UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

GEOMETRIA PROJETIVA: ALGUMAS APLICAÇÕES BÁSICAS PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

YURY DOS SANTOS BEZERRA

MANAUS
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

YURY DOS SANTOS BEZERRA

GEOMETRIA PROJETIVA: ALGUMAS APLICAÇÕES BÁSICAS PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2014

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

B574g	Bezerra, Yury dos Santos Geometria Projetiva : Algumas Aplicações Básicas para Alunos do Ensino Médio / Yury dos Santos Bezerra. 2014 77 f.: il. color; 31 cm. Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas. 1. Geometria Projetiva. 2. Geometria Clássica. 3. Teoremas. 4. Reflexões. 5. Pesquisa. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

YURY DOS SANTOS BEZERRA

GEOMETRIA PROJETIVA: ALGUMAS APLICAÇÕES BÁSICAS PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 21 de novembro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Membro

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a DEUS, fonte de vida e graça, por ter me iluminado e me abençoado durante esta árdua caminhada.

Ao meu pai, José Valdevino Bezerra, e minha mãe, Benedita Maria dos Santos Bezerra, pela amor, carinho e educação que me deram e pelo incentivo aos estudos.

A minha amada esposa, Lidiane Alves dos Santos, e meus amados filhos, Byanka Nycole Alves dos Santos e Lucas Heitor Alves dos Santos, que jamais deixaram de me apoiar, mesmo ficando quatro dos sete dias da semana longe para que eu pudesse estudar e alcançar este objetivo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela paciência, por estar sempre disponível e disposto a ajudar pela sabedoria com que me orientou neste TCC. O que me ajudou a crescer profissionalmente. Obrigado por ter acreditado em meu potencial.

A todos meus professores do PROFMAT, pela arte de ensinar, por nos desafiar e acreditar em nossa capacidade de aprender sempre mais.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço aos amigos e, em especial, ao Júlio César Marinho da Fonseca pelo companheirismo nas árduas vitórias conquistadas e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

Objetivou-se, com o presente trabalho, analisar os principais teoremas da Geometria Projetiva, apresentando alguns problemas e suas respectivas soluções, recorrendo ao teorema de Menelaus e alguns argumentos da Geometria Clássica. Mesmo sendo ela desconhecida pelos alunos do Ensino Médio, busca-se com este trabalho apresentá-la a eles por meio da introdução de conhecimentos fundamentais desta geometria, como Projetividade, Perspectividade, entes duais e alguns teoremas como: o Teorema de Desargues, o Teorema Fundamental e o Teorema de Pappus. Espera-se que através desta abordagem sobre algumas aplicações básicas da Geometria Projetiva, sejam proporcionadas condições necessárias para que o leitor, professores e especialistas aprofundem seus conhecimentos sobre a Geometria Projetiva e se sintam motivados para continuar a pesquisar o assunto em pauta, bem como os motive a buscar outras fontes de informações para favorecer avanços nas reflexões desta geometria. Espera-se, ainda, que o professor possa despertar o interesse dos seus alunos pela pesquisa sobre esta geometria muito importante na nossa vida.

Palavras-chave: Geometria Projetiva, Geometria Clássica, Teoremas, Reflexões, Pesquisa.

ABSTRACT

The objective of the present work was to analyze the main theorems of projective geometry, showing some problems and their solutions, using the thorem of Menelaus and some arguments of Classical Geometry. Even though this be a unknown subject by high school students, this study sought to present it to them through the introduction of fundamental knowledge of this geometry, such as Projectivity, perspectivity, dual beings and some theorems such as Theorem of Desargues Theorem and the fundamental theorem of Pappus. It is hoped that through this approach on some basic applications of Projective Geometry, conditions are provided for the reader, teachers and specialists to deepen their knowledge of Projective Geometry and feel motivated to continue researching the subject of this work, as well as motive to seek other sources of information to foster advances in the reflections of this geometry. Furthermore, it is expected that the teacher can arouse the interest of students for research on this Geometry very important in our lives.

Keywords: Projective Geometry, Classical Geometry, Theorems, Reflections, Research.

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS

$\overleftrightarrow{AB}$	Reta AB.
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$	Reta AB perpendicular a reta CD.
$\overrightarrow{OP}$	Semirreta AB.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$A\widehat{B}C$	Medida do ângulo ABC.
$A\hat{O}B \neq B\hat{O}A$	ângulo AOB diferente do ângulo BOA.
$\barwedge$	Correspondência elementar (Projetividade).
$\doublebarwedge$	Correspondência entre duas fileiras (Perspectividade).
ΔABC	Triângulo ABC.
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Triângulo ABC semelhante ao triângulo DEF.
$A' = Inv(A)$	A' é o inverso de A.
$\dfrac{EB}{EO}$	Razão entre o segmento EB e o segmento EO.
l_{CD}	Lado CD.
$r(ERS)$	É a razão entre ER e ES, ou seja, $\dfrac{ER}{ES}$.
$m(\overleftrightarrow{CD})$	Coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CD}$.
$\blacksquare$	Indica o fim de uma demonstração.

Introdução

O que é Geometria Projetiva?

Esta resposta vem com uma analogia da Geometria que conhecemos desde o Ensino Fundamental, a Euclidiana. Vimos que na Geometria Euclidiana as retas de um plano se interceptam ou não, ou seja, estas retas são concorrentes ou paralelas. As transformações que conservam os ângulos de incidência e o paralelismo são chamadas transformações euclidianas. Por outro lado na Geometria Afim, as transformações que conservam o paralelismo e a razão entre segmentos paralelos são chamadas transformações afim. Várias vezes, falamos que as transformações afim conservam as propriedades que são mantidas numa projeção paralela entre dois planos.[1]

Há bastante tempo, a Geometria Euclidiana tem sido suficiente para arcar com as necessidades do homem, e a principal delas era medir as formas como elas realmente são. Portanto, o significado do nome Geometria é: medição sobre Terra.

Apesar de que Pappus já tinha descoberto algumas proposições não métricas, como o famoso Teorema de Pappus, no tempo de Alexandria (400 *a.C.* [1]), começando de fato a história da Geometria Projetiva. No entanto, foi durante o Renascimento, com a intenção de dar realismo às artes e reproduzindo de forma fiel a imagem capturada pela visão humana, que foi feita a introdução de percepção de profundidade em desenhos e pinturas.

Na Geometria Projetiva, os acostamentos de uma estrada não são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte. As medidas são distorcidas a tal ponto que retas paralelas podem se encontrar num ponto, conhecido como ponto de fuga, isto ocorre quando ao projetarmos os raios luminosos sobre o plano da retina do olho. Essa é uma das características marcantes da Geometria Projetiva, duas retas quaisquer sempre se intersectam. Portanto, enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, a Geometria Projetiva lida com o mundo que vemos.

Ao longo deste TCC será feito uma abordagem histórica da Geometria, em particular a Geometria Projetiva. Esperamos contribuir para que os professores se tornem capazes cada vez mais de refletir sobre como a Geometria Projetiva pode contribuir para a formação da cidadania. Um dos nossos propósitos é recuperar os conhecimentos básicos sobre esta Geometria que é desconhecida não somente pelos alunos, mas também é desconhecida por grande parte dos professores. A intenção é fazer com que o leitor explore a Geometria Projetiva, conhecendo sua história desde as

[1] 400 a.C.: 400 anos antes de Cristo

origens primitivas até a Idade Heroica na Geometria; conhecer os dois entes duais mais importantes da Geometria Projetiva; conhecer também a Projetividade e Perspectividade, que tratam sobre intersecção de retas; conhecer o Teorema de Desargues, que representam triângulos perspectivos; conhecer os Axiomas e suas consequências, que é de fundamental importância para o desenvolvimento teórico desta Geometria; conhecer o Conjunto quadrangular e Conjunto harmônico, que representam pontos colineares; conhecer a Polaridade, o qual trata de transformar um ponto em uma reta e uma reta em um ponto; conhecer o Princípio da Dualidade, que dualiza uma definição, um teorema e até mesmo uma figura, isto é, uma das características mais atraente da Geometria Projetiva; conhecer o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva, que determina a projetividade de pontos; conhecer o Teorema de Pappus, o qual utiliza retas coplanares com conjuntos de pontos distintos para determinar pontos colineares.

Fizemos uma pesquisa bibliográfica para a realização do estudo deste TCC, como: Harold Scott Macdonald Coxeter; Frank Jr. Ayres e outros.

Observações históricas

(a) Origens Primitivas

A história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido entre séculos *VII* e *VI* a.C. e influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido justamente, o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, a partir da semelhança entre um lado da pirâmide e a relação da altura da pirâmide com a sombra da própria pirâmide e, por outro, a relação de sua própria altura com sua própria sombra.

A Matemática pitagórica, datada da primeira metade do século *V* a.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides. Possivelmente, Pitágoras de Samos foi um aluno da escola de Tales. Pitágoras estabeleceu uma sociedade religiosa e filosófica que contribuiu muito para a formalização da geometria com trabalhos nas teorias de paralelas, figuras similares e uma combinação de teoria de números e misticismo. O próprio Pitágoras introduziu as palavras *Filosofia* [2] e *Matemática.* [3]

Após a morte de Pitágoras, a escola Pitagórica dividiu-se em duas facções. Uma formada por aqueles que aceitavam na palavra do mestre como uma revelação e a outra, formada por aqueles seguidores que desejavam o novo aprendizado, os matemáticos.[2]

Mais adiante foi estabelecido pelo grego Hipócrates de Chios (Professor de Geometria), ao escrever um livro texto, *Elementos de Geometria*, no qual os teoremas eram arranjados numa sequência onde os subsequentes eram provados tendo como base os teoremas anteriores. Tudo indica que sua obra está contida nos Livros *I* e *II* dos *Elementos de Euclides*. Com ele se tem o início da sistematização do conhecimento Matemático, estabelecendo uma estrutura de apresentação que sobrevive até hoje. Nessa mesma época, foi fundada em Atenas pelo filósofo Platão, a famosa

[2](Filosofia: amor à sabedoria)
[3](Matemática: o que é aprendido)

Academia, uma instituição que congregava os maiores sábios da época. Sobre seu portão estava escrito:

"Não permitam a entrada de quem não saiba geometria."

Com a Academia, a Matemática obteve o status de Ciência Pura, seus membros não tinham a preocupação em aplicar os conhecimentos adquiridos no seu trabalho e a ênfase era no desenvolvimento do pensamento matemático e filosófico. Um dos membros da Academia, dos 17 aos 30 anos, foi o filósofo Aristóteles. A contribuição de Aristóteles para os fundamentos da Matemática foi indireta, construiu uma teoria de afirmações que começava com noções comuns, noções especiais, definições e um tratado sobre lógica em Filosofia, estabelecendo a base para toda a Matemática grega.[3].

A partir do século *XIX* a Matemática Pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza, pois em certa época, antes do século *XIX*, pensou-se que a Matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem. Afirmações sobre as origens da geometria são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Apenas nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita. Heródoto e Aristóteles não se ariscaram a propôr origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é lógico que a geometria que eles tinham em mente tinha raízes mais antigas.

Heródoto mantinha que a Geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Já Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria. Destas ideias de Heródoto e Aristóteles podemos considerar como representações de duas teorias opostas quanto às origens da Matemática.

No século *XX*, os matemáticos desempenham uma atividade intelectualmente sofisticada, difícil de definir, porém parte do que hoje se chama Matemática deriva de ideias que originalmente estavam centradas nos conceitos de grandeza, forma e número.

(b) A Geometria

No século *XV* na Itália, começa a história da Geometria Projetiva, junto com o Renascimento. Os artistas, buscando mais realismo para suas obras, introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectividade.

A Geometria Pura no século *XVI* não ficou inteiramente sem representantes, pois contribuições, não espetaculares, foram feitas na Alemanha por Johannes Werner (1468-1528) e Albrecht Dürer (1471-1528), e na Itália por Francesco Maurolico (1494-1575) e Pacioli. A Alemanha e a Itália predominavam nas contribuições à Matemática durante a Renascença. Werner tinha ajudado a preservar à trigonometria de Regiomontanus, mas de maior importância para a Geometria foi sua obra em latim, em 22 livros, sobre Elementos de Cônicas, impressa em Nuremberg em 1522.

A obra de Werner se relaciona de perto com os estudos sobre Cônicas da antiguidade, mas ao mesmo tempo na Itália e na Alemanha uma relação mais ou menos nova entre a Matemática e a Arte estava aparecendo. Um ponto importante em que a Arte Renascentista diferia da medieval era o uso da perspectiva na representação plana de objetos do espaço tridimensional. Outro passo no desenvolvimento da perspectiva foi dado pelo pintor italiano de afrescos, Piero della Francesca (1410?-1492), em *De Prospectiva Pingendi* (cerca de 1478) atacou o problema mais complicado de representar, sobre o plano da pintura, objetos em três dimensões vistos de um ponto de vista dado. Escreveu também um *De corporibus regularibus* em que observou "a proporção divina" em que as diagonais de um pentágono regular se cortam e em que achou o volume comum a dois cilíndros circulares iguais cujos eixos se cortam em ângulo reto. A relação entre a Arte e a Matemática era também forte na obra de Leonardo da Vinci. Ele escreveu uma obra, agora perdida, sobre perspectiva; seu *Trattato Dela Pittura* começa com a advertência:

"Que ninguém que não seja matemático leia minhas obras".[2].

Por volta de 1630 a Geometria Projetiva de Desargues tinha uma enorme vantagem em generalidade sobre a geometria métrica de Apolônio, Descartes e Fermat, pois muitos casos especiais de um teorema se juntam num enunciado geral. Eram tão raros os exemplares do *Brouillon Projet* de Desargues que pelo fim do século todos haviam desaparecido, pois Desargues publicava suas obras não para vendê-las, mas para dá-las aos amigos. Parte do abandono sofrido pela Geometria Projetiva é culpa do próprio Desargues, pois escrevia de modo difícil e pouco convencional. Não escrevia para estudiosos profissionais, que poderiam ter seguido seus voos de imaginação, mas para mecânicos e matemáticos práticos que não compreenderam o sentido de sua obra.

O prestígio da álgebra era tal que por quase dois séculos a beleza da Geometria Projetiva passou despercebida. Mesmo hoje o nome de Desargues é familiar não por ser o autor do *Brouillon Projet*, mas por uma proposição que não aparece no livro, o famoso Teorema de Desargues:

"Se dois triângulos estão colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os pontos de intersecção de pares de lados correspondentes são colineares, e reciprocamente."[2].

Desargues foi o profeta da Geometria Projetiva, mas não foi reconhecido em seu tempo, em grande parte porque seu discípulo mais promissor, Blaise Pascal, abandonou a Matemática pela Teologia. Pascal foi um prodígio matemático. Os trabalhos do arquiteto Girard Desargues (1591-1661), do filósofo Blaise Pascal (1623-1662) e do matemático Gaspard Monge (1746-1818) impulsionaram o desenvolvimento da Geometria Projetiva. No entanto, somente em 1895, Mario Pieri (1860-1913) estabeleceu um sistema de axiomas para a Geometria Projetiva.

Uma diferença fundamental da Geometria Projetiva para Geometria Euclidiana/Afim é que não é mais necessário distinguir as seções cônicas entre círculos, elipses, parábolas e hipérboles ou diferenciar as retas paralelas das não paralelas. Desprovida totalmente de medidas, a Geometria Projetiva Plana se ocupa essencialmente com as incidências entre duas primitivas geométricas: pontos e retas. Nesta Geometria, qualquer par de retas distintas é incidente em um ponto e por qualquer par de pontos distintos passa-se somente uma reta. Esta dualidade é uma das características fundamentais, permitindo associar a ela uma estrutura simétrica caracterizada pelo Princípio da dualidade.

Porém, demorou para que essas ideias sobre a Geometria pudessem ser formuladas matematicamente. Foi apenas em 1639, com o célebre e pioneiro trabalho sobre a teoria geométrica das cônicas, o *Broullion Projet*, que Girard Desargues (1591-1661) formalizou esses conceitos. Contudo, talvez pela própria maneira como tinham sidos escritos, em uma linguagem um tanto peculiar, o trabalho e as ideias de Desargues não foram bem aceitos na época. Somente no início do século *XIX*, Jean Victor Poncelet (1788-1867) pôde resgatá-los. Poncelet, aluno da École Polytechnique e da Academia Militar de Metz, foi preso durante a campanha napoleônica contra a Rússia e nos dois anos que passou na prisão, sem livros, desenvolveu ideias que revolucionariam a geometria da época. Seus trabalhos, encabeçados pelo clássico *Traité des Propriétés Projectives des Figures* de 1822, deram-lhe o mérito de ser conhecido como o pai da Geometria Projetiva.

Após Poncelet, outros grandes nomes surgiram na Geometria Projetiva, como Michel Chasles (1798-1867), Jacob Steiner (1796-1863), Karl Christian e Von Staudt (1798-1867). Enfim, no final do século *XIX*, a Geometria Projetiva estava definitivamente solidificada.

(c) A Idade Heroica na Geometria

Dentre todos os ramos da Matemática a Geometria tem sido o mais sujeito a mudanças de gosto, de uma época para outra. Na Grécia clássica subiu ao *zênite*[4], para cair ao *nadir*[5] ao tempo da queda de Roma. Tinha recuperado parte do terreno perdido na Arábia e na Europa da Renascença. No século *XVII* esteve no limiar de uma nova era, mas novamente foi esquecida, ao menos pelos pesquisadores em Matemática, por quase mais dois séculos, permanecendo à sombra dos ramos da nova análise. A redescoberta quase explosiva da Geometria como um ramo vivo da Matemática veio principalmente no início do século *XIX*. Uma característica importante da Geometria da segunda metade do século *XIX* era o entusiasmo com que eram estudadas transformações de tipos variados. Um dos mais populares dentre esses era um grupo de transformações formando o que agora se chama Geometria Projetiva.

Em 1898-99, o matemático alemão David Hilbert (1862 - 1943) apresentou um sistema de axiomas completo para a Geometria Euclidiana Plana e Espacial, numa série de conferências na Universidade de Göttingen. Isto significa que todos os resultados dos Elementos permaneciam válidos assumindo seus postulados. Seu sistema axiomático é um dos marcos na História da Matemática, pois organiza os fundamentos da Geometria e Análise.

[4]zênite: grau mais elevado

[5]nadir: ponto mais baixo

Vários outros sistemas axiomáticos equivalentes ao de Hilbert foram propostos. Dois deles se destacam. Aquele estabelecido por George David Birkhoff (1864 - 1944), com forte ênfase no conceito de distância, e outro conhecido pela sigla *SMSG (School Mathematics Study Group)* feito na década de 1960 por uma equipe de professores americanos dirigidos por Edward G. Begle. Aqui, mais uma vez fatos políticos interferem nos caminhos da Matemática. Com o lançamento do primeiro satélite artificial pela extinta União Soviética, o Governo Americano decidiu reformular o ensino de ciências nas escolas, nomeando e financiando grupos de estudos para elaborar as propostas da reforma. *SMSG* foi um dos grupos.

Logo após a fixação dos axiomas de Hilbert, o matemático americano Oswald Veblen (1880 - 1960) estabeleceu os axiomas da Geometria Projetiva na sua obra *Projective Geometry* em conjunto com John Wesley Young. Atualmente, o inglês H. M. S. Coxeter é considerado o maior geômetra sintético, tendo vários livros publicados na área.

Capítulo 1

Fundamentação

1.1 Entes Duais da Geometria Projetiva

A dualidade é uma das características fundamentais da geometria projetiva, permitindo associar a ela uma estrutura simétrica caracterizada pelo princípio de dualidade. Isso significa que qualquer definição ou teorema se mantêm verdadeiros, se permutarmos os termos “pontos” e “retas” e, consequentemente, “sobre” e “passam”, “ligam” e “intersectam”, “colineares” e “concorrentes”, etc., com isto a nova definição encontrado é a definição dual da original e a nova proposição encontrada é a proposição dual da original. Na Geometria Projetiva podemos dualizar figuras, pois uma figura é definida como um conjunto formado por pontos e retas. Para melhor entendimento deste princípio vamos enunciar o quadrângulo completo e o quadrilátero completo, pois eles são os dois entes duais mais importantes da Geometria Projetiva.[4]

- O quadrângulo completo é uma figura formada por 4 pontos coplanares, e 6 retas que unem estes pontos, onde os 4 pontos são chamados de vértices do quadrângulo completo e as retas são seus lados. Dois lados são ditos opostos se o ponto comum a eles não é um vértice. Sendo assim o ponto comum a estes dois lados opostos é chamado de ponto diagonal. Um quadrângulo completo possui três pontos diagonais. Veja na Figura 1.1, o quadrângulo completo de vértices P, Q, R e S, e seus lados PS, QS, RS, QR, RP e PQ, e seus pontos diagonais A, B e C.

- O quadrilátero completo é uma figura formada por 4 retas coplanares e 6 pontos comuns a estas retas, onde as 4 retas são os lados do quadrilátero completo e os pontos sãos os 6 vértices. Dois vértices são ditos opostos se a reta que os une não é um lado. Sendo assim esta reta é chamada de reta diagonal. Um quadrilátero completo possui 3 retas diagonais. Veja na Figura 1.2, o quadrilátero completo $pqrs$, seus vértices são A, B, C, D, E e F, e suas retas diagonais são a, b e c.

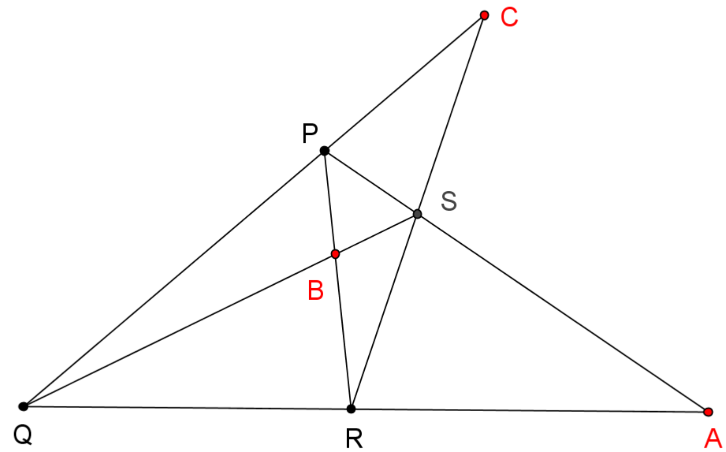

Figura 1.1: Quadrângulo $PQRS$

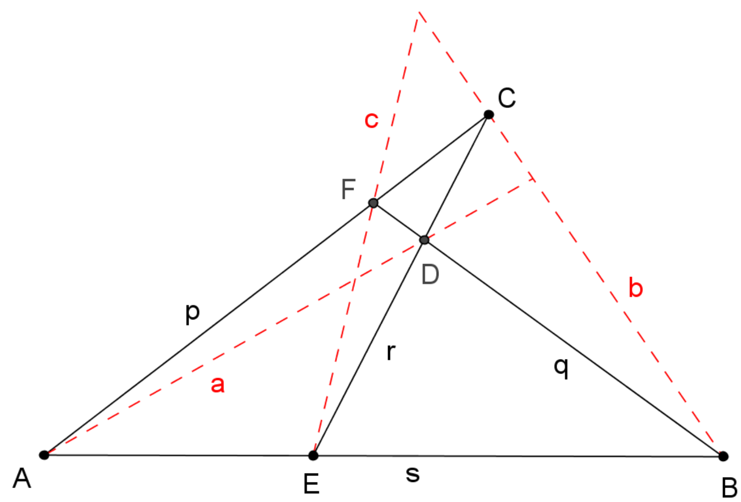

Figura 1.2: Quadrilátero $pqrs$

Temos que pontos e retas são entes geométricos distintos ligados apenas por uma relação, chamada incidência. Neste TCC representaremos o ponto por uma letra maiúscula, a reta por uma letra minúscula e o plano por uma letra grega. Para a Geometria Projetiva, adotaremos o ponto, a reta e a relação de incidência como conceitos primitivos. Como o plano não é indefinido, então vamos enunciar:

Definição 1.1. *Dados um ponto P e uma reta t não incidentes definimos o plano Pt como sendo o conjunto de todos os pontos que estão sobre retas que unem P aos pontos de t e todas as retas que são união de pares de pontos assim construídos.*

1.2 Projetividade

Considerando um ponto P e uma reta t, chamamos respectivamente de feixe de retas e fileira de pontos, todas as retas passando por P e todos os pontos incidentes a t. Então, a intersecção de um feixe de retas que passa por P com uma reta s tal que P não pertença a s é a fileira de pontos sobre s. Com esta intersecção estamos estabelecendo uma relação biunívoca entre os elementos dos feixes. Portanto, o feixe de retas projeta o feixe de pontos sobre a reta s e a fileira de pontos da reta s é uma secção do feixe de retas que passam por P. Logo representaremos esta correspondência elementar da seguinte forma:

$$ABC... \;\overline{\wedge}\; abc...,$$

Logo A, B, $C, \ldots$ são pontos do feixe e a, b, $c, \ldots$ as retas correspondentes. Uma correspondência elementar entre o feixe de pontos da reta o com o feixe de retas do ponto O será representada na Figura 1.3:

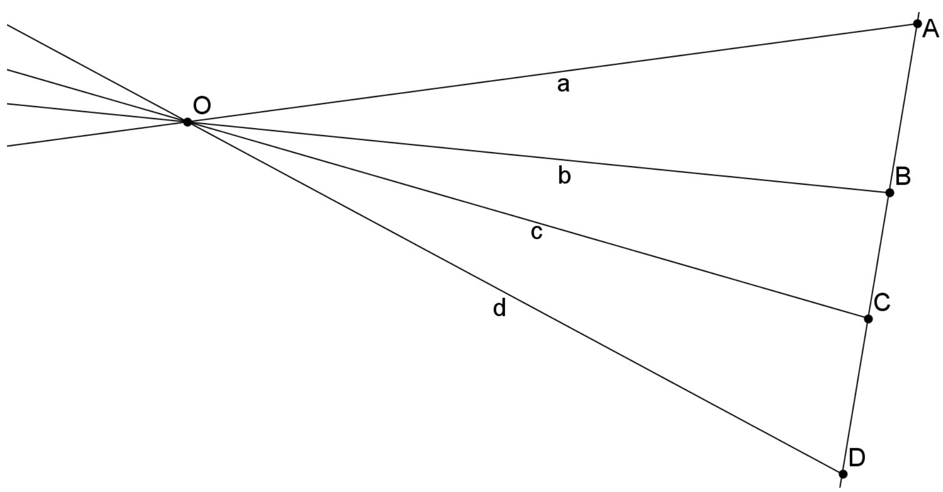

Figura 1.3: Correspondência elementar

A Projetividade é uma combinação finita de correspondências elementares, ou seja, a projetividade feixe de retas com feixe de pontos ou feixe de pontos com feixes de retas. A mesma notação utilizada na correspondência elementar será utilizada para uma Sequência de correspondências elementares, de acordo com a Figura 1.4, temos,

$$Z \;\overline{\wedge}\; a \;\overline{\wedge}\; Z_1 \;\overline{\wedge}\; a_1 \;\overline{\wedge}\; Z_2 \;\overline{\wedge}\; ... \;\overline{\wedge}\; Z_n \;\overline{\wedge}\; a_n$$

ou simplesmente,

$$Z \;\overline{\wedge}\; a_n$$

ou

$$a \;\overline{\wedge}\; a_n, \;\; a \;\overline{\wedge}\; Z_n, \;\; Z \;\overline{\wedge}\; Z_n$$

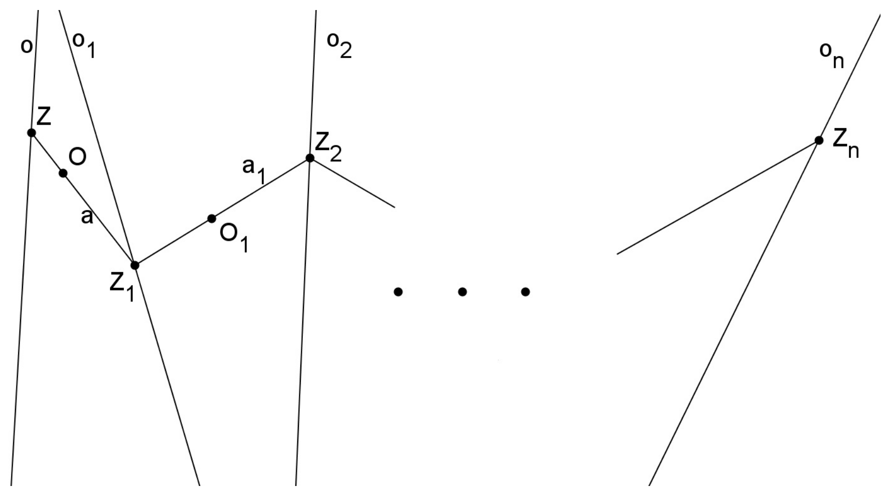

Figura 1.4: Sequência de correspondências elementares

1.3 Perspectividade

Definição 1.2. *Perspectividade é a correspondência entre duas fileiras que são seções de um mesmo feixe. O feixe passa por um ponto fixo O que recebe o nome de centro de perspectividade, e utilizamos a notação $\overline{\overline{\wedge}}$ para representar as correspondências.*

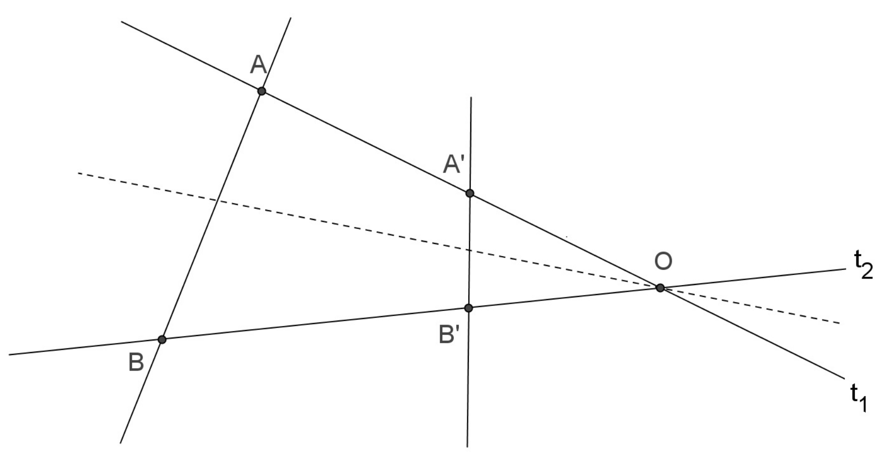

Figura 1.5: Centro de Perspectividade

Duas figuras são perspectivas, se:

- Os seus vértices correspondentes definem retas concorrentes num ponto chamado centro de perspectividade (perspectividade por um ponto) ou

- se as suas retas correspondentes se cruzam sobre uma mesma reta denominada eixo de perspectividade (perspectividade por uma reta).

1.4 Teorema de Desargues

Demonstraremos essa dualidade através do Teorema de Desargues. Para tanto é necessário conhecermos o Teorema de Menelaus que é o argumento principal da demonstração do Teorema de Desargues.

Teorema 1.1. *(Teorema de Menelaus) Sejam três pontos L, M e N localizados respectivamente nas retas suportes dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ de um triângulo ABC (qualquer) e diferente dos vértices. Então L, M e N são colineares se, e somente se*

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

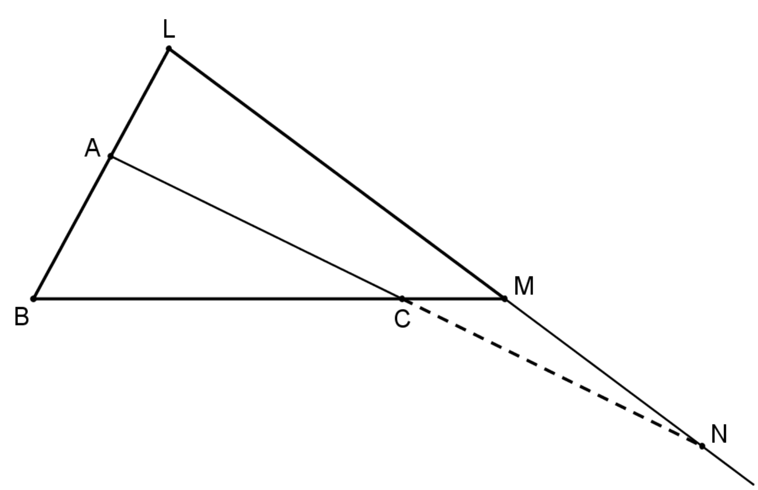

Figura 1.6: Teorema de Menelaus.

Demonstração. Seja o ΔABC, e sejam L, M e N pontos colineares pertencentes as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$, respectivamente. Pelo vértice A, traça-se uma reta $\overleftrightarrow{AD}$ paralela a transversal $\overleftrightarrow{LM}$.

Pelo Teorema de Tales as paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{LM}$ cortam as secantes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ em partes proporcionais, daí

$$\frac{LA}{MD} = \frac{LB}{MB} \implies \frac{LA}{MD} \cdot \frac{MB}{LB} = 1 \tag{1.1}$$

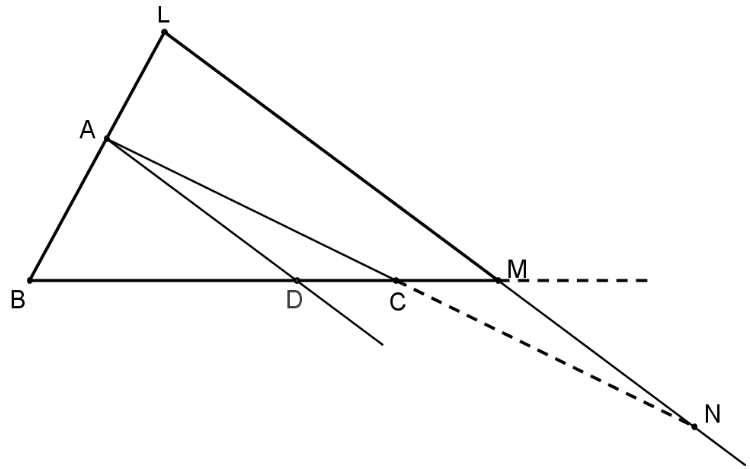

Figura 1.7: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{LM}$.

Aplicando o Teorema de Tales às paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{LM}$ que cortam, também, as secantes $\overleftrightarrow{AN}$ e $\overleftrightarrow{DM}$ em partes proporcionais. Assim

$$\frac{MD}{NA} = \frac{MC}{NC} \implies \frac{MD}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \tag{1.2}$$

Multiplicando (1.1) e (1.2), temos que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \tag{1.3}$$

Reciprocamente, sejam L, M e N pontos pertencentes as retas suportes $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$, respectivamente, de um ΔABC tais que satisfazem a relação (1.3). Seja N' o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{LM}$ com $\overleftrightarrow{AC}$, conforme figura abaixo.

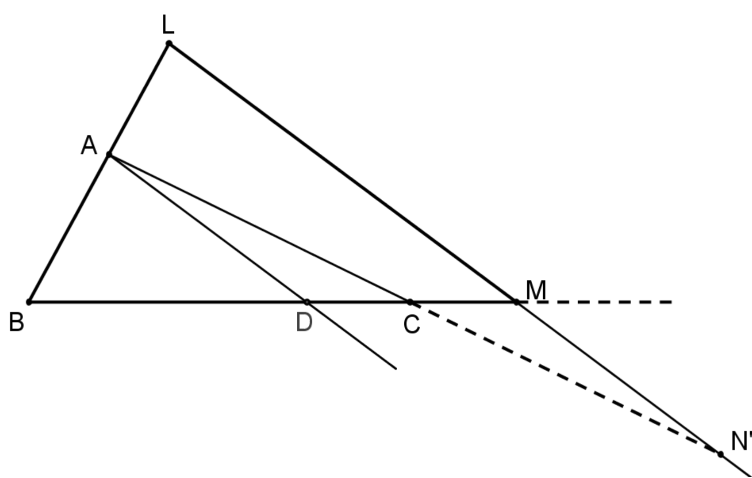

Figura 1.8: $\overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{N'\}$.

Pelo que foi provado, temos que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{N'C}{N'A} = 1 \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4), temos $\frac{NC}{NA} = \frac{N'C}{N'A}$. Como existe apenas um único ponto que divide o segmento $\overline{CA}$ numa dada razão, temos que $N' = N$.

Portanto L, M e N são colineares.

■

Teorema 1.2. *(Teorema de Desargues de Triângulos Homólogos): Dois triângulos são perspectivos por um ponto se, e somente se, eles são perspectivos por uma reta.*

Demonstração. Vamos mostrar que a condição necessária para dois triângulos serem perspectivos por um ponto é eles serem perspectivos por uma reta, para tanto mostraremos que K, L e M são colineares. Aplicando o Teorema de Menelaus nos triângulos BCO, CAO e ABO e as respectivas transversais EFL, DFM e EDK. De acordo com a Figura 1.9.

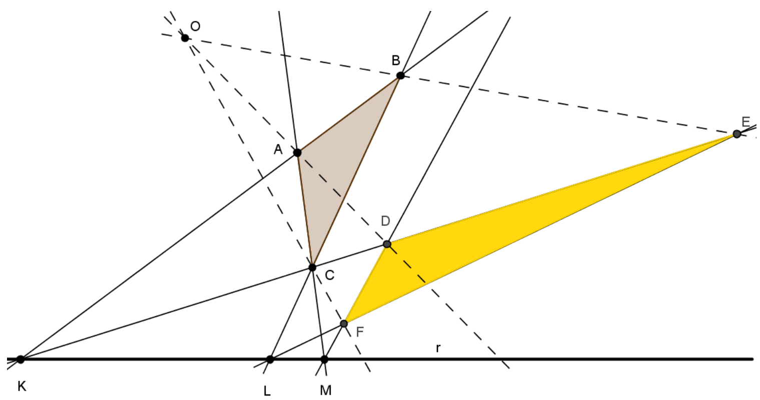

Figura 1.9: Triângulos Homólogos (Triângulos Perspectivos)

1. Em relação ao $\triangle BCO$ e a transversal EFL da Figura 1.10, teremos:

$$\frac{EB}{EO} \cdot \frac{FO}{FC} \cdot \frac{LC}{LB} = 1 \tag{1.5}$$

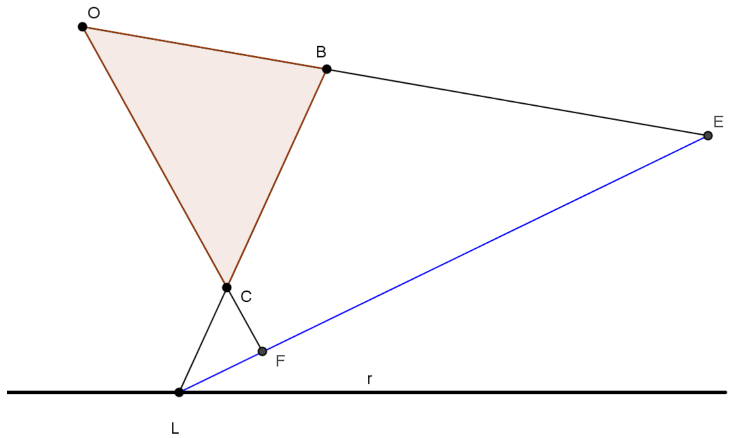

Figura 1.10: Triângulo BCO e a transversal EFL

2. Em relação ao $\triangle CAO$ e a transversal DFM da Figura 1.11, teremos:

$$\frac{DO}{DA} \cdot \frac{FC}{FO} \cdot \frac{MA}{MC} = 1 \tag{1.6}$$

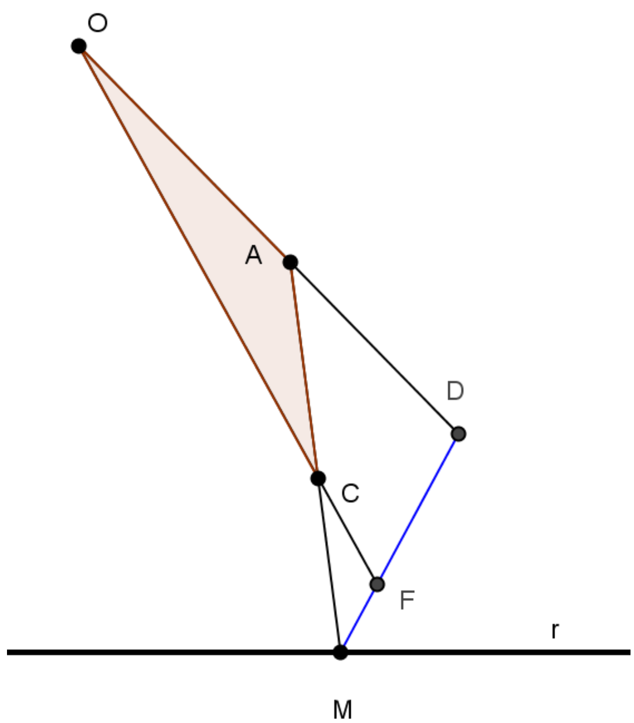

Figura 1.11: Triângulo CAO e a transversal DFM

3. Em relação ao $\triangle AOB$ e a transversal EDK da Figura 1.12, teremos:

$$\frac{EO}{EB} \cdot \frac{DA}{DO} \cdot \frac{KB}{KA} = 1 \tag{1.7}$$

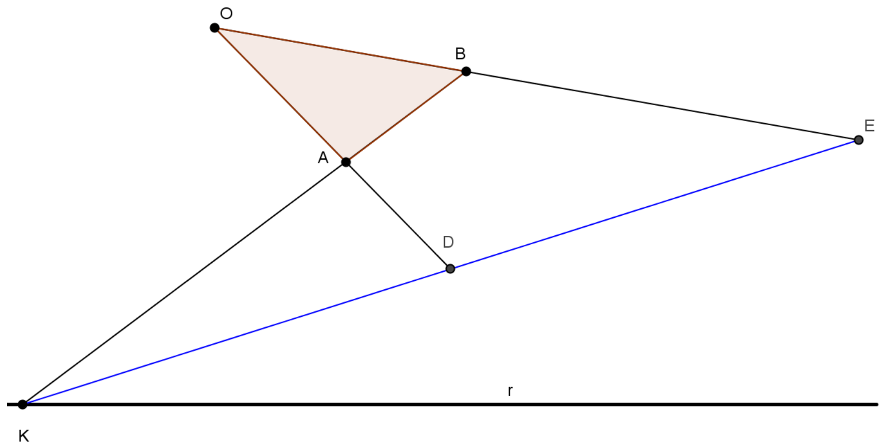

Figura 1.12: Triângulo ABO e a transversal EDK

Agora vamos multiplicar estas igualdades (2.1), (2.2) e (2.3) membro a membro, então teremos:

$$\frac{EB}{EO} \cdot \frac{FO}{FC} \cdot \frac{LC}{LB} \cdot \frac{DO}{DA} \cdot \frac{FC}{FO} \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{EO}{EB} \cdot \frac{DA}{DO} \cdot \frac{KB}{KA} = 1.1.1 \qquad (1.$$

Logo, no produto dos membros da esquerda, seis termos se cancelam e o produto dos membros da direita é igual a 1. Assim obteremos:

$$\frac{LC}{LB} \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{KB}{KA} = 1 \tag{1.9}$$

Desta forma, teremos o $\triangle ABC$ e a transversal KLM, conforme a Figura 1.13.

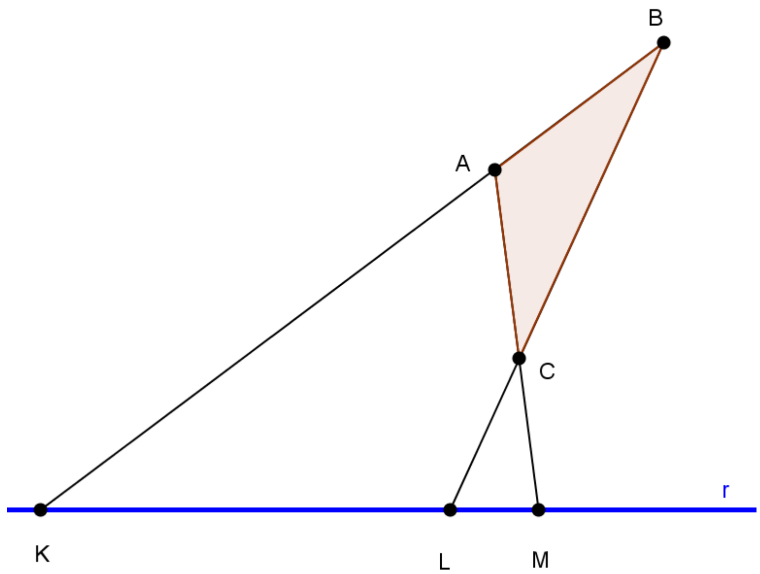

Figura 1.13: Triângulo ABC e a transversal KLM

Portanto, os pontos K, L e M são colineares. ■

Exemplo 1. *Um exemplo do Teorema de Desargues é na Computação Gráfica que se utiliza da perspectividade para mapear uma reta contida em uma cena numa reta (imagem) sobre o plano de projeção. O centro de perspectividade é a posição da câmera e o eixo de perspectividade é a direção de projeção.*

Capítulo 2

Os Axiomas e suas consequências

2.1 Axiomas

Para o desenvolvimento teórico de uma Geometria é necessário um sistema de axiomas e deduzir todas as suas possíveis consequências. É bastante claro e essencial que os axiomas sejam consistentes (não contradizendo um ao outro) e é desejável que eles sejam independentes, simples, e aprovável. A diferença da Geometria Projetiva para a Geometria Pura não é uma diferença de princípio ou de método, mas somente de riqueza de conteúdo e variedade de aplicação.

As principais fundamentações para a geometria projetiva foram propostos primeiros por dois italianos: Gino Fano (1892) e Mario Pieri (1899). Os seguintes oito axiomas envolvem três conceitos primitivos (ponto, reta e incidência). Estes oito axiomas são sugeridos no livro de Coxeter.[1].

Axioma 2.1. *Existem uma reta e um ponto que não são incidentes.*

Axioma 2.2. *Toda reta é incidente com pelo menos três pontos distintos.*

Axioma 2.3. *Qualquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.*

Axioma 2.4. *Se A, B, C e D são quatro pontos distintos tais que $\overline{AB}$ intersecta $\overline{CD}$, então $\overline{AC}$ intersecta $\overline{BD}$. (Veja Figura 3.1)*

Axioma 2.5. *Se ABC é um plano, existe ao menos um ponto fora do plano ABC.*

Axioma 2.6. *Quaisquer dois planos distintos têm ao menos dois pontos em comum.*

Axioma 2.7. *Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares. (veja Figura 3.2)*

Axioma 2.8. *Se uma projectividade deixa invariante cada um de três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todos os pontos da reta.*

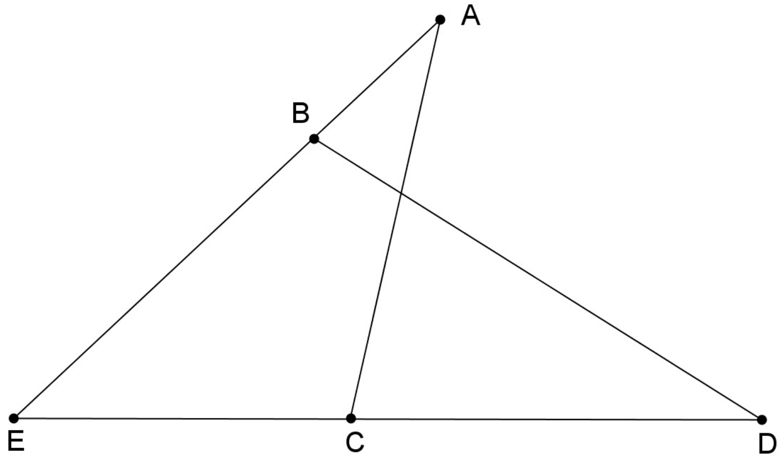

Figura 2.1: Axioma 3.4

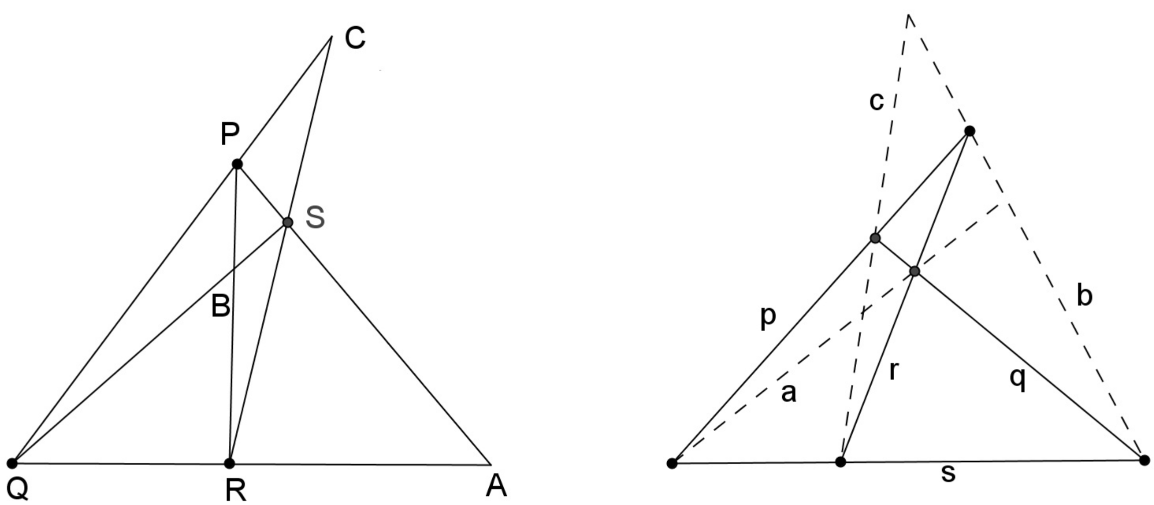

Figura 2.2: Axioma 3.7

2.2 Simples consequências dos axiomas

Em relação aos axiomas 3.1, 3.2 e 3.3 as maiorias dos leitores não terão nenhuma dificuldade para aceitar. O axioma 3.4 se assemelha com a Geometria Euclidiana, onde duas retas coplanares $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ não podem se encontrar sendo "paralelo". Este axioma se assemelha ao axioma de *Pasch.* [1]

O axioma 3.5 faz a Geometria Tridimensional, enquanto que o axioma 3.6 impede que isto seja de Quatro-Dimensional, uma vez que na Geometria Quatro-Dimensional admitiria que um par de

[1]O axioma de Pasch declara que duas retas coplanares são concorrentes mesmo antes de definir um plano.

planos tem só um ponto em comum. Segue que a intersecção de dois planos distintos, γ e ω é uma reta, onde chamamos de reta $\gamma.\omega$.

Em virtude do axioma 3.7, os pontos diagonais de um quadrângulo formam um triângulo, o qual é chamado de triângulo diagonal do quadrângulo. Apesar de que este sétimo axioma é provado a partir de um quadrângulo, existem geometrias que são desenvolvidas a partir da negação do mesmo.

Com base nos sete axiomas anteriores, chegamos ao axioma 3.8, pois é possível mostrar que em uma projetividade três pontos de uma mesma reta são invariantes e deixam invariantes tantos pontos quanto tenha esta reta.

Com relação aos axiomas conduzimos quatro teoremas simples:

Teorema 2.1. *Duas retas distintas e coplanares têm no máximo um ponto em comum.*

Demonstração. Suponha que duas retas distintas tenham dois pontos comuns A e B. No Axioma 3.3 temos que: "Qualquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta." Logo as duas determinadas retas coincidem, contradizendo nossa suposição que elas são distintas. Portanto, duas retas distintas e coplanares têm no máximo um ponto em comum. ■

Teorema 2.2. *Duas retas quaisquer e coplanares têm pelo menos um ponto em comum.*

Demonstração. Considere o ponto E coplanar e duas retas quaisquer também coplanares com E não pertencente às retas. Considerando uma das retas como $\overleftrightarrow{AC}$ e o considerando o plano ACE determinado pela reta $\overleftrightarrow{AC}$ e o ponto E, a outra reta pode ter dois pontos das retas distintas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{EC}$, considere B em $\overleftrightarrow{EA}$ e D em $\overleftrightarrow{EC}$, como Figura 3.1. De acordo com o Axioma 3.4: "Se A, B, C e D são quatro pontos distintos tais que $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta $\overleftrightarrow{CD}$, então $\overleftrightarrow{AC}$ intersecta $\overleftrightarrow{BD}$." ■

Teorema 2.3. *Se duas retas tiverem um ponto em comum, então elas são coplanares.*

Demonstração. Se duas retas tiverem um ponto em comum C, então nós podemos nomear as retas como $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, e com isto concluímos que os pontos A, B e C pertencem ao plano ABC o que implica que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são coplanares. ■

Teorema 2.4. *Existem quatro pontos coplanares tais que três quaisquer deles não são colineares.*

Demonstração. Pelos axiomas 3.1, 3.2 e 3.3, existem dois pontos D e B que pertencem respectivamente às retas distintas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{EC}$. Os quatro pontos A, B, C e D distintos têm a propriedade desejada no Teorema 4. Exemplo, se três pontos como A, B e C são colineares, e E (pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$) seria colinear com todos eles, e $\overleftrightarrow{EA}$ seria a mesma reta como $\overleftrightarrow{CE}$. Contradizendo nossa suposição que estas duas retas são distintas. Portanto, existem quatro pontos coplanares tais que três quaisquer deles não são colineares. ■

2.3 Conjunto Quadrangular

Um Conjunto Quadrangular é uma secção dos seis lados de um quadrângulo completo com uma reta r que não cruza com nenhum vértice do quadrângulo. A secção entre esta reta r e os lados do quadrângulo terá no máximo seis pontos colineares, caso esta reta r seja incidente com algum ponto diagonal do quadrângulo, então o Conjunto Quadrangular será formado por cinco ou quatro pontos colineares se a reta r cruzar com um ou dois pontos diagonais, respectivamente.

Vamos mostrar cada um dos Conjuntos Quadrangulares com seis, cinco e quatro pontos colineares. Primeiramente, vamos visualizar o quadrângulo completo $PQRS$ e seus pontos diagonais A, B e C. Veja a Figura 3.3.

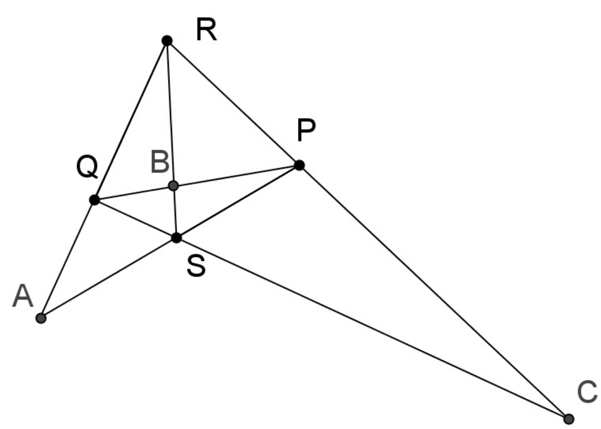

Figura 2.3: Quadrângulo completo $PQRS$ e os pontos diagonais A, B e C.

- Com a ilustração do quadrângulo completo vamos agora traçar uma reta r de tal forma que não cruze com nenhum vértice do quadrângulo $PQRS$ e não cruze com nenhum ponto diagonal A, B e C. Assim as intersecções entre a reta r e os lados PQ, RQ, PS, RS, QS e RP do quadrângulo completo formam o Conjunto Quadrangular com seis pontos colineares H, I, J, K, L e M, respectivamente. Para melhor compreensão veja a Figura 2.4.

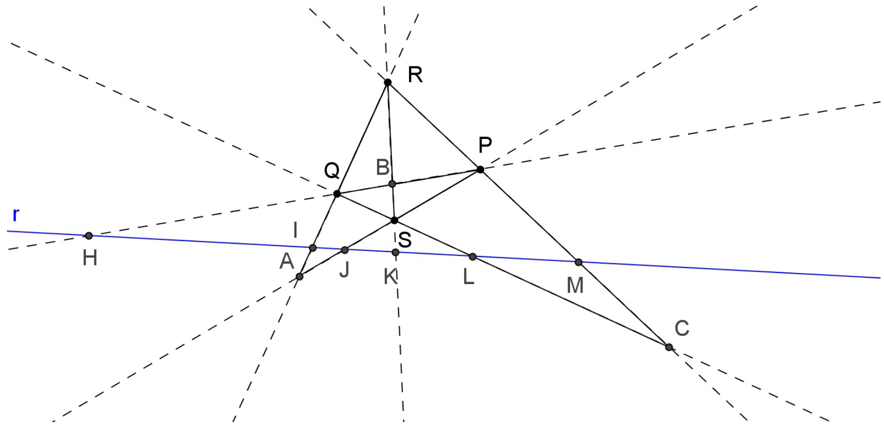

Figura 2.4: Conjunto Quadrangular com seis pontos colineares H, I, J, K, L e M.

- Na Figura 2.4, $HIJKLM$ é o conjunto quadrangular, podemos utilizar a notação $Q(JKL,\ IHM)$ ou a notação $(JI)(KH)(LM)$. Nesta segunda notação, os três primeiros pontos de cada parênteses devem estar sobre os três lados concorrentes e os outros três últimos pontos devem estar, respectivamente, sobre os lados opostos. Com isto, se aplicarmos uma permutação nos pontos JKL e a mesma permutação nos pontos IHM, por exemplo, $(JI)(KH)(LM)$ tem o mesmo significado que:

  $$(KH)(JI)(LM), \quad (JI)(HK)(ML), \quad (IJ)(KH)(ML), \quad (IJ)(HK)(LM).$$

  Qualquer cinco pontos colineares como A, B, C, D e E sempre irão pertencer a um conjunto quadrangular. Basta construir um triângulo SQR onde os lados RS, SQ e QR passam, respectivamente, pelos pontos C, B e D. Agora façamos $P = AS.ER$ e $F = g.PQ$. Caso tivéssemos escolhido um triângulo diferente, como RQS, ainda sim o ponto F seria o mesmo. Provaremos esta unicidade do ponto F através do seguinte teorema:

  Teorema 2.5. *(Unicidade do Conjunto Quadrangular): Cada ponto de um Conjunto Quadrangular é unicamente determinado pelos demais.*

  Demonstração. Mostrar que o ponto F é exclusivamente determinado pelos pontos A, B, C, D e E (Figura 2.5), considerando o quadrângulo $P'Q'R'S'$, onde os cinco primeiros lados passam pelos cinco primeiros pontos de g. Note que os triângulos PRS e $P'R'S'$ são perspectivos por g. Portanto pelo *Teorema 2.1,* [2] temos que os triângulos PRS e $P'R'S'$ são perspectivos por O.

[2](Teorema de Desargues de Triângulos Homólogos): Dois triângulos são perspectivos por um ponto se, e somente se, eles são perspectivos por uma reta.

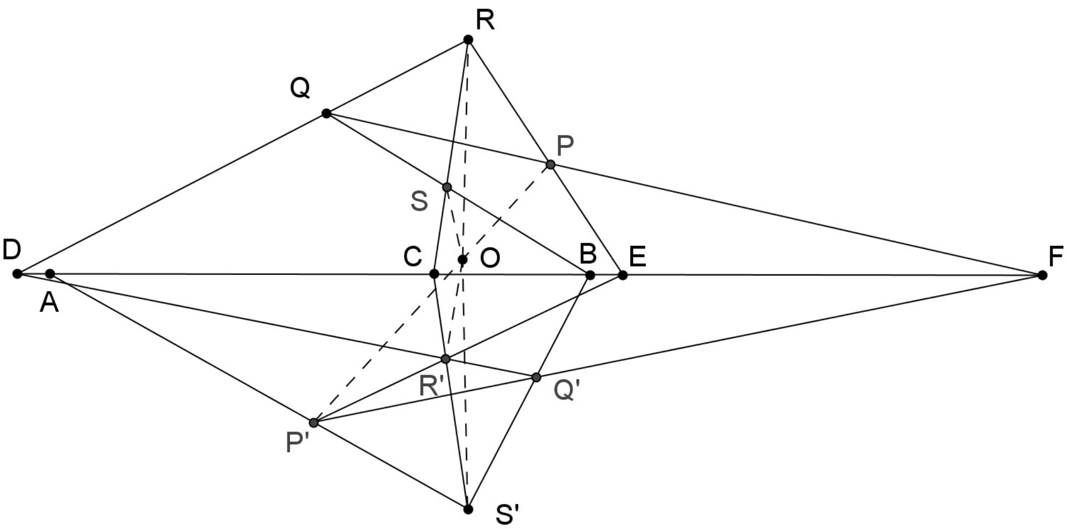

Figura 2.5: Conjuntos Quadrangulares

Isto implica que $PQ.g$ = P'Q'.g = F. ■

- Agora vamos traçar uma reta r_1 de tal forma que cruze exatamente com um ponto diagonal, por exemplo, com o ponto diagonal C. Assim as intersecções entre a reta r e os lados PQ, RQ, PS e RS com o ponto diagonal C do quadrângulo completo formam o Conjunto Quadrangular com cinco pontos colineares F, G, H, I e C, respectivamente. Para melhor compreensão veja a Figura 2.6.

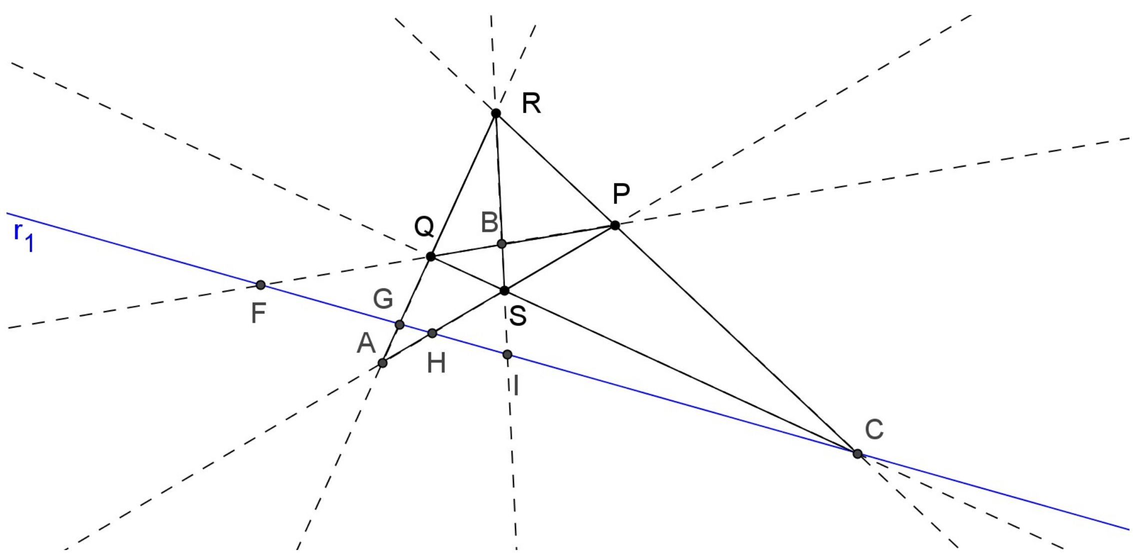

Figura 2.6: Conjunto Quadrangular com cinco pontos colineares F, G, H, I e C.

- Vamos agora traçar uma reta r_2 de tal forma que cruze exatamente com dois pontos diagonais, por exemplo, com os pontos diagonais A e C. Assim as intersecções entre a reta r e o lado PQ, o ponto diagonal A, o lado RS e o ponto diagonal C do quadrângulo completo formam o Conjunto Quadrangular com quatro pontos colineares K, A, L e C, respectivamente. Para melhor compreensão veja a Figura 2.7.

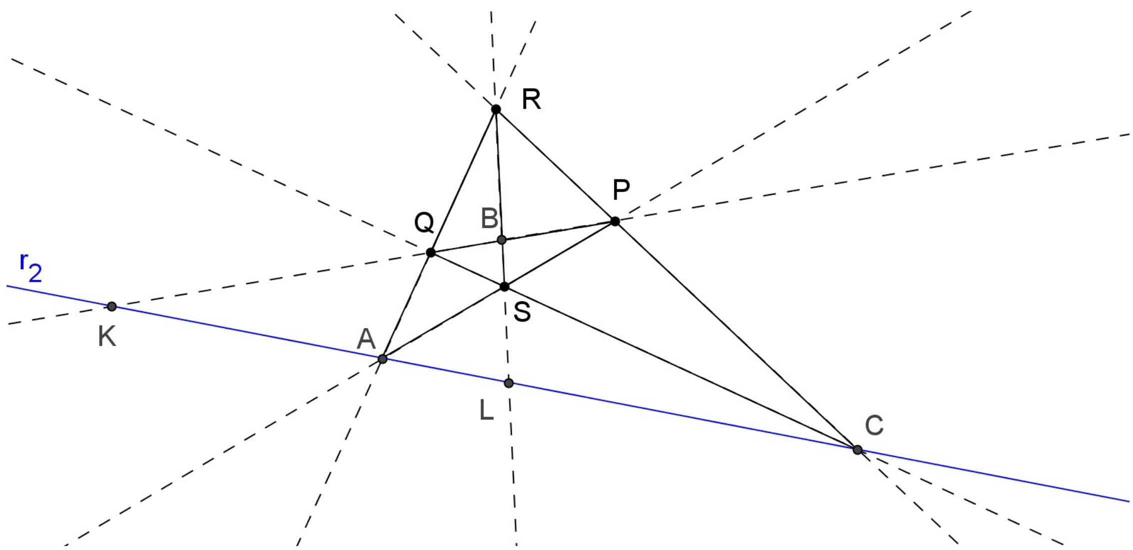

Figura 2.7: Conjunto Quadrangular com quatro pontos colineares K, A, L e C.

2.4 Conjunto Harmônico

Um Conjunto Harmônico é um caso especial de um Conjunto Quadrangular. Um Conjunto Harmônico ocorre quando a reta r intercepta um ou dois pontos diagonais. Veja as Figuras 2.8 e 2.9 abaixo representando um Conjunto Harmônico:

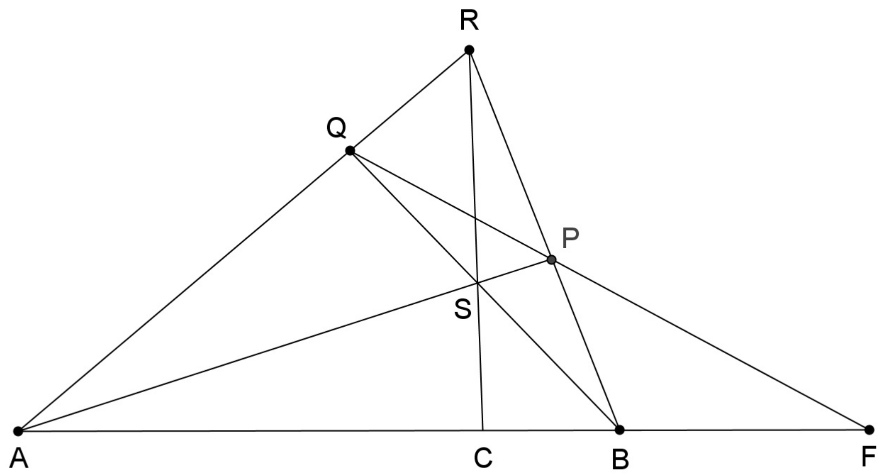

Figura 2.8: Conjunto Harmônico com quatro pontos: A, C, B e F

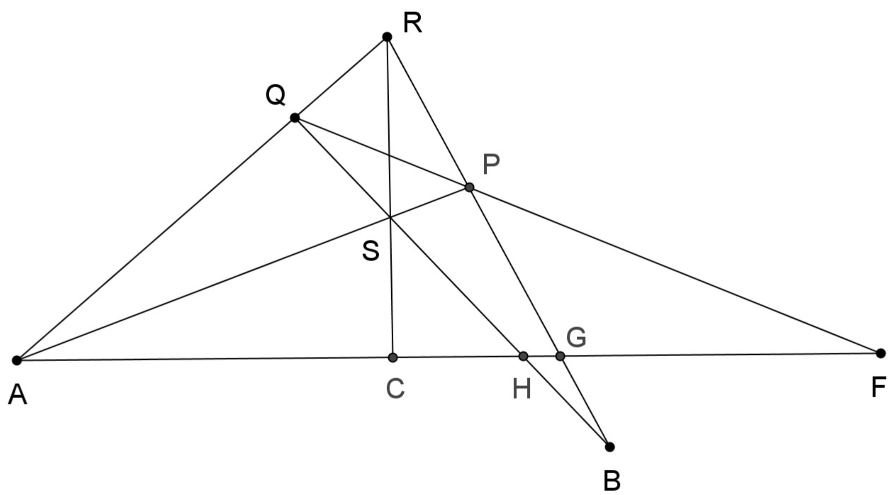

Figura 2.9: Conjunto Harmônico com cinco pontos: A, C, H, G e F

Da figura 2.8 escrevemos a relação da seguinte forma $(AA)(BB)(CF)$, então pela importância deste caso especial de um conjunto harmônico, escrevemos na forma abreviada: $H(AB, CF)$ ou $H(BA, CF)$ ou $H(BA, FC)$ ou $H(AB, FC)$, isto significa que os pontos A e B são dois dos três pontos diagonais de um quadrângulo completo, enquanto que os pontos C e F são pontos dos lados que intersectam o terceiro ponto diagonal do quadrângulo completo. Com isto dizemos que o ponto C é o conjugado harmônico de F em relação aos pontos A e B. E o ponto F é o conjugado harmônico de C em relação aos pontos A e B. Vimos no Teorema 3.5 a unicidade de um conjunto harmônico *(Cada ponto de um conjunto quadrangular é unicamente determinado pelos demais.) Se A, B e C são distintos, a relação $H(AB, CF)$ implica que F é distinto de C.

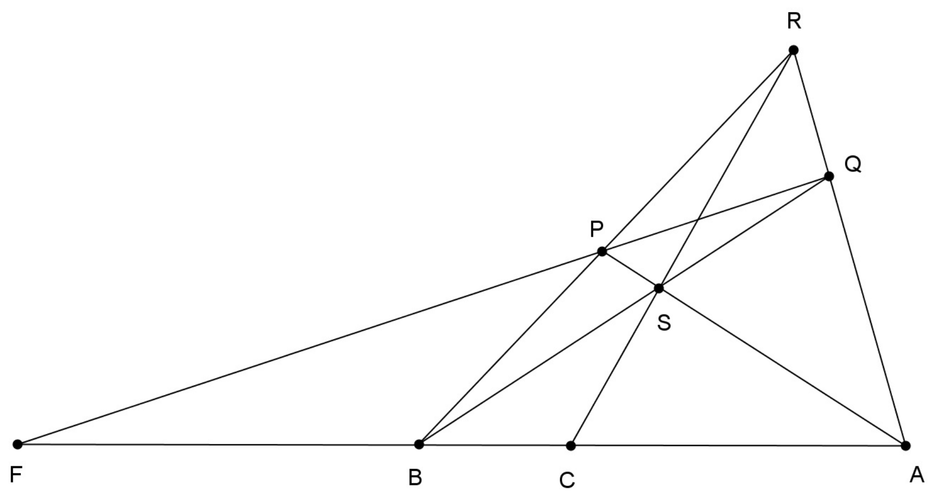

Figura 2.10: Conjunto Harmônico

Capítulo 3

Polaridade, Plano Projetivo e Princípio da Dualidade

3.1 Polaridade

Na Polaridade, podemos transformar um ponto qualquer em uma reta e uma reta qualquer em um ponto. Ou seja, transforma um ponto A numa reta a e uma reta a num ponto A'. Além disso a polaridade garante que a imagem a' sempre coincide com A.[16] Vamos fazer uma associação entre retas e pontos do plano. Dada uma circunferência γ, de centro O e raio R; para cada ponto A distinto de O, seja A' o ponto da semirreta $\overrightarrow{OA}$ tal que $\overline{OA}$ x $\overline{OA}$' = R^2. Onde (A' $= Inv(A)$) A' é chamado inverso de A em relação a γ. Seja a a reta perpendicular a $\overrightarrow{OA}$ passando por A'. Nesta situação, concluímos que a é a reta polar do ponto A em relação a γ enquanto que o ponto A é o pólo da reta a em relação a γ. Veja na Figura 3.1

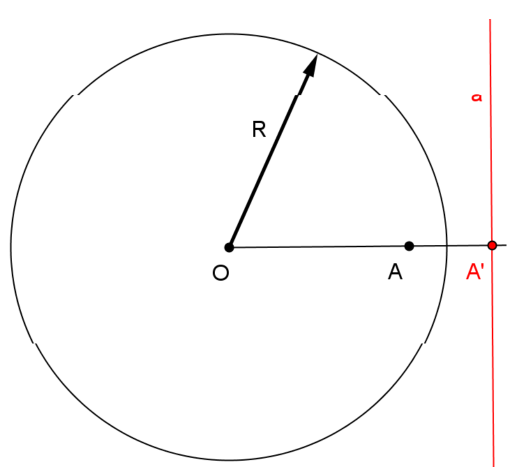

Figura 3.1: Ponto A e sua Polar a

Teorema 3.1. *Sejam A e B dois pontos do plano, a e b suas respectivas polares. Se $B \in a$, então $A \in b$. Neste caso, dizemos que A e B são conjugados. Veja a Figura 3.2.*

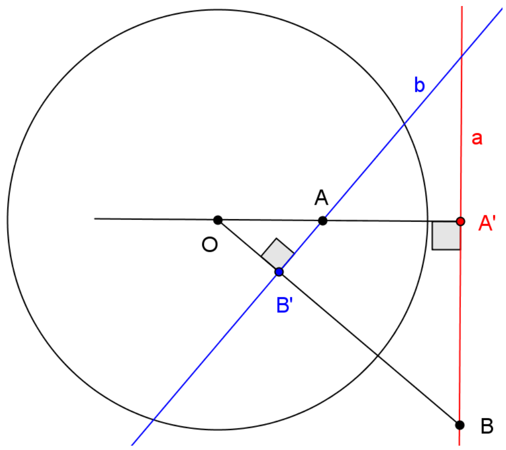

Figura 3.2: Pontos A e B e suas respectivas Polares a e b

Demonstração. Considerando um ponto $B \in a$. Seja B' $\in \overrightarrow{OB}$ tal que $\overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{OB}$. Os triângulos OAB' e OBA' são retângulos e têm um ângulo comum ($A\hat{O}B$' $\neq B\hat{O}A'$), então pelo critério de ($AA \sim$) os triângulos OAB' e OBA' são semelhantes. Assim, $\frac{OA}{OB}$ = $\frac{OB'}{OA'}$ $\Leftrightarrow OB$ x OB' = $\overline{OA}$ x $\overline{OA}$' = R^2. Logo, ($B' = Inv(B)$) B' é o inverso de B, de onde $\overleftrightarrow{AB}$' $= b$ e $A \in b$.

Portanto, se imaginarmos o ponto B variando ao longo da reta a, sua polar b, irá variar ao longo do feixe de retas que passam pelo ponto A. Então dizemos que um ponto e uma reta são incidentes quando o ponto pertence à reta, o que é o mesmo que dizer que a reta passa pelo ponto. A Polaridade, portanto, é uma transformação que preserva incidências. ■

Corolário 1. *Para um ponto pertencente à própria circunferência, sua reta polar é tangente à circunferência por ele.*

Corolário 2. *Se A é exterior à circunferência, sejam B e C os pontos de contato das duas tangentes à circunferência traçadas por A. A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é a polar de A.*

Prova. Como A pertence às polares de B e C, então B e C pertencem à polar de A. Logo a = $\overleftrightarrow{BC}$.

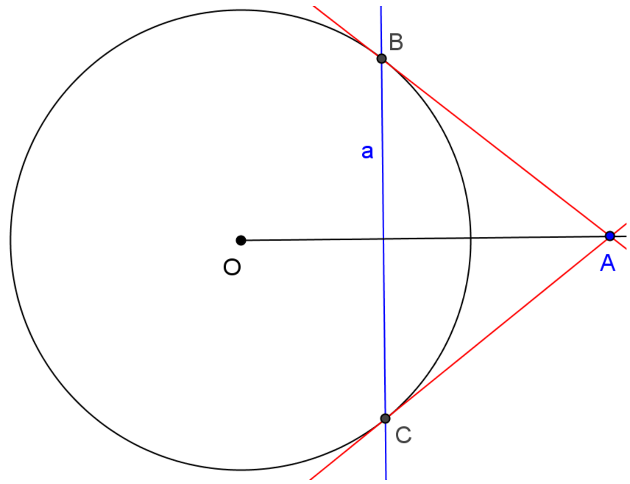

Figura 3.3: Um ponto exterior a circunferência

3.2 O Plano Projetivo

A Polaridade definida sugere que pontos e retas têm comportamentos parecidos em relação à incidência. A transformação não está definida para o ponto O centro da circunferência nem para as retas que passam por O.

Porém podemos resolver este problema fazendo a ampliação do plano euclidiano, acrescentando-lhe uma nova reta que chamaremos de “reta do infinito”, que chamaremos de reta o. Esta nova reta será a polar do ponto O.

Os pontos da nova reta do infinito estão em correspondência biunívoca com os feixes de retas paralelas no plano euclidiano.

Vejamos como a Polaridade nos leva naturalmente a esta definição para os pontos do infinito.

Primeiramente, vamos identificar o pólo de uma reta r que passa por O. Sejam A e B os pontos de contato de r com a circunferência. Como A e B estão sobre a reta r, suas retas polares a e b passam pelo pólo R. Então o ponto R é intersecção das duas retas a e b, que são paralelas no plano Euclidiano. De fato, a reta polar de qualquer ponto de r será perpendicular a r no plano euclidiano. Porém, no plano projetivo, estas retas passam a ser um feixe de retas concorrentes no ponto R do infinito.

Logo, esta é a forma de trabalhar com a reta do infinito: a cada feixe de retas paralelas no plano euclidiano corresponde um único ponto da reta do infinito e cada um de seus pontos corresponde a um único feixe de retas paralelas no plano euclidiano.

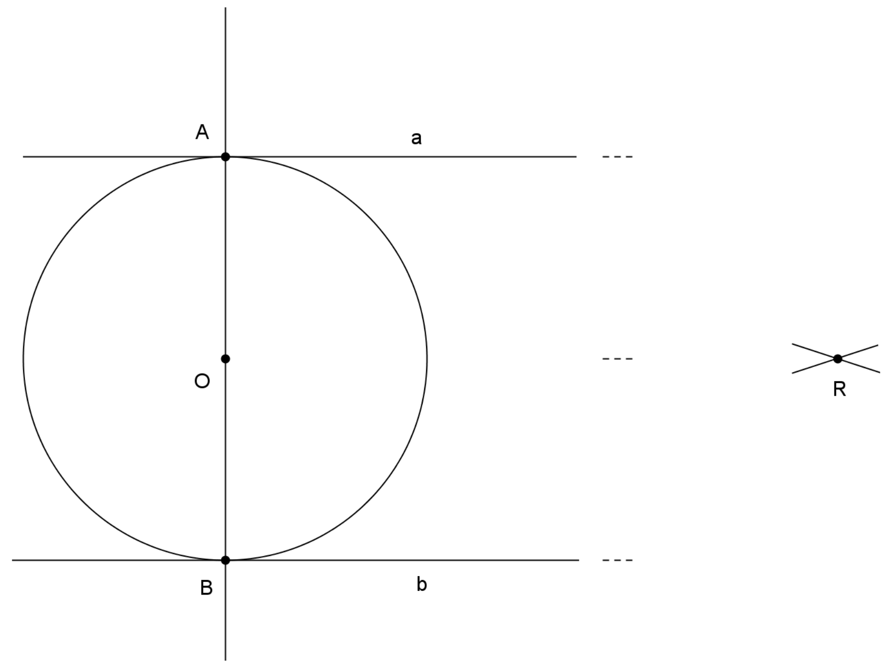

Figura 3.4: Ponto no infinito

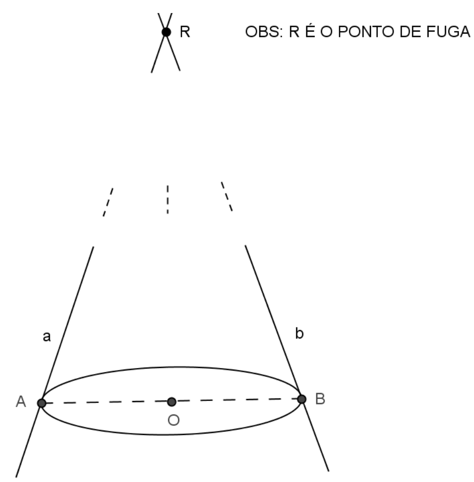

Figura 3.5: Ponto no infinito

Apesar de termos definido o plano projetivo como uma extensão do plano euclidiano, isto não é necessário. O plano projetivo existe de forma independente, podendo ser caracterizado a partir de um conjunto de axiomas.

3.3 O Princípio da Dualidade

Em 18 de novembro de 1812, a sobra do exército francês foi subjugado a Krasnoi. Entre esses deixados para a morte no campo de batalha congelado estava o jovem Poncelet. Uma busca minuciosa foi feita, descobrindo que ele ainda respirava, levaram-no antes do pessoal russo questionar. Como um prisioneiro de guerra a Saratoff no Volga, ele se lembrou que ele tinha recebido uma educação matemática boa, e nos rigores do exílio ele solucionou e reproduziu tanto quanto ele pôde do que ele tinha aprendido. Foi assim que ele criou a Geometria Projetiva.

A Base Axiomática do Princípio da Dualidade

Quando o desenvolvimento da geometria lida apenas com pontos sobre retas ela se diz unidimensional, já quando o seu desenvolvimento lida com pontos, retas no plano ela se diz bidimensional e quando o seu desenvolvimento lida com pontos, retas e planos no espaço ela se diz Tri-Dimensional.

É importante observar que para a base Axiomática do princípio da dualidade, pode ser desenvolvida excluindo os axiomas 3.5 e 3.6, incluindo o Teorema de Desargues como axioma e substituindo os três axiomas 3.1, 3.2 e 3.4 pelas seguintes duas declarações mais simples:

Axioma 3.1. *Quaisquer duas retas são incidentes com pelo menos um ponto.*

Axioma 3.2. *Existem quatro pontos tais que três quaisquer deles são não colineares.*

O princípio da dualidade no plano, isto é, o princípio Bi-Dimensional da dualidade, afirma que toda definição e todo teorema permanece verdadeiro, quando trocamos as palavras: ponto e reta; colineares e concorrentes; lado e vértice e assim sucessivamente. Podemos também dualizar figuras, por exemplo, o dual de um triângulo, consistindo em seus vértices e lados é novamente um triângulo, consistindo em seus lados e vértices; portanto, um triângulo é um exemplo de uma figura auto-dual.

Os pontos e retas do plano projetivo têm exatamente o mesmo comportamento em relação à incidência. Portanto, para todo teorema da Geometria Projetiva ganhamos outro grátis, oferecido pelo princípio da dualidade. Qualquer propriedade envolvendo pontos, retas e incidências permanecem válidas se trocarmos as palavras: ponto por reta e reta por ponto. Esta nova propriedade obtida é a propriedade dual da primeira. Vamos ver algumas dessas dualidades:

Propriedade 01: Dada uma reta, sempre existe um ponto não incidente a ela.

Dual da propriedade 01: Dado um ponto, sempre existe uma reta não incidente a ele.

Propriedade 02: Cada reta é incidente por pelo menos três pontos distintos.

Dual da propriedade 02: Cada ponto é incidente por pelo menos três retas distintas.

Propriedade 03: Dois pontos distintos determinam uma única reta a eles incidente.

Dual da propriedade 03: Duas retas distintas determinam um único ponto a elas incidente.

Umas das características mais atraentes de Geometria da Projetiva são: a simetria e a economia com que podemos ter com o princípio da dualidade: Com cinquenta provas detalhadas podemos estabelecer tanto quanto cem teoremas.

Capítulo 4

O Teorema Fundamental e o Teorema de Pappus

4.1 O Teorema Fundamental

Foi no tempo de Apollonius de Perga que terminou a idade dourada da geometria grega. A partir do começo da era cristã vê um real estado de diferentes coisas, a produção de livros de ensino elementar de qualidade foi limitada e definitivamente muito fraca. O estudo da Geometria de nível mais elevada estava totalmente pendente até o surgimento de Pappus que reativou o interesse pela disciplina.[5]

Três pares de pontos determinam uma Projetividade

Dados os pontos A, B, C, X colineares e os pontos A', B', C' distintos sobre uma reta qualquer, há várias possibilidades que podemos construir um ponto X' em $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que:

$$ABCX \barwedge A'B'C'X'$$

Vamos ver um exemplo, onde a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é distinta da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

$$ABCX \overset{A'}{\overline{\overline{\wedge}}} GNMQ \overset{A}{\overline{\overline{\wedge}}} A'B'C'X'$$

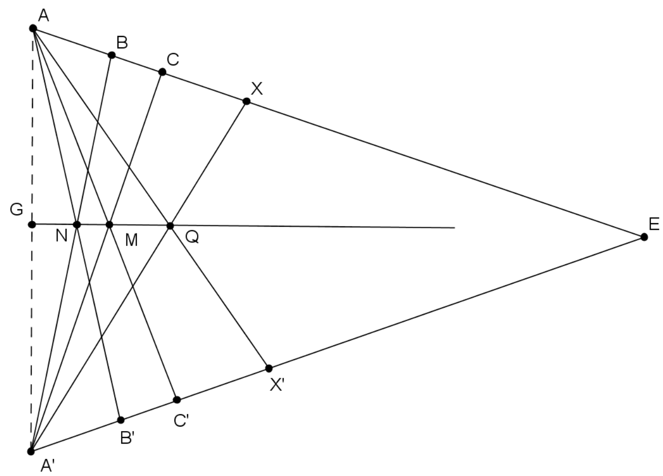

Figura 4.1: Teorema Fundamental

Isto pode variar usando B’ e B ou C’ e C, em vez de A’ e A, como centros das duas perspectividades. Por outro lado, se todos os pontos determinados são todos em uma mesma reta, conforme a Figura 4.2 pode utilizar uma perspectividade arbitrária $ABCX \doublebarwedge A'B'C'X'$, obtendo assim quatro pontos em outra reta e então relacionando $A_1B_1C_1X_1$ a A’B’C’X’ de forma que complemente $ABCX \overset{O}{\doublebarwedge} A_1B_1C_1X_1 \overset{A'}{\doublebarwedge} GNMQ \overset{A_1}{\doublebarwedge} A'B'C'X'$.

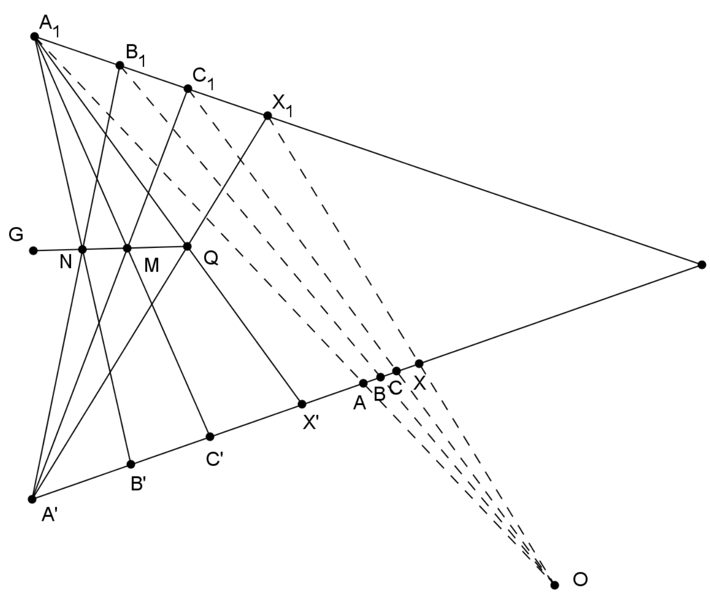

Figura 4.2: Teorema Fundamental

Teorema 4.1. ***O Teorema Fundamental da Geometria Projetiva:*** *Uma projetividade é determinada quando três pontos colineares e seus três pontos colineares correspondentes são determinados.*

Claro que qualquer conjunto de três pontos colineares podem ser substituído por um conjunto de três retas concorrentes. Assim cada uma das relações abaixo basta para determinar exclusivamente uma projetividade particular.

$$ABC \barwedge A'B'C',\ ABC \barwedge abc,\ abc \barwedge ABC,\ abc \barwedge a'b'c'.$$

Por outro lado, cada uma das relações $ABCD \barwedge A'B'C'D'$, $ABCD \barwedge abcd$, $abcd \barwedge a'b'c'd'$ expressa uma propriedade especial de oito pontos, ou de quatro pontos e quatro linhas, ou de oito linhas, de tal natureza que qualquer sete dos oitos pontos determinados permanecerá exclusivo.

Corolário 4.1. *Dados dois conjuntos harmônicos de retas ou pontos existe uma única projetividade que os relaciona.*

Demonstração. Sejam A, B, C, X, A', B', C' e X' pontos tais que $H(AB,\ CX)$ e $H(A$'B', C'X').

Pretendemos mostrar que a projetividade $ABC \barwedge A'B'C'$ conduza o ponto X em X'. Realmente, pela invariância da relação harmônica, a imagem de X, bem determinada pelo Teorema Fundamental, é conjugada harmônica de C' com relação a A'e B'. Portanto, a unicidade do conjunto harmônico conclui a nossa demonstração. ■

Corolário 3. *Uma projetividade relacionando fileiras de pontos de duas retas distintas é uma perspectividade se, e somente se o ponto em comum das duas retas é invariante.*

Demonstração. A primeira implicação é trivial. Vamos fazer a recíproca. Supondo que uma projetividade relacionando duas fileiras distintas de pontos possui um ponto P invariante pertencente a ambas as retas, conforme a Figura 4.3. Sejam A e B dois pontos de uma fileira e A' e B' os pontos correspondentes na outra fileira. Então o Teorema Fundamental garante que a perspectividade $ABP \overset{O}{\overline{\barwedge}} A'B'P$ onde O = $\overline{AA}$'.$\overline{BB}$' é a mesma que a projetividade $ABP \barwedge A'B'P$ dada.

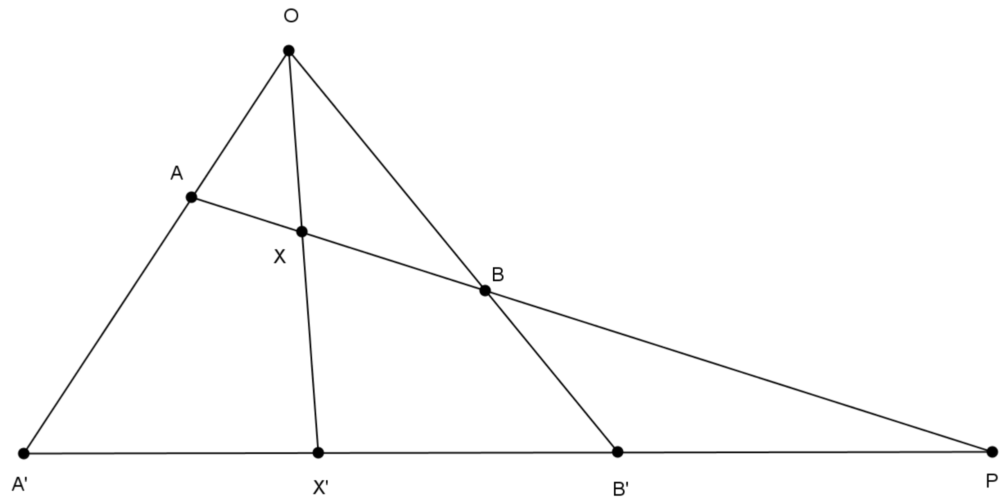

Figura 4.3: Teorema Fundamental

■

4.2 O Teorema Pappus

Com a diminuição dos estudos da geometria e com o aumento dos estudos sobre a Álgebra, a Astronomia e a Trigonometria, então Pappus (290 d.C e 350 d.C.) foi o último grego geômetra de importância nesta época. A fama de Pappus mora em sua extensa obra denominada *"The Collection"*, na qual ele reuniu uma lista de obras antigas importantíssimas, algumas perdidas atualmente.[6][7]

No resumo desta teoria, ele acrescentou inúmeras explanações e ampliações. O trabalho de Pappus é tido como a base da Geometria Projetiva Moderna. Deve-se a Pappus o teorema que será apresentado a seguir.

Teorema 4.2. *(Teorema de Pappus): Sejam as retas coplanares distintas u e v com dois conjuntos de três pontos distintos $\{A, C, E\} \subset u$ e $\{B, D, F\} \subset v$. Então os pontos de intersecção $l_{AB} \cap l_{DE} = M$, $l_{BC} \cap l_{EF} = N$ e $l_{CD} \cap l_{AF} = P$ são colineares.*

Vamos observar a figura 4.4 que ilustra o teorema:

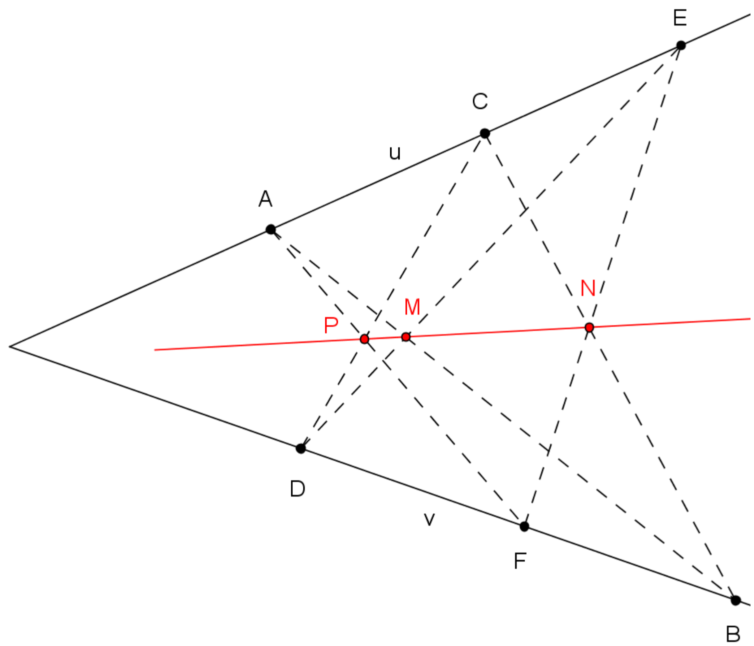

Figura 4.4: Teorema de Pappus

Podemos enunciar este teorema da seguinte forma: Considere o hexágono $ABCDEF$ com os vértices não consecutivos A, C e E pertencentes a uma reta, e os vértices B, D e F sobre outra reta concorrente com a primeira reta. Se os pares de lados opostos (AB, DE), (BC, EF), (CD, AF) são concorrentes respectivamente em M, N e P, então esses pontos são colineares.

Demonstração. Sejam A, B, C, X, A', B', C' e X' pontos tais que $H(AB,\ CX)$ e $H(A$'B', C'X'). Vamos utilizar o teorema de Menelaus para demonstrar o teorema de Pappus, dividindo-o em dois passos.

1º passo: Vamos observar a figura 4.5.

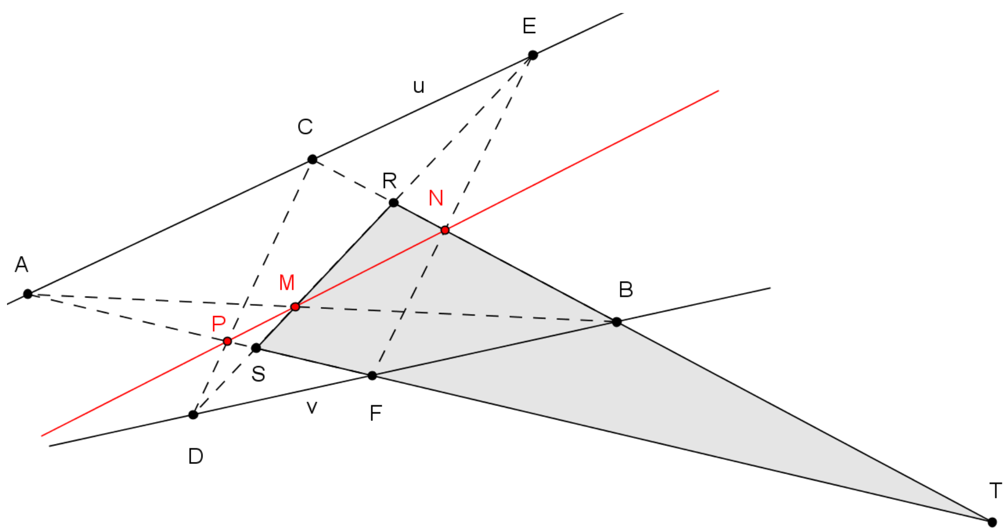

Figura 4.5: 1º passo

$ABCDEF$ é um hexágono não convexo e seus lados opostos são: $(AB,\ DE)$, $(BC,\ EF)$ e $(CD,\ AF)$. Sejam as retas suportes dos três lados não consecutivos l_{BC}, l_{DE} e l_{FA} tais que os pontos $l_{BC} \cap l_{DE}$ = R, $l_{DE} \cap l_{FA}$ = S e $l_{FA} \cap l_{BC}$ = T determinam um triângulo RST.

Aplicando o Teorema de Menelaus[11] cinco vezes ao triângulo RST, encontra-se:

(1º) Com a transversal $u : r(ERS).r(AST).r(CTR)$ = - 1
(2º) Com a transversal $v : r(DRS).r(FST).r(BTR)$ = - 1
(3º) Com a transversal $l_{AB} : r(MRS).r(AST).r(BTR)$ = - 1
(4º) Com a transversal $l_{CD} : r(DRS).r(PST).r(CTR)$ = - 1
(5º) Com a transversal $l_{EF} : r(ERS).r(FST).r(NTR)$ = - 1

Multiplicando todos os termos das cinco igualdades se obtém:

$(r(ERS))^2.(r(AST))^2.(r(CTR))^2.(r(DRS))^2.(r(FST))^2.(r(BTR))^2.r(MRS).r(PST).\ .r(NTR)$ = - 1 $\Leftrightarrow$
$(-1)^2.(-1)^2.r(MRS).r(PST).r(NTR)$ = - 1 $\Leftrightarrow$
$r(MRS).r(PST).r(NTR)$ = - 1

então pelo Teorema de Menelaus os três pontos M, N e P são colineares.

2º passo: Considere agora que as retas suportes dos lados não consecutivos l_{BC}, l_{DE} e l_{FA} determinas três pontos R, S e T colineares. Lembrando que
$l_{BC} \cap l_{DE}$ = R, $l_{DE} \cap l_{FA}$ = S e $l_{FA} \cap l_{BC}$ = T,
seja a reta que passa pelos pontos R e S $(R \neq S)$, então $T \in x$ por hipótese. Observe que $l_{BC} \cap l_{DE}$ = R, $l_{DE} \cap l_{FA}$ = S logo R e S pertencem a l_{DE} e também a x, então l_{DE} = x. Como $l_{BC} \cap x$ = R, $x \cap l_{FA}$ = S e $l_{FA} \cap l_{BC} \cap x$ = T $\therefore$ R = S, o que é uma contradição, pois $R \neq S$. Consequentemente: R = S = $l_{BC} \cap l_{DE} \cap l_{FA}$ $\therefore$ R = S = T.

Considere então as interseções das outras três retas suportes dos lados do "hexágono" $ABCDEF$: R_1 = $l_{AB} \cap l_{CD}$, S_1 = $l_{CD} \cap l_{EF}$ e T_1 = $l_{EF} \cap l_{AB}$.

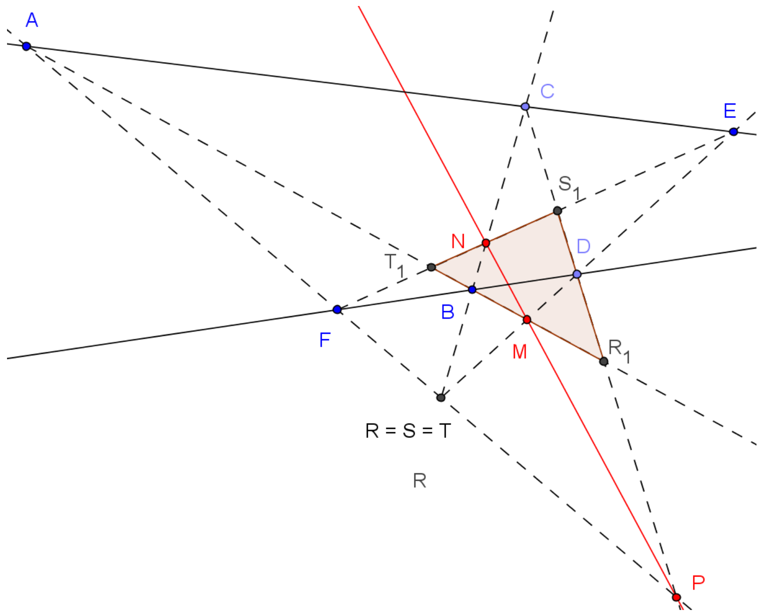

Figura 4.6:

Se R_1, S_1 e T_1 formam um triângulo conforme a figura anterior, a demonstração que os pontos $M = l_{AB} \cap l_{DE}$, $N = l_{BC} \cap l_{EF}$ e $P = l_{CD} \cap l_{AF}$ são colineares é análoga à feita no 1º passo. Por outro lado, se R_1, S_1 e T_1 são colineares, então

$$l_{R_1S_1} = l_{CD},\ l_{R_1T_1} = l_{AB} \text{ e } l_{S_1T_1} = l_{EF},$$

isso acarreta que C, D, A, B, E e F são colineares. Isso é uma contradição da hipótese inicial porque os dois conjuntos de três pontos $\{A, C, E\}$ e $\{B, D, E\}$ estão em duas retas distintas, portanto essa última condição não pode ocorrer. Isso conclui a demonstração. ■

Capítulo 5

Aplicações

5.1 Exercícios Olímpicos (Geometria Projetiva)

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações dos teoremas da Geometria Projetiva.

1ª) Sobre uma circunferência, são dados seis pontos A, B, C, D, E e F, distintos. Sabendo-se que $\overline{AB} \cap \overline{DE}$=$K$; $\overline{BC} \cap \overline{EF}$=$L$ e $\overline{CD} \cap \overline{FA}$=$M$. Então prove que K, L e M são colineares.

Resolução. Vamos provar que os pontos K, L e M são colineares, conforme a Figura 5.1:

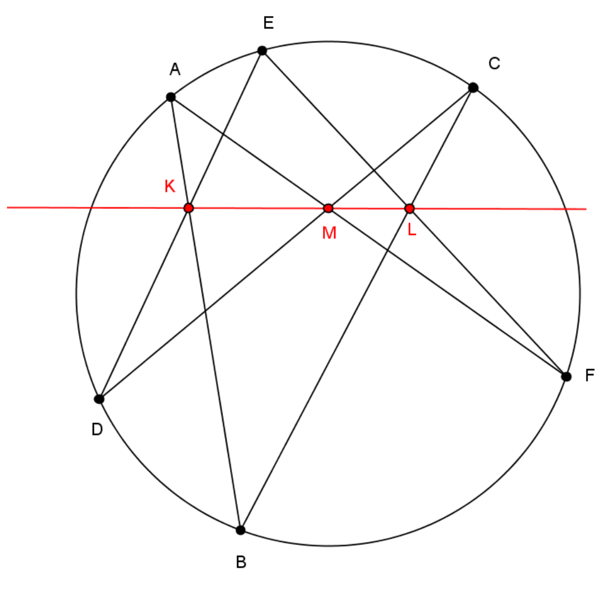

Figura 5.1:

Primeiramente, vamos representar o ponto X exterior à circunferência, tal que $X = \overline{AB} \cap \overline{EF}$ e vamos representar também os pontos Y e Z interiores à circunferência, tal que $Y = \overline{DC} \cap \overline{AB}$ e $Z = \overline{EF} \cap \overline{DC}$. Ver a Figura 5.2:

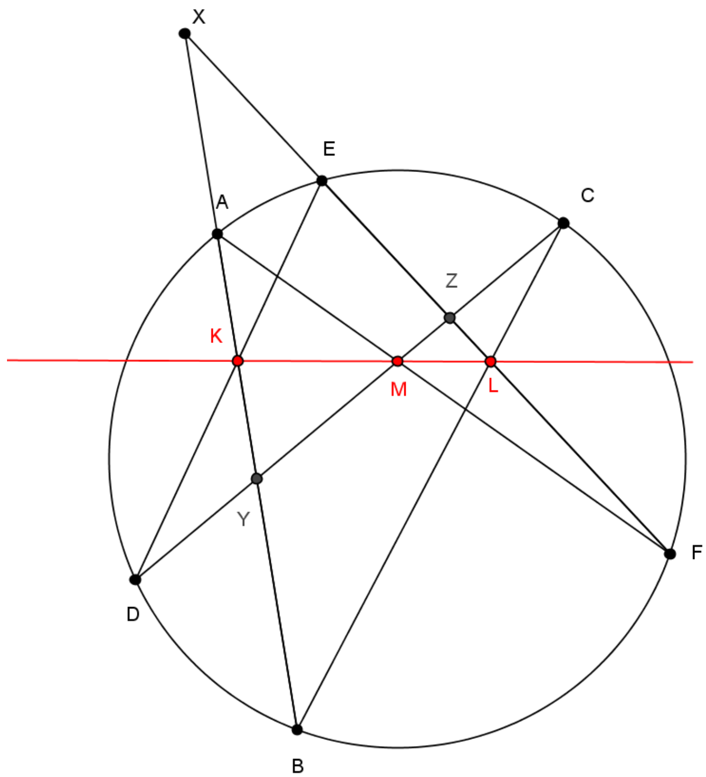

Figura 5.2:

Conforme a Figura 5.2, vamos aplicar o Teorema de Menelaus, em relação:

1. ao $\triangle XYZ$, e a transversal EKD, então teremos:

$$\frac{EZ}{EX} \cdot \frac{KX}{KY} \cdot \frac{DY}{DZ} = 1 \tag{5.1}$$

2. ao $\triangle XYZ$, e a transversal CLB, então teremos:

$$\frac{CY}{CZ} \cdot \frac{LZ}{LX} \cdot \frac{BX}{BY} = 1 \tag{5.2}$$

3. ao $\triangle XYZ$, e a transversal AMF, então teremos:

$$\frac{AX}{AY} \cdot \frac{MY}{MZ} \cdot \frac{FZ}{FX} = 1 \tag{5.3}$$

Agora vamos multiplicar estas igualdades (6.1), (6.2) e (6.3) membro a membro, então teremos:

$$\frac{EZ}{EX} \cdot \frac{KX}{KY} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{CY}{CZ} \cdot \frac{LZ}{LX} \cdot \frac{BX}{BY} \cdot \frac{AX}{AY} \cdot \frac{MY}{MZ} \cdot \frac{FZ}{FX} = 1.1.1$$

Utilizando a potência de ponto numa circunferência, temos:

$XA.XB$=$XE.XF$
$YA.YB = YC.YD$
$ZC.ZD = ZE.ZF$

Desta forma, no produto dos membros da esquerda, seis termos se cancelam e o produto dos membros da direita é igual a 1. Assim obteremos:

$$\frac{KX}{KY} \cdot \frac{LZ}{LX} \cdot \frac{MY}{MZ} = 1 \tag{5.5}$$

Desta forma, teremos o $\triangle XYZ$ e a transversal KLM. Portanto, os pontos KLM são colineares.

2ª) As tangentes a uma circunferência de centro O, traçados por um ponto exterior C, tocam a circunferência nos pontos A e B. Seja S um ponto qualquer da circunferência. As retas $\overleftrightarrow{SA}$, $\overleftrightarrow{SB}$ e $\overleftrightarrow{SC}$ cortam o diâmetro perpendicular a $\overleftrightarrow{OS}$ nos pontos A', B' e C', respectivamente. Prove que C' é o ponto médio de $\overline{A'B'}$.[8]

Resolução. De acordo com a Figura 5.3, teremos:

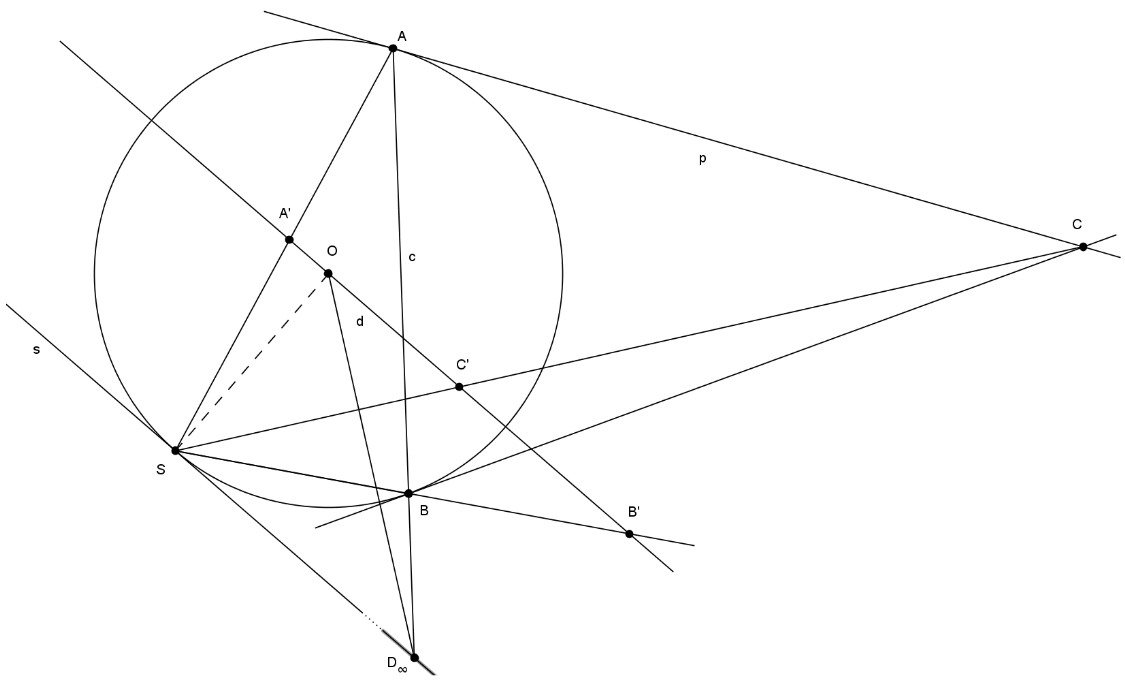

Figura 5.3:

Seja d o diâmetro perpendicular a $\overline{OS}$. Seja D_∞ o ponto do infinito correspondente ao feixe de retas paralelas a d. Queremos provar que $H(A$'B', C'$D_\infty)$. Para isso, basta provar que as retas $\overleftrightarrow{SA}$, $\overleftrightarrow{SB}$, $\overleftrightarrow{SC}$ e $\overleftrightarrow{SD_\infty}$ formam um feixe harmônico. Parece natural tentar verificar que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ corta o feixe em uma quádrupla harmônica. Mas isso equivale a provar que $\overleftrightarrow{SC}$ é a reta polar do ponto $\overleftrightarrow{SD_\infty} \cap \overleftrightarrow{AB}$.

Temos que:

• C é a intersecção das polares de A e B, logo sua polar é c = $\overleftrightarrow{AB}$.
• $\overleftrightarrow{SD_\infty}$ é tangente à circunferência no ponto S, logo é a polar de $S(\overleftrightarrow{SD_\infty} = s)$.
Assim, $\overleftrightarrow{SD_\infty} \cap \overleftrightarrow{AB} = s \cap c$, e sua polar é, portanto, $\overleftrightarrow{SC}$, como queríamos demonstrar.

3ª) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo S. Seja X o ponto de intersecção entre os lados AB e CD e W o ponto de intersecção entre os lados AD e BC. As tangentes traçadas por X intersectam S em Y e Z. Prove que W, Y e Z são colineares.

Resolução. Antes de tudo, vamos enunciar e provar um lema, que será útil para a resolução deste problema.

Lema 5.1. *Se por um ponto M exterior a um círculo S traçarmos secantes que intersectam-no nos pontos A, B, C e D, conforme a Figura 5.4, e se tomarmos $\{P\} = AB \cap CD$ e $\{Q\} = AC \cap BD$, então a polar de M em relação a S será a reta PQ.*

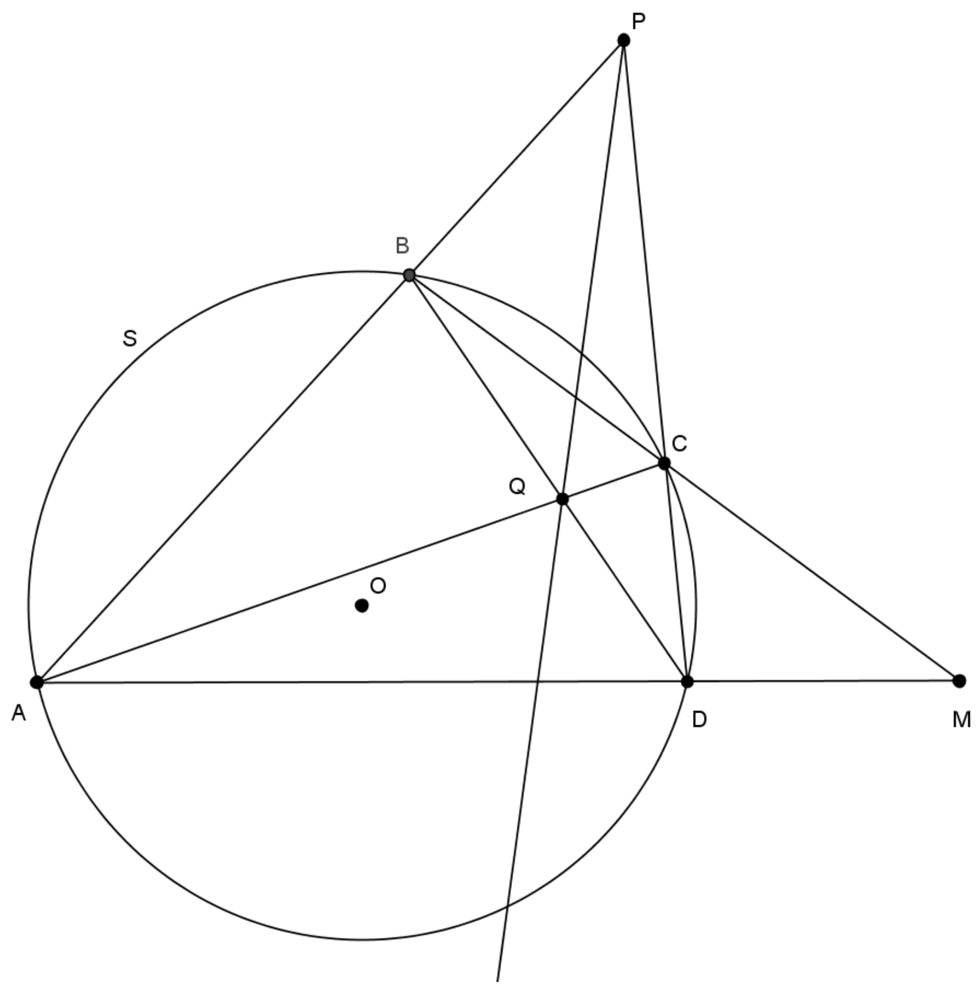

Figura 5.4:

Há quem ache essa parte um pouco complexa, pois é justamente a parte mais difícil do assunto o qual vamos tratar. Tome as retas polares de A, B, C e D como a, b, c e d que, como vimos, são tangentes à S nos seus respectivos pólos. Defina $\{R\} = b \cap c$ e $\{T\} = a \cap d$. A reta polar de R

será BC e a reta polar de T será AD, pelo Corolário 2 e pelo Teorema 4.1 teremos que a polar de M será a reta RT. Basta provar então que RT passa por P e Q, ou melhor, que R, P, Q e T são colineares. Considere o hexágono ABB'CC'D, no qual B'$\equiv B$ e C'$\equiv C$ (vamos usar aqui a estratégia: fazer vértices de um hexágono coincidirem para obtermos novas relações). Pelo Teorema de Pascal, P, R e Q são colineares (os 3 pontos de encontro dos 3 pares de lados opostos do hexágono devem ser colineares). Analogamente no hexágono AA'$BCDD$', com A'$\equiv A$ e D'$\equiv D$, teremos que P, Q e T são colineares. Segue que R, P, Q e T são colineares, como queríamos demonstrar. Bem, fim do lema. O problema agora fica um pouco mais fácil, já que vimos o lema acima: Então, vamos resolvê-lo.

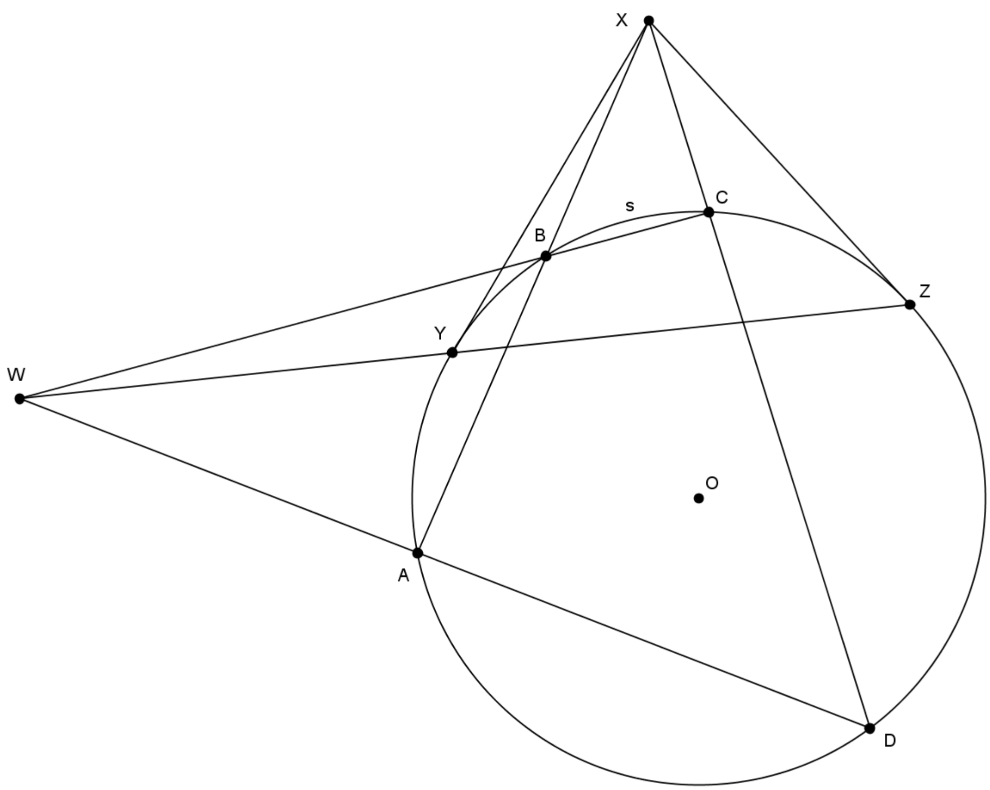

Figura 5.5:

Note que podemos fazer uma certa analogia entre o problema e o Lema. O ponto W corresponde ao ponto M do Lema, e o ponto X ao ponto P. Temos então que a reta polar de W pasa por $X \Rightarrow$ a reta polar de X passa por W. Mas a reta polar de X passa por Y e Z, pelo Corolário 2 $\Rightarrow$ W, Y e Z são colineares, finalizando o problema.

4ª) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo $ABC.$ As tangentes traçadas por A ao círculo de diâmetro BC intersectam o círculo em P e Q. Prove que P, Q e H são colineares.

Resolução.

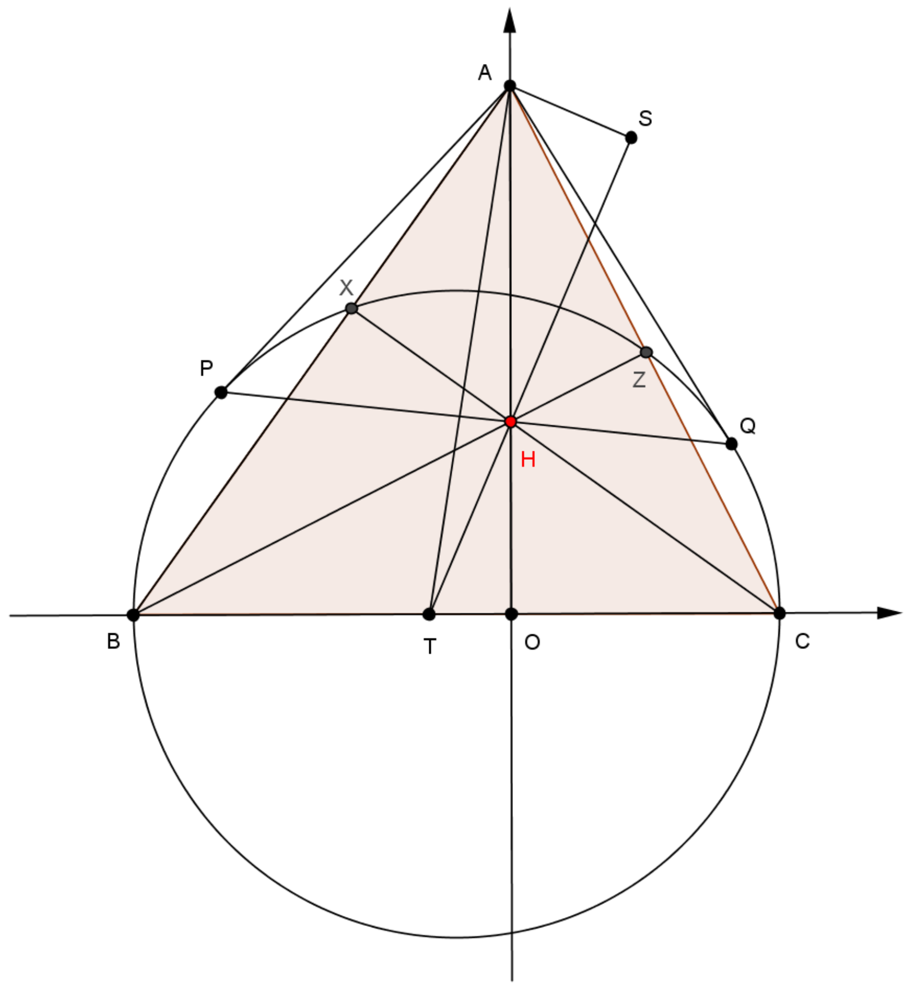

Figura 5.6:

Representando o centro da circunferência pela letra T, tome $S \in TH$ tal que $TS \perp AS.$ Temos por construção que $\triangle\ HTO \sim \triangle\ HSA\ (AA) \Rightarrow HS/AH = HO/TH \Rightarrow\ HS = (AH.HO)/HT$ $\Rightarrow HS.HT = AH.HO.$ Como visto na Figura 6.6, vamos usar Geometria Analítica.

COORDENADAS:

$A(0,\ a)$

$B\ (-b, 0)$
$C\ (c, 0)$
$T\ ((c-b)/2, 0) \rightarrow T$ é o ponto médio de BC.
Temos que $BH \perp AC \Leftrightarrow m(BH).m(AC)=-1 \Leftrightarrow (h/b).(a/(-c))=-1 \Leftrightarrow h=bc/a$.

MEDIDAS:

$r = (b+c)/2 \rightarrow$ raio do círculo por B e C
$AH = a - h = (a^2 - bc)/a$
$HO = h = bc/a$
$TH^2 = h^2 + ((c-b)/2)^2 = (bc/a)^2 + (b-c)^2/4$

Assim vem que $TH.TS = TH.(TH + HS) = TH^2 + AH.HO = (bc/a)^2 + (b-c)^2/4 + bc/a.(a^2-bc)/a = (bc/a)^2+(b-c)^2/4+bc-(bc/a)^2 = ((b-c)^2+4bc)/4 = ((b+c)/2)^2 = r^2 \Rightarrow TH.TS = r^2$ de fato $S \equiv H$', onde H' é o inverso de $H \Rightarrow A \in$ polar de $H \Rightarrow H \in$ polar de $A \Rightarrow H \in PQ$.

Portanto, P, H e Q são colineares, conforme queríamos mostrar.

5.2 Atividade multidisciplinar: Perspectiva - O estudo da Geometria Projetiva no Ensino Médio

Neste Capítulo consta a descrição dos resultados de estudos desenvolvidos com alunos do 2º Ano do Ensino Médio no período matutino do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas - Campus Parintins. Trata-se de um trabalho multidisciplinar (Matemática/Arte), trabalhando noções básicas de Geometria Projetiva. Por ser um tema novo para os alunos, eles tiveram um pouco de dificuldade no começo, porém no decorrer deste trabalho estas dificuldades foram sanadas. O principal intuito deste trabalho é despertar nos alunos o interesse pela Geometria Projetiva e demostrar a eles o lado mágico desta Geometria através desta simples atividades multidisciplinar, abordando as técnicas de perspectiva (ponto de fuga, linhas de fuga, mudança de dimensão, sobreposição e mudança de espaço), objetivando representar na superfície plana o espaço tridimensional. Antes de começar tudo, vamos apresentar um pouco da história da Geometria Projetiva.

Observando fotos e desenhos e fazendo comparações entre os mesmos. E também explorar as formas dimensionais e tridimensionais. Para escolher esta turma, primeiro fiz uma análise sobre o desempenho deles em relação à Geometria Euclidiana, pois esta turma teve um ótimo desempenho e gostam muito de Geometria e quando falei sobre o trabalho que estava querendo desenvolver com eles e falei sobre o tema: "Geometria Projetiva". Eles gostaram muito e ficaram entusiasmados. Vamos ver agora como foi feito este trabalho.

Um pouco da história da perspectiva na Geometria Projetiva

Visando resgatar as origens da Geometria Projetiva na Arte Visual, este breve resumo histórico coloca os pintores como seus contribuintes iniciais. A Geometria Projetiva é uma ciência que foi inspirada na arte e criada por grandes gênios só poderia vir a ser uma verdadeira arte. Na Idade Média, as pinturas eram, na sua maioria, chapadas e planas, sem uma ligação com o mundo real. Quando os pintores faziam seus quadros, os temas tratados eram simbólicos e religiosos. E estes quadros não tinham profundidade, como veremos na Figura 5.7:

Figura 5.7: Curved Throne

Porém, quando alguns pintores começaram a ter consciência sobre este problema, foi no final do século *XIII*, aí eles começaram a tornar as suas pinturas mais parecido com a realidade, estas pinturas ficaram mais fiéis à realidade. Como podemos ver através das pinturas tridimensional de alguns pintores, Duccio di Buoninsegna (1255 - 1319) e Giotto di Bondone (1267 - 1337). Muitos outros pintores foram influenciados por Duccio e Giotto através do desenvolvimento da teoria intuitiva da perspectiva. Podemos citar: Pietro Lorenzetti (1300 - 1348), Paolo Ucello (1397 - 1475) e Filippo Bruneleschi (1379 -1476). Filippo Bruneleschi desenvolveu um sistema de perspectiva que ele usava em suas pinturas e ensinava a outros pintores, isto por volta de 1425. Veremos nas Figuras 5.8 e 5.9:

Figura 5.8: Duccio

Figura 5.9: Giotto

Por de volta 1435, Leon Battista Alberti(1404 - 1472) escreveu o primeiro texto sobre perspectiva, De Pictura. Este trabalho foi estendido e aprimorado pelo pintor e matemático Piero della Francesca (1418 - 1492), autor de De Prospectiva Pingendi. Vejamos as Figuras 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16 dos artistas da época.

Figura 5.10: Lorenzetti

Figura 5.11: Lorenzetti

Figura 5.12: Ucello

Figura 5.13: Ucello

Figura 5.14: Brunelleschi

Figura 5.15: Lorenzo Ghiberti, Porta do Paraíso

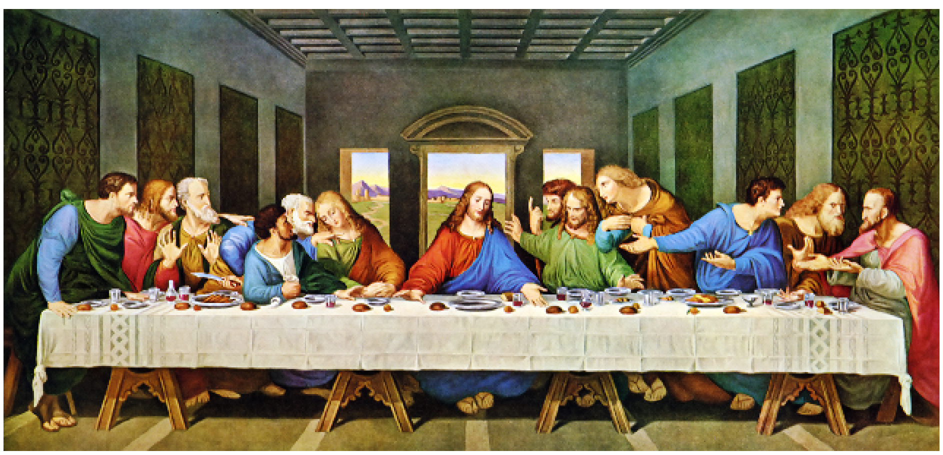

Figura 5.16: Da Vinci, A Santa Ceia

Algumas Pinturas Contemporâneas

Vamos observar algumas pinturas contemporâneas de Hogarth, Escher e Dali que demonstram a importância da perspectiva na pintura. Podemos ver no quadro de Hogarth as falsas perspectivas, como: a distância entre o homem de azul e o rio, pois mesmo assim ele consegue pescar; o tamanho do ganso que é maior que o boi na beira do rio; a mulher na janela tem praticamente o mesmo tamanho do homem que está no alto do morro e outras falsas perspectivas que vocês podem encontrar na Figura 5.17. Estas falsas perspectivas ocorrem, pois, existem mais de um ponto de fuga, ou seja, para fazer o ganso existe um ponto de fuga e para fazer o boi, existe outro ponto de fuga. Este é o motivo da falsa perspectiva.

Figura 5.17: Hogarth, False Perspective

O mesmo motivo ocorre no quadro de Escher. Temos mais de um ponto de fuga: Estamos vendo escadas que se encontram, onde uma pessoa está subindo uma determinada escada e ao mesmo tempo parece que está descendo a mesma. Este é outro caso de falsa perspectiva. Veja na Figura 5.18:

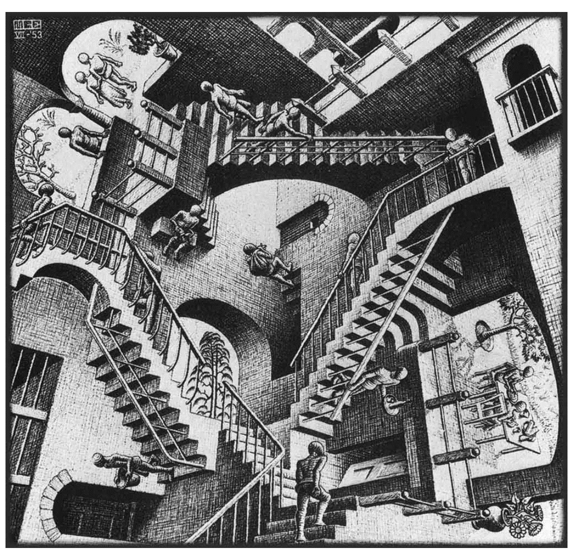

Figura 5.18: Escher

Por outro lado o quadro de Dalí é incrível e muito belo. Este quadro realçada pela perspectiva e pela simetria empregadas. Como podemos observar, na Figura 5.19, uma mulher parece estar dormindo e a água do mar é o lençol.

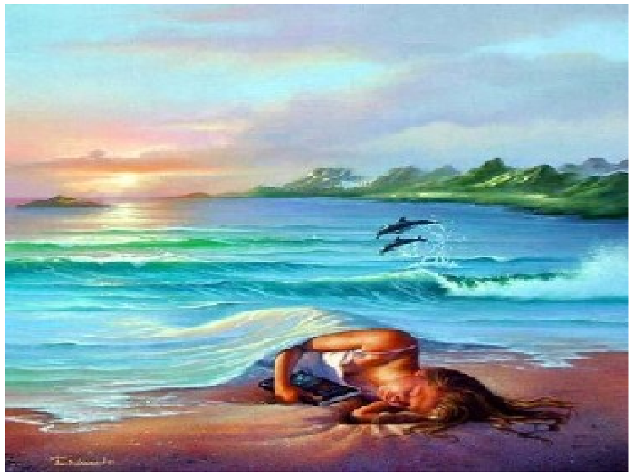

Figura 5.19: Dalí

No auge da Renascença, Leonardo da Vinci (1452 - 1519) e Albrecht Dürer (1471 - 1528) escreveram tratados sobre perspectiva em que apresentavam a Teoria Matemática da Perspectiva e colocavam a sua importância para a pintura, isto na Itália no século *XV*, aí sim começa a história da Geometria Projetiva. Ela nasceu do esforço de criar uma teoria racional na qual as regras práticas que os artistas e os pintores da Renascença (Leonardo da Vinci, Leon Battista Alberti, Paolo Uccelo, Piero della Francesca, Dürer, etc.) haviam descoberto, para representar na teoria, de modo correto, a imagem suscitada dos objetos do mundo exterior em nossos olhos.

Com a finalidade de buscar mais realismo para suas obras os artistas introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectividade. Para que essas ideias pudessem ser formuladas matematicamente, demorou cerca de dois séculos. Porém, esta construção foi feita por um pequeno grupo de matemáticos franceses motivados por Gerard Desargues (1591 - 1661). Logo, talvez pela própria maneira como tivesse sido escrito, em uma linguagem um tanto peculiar, o trabalho e as ideias de Desargues não foram bem aceitas na época.

A partir do século *XIX*, Jean Victor Poncelet (1788 - 1867) pôde resgatá-los. Poncelet prisioneiro de guerra russo, sem livros nas mãos criou sua grande obra sobre a Geometria Projetiva publicada em 1822 com o título de *"Tratado das propriedades projetivas das figuras"*.

Na Geometria Projetiva as dimensões reais e as propriedades métricas dos objetos em questão têm pouco valor, pois as propriedades das figuras consideradas são as visuais. Buscando criar tais regras empíricas, a nova Geometria negligenciou, então, as velhas propriedades dos *"Elementos de Euclides"* e centralizou o interesse sobre as propriedades visuais das figuras. Dessa forma, pode-se afirmar que enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos a Geometria Projetiva lida com a nossa visualização dos objetos do mundo.

Para evidenciar as diferenças entre a Geometria Projetiva e a Geometria Euclidiana, vamos observar um exemplo que ocorre com a interseção de retas. Na Geometria Euclidiana as retas paralelas distintas não tem ponto em comum, ou seja, não se intersectam, porém na Geometria Projetiva, duas retas sempre terão no mínimo um ponto em comum. Tente imaginar uma estrada retilínea, pois os acostamentos jamais se cruzam. Na prática, os acostamentos das estradas são retas paralelas, porém na Geometria Projetiva estes acostamentos são retas que se encontram no horizonte. “Essa é uma das características marcantes da geometria projetiva, duas retas quaisquer sempre se interceptam”. (AUFFINGER;VALENTIM, 2003, p.2).

Figura 5.20: Os acostamentos de uma estrada se encontram no horizonte: Frente do IFAM - Parintins

Investigação dos alunos

O trabalho teve início no momento em que os alunos foram questionados sobre a Geometria que eles conheciam. Eles falaram sobre as figuras planas: Triângulos, Quadriláteros e outras e falaram sobre as figuras espaciais: Prismas, Paralelepípedos, Cubos, Pirâmides, Cones, Cilindros e Esferas, falaram na mesma forma que estudaram estes conteúdos na sala de aula. E interessante foi que, ao perguntar aos alunos: Que tipo de Geometria eles haviam estudado? Somente dois alunos falaram sobre a Geometria Euclidiana. Pois os mesmos já haviam estudados no PIC (Programa de Iniciação Científica - OBMEP).

A forma mais fácil para introduzir os conhecimentos da Geometria Projetiva é pegar os conceitos básicos da Geometria Euclidiana e estender aos conceitos da Geometria Projetiva. Para isto, fizemos uma atividade multidisciplinar entre as matérias Matemática e Arte, isto para fazer uma ligação entre a Geometria Projetiva, a Arte Visual, pois, foi uma forma de motivar os alunos a este estudo, já que moramos em uma cidade, em que a cultura mais significativa é o desenho, a pintura, pois eles gostam de desenhar.

A primeira atividade proposta aos alunos foi pegar uma folha de ofício e desenhar uma paisagem, com um rio ou uma estrada onde tivesse árvores nas margens dos rios ou nos acostamentos, dependendo do desenho. Isto sem noção alguma dos conceitos básicos da Geometria Projetiva. Vamos ver alguns dos desenhos feitos por alguns alunos da turma, na Figura 5.21:

Figura 5.21: Desenho Livre

Pelo que podemos observar a maioria dos alunos não têm noção de perspectiva e nem de profundidade. Diante desta constatação acreditamos que com a introdução dos conceitos básicos da Geometria Projetiva ao conhecimento dos alunos o ensino se tornará mais prático e prazeroso, visto que a pintura é uma manifestação artística e ajudará no aprimoramento das técnicas de desenho de cada um. Isto facilitará na captura de imagens e transposição delas para o papel. Isto é uma dificuldades que iremos procurar sanar com os conceitos básicos da Geometria Projetiva.

Utilizando um Datashow apresentamos alguns quadros da Renascença, e os alunos conseguiram perceber a diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva, pois enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que se vive (propriedades visuais e táteis), a Geometria Projetiva lida com o mundo que se vê (propriedades visuais). Os alunos ficaram impressionados com os quadros, principalmente o quadro de Dalí, pois este quadro realçava bem a perspectiva. Eles identificaram em alguns quadros o ponto de fuga e perceberam a profundidade da imagem de alguns quadros.

Dando continuidade a nossa atividade, foi proposto aos alunos fazerem um parecido com o primeiro desenho feito por eles, porém para fazer este novo desenho, eles receberam uma folha com o ponto de fuga e a linha horizontal, de acordo com os quadros da Renascença. E os resultados estão representados na Figura 5.22:

Figura 5.22: Desenho com ponto de fuga e linha horizontal

Ao compararmos o primeiro desenho com o segundo, podemos perceber a grande diferença, pois a maioria dos primeiros desenhos não representava ponto de fuga, perspectiva, ou seja, os alunos não tinham noção de profundidade, pois não conheciam os conceitos básicos da Geometria

Projetiva, já o segundo desenho estava mais parecido com o real, pois os alunos colocaram em prática os poucos conhecimentos de ponto de fuga, perspectiva e com isto os seus desenhos melhoram significadamente.

Alfabetismo Visual

O alto grau de alfabetismo verbal no mundo não surgiu com rapidez ou facilidade. E não é uma realidade viável em vários países. Porém o problema é diferente quando falamos em alfabetismo visual. Já na essência do problema do analfabetismo visual existe um paradoxo.

Uma grande parte do processo, por sua vez, já constitui uma competência das pessoas inteligentes e dotadas de visão. Quantas pessoas de nós veem? Para dizê-lo de uma forma que chame a atenção, todos, menos os cegos. Outra pergunta: Como estudar o que já conhecemos? Para responder a esta pergunta vamos recorrer a uma definição do alfabetismo visual como algo além do simples enxergar, como algo além da simples criação de mensagens visuais.

O alfabetismo visual implica compreensão e meios de ver e compartir o significado a um certo nível de universidade. A realização disso exige que se ultrapassem os poderes visuais naturais do organismo humano, além das capacidades de intuição em nós programadas para a tomada de decisões visuais numa base mais ou menos comum, e das preferências pessoais e dos gostos individuais.[9].

Uma pessoa que é capaz de ler e escrever é chamada de uma pessoa letrada, mas essa definição pode ser ampliada, para uma pessoa instruída. Uma vez que no caso do alfabetismo visual, podemos também fazer a mesma ampliação de significado. O alfabetismo oferece um corpo de informações e experiências compartilhadas e traz em si a promessa de uma compreensão culta dessas informações e experiências. Se torna evidente a complexidade da tarefa, quando nos damos conta dos inúmeros conceitos necessários para a conquista do alfabetismo visual.[9].

Infelizmente, não existe nenhum atalho que nos permita chegar, através da multiplicidade de definições e características do vocabulário visual, a um ponto que não ofereça quaisquer problemas de controle e elucidação. Em geral tendem a ser unidimensionais, frágeis e limitadas, e não representam a qualidade mais desejável dos meios visuais, ou seja, seu ilimitado poder descritivo e sua infinita variedade. Existem poucas razões para nos queixarmos da complexidade da expressão visual, quando nos damos conta de seu grande potencial e somos capazes de valorizá-lo.

Desenho natural utilizando a perspectiva

Em relação à perspectividade, foi pedido para os alunos fazerem uma nova atividade, que seria fazer desenhos com mais de um ponto de fuga, imagens de uma paisagem que tivesse um cercado e uma árvore, sendo uma com o cercado na frente da árvore e outra com o cercado atrás da árvore. Vejam as Figuras 5.23, 5.24 e 5.25:

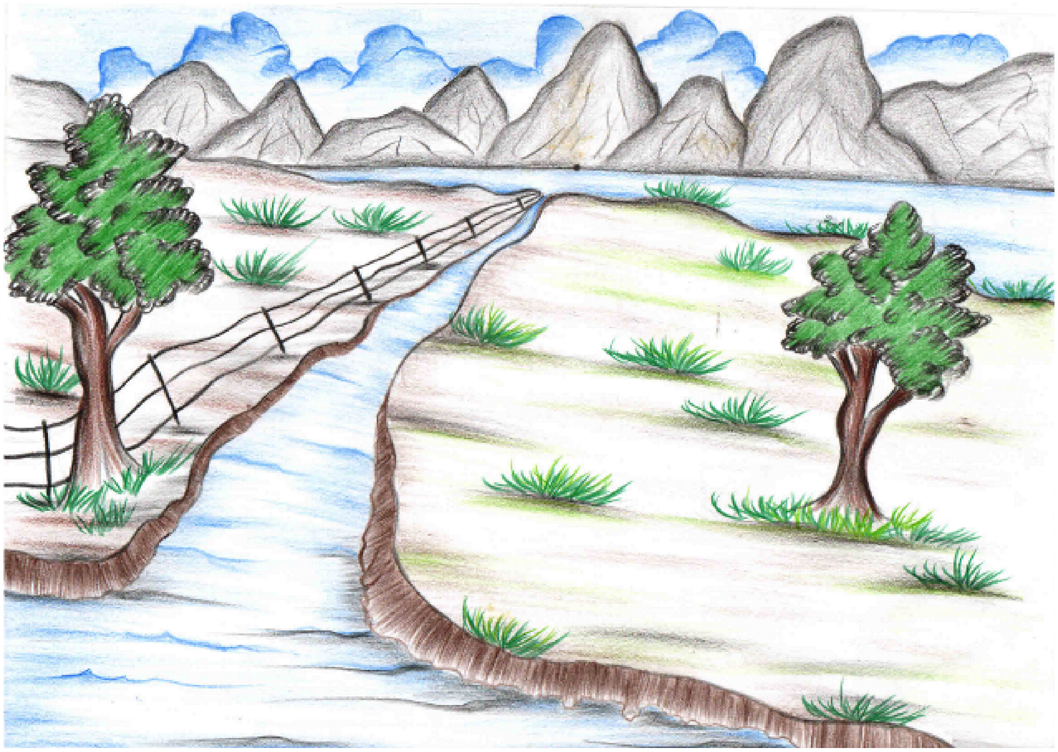

Figura 5.23: Mudança de posição

Figura 5.24: Mudança de posição

Figura 5.25: Dois pontos de fuga

Agora sim, podemos ver um grande avanço que os alunos tiveram entre o primeiro desenho e este terceiro desenho. Nestes desenhos os alunos colocaram em prática tudo que aprenderam nestas aulas. Como podemos ver, os desenhos tem profundidade, ponto de fuga, linha horizontal e linhas de fuga.

Ilusão de Óptica

Estas imagens nos fazem vê-las de uma forma errada, isto é chamado de ilusão de óptica. Estas imagens são criadas com incríveis efeitos de ilusões, com uma grande qualidade técnica e estética. E estas imagens respeitam as regras geométricas do desenho e da perspectiva. Com o decorrer das aulas, os alunos foram instigados a pesquisar imagens de ilusão de óptica, então eles conseguiram várias imagens e apresentaram para os colegas de outras salas. Foi um grande sucesso, pois chamou a atenção dos outros alunos. Vamos ver as Figuras 5.26 e 5.27:

Figura 5.26: Ilusão de Óptica

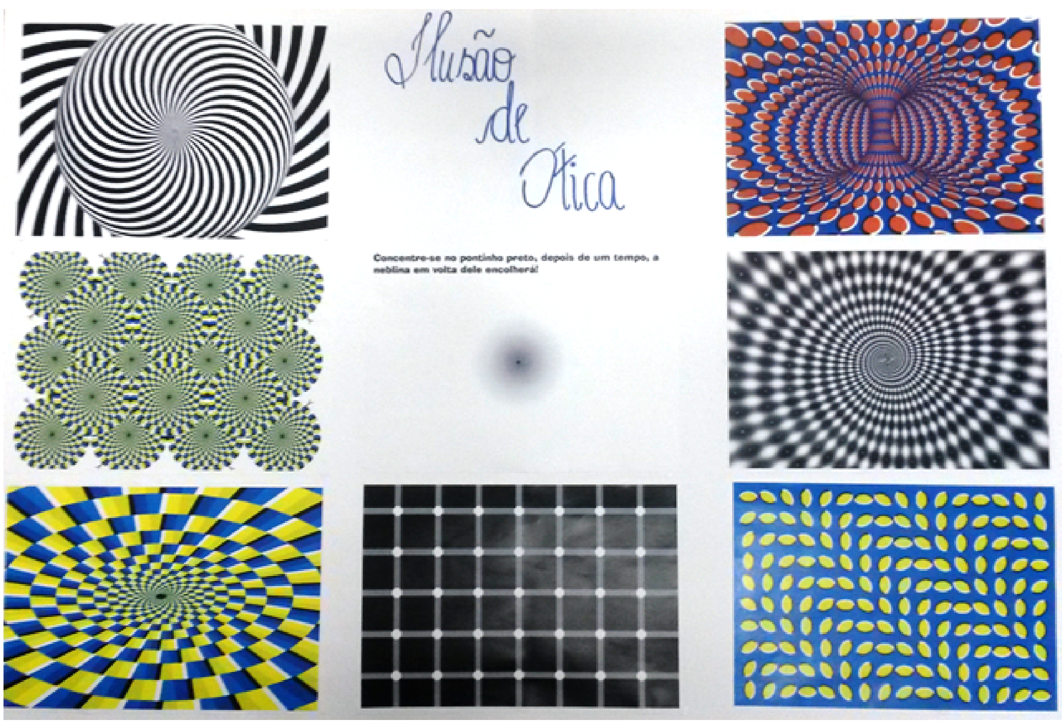

Figura 5.27: Ilusão de Óptica

Os alunos conseguem perceber as diferenças entre uma imagem e a realidade, isto através da perspectiva. Logo este trabalho teve uma importância significativa na vida destes alunos.

Elementos da Perspectiva

Ao serem apresentados aos alunos os elementos da perspectiva, como ponto de fuga, linha de fuga, linha horizontal, ponto de vista e linhas de fuga, foi demonstrado a importância de cada elemento, pois além de identificar visualmente cada um deles, temos que fazer uma descrição sobre seu significado e a função de cada um no desenho.[12]

Linha do Horizonte

A linha horizontal representa o nível dos olhos do observador. Além disto, a linha horizontal é o elemento da construção em perspectiva. Nesta paisagem abaixo, podemos ver a linha horizontal, que separa o Céu e a Terra e risca horizontalmente ao nível do mar. Esta paisagem da Figura 5.28 está em construção, como podemos ver nas próximas imagens.

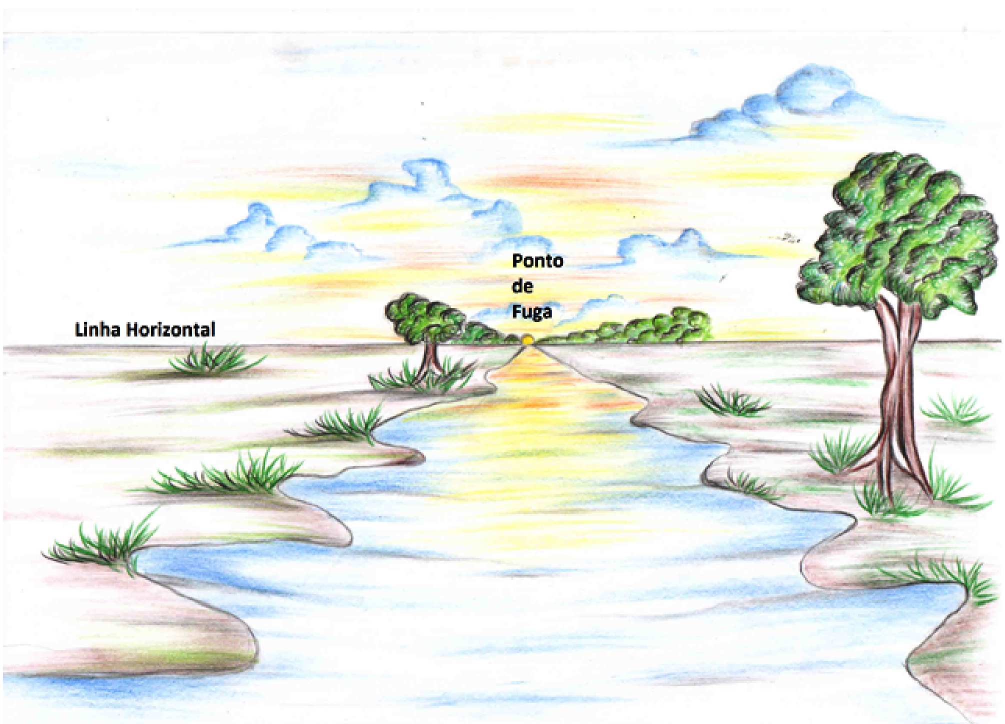

Figura 5.28: Rio Amazonas

A linha horizontal fica sempre representada à altura dos nossos olhos e dependendo do lugar em que nos encontramos para observar um certo objeto, esta linha horizontal jamais muda de posição.

Ponto de Vista

O ponto de vista é o cruzamento entre a linha horizontal e a linha vertical, tal que estas duas linhas sejam perpendiculares entre si. Este ponto de vista pode variar, dependendo do lugar do desenhista. Já no desenho de um quadro, este ponto de vista na maioria das vezes é quase sempre no centro do quadro. Podemos ver esta situação na Figura 5.29:

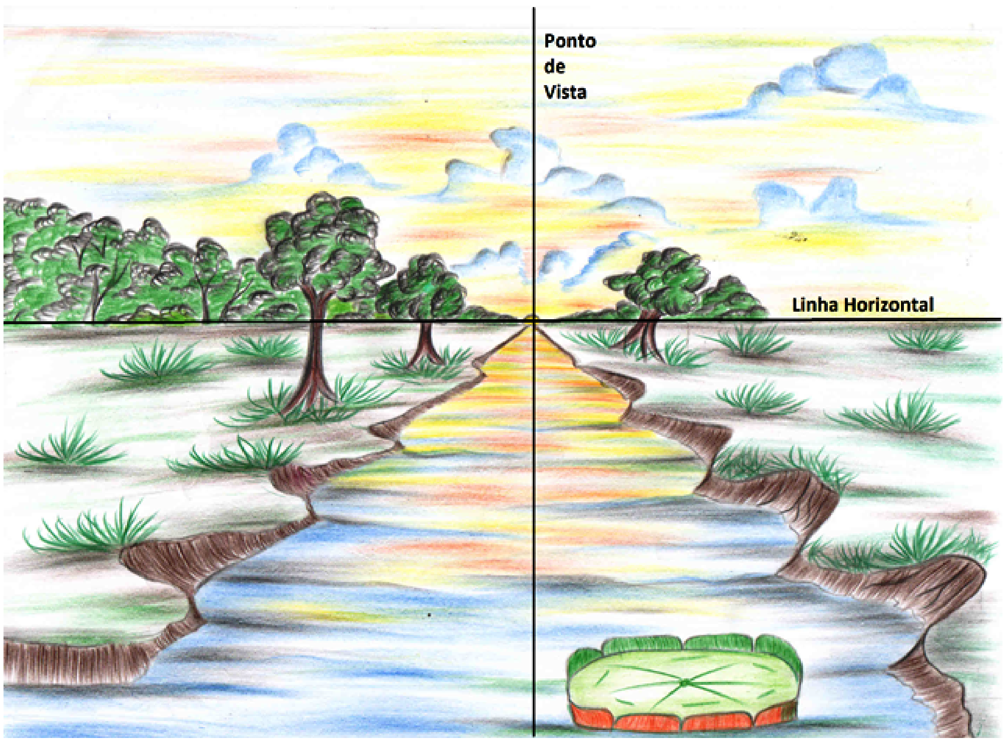

Figura 5.29: Rio Amazonas

Ponto de Fuga e Linhas de Fuga

Vamos ver agora o que é o ponto de fuga e linhas de fuga. O ponto de fuga é um ponto localizado na linha horizontal e todas as linhas paralelas (linhas de fuga) convergem para o ponto de fuga, isto quando vistas em perspectiva. Dependendo dos tipos de perspectivas, são necessários dois ou mais de dois pontos de fuga. Na Figura 5.30, veremos um ponto de fuga e linhas de fuga.

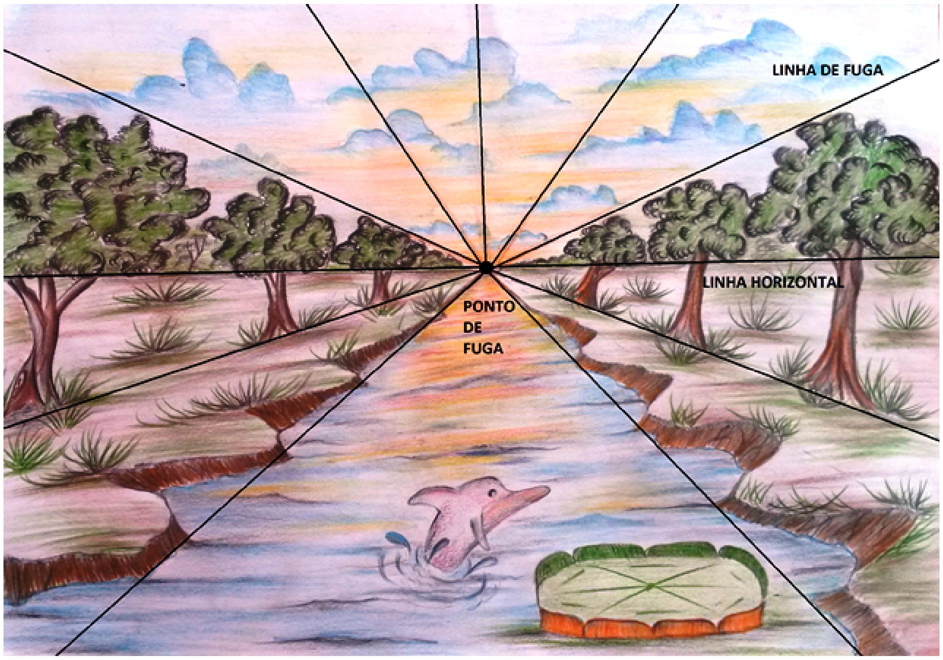

Figura 5.30: Rio Amazonas

Podemos ver a construção, passo a passo de uma paisagem que representa o Rio Amazonas em perspectiva. Nesta imagem utilizamos os elementos da perspectiva, como ponto de fuga, linha de fuga, linha horizontal, ponto de vista e linhas de fuga, foi demonstrado nesta imagem a importância de cada elemento em perspectiva. Vamos representar esta imagem finalizada na Figura 5.31:

Figura 5.31: Rio Amazonas

Os alunos conseguiram desenvolver os conceitos e regras práticas da perspectiva da Geometria Projetiva, apresentadas neste trabalho. Isto significa que o objetivo foi alcançado. Finalizando este nosso trabalho, os alunos fizeram exposição de todos os trabalhos realizados para os alunos do período matutino do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas - Campus Parintins, expondo todas suas atividades. E já despertou o interesse pela Geometria Projetiva por outros alunos de outras turmas.

Retas paralelas se encontram?

Desde quando começamos a estudar, principalmente a geometria, aprendemos que retas paralelas nunca se encontram. Porém, aqui, com a ajuda da Polaridade, vamos tentar mostrar que na nossa imaginação se pudêssemos extrapolar, as retas paralelas se encontrariam lá no infinito. Mas, primeiramente, temos uma pergunta: Onde é o infinito? Bem, o infinito é uma abstração e não um número. Se pensarmos numa certa quantidade sendo analisada em um determinado problema, podemos assumir grosseiramente que o infinito é aquilo muito maior que qualquer destas quantidades. Essa ideia nos permite calcular limites e encontrar resultados analíticos.

Vamos observar a Figura 5.32, onde podemos visualizar retas paralelas (horizontais), e prestando bem a atenção, diremos que elas jamais se encontrarão.

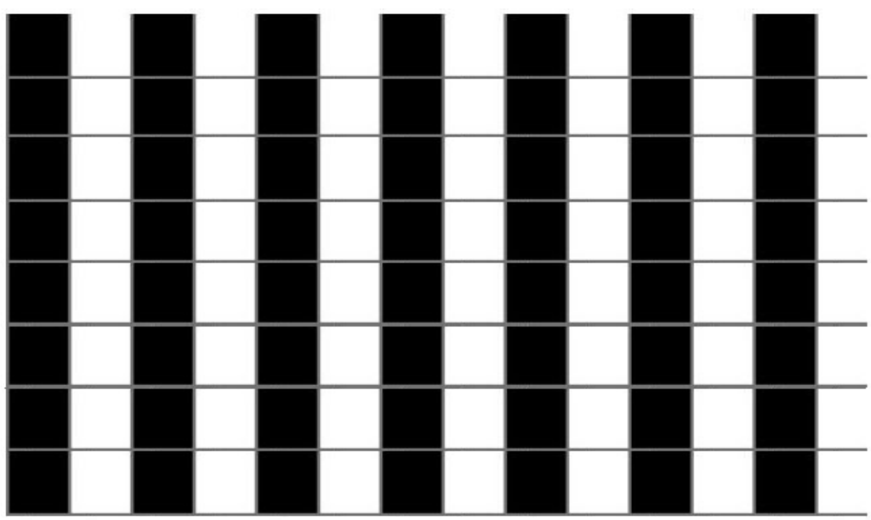

Figura 5.32: Retas Paralelas

Vamos agora, fazer o seguinte: deslocar algumas destas retas um pouco para a direita, sobre o seu próprio eixo, e obteremos a Figura 5.33.

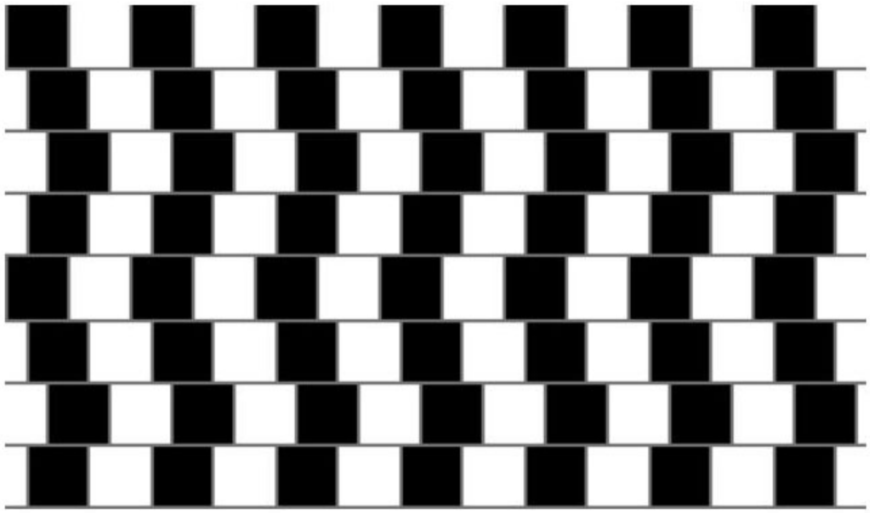

Figura 5.33: Retas Paralelas

Observando bem a Figura 5.33, temos a nítida impressão de que as retas se encontrarão em algum local. Isto é a Geometria Projetiva, pois é a Geometria que lida com a nossa visualização das coisas do mundo.

A inversão é involutiva: se P é o inverso de Q, então Q é o inverso de P; por isso podemos dizer que P e Q são os inversos um do outro.

- Se P está no interior da circunferência, então Q está sempre no exterior da circunferência;
- Quando P está sobre a circunferência, então Q coincide com P;
- Quando P aproxima-se da circunferência, então Q aproxima-se também da circunferência;
- Quando P aproxima-se do centro da circunferência, então Q afasta-se para o infinito;
- O inverso do centro de uma circunferência em relação à circunferência não está definido.

Então, vamos fazer uma demonstração geométrica deste raciocínio: "retas paralelas se encontram no infinito?". Utilizando o Software GeoGebra sobre o inverso de um ponto em relação a uma circunferência, construímos a Figura 5.34

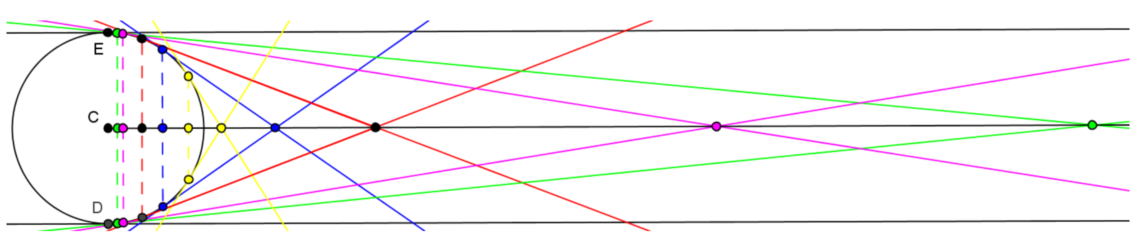

Figura 5.34: Retas paralelas se encontram no infinito?

No caso limite, realmente, retas paralelas não se encontram, mas na sua imaginação se você pudesse extrapolar, as retas paralelas se encontrariam lá no infinito, pois o inverso do centro em relação à circunferência não está definido, como a divisão por zero, que ainda não está definida e o infinito, nem um número é.

Exercícios Complementares para os alunos

1. Analise o resumo histórico apresentado e observe que foram citados alguns pintores que foram importantes no desenvolvimento da perspectiva e, como consequência, no desenvolvimento da Geometria Projetiva. Faça uma pesquisa para incluir outros nomes que em sua opinião que deveriam constar neste resumo. Justifique as possíveis inclusões.

2. Pesquisa sobre o arquiteto Girard Desargues (1591-1661) e J.V. Poncelet (1788-1867) e suas contribuições à Geometria Projetiva.

3. A imagem de uma reta por uma perspectiva é sempre uma reta. A imagem de um segmento por uma perspectiva é sempre um segmento? A imagem de um triângulo por uma perspectiva é sempre um triângulo? A imagem de uma circunferência por uma perspectiva é sempre uma circunferência?

4. Em uma perspectiva, um ponto objeto P está entre os pontos objetos Q e R. É verdade que o ponto imagem P' está entre os pontos imagem Q' e R'?

5. Dado um par de retas concorrentes no ponto objeto P, formando um ângulo de trinta graus, é possível construir uma perspectiva que tem como imagem um par de retas perpendiculares? E que tem como imagem um par de retas paralelas?

6. Desenhe uma paisagem com árvores, prédios e uma estrada, utilizando tudo que estudamos.

Capítulo 6

Considerações Finais

Procuramos fazer neste trabalho uma abordagem dos principais fundamentos da Geometria Projetiva, junto com os principais Teoremas e na sequência mostrar algumas aplicações voltadas para o Ensino Médio.

No início deste trabalho fizemos um resumo histórico sobre a Geometria Projetiva, onde podemos ver as dificuldades que os artistas de antigamente tinham para expor em uma tela os seus pensamentos ou expor o mundo real, pois eles não conheciam os elementos básicos da perspectiva para por nas suas pinturas. Só foram tomar conhecimento de tais elementos depois de décadas, aí sim começaram a explorar a Geometria Projetiva. Com isto podemos ver que a Geometria Projetiva é muito importante na nossa vida, desde os séculos passados.

Na sequência, começamos a explorar os fundamentos básicos desta geometria e vale afirmar que estes fundamentos são os alicerces da Geometria Projetiva. Alguns professores fazem questão de não ensinar a Geometria no Ensino Médio, deixando-a em segundo plano, não sei se por dificuldades de entender a disciplina ou por falta de tempo. Este trabalho busca modificar essa prática e evidenciar a importância da Geometria Projetiva na formação do aluno e que pedomes introduzir esta geometria no Ensino Médio, pois podemos ver ao longo deste trabalho algumas aplicações que envolvem conteúdos que os alunos estudam. Além disso, podemos ver que esta disciplina pode ser trabalhada de forma multidisciplinar, como foi evidenciado no sexto capítulo deste trabalho.

No trabalho multidisciplinar entre a Matemática e a Arte, realizado para os alunos do 2º ano do Ensino Médio Integrado no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas - Campus Parintins, sobre a Geometria Projetiva, podemos vivenciar as dificuldades dos alunos por conseguir reproduzir os seus pensamentos numa folha de papel. Porém, com a introdução dos elementos básicos da perspectiva, no conhecimento dos alunos, a tarefa foi bem sucedida.

Evidenciamos na introdução deste trabalho, a preocupação de tornar os professores capazes cada vez mais de refletir sobre como a Geometria Projetiva pode contribuir para a formação da cidadania. A intenção foi de proporcionar um aprendizado significativo da Geometria, pois é uma preocupação muito presente em nossa prática docente nas escolas em nível de Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

[1] COXETER, Harold Scott Macdonald; Projective Geometry. Reprint, slightly revided. Of 2nd ed originally published by University of Toronto Press, 1974.

[2] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática; tradução: Elza F. Gomide. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

[3] BARROS, Abdênago Alves de; ANDRADE, Plácido Francisco de Assis. Introdução à Geometria Projetiva. Universidade Federal do Ceará - Centro de Ciências - Departamento de Matemática. Fortaleza, 2004.

[4] AYRES, Frank Jr.. Projective Geometry. Schaum's ouTlines. Department of Mathematics Dickinson College, New York, 1967.

[5] AUFFINGER, Antonio Carlos T. de C.; VALENTIM, Fábio Júlio da Silva. Introdução à Geometria Projetiva. 2003. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Setembro de 2003. disponível em: <http://virtual.lncc.br/ rodrigo/cursos/CG/01-Apostilas/outros/geometria-projetiva-ufes.pdf>

[6] MOORHOUSE, G. Eric, Incidence Geometry, University of Wyoming, 2007.

[7] VENEMA, Gerard A., Exploring Advanced Euclidean Geometry With Geometer's Sketchpad, Department of Mathematics and Statistics Calvin College Grand Rapids, Michigan, 2006.

[8] CASTRO, Luciano G. B.. Introdução à Geometria Projetiva - Revista Eureka, SBM - Comitê Editorial, Rio de Janeiro, 2000.

[9] DONDI, Donis A.. Sintaxe da Linguagem Visual. 2ª Edição, Martins Fontes, São Paulo, 2003.

[10] WATERMANN, Ivone; FRANCO, Valdeni Soliane. Geometria Projetiva no laboratório de ensino de Matemática. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-8.pdf

[11] FREITAS, Vinícius Paulo de. Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações. Universidade Federal do Amazonas, PROFMAT, Manaus, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/252/2011-00097-VINICIUS-PAULO-DE-FREITAS.pdf'sequence=1

[12] SOBREARTE. Estudo de desenho: Perspectiva. Disponível em: http://www.sobrearte.com.br

[13] ALLAN, N.D.Os Teoremas de Desargues, Pascal e Papus - Unesp. São Paulo. Disponível em: <http//www.rc.unesp.br/igce/matematica/nelo/newDESRG.doc>.

[14] MORLEY, Frank, Inversive Geometry, London, 1933.

[15] GUSEU, V.; LITVINENKO, V.; MORDKOVICH, A.. Solving Problems in Geometry. Russian Edition, Moscow, 1988.

[16] OGILVY, C. Stanley. Excursions in Geometry. Oxford University Press, New York, 1969.