UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

NÚMEROS PERPLEXOS:UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Júlio Cézar Marinho da Fonseca

MANAUS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Júlio Cézar Marinho da Fonseca

NÚMEROS PERPLEXOS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Afredo Wagner Martins Pinto

MANAUS
2013

JÚLIO CÉZAR MARINHO DA FONSECA

NÚMEROS PERPLEXOS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 07 de março de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Afredo Wagner Martins Pinto
Presidente

Profa. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos
Membro

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de A. Moreira
Membro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por me acompanhar em todos os momentos.

A minha esposa, Angela de Albuquerque Nunes, pelo amor, compreensão e apoio sempre presente em minha vida.

A Beatriz Nunes Fonseca, minha princesinha, que me dá forças para lutar e buscar vencer todas as batalhas que a vida impõe;

A minha mãe, Rocilda Marinho da Fonseca, em memória e a meu pai, Belmiro Cidade Fonseca, o homem mais guerreiro que conheço;

A meus irmãos, pelo apoio, pela acolhida e orientação nos momentos dificieis.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Alfredo Wagner, por sua competência e pelo seu tempo dedicado a mim sempre que necessário.

Agradeço a todos os meus professores do Departamento de Matemática da UFAM e aos amigos que me ajudaram.

Finalmente agradeço a banca examinadora pelas sugestões dadas, que contribuiram para a melhoria desta dissertação.

RESUMO

Este trabalho visa apresentar a alunos do ensino médio o conjunto dos números perplexos. A abordagem utilizada será a analogia entre este conjunto e o conjunto dos números complexos, serão definidas operações de adição e multiplicação de números que compõem o sistema dos números perplexos, bem como será analisado a escrita deste números na forma polar, O sistema perplexo será situado como estrutura algébrica e também terá sua representação geométrica discutida ao longo do trabalho. Além disso, faremos o estudos de equações polinomiais em $\mathbb{P}$. Por fim, um estudo formal sobre a forma exponencial exigirá que ocorra um desvio no escopo do trabalho, mas que se justifica devida à necessidade de apresentar de forma mais precisa resultados apresentados no capítulo IV.

Palavras-chave: Números Reais, Números Complexos, Números Perplexos.

ABSTRACT

This work aims present to high school students the perplex numbers, the approach is the analogy between the set of complex numbers and the set of perplex, are defined operations of addition and multiplication of numbers that make up the system of numbers perplex, and will be located as structure algebraic and geometric representation will also have throughout in this work. As an application of this system will be answered polynomial equations of 1° e 2° grade. Finally, a study formal on the writing exponential require a deviation occurs in the scope of work, but it is justified due to the need of introduce a more formal resulted presents in chapter IV.

Keyswords: Real numbers, Complex numbers, Perplex numbers .

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto do Números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto do Números Reais
$\mathbb{P}$	Conjunto do Números Perplexos
B_1	Conjunto das Bissetrizes dos quandrantes ímpres
B_2	Conjunto das Bisstrizes quadrantes pares
R_f	Conjunto das Raizes do polinômio f
$\mathbb{R}^2$	Plano Cartesiano
$\rho(u)$	Função Radial
$\|u\|_p$	"módulo" Perplexo
$B_1 \cup B_2$	conjunto dos elementos singulares
$\mathbb{P}/B_1$ e $\mathbb{P}/B_2$	aneis quociente
$card(R_f)$	cardinalidade do conjunto R_f
Arg(z)	Argumento Principal
$\cong$	isomorfo

Introdução

No Ensino Médio, os alunos têm o primeiro contato formal com o corpo dos números complexos, passam a saber que existe um ente que representa $\sqrt{-1}$, além disso, passam a operacionalizar com esses números e aprendem também a escrevê-los em sua forma trigonométrica; a principal justificativa da utilização deste números neste nivel está na sua utilização para resolver equações polinomiais
Sabendo que os alunos do ensino médio são conhecedores da álgebra que envolve os números complexos e sabendo que o conjunto dos números perplexos possui uma álgebra análoga quanto as operações é que propomos uma abordagem do anel dos números perplexos para discentes do Ensino Médio, de maneira análoga a dos números complexos, conceituando-os como par ordenado e definindo a soma e a multiplicação neste conjunto. Outro ponto relevante neste trabalho é apresentar a unidade perplexa p.
Apesar de não ser um conjunto divulgado em livros textos do nivel médio, o conjunto dos números perplexos não é novo em [9]; Fjelstad apresentou um aplicação dos números perplexos para interpretar o fenômeno superluminal [1]. Deste modo, estendeu a relatividade especial para o caso $\|v\| > c$. os números perplexos foram apresentados pela primeira vez em 1919, por L. E. Dickson, e ao longo do tempo está sendo utilizada com lucrativos fins para resolver problemas físicos especialmente na teoria da relatividade.
É importante mencionar que na literatura, os números perplexos recebem diversas nomeclaturas em [7] podemos encontar estes nomes: números hiperbólicos, números espaço-tempo, split-complex numbers ou double numbers, em alguns artigos a unidade perplexa é também chamada de unidade alucinada ou fantasmagórica. Este trabalho visa não só apresentar o conjunto dos números perplexos no nivel médio, como também divulgar os avanços matemáticos realizados na matemática moderna, fazer conhecimento "novos"chegar ao conhecimento de futuros matemáticos.
Para fazer a abordagem dos números perplexos devemos ver a estrutura que será tomada na analogia, assim faz-se necessário descrevermos o conjunto dos números complexos, o que será feito no capítulo 2. Enunciaremos as propriedades e principais resultados deste conjunto, para as demonstrações indicamos as referências [18] e [8]. Outro ponto, discutido nos complexos é sobre a quantidade de raízes n-ésimas da expressão $z^n = w$, bem como suas mais variadas formas de apresentação. No corpo dos complexos existe a escrita sob a forma trigonométrica, de maneira análoga buscaremos uma escita para os números

perplexos; no entanto, ao passo que avançamos, sentimos a necessidade de apresentarmos as funções hiperbólicas, para esse propósito foi construido o capítulo 3, o qual será largamente usado na forma polar de um número perplexo. Devidamente apresentados os números complexos e as funções hiperbólicas, passamos a discutir a estrutura dos números perplexos.

O capítulo 4, foi escrito especialmente para esse propósito, tomar o conjunto dos números perplexos análogo ao conjunto dos complexos, neste capítulo procuramos definir com precisão o que tratamos como um número perplexo, as operações de adição e multiplicação, a interpretação geométrica destes conceitos, buscamos um meio de explorarmos a escrita hiperbólica e a exponencial destes números. Também trataremos das equações polinomiais com coeficientes perplexos e mostraremos que um polinômio mônico de grau n, possui no máximo n^2 raízes perplexas, para isso utilizaremos uma base idempotente, daremos exemplos de polinômios de grau n, que possui exatamente n^2 raízes. Não faremos a aplicação física, mas indicamos [22] para uma análise da aplicação. Outro ponto importante neste capítulo esta na presença de caracteristicas neste conjunto que não aparecem nos complexos, nem nos reais. Ao falarmos de estruturas algébricas deixamos a formalização das propriedades da forma polar para o capítulo 6, tendo em vista uma abordagem mais sofisticada para este aspecto, distoando do escopo do nivel médio.

o capítulo 5, vem repleto de estrutas algébricas, pois, buscamos formalizar a escrita perplexa na forma polar, sabendo que a apresentação foi feita a contento no capítulo 4, buscaremos aplicar os conceitos algébricos dos números perplexos através de sua caracterização como um anel comutativo com unidade. Além de mostrarmos neste capitulo que os conjunto quociente $\mathbb{P}/B_1$ e $\mathbb{P}/B_2$ são isomorfos a $\mathbb{R}$

O capitulo 6 foi idealizado para tratar de maneira formal a forma exponencial dos números perplexos. Nas considerações finais faremos a comparação entre os dois conjutos, bem como listaremos algumas características presentes nos perplexos que não encontramos nos complexos.

Capítulo 1

Um Breve Histórico do surgimento dos cojuntos numéricos:$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\, e\, \mathbb{R}$

1.1 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\, e\, \mathbb{R}$

1.1.1 Conjunto dos Números Naturais

É comum encontrar nos livros didáticos do Ensino Médio histórias da origem dos números naturais. É consenso entre os autores à utilidade fundamental desses números, "Enumerar elementos de um conjunto". LIMA (2006, p. 38) afirma que a importância dos números naturais provém do fato de que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem. Porém, os livros do Ensino Médio não ressaltam que a fundamentação lógica-matemática do conjunto dos números naturais, não foi a primeira a acontecer, dando aos discentes a impressão de que os acontecimentos sobre a estruturação dos cojuntos numéricos ocorreu de forma linear, o que não é verdadeiro, como fica claro nas palavras de HEFEZ (1993, p. 22). "Os números naturais ainda resistiram às investidas por algum tempo. Segundo vários matemáticos da época não seria possível construir tais números".
Para LIMA (2010, p. 2), deve-se ao matemático, Giuseppe Peano (1858-1932), a estrutura axiomática aos números naturais que se adota atualmente, e que consiste em quatro axiomas que caracterizam os números naturais completamente:

1. Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural;
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro natural.
4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos

os números naturais.

Deve-se ressaltar que o nome do conjunto numérico $\{1, 2, 3, ...\}$ é conjunto dos Números Naturais, e denota-se por $\mathbb{N}$, exatamente por seu surgimento ser tão natural. Neste conjunto são definidas duas operações: Adição e Multiplicação.
Seja $A : \mathbb{N}X\mathbb{N} \longrightarrow N$, onde $(m, n) \longrightarrow m + n$, do seguinte modo:

$$\begin{cases} m + 1 = s(m) \\ m + s(n) = s(n + m) \end{cases}$$

Seja $M : \mathbb{N}X\mathbb{N} \longrightarrow N$, tal que $(m, n) \longrightarrow m.n$, do seguinte modo:

$$\begin{cases} m.1 = m \\ m(n + 1) = m.n + m \end{cases}$$

A adição é associativa, comutativa e ao acrescentarmos o zero no conjunto, a adição também terá elemento neutro. Já a multiplicação é associativa, comutativa, além do número 1 ser o elemento neutro. Existe uma propriedade que relaciona as duas operação chamada de distributividade da multiplicação em relação a adição: $m(n+p) = mn+mp$.

1.1.2 Conjunto dos Números Inteiros

O conjunto dos Números Naturais é cheio de lacunas, já que só é possível fazer a subtração $a - b$, se, e somente se, $a > b$, ou seja, não contemplava questões envolvendo a ideia de subtração de números naturais em que o minuendo é menor que o subtraendo. No decorrer da evolução, o comércio já era uma realidade em sociedade e a noção de perdas e prejuízo figuravam no cotidiano do homem. E assim, os números naturais não eram suficientes para necessidade humana, não havia a noções de número negativo nem uma maneira de operar com eles. Todavia esses números eram necessários, as subtrações $a - b$, com $b > a$ deveriam apresentar soluções. Segundo DOMINGUES(2003, p. 30) para enfrentar essas questões, foi preciso ampliar o conjunto dos números naturais com a junção dos números negativos, introduzidos a princípio para possibilitar a resposta da subtração de quaisquer dois elementos de $\mathbb{N}$. Esse passo gerou naturalmente a necessidade de estender as operações e a relação de ordem de $\mathbb{N}$ ao novo conjunto, formado pelos números naturais e os números negativos.

> Ideia intuitiva é que, por exemplo, todas as diferenças 0-1, 1-2, 2-3 ...de alguma maneira são equivalentes e representam o mesmo número, um novo número que veio a ser indicado por -1. De maneira análoga se introduzem os números -2,-3,-4,... . (DOMINGUES, 2003, p. 30)

Obtido esses novos números, é preciso ainda incorporá-los consistentemente ao conjunto dos Números Naturais, ou seja:

i. Estender para o novo conjunto numérico, ou seja, $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, as operações adição e multiplicação de números naturais;

ii. Estender a ideia de menor e maior a partir das ideias correspondentes em $\mathbb{N}$

Depois de realizadas as extensões referidas o conjunto $\mathbb{Z}$ é concebido como o sistema dos números inteiros. De certo que os números naturais também são chamados de inteiros positivos. Pois $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$.

Adição e Multiplicação de Números Inteiros.

Em $\mathbb{Z}$ temos as operações fundamentais: Adição e Multiplicação. Estas operações permitem construir novos números a partir de pares de números dados, e são essenciais para o processo de contagem. Enquanto nos naturais a adição possui 3 propriedades, em $\mathbb{Z}$ acrescenta-se uma quarta, a existência do número oposto. Ou seja, $a + (-a) = 0$,onde -a é o oposto de a. A multiplicação agora têm outras possibilidades para os fatores, a saber.

$$ab = \begin{cases} ab > 0, & \text{se} \quad a > 0 \; e \; b > 0, \\ ab > 0, & \text{se} \quad a < 0 \; e \; b < 0, \\ ab < 0, & \text{se} \quad a > 0 \; e \; b < 0, \\ ab < 0, & \text{se} \quad a < 0 \; e \; b > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

É importante nos inteiros interpretar os produtos -1. 1 = -1 e (-1).(-1) = 1. Uma interpretação para eles é dado abaixo.

Considere as grandezas $a, 2a, 3a, 4a$, etc. o processo de acrescentar a pode prosseguir indefinidamente. Mas, tomemos o caminho inverso, ou seja, subtrair a grandeza a de cada um dos termos anteriores, obtendo: $3a, 2a, a, 0$. E depois? Como prosseguir? Que sentido atribuir à subtração $0 - a$? ROQUE (2012, p. 246) afirma que Argand propôs uma construção capaz de assegurar, alguma "realidade"a estes termos.

> Consideremos uma balança com dois pratos A e B. Acrescentemos ao prato A as quantidades a,2a,3a,4a, e assim sucessivamente, o que faz a balança pender para o lado do prato A. Se quisermos, podemos retirar uma quantidade a de cada vez, restabelecendo o equilíbrio. E quando chegamos a 0? Podemos continuar retirando estas quantidades? Sim, basta acrescentá-las ao prato B". Atribuindo a noção relativa do que "retirar"significa: retirar do prato A significa acrescentar ao prato B. Deste modo, as quantidades negativas puderam deixar de ser "imaginárias"para se tornar "relativas". ROQUE(2012, p. 247)

A Representação proposta por Argand, interpreta a multiplicação com números negativos, como, por exemplo, à multiplicação por -1, passa a ser vista como uma reflexão em relação à origem. Isto possibilita entender facilmente porque $(-1) \times (-1) = +1$, pois basta observar que, após a reflexão de -1 em relação à origem, obtém-se $+1$. O simétrico de um número inteiro passa a ser a quantidade m que deixou a balança em equilíbrio, ou seja, o número inteiro m é simétrico de um número n se $m + n = 0$.

1.1.3 Conjunto dos Números Racionais

Historicamente os inteiros negativos não foram os primeiros números a surgir dos naturais, as frações vieram antes (DOMINGUES, 2003, p. 8).
Para SMOLE(2010, p. 13), o surgimento dos números racionais está associado à noção de medidas. Independentemente do que estejamos medindo, medir significa "comparar duas grandezas do mesmo tipo", para representar as medidas surgiram os números racionais, que são também utilizados para representar quantidade não inteiras e relação como as que aparecem na divisão de uma pizza ou nos problemas envolvendo escalas, convém lembrar que os gregos usavam razões para comparar grandezas de mesma espécie, e assim dois segmentos são ditos comensuráveis quando é possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade estabelecida. Nos números inteiros, que há representação para frações nas quais numerador não é múltiplo do denominador.
A noção intuitiva grega de comensurabilidade, responde a expressão $nx - m = 0$, assim tendo a concepção geométrica de razão é possível descrever o novo número que foi chamado de numero racional, onde neste conjunto cada número diferente de zero passa a ter um inverso em $\mathbb{Q}$, no entanto perde-se o principio da boa ordenação[1]
Obtido esses novos números, é preciso ainda incorporá-los consistentemente ao conjunto dos números inteiros, ou seja:

i. Estender para o novo conjunto numérico, ou seja, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a \in Z \; e \; b \neq 0 \in \mathbb{Z}\}$, as operações adição e multiplicação de números inteiros.
ii. Estender a ideia de menor e maior a partir das ideias correspondentes em $\mathbb{Z}$.

Depois de realizadas as extensões referidas o conjunto $\mathbb{Q}$ é concebido como o sistema dos números racionais. De certo que os números inteiros também são chamados de racionais. Já que dado $a \in \mathbb{Z}$ temos $a = a/1 \in \mathbb{Q}$, logo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

[1] Principio da boa ordenação: Seja A um domínio ordenado, todo subconjunto não vazio de A limitado inferiormente possui um menor elemento.

Adição e multiplicação de Números Racionais.

No conjunto $\mathbb{Q}$ definiram-se as operações fundamentais de adição e multiplicação.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, onde\ b\ e\ d\neq 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ab}{cd}, \ onde\ b\ e\ d\neq 0 \tag{1.3}$$

1.2 é chamadada de Adição e 1.3 é dita multiplicação.
A adição preserva as propriedades de $\mathbb{Z}$, ou seja, é associativa, comutativa, existe um elemento neutro. Para cada r em $\mathbb{Q}$ existe $-r$ em $\mathbb{Q}$. Já na multiplicação as propriedades associativa, comutativa e existência da unidade são mantidas, e é acrescentada a propriedade da existência do inverso de um número racional não nulo.
Em $\mathbb{Q}$ também é possível observar a escrita decimal de seus elementos, através de uma verificação observa-se que quando o denominador é desprovido dos fatores primos 2 e 5 a representação decimal será uma dizima periódica.

1.1.4 Conjunto dos Números Reais

O grande desenvolvimento da Matemática a partir da criação do Cálculo diferencial no século dezessete colocou diante dos matemáticos novos problemas que, para serem melhor compreendidos e solucionados, requeriam uma fundamentação mais rigorosa do conceito de número. Esta tarefa foi empreendida pelos matemáticos do século dezenove. HEFEZ (1997, p. 22) afirma que o primeiro a idealizar um método para a construção dos números inteiros negativos e dos números racionais a partir dos números naturais foi Karl Weierstrass. E argumenta que foi bem mais sutil e profunda a construção dos números irracionais, a partir dos números racionais, isto foi conseguido independentemente por Georg Cantor e Richard Dedekind por volta de 1870. Os números irracionais já eram conhecidos pelos pitagóricos, pois os gregos utilizavam a noção de comensurabilidade entre duas grandezas.

> Dois segmentos a e b são ditos comensuráveis se existir uma unidade de comprimento que meça, de maneira exata, ambos segmentos. Isto é, dados dois segmentos comensuráveis a e b, existe um segmento u e números inteiros p e q tais que $a = pu$ e $b = qu$. A razão de a por b é $\frac{p}{q}$. (AVILA 2003, p. 47)

A crença dos pitagóricos na qual quaisquer dois segmentos seriam comensuráveis, foi abalada com a descoberta de um par de segmentos não comensuráveis. Isso ocorreu quando eles estudaram a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado. O fato de a diagonal e o lado de um dado quadrado não serem comensuráveis é equivalente a $\sqrt{2}$ não ser um número racional. Realmente, se tomarmos um quadrado de lado, digamos, 1, pelo

Teorema de Pitágoras, o quadrado de sua diagonal será igual a 2. Assim o sistema dos números racionais apresentava lacunas, ao pensarmos em uma reta dos racionais essa reta teria "buracos"ao longo de toda sua extensão, como o sistema foi concebido para medir, esses buracos deveriam ser preenchidos. Neste ponto estrutura-se o conjunto dos números irracionais. A inspiração de Dedekind para a fundamentação do conjunto surgiu da Teoria das Proporções de Eudoxo[2], na qual Dedekind cria o conceito de corte.

> Um corte de Dedekind é um par ordenado (A, B), no qual A e B são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que A não possui elemento máximo, a união de A e B é o conjunto de todos os racionais e, dados x em A e y em B quaisquer, $x < y$. ([3])

Em cada caso em que há um corte (A_1, A_2) que não é produzido por qualquer número racional, Dedekind criou um novo número a, irracional, que será considerado como completamente definido por este corte; assim diz-se que este número a corresponde ao corte, ou é por ele produzido. Com estas afirmações Dedekind, completa a reta numérica, e fundamenta o conjunto dos números Reais, como um corpo completamente ordenado, e defini o conjunto $\mathbb{I}$ dos irracionais, tal que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. O conjunto dos números $\mathbb{R}$ possui as operações de adição, multiplicação, relação de ordem entre seus elementos, e satisfaz o principio da boa ordenação, no entanto equações do tipo $x^2 + 1 = 0$, não possuem solução em $\mathbb{R}$.

[2]Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando eqüimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes». BONGIOVANNI (2005,pág 96).

Capítulo 2

O corpo dos Números Complexos

2.1 Como surgiram os números complexos

Como foi tratado ao final do capítulo 1, algumas equações algébricas no âmbito dos números reais não possuíam solução em $\mathbb{R}$.
A história aponta como fato crucial para a iniciativa da abordagem acerca dos números complexos, o estudo das equações do 3° grau.

> De certo que equações do segundo grau com discriminante negativo não tinham solução $\mathbb{R}$, e nesse ponto se encerravam as discussões, mas quando Tartaglia descobriu uma fórmula que resolvia as equações do 3° grau, e Bombelli considerou a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, e utilizou a formula de Tartaglia para encontrar a solução, é que os matemáticos se propuseram a fundamentar o conjunto com números onde se pudesse ter raiz quadrada de número negativo. ROQUE(2012, p. 172)

Leonhard Euler (1707-1783), introduziu a notação $i = \sqrt{-1}$ e identificou as raízes da equação $z^n = 1$ com os vértices de um polígono regular de n lados. Além de definir a função exponencial no conjunto dos números complexos, pela fórmula: $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi quem introduziu a denominação número complexo. Em sua tese de doutorado, Gauss provou, o Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que toda equação algébrica definida sobre $\mathbb{C}$ admite pelo menos uma raiz. Deve-se também a Gauss a representação geométrica dos números complexos, associando as suas partes real e imaginária, respectivamente, à abscissa e à ordenada de pontos do R^2. Jean Robert Argand(1768-1822) investigou, as grandezas que satisfazem à proporção $+1 : +x :: +x : -1$ e encontrou a resposta por meio do seguinte diagrama:

> segmentos KA e KI são entendidos, respectivamente, como segmentos direcionados de K para A e de K para I e representam as grandezas unitárias

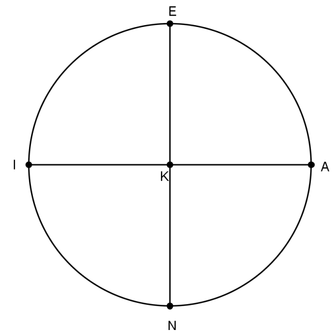

Figura 2.1: *Diagrama de Argand.*

> positiva e negativa. Em seguida, traça-se uma perpendicular EN à reta que une I a A. O segmento KA está para o segmento direcionado KE assim como KE está para KI; e KA está para o segmento direcionado KN assim como KN está para KI. Logo, a condição de proporcionalidade exigida acima para a grandeza x é satisfeita por KE e KN. (ROQUE, 2012, p. 248)

Decorre desta interpretação que as grandezas geométricas que satisfazem à proporção requerida são, portanto, KE e KN, que podem ser vistas como representações geométricas de $+i$ *e* $-i$. Este diagrama mostra que devemos tomar a multiplicação por i como uma rotação do segmento orientado no plano onde o zero é o centro de rotação, o ponto que organiza o giro. Nos números complexos há uma relação de ordem, ou seja, não se pode dizer que um número complexo é maior do que outro.

2.2 O corpo dos Números Complexos

Definimos o corpo dos números complexos como sendo o conjunto:

$$\mathbb{C} = \{(x, y); x \in \mathbb{R}\; y \in \mathbb{R}\} \tag{2.1}$$

Onde definimos as seguintes operações de adição e multiplicação: Seja $z = (x, y)$ e $w = (a, b) \in \mathbb{C}$, então:

$$z + w = (x + a, y + b) \tag{2.2}$$

$$zw = (xa - yb, xb + ya) \tag{2.3}$$

1. Observação. A adição acima é simplesmente a adição de vetores em $\mathbb{R}^2$ enquanto que a multiplicação tem uma interpretação geométrica mais elaborada que veremos na seção 2.4.

O conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações acima definidas será denotado por $\mathbb{C}$, e seus elementos serão chamados de números complexos.
O número complexo (0,0) será denotado simplesmente por 0 e o número complexo (1,0) por 1.
Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, defini-se:

a. $-z = (-x, -y)$

b. $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ se $z \neq 0$

Proposição 2.1. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer z,w, $t \in \mathbb{C}$*

A_1 $z + (w + t) = (z + w) + t$ (associatividade da adição)

A_2 $z + w = w + z$ (comutatividade da adição)

A_3 $0 + z = z = z + 0$ (existência elemento neutro da adição)

A_4 $z + (-z) = 0$ (existência do elemento simétrico da adição)

M_1 $z(wt) = (zw)t$ (associatividade da multiplicação)

M_2 $zw = wz$ (comutatividade da multiplição)

M_3 $z1 = z$ (existência do elemento neutro da multiplicação)

M_4 $zz^{-1} = 1 \, \forall z \neq 0$(existência do inverso multiplicativo)

AM $z(w + t) = zw + zt$ (distributividade da adição em relação a multiplicação)

Indicamos [14] para a demonstração das propriedades da adição.
Tendo definido as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, defini-se as operações de subtração e divisão.

$$z - w = z + (-w) \tag{2.4}$$

$$z/w = zw^{-1}, \;\; \forall w \neq 0 \tag{2.5}$$

além disso, a potenciação também é definida de maneira usual:

$$z^0 = 1, \;\; z^n = \underbrace{z...z}_{n} \; e \; z^{-n} = \underbrace{z^{-1}...z^{-1}}_{n} \; se \; z \neq 0 \; (n \geq 1) \tag{2.6}$$

Decorre de Propisição 2.1 que todas as propriedades das operações aritméticas de números reais são validas para números complexos.
Um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas na Proposição 2.1 é chamado de corpo.
O número complexo $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$ será simplesmente representado por x. Note que isto está de pleno acordo com o que já fizemos com o elemento neutro 0 e o elemento

unidade $(1,0)$. Deste modo. Considere o produto $(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, ou seja, o número -1 possui uma raiz quadrada em $\mathbb{C}$. o número complexo $(0,1)$ é denominado por i e é chamado de algarismo imaginário. Assim

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + yi \tag{2.7}$$

Esta expressão recebe o nome de forma algébrica de z.
Com a forma algébrica não é necessário memorizar as definições de $z+w$ e zw dadas em 2.2 e 2.3, basta usarmos algumas propriedades da adição e da multiplicação em $\in \mathbb{C}$ já apresentadas.

$$z + w = x + iy + a + bi = x + a + (y + b)i \tag{2.8}$$

$$zw = (x + yi)(a + bi) = xa + ybi^2 + (xb + ya)i = xa - yb + (xb + ya)i \tag{2.9}$$

A forma algébrica é uma importante representação para os números complexos. Para LIMA (2006, pág 161), Um número complexo é um número da forma $x + yi$, com x e y reais e $i = \sqrt{-1}$. A interpretação geométrica dada por LIMA (2006, p. 161) está descrita abaixo:

> Fixando um sistema de coordenadas no plano o complexo $z = x + yi$ é representado pelo ponto $P = (x,y)$. o ponto P é chamado de imagem do complexo z. Como a correspondência entre os complexos e suas imagens é uma bijeção, frequentemente identificamos os números complexos e suas imagens por $(x,y) = x + yi$. O plano no qual representamos os complexos é chamado de plano e Argand - Gauss. (LIMA 2006, p. 161).

Decorre da interpretação do número complexo $z = x + yi$, como par ordenado que os complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$ são iguais se, e somente se, $x = a$e $y = b$. Em particular $x + yi = 0$ então $x = y = 0$. As potências de i apresentam um comportamento na qual as potências se repetem em ciclos de período 4. De fato, $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$ e $i^4 = i^2 i^2 = 1$.

2.3 Conjugado e Valor Absoluto

Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos a parte real e a parte imaginária de z por $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$, respectivamente. Quando $Re(z) = 0$, dizemos que z é imaginário puro.
Como um número complexo $z = a + bi$ é o par ordenado (a,b) podemos representá-lo graficamente como o ponto do plano cartesiano de abscissa x e ordenada y. Figura 2.2. Neste contexto, chamamos o plano cartesiano de plano complexo, ou Argand-Gauss, e o

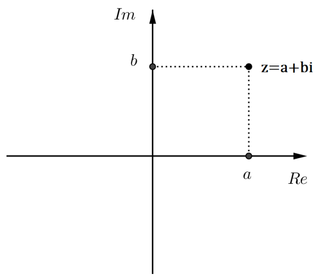

Figura 2.2: *Plano Complexo*

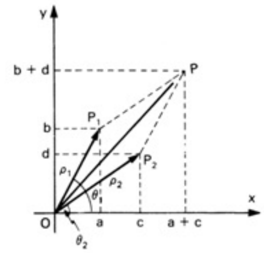

Figura 2.3: *soma e subtração*

eixo x de eixo real, e o eixo y de eixo imaginário.
Abaixo indicamos as interpretações gráficas da adição e subtração de números complexos, definidas em 2.4 e 2.8.

> Sejam, $Z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois complexos cujas imagens geométricas são P_1 e P_2, respectivamente. O complexo $z = z_1 + z_2$ tem afixo P tal que, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ onde $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ são vetores. Já $w = z_2 - z_1$, tem afixo Q, cujo vetor é paralelo a diagonal e possui o mesmo módulo de $\overrightarrow{P_1P_2}$. (IEZZI,1993, p. 30)

Dados dois números complexos w e z, a distância entre w e z é definida por $|w - z|$. Definimos o conjugado de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o número complexo $\overline{z} = x - yi$. Graficamente, $\overline{z}$ é o ponto do plano complexo obtido através de uma reflexão de z em torno do eixo real.

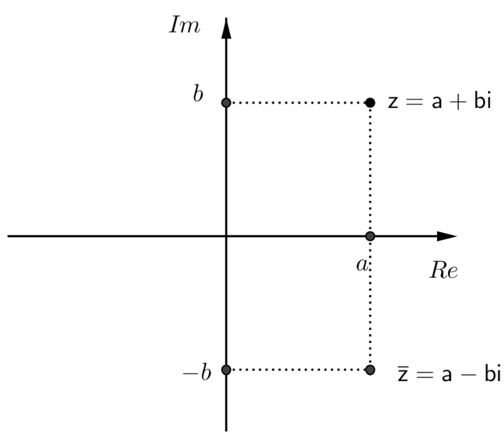

Figura 2.4: *Conjugado de z*

Proposição 2.2. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer z,w* $\in \mathbb{C}$

a. $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ e $\overline{zw} = \overline{zw}$

b. $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ se $w \neq 0$

c. $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2iIm(z)$

d. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$

e. z é imaginário puro$\Longleftrightarrow \overline{z} = -z$

f. $\overline{z}^n = \overline{z^n}$

O valor absoluto de um número complexo $z = x + yi$ é definido por $\sqrt{x^2 + y^2}$. (15) Graficamente, o número real nos dá o comprimento do vetor correspondente a z no plano complexo.

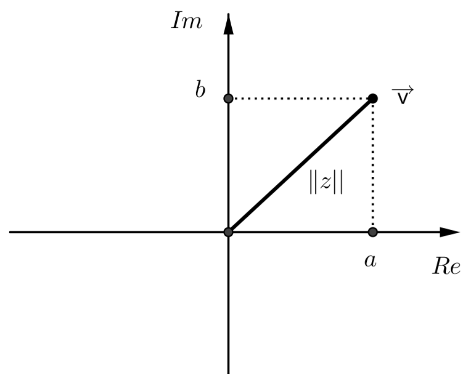

Figura 2.5: *módulo de z*

Proposição 2.3. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer z,w* $\in \mathbb{C}$

a. $Re(z) \leq |Rez| \leq |z|$, $Imz \leq |Imz| \leq |z|$

b. $|z|^2 = z\overline{z}$ e $|z| = |\overline{z}|$ e $|zw| = |z||w|$

c. $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$,se $w \neq 0$

d. $|z + w| \leq |z| + |w|$

e. $|z + w| \geq ||z| - |w||$

2. observação. A desigualdade d. é conhecida como desigualdade triangular.

2. Indicamos [14] para detalhes sobre as demonstrações das proposições 2.2 e 2.3

Se $z \neq 0$ a proposição 2.3 b. implica que $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, em particular $z^{-1} = \overline{z}$, se $|z| = 1$. A identidade mostra que z e z^{-1} se comparam graficamente: z^{-1} aponta na direção de $\overline{z}$ e tem valor absoluto $z^{-1} = \frac{1}{|z|}$.

2.4 A Forma Polar

Consideremos um número complexo $z = x + yi \neq 0$. Seja θ_0 o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário.
Como $\cos\theta_0 = \frac{x}{|z|}$ e $\sin\theta_0 = \frac{y}{|z|}$, temos que $z = |z|(cos\theta_0 + isin\theta_0)$. Assim é sempre possível representar z na forma $z = |z|(cos\theta_0 + isin\theta_0)$ onde $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
A representação é chamada representação polar de z. Se $\theta \in \mathbb{R}$ à satisfaz. dizemos que θ é um argumento de z. Assim θ_0 é um argumento de z, entretanto qualquer θ da forma $\theta_0 + 2k\pi$, com k inteiro, também satisfaz a forma polar, em particular z possui infinitos argumentos. Por outro lado, se θ satisfaz a forma polar então $cos\theta_0 = cos\theta$ e $\sin\theta_0 = \sin\theta$ o que implica $\theta_0 + 2k\pi$ para algum k inteiro. Assim o conjunto de $argz$ de todos os argumentos de z é dado por arg z=$\{\theta_0 + 2k\pi$: k $\in \mathbb{Z}\}$. denotemos o único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$, como argumento principal e escrevemos Arg z.
A identidade $z = |z|(\cos Argz + i\sin Argz)$. É chamada forma polar de z.
Sejam $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ representações polares de dois números complexos não nulos z e w. Vamos agora obter representações polares para z^{-1} e zw:

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos -\theta + i\sin -\theta) \tag{2.10}$$

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)). \tag{2.11}$$

3. Observação. Esta igualdade nos dá a interpretação gráfica do produto de dois números complexos: zw tem valor absoluto $|z||w|$ e tem $\theta + \varphi$ como um argumento.

Definindo $-A = \{-a, a \in A\}$ e $A + B = \{a + b, a \in A\, e\, b \in B(A\ , B\ \in \mathbb{C}\}$. Decorre das fórmulas 2.10 e 2.11 que $arg(z^{-1}) = -argz$ e $arg(zw) = argz + argw$. Porém não é sempre verdade que $Arg(z^{-1}) = -Argz$ nem $Arg(zw) = Argz + Argw$. Ainda de 2.10 e 2.11 temos que: $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. No caso em que $|z| = 1$, a igualdade nos diz que:

$$(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{2.12}$$

Esta igualdade é conhecida como à formula de Moivre.

2.5 Extração de Raízes

Dado um número complexo w e um número natural $n \geq 1$. Dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz n-ésima de w se $z^n = w$.
Se $w = 0$, é claro que $z = 0$ é a única solução da equação $z^n = w$. logo o número 0 possui uma única raiz n-ésima que é o próprio 0. Veremos a seguir que se $w \neq 0$ então existe exatamente n soluções distintas da equação $z^n = w$.

Teorema 2.1. *Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes n-ésimas complexas distintas, a saber:*

$$\sqrt[n]{|w|}[\cos\frac{Arg(w)+2k\pi}{n}+i\sin\frac{Arg(w)+2k\pi}{n}]\ k=1,2,...n \tag{2.13}$$

Demonstração:A primeira condição é satisfeita precisamente quando $|z|=\sqrt[n]{|w|}$, enquanto, as duas últimas são satisfeita quando $n\theta=\varphi+2k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$, isto é $\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, com $k\in\mathbb{Z}$. Assim, as raízes n-ésimas de w são os números z_k para $k\in\mathbb{Z}$. fazendo $k=0,1,...,n-1$ obtemos raízes distintas n-ésima de w. Entretanto, os demais valores de k nos dão repetições das raízes $z_0,z_1,...z_{n-1}$. De fato, tome $k\in\mathbb{Z}$ arbitrário, escreva $k=qn+r$ com $q\in\mathbb{Z}$ e $0\leq r<n$ como,$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi+2qn\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi$ vemos que $z_k=z_r\in z0,z1,...zn-1$.
A raiz n-ésima de w obtida fazendo $k=0$ em (22) é chamada de raiz n-ésima principal de w . A notação $\sqrt[n]{w}$ é resevada para esta raiz.

4 Observação. Todas as n raízes n-ésimas de w possuem o mesmo módulo, a saber $|z|=\sqrt[n]{|w|}$. logo, elas são representadas por n pontos sobre uma circunferência com centro na origem e raio $|z|=\sqrt[n]{|w|}$.

Além disso, estes pontos estão igualmente espaçados ao longo desta circunferência devido à relação de seus argumentos.
Exemplificando: Resolver a equação $x^6+64=0$.
Sendo $x\in\mathbb{C}$, temos que $x=\sqrt[6]{-64}$, sabendo que $-64=64(\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)$.
Concluímos que $x=2(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3})$, tomando $k=0,1,2,...5$ encontramos a raízes do problema. O conjunto solução é representado pelo hexágono regular da Figura 2.6.

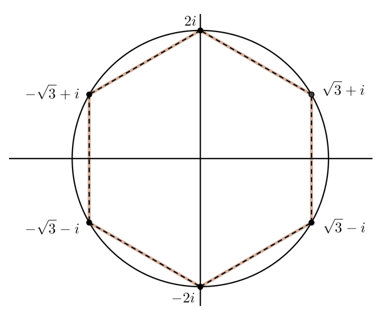

Figura 2.6: *Conjuto da raizes*

2.6 Exponencial

Da equação 2.10, sabemos que $zw=|z||w|(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi))$, por outro lado sabemos que: $e^{(s+t)}=e^se^t$, então façamos $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, uma interpretação para

e^{iy}. Além disso, temos as propriedades:
i. $e^0 = 1$
ii. $e^{yi}.e^{xi} = e^{(x+y)i}$
iii. $e^{-xi} = (e^{xi})^{-1}$
Motivados por estas considerações, temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Dado um número complexo $z = x + iy$, a exponencial de z é dada por $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.*

Proposição 2.4. *Para quaisquer z,$w \in \mathbb{C}$ temos que $e^z = e^w$ se, e somente se $z = w + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$*

Na seção 2.4 vimos que todo número complexo não nulo z tem uma representação polar $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, onde $r = |z|$ e θ é um argumento de z. Com a noção de exponencial esta igualdade pode ser escrita de forma mais econômica, a saber, $z = re^{i\theta}$
Observasse também que as n raízes n-ésimas de um número complexo não nulo w podem ser escritas da seguinte maneira: $\sqrt[n]{|w|}e^{i\frac{Argw+2k\pi}{n}}$, para $k = 0, 1, ..., n-1$.
Em particular, as n-ésimas do número 1 são dadas por $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ para $k = 0, 1, ..., n-1$.
Notemos também que as n raízes n-ésimas de w podem ser obtidas multiplicando-se a raiz n-ésima principal $\sqrt[n]{w}$ de w pelas raízes n-ésimas da unidade.

Capítulo 3

Funções Hiperbólicas

Definição 3.1. *Chamaremos de funções hiperbólicas as funções definidas abaixo:*

a. *Seno Hiperbólico:*$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *onde* $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

b. *Cosseno Hiperbólico:*$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,*onde* $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

c. *Tangente Hiperbólico:*$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,*onde* $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

Uma justificativa para essa nomeclatura e o fato de que se tomarmos $x = \cosh(t)$ e $y = \sinh(t)$ teremos $x^2 - y^2 = 1$, portanto a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é uma parametrização do ramo direito da hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$

Proposição 3.1. cosh *é uma função par,* sinh *e* tanh *são ímpares.*

Demonstração. De fato, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$, logo $\cosh x$ é par. Para $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{2} = -\sinh x$, logo $\sinh x$ é ímpar. De modo análogo é possível mostrar a paridade das outras funções. $\square$

3.1 Consequências da definição das funções hiperbólicas

Proposição 3.2. *Considerando* $x \in \mathbb{R}$. *Se* $x \neq 0$ *então* $\cosh x > 1$

Demonstração. Se $x = 0$, segue que $\cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$. Seja x $\in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 0$, e sabendo que $(e^x - 1)^2 > 0$, deste modo temos $e^{2x} + 1 > 2e^x$, como $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, conclui-se que $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 1$, ou seja, $\cosh x > 1$. $\square$

Proposição 3.3. *Considerando* $x \in \mathbb{R}$. *Se* $x < 0$ *então* $\sinh x < 0$ *e* $\tanh x \in\ ]-1, 0[$.

Demonstração. Se $x < 0$, então $-x > 0$ e deste modo $e^x < e^{-x}$, logo $e^x - e^{-x} < 0$, ou seja, $\frac{e^x - e^{-x}}{2} < 0$, portanto $\sinh x < 0$.
Sabendo que $-e^{-x} < e^{-x} \forall x \in \mathbb{R}$, segue que $\frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ou seja, $\sinh x < coshx \forall x \in \mathbb{R}$. Segue da definição 3.1, que $|\tanh x| < 1$ e deste modo,$-1 < \tanh x < 1$. Segue da proposição 3.1.2, que $\cosh x$ é estritamente positivo, portanto o sinal de $(\tanh x)$ é igual ao sinal $(\sinh x)$, e portanto para $x < 0$, tem-se $\tanh x \in]-1, 0[$. □

Proposição 3.4. *Considerando $x \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$ então $\sinh x > 0$ e $\tanh x \in]0, 1[$.*

Demonstração. Se $x > 0$, então $-x < 0$ e deste modo $e^{-x} < e^x$, logo $e^x - e^{-x} > 0$, ou seja, $\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$, portanto $\sinh x > 0$.
Sabendo que $-e^{-x} < e^{-x} \forall x \in \mathbb{R}$, segue que $\frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ou seja, $\sinh x < coshx \forall x \in \mathbb{R}$. Segue da definição 3.1, que $|\tanh x| < 1$ e deste modo,$-1 < \tanh x < 1$. Segue da proposição 3.1.2, que $\cosh x$ é estritamente positivo, portanto o sinal de $(\tanh x)$ é igual $(\sinh x)$, e portanto para $x > 0$, têm-se $\tanh x \in]0, 1[$. □

Lema 3.1. *A função* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *é crescente.*

Demonstração.
Sejam, x e $y \in \mathbb{R}$, tal que $x > y$, façamos:

$$\begin{aligned} \sinh x - \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{(e^{x+y} + 1)(e^x - e^y)}{2e^{x+y}} \\ &> 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pois, $2e^{x+y} > 0$, $(e^{x+y} + 1) > 0$ e $(e^x - e^y) > 0$. visto que a função exponencial e sabidamente crescente. □

3.1.1 Algumas Identidades das Funções Hiperbólicas

Para as funções hiperbólicas, assim como nas funções trigonométricas, é possivel manusear as expressões matemáticas que as definem afim de encontrar outras expressões as quais denotar-se-a por identidade. abaixo segue uma lista de identidades para todo x e y reais.

a. $\cosh x + \sinh x = e^x$

b. $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

c. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

d. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

e. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$.

f. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \tanh y}$

Para as demonstrações indicamos o livro "O Cálculo com Geometria Analítica" de Louis Leithold, 3° edição, p. 514-527.

3.1.2 Fórmula de Moivre

A conhecida fórmula de Moivre, proveniente da trigonometria, tem aplicações na trigonométria hiperbólica, como mostra o teorema abaixo:

Teorema 3.1 (Fórmula de Moivre). *Para quaisquer* $x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{R}$ *vale a igualdade:* $(\cosh x + \sinh x)^m = \cosh(mx) + \sinh(mx)$ *e* $(\cosh x - \sinh x)^m = \cosh(mx) - \sinh(mx)$

Demonstração. Seja x $\in \mathbb{R}$, das identidades hiperbólicas sabemos que $\cosh x + \sinh x = e^x$. Logo $\forall m \in \mathbb{R}$ $(\cosh x + \sinh x)^m = (e^x)^m = e^{mx} = \cosh(mx) + \sinh(mx)$.
Do mesmo modo, sabendo que $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$, temos $(\cosh x - \sinh x)^m = (e^{-x})^m = e^{-(mx)} = \cosh(mx) - \sinh(mx)$ □

3.2 Resumo das Funções Hiperbólicas

Da identidade 3.1.1 alinea c, podemos relacionar as funções hiperbólicas com a hipérbole equilátera unitária centrada na origem dos eixo coordenados,tendo em vista a parametrização $x = \cosh(t)$ e $y = \sinh(t)$.

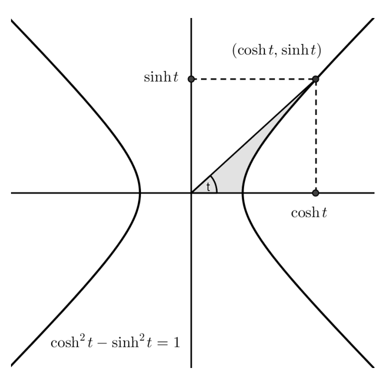

Figura 3.1: *Hiperbóle unitária* $x^2 - y^2 = 1$

3.2.1 Cosseno Hiperbólico

Domínio, imagem, limites no infinito e gráfico da função cosseno hiperbólico:

$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$				
Expressão	Domínio	Imagem	$\lim_{x\to-\infty} \cosh x$	$\lim_{x\to+\infty} \cosh x$
$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1,+\infty[$	$+\infty$	$+\infty$

Tabela 3.1: Função cosseno hiperbólico

Da Tabela 3.1 podemos fazer o esboço do gráfico da função cosseno hiperbólico.

3.2.2 Seno Hiperbólico

Domínio, imagem, limites no infinito e gráfico da função seno hiperbólico:
Da tabela 3.2 podemos fazer o esboço do gráfico da função seno hiperbólico.

$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$				
Expressão	Domínio	Imagem	$\lim_{x\to-\infty} \sinh x$	$\lim_{x\to+\infty} \sinh x$
$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty,+\infty[$	$-\infty$	$+\infty$

Tabela 3.2: Função seno hiperbólico

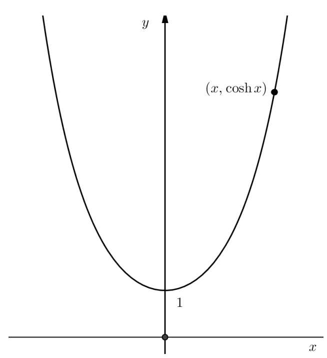

Figura 3.2: *Gráfico do* cosh

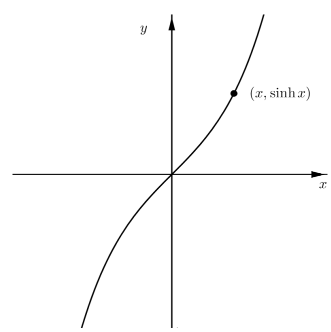

Figura 3.3: *Gráfico do* sinh

3.2.3 Tangente Hiperbólico

Faremos nesta seção uma discurssão acerca da bijetividade da função tanh, tendo em vista que ao tratarmos de números perplexos na forma polar deveremos tomar a função inversa da tangente hiperbólica, para encontarmos o argumento hiperbólico, o que só fará sentido se tal função for bijetiva.
Da tabela 3.3 temos um esboço do gráfico da função tangete hiperbólico.

$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$				
Expressão	Domínio	Imagem	$\lim_{x\to-\infty} \tanh x$	$\lim_{x\to+\infty} \tanh x$
$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	-1	1

Tabela 3.3: Função tangente hiperbólico

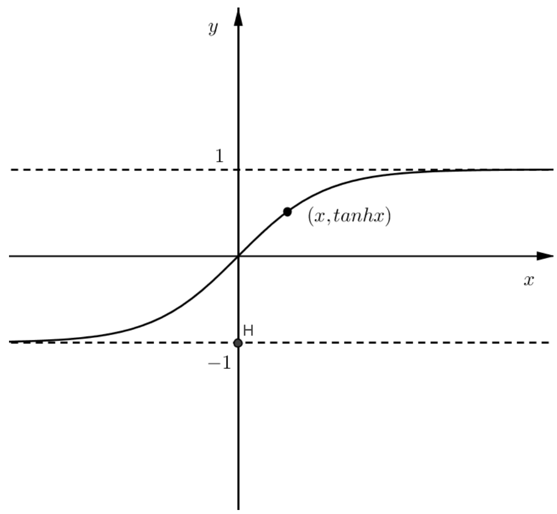

Figura 3.4: *Gráfico da Função* tanh

Teorema 3.2. *A função* $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$. *é uma bijeção.*

Demonstração. A tabela 3.3 mostra que tanh é uma sobrejeção, visto que $Im(\tanh) = (-1, 1)$. Seja x e y $\in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = \tanh(y)$, Assim segue que:

$$\begin{aligned}
\tanh x = \tanh y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\
&\Leftrightarrow \quad 2e^{2x} = 2e^{2y} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{2x} = e^{2y} \\
&\Leftrightarrow \quad x = y
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto $\tanh x$ é injetora. Deste modo concluímos que tanh é uma bijeção. □

Vamos mostrar que $tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ é crescente

Sejam $x,\ y \in \mathbb{R}$, tal que $x > y$ temos:

$$\begin{aligned}
\tanh x - \tanh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\
&= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\
&= \frac{2(e^{2x} - e^{2y})}{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1)} \\
&> 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Pois, $(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1) > 0$, por hipótese $x > y$, a exponencial é sabidamente crescente, $e^{2x} > e^{2y}$ logo $\tanh x > \tanh y$.
Deste modo existe a função inversa $\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por: $y = \tanh x \Leftrightarrow x = \tanh^{-1} y$, assim $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$

$$tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \tag{3.4}$$

Capítulo 4

Conjunto dos Números Perplexos

O corpo dos números complexos é o terno matemático $(\mathbb{R}^2, +, .)$, definido no capítulo 2, onde fazemos a multiplicação $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, foi também relatado naquele capítulo as consequências orginadas desta forma de multiplicação, onde uma interpretação geométrica no conjunto de todos os números complexos que possuem mesma norma $\|z\| = r$, é uma circunferência de centro na origem e raio r no Plano de $Argand - Gauss$.
Definiremos as seguintes operações em $\mathbb{R}^2$, onde $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$.
Adição: $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada par $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ao par ordenado $u + v = (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2$.
Multiplicação: $\odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada par $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ao par ordenado $u \odot v = (ac + bd, ad + bc) \in \mathbb{R}^2$.
Igualdade

$$u = v \Longleftrightarrow a = c \ e \ \ b = d \tag{4.1}$$

Observemos que a soma definida é a mesma soma definida para os números complexos e que o produto difere apenas no sinal da primeira coordenada.
Ao terno $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ chamaremos de **conjunto dos números perplexos** e denotaremos por $\mathbb{P}$
Tomemos $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ em $\mathbb{P}$

Proposição 4.1. *As seguintes propriedades da adição e multiplicação se verificam para quaisquer z,w, $t \in \mathbb{P}$*

A_1) $z + (w + t) = (z + w) + t$ *(associatividade da adição)*

A_2) $z + w = w + z$ *(comutatividade da adição)*

A_3) $0 + z = z = z + 0$ *(existência elemento neutro da adição)*

A_4) $z + (-z) = 0$ *(existência do elemento oposto da adição)*

M_1 $z \odot (w \odot t) = (z \odot w) \odot t$ *(associatividade da multiplicação)*

M_2 $z \odot w = w \odot z$ *(comutatividade da multiplição)*

M_3 $z \odot 1 = 1 \odot z = z$ *com* $0 \neq 1$*(existência do elemento neutro da multiplicação)*

M_4 $\forall z = (a_1, a_2) \in \mathbb{P}$, *com* $a_1 \neq \pm a_2$ *se* $z^{-1} = (\frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 - a_2^2})$ *então* $z \odot z^{-1} = 1$ *(existência do inverso multiplicativo)*

MA $z \odot (w + t) = z \odot w + z \odot t$ *(distributividade da adição em relação a multiplicação)*

Demonstração. Como a adição coincide com a adição nos complexos, indicamos [14] para maiores detalhes nas demosntrações das propriedades □

Demonstração. Seja $z = (a_1, a_2)$; $w = (b_1, b_2)$ e $t = (c_1, c_2)$, em $\mathbb{P}$ temos que:

$$\begin{aligned}
M_1)(z \odot w) \odot t &= (a_1b_1 + a_2b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1) \odot (c_1, c_2) \\
(z \odot w) \odot t &= ([a_1b_1 + a_2b_2]c_1 + [a_1b_2 + a_2b_1]c_2,\ [a_1b_1 + a_2b_2]c_2 + [a_1b_2 + a_2b_1]c_1) \\
(z \odot w) \odot t &= ([a_1b_1]c_1 + [a_1b_2]c_2 + [a_2b_2]c_1 + [a_2b_1]c_2,\ [a_1b_1]c_2 + [a_1b_2]c_1 + [a_2b_2]c_2 \\
&+ [a_2b_1]c_1) \\
(z \odot w) \odot t &= (a_1[b_1c_1 + b_2c_2] + a_2[b_2c_1 + b_1c_2],\ a_1[b_1c_2] + b_2c_1] + a_2[b_2c_2 + b_1c_1]) \\
(z \odot w) \odot t &= (a_1, a_2) \odot (b_1c_1 + b_2c_2,\ b_2c_1 + b_1c_2) \\
(z \odot w) \odot t &= z \odot (w \odot t)
\end{aligned}$$

$M_2)$ $(z \odot w) = (a_1b_1 + a_2b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1) = (b_1a_1 + b_2a_2,\ b_1a_2 + b_2a_1) = w \odot z$
$M_3)$ Tomemos $1 = (1, 0)$, façamos $z \odot 1 = (a_1.1 + a_2.0,\ a_1.0 + a_2.1) = (a_1,\ a_2) = z$, $\forall z \in \mathbb{P}$
$M_4)$ $\forall z \in \mathbb{P}$, com $a_1 \neq \pm a_2$ existe o perplexo z^{-1} tal que $z \odot z^{-1} = 1$
Seja $z^{-1} = (x, y)$ tal que $z \odot z^{-1} = 1$, assim $(a_1, a_2) \odot (x, y) = (1, 0)$ se, e somente se; $(a_1x + a_2y, a_2x + a_1y) = (1, 0) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1x + a_2y = 1 \\ a_2x + a_1y = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}$ e $y = \frac{-a_2}{a_1^2 - a_2^2}$ o que mostra a existência do inverso multiplicativo quando $a_1 \neq \pm a_2$

$$\begin{aligned}
MA)z \odot (w + t) &= (a_1,\ a_2) \odot (b_1 + c_1,\ b_2 + c_2) \\
z \odot (w + t) &= (a_1[b_1 + c_1] + a_2[b_2 + c_2],\ a_2[b_1 + c_1] + a_1[b_2 + c_2]) \\
z \odot (w + t) &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2,\ a_2b_1 + a_1b_2 + a_2c_1 + a_1c_2) \\
z \odot (w + t) &= (a_1b_1 + a_2b_2,\ a_2b_1 + a_1b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2,\ a_2c_1 + a_1c_2) \\
z \odot (w + t) &= z \odot w + z \odot t
\end{aligned}$$

□

Chamamos de perplexo real ao número $z = (a, 0)$, para todo $a \in \mathbb{R}$, a representação afirma que todo número real é considerado um número perplexo.
Tomemos a operação $z + (-w)$ e a representemos por $z - w$, está operação recebe o nome

de subtração em $\mathbb{P}$.
De M_4 resulta que dado $u = (a, b)$, tal que $|a| \neq |b|$, então o inverso do número perplexo u é o número $u^{-1} = (\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{-b}{a^2-b^2})$, deste modo consideremos um perplexo v que possua inverso multiplicativo, e façamos $u \odot v^{-1}$ e a representemos por $\frac{u}{v}$ está operação recebe o nome de divisão em $\mathbb{P}$. Assim:

$$u \odot v^{-1} = \frac{u}{v} = (\frac{ac - bd}{c^2 - d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 - d^2}) \tag{4.2}$$

Definimos também as potências em $\mathbb{P}$: $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$, façamos $u^0 = 1$ e $u^n = u \odot u^{n-1}$.
Sem prejuizos para o entendimento da operação a ser utilizada, mudaremos o simbolo representativo da multiplicação, ou seja, $u \odot v = u.v$

4.1 Forma Algébrica de um Número Perplexo

Para os números complexos, a forma algébrica é dada por $z = x + yi$, onde $i^2 = -1$, façamos então para os números perplexos as seguintes observação.
Denotemos por unidade perplexa o número $p = (0, 1)$.
Sejam a e b, números reais, então $a + b = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$.
Fazendo então $a \odot b = (ab, 0) = (a, 0).(b, 0)$.
$p^2 = (0, 1).(0, 1) = (1, 0) = 1$, logo no perplexos $p^2 = 1$.
$c.(a, b) = (c, 0).(a, b) = (ca, cb) = c(a, b)$
Assim como os números complexos cada números perplexo u pode ser representado no plano cartesiano, onde no eixo das abcissas representaremos a primeira coordenada que será chamada parte real de u, e no eixo das ordenadas representaremos a segunda coordenada de u que será chamada de parte perplexa. Temos assim o plano perplexo

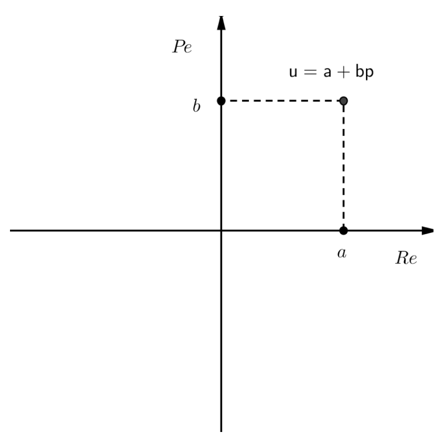

Figura 4.1: *Plano Perplexo.*

Proposição 4.2. *Todo $u = (a, b) \in \mathbb{P}$ pode ser escrito na forma $u = a + bp$.*

Demonstração. Seja $u = (a, b) \in \mathbb{P}$, segue das observações acima, as quais mostram que as definições da adição e multiplicação em $\mathbb{P}$ para números reais coincidem com a adição e multiplicação definidas em $\mathbb{R}$, desde modo, o número perplexo escrito como par ordenado $u = (a, b)$, pode ser escrito como $u = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + bp$ □

De posse desta forma não precisamos memorizar as definições da adição e multiplicação.
De fato, basta usar algumas propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{P}$ já apresentadas:
Se $u = a + bp$ e $v = c + dp$ são números perplexos, então
$u + v = (a + bp) + (c + dp) = a + c + bp + cd = (a + c) + (b + d)p$
$u.v = (a + bp).(c + dp) = ac + bpc + adp + bdp^2 = (ac + bd) + (bc + ad)p$

Exemplo 1. Podemos observar que $p^n = 1$ para n par ou $p^n = p$, quando n é ímpar.
De fato, temos que $p^2 = 1$, se $n = 2k$ então $p^n = p^{2k} = (p^2)^k = 1$. Caso $n = 2k+1$, temos $p^n = p^{2k+1} = p^{2k}.p = 1.p = p$

Exemplo 2. Dados dois números perplexos, $u = 3 + 5p$ e $v = -5 + 7p$. Vamos efetuar as seguintes operações

(a) $u + v = (3 + 5p) + (-5 + 7p) = (3 - 5) + (5 + 7)p = -2 + 12p$

(b) $u - v = (3 + 5p) - (-5 + 7p) = (3 + 5) + (5 - 7)p = 8 - 2p$

(c) $uv = (3 + 5p)(-5 + 7p) = -15 + 21p - 25p + 35p^2 = -15 + 35 + (21 - 25)p = 20 - 4p$

(d) $\frac{u}{v} = \frac{3.(-5)-5.7}{(-5)^2-7^2} + \frac{5.(-5)-3.7}{(-5)^2-7^2}p = \frac{-15-35}{25-49} + \frac{-25-21}{25-49}p = \frac{-50}{-24} + \frac{-46}{-24}p = \frac{25}{12} + \frac{23}{12}p.$

(e) A soma $1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 1 + 1 + p + 1 + p = 3 + 2p$

4.2 Conjugado de um Número Perplexo e o Simétrico em relação à Bissetriz dos quadrantes ímpares.

Dado um número perplexo $u = (a, b) = a+bp$, definimos a parte real e a parte perplexa de z por $Re(u) = a$ e $Per(z) = b$, respectivamente. Quando $Re(z) = 0$, dizemos que z é perplexo puro.
Como um número perplexo $z = (a, b) = a+bp$ é o par ordenado (a, b), podemos representá-lo graficamente como o ponto do plano cartesiano de abscissa a e ordenada b, ou como o vetor que liga a origem a este ponto Figura 4.1.

Definimos conjugado de um número perplexo z como sendo o número perplexo o $\overline{z} = (a, -b) = a-bp$, graficamente o conjugado é obtido por uma reflexão sobre o eixo real. Definimos o perplexo simétrico de z e denotemos por $u^* = (b, a) = b + ap$, graficamente

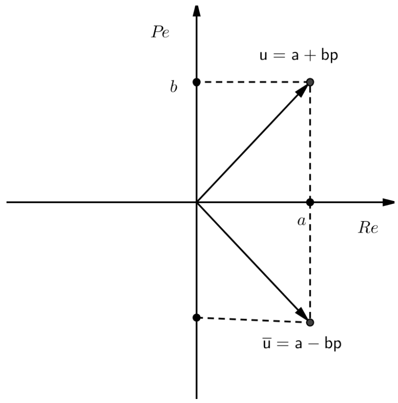

Figura 4.2: *Imagem de* $\overline{u}$

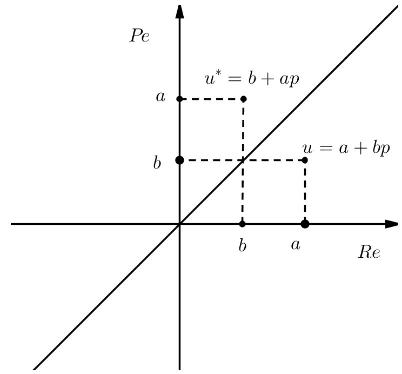

Figura 4.3: *Imagem de* u^*

o perplexo simétrico é obtido pela reflexão de z em torno da bissetriz dos quadrantes ímpares.

Proposição 4.3. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer* $u,\ v\ \in \mathbb{P}$.

a) $\overline{\overline{u}} = u$, $\overline{a'u} = \overline{a'}\overline{u}$, $\overline{u \pm v} = \overline{u} \pm \overline{v}$ *e* $\overline{u \odot v} = \overline{u} \odot \overline{v}$

b) $\overline{(\frac{u}{v})} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$, *desde que* v *admita inverso.*

c) $u + \overline{u} = 2Re(u)$ *e* $u - \overline{u} = 2pPer(u)$

d) $u\ \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow u = \overline{u}$

e) u *é um perplexo puro se,e somente se* $\overline{u} = -u$

f) $u \odot \overline{u} = a^2 - b^2$

Demonstração.
a. Seja $u = a + bp$ então $\overline{u} = a - bp$, então $\overline{\overline{u}} = \overline{a - bp} = a + bp = u$;
$\overline{a'u} = \overline{a'a + a'bp} = a'a - a'bp = a'(a - bp) = \overline{a'}\overline{u}$;
$\overline{u \pm v} = (a \pm c) - (b \pm d)p = (a - bp) \pm (c - dp) = \overline{u} \pm \overline{v}$
$\overline{u \odot v} = ac + bd - (ad + bc)p$
$\overline{u \odot v} = ac + bdp^2 - (ad + bc)p$
$\overline{u \odot v} = a(c - d) + (c - dp)bp$
$\overline{u \odot v} = ((a - bp)(c - dp) = \overline{u} \odot \overline{v}$
b) Vamos primeiro mostrar que $\overline{u^{-1}} = (\overline{u})^{-1}$, para u invertível e posteriormente a propriedade segue imediatamente de a.
$u^{-1} = \frac{a}{a^2-b^2} - \frac{b}{a^2-b^2}p$ então $\overline{u^{-1}} = \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2-b^2}p$, por outro lado, $\overline{u} = a - bp$ e assim $(\overline{u})^{-1} = \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2-b^2}p$, ou seja, $\overline{u^{-1}} = (\overline{u})^{-1}$. Como $\overline{(\frac{u}{v})} = \overline{uv^{-1}} = \overline{u}\overline{v^{-1}} = \overline{u}.(\overline{v})^{-1} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$.
c) $u + \overline{u} = a + bp + a - bp = 2a = 2Re(u)$ e $u - \overline{u} = a + bp - a + bp = 2bp = 2pPer(u)$

d) Se $u \in \mathbb{R}$ então $u = a + 0p$, logo $\overline{u} = a - 0p = a = u$. Caso $u = \overline{u}$ então $a + bp = a - bp$ então $b = -b \Longleftrightarrow b = 0$, logo $u = a$ e assim $u \in \mathbb{R}$.
e) u é um perplexo puro então $u = bp$ logo $\overline{u} = -bp = -u$. Caso $\overline{u} = -u$ então $a - bp = -a - bp$, logo $a = -a \Longleftrightarrow a = 0$ portanto u é um perplexo puro.
f) $u \odot \overline{u} = (a + bp)(a - bp) = a^2 - (bp)^2 = a - b^2$ $\square$

Proposição 4.4. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer* $u,\ v \in \mathbb{P}$

a. $p.u = u^*$

b. $(u^*)^* = u$, $(a'u)^* = a'u^*$, $(u \pm v)^* = u^* \pm v^*$, $(u.v)^* = u^*.v = u.v^*$

c. $\overline{u^*} = -\overline{u}^*$

Demonstração.
a) Seja $u = a + bp$ então $p(a + bp) = pa + bp^2 = ap + b = b + ap = u^*$.
b) pelo item a. $pu = u^*$, como p é invertível, façamos $p(pu) = pu^* = (u^*)^*$ logo $u = (u^*)^*$. Sabendo que $(a'u)^* = (a'a + a'bp)^* = a'ap + a'b = a'(ap + b) = a'u^*$. Tomando $(u \pm v)^* = ((a \pm c) + (b \pm dp))^* = (a \pm c)p + (b \pm d) = (ap + b) \pm (cp + d) = u^* \pm v^*$; Por fim, $(u.v)^* = [(ac + bd) + (ad + bc)p]^* = (ac + bd)p + (ad + bc)$, por outro lado, $u^*.v = (b + ap).(c + dp) = (bc + ad) + (ac + bd)p$ e também $u.v^* = (a + bp)(d + cp) = (ad + bc) + (ac + bd)p$, portanto $(u.v)^* = u^*.v = u.v^*$.
c)$\overline{u^*} = \overline{(b + ap)} = b - ap$, por outro lado, $-\overline{u}^* = -(a - bp)^* = -(ap - b) = b - ap$, logo $\overline{u^*} = -\overline{u}^*$. $\square$

Proposição 4.5. *Para quaisquer números perplexos u e v as representações são equivalentes:*

a) $u.v = (ac + bd) + (ad + bc)p$

b) $u.v = av + bv^*$

Demonstração. De fato, façamos $u.v = ac + bd + (ad + bc)p \Leftrightarrow u.v = ac + adp + bd + bcp \Leftrightarrow u.v = a(c + dp) + b(d + cp) = av + bv^*$. $\square$

Exemplos 1. Vamos encontrar o simétrico do ponto (3, 4) em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Solução. O ponto $(3,4) = 3 + 4p$, logo o simétrico é $(3,4)p = 3p + 4 = 4 + 3p = (4,3)$ $\square$

Exemplos 2. Dados dois números perplexos, $u = 3 + 5p$ e $v = -5 + 7p$, Temos:

(a) $\overline{u} = 3 - 5p$ e $\overline{v} = -5 - 7p$

(b) $\overline{u} + u = (3 - 5p) + (3 + 5p) = 6$

(c) $\overline{u.v} = (3-5p)(-5-7p) = -15-21p+25p+35 = 20+4p$

(d) $u.\overline{u} = (3+5p)(3-5p) = 3^2-5^2 = 9-25 = -16$

(e) $(u.v)^* = u^*.v = (5+3p)(-5+7p) = -25+21+(35-15)p = -4+20p$

4.3 Divisores de zero em $\mathbb{P}$.

Vimos que $u.\overline{u} = a^2 - b^2$, então se $|a| = |b|$ então $u.\overline{u} = 0$, com $u \neq 0$ isso mostra que existem números perplexos não nulos cujo produto é igual a zero, esses números serão chamados divisores de zero.
Sejam $B_1 = \{(x,y);\ y = x\}$ e $B_2 = \{(x,y);\ y = -x\}$ as bissetrizes do plano perplexo.

Teorema 4.1. *Dados u e v números perplexos não nulos, então $u.v = 0$ se, e somente se, $(u,v) \in B_1 \times B_2$ ou $(u,v) \in B_2 \times B_1$*

Demonstração. A demonstração será feita em duas etapas:
T: Sejam u e v números perplexos não nulos, tal que $u.v = 0$
H: $(u,v) \in B_1 \times B_2$ ou $(u,v) \in B_2 \times B_1$.
$u.v = (ac+bd)+(ad+bc)p = 0+0p \Leftrightarrow \begin{cases} ac+bd = 0 \\ ad+bc = 0 \end{cases}$, onde $\{(a,b),\ a \neq 0\ ou\ b \neq 0\}$ e $\{(c,d),\ c \neq 0\ ou\ d \neq 0\}$, sem perda de generalidade tomemos $a,\ c \neq 0$, segue que $a = \frac{-bd}{c}$, susbtituindo na segunda equação do sistema temos: $\frac{-bd^2}{c} + \frac{bc^2}{c} = 0 \Leftrightarrow b(c^2-d^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0\ ou\ c^2 - d^2 = 0$, Se $b = 0$ então $a = 0$, absurdo. Portanto $c^2 - d^2 = 0 \Leftrightarrow c = \pm d$, Assim $v \in B_1\ ou\ B_2$, e $a = \mp b$ assim $u \in B_2\ ou\ B_1$, portanto $(u,v) \in B_1 \times B_2$ ou $(u,v) \in B_2 \times B_1$.

T: Sejam u e v perplexos não nulos tais que $(u,v) \in B_1 \times B_2$ ou $(u,v) \in B_2 \times B_1$.
H: $u.v = 0$ Tomemos $(u,v) \in B_1 \times B_2$, então $a = b$ e $c = -d$, segue da definição de multiplicação que $u.v = (-ad+ad)+(ad-ad)p = 0+0p) = 0$, de maneira análoga mostrasse para $(u,v) \in B_2 \times B_1$. □

Proposição 4.6. *Dado um número u perplexo qualquer, então $u \in B_1 \cup B_2$ se, e somente se, $u.\overline{u} = 0$*

A partir deste momento quando $u \in B_1 \cup B_2$ diremos que u é singular.

Exemplos 1. Vamos calcular o prduto dos números perplexos $u = 5+5p$ e $v = 1-p$.

Solução. O ponto $u.v = (5+5p).(1-p) = (5-5)+(5-5)p = 0$. □

Exemplos 2. Dados o números perplexos, $u = 3+3p$. Temos

(a) $\overline{u}.u = (3-3p)(3+3p) = 3^2-3^2 = 0$, logo u é singular.

4.4 Forma Polar

4.4.1 A "norma"de um Número Perplexo

A fim de escrevermos a forma polar de um número perplexo examinemos o que acontece nos numéros complexos.
No caso complexo, para a forma polar necessitamos da definição de norma de um número complexo, que é definida do seguinte modo:
$\|z\|^2 = z.\overline{z} = x^2+y^2$, onde z é complexo, e denomina-se de argumento do número complexo z, onde z é não nulo, ao ângulo $argz = \alpha$ que o vetor OP faz com o semi-eixo positivo dos reais.
De posse destes dois conceitos descreve-se o número complexo através de sua forma polar.
Façamos então a definição de norma de um número perplexo. Primeiramente, tomemos o produto $u.\overline{u} = a^2 - b^2$, seguindo a definição dos complexos façamos:

$$\eta(u) = u.\overline{u} = a^2 - b^2. \tag{4.3}$$

5. Observação. $\eta(p) = 0^2 - 1^2 = -1$.

6. Observação. Ao conjunto $\{u \in \mathbb{P};\ \eta(u) = 1\}$ damos o nome de Esfera de raio 1.

7. Observação. Ao conjunto $\{u \in \mathbb{P};\ \eta(u) = -1\}$ damos o nome de Esfera de raio -1.

8. Observação. Ao conjunto $\{u \in \mathbb{P};\ \eta(u) = sgn(r)r^2\}$ damos o nome de Esfera de raio r.

9. Observação Definimos $sgn(r) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad r \geq 0, \\ -1, & \text{se} \quad r < 0. \end{cases}$

4.4.2 Função Radial

Seja a aplicação $\rho : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que a cada $u \in \mathbb{P}$ associa $\rho(u) = \sqrt{|u.\overline{u}|}$.

Definição 4.1. *Seja $u \in \mathbb{P}$ a norma de u é o número real $\|u\| = sgn(u.\overline{u})\rho(u)$*

Exemplos 1. Seja $u = 5 + 2p$ então $\|u\| = sgn(5^2 - 2^2)\sqrt{|5^2 - 2^2|} = \sqrt{21}$.

Exemplos 2. Seja $v = 3 + 5p$ então $\|v\| = sgn(3^2 - 5^2)\sqrt{|3^2 - 5^2|} = -\sqrt{|-16|} = -4$

Exemplos 3. Seja $w = -3 + 2p$ então $\|w\| = sgn((-3)^2 - 2^2)\sqrt{|(-3)^2 - 2^2|} = \sqrt{5}$

Exemplos 4. Seja $h = 3 - 5p$ então $\|u\| = sgn(3^2 - (-5)^2)\sqrt{|3^2 - (-5)^2|} = -\sqrt{|-16|} = -4$

Proposição 4.7. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer u e $v \in \mathbb{P}$.*

i. $\rho(u) \geq 0$.

ii. $\rho(u) = 0 \Longleftrightarrow u \in B_1 \cup B_2$.

iii. $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow \rho(u) = 0$.

iv. $\rho(uv) = \rho(u)\rho(v)$.

v. *u possui inverso multiplicativo se, e somente se,* $\rho(u) > 0$.

vi. *Se u possui inverso multiplicativo então* $u^{-1} = \frac{\overline{u}}{u \odot \overline{u}}$.

vii. *Se u possui inverso multiplicativo então* $\rho(u^{-1}) = [\rho(u)]^{-1}$.

Demonstração.
i. Temos que $|u.\overline{u}| \geq 0$, logo $\sqrt{|u.\overline{u}|} \geq 0$ assim $\rho(u) \geq 0$
ii. Se $\rho(u) = 0$ então $|u.\overline{u}| = 0 \Leftrightarrow u.\overline{u} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$, $u \in B_1$ ou $u \in B_2$, ou seja $u \in B_1 \cup B_2$. Se $u \in B_1$ segue que $u.\overline{u} = a^2 - a^2 = 0$. Caso $u \in B_2$ segue que $u.\overline{u} = a^2 - (-a)^2 = 0$, portanto $u \in B_1 \cup B_2 \Rightarrow u.\overline{u} = 0 \Rightarrow \rho(u) = 0$
iii. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow sgn(u.\overline{u})\rho(u) = 0 \Leftrightarrow \rho(u) = 0$.
iv. $\rho(uv) = \sqrt{|(uv).\overline{uv}|} = \sqrt{|uv.\overline{uv}|} = \sqrt{|(u\overline{u})(v\overline{v})|} = \sqrt{|(u\overline{u})||(v\overline{v})|} = \sqrt{|(u\overline{u})|}\sqrt{|(v\overline{v})|} = \rho(u)\rho(v)$
v. Vamos supor que u possua inverso multiplicativo, sem que $\rho(u) > 0$, deste modo $\rho(u) = 0$, assim $u \in B_1 \cup B_2$, ora Tomemos $u \in \mathbb{P}$ não nulo, tal que $u \in B_1$, logo $\overline{u} \in B_2$ e assim $u.\overline{u} = 0$, como u admite inverso multiplicativo, então existe $v \in P$ tal que $u.v = 1$, multipliquemos $\overline{u}$ em ambos os membros, $\overline{u}.(u.v) = \overline{u}$, pela associatividade da multiplicação. $(\overline{u}.u).v = \overline{u}$ e assim $0 = \overline{u}$, absurdo pois $\overline{u}$ é não nulo.
Admitindo que $\rho(u) > 0$, tomemos $v \in \mathbb{P}$ tal que $u.v = 1$, ou seja, $ac + bd + (ad + bc)p = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} ac + bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$, sabendo que $a^2 - b^2 > 0$, temos que o sistema admite uma única solução, onde $v = c + dp$ é o inverso de u, dado por, $u^{-1} = \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{-b}{a^2 - b^2}p$
vi. Dado que u têm inverso multiplicavo, ele é da forma $v = u^{-1} = \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{-b}{a^2 - b^2}p$, assim $u^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2}(a - bp) = \frac{\overline{u}}{a^2 - b^2} = \frac{\overline{u}}{u.\overline{u}}$
vii. Dado que u possui inverso multiplicativo então $\rho(u^{-1}) = \sqrt{|u^{-1}.\overline{u^{-1}}|} = \sqrt{|u^{-1}.(\overline{u})^{-1}|}$, logo $\rho(u^{-1}) = (\sqrt{|u.\overline{u}|})^{-1} = [\rho(u)]^{-1}$. □

Proposição 4.8. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer u e $v \in \mathbb{P}$.*

i. $\|u\| = \|\overline{u}\|$ *e* $\|u.v\| = \|u\|.\|v\|$.

ii. $\|v^{-1}\| = (\|v\|)^{-1}$, *se v admite inverso multiplicativo.*

iii. $\|\frac{u}{v}\| = \frac{\|u\|}{\|v\|}$, *se v admite inverso multiplicativo.*

Demonstração.
i. $\|u\| = sgn(u.\overline{u})\rho(u) = sgn(\overline{u}.u)\rho(\overline{u}) = \|\overline{u}\|$, Consideremos $\|u.v\| = sgn(uv.\overline{uv})\rho(uv)$ assim $\|u.v\| = sgn(u.\overline{u})\rho(u).sgn(v\overline{v})\rho(v) = \|u\|.\|v\|$.
ii. $\|v^{-1}\| = sgn(u^{-1}.\overline{u^{-1}})\rho(u^{-1}) = (sgn(u.\overline{u}))^{-1}(\rho(u))^{-1} = (\|v\|)^{-1}$
iii. imediato de i e ii. □

Exemplos 1. Seja $u = 2 + p$ e $v = 3 + 2p$ vamos calcular $\|u.v\|$.

Solução. Vamos primeiro resolver o produto $u.v = (2+p).(3+2p) = (6+2)+(4+3)p$, logo $\|u.v\| = sgn(8^2 - 7^2)\sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{64 - 49} = \sqrt{15}$. Poderiamos ter usado a propriedade, i. visto que, $\|u\| = sgn(2^2 - 1^2)\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ e $\|v\| = sgn(3^2 - 2^2)\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, portanto $\|u.v\| = \|u\|.\|v\| = \sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15}$ □

Temos que no conjunto dos números perplexos a "norma" definida não satisfaz a desigualde triangular.
Para melhor exemplificar tomemos $u = 3 + 2p$ e $v = 1 + p$, segue que $u + v = 4 + 3p$, então $\|u\| = \sqrt{5}$; $\|v\| = 0$ e $\|u + v\| = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$, assim $\|u + v\| > \|u\| + \|v\|$.
A desiguadade $\|u + v\| \geq \|\|u\| - \|v\|\|$ também é falsa quando tomanda a definição da "norma" nos perplexos.

4.5 Geometria do Plano Perplexo

Se $u = a + bp$ e $\eta(u) = c \neq 0$ temos

$$\frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{c} = 1 \tag{4.4}$$

Ou seja u está em uma hipérbole equilátera.
Seja $U = \{u \in \mathbb{P},\ \rho(u) = 1\}$, consideremos o conjunto $H_1 = \{(a, b) \in U,\ com\ a > 0\, e\, a > |b|\}$. Deste modo $\eta(u) = 1$ ou $\eta(u) = -1$. Se $\eta(u) = 1$, com $a > 0\, e\, a > |b|$ temos $a^2 - b^2 = 1$, portanto $u \in H_1$, da trigonometria hiperbólica temos $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, como $cosht > 0$ e $\cosh t > |\sinh t|$, para todo t, segue que $a = \cosh t$ e $b = \sinh t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e assim $u = \cosh t\ +\ p \sinh t$.
Se $\eta(u) = a^2 - b^2 > 0$ e $\eta(u) \neq 1$, com $a > 0$ e $a > |b|$, temos $\rho(u) = \sqrt{a^2 - b^2}$, e deste modo $(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}) \in H_1$, novamente recorrendo a trigonometria hiperbólica $a = \rho(u)\cosh t$ e $b = \rho(u)\sinh t$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e assim

$$u = \rho(u)(\cosh t + p \sinh t)$$

. onde $\tanh t = \frac{b}{a}$, ou seja $t = ln\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, ou de modo equivalente

$$t = ln\frac{a+b}{\rho(u)}$$

. Desta Forma definimos a forma polar para os números perplexos u tal que $a > |b|$.
Para $a < -|b|$ definimos a formar polar de u como sendo (-1) vezes a forma polar de $-u$.
Para $b > |a|$ definimos a forma polar de u como sendo a forma polar de pu multiplicado por p
Para $b < -|a|$ definimos a forma polar de u como sendo $-p$ vezes a forma polar de $-pu$.

Exemplo 4.1. *Escrever os números perplexos abaixo na sua forma polar.*

a) $u = 3 + 2\sqrt{2}p$

Solução. Ora $\rho(u) = \sqrt{9-8} = 1$, sabendo que $3 > 0$ e $3 > 2\sqrt{2}$, logo $u \in H_1$. Assim temos que $t = ln(3+2\sqrt{2})$ portanto a forma polar é $u = \cosh ln(3+2\sqrt{2}) + p\sinh ln(3+2\sqrt{2})$ □

b) $u = 5 + 4p$

Solução. Ora $\rho(u) = \sqrt{25-16} = 3$, sabendo que $5 > 0$ e $5 > 4$, logo $\frac{u}{\rho(u)} \in H_1$. segue do exposto acima que $t = ln\frac{5+4}{3} = ln3$, portanto a forma polar é $u = 3(\cosh ln3 + p\sinh ln3)$. □

c) $u = 5 - 4p$

Solução. Ora $\rho(u) = \sqrt{25-16} = 3$, sabendo que $5 > 0$ e $5 > -4$, concluimos que $\frac{u}{\rho(u)} \in H_1$. segue do exposto acima que $t = ln\frac{5-4}{3} = ln\frac{1}{3}$, portanto a forma polar é $u = 3(\cosh ln\frac{1}{3} + p\sinh ln\frac{1}{3})$. □

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$H_1 = \{u \in U;\ a > 0\ e\ a > |b|\} \tag{4.5}$$

$$H_{-1} = \{u \in U;\ a < 0\, e - a > |b|\} \tag{4.6}$$

$$H_p = \{u \in U;\ b > 0\ e\ b > |a|\} \tag{4.7}$$

$$H_{-p} = \{u \in U;\ b < 0\, e\ - b > |a|\} \tag{4.8}$$

$$U = H_1 \cup H_{-1} \cup H_p \cup H_{-p} \tag{4.9}$$

Proposição 4.9. $H_p = pH_1 = \{ph;\ h \in H_1\}$; $H_{-1} = -1H_1 = \{-h;\ h \in H_1\}$ *e* $H_{-p} = -pH_1 = \{-ph;\ h \in H_1\}$.

Demonstração.

$H_p = pH_1 = \{ph;\ h \in H_1\}$.

i. $H_p \subset pH_1$, seja $u = a + bp \in H_p$, ou seja, $b > 0$ e $b > |a|$, sabendo $p^2 = 1$, temos $u = ap^2 + bp = p(b + ap)$, assim $h = b + ap \in H_1$ logo $u \in pH_1$.

ii. $H_p \supset pH_1$, seja $u \in pH_1$, $u = p(a+bp)$, $a > 0$ e $a > |b|$, logo $u = b + ap$, assim $u \in H_p$. De i e ii temos a igualdade.

2. $H_{-1} = -H_1 = \{-h;\ h \in H_1\}$.

i. $H_{-1} \subset (-1)H_1$, seja $u = a+bp$, com $a < 0$ e $-a > |b|$, sabendo que $u = -[(-a)+(-b)p]$, assim $h = -a + (-b)p \in H_1$ assim $u \in (-1)H_1$.

ii. $H_{-1} \supset (-1)H_1$, seja $u \in (-1)H_1$, $u = (-a + (-b)p)$, $-a < 0$ e $-(-a) > |b|$, logo $u = b + ap \in H_{-1}$. De i e ii temos a igualdade.

3. $H_{-p} = -pH_1 = -ph; h \in H_1$. i. $H_{-p} \subset -pH_1$, seja $u = a + bp$, com $b < 0$ e $-b > |a|$, sabendo $p^2 = 1$, temos $u = ap^2 + bp = p(b + ap) = -p(-b + (-a)p)$, assim $h = -b + (-a)p \in H_1$ assim $u \in -pH_1$.

ii. $H_{-p} \supset -pH_1$, seja $u \in -pH_1$, $u = -p(a + bp)$, $a > 0$ *e* $a > |b|$, logo $u = -b + (-a)p$, assim $u \in H_{-p}$. De i e ii temos a igualdade. □

Exemplo 4.2.

Vamos localizar os números perplexos $\frac{u}{\rho(u)}$, *com* $\rho(u) \neq 0$ *em relação aos conjuntos* H_1, H_{-1}, H_p *e* H_{-p}, B_1 *ou* B_2,

1. $u = 3 - 2p$, $\eta(u) = 3^2 - (-2)^2 = 9 - 4 = 5 > 0$, *logo* $\rho(u) = \sqrt{5}$, *como* $3 > |-2|$, *concluimos que* $\frac{u}{\rho(u)} \in H_1$.

2. $u = -4 + 7p$, $\eta(u) = (-4)^2 - (7)^2 = 16 - 49 = -33 < 0$, *logo* $\rho(u) = \sqrt{33}$, *como* $7 > |-4|$, *concluimos que* $\frac{u}{\rho(u)} \in H_p$

3. $u = 2 - 2p$, $\eta(u) = 2^2 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$, *logo* $u \in B_2$

4. $u = -3 - 3p$, $\eta(u) = (-3)^2 - (-3)^2 = 9 - 9 = 0$, *logo* $u \in B_1$

Exemplo 4.3. *Escrever os números perplexos abaixo na sua forma polar.*

a. $z = 1 + 2p$

Temos que $\rho(z) = \sqrt{|1-4|} = \sqrt{3}$, *como* $2 > 0$ *e* $2 > 1$; *concluimos que* $\frac{z}{\rho(z)} \in H_p$. *Então façamos* $z = p(1p + 2)$, *onde* $h = 2 + p$, *e* $\rho(h) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, $2 > 0$ *e* $2 > 1$, *assim* $\frac{h}{\rho(h)} \in H_1$. *Logo* $h = \sqrt{3}(\cosh ln\frac{3}{\sqrt{3}} + p \sinh ln\frac{3}{\sqrt{3}})$, *deste modo* $z = p\sqrt{3}(\cosh ln\frac{3}{\sqrt{3}} + p \sinh ln\frac{3}{\sqrt{3}})$. *Portanto,* $z = \sqrt{3}(\sinh ln\frac{3}{\sqrt{3}} + p \cosh ln\frac{3}{\sqrt{3}})$.

b. $z = -2 + p$

Temos que $\rho(z) = \sqrt{|4-1|} = \sqrt{3}$, *como* $-2 < 0$ *e* $-(-2) > 1$; *concluimos que* $\frac{z}{\rho(z)} \in H_{-1}$. *Então façamos* $z = (-1)(2 - p)$, *onde* $h = 2 - p$, *e* $\rho(h) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, $2 > 0$ *e* $2 > -1$, *assim* $\frac{h}{\rho(h)} \in H_1$. *Logo* $h = \sqrt{3}(\cosh ln\frac{1}{\sqrt{3}} + p \sinh ln\frac{1}{\sqrt{3}})$, *deste modo* $z = (-1)\sqrt{3}(\cosh ln\frac{1}{\sqrt{3}} + p \sinh ln\frac{1}{\sqrt{3}})$. *Portanto,* $z = \sqrt{3}(-\cosh ln\frac{3}{\sqrt{3}} - p \sinh ln\frac{3}{\sqrt{3}})$

c. $z = 1 - 2p$

Demonstração. Temos que $\rho(z) = \sqrt{|1-4|} = \sqrt{3}$, como $-2 < 0$ e $-(-2) > 1$; concluimos que $\frac{z}{\rho(z)} \in H_{-p}$. Então façamos $z = (-p)(2-p)$, onde $h = 2 - p$, e $\rho(h) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, $2 > 0$ e $2 > -1$, assim $\frac{h}{\rho(h)} \in H_1$. Logo $h = \sqrt{3}(\cosh ln\frac{1}{\sqrt{3}} + p \sinh ln\frac{1}{\sqrt{3}})$, deste modo $z = (-p)\sqrt{3}(\cosh ln\frac{1}{\sqrt{3}} + p \sinh ln\frac{1}{\sqrt{3}})$. Portanto, $z = \sqrt{3}(-\sinh ln\frac{3}{\sqrt{3}} - p \cosh ln\frac{3}{\sqrt{3}})$ □

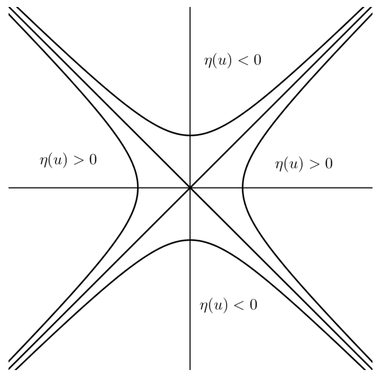

Figura 4.4: *Representação dos possivéis sinais da "norma" no plano perplexo*

Exemplo 4.4. *Conjunto* $Q = \{u \in \mathbb{P},\ \|u\| = r\}$ *é ilimitado, visto que sua representação geometrica é uma hipérbole equilátera*

4.6 A Multiplicação na Forma Polar de Números Perplexos

Assim como nos números complexos definimos a multiplicação através da forma polar, nos números perplexos também é possivel fazer a multiplicação através da forma polar, no entanto, devemos fazer uma análise cuidadosa quanto os possivéis resultados do produto e suas localização entre os ramos hiperbólicos e as Bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.

Consideremos os conjuntos H_1, H_{-1}, H_p e H_{-p} , B_1 ou B_2. Seja $u \in U$, então $u = k(\cosh\theta + p\sinh\theta)$, onde $k \in \{1, -1, p, -p\}$ de acordo com sua localização entre os conjuntos H_1, H_{-1}, H_p e H_{-p}. Caso $u \in \mathbb{P}$; $\rho(u) = 0$ então $u \in B_1$ *ou* B_2

Sejam u e v elementos de U, escrevemos $u = k(\cosh\theta + p\sinh\theta)$ e $v = k'(\cosh\theta' + p\sinh\theta')$, onde $k, k' \in \{1, -1, p, -p\}$, então:

$$u.v = k(\cosh\theta + p\sinh\theta).k'(\cosh\theta' + p\sinh\theta') = kk'(\cosh(\theta+\theta') + p\sinh(\theta+\theta')) \quad (4.10)$$

A expressão mostra que se tomarmos u e v pertencentes a H_k; $k = \{1, -1, p, -p\}$, o produto $uv \in H_1$. De modo particular $u^{2n} \in H_1$.

Para situarmos o produto de dois perplexos em U basta obtermos o resultado do produto $k" = kk'$, visto que $k" \in \{1, -1, p, -1\}$.
Consideremos agora $0 < \rho(u) \neq 1$ e $0 < \rho(v) \neq 1$, pelo que foi visto anteriormente $\frac{u}{\rho(u)}$, $\frac{v}{\rho(v)} \in U$, com argumentos θ e θ' respectivamente, portanto:

$$u.v = \rho(u)\frac{u}{\rho(u)}\rho(v)\frac{v}{\rho(v)} = k"\rho(u)\rho(v)(\cosh(\theta+\theta') + p\sinh(\theta+\theta')) \tag{4.11}$$

4.6.1 Divisão de dois Números Perplexos

Para a divisão entre dois números perplexos em sua forma polar, façamos algumas considerações acerca de ρ, dados u e v, perplexos tomando $\rho(u)$ e $\rho(v) > 0$, com θ e θ' os argumentos de $\frac{u}{\rho(u)}$ e $\frac{v}{\rho(v)}$ afirmamos que:

$$\frac{u}{v} = k"\frac{\rho(u)}{\rho(v)}(\cosh(\theta-\theta') + p\sinh(\theta-\theta')) \tag{4.12}$$

Solução. Seja $z \in U$, e θ o argumento de z, do corolário 4.3, segue que $z^{-1} = k(\cosh\theta - p\sinh\theta)$, assim dado $u \in U$, com θ' o argumento de u, temos que $\frac{u}{z} = u.z^{-1} = k'(\cosh(\theta') + p\sinh(\theta'))k(\cosh\theta - p\sinh\theta)$, logo
$\frac{u}{z} = k"\cosh\theta' - \theta + p\sinh\theta' - \theta$, onde $k" \in \{1, -1, p, -p\}$. Para completar a demonstração, tomemos u tal que $0 < \rho(u) \neq 1$ e v tal que $0 < \rho(v) \neq 1$, como $\frac{u^{-1}}{\rho(u^{-1})} \in U$, consideremos θ o argumento de $\frac{u}{\rho(u)}$, concluimos que $v^{-1} = k\rho(v^{-1})(\cosh(\theta) - p\sinh(\theta))$, então
$\frac{u}{v} = u.v^{-1} = k"\frac{\rho(u)}{\rho(v)}(\cosh(\theta-\theta') + p\sinh(\theta-\theta'))$ □

4.6.2 Potenciação e Radiciação nos Perplexos

Do mesmo modo que a formula de Moivre é utilizada nos números complexos, utilizaremos uma versão hiperbólica da fórmula de Moivre para definimos a potência de um número perplexo.

Teorema 4.2 (Teorema de Moivre versão perplexa)**.** *Dado $u \in \mathbb{P}$, com $\rho(u) > 0$ e θ o argumento de $\frac{u}{\rho(u)}$, consideremos $n \in \mathbb{Z}$, e $k \in \{1, -1, p, -p\}$ então:*

$$u^n = k^n[\rho(u)]^n(\cosh n\theta + p\sinh(n\theta) \tag{4.13}$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre n. Para $n = 1$ é evidente o teorema. Para $n = 2$ utilizando 4.11, temos que $u^2 = u.u = k^2[\rho(u)]^2(\cosh(2\theta) + p\sinh(2\theta))$, deste modo o teorema é verdadeiro para $n = 2$. Vamos supor que o teorema seja verdadeiro para um certo n natural, ou seja, $u^n = k^n[\rho(u)]^n(\cosh n\theta + p\sinh n\theta)$, tomemos então
$u^{n+1} = u^n.u = \{k^n[\rho(u)]^n(\cosh n\theta + p\sinh(n\theta))\}.(k\rho(u)(\cosh\theta + p\sinh\theta))$, desenvolvendo

o produto perplexo dado em 4.11 e usando as igualdades hiperbólicas dadas em 3.1.1, temos $u^{n+1} = k^n k([\rho(u)]^n \rho(u))(\cosh(n\theta+\theta) + p\sinh(n\theta+\theta))$, deste modo concluimos que, $u^{n+1} = k^{n+1}[\rho(u)]^{n+1}(\cosh((n+1)\theta) + p\sinh((n+1)\theta))$, deste modo o teorema é válido para todo n natural
Façamos agora $n = -m$, onde m é um inteiro positivo, então

$$\begin{aligned}
[k\rho(u)(\cosh(\theta) + p\sinh(\theta)]^n &= (k\rho(u)(\cosh(\theta) + p\sinh(\theta))^{-m} \\
&= \frac{1}{(k\rho(u)(\cosh(\theta) + p\sinh(\theta))^m} \\
&= \frac{\cosh 0 + p\sinh 0}{(k^m[\rho(u)]^m(\cosh(m\theta) + p\sinh(m\theta))} \\
&= k^{-m}[\rho(u)]^{-m}(\cosh(-m\theta) + p\sinh(-m\theta) \\
&= k^n[\rho(u)]^n(\cosh(n\theta) + p\sinh(n\theta)) \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.5. *Cálculo de* $(3+p)^9$
Como $\rho(u) = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ *escrevemos o número perplexos na sua forma polar* $3 + p = 2\sqrt{2}(\cosh(ln\sqrt{2}) + p\sinh(ln\sqrt{2})$, *então* $(3+p)^9 = 2^{\frac{27}{2}}(\cosh(9ln\sqrt{2}) + p\sinh(9ln\sqrt{2}))$

Exemplo 4.6. *Cálculo de* $(-2+p)^9$
Como $\rho(u) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ *escrevemos o número perplexos na sua forma polar*$-2 + p = (-1)\sqrt{3}(\cosh(ln\frac{1}{\sqrt{3}}) + p\sinh(ln\frac{1}{\sqrt{3}})$, *então* $(-2+p)^9 = (-1)^9 3^{\frac{9}{2}}(\cosh(9ln\frac{1}{\sqrt{3}}) + p\sinh(9ln\frac{1}{\sqrt{3}}))$

4.6.3 Raízes de Números Perplexos

Calcular $\sqrt[n]{k\rho(u)[\cosh(\theta) + p\sinh(\theta)]}$ é determinar o perplexos z, tal que:

$$z^n = k\rho(u)[\cosh(\theta) + p\sinh(\theta)] \qquad (4.15)$$

Vamos utilizar versão da fórmula de Moivre para números perplexos para responder esta pergunta.
Seja $z = k'\rho(z)[\cosh\alpha + p\sinh\alpha]$, pelo teorema 4.4, temos que:

$$\begin{aligned}
z^n &= k\rho(u)[\cosh(\theta) + p\sinh(\theta)] \\
k'^n[\rho(z)]^n[\cosh n\alpha + p\sinh n\alpha] &= k\rho(u)[\cosh\theta + p\sinh\theta] \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos números perplexos, temos:
$k'^n = k$ e $[\rho(z)]^n = \rho(u)$ e $\tanh(n\alpha) = \tanh\theta$. Para determinamos z devemos separar dois casos.

1. Se n é par então $k = 1$, assim só é possivel responder a raiz se $\frac{u}{\rho(u)} \in H_1$. Neste caso $z^n = u$ terá 4 raízes, visto que $k' \in \{1, -1, p, -p\}$, $\rho(z) = \sqrt[n]{\rho(u)}$ e $\alpha = \frac{\theta}{n}$.

2. Se n é ímpar então $k' = k$, e deste modo $z^n = u$ tem uma única raiz, onde $\rho(z) = \sqrt[n]{\rho(u)}$ e $\alpha = \frac{\theta}{n}$.

Exemplo 4.7. *Cálculo de* $\sqrt[3]{-2+p}$
Como $\rho(u) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ *escrevemos o número perplexos na sua forma polar*$-2+p = (-1)\sqrt{3}(\cosh(ln\frac{1}{\sqrt{3}}) + p\sinh(ln\frac{1}{\sqrt{3}})$, *então* $\sqrt[3]{-2+p} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[6]{3}[\cosh(\frac{1}{3}ln\frac{1}{\sqrt{3}}) + p\sinh(\frac{1}{1}ln\frac{1}{\sqrt{3}}))$

4.7 Equações do 1° e 2° grau em $\mathbb{P}$

4.7.1 Equação do 1° grau em $\mathbb{P}$

Admitindo coeficientes no conjunto $\mathbb{P}$, as equações passam a ter comportamento distintos quanto a suas soluções nos conjuntos dos números reais ou complexos.
De fato há equações do 1° grau, que têm infinitas soluções.

Exemplo 4.8. $(1+p)z - (1+p) = 0$

Solução: Sendo $z = a + bp$, a equação fica, $(a+b-1) + p(a+b-1) = 0 + 0p$, logo $\begin{cases} a+b=1 \\ a+b=1 \end{cases}$, $a = 1-b$, e portanto z têm infinitas soluções.

É possível encontrar equações na qual não existe solução.

Exemplo 4.9. $(1+p)z - 1 = 0$

Solução: Sendo $z = a + bp$, a equação fica, $(a+b-1) + p(a+b) = 0 + 0p$, logo $\begin{cases} a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases}$, $1 = 0$, absurdo, e portanto $(1+p)z - 1 = 0$ não possui solução.

É possível encontrar equações na qual existe uma única solução.

Exemplo 4.10. $(2+p)z - 1 = 0$

Solução: Sendo $z = a + bp$, a equação fica, $(2a+b-1) + p(a+2b) = 0 + 0p$, logo $\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases}$, $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{-1}{3}$, portanto $z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}p$.

Proposição 4.10. *A equação* $uz = v$ *têm uma única solução em* $\mathbb{P}$ *se, e somente se,* u *possui inverso multiplicativo.*

Demonstração.

Seja $u = a + bp$, $z = x + yp$ e $v = c + dp$, como $uz = v \iff ax + by + (ay + bx)p = c + dp$ $\iff \begin{cases} ax + by = c \\ bx + ay = d \end{cases}$, possui uma única solução $\iff a^2 - b^2 \neq 0 \iff u$ é invertível. $\square$

Corolário 4.1. *Seja s um número real diferente de zero, então a equação $sz = v$ possui uma única solução.*

4.7.2 Equação polinomial do 2° grau em $\mathbb{P}$.

Decorre do teorema fundamental da álgebra que uma equação do segundo grau com coeficientes complexos têm exatamente duas raízes complexas, se considerermos apenas soluções reais, então a equação do segundo grau terá no máximo duas raizes reais.

Já para a equação polinomial do 2° grau nos perplexos, há um fato marcante: a equação $z^2 = 1$ possui quatro soluções perplexas, a saber, 1, -1 , p e $-p$, visto que, $1^2 = 1$, $(-1)^2 = 1$, $p^2 = 1$ e $(-p)^2 = 1$. A fatoração de $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1) = (z - p)(z + p)$. Entretanto a equação $z^2 = -1$, não possui solução em $\mathbb{P}$, pois $z^2 = (x + yp).(x + yp) = (x^2 + y^2) + 2xyp$, ou seja, $Re(z^2) \geq 0$.

Dada a equação $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, com, $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$ e fazendo $z^2 + \alpha z + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} - \beta \iff (z + \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \beta = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}$. Façamos $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$, deste modo $(z + \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\Delta}{4}$. Segue que: Se $\Delta > 0$, a equação possui quatro soluções distintas.

De fato, $(z + \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\Delta}{4} \Leftrightarrow \frac{4(z + \frac{\alpha}{2})^2}{\sqrt{\Delta}^2} = 1 \Leftrightarrow (\frac{2(z + \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\Delta}})^2 = 1$, que possui como solução ± 1, $\pm p$. Segue que $\frac{2(z + \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\Delta}} = \pm 1 \Leftrightarrow z = \frac{-\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $\frac{2(z + \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\Delta}} = \pm p \Leftrightarrow z = \frac{-\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}p}{2}$, todas distintas Se $\Delta = 0$ possui como única solução $z = \frac{-\alpha}{2}$. Caso $\Delta < 0$ não possui solução.

Proposição 4.11. *$z^2 = u$ Tem solução em $\mathbb{P}$ se, e somente se, $a \geq |b|$*

Demonstração.

H: $z^2 = u$ Tem solução em $\mathbb{P}$.

T: $a \geq |b|$, sendo $u = (a, b)$.

Seja $z = x + yp$ a solução da equação $z^2 = u$, então $(x^2 + y^2) + 2xyp = a + bp$, pela igualdade dos números perplexos, $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ logo, $x^2 + 2xy + y^2 = a + b$ ou $x^2 - 2xy + y^2 = a - b$. Segue que $x^2 + 2xy + y^2 = a + b \Leftrightarrow (x + y)^2 = a + b \Leftrightarrow x + y = \pm\sqrt{a + b}$, como $z = x + py$ é solução então $a \geq -b$. Para $x^2 - 2xy + y^2 = a - b \Leftrightarrow (x - y)^2 = a - b \Leftrightarrow x - y = \pm\sqrt{a - b}$; como $z = x + yp$ é solução então $a \geq b$. deste modo $a \geq \max\{b, -b\} = |b|$

H: $a \geq |b|$, sendo $u = a + bp$

T: $z^2 = u$ têm solução em $\mathbb{P}$.

Seja (x, y) uma pretensa solução da equação $z^2 = u$, então $(x^2 + y^2, 2xy) = (a, b)$

$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$ Logo, $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x^2y^2=\frac{b^2}{4} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ (x^2,y^2), são soluções da equação do segundo grau $w^2-aw+\frac{b^2}{4}=0$, que possui solução $\Leftrightarrow a^2-b^2\geq 0$, ou seja, $a\geq |b|$. $\square$

Nota 1. Admitindo que $z^2=u$ possui solução em $\mathbb{P}$. Resolvendo a equação $w^2-aw+\frac{b^2}{4}=0$ e posteriormente retornando ao sistema inicial mostrasse que as soluções são.

$$z_0=\frac{1}{2}[(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})+(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})p];-z_0;pz_0;-pz_0. \qquad (4.17)$$

Nota 2. Caso $z_0\neq 0$ tal que $z_0\in B_1\cup B_2$, temos $pz_0=z_0$ e $-pz_0=-z_0$, ou seja, temos duas raizes perplexas distintas.

Nota 3. $z_0\neq 0$ tal que $z_0\in B_1\cup B_2$, se, e somente se, $u\in B_1\cup B_2$; $a=|b|$.

Nota 4. Se $u=(0,0)$ a única solução da equação $z^2=u$ é $z=(0,0)$

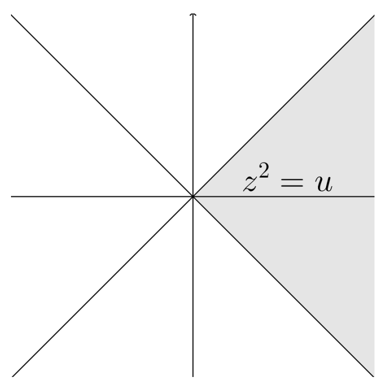

Figura 4.5: *Região do plano que adimite raiz quadrada*

Exemplos 1. Vamos determinar todas as raízes perplexas dos polinômios abaixo:

(a) $x^2-4x=0$

Solução. $\Delta=(-4)^2-4.1.0=16$, portanto temos quatro raizes perplexas, dadas por $x=\frac{4\pm\sqrt{16}}{2}$, ou seja $x_1=4$, $x_2=0$, ou $x=\frac{4\pm\sqrt{16}p}{2}$, assim $x_3=2+2p$ ou $x_3=2-2p$. Logo $V=\{0,4,2+2p,2-2p\}$ $\square$

(b) $x^2=x$

Solução. $x^2-x=0$, assim $\Delta=(-1)^2-4.1.0=1$, portanto temos quatro raizes perplexas, dadas por $x=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$, ou seja $x_1=1$, $x_2=0$, ou $x=\frac{1\pm\sqrt{1}p}{2}$, assim $x_3=\frac{1+p}{2}$ ou $x_3=\frac{1-p}{2}$. Logo $V=\{0,1,\frac{1-p}{2},\frac{1+p}{2}\}$ $\square$

(c) $z^2+(p)z+(-1+p)=0$

Solução. $\Delta = (p)^2 - 4.1.(-1+p) = 1 + 4 - 4p = 5 - 4p$, como $5 > |-4|$, temos quatro raizes perplexas, dadas por $x = \frac{-p \pm \sqrt{5-4p}}{2}$, ou seja $x = \frac{-p \pm \sqrt{(2-p)^2}}{2}$, $x_1 = 1 - p$, ou $x_2 = -1$, ou $x = \frac{-p \pm \sqrt{(2-p)^2 p}}{2} = \frac{-p \pm (2p-1)}{2}$ assim $x_3 = \frac{-1+p}{2}$ ou $x_4 = \frac{1-3p}{2}$. Logo $V = \{-1, 1-p, \frac{-1+p}{2}, \frac{1-3p}{2}\}$ □

(d) $z^2 + (2+p)z + (-1+5p) = 0$

Solução. $\Delta = (2+p)^2 - 4.1.(-1+5p) = 4 + 4p + p^2 + 4 - 20p = 9 - 16p$, como $9 < |-16|$, não possui raiz. □

(e) $z^2 - (5+p)z + 6 + 3p = 0$

Solução. $\Delta = (-(5+p))^2 - 4.1.(6+3p) = 25 + 10p + p^2 - 24 - 12p = 2 - 2p$, como $2 = |-2|$, possui duas raízes perplexas, dadas por $x = \frac{5+p \pm \sqrt{2-2p}}{2}$, ou seja $x = \frac{5+p \pm \sqrt{(1-p)^2}}{2}$, $x_1 = 3$, ou $x_2 = 2+p$, ou $x = \frac{5+p \pm \sqrt{(1-p)^2 p}}{2} = \frac{5+p \pm (p-1)}{2}$ assim $x_3 = 2+p$ ou $x_4 = 3$. Logo $V = \{3,\ 2+2p\}$ □

(f) $z^2 - (2+2p)z + 2 + 2p = 0$

Solução. $\Delta = (-(2+2p))^2 - 4.1.(2+2p) = 4 + 8p + 4p^2 - 8 - 8p = 0$, possui uma única raiz perplexa, dada por $x = \frac{2+2p \pm \sqrt{0}}{2}$, ou seja $x = \frac{2+2p}{2}$, $x_1 = 1+p$, Logo $V = \{1+p\}$ □

Exemplos 2. Sejam $\beta = a + bp$ e $\gamma = c + dp$ em $\mathbb{P}$ e considere a equação

$$z^2 + \beta z + \gamma = 0 \tag{4.18}$$

Vamos mostrar que se 4.18 tem solução então $a^2 + b^2 - 4c \geq |2ab - 4d|$.

Solução.
$z^2 + \beta z + \gamma = 0 \Longleftrightarrow (z + \frac{\beta}{2})^2 = \frac{\beta^2}{4} - \gamma$, seja $\Delta = \frac{\beta^2}{4} - \gamma = \frac{a^2+b^2-4c}{4} + \frac{2ab-4d}{4}p$, admitindo que 4.18 tem solução e usando a proposição 4.12, concluímos que $a^2 + b^2 - 4c \geq |2ab - 4d|$.
Caso $\Delta = 0 + 0p$, 4.18 apresentará um única solução
Caso $\Delta \neq 0$ entretanto $\Delta \in B_1 \cup B_2$ e 4.18 admite solução concluimos pela nota 2 e nota 3, que 4.18 possui 2 soluções distintas.
Caso Δ não pertença a $B_1 \cup B_2$ e 4.18 admita solução concluímos que 4.18 tem 4 raízes distintas. □

4.7.3 Equações polinômiais em $\mathbb{P}$

Do exposto acima é possivel observar que um polinômio em $\mathbb{P}$ pode não ter raízes, pode ter um número finito de raízes ou pode ter infinita raízes, além do que o número de raízes do polinômio não é controlado pelo grau do polinômio. Como exemplo citamos a equação:

$$(1+p)z^2 = 4+4p, \textit{ onde } z = a+(2-a)p \textit{ ou } z = a-(2+a)p \ \forall a \in \mathbb{R} \tag{4.19}$$

A discurssão sobre as raízes de polinômios do 2° grau quando existem feitas em 4.16, também nos indicam que podemos ter 4 raizes perplexas, os problemas a seguir trataram de raízes perplexas de polinomios de 3º e 4° grau, e indicaram um resultado acerca da quantidade de raízes desses polinômios.

Exemplo 4.11. *Determinaremos todas as raízes perplexas de* $z^3 - 2z = 0$

Solução. $z^3 - 9z = z(z^2-9) = z(z-3)(z+3) = 0$, com soluções reais, $z = 0$ ou $z = \pm 3$.
No entanto, z, $z+3$ e $z-3$, podem ser tomados como divisores de 0.
Seja $z = a+bp$, onde $z(z-3) = 0$ são divisores próprios de 0, pelo teorema 4.2, temos que $a = b$ e $a-3 = -b$ ou $a = -b$ e $a-3 = b$.
Se $a = b$ e $a-3 = -b$, então $2a = 3$, logo $a = \frac{3}{2}$.
Deste modo $z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}p$
Se $a = -b$ e $a-3 = b$, então $a = \frac{3}{2}$, e a solução é $z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}p$.
Seja $z(z+3) = 0$ divisores de 0, assim resolvendo do mesmo modo, conclui-se que $z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}p$ ou $z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}p$
Seja $(z-3)(z+3) = 0$ divisores próprios de 0, então $z = -3p$ ou $z = 3p$. Portanto, o conjunto solução é $S = \{0,\ 3,\ -3,\ 3p,\ -3p,\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}p,\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2}p,\ -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}p,\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}p,\}$ □

Exemplo 4.12. *Vamos determinar todas as raízes perplexas de* $z^4 - 5z^2 + 4 = 0$

Solução. $z^4 - 5z^2 + 4 = (z-1)(z+1)(z-2)(z+2) = 0$, as raízes reais, $z = \pm 1$ ou $z = \pm 2$.
No entanto, $(z-1)$, $(z+1)$ e $z-2$, $z+2$, podem ser tomados como divisores de 0.
Ao procedemos como no problema 4.5, e relembrado os conceitos de contagem, devemos fazer 4×3, operações onde 2 a 2 tomamos os fatores como divisores de 0. logo teremos $4 \times 3 + 4$ raizes perplexas, ou seja, 16 raizes compõe o conjunto solução dado abaixo.
$S = \{\pm 1, \pm 2, \pm p, \pm 2p, \frac{3}{2} \pm \frac{p}{2}, -\frac{3}{2} \pm \frac{p}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{3p}{2}, -\frac{1}{2} \pm \frac{3p}{2}\}$ □

Exemplo 4.13. *Determinaremos todas as raízes perplexas de* $(z-p)(z^2+p) = 0$

Solução. $z = p$, $z = 1$ é solução, visto que $(1-p)(1+p) = 0$. Vamos verificar se existe outras soluções. seja $z = a+bp$, então $z-p = a+(b-1)p$ e $z^2 = a^2+b^2+2abp$, logo $z^2+p = a^2+b^2+(2ab+1)p$, devemos ter $(z-p, z^2+p) \in B_1 \times B_2$ ou $(z-p, z^2+p) \in B_2 \times B_1$.
Se $(z-p, z^2+p) \in B_1 \times B_2 \Rightarrow \begin{cases} a = b-1 \\ a^2+b^2 = -2ab-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = -1 \\ a^2+2ab+b^2 = -1 \end{cases}$ Impossivel. Se $(z-p, z^2+p) \in B_2 \times B_1 \Rightarrow \begin{cases} a = -b+1 \\ a^2+b^2 = 2ab+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ a^2-2ab+b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a+b=1 \\ (a-b)^2=1 \end{cases}$, onde $a=1$ e $b=0$ e $a=0$ e $b=1$ são as únicas soluções, portanto $z=1$ ou $z=p$. $\square$

Uma Base Idempotente

Na discurssão sobre as diferenças entre os conjuntos complexos e perplexos, citamos os números perplexos $\Gamma = \{\frac{1+p}{2}, \frac{1-p}{2}\}$. Tomemos $\delta_1 = \frac{1-p}{2}$ e $\delta_2 = \frac{1+p}{2}$ e observemos que:

1. $\delta_1.\delta_2 = 0$, De fato, sabendo que $\delta_1 \in B_2$ e $\delta_2 \in B_1$ decorre do teorema 4.1, $\delta_1.\delta_2 = 0$

2. $\delta_1^n = \delta_1$. Vamos demonstrar por indução sobre n. Para $n=1$ é imediato o resultado. façamos $n=2$, então $\delta_1^2 = (\frac{1-p}{2})^2$, onde $\delta_1^2 = \frac{1-2p+1}{4} = \frac{2-2p}{4}$, portanto $\delta_1^2 = \frac{1-p}{2} = \delta_1$. Vamos supor a igualdade verdadeira para $n > 2$, ou seja, $\delta_1^n = \delta_1$. Tomemos, δ_1^{n+1}, segue que $\delta_1^{n+1} = \delta_1^n.\delta_1 \overbrace{=}^{h.I} \delta_1\delta_1 = \delta_1^2 = \delta_1$. Logo a igualdade vale para todo n natural.

3. $\delta_2^n = \delta_2$. A demonstração é feita de modo análogo.

Proposição 4.12. *Seja $u = a + bp$ um número perplexo então existem únicos α e β reais tais que $u = \alpha\delta_1 + \beta\delta_2$.*

Demonstração.
Existência: observe que $a + pb = (a-b)\frac{(1-p)}{2} + (a+b)\frac{(1+p)}{2}$, assim $\alpha = a-b$ e $\beta = a+b$.
Unicidade: Observe que $\alpha\frac{(1-p)}{2} + \beta\frac{(1+p)}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)}{2} + \frac{(\beta-\alpha)}{2}p = 0 + 0p \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta-\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então $\alpha\frac{(1-p)}{2} + \beta\frac{(1+p)}{2} = \alpha'\frac{(1-p)}{2} + \beta'\frac{(1+p)}{2} \Leftrightarrow (\alpha-\alpha')\frac{(1-p)}{2} + (\beta-\beta')\frac{(1+p)}{2} = 0$ $\Leftrightarrow \alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$ $\square$

Denominaremos Γ como sendo a base idempotente de $\mathbb{P}$

Proposição 4.13. *Sejam $u = \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\beta_2$ e $v = \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2$, então $u.v = (\alpha_1\beta_1)\delta_1 + (\alpha_2\beta_2)\delta_2$*

A demonstração segui direto da observação de que $\delta_1.\delta_2 = 0$.

Potência de $u = a + bp$ na base Γ

Vamos calcular a potência $u^n = (\alpha\delta_1 + \beta\delta_2)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, utilizando da fórmula Binômio. $(\alpha\delta_1 + \beta\delta_2)^n = (\alpha\delta_1)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \alpha^{n-i}\beta^i\delta_1^{n-i}\delta_2^i + (\beta\delta_2)^n$, pelas observações 2 e 3 feitas.

$$u^n = \alpha^n\delta_1 + \beta^n\delta_2 \tag{4.20}$$

Sabendo que $\alpha = a - b$ e $\beta = a + b$, reescrevendo na base $\{1, p\}$, temos as coordenadas $u^n = (a-b)^n\delta_1 + (a+b)^n\delta_2 = \frac{(a-b)^n+(a+b)^n}{2} + \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}p$

Exemplo 4.14. *Vamos mostrar que $u^n = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Se $u = 0$ é imediato a afirmação. Por outro lado, tomemos $u^n = 0$, logo $\alpha^n\delta_1 + \beta^n\delta_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n = 0 \\ \beta^n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$*

Exemplo 4.15. *Vamos mostrar que $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = \beta$.*
Seja $u = a + bp$, então $u = (a-b)\delta_1 + (a+b)\delta_2 = \alpha\delta_1 + \beta\delta_2$, sabendo que $u \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow b = 0$, e como $\alpha = a - b$ e $\beta = a + b$, logo $\alpha = \beta = a$.

Exemplo 4.16. *Na base Γ temos que $u \in B_1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ e $u \in B_2 \Leftrightarrow \beta = 0$*

Exemplo 4.17. *Utilizando a Base Γ vamos calcular:*

$(1+p)^n = (1-1)^n\delta_1 + (1+1)^n\delta_2 = 2^n\delta_2 = 2^{n-1}(1+p)$

$(a+ap)^n = a^n(1+p)^n = 2^{n-1}a^n(1+p)$

$(1-p)^n = (1+1)^n\delta_1 + (1-1)^n\delta_2 = 2^n\delta_1 = 2^{n-1}(1-p)$.

Exemplo 4.18. *Vamos usar a base Γ para encontrar $u \in \mathbb{P}$ tal que $u^n = 1$.*
Sabemos que $u^n = \alpha^n\delta_1 + \beta^n\delta_2 = 1 = 1\delta_1 + 1\delta_2$, assim $\begin{cases} \alpha^n = 1 \\ \beta^n = 1 \end{cases}$. Se n é par, teremos que $\alpha = \pm 1$ e $\beta = \pm 1$, logo as respostas são os pares $(1,1)$; $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ que são respectivamente $\{1, p, -p, -1\}$. Caso n ímpar, então $\alpha = \beta = 1$ portanto $u = 1$.

Exemplo 4.19. *Vamos resolver agora equações usando a base Γ*

a) $u^2 - 4u = 0$. Sabemos que $u = \alpha\delta_1 + \beta\delta_2$, e $4 = 4\delta_1 + 4\delta_2$, logo $u^2 = \alpha^2\delta_1 + \beta^2\delta_2$ e $4u = 4\alpha\delta_1 + 4\beta\delta_2$, logo $u^2 - 4u = (\alpha^2 - 4\alpha)\delta_1 + (\beta^2 - 4\beta)\delta_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 0$ e $\beta^2 - 4\beta = 0$, assim $\alpha = 0$ ou $\alpha = 4$ e $\beta = 0$ ou $\beta = 4$ assim as soluçõs em $\{\delta_1, \delta_2\}$, são $(0,0); (0,4); (4,0)$ e $(4,4)$ que na base $\{1, p\}$ são os números $\{0, 2+2p, 2-2p, 4\}$.

b) $u^2 + (p)u + (-1+p) = 0$. Para simplificar a escrita vamos usar pares ordenados, mas sempre lembrando que a base é Γ. $u = (\alpha, \beta)$; $p = (-1, 1)$ e $-1 + p = (-2, 0)$, logo $u^2 + (p)u + (-1+p) = (\alpha^2, \beta^2) + (-\alpha, \beta) + (-2, 0) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha^2 - \alpha - 2, \beta^2 + \beta + 0) = (0,0)$, portanto $\alpha = 2$ ou $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ e $\beta = -1$, assim as soluçõs em $\{\delta_1, \delta_2\}$, são $(2,0); (2,-1); (-1,0)$ e $(-1,-1)$ que na base $\{1, p\}$ são os números $\{1-p, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}p, \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}p, -1\}$.

c) $z^2 + (2+p)z + (-1+5p) = 0$. fazendo $u = (\alpha, \beta)$, $2 + p = (1,3)$, $-1 + 5p = (-6, 4)$, logo $z^2 + (2+p)z + (-1+5p) = (\alpha^2, \beta^2) + (\alpha, 3\beta) + (-6, 4) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha^2 + \alpha - 6, \beta^2 + 3\beta + 4) = (0,0)$. Ora $\beta^2 + 3\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow \Delta_2 = 3^2 - 4.4$. como $9 < |-16|$, não possui raiz.

Equação do 2° grau na base Γ

Vamos retornar a equações do segundo grau $u^2-\gamma u+\omega=0$, onde $\gamma,\omega\in\mathbb{P}$, no entanto tomemos todos na base $\{\delta_1,\delta_2\}$, assim $u=(\alpha,\beta)$ e $\gamma=(\alpha_1,\beta_1)$ e $\omega=(\alpha_2,\beta_2)$, logo $u^2-\gamma u+\omega=(\alpha^2,\beta^2)+(\alpha_1\alpha,\beta_1\beta)+(\alpha_2,\beta_2)=(0,0)\Leftrightarrow(\alpha^2+\alpha_1\alpha+\alpha_2,\beta^2+\beta_1\beta+\beta_2)=(0,0)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^2+\alpha_1\alpha+\alpha_2=0\\ \beta^2+\beta_1\beta+\beta_2=0\end{cases}$, onde $\Delta_1=\alpha_1^2-4\alpha_2$ e $\Delta_2=\beta_1^2-4\beta_2$. Vamos separar os casos.

$$\begin{cases}\Delta_1>0\ e\ \Delta_2>0, & existe\ 4\ raizes\ perplexas\ distintas,\\ \Delta_1<0\ ou\ \Delta_2<0, & nao\ existe\ raiz\ perplexa,\\ \Delta_1=0\ ou\ \Delta_2=0, & 2\ raizes\ perplexas\ distintas,\\ \Delta_1=\Delta_2=0, & existe\ uma\ raiz\ perplexa.\end{cases}$$

Teorema 4.3. *Se $h(u)=\sum_{i=0}^n a_iu^i$ e a_n é invertível então o número de raízes de $h(u)$ é menor ou igual a n^2*

Demonstração. Seja $a_n=a_{1n}\delta_1+a_{2n}\delta_2=(a_{1n},a_{2n})$ e $u=r\delta_1+s\delta_2=(r,s)$. Temos que $a_{1n}.a_{2n}\neq 0$, pois a_n é invertível, $u^i=(r^i,s^i)$, logo $h(u)=\sum_{i=0}^n a_iu^i=\sum_{i=0}^n(a_{1i}r^i,a_{2i}s^i)$, portanto $h(u)=(\sum_{i=0}^n a_{1i}r^i,\sum_{i=0}^n a_{2i}s^i)$, sejam $f(r)=\sum_{i=0}^n a_{1i}r^i$ e $g(s)=\sum_{i=0}^n a_{2i}s^i$, como o total de raizes de $h(u)$ é dado por $card(R_h)=card(R_f\times R_g)=card(R_f).card(R_g)$, como a_{1n} e a_{2n} são não nulos os polinômios f e g tem grau n portanto não são identicamente nulos . O total de raízes de $h(u)$ é dado por $card(R_h)=card(R_f).card(R_g)$ como $card(R_f)\leq n$ e $card(R_g)\leq n$, concluímos que $card(R_h)\leq n^2$. □

Teorema 4.4. *Se $h(u)=(u-\alpha_1)...(u-\alpha_q)$ um polinômio com q fatores perplexos onde $\alpha_i-\alpha_j$ é invertível, para $i,j=\{1,...,q\}$, então $h(u)$ possui q^2 raizes perplexas.*

Demonstração. A demonstração será inspirada na resolução de equações do 2° grau na base $\{\delta_1,\delta_2\}$. Primeiramente vamos mostrar que não é possivel ter dois fatores iguais, caso contrário teriamos $u-\alpha_i=u-\alpha_j\Leftrightarrow\alpha_i-\alpha_j=0$, logo $\alpha_i-\alpha_j$ é singular e portanto não invertível. Façamos $\alpha_i=(\alpha_{1i},\alpha_{2i})$, para $i=1,...,q$ e $u=(\alpha,\beta)$, onde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, seja $u-\alpha_i=(\alpha-\alpha_{1i},\beta-\alpha_{2i})$, logo $h(u)=(u-\alpha_1)...(u-\alpha_q)=(\prod_{i=1}^q(\alpha-\alpha_{1i}),\prod_{i=1}^q(\beta-\alpha_{2i}))$, onde podemos considerar $f(\alpha)=\prod_{i=1}^q(\alpha-\alpha_{1i})$ e $g(\beta)=\prod_{i=1}^q(\beta-\alpha_{2i})$, onde o número total de raízes é $card(R(h))=card(R_f\times R_g)=q.q=q^2$. □

Corolário 4.2. *Se $h(u)=(u-\alpha_1)...(u-\alpha_q)$ um polinômio com q fatores perplexos onde $\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_q$ são números reais então $h(u)$ possui q^2 raizes perplexas.*

Demonstração. Basta ver que $\alpha_i-\alpha_j\neq 0$ são invertivéis. □

4.7.4 Forma Exponencial

Na seção 2.6, assumimos a forma $z=re^{\theta i}$ para um número complexo, façamos de maneira análoga a exponencial perplexa, sabendo que as funções sinh e cosh definidas no capítulo 3, possuem a propriedade descritas em 3.1.1, faremos

$$e^{\theta p} = \cosh\theta + p\sinh\theta \tag{4.21}$$

Dada a exponencial perplexa, concluímos que $\eta(u) = \cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$, e da definição das funções hiperbólicas $\cosh\theta > senh\theta$, para todo θ real, concluimos que a exponencial perplexa é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em H_1.

Lema 4.1. $e^{(\theta'+\theta)p} = e^{\theta' p}e^{\theta p}$

Demonstração. $e^{(\theta'+\theta)p} = \cosh(\theta'+\theta) + p\sinh(\theta'+\theta)$
$e^{(\theta'+\theta)p} = \cosh\theta'\cosh\theta + \sinh\theta'\sinh\theta + (\sinh\theta'\cosh\theta + \sinh\theta\cosh\theta')p$
$e^{(\theta'+\theta)p} = \cosh\theta[\cosh\theta' + \sinh\theta' p] + \sinh\theta'\sinh\theta p^2 + \sinh\theta\cosh\theta' p$
$e^{(\theta'+\theta)p} = \cosh\theta[\cosh\theta' + \sinh\theta' p] + [\sinh\theta' p + \cosh\theta']sinh\theta p$
$e^{(\theta'+\theta)p} = [\cosh\theta' + \sinh\theta' p][\cosh\theta + \sinh\theta p]$
$e^{(\theta'+\theta)p} = e^{\theta' p}e^{\theta p}$

□

Corolário 4.3. $(e^{\theta p})^n = e^{n\theta p}$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n.
Para n=1 é trivialmente verdadeira. vamos supor válido para um natural n>1.
Então $(e^{\theta p})^{n+1} = (e^{\theta p})^n (e^{\theta p})^1 = e^{n\theta p}.e^{\theta p} = e^{(n+1)\theta p}$ □

Corolário 4.4. $(e^{\theta p})^{-1} = e^{-\theta p}$

Demonstração. Sabendo que $e^{-\theta p} = \cosh(-\theta) + p\sinh(-\theta) = \cosh\theta - p\sinh\theta$. Assim façamos $(\cosh\theta - p\sinh\theta).(\cosh\theta + p\sinh\theta) = \cosh^2\theta - p^2\sinh^2\theta = 1$ Logo, o inverso multiplicativo de $e^{\theta p} = \cosh\theta + p\sinh\theta$ é $(e^{\theta p})^{-1} = \cosh\theta - p\sinh\theta = e^{-\theta p}$ □

Corolário 4.5. $(e^{\frac{\theta}{n}p})^n = e^{\theta p}$

Para Sobczyk, a escrita de um número perplexo na forma exponencial, segue a mesma estrutura algébrica da forma polar, desde modo, para $\eta(z) = 1$, temos que, $z \in U$, ou seja, $z \in H_1 \cup H_p \cup H_{-1} \cup H_{-p}$, assim.

$$z \in H_1 \cup H_{-1} \Longleftrightarrow z = \pm e^{\theta p} \tag{4.22}$$

$$z \in H_p \cup H_{-p} \Longleftrightarrow z = \pm p e^{\theta p} \tag{4.23}$$

Deixamos as demonstrações sobre a forma exponencial dos números perplexos, com $\|z\| \neq 0$, para o capítulo 6.

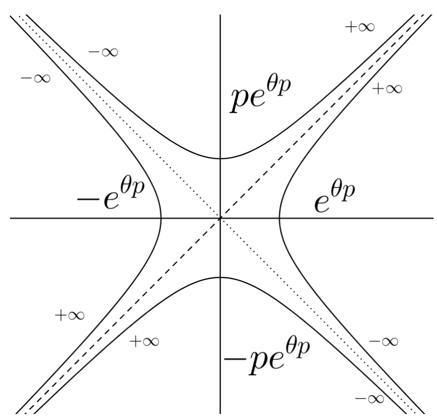

Figura 4.6: *Os quatros ramos das hipérboles unitárias conjugadas, nomeadas por* $ke^{\theta p}$, *onde* $k \in K = \{1, -1, p, -p\}$, $\theta \in \mathbb{R}$ *com a variação de* $-\infty$ *a* $+\infty$

Capítulo 5

Estruturas Algébricas

Estes capítulo é necessário para caracterizarmos os números perplexos como uma estrutura algébrica, diferente dos números complexos. Para isso discutiremos os conceitos de Grupo, Anel e Corpo, os resulados importantes para a caractrizaçao dos números serão destacados. As proposições relativas as estruturas algebricas contidadas neste capítulo são partes de um curso de graduação de Álgebra, portanto indicamos o livro de GONÇALVES, Adilson, Introduçao à álgebra, Instituto de matemática pura e aplicada, 1979. Rio de janeiro

5.1 Grupo

Definição 5.1. *Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação $*$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
(i) $a * (b * c) = (a * b) * c \ \forall a, b, c \in G$.
(ii) Existe um único elemento neutro $e \in G$ *tal que* $e * a = a * e = a \ \forall \ a \in G$.
(iii) Para cada $a \in G$ *existe um único inverso em relação* $a *$ *onde* $a^{-1} = b \in G$ *tal que* $a * b = b * a = e$.

Se $n \in \mathbb{Z}$, defini-se a^n, como $a * a * a * ... * a$(n vezes), para $n \geq 0$. Caso contrário definimos $(a^{-1})^{-n} = a^n$

Definição 5.2. *Um grupo* $\mathbf{G} = (G, *)$ *é comutativo ou abeliano se* $a*b = b*a \ \forall \, a, \, b \in \mathbf{G}$.

Exemplo 5.1. *Grupo Aditivo dos complexos: O conjunto* $\mathbb{C}$ *é um grupo abeliano em relação à adição definida em 2.2 e é denotado por* $(\mathbb{C}, +)$.

Exemplo 5.2. *Grupo multiplicativo dos complexos: O conjunto* $\mathbb{C}$ *é um grupo abeliano em relação à multiplicação definida em 2.3 e é denotado por* $(\mathbb{C}, .)$.

Exemplo 5.3. *Seja* $\mathbf{A} = A_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *então* $\mathbf{A}$ *é um grupo abeliano em relação à adição de matrizes* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a_1 & b + b_1 \\ c + c_1 & d + d_1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 5.4. *Seja $G_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes invertíveis então $G_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é um grupo não abeliano em relação à multiplicação:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.a_1 + bc_1 & a_1b_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix}$$

.

Exemplo 5.5. *Grupo Aditivo dos perplexos: O conjunto $\mathbb{P}$ é um grupo abeliano em relação à adição proposição 4.1 e é denotado por $(\mathbb{P}, +)$.*

Proposição 5.1. *$(U, \odot)$ é um grupo.*

Demonstração.
U é não vázio, pois $1 \in U$. Vamos mostrar que a operação $\odot$ é fechada em U. De fato dados u e v em U, temos que $\rho(u \odot v) = \rho(u).\rho(v) = 1.1 = 1$ e deste modo $u.v \in U$.
i) Dados u,v e $w \in U$, então $(u.v).w \underbrace{=}_{M1} u.(v.w)$
ii) $1 \in U$, pois $\rho(1) = 1$, logo existe elemento neutro em U.
iii) Seja $u \in U$, logo $\rho(u) = 1$, assim u é invertível, como $\rho(u^{-1}) = (\rho(u))^{-1} = 1$, temos que $u^{-1} \in U$, tal que $u.u^{-1} = 1$.
Portanto $(U, \odot)$ é um grupo. □

5.1.1 Subgrupo

Agora dada um grupo $\mathbf{G} = (G, *)$, consideremos um subconjunto H não-vazio de G, e passemos a seguinte definição.

Definição 5.3. *Seja $(G, \circledast)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se:*
i) Se a , b de H então $a \circledast b$ está em H
ii) $(H, \circledast)$ é um grupo.

Proposição 5.2. *Para que uma parte não vazia H de G seja um subgrupo do grupo $(G, \circledast)$, é necessário e suficiente que $a \circledast b'$ seja um elemento de H sempre que a e $b \in H$.*

Proposição 5.3. *O conjunto H_1 é um subgrupo de $(U, \odot)$*

Demonstração. H_1 é não vazio, pois $1 \in H_1$, Sejam $u = e^{\theta p}$ e $v = e^{\theta' p}$, então $u.v = e^{(\theta + \theta')p} \in H_1$. Sabendo que $v^{-1} = e^{-\theta' p}$, temos que $u.v^{-1} = e^{(\theta - \theta')p} \in H_1$, logo H_1 é um subgrupo. □

Consideremos o subconjunto não vazio K de U, onde $k \in K$ então $k^2 = 1$, logo $K = \{-1, 1, p, -p\}$.

$\odot$	1	-1	p	$-p$
1	1	-1	p	$-p$
-1	-1	1	$-p$	p
p	p	$-p$	1	-1
$-p$	$-p$	p	-1	1

Tabela 5.1: Tabela de $\odot$ em K

Proposição 5.4. *$(K, \odot)$ é um subgrupo de U.*

Demonstração. A demonstração será feita através da tabela 5.1 de $\odot$ em K.

Ela mostra que a operação $\odot$ é fechada em K, e que todo elemento de K possui inverso em K, assim K é um subgrupo de $(U, \odot)$. □

Seja $(\mathbb{R}, +)$ o grupo aditivo denotado por $\mathbb{R}$. Consideremos o conjunto produto cartesiano $\mathbb{R} \times K = \{(\theta, k);\ \theta\ \in \mathbb{R}\ \ e\, k \in K\}$ e tomemos a operação de adição da seguinte forma: $Seja\ \ \theta_k \in \mathbb{R} \times K\ e\, \theta'_{k'}\ \in \mathbb{R} \times K$ então

$$\theta_k + \theta'_{k'} = (\theta + \theta', kk') \tag{5.1}$$

Proposição 5.5. *$(\mathbb{R} \times K, +)$ é um grupo.*

Demonstração.
Sejam θ_k, $\theta'{}_{k'}$ e $\theta''{}_{k''}$ elementos de $\mathbb{R} \times K$ então $(\theta_k + \theta'{}_{k'}) + \theta''{}_{k''} = (\theta + \theta', kk') + (\theta'', k'') = ((\theta + \theta') + \theta'', (kk')k'') = (\theta + (\theta' + \theta''), k(k'k'')) = (\theta, k) + (\theta' + \theta'', k'k'') = \theta_k + (\theta'{}_{k'} + \theta''{}_{k''})$
Dado $0_1 \in \mathbb{R} \times K$, é o elemento neutro, pois temos que $\theta_k + 0_1 = (\theta + 0, k.1) = (\theta, k) = \theta_k$
$(-\theta)_k = (-\theta, k)$ é o inverso aditivo em $\mathbb{R} \times K$, pois $\theta_k + (-\theta_k) = (\theta + (-\theta), kk) = (0, 1)$, portanto $\mathbb{R} \times K$ é um grupo aditivo. □

Exemplo 5.6. *Seja $A' = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}\ a.b \neq 0\}$ um subconjunto de $A_{2\times 2}(\mathbb{R})$ então $(A', .)$ é um subgrupo de $(G, .)$.*

5.1.2 Homomorfismo de grupos

Definição 5.4. *Uma aplicação de $f : G \to J$, onde $(G, \circledast)$ e $(J, .)$ são grupos, e para quaisquer x, y de G temos $f(x \circledast y) = f(x).f(y)$ recebe o nome de homomorfismo do grupo $(G, \circledast)$ no grupo $(J, .)$*

.

Exemplo 5.7. *Seja $\Phi : \mathbb{C} \to A_{2\times 2}$, onde $a+bi \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, então é um homomorfismo, entre os grupos aditivos $\mathbb{C}$ e A*

De fato, sejam $z, w \in \mathbb{C}$, então $z = x + yi$ e $w = r + si$, logo $z + w = (x + r) + (y + s)i$, logo $\Phi(z + w) = \begin{pmatrix} x + r & y + s \\ -y - s & x + r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s \\ -s & r \end{pmatrix} = \Phi(z) + \Phi(w)$

Exemplo 5.8. *Seja $\psi : \mathbb{C} - \{0\} \to G_{2\times 2}$, onde $a + bi \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, então é um homomorfismo, entre os grupos multiplicativos $\mathbb{C} - \{0\}$ e $G_{2\times 2}$*

De fato, sejam $z, w \in \mathbb{C}$, então $z = x + yi$ e $w = r + si$, logo $z.w = (xr - ys) + (xs + yr)i$, logo $\psi(z.w) = \begin{pmatrix} xr - ys & xs + yr \\ -xs - yr & xr - ys \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r & s \\ -s & r \end{pmatrix} = \psi(z).\psi(w)$

5.1.3 Núcleo de Homomorfismo

Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos. Se u indica o elemento neutro de J, o seguinte subconjunto de G será chamado de núcleo de f e denotado por $N(f)$.

$$N(f) = \{x \in G;\ f(x) = u\} \tag{5.2}$$

Exemplo 5.9. *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, dado por $f(m) = i^m$ um homomorfismo entre so grupos multiplicativos, o núcleo do homomorfismo é $N(f) = \{x \in G;\ i^m = 1\} = \{0, \pm 4, \pm 8, ...\}$*

Proposição 5.6. *f é injetora se, e somente se, $N(f) = \{e^G\}$.*

5.1.4 Isomorfismo de Grupos

Definição 5.5. *Um homomorfismo de grupos $f : G \to H$ é chamado de um isomorfismo (de grupos) se for, também, uma bijeção. Nesse caso, dizemos que os grupos G e H são isomorfos e denotamos $G \approx H$.*

Proposição 5.7. *Se $f : G \to J$ é um isomorfismo de grupos, então $f^{-1} : J \to G$ também é um isomorfismo de grupos.*

5.2 Anel

Definição 5.6. *Um anel A é um conjunto não vazio com duas operações $(+, .)$ tal que $(A, +)$ é um grupo abeliano e para qualquer $a,\ b,\ c \in A$,*
(i) $(a.b).c = a.(b.c)$;
(ii) $(a + b).c = a.c + b.c$ e $c.(a + b) = c.a + c.b$.

Um anel é commutativo se $a.b = b.a$ para qualqer $a,\ b \in A$ e com identidade se existe uma identidade multiplicativa $1_A \in A$ tal que $1_A.a = a.1_A = a\ \forall\ a \in A$.

Proposição 5.8. *O conjunto $\mathbb{P}$ é um Anel comutativo e com unidade.*

Demonstração. Seja $(\mathbb{P}, +, \odot)$, pela proposição 4.1, temos que $(\mathbb{P}, +)$ é um grupo abeliano, definição 5.1 e 5.2. Pela proposião 4.2, e definição 5.8, $(\mathbb{P}, +, \odot)$ é um anel comutativo com unidade. $\square$

5.2.1 Subanéis

Definição 5.7. *Sejam $(A, +, .)$ um anel e S um subconjunto não vazio de A. Diz-se que S é um subanel de A se:*
i. L é fechado para ambas operações de A.
ii. $(S, +, .)$ também é um anel.

Proposição 5.9. *Seja S um subconjunto não-vazio de um anel $(A, +, .)$. Então S é um subanel de A se, e somente se, para todo a, $b \in S$, temos:*
S1. $a - b \in S$; e
S2. $a.b \in S$.

Exemplo 5.10. *Verifiquemos que* $S = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, *é um subanel de de $A_{2\times2}(\mathbb{R})$*

De fato, $S \neq \phi$ sejam $z, w \in S$, então $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} r & s \\ -s & r \end{pmatrix}$ façamos:

i.) $z - w = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & s \\ -s & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-r & y-s \\ -(y-s) & x-r \end{pmatrix} \in S$

ii.) $z.w = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r & s \\ -s & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr-ys & xs+yr \\ -(xs+yr) & xr-ys \end{pmatrix} \in S$

Exemplo 5.11. *Verifiquemos que* $L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, *é um subanel de de $A_{2\times2}(\mathbb{R})$*

De fato, $L \neq \phi$ sejam $z, w \in S$, então $z = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix}$ façamos:

i.) $z - w = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-r & y-s \\ (y-s) & x-r \end{pmatrix} \in L$

ii.) $z.w = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr+ys & xs+yr \\ xs+yr & xr+ys \end{pmatrix} \in S$

Definição 5.8. *Seja A um anel comutativo com unidade. Se para esse anel vale: Para a,b $\in A$ $a.b = 0_A$ só é possivel para $a = 0_A$ ou $b = 0_A$ então dizemos que A é um anel de integridade.*

Caso $a.b = 0_A$ para algum par de elementos $a, b \neq 0_A$ diz-se que a e b são divisors próprios de zero do anel.

5.2.2 Corpo

Definição 5.9. *Um corpo é um anel comutativo com identidade no qual cada elemento a diferente do elemento neutro da adição tem um inverso multiplicativo* a^{-1} *, tal que* $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$.

Exemplo 5.12. *Os anéis* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *são corpos*

Proposição 5.10. *Todo corpo é um anel de integridade*

Exemplo 5.13. *Do teorema 4.1 o anel comutativo com unidade* $\mathbb{P}$ *munidos das operações* $(+, .)$ *não é um anel de integridade, logo não é corpo.*

Definição 5.10. *Seja* $(A, +, .)$ *um anel. Um subconjunto não-vazio* I, $I \subset A$, *é chamado de um ideal de* A *se satisfaz as seguintes propriedades:*
I1. Se a, $b \in I$, *então* $a + b \in I$;
I2. Se $a \in A$ *e* $b \in I$, *então* $a.b \in I$.

Exemplo 5.14. *Seja* $(\mathbb{P}, +, .)$ *um anel comutativo com unidade. Então* $B_1 \subset \mathbb{P}$, *e* $B_2 \subset \mathbb{P}$ *são ideais de* $\mathbb{P}$.

Vamos mostrar que B_1 é um ideal, ou seja, dados u, $v \in B_1$, então $u + v \in B_1$ e $a \in \mathbb{P}$ e $u \in b_1$, então $a.u \in B_1$. Tomemos $u = \alpha\delta_2 = (0, \alpha)$ e $v = \beta\delta_2 = (0, \beta)$, deste modo:
$i.)$ $(u + v) = (0, \alpha) + (0, \beta) = (0, \alpha + \beta) \in B_1$
$ii.)$ Seja $a = x\delta_1 + y\delta_2 = (x, y)$, então $a.u = (x0, y.\alpha) = (0, y\alpha) \in B_1$
Para mostrar que B_2 é um ideal procede-se analogamente.

5.2.3 Operações com Ideais

Interseção

Se I e J são Ideais em A, então $I \bigcap J$ tabém é um ideal em A.

Adição

Sejam I e J ideais em um anel A. A soma desses ideais é osubconjunto de A, indicado por I+J, e assim definido:

$$I + J = \{x + y / x \in I \, e \, y \in J\} \tag{5.3}$$

mostrasse que $I + J$ também é um ideal.

5.2.4 Ideais Maximais

Definição 5.11 (Ideal Maximal). *Um ideal* $\mathbf{M}$ *de* A *é chamado maximal se é ideal próprio de* A*(isto é,* $\mathbf{M} \subsetneqq A$ *e* $\mathbf{M}$ *não está contido propriamente em nenhum outro ideal próprio de* A*, ou seja, os únicos ideais de* A *contendo* $\mathbf{M}$ *são* $\mathbf{M}$ *e* A*. Em outras palavras, um ideal* $\mathbf{M}$ *de* A *é maximal se*
i. $\mathbf{M} \subsetneqq A$ *(ideal próprio)*
ii. Se I *é um ideal de* A*,* $\mathbf{M} \subset I \subset A$*, então* $I = \mathbf{M}$ *ou* $I = A$*.*

Proposição 5.11. *Seja* $(\mathbb{P}, +, .)$ *um anel comutativo com unidade* B_1 *e* B_2 *são os únicos ideais maximais de* $\mathbb{P}$

Demonstração. Vamos tomar J um ideal de $\mathbb{P}$ tal que $B_1 \subset J \subset \mathbb{P}$ e $J \neq B_1$. Temos assim duas possibilidades. Em J existe um elemento invertível w, logo $w^{-1} \in \mathbb{P}$ e $w.w^{-1} = 1 \in J$, ou seja $J = \mathbb{P}$. Caso contrário, existe $w_0 \in J \cap B_2$ e $w_0 \neq 0$, $w_0 = a\delta_1 \in J$, sabendo que $\delta_2 \in J$, tomemos $z \in \mathbb{P}$, logo, $z = \underbrace{\alpha\delta_1}_{\in J} + \underbrace{\beta\delta_2}_{\in J}$, assim $z \in J$ então $\mathbb{P} = J$. portanto B_1 é um ideal maximal. Para B_2 é análogo. Façamos agora a unicidade, para tanto, tomemos I um ideal maximal diferente de B_1 e B_2, logo existe $u_0 \in I$, tal que $u_0 \notin B_1 \cup B_2$, ou seja, u_0 é invertivel e e deste modo $u_0^{-1} \in \mathbb{P}$ e portanto $u_0.u_0^{-1} = 1 \in I$ assim $I = \mathbb{P}$. absurdo, pois I é um ideal maximal. Logo os únicos ideias maximais são B_1 e B_2. □

5.2.5 Anéis Quocientes

Seja I um ideal em um anel comutativo A, segue que I é um subanel de A e, portanto um subgrupo do grupo aditivo A, logo tem sentido considerearmos o grupo A/I cujos elementos são as classes laterais $a + I = \{a + x,\ x \in I\}$ e cuja adição é definida por $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ $(a,\ b\ \in A)$, sabendo que o elemento neutro de A/I é a classe $0 + I$ e que o elemento oposto de uma classe $a + I$ é a classe $-a + I$. Definindo-se a multplicação em A/I, 5.2.5 o grupo quociente A/I tornasse um anel.

$$(a + I)(b + I) = (ab) + I \tag{5.4}$$

Segue que $(A/I, +, .)$ é um anel, chamado de anel quociente, ou anel das classes residuais módulo I, cujo zero é dado por $0 = \{0 + I\}$ e cuja unidade é dada por $1 = \{1 + I\}$.

Exemplo 5.15. *Consideremos o anel quociente* $\mathbb{P}/B_1$ *e seja* $u \in \mathbb{P}$ *então,* $v \in u + B_1$ *se, e somente se,* $v = u + t(1 + p)$ *onde* $t \in \mathbb{R}$*, ou seja, os elementos de* $\mathbb{P}/B_1$ *são retas paralelas a* B_1

Proposição 5.12. *Sejam* A *um anel comutativo com unidade e* J *um ideal em* A*. então* J *é um ideal maximal se, e somente se,* A/J *é um corpo.*

Teorema 5.1. *$\mathbb{P}/B_1$ e $\mathbb{P}/B_2$ são corpos*

Demonstração. Sabendo que B_1 é maximal então $\mathbb{P}/B_1$ é um corpo, como B_2 é um ideal maximal então $\mathbb{P}/B_2$ é um corpo. $\square$

5.2.6 Homomorfismo de Anéis

Definição 5.12. *Dados dois anéis A e B, uma função $f : A \to B$ é chamada de um homomorfismo (de anéis) se para todo a, $b \in A$, vale:*
H1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
H2. $f(a.b) = f(a).f(b)$;

Definição 5.13. *Um homomorfismo $f : A \to B$ é chamado de um isomorfismo se for, também, uma bijeção. Nesse caso, dizemos que A e B são isomorfos e denotamos $A \approx B$.*

Lembre que dois conjuntos A e B finitos têm o mesmo número de elementos, ou seja, eles têm a mesma cardinalidade, se existe uma bijeção entre A e B. Assim, se A e B são isomorfos, então eles têm exatamente o mesmo número de elementos. Isso acontece porque se $f : A \to B$ é um isomorfismo, então, em particular, f é uma bijeção entre A e B.

Exemplo 5.16. *A função $T : \mathbb{C} \to \mathcal{M}*_{2\times2}(\mathbb{R})$, onde $a + bi \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, é um isomorfismo, entre $\mathbb{C}$ e $\mathcal{M}*_{2\times2}(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes anti-simétricas e portanto o conjunto $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ é um corpo.*

Para [22], os números perplexos assim como no caso complexo admite a forma matricial. Façamos então a analogia para obtermos uma representação matricial de um número perplexo qualquer, façamos primeiramente uma análise sobre o determinate de $T(u)$.
$det(T(u)) = det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = |u|^2$.
Seja $R : \mathbb{P} \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, onde $a+bp \to \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, vamos mostrar que R é um isomorfismo entre $\mathbb{P}$ e $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 2x2 simetricas.

Teorema 5.2. *$R : \mathbb{P} \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, onde $a + bp \to \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ é um isomorfismo.*

Demonstração.
i) R é um homomorfismo.
Seja u e v em $\mathbb{P}$, segue que:

a) $R(u+v) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = R(u) + R(v)$

b) $R(u.v) = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = R(u).R(v)$

Portanto R é um homomorfismo de anéis.

ii) R é uma bijeção

a) Seja u e v em $\mathbb{P}$ tal que $R(u) = R(v) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = c \, e \, b = d$

Consequentemente $u = v$ e assim R é injetora.

b) $R(\mathbb{P}) = \mathcal{M}[2]$, e assim R é sobrejetora.

Do exposto, R é um isomorfismo. $\square$

Um resultado imediato do teorema 5.2 é a caracterização de $\mathcal{M}[2]$, como um anel comutativo com unidade.

Da forma como foi definida R, temos que $det(R(u)) = det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 - b^2 = \eta(u)$

Definição 5.14. *O núcleo de um homomorfismo de anéis $f : A \to B$ é o conjunto $N(f) = \{x \in A | \, f(x) = 0_B\}$, onde 0_B é o elemento neutro do anel B.*

Teorema 5.3 (Homomorfismo de Anéis)**.** *Sejam A e A' anéis e $f : A \to A'$ um homomorfismo Então,*

(1) $Im(f) = \{f(a); \, a \in A\}$ é um subanel de A'.

(2) $N(f) = \{a \in A; \, f(a) = 0\}$ é um ideal de A, e f é injetiva $\Leftrightarrow N(f) = \{0\}$.

(3) Os anéis $A/N(f)$ e $Im(f)$ são isormorfos.

Teorema 5.4 (Isomomorfismo com $\mathbb{R}$)**.** *$\mathbb{P}/B_1$ e $\mathbb{P}/B_2$ são isomorfos a $\mathbb{R}$*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que f definida por $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(a+bp) = a+b$ é um homomorfismo sobrejetor de anéis, para isso tomemos u, v elementos de $\mathbb{P}$, então façamos $f(u+v) = a+c+(b+d) = (a+b)+(c+d) = f(u)+f(v)$
do mesmo modo façamos $f(uv) = ac+bd+(ad+bc) = ac+ad+bd = bc = a(c+d)+b(c+d) = (a+b)(c+d) = f(u)f(v)$, portanto f é um homomorfismo de anéis. Como $f(\mathbb{P}) = \mathbb{R}$, visto que para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $u \in \mathbb{P}$ tal que $f(u) = y$, basta fazer $u = (b+y, b)$. Como o núcleo desse homomorfismo é B_2, segue que $\mathbb{P}/B_2$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.
Seja $g : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$, dada por $g(u) = a-b$, observe que $g = foh$, onde $h(u) = (a, -b)$ é um homomorfismo, como a cosmposta de um homomorfismo é um homomorfismo segue que g é um homomorfismo, observe que g é um homomorfismo sobrejetor e que o núcleo de g é B_1, portanto $\mathbb{P}/B_1$ é isomorfo a $\mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 5.17. *Consideremos $\mathcal{P} = (\mathbb{R}^2, +, *)$, onde, dados $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ temos que $u + v = (a + c, b + d)$ e $u * v = (ac, bd)$. É fácil ver que $\mathcal{P}$ é um anel comutativo com unidade (1,1).*

Consideremos $f : \mathbb{P} \to \mathcal{P}$, tal que $f(u) = (\alpha, \beta)$, para $u = \alpha\delta_1 + \beta\delta_2$ em $\mathbb{P}$, onde $\{(\delta_1, \delta_2)\}$ é a Base Idempotente Γ. Afirmamos que f é um isomorfismo entre $\mathbb{P}$ e $\mathcal{P}$.
De fato, sejam $u = \alpha_1\delta_1 + \beta_1\delta_2$, $v = \alpha_2\delta_1 + \beta_2\delta_2$ em $\mathbb{P}$, assim $u + v = (\alpha_1 + \alpha_2)\delta_1 + (\beta_1 + \beta_2)\delta_2$ e $u.v = (\alpha_1.\alpha_2)\delta_1 + (\beta_1.\beta_2)\delta_2$, logo $f(u+v) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = f(u) + f(v)$ e $f(u.v) = (\alpha_1.\alpha_2, \beta_1.\beta_2) = (\alpha_1, \beta_1).(\alpha_2, \beta_2) = f(u).f(v)$. f é um homomorfismo.
i) f é injetora. De fato, se $f(u) = f(v)$ então $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$, logo $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ e portanto $u = v$.
ii) f é sobrejetora. Dado $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ tomemos $u = \alpha\delta_1 + \beta\delta_2$ em $\mathbb{P}$, e deste modo $f(u) = (\alpha, \beta)$, logo $Im(f) = \mathcal{P}$.
Deste modo concluímos que $\mathbb{P} \cong \mathcal{P}$, assim poderiamos ter definido $\mathcal{P}$ como o conjunto dos números perplexos, no entanto definindo-os deste modo perderiamos a análogia dos números perplexos com os números complexos.

Capítulo 6

Forma Polar dos Números Perplexos

Seja $U = \{u \in \mathbb{P},\ \rho(u) = 1\}$, a curva da unidade, que graficamente é representado pelas hipérboles $|a^2 - b^2| = 1$. Relembremos abaixo os conjuntos definidos em 4.5:

$$H_1 = \{u \in U;\ \ a > 0\, e\, a > |b|\}$$
$$H_{-1} = \{u \in U;\ \ a < 0\, e - a > |b|\}$$
$$H_p = \{u \in U;\ \ b > 0\, e\, b > |a|\}$$
$$H_{-p} = \{u \in U;\ \ b < 0\, e\ \ - b > |a|\}$$
$$U = H_1 \cup H_{-1} \cup H_p \cup H_{-p}$$

6.1 Função Ângulo em U

Definamos $\sigma : \mathbb{R} \times K \to U$, onde $\theta_k = (\theta, k) \longrightarrow e^{(\theta_k)} = ke^{\theta p}$

Teorema 6.1. *σ é um isomorfismo de grupos*

Demonstração. i) σ é um homomorfismo de grupo.
De fato, sejam $\theta_k \in \mathbb{R} \times K\, e\, \theta'_{k'} \in \mathbb{R} \times K$ $e^{(\theta_k + \theta'_{k'})} = kk'(e^{(\theta+\theta')p}) = ke^{\theta p}(k'e^{(\theta' p)}) = e^{\theta_k}e^{\theta'_{k'}}$.
ii)σ é uma bijeção.
De fato. $e^{\theta_k} = 1$ se, e somente se, $ke^{\theta p} = 1e^{0p}$ se, e somente se, $\theta_k = (0, 1)$ Logo, $N(\sigma) = (0, 1)$, portanto σ é injetora.
Seja $w \in U$, logo w é da forma $w = ke^{\theta p}$, assim $w = \sigma(\theta, k)$ logo é uma sobrejeção e portanto um isomorfismo. □

Seja $\sigma^{(-1)} : U \to \mathbb{R} \times K$ o isomorfismo inverso de σ, onde $\sigma^{(-1)}(uv) = \sigma^{(-1)}(u) + \sigma^{(-1)}(v)$ e além disso $u = \sigma(\sigma^{(-1)}(u)) = e^{\sigma^{(-1)}(u)}$, para todo u em U.
Tomemos um elemento invertível w de $\mathbb{P}$, assim $w = \rho(w)\frac{w}{\rho(w)}$, com $\frac{w}{\rho(w)} \in U$. Fazendo $e^{\theta_k} = e^{\sigma^{-1}(\frac{w}{\rho(w)})}$, segue que $\frac{w}{\rho(w)} = e^{\sigma^{(-1)}(\frac{w}{\rho(w)})} = e^{\theta_k}$, assim $w = \rho(w)e^{\theta_k}$, ou seja:

$$w = \rho(w)[ke^{\theta p}],\ \ onde\, k = 1, -1, p, -p. \tag{6.1}$$

6.2 Cálculo da Forma Polar de u

Seja $u = a + bp$, e $\rho(u) = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ então:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad a > 0 \; e \; a > |b|, \\ p, & \text{se} \quad b > 0 \; e \; b > |a|, \\ -1, & \text{se} \quad a < 0 \; e \; -a > |b|, \\ -p, & \text{se} \quad b < 0 \; e \; -b > |a|. \end{cases} \tag{6.2}$$

e deste modo $\frac{u}{\rho(u)} = \frac{a}{\rho(u)} + \frac{bp}{\rho(u)} = k\cosh\theta + kp\sinh\theta$ e assim:

$$\frac{a}{\rho(u)} = \begin{cases} \pm\cosh\theta, & \text{se} \quad k = \pm 1, \\ \pm\sinh\theta, & \text{se} \quad k = \pm p \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\frac{b}{\rho(u)} = \begin{cases} \pm\sinh\theta, & \text{se} \quad k = \pm 1, \\ \pm\cosh(\theta), & \text{se} \quad k = \pm p \end{cases} \tag{6.4}$$

Deste modo podemos concluir que:

$$\tanh\theta = \begin{cases} \frac{b}{a}, & \text{se} \quad k = \pm 1, \\ \frac{a}{b}, & \text{se} \quad k = \pm p. \end{cases} \tag{6.5}$$

Deste modo concluimos que: $\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}ln\frac{a+b}{a-b}, & \text{se} \quad k = \pm 1, \\ \frac{1}{2}ln\frac{a+b}{b-a}, & \text{se} \quad k = \pm p. \end{cases}$

6.2.1 Potenciação e Radiciação

Vamos retornar a discurssão da potenciação e radiciação no anel dos números perplexos, no entanto, trataremos agora sob a forma exponencial:
Considere u um número perplexo, tal que $\rho(u) > 0$, de 6.1, segue que a forma exponencial de u é $u = k\rho(u)e^{\theta p}$, portanto $u^n = (k\rho(u)e^{\theta p})^n = k^n[\rho(u)]^n e^{n\theta p}$.
Para a radiciação tomemos $z^n = u$, onde $z \; e \; u$ admitem a forma exponencial, então tomemos $z = k'\rho(z)e^{\alpha p}$ e $u = k\rho(u)e^{\theta p}$, segue que:

$$\begin{aligned} [k'\rho(z)e^{\alpha p}]^n &= k\rho(u)e^{\theta p} \\ k'^n[\rho(z)]^n e^{n\alpha p} &= k\rho(u)e^{\theta p}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Devemos separar os dois casos:
Para n par, temos que $k = 1$ e assim só para este caso teremos solução, num total de 4, visto que $k' = 1, -1, p, -p$ atendem as exigências. logo a solução é $z = k'\sqrt[n]{\rho(u)}e^{\frac{\theta p}{n}}$.
Se n é ímpar, teremos $k' = k$, teremos uma única solução que é $z = k\sqrt[n]{\rho(u)}e^{\frac{\theta p}{n}}$

Capítulo 7

Considerações Finais

O capítulo 4 tratou os Números Perplexos de maneira análoga aos Complexos, façamos então uma tabela comparativa entre as duas estruturas númericas, elencando os principais resultados e propriedades apresentadas ao longo do trabalho. Vamos tomar $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ em $\mathbb{R}^2$ e $r > 0$.

	$\mathbb{C}$	$\mathbb{P}$
unidades especiais	i, tal que $i^2 = -1$	p, tal que $p^2 = 1$
Potências de i e p	$1,\ -1,\ i,\ -i$	$1,\ p$
Forma Algébrica	$u = a + bi$ e $v = c + di$	$u = a + bp$ e $v = c + dp$
$u + v$	$(a + c) + (b + d)i$	$(a + c) + (b + d)p$
$u.v$	$ac - bd + (ad + bc)i$	$ac + bd + (ad + bc)p$
$\frac{u}{v}$	$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}p;\ v \neq 0$	$\frac{ac-bd}{c^2-d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-d^2}p;\ c \neq \pm d$
Estrutura	Corpo	Anel comutativo com unidade
$\|u\| = r$	Círculo	Hipérbole equilátera
Forma Polar	$\lvert u\rvert(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$	$k\rho(u)(\cosh(\theta) + p\sinh(\theta))$

Tabela 7.1: Números Complexos $\times$ Números Perplexos

Ao tratarmos da "norma"perplexa como feito em 4.4.1, verificamos $\|u\|$ não pode ser tratada como uma norma, no que se diz respeito às propriedades, visto existe $u \neq 0$ com $\|u\| = 0$, além de não satisfazer a desigualdade triangular, por outro lado introduzimos a noção relativa a "norma", pois dependendo das coordenadas de um número perplexo teremos: $\|u\| > 0$, $\|u\| = 0$ ou $\|u\| < 0$, aplicações físicas para este fato encontramos em [22] , [9] , [7].
A multiplicação destes números também deve ser prestigiada, já que, existe um aspecto relativo para o resultado da operação: é sempre possivél prever a posição do produto entre

os ramos hiperbólicos, ou entre as bissetrizes, algo muito semelhante a regra dos sinais em $\mathbb{Z}$.

Em se tratando de equações polinômiais, mostramos que não vale o Teorema Fundamental da Álgebra, procuramos controlar a solução das equações apresentando algumas condições de existência para as raízes.

Por fim, o capítulo 4 cumpre o papel de apresentar este conjunto intrigante chamado de números perplexos, sabendo que há muito a ser pesquisado neste conjunto, entretanto uma semente foi plantada em um campo fértil, e que futuramente o conjunto terá mais adeptos e pesquisadores.

Referências Bibliográficas

[1] ASSIS, A. K. T., *Perplex numbers an quartenions.* International Journal of Mathematical Education in Science an Techonology, volume 22, n° 4, pp. 555-562, 1991.

[2] ASSIS, A. K. T., *Números Perplexos.* The Gleb Times- Jornal do Centro Acadêmico do Instituto de Física da UNICAMP, ano 1, n° 2; pp. 11, 1994.

[3] ÁVILA, G. S. de S., *Análise matemática para licenciatura*, 2° Ed; Edgar Blucher, São Paulo 2005.

[4] BONGIOVANNI, V., *As duas Contribuições de Eudoxo de Cnido "a teoria das propores e o mtodo da Exausto"*. UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educação matemática, n° 2, pp. 91-110, 2005.

[5] BOROTA, N.A., FLORES, E., OSLER, T.J., *Spacetime Numbers The Easy Way*, Mathematics and Computer Education, vol. 34, n°. 2, pp. 159-168, 2000.

[6] DOMINGUEZ, H.H.,IEZZI, G., *Álgebra Moderna*, 4° ed. volume único, Atual, São Paulo, 2003.

[7] ERSOY, S., TOSUN, M., *The Euler-Savary Formula for One-Parameter Planar Hyperbolic Motion.* Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences Sakarya University, arXiv:1001.0138v1[math. DG], 2009.

[8] FERNADEZ, C.S., Jr BERNADES, N.C., *Introdução às funções de uma variável complexa.* 2° ed., Instituto de Matemática Pura e Aplica, CNPq, Rio de Janeiro, 2008.

[9] FJELSTAD, P., *Extending relativity via the perplex numbers.* American Journal of Physics, 54:5, pp. 416-422, 1986.

[10] GONÇALVES, A., FIGUEIREDO, L. M., *Álgebra 1.* vol. 3, FAPERJ, Rio de Janeiro, 2005.

[11] GONÇALVES, A., *Introdução à álgebra.* Intituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[12] GOULART, M. C., *Matemática no ensino médio.* 1ª série, 3° Ed. Editora Scipione, São Paulo, 2009.

[13] HEFEZ, A., *Curso de Álgebra*, vol. 1, 2° ed., Instituto de Matemática Pura e Aplica, CNPq, Rio de Janeiro, 1993.

[14] IEZZI, G., *Fundamentos de Matemática Elementar 6: Complexos, Polinômios Equações*, vol. 6, 6° Ed., Atual, São Paulo, 1993.

[15] KARIM, M.R., *Solutions of the Higher-Dregree Reduced Polynomial Equations by Using Unipodal Number*, vol. 2, n° 1, 2012, p. 13 a 21.

[16] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C., *A matemática do Ensino Médo*, vol. 1, 9° ed., IMPA, Rio de janeiro, 2006.

[17] LIMA, E. L., *Análise Real: Função de uma variável.* vol. 1, 10° ed., IMPA, Rio de janeiro, 2010.

[18] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C., *A matemática do Ensino Médo.* vol. 3, 6° ed., IMPA, Rio de janeiro, 2010.

[19] LIMA, E. L., *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2° ed. IMPA, Rio de janeiro, 2012.

LEITHOLD, L., *O Cálculo com Geometria Analítica*, 3° ed. HARBRA ltda, São Paulo, 1994.

[20] ROQUE, T. M., PITOMBEIRA, J. B., *Tópicos de História da Matemática*, 1° ed. IMPA, Rio de janeiro, 2012.

[21] SMOLE, K. S., DINIZ, M. I., *Matemática Ensino Médio.* vol. 1, 6° ed., Editora Saraiva, São Paulo, 2010.

[22] SOBCZYK, G., *The Hyperbolic Number Plane.* The College Mathathematics Journal, n° 26, pp.268-280, 1995.