rangle$, $\langle M, \xi_4 \rangle = \langle A_4(X_1), X_2 \rangle$ e que $det(A_4) = \langle A_4(X_1), X_1 \rangle . \langle A_4(X_2), X_2 \rangle - \langle A_4(X_1), X_2 \rangle . \langle A_4(X_2), X_1 \rangle$, temos que:

$$\begin{aligned}
|\varphi^2| &= \left(\langle \frac{L-N}{2}, \xi_4 \rangle \right)^2 + (\langle M, \xi_4 \rangle)^2 \\
&= \frac{1}{4} E^2 \left(\langle L, \xi_4 \rangle - \langle N, \xi_4 \rangle \right)^2 + (\langle M, \xi_4 \rangle)^2 \\
&= \frac{1}{4} E^2 \big((\langle A_4(X_1), X_1 \rangle)^2 - 2\langle A_4(X_1), X_1 \rangle . \langle A_4(X_2), X_2 \rangle + (\langle A_4(X_2), X_2 \rangle)^2 \big) + \\
&\quad + E^2 \left(\langle A_4(X_1), X_2 \rangle \right)^2 \\
&= \frac{1}{4} E^2 \big((\langle A_4(X_1), X_1 \rangle)^2 + 2\langle A_4(X_1), X_1 \rangle . \langle A_4(X_2), X_2 \rangle + (\langle A_4(X_2), X_2 \rangle)^2 \big) - \\
&\quad - E^2 \big(\langle A_4(X_1), X_1 \rangle . \langle A_4(X_2), X_2 \rangle - \langle A_4(X_1), X_2 \rangle . \langle A_(X_2), X_1 \rangle \big) \\
&= \frac{1}{4} E^2 \left(\langle L, \xi_4 \rangle + \langle N, \xi_4 \rangle \right)^2 - E^2 det(A_4) \\
&= -E^2 det(A_4)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Pois por (3.23), temos que $\langle L, \xi_4 \rangle + \langle N, \xi_4 \rangle = 0$

Usando os símbolos de Christoffel é possível mostrar que a curvatura Gaussiana G na métrica induzida $g = E(dx_1)^2 + (dx_2)^2$ é dada por:

$$G = -\frac{1}{2E}\Delta(logE)$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4E}\Delta(logE^2) &= -\frac{1}{4E}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{E^2}\frac{\partial E^2}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{1}{E^2}\frac{\partial E^2}{\partial x_2}\right) \\
&= -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x_2}\right) \\
&= -\frac{1}{2E}\Delta(logE) \\
&= G
\end{aligned}$$

Portanto,

$$G = -\frac{1}{4E}\Delta(logE^2) \tag{3.26}$$

Assim, usando (3.26) e (3.26) , obtemos:

$$G = \frac{1}{4E}\Delta log|detA_4| \tag{3.27}$$

Considerando que G é constante em M e sendo M fechada, temos pelo Teorema de Hopf (2.2) que $\Delta log|detA_4| \equiv 0$ e portanto M é flat e $det(A_4)$ é constante. A partir destes fatos nós podemos concluir que ξ_4 é uma seção não-degenereada, mínima e paralela em M. Assim pela proprosição (2.3), a superfície M é produto de dois cículos planos e isto prova o teorema. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1988) - segunda edição.(Projeto Euclides).

[2] Caminha, A., *Notas de Geometria Diferencial*, UFC, (2010).

[3] Chen, B. Y., *Geometry of Submanifolds*, New York: M. Dekker, (1973).

[4] Chen, B. Y., *On the surfaces with parallel mean curvature vector.* Indiana Univ. Math. J. 22, 655-666 (1973).

[5] Chen, B. Y., and G. D. Ludden, *Surfaces with mean curvature vector parallel in the normal bundle.* Nogoya Math. J. 47, 161-167 (1972).

[6] Chen, B. Y., *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector.* Mh. Math. 90, 185-194 (1980).

[7] Erbacher, J. A., *Reduction of the codimension of an isometric immersion.* J. Diff. Geom. 5, 333 - 340 (1971).

[8] Eschemburg, J. H. and Tribuzy, R., *Reduction of codimension of surfaces.* Geometria Dedicata (1989).

[9] Leung, D. S. P., *The Cauchy problem for surfaces with parallel normalized mean curvature vector in a four dimensional Riemannian manifold. (To appear)*

[10] Ruh, E. A., *Minimal immersions of* 2*-spheres in* S^4. Proc. Amer. Math. Soc. 28, 219-222, (1971).

[11] Sebastiani, M., *Introdução à Geometria Analítica Complexa*, Rio de janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004. (Projeto Euclides).

[12] YAU, S. T., *Submanifolds with cosntant mean curvature*. I. Amer. J. Math. 96, 346-366 (1974).