

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

*Área de Figuras Planas e Teorema de Pick: Uma Abordagem Diferenciada  
para Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental*

Ivana do Monte Rodrigues

MANAUS

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Ivana do Monte Rodrigues

*Área de Figuras Planas e Teorema de Pick: Uma Abordagem Diferenciada  
para Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental*

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

MANAUS

2014

Ficha Catalográfica  
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

Rodrigues, Ivana do Monte

R696a      Área de figuras planas e teorema de Pick: uma abordagem diferenciada para alunos de 6º ano do ensino fundamental / Ivana do Monte Rodrigues. - Manaus, 2014.

61f. il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Amazonas.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

1. Área 2. Integral 3. Teorema de Pick I. Prata, Roberto Antonio Cordeiro (Orient.) II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

CDU 2007 51:373(043.3)

Ivana do Monte Rodrigues

Área de Figuras Planas e Teorema de Pick: Uma Abordagem Diferenciada  
para Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06 de Junho de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata  
Presidente

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral  
Membro

Prof. Dr. Luis Antonio Brasil Kowada  
Membro

# AGRADECIMENTOS

A Deus, por sua luz e força que me acompanharam nesta caminhada.

À Mãe Maria, por sua intercessão incessante em todos os momentos.

Aos meus pais, *in memoriam*, pela dedicação aos 8 filhos e pelos seus ensinamentos transmitidos, mais do que pelas palavras, pelos seus exemplos de vida.

À minha filha Victória que, sem saber, foi a razão pela qual retomei os estudos e me fez novamente almejar um novo crescimento profissional e pessoal.

À minha "grande família", por continuar se mantendo unida e apoiando-se uns aos outros.

Aos grandes amigos e companheiros que me incentivaram nesta empreitada e que sempre acreditaram em minha capacidade, mesmo quando eu duvidava...

Aos colegas de curso, pela animação e companheirismo nas aulas tornando mais agradável a caminhada, não podendo deixar de citar nominalmente: Fábio, Jadir e Ronaldo, companheiros nos almoços dos intervalos de sábado que deixaram muita saudade...

À Ramina, primeira mestre da nossa turma de 2012, por ter, com seu exemplo, me motivado nesta última fase do curso e por sua grande ajuda com o "temido" Latex.

Ao Prof. Dr. Roberto Prata, pela confiança depositada e orientação.

Enfim, a todos os Professores do Curso pela disponibilidade e generosidade em compartilhar seus conhecimentos.

Obrigada!

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem; não é a posse, mas a aquisição; não é a presença, mas o ato de atingir a meta."(Gauss).

# RESUMO

O objetivo principal do Trabalho é apresentar a alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental uma abordagem diferenciada sobre o estudo de áreas de figuras planas e apresentar uma nova forma de realizar a medição de áreas: O Teorema de Pick. A partir de um breve histórico sobre o cálculo de áreas, realizamos a demonstração das áreas das principais figuras planas trabalhadas no ensino fundamental utilizando o conceito de equivalência, e estendemos o estudo para áreas limitadas por curvas abordando o conceito de integral. Em seguida, expomos o Teorema de Pick e sua demonstração e descrevemos a prática desenvolvida com os alunos. A atividade realizada no 2º semestre de 2013 e 1º semestre de 2014 com os alunos voluntários do Clube de Matemática do Colégio Militar de Manaus visou desenvolver uma importante habilidade prevista no PCN [6] (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática): articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva interdisciplinar. Exploramos a dedução das áreas das figuras planas utilizando o TANGRAM, proporcionando o ensino de forma lúdica, participativa e argumentativa. Apresentamos o Teorema de Pick e o aplicamos na medição aproximada das áreas de estados e regiões do Brasil utilizando mapas e papel quadriculado, trabalhando o conceito das escalas e propiciando uma atividade interdisciplinar.

**Palavras-chave:** Área; Integral e Teorema de Pick.

# ABSTRACT

The main objective of the work is to present the students of the 6th year of elementary school a differentiated approach to the study of areas of plane figures and present a new way of performing the measurement areas: Pick 's Theorem. From a brief history about the calculation of areas, we conducted a demonstration of the main areas of plane figures worked in elementary schools using the concept of equivalence, and extend the study to areas bounded by curves approaching the concept of integral. Then we expose Pick 's Theorem and its proof and describe the practice developed with students. The activity carried out in the 2nd half of 2013 and 1st half of 2014 with volunteer students from the Mathematics Club of the Military College of Manaus aimed to develop an important skill expected in PCN [6] (National Curriculum Parameters for Teaching Mathematics): joint scientific knowledge and technology in an interdisciplinary perspective. We explore the deduction of areas of plane figures using Tangram, providing education in a fun, participatory and argumentative manner. Here Pick 's Theorem and apply the approximate measurement of the areas of states and regions of Brazil using maps and graph paper, the concept of working scales and providing an interdisciplinary activity.

**Keywords:** Area; Integral and Pick's Theorem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Estrutura da Dissertação . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>3</b>
2.1	Um Breve Histórico Sobre Cálculo de Áreas . . . . .	3
2.2	O Ensino de Área de Figuras Planas no Ensino Fundamental . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Áreas de Figuras Planas</b>	<b>6</b>
3.1	Polígonos Contíguos ou Adjacentes . . . . .	6
3.2	Soma de Polígonos Contíguos . . . . .	7
3.3	Soma de Polígonos Quaisquer . . . . .	8
3.4	Polígonos Equivalentes e Equicompostos . . . . .	8
3.5	Resultados . . . . .	9
3.6	Área de Superfície Plana . . . . .	15
3.6.1	Área do Retângulo . . . . .	15
3.6.2	Quadrado . . . . .	19
3.6.3	Paralelogramo . . . . .	19
3.6.4	Triângulo . . . . .	20
3.6.5	Trapézio . . . . .	20
3.6.6	Losango . . . . .	21
3.6.7	Polígono Regular . . . . .	21
3.6.8	Círculo . . . . .	22
3.7	Áreas Arbitrárias . . . . .	23
3.7.1	Método da Exaustão . . . . .	23
3.7.2	Área sob Curvas: Cálculo Integral . . . . .	24
3.7.3	Integral de Riemann . . . . .	26
3.8	Calculando a área do Triângulo e do Trapézio através da Integral . . . . .	28
3.8.1	Área do Triângulo . . . . .	28
3.8.2	Área do Trapézio . . . . .	29

<b>4</b>	<b>O Teorema de Pick</b>	<b>31</b>
4.1	Quem foi Pick . . . . .	31
4.2	Teorema de Pick . . . . .	32
4.3	Demonstração do Teorema . . . . .	33
4.3.1	Resultados a serem considerados . . . . .	33
4.3.2	Propriedade do número de Pick: <i>Aditividade</i> . . . . .	34
4.3.3	Teorema de Pick : $A(P) = I + \frac{1}{2}B - 1$ . . . . .	35
4.4	Aplicações . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Atividades Orientadoras de Ensino</b>	<b>40</b>
5.1	Público Alvo e Período de Aplicação . . . . .	40
5.2	Atividade 1: Área de Figuras Planas . . . . .	40
5.3	Atividade 2: Teorema de Pick e o cálculo da Área de Mapas . . . . .	47
5.4	Avaliação da Atividade . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>55</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Lista de Figuras

3.1	Polígonos Contíguos . . . . .	6
3.2	Polígonos não Contíguos . . . . .	7
3.3	Somas A+B . . . . .	7
3.4	Somas C+D . . . . .	8
3.5	Soma de polígonos quaisquer . . . . .	8
3.6	Soma de polígonos quaisquer . . . . .	9
3.7	Caso 1 . . . . .	10
3.8	Caso 2 . . . . .	11
3.9	Caso 3 . . . . .	11
3.10	Equivalência de Paralelogramos . . . . .	12
3.11	Um paralelogramo equivalente a um retângulo . . . . .	12
3.12	Triângulo ABC equivalente ao Paralelogramo BCDE. . . . .	13
3.13	Caso 1. . . . .	14
3.14	Caso 2. . . . .	14
3.15	Superfícies Equivalentes . . . . .	15
3.16	Quadrado Q . . . . .	16
3.17	Caso 1 . . . . .	17
3.18	Caso 2 . . . . .	17
3.19	Extremo inferior e Extremo superior . . . . .	18
3.20	Quadrado de lado $a$ . . . . .	19
3.21	Retângulo de base $b$ e altura $h$ . . . . .	19
3.22	Triângulo de base $b$ e altura $h$ . . . . .	20
3.23	Trapézio $T_{rz}$ de base maior $B$ , base menor $b$ e altura $h$ . . . . .	20
3.24	Losango diagonal maior $D$ e diagonal menor $d$ . . . . .	21
3.25	Polígono Regular . . . . .	21
3.26	Círculo de raio $r$ inscrito num polígono regular de $n$ lados . . . . .	22
3.27	Figura F . . . . .	24
3.28	Exemplo de área sob uma curva . . . . .	25
3.29	Exemplo de área sob a curva por meio de retângulos . . . . .	25
3.30	Soma Inferior de Riemann . . . . .	26
3.31	Soma Superior de Riemann . . . . .	27

3.32	Área do triângulo $T$ . . . . .	28
3.33	Área do Trapézio $T_{pz}$ . . . . .	29
3.34	Área do Trapézio em 3 áreas . . . . .	29
4.1	Georg Alexander Pick . . . . .	31
4.2	Cálculo da área do Polígono aplicando o Teorema de Pick . . . . .	33
4.3	Triângulos Fundamentais e Triângulos não Fundamentais . . . . .	33
4.4	Polígonos $P_1$ e $P_2$ . . . . .	34
4.5	Decomposição de um polígono em $T$ triângulos . . . . .	36
4.6	Soma de ângulos vértice a vértice . . . . .	36
4.7	Lesão causada por doença de pele . . . . .	38
4.8	Desmatamento da Amazônia . . . . .	38
4.9	Lagoa Rodrigo de Freitas . . . . .	39
5.1	Atividade com Tangram . . . . .	41
5.2	Área do Retângulo . . . . .	41
5.3	Área do Quadrado . . . . .	42
5.4	Área do Paralelogramo . . . . .	42
5.5	Área do Triângulo . . . . .	42
5.6	Figuras Equivalentes 1 . . . . .	43
5.7	Área do Trapézio . . . . .	43
5.8	Figuras Equivalentes 2 . . . . .	43
5.9	Área do Losango . . . . .	44
5.10	Exercício . . . . .	45
5.11	$A = R_1 + R_2$ . . . . .	45
5.12	$A = T + R$ . . . . .	46
5.13	Região não poligonal . . . . .	46
5.14	Nós na malha quadriculada . . . . .	47
5.15	Polígonos Simples . . . . .	48
5.16	Polígonos Não Simples . . . . .	48
5.17	Alunos destacando os nós internos e da borda de polígonos . . . . .	49
5.18	Alunos aplicando a fórmula de Pick no cálculo de figuras compostas por polígonos . . . . .	49
5.19	Alunos contornando o mapa utilizando o papel de seda para representá-lo na folha quadriculada . . . . .	50
5.20	Alunos calculando a área do mapa através da fórmula de Pick . . . . .	50
5.21	Mapa representando o estado de São Paulo . . . . .	51
5.22	Modelo da atividade . . . . .	51
5.23	Alunos analisando as áreas dos mapas do estado do Amazonas . . . . .	52
5.24	Cálculo das áreas dos mapas do estado do Amazonas . . . . .	52

5.25	Confirmação e conferências dos resultados encontrados . . . . .	53
5.26	Cálculos realizados pelos alunos . . . . .	53

# Capítulo 1

## Introdução

A ideia para a escolha do tema originou-se do fato de ser um conteúdo do 6º Ano do Ensino Fundamental, série em que atuei nos 13 dos meus 17 anos de atividade em sala de aula na qual pretendi deixar minha contribuição junto a este público tão ávido em aprender e aberto a participar de experiências que lhe são propostas. Trata-se de uma forma de calcular áreas simplesmente contando pontos não sendo necessário, para isso, saber as medidas dos lados dos polígonos envolvidos.

Uma vez que tal tema é abordado nos 6º e 9º Anos do Ensino Fundamental como um conjunto de fórmulas prontas que devem ser memorizadas e aplicadas exaustivamente na resolução de exercícios, apresentamos, em contrapartida, uma aplicação diferenciada para o ensino-aprendizagem de forma a fazer com que as "fórmulas" passem a ter sentido e sejam verificadas através de demonstrações pictóricas, estendendo o estudo não apenas para superfícies poligonais mas para qualquer contorno e apresentando novas formas para o cálculo de áreas que, mesmo não fazendo parte da grade curricular, contribuem para o enriquecimento intelectual e aproximam os alunos para uma parte prática da Matemática que fundamentalmente se desenvolveu como um instrumento a serviço do homem em suas necessidades diárias.

A fim de alcançar os objetivos estabelecidos para promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática propostos pelos PCN [6] que privilegiam o tratamento de situações problema, propomos a prática de uma atividade interdisciplinar envolvendo a Geografia com o uso de mapas e escalas. O uso do quebra-cabeça matemático TANGRAM proporciona a compreensão dos conceitos a partir de algo que lhes dê sentido, conforme ressalta Roque e Carvalho [21].

### 1.1 Estrutura da Dissertação

Além deste capítulo introdutório, este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, nas considerações iniciais, descrevemos um breve histórico sobre o cálculo

de área. No Capítulo 3, demonstramos as fórmulas das áreas de figuras planas mais usuais no Ensino Fundamental e discorremos sobre o cálculo de áreas arbitrárias através do Método da Exaustão e de áreas sob curvas, através do Cálculo Integral, abordando a Integral de Riemann. No Capítulo 4, apresentamos o matemático George Pick e o seu Teorema de Pick, bem como sua demonstração e algumas aplicações. No Capítulo 5, fazemos a exposição das atividades realizadas com os alunos do 6º Ano voluntários do Clube de Matemática do Colégio Militar de Manaus aplicando a Fórmula de Pick no cálculo aproximado de áreas de capitais e regiões do Brasil utilizando mapas e papel quadriculado. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos nossas considerações finais sobre a prática do processo de ensino e aprendizagem do estudo de áreas nas séries do Ensino Fundamental II.

# Capítulo 2

## Considerações Iniciais

"Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, seus progressos foram lentos e suas aplicações limitadas. No entanto, quando essas duas ciências foram unidas, deram uma a outra renovada vitalidade e seguiram rapidamente rumo à perfeição."(Lagrange)

### 2.1 Um Breve Histórico Sobre Cálculo de Áreas

A área está entre os mais antigos conceitos trabalhados em Matemática e na raiz do nascimento da Geometria. Registros históricos são encontrados no Papiro de Rhind (1650 a. C.) onde a geometria aparece como instrumento para resolver situações diárias da vida do homem. A necessidade de determinar a área de uma figura geométrica é bem antiga. Lintz [15] cita que, segundo Heródoto, a geometria nasceu do problema da área quando Sesóstris, rei do Egito, dividiu todo o país em quadrados de igual área que foram distribuídos entre a população e o valor dos impostos cobrados de cada um era proporcional à área cultivada. Mas quando o rio Nilo transbordava, parte das terras ficavam inaproveitáveis e, então, seus proprietários poderiam deduzir dos impostos a quantia proporcional à área inundada. Surge então a necessidade e o interesse em se comparar as várias áreas e se determinar métodos apropriados para o seu cálculo.

No livro I dos Elementos de Euclides encontramos as seguintes definições: "Superfície é o que só tem comprimento e largura" e "Superfície plana é a superfície que se ajusta igualmente com todas as linhas retas". Este volume trata essencialmente da área de polígonos planos. É na proposição 34, que pela primeira vez aparece o paralelogramo como área paralelogrâmica e, entre outras coisas, aí se demonstra que sua diagonal o divide em duas áreas iguais. Duas figuras possuem áreas iguais se podem ser sobrepostas ou se podem ser decompostas em um número finito de partes que podem ser sobrepostas duas a duas. Ou seja, o conceito de área de polígonos relaciona-se com o conceito de equivalência, em nenhum momento, associava-se um número a uma figura, como medida

de sua área. Em nenhum lugar dos Elementos se encontram fórmulas para o cálculo de áreas. Com os árabes, dá-se exatamente o contrário; a área é um número associado a uma figura, determinada por uma fórmula, a geometria é utilizada basicamente como auxiliar para o cálculo numérico e representação pictórica de problemas algébricos.

Ávila [2] ressalta que um equívoco muito frequente é pensar que os fatos geométricos apresentados por Euclides tenham sido expressos numericamente como o são para nós hoje, e exemplifica que, enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula expressa pela metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado. Já a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura. Segundo Berlingoff [3], os gregos não mediam áreas atribuindo-lhes números, atacavam a mensuração de área tentando construir um retângulo (ou quadrado) de mesma área que uma figura dada.

Enquanto os matemáticos árabes esforçaram-se para obter solução algébrica para problemas geométricos, os gregos faziam justamente o contrário: qualquer problema de matemática era endereçado para uma solução geométrica e assim, em particular, temos soluções geométricas de problemas algébricos com o método de aplicação de áreas.

Segundo Boyer [5], os matemáticos mesopotâmicos tinham muita familiaridade com os cálculos de área de regiões poligonais como retângulos e alguns triângulos e trapézios, assim como os babilônicos que possuíam um conhecimento abrangente sobre o assunto. No problema 51 contido no famoso Papiro de Ahmes, por exemplo, a área de um triângulo isósceles era obtida multiplicando-se a altura pela metade da base. Esse procedimento era justificado tomando-se o triângulo isósceles e decompondo-o em dois triângulos retângulos para então formar um retângulo, cuja área já era conhecida.

Do papiro de Rhind (1650 a.C.) e de outras fontes, podemos deduzir alguns aspectos básicos da matemática egípcia antiga: sabiam calcular ou aproximar áreas de várias formas geométricas. Para algumas formas só podiam dar aproximações, como para a área do círculo, por exemplo, que era aproximada da seguinte maneira: tome o diâmetro do círculo, remova a "nona parte" e encontre a área do quadrado do comprimento resultante. Isso diz que a área do círculo de diâmetro  $d$  é  $(\frac{8}{9}d)^2$ , o que pode-se considerar sendo uma boa aproximação. Conforme inscrições encontradas nas paredes do templo de Horo, em Edfu, os egípcios utilizavam a fórmula  $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$  para o cálculo de área de um quadrilátero qualquer. Essas inscrições se referiam ao cálculo de áreas de lotes doados ao templo. Essas mesmas inscrições atestam que uma forma de calcular a área de um triângulo era derivada desta mesma fórmula, na qual se fazia um dos valores iguais a zero.

No caso da necessidade de se calcular a área de figuras mais complexas, fazia-se a decomposição da mesma em triângulos ou retângulos e, à área da figura original, atribuía-se o valor da soma das áreas parciais. O método da exaustão, utilizado por Arquimedes para o cálculo da área do círculo, era o equivalente grego para o Cálculo

Diferencial e Integral que foi desenvolvido e fundamentado no século XVII, tornando-se o mais importante instrumento para a resolução de problemas envolvendo áreas de regiões limitadas por uma curva.

## 2.2 O Ensino de Área de Figuras Planas no Ensino Fundamental

O tópico "Área de Figuras Planas" é tratado em dois momentos no Ensino Fundamental, no 6º e 9º Ano. No 6º Ano, são introduzidas as fórmulas para o cálculo de área de triângulos, quadriláteros especiais e do círculo. Normalmente são apresentadas aos alunos para que sejam memorizadas e aplicadas na resolução de problemas. Pouca ou nenhuma ênfase é dada à demonstração de tais fórmulas ou à sua dedução pictórica, o que neste nível seria o mais indicado. No 9º Ano, com um conhecimento mais amadurecido, o aluno já se encontra capaz de ser apresentado a uma demonstração mais formal de alguma destas áreas porém, muitas vezes, o professor apenas relembra as fórmulas e parte para exercícios com um nível maior de dificuldade. Como veremos no Capítulo 3, com as demonstrações de áreas dos polígonos mais trabalhados no ensino fundamental, nossos alunos poderiam, com sucesso, deduzir e compreender algumas destas demonstrações.

# Capítulo 3

## Áreas de Figuras Planas

Na seção (2.1) retratamos a visão dos gregos de que o conceito de área de polígonos relacionava-se com o conceito de equivalência. Será baseado nessa perspectiva que deduziremos e demonstraremos as áreas das principais figuras planas uma vez que tal ideia é relativamente de fácil compreensão para crianças e jovens e podem ser apresentadas já no 6º Ano do EF, como será abordado no capítulo 5. Utilizaremos a sequência de tópicos de Pompeo e Dolce [11] nesta seção.

### 3.1 Polígonos Contíguos ou Adjacentes

Observe os dois pares de polígonos da Figura 3.1 abaixo:

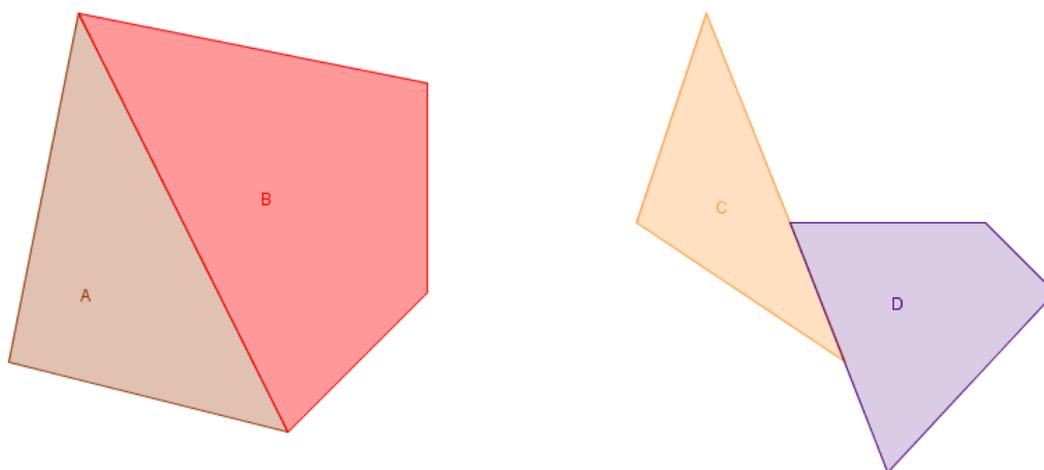


Figura 3.1: Polígonos Contíguos

Note que eles tem em comum apenas os pontos que fazem parte de seu contorno. Nestes casos, dizemos que esses polígonos são contíguos ou adjacentes.

O mesmo não acontece nos dois pares de polígonos da Figura 3.2 seguir:

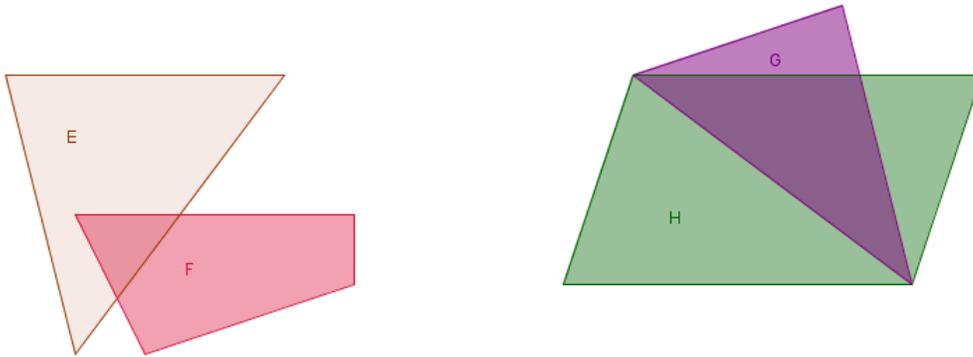


Figura 3.2: Polígonos não Contíguos

Eles possuem pontos de suas regiões internas em comum, não apenas do seu contorno. Logo, eles não são polígonos contíguos ou adjacentes.

## 3.2 Soma de Polígonos Contíguos

A superfície formada pela união de dois polígonos contíguos denominamos de soma de polígonos contíguos. Nos dois exemplos anteriores, temos as somas na Figura 3.3 e Figura 3.4:

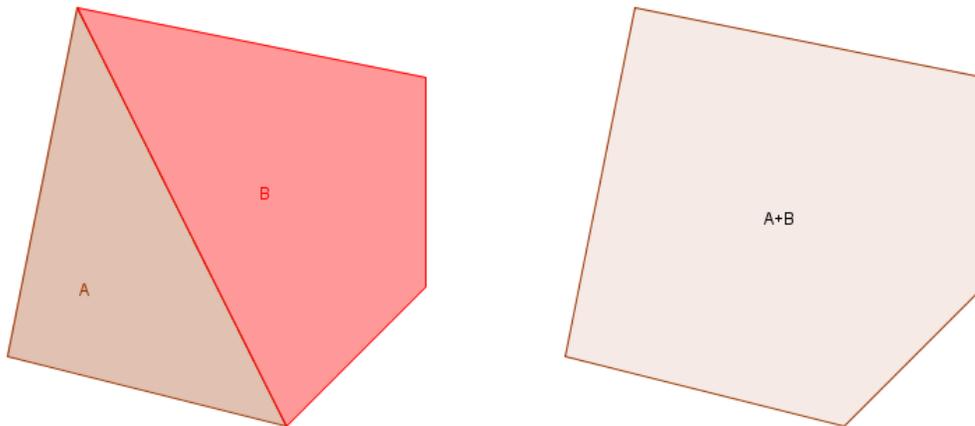


Figura 3.3: Somas A+B

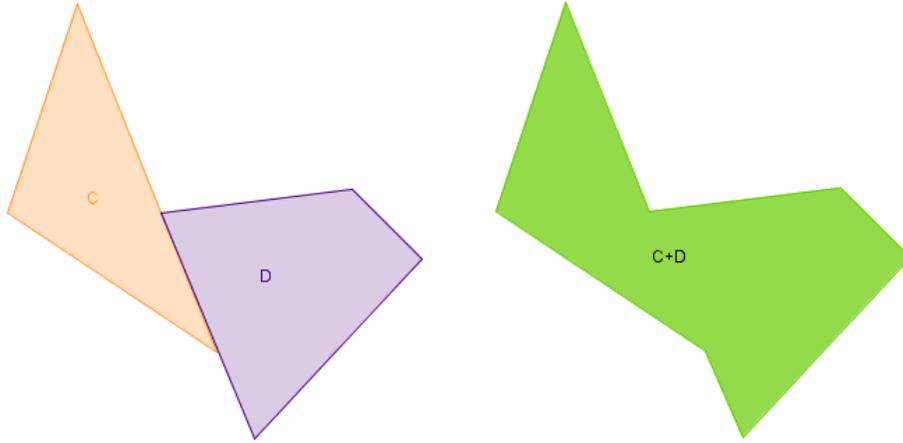


Figura 3.4: Somas  $C+D$

### 3.3 Soma de Polígonos Quaisquer

Definimos a soma de dois polígonos  $A$  e  $B$  quaisquer como sendo a soma de dois polígonos contíguos  $A'$  e  $B'$  tais que  $A'$  é congruente a  $A$  e  $B'$  é congruente a  $B$ . Observe a Figura 3.5.

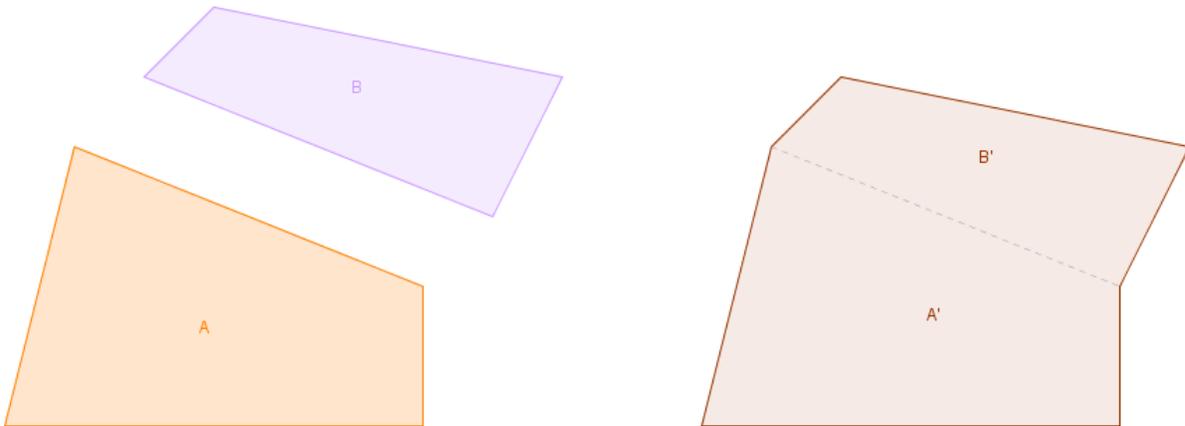


Figura 3.5: Soma de polígonos quaisquer

### 3.4 Polígonos Equivalentes e Equicompostos

Em Boltianski [4], encontramos a seguinte definição: Dizemos que duas figuras são equicompostas se é possível decompor uma das figuras num número finito de partes, e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura. Ou seja, dois polígonos são

equivalentes ou equicompostos se ambos forem somas de um mesmo número de polígonos e se esses polígonos forem dois a dois congruentes entre si.

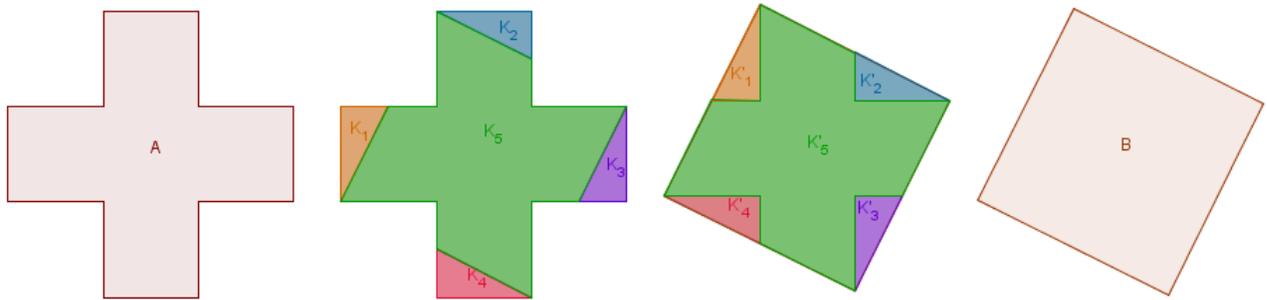


Figura 3.6: Soma de polígonos quaisquer

Note que, no exemplo da Figura 3.6,  $A$  e  $B$  são a soma de 5 polígonos tais que cada polígono parcela  $K_i$  de  $A$  é congruente a um polígono parcela  $K'_i$  de  $B$ . Logo,  $A$  e  $B$  são equivalentes, simbolicamente,  $A \approx B$ .

### 3.5 Resultados

**Teorema 3.5.1.** *"Se dois paralelogramos possuem bases e alturas respectivamente congruentes, então eles são equivalentes".*

**Demonstração: 1.** *Consideremos, sem perda de generalidades, que os paralelogramos  $ABCD$  e  $ABC'D'$  possuem a mesma base  $AB$  e as alturas de mesma medida.*

*No paralelogramo  $ABCD$ , temos:  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$*

*No paralelogramo  $ABC'D'$ , temos:  $\overline{AB} \equiv \overline{C'D'}$  e  $\overline{AD'} \equiv \overline{BC'}$*

*Por transitividade da relação de congruência, temos:  $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$*

Temos 3 casos a verificar:

**Caso 1:**  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$  possuem um segmento em comum  $\overline{D'C}$

Assim como mostra a Figura 3.7:

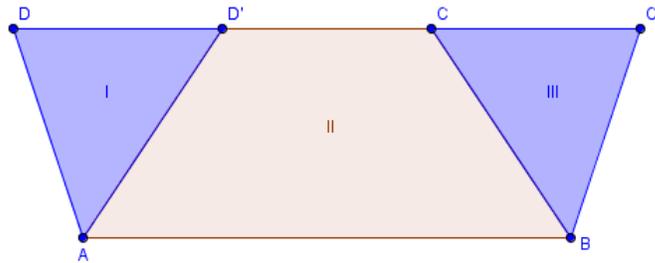


Figura 3.7: Caso 1

$$\begin{cases} \overline{CD} = \overline{DD'} + \overline{D'C} \\ \overline{C'D'} = \overline{CC'} + \overline{D'C} \end{cases} \implies \overline{DD'} \equiv \overline{CC'}$$

Logo, os triângulos  $ADD'$  e  $BCC'$  são congruentes

$$\begin{cases} \overline{AD} \equiv \overline{BC} \\ \overline{DD'} \equiv \overline{CC'} \\ \overline{AD'} \equiv \overline{BC'} \end{cases}$$

E, portanto, os paralelogramos  $ABCD$  e  $ABC'D'$  são equivalentes.

**Caso 2:**  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$  possuem um único ponto em comum,  $C = D'$

Assim como mostra a Figura 3.8:

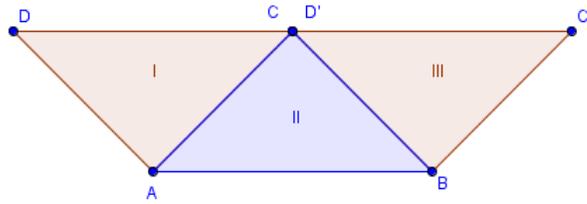


Figura 3.8: Caso 2

Os triângulos  $ACD$  e  $BC'D'$  são congruentes

$$\begin{cases} \overline{AD} \equiv \overline{BC} \\ \overline{DD'} \equiv \overline{CC'} \\ \overline{AD'} \equiv \overline{BC'} \end{cases}$$

E, portanto, os paralelogramos  $ABCD$  e  $ABC'D'$  são equivalentes.

**Caso 3:**  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$  não possuem pontos em comum.

Assim como mostra a Figura 3.9:

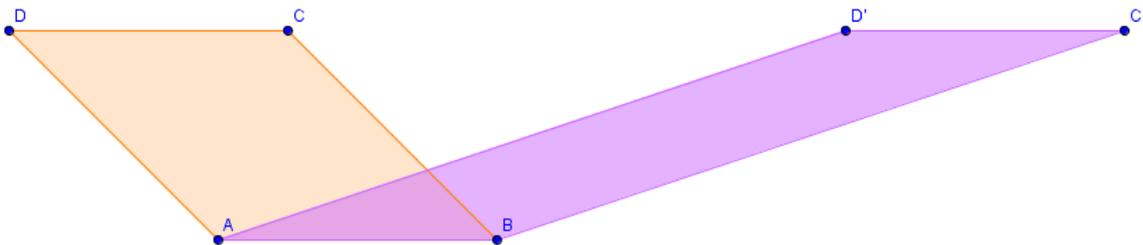


Figura 3.9: Caso 3

Pelo Postulado de Arquimedes, temos que, dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro. Assim, determinando múltiplos do segmento  $C'D'$ , a partir de  $D'$ , teremos  $\overline{C'D'} \equiv \overline{D'D_1} \equiv \overline{D_1D_2} \equiv \dots \equiv \overline{Dn_1Dn_2} \equiv \overline{CD}$  e, desta forma, temos a equivalência entre paralelogramos  $ABC'D' \approx ABD'D_1 \approx ABD_1D_2 \approx ABDn_1Dn_2 \approx ABCD$ , comprovada pelos casos anteriores, conforme mostra a Figura 3.10.

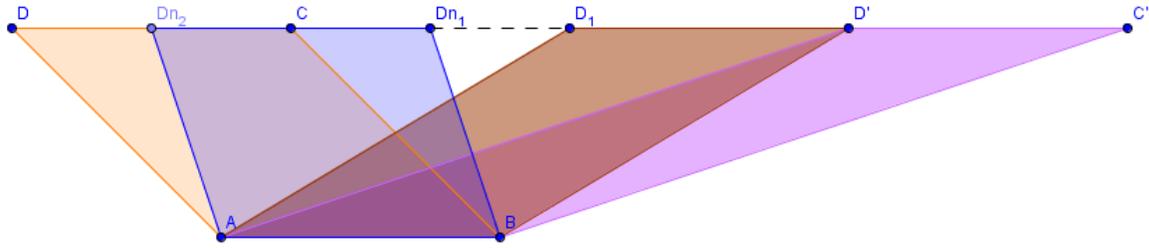


Figura 3.10: Equivalência de Paralelogramos

**Corolário 3.5.1.** *"Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes as do paralelogramo."*

Como mostra a Figura 3.11:

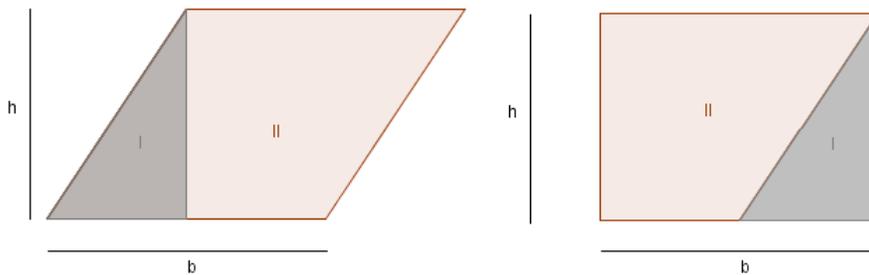


Figura 3.11: Um paralelogramo equivalente a um retângulo

**Teorema 3.5.2.** *"Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo cuja base é congruente à do triângulo e cuja altura é a metade da altura do triângulo."*

**Demonstração: 2.** *Pelo ponto médio  $E$  de  $\overline{AB}$ , conduzimos  $\overrightarrow{EF}$  paralela a  $\overline{BC}$ , passando por  $F$ , o ponto médio de  $\overline{AC}$  (pelo Teorema da Base Média, se pelo ponto médio de um lado do triângulo traçarmos uma paralela a um segundo lado, então necessariamente esta paralela corta o terceiro lado no seu ponto médio) e, pelo ponto  $C$ , conduzimos  $\overrightarrow{CD}$  paralela a  $\overline{AB}$ , sendo  $D$  o ponto de interseção com  $\overrightarrow{EF}$ , completamos o paralelogramo  $BCDE$ .*

Como mostra a Figura 3.12:

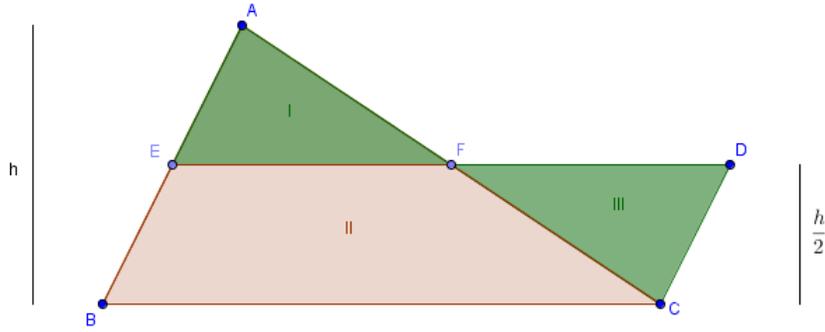


Figura 3.12: Triângulo ABC equivalente ao Paralelogramo BCDE.

Ainda pelo Teorema da Base Média, temos que  $\overline{EF} = \frac{\overline{BC}}{2}$ . No paralelogramo BCDE, os lados  $\overline{ED}$  e  $\overline{BC}$  são congruentes. Daí

$$\begin{cases} \overline{EF} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{ED}}{2} = \frac{\overline{EF} + \overline{FD}}{2} \\ 2\overline{EF} = \overline{EF} + \overline{FD} \\ \overline{EF} = \overline{FD} \end{cases}$$

Temos então que os triângulos AEF e CFD são congruentes

$$\begin{cases} \overline{EA} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{CD} \\ \overline{EF} \equiv \overline{FD} \\ \overline{AF} \equiv \overline{FC} \end{cases}$$

E, portanto, o triângulo ABC é equivalente ao paralelogramo BCDE.

**Teorema 3.5.3.** *"Traçando-se diagonais internas que não se cortam, podemos decompor qualquer polígono em triângulos justapostos."*

**Demonstração: 3.** *À semelhança de Marques [17] Vamos supor, por absurdo, que tal afirmação não seja verdade, ou seja, temos um polígono  $P$ , com  $n$  lados, que não pode ser decomposto em triângulos na forma descrita no enunciado. Escolhemos  $P$  de modo que o número  $n$  seja o menor possível. Tomamos uma reta  $r$  que não corte  $P$ . Chamamos de  $B$  o vértice de  $P$  situado à menor distância de  $r$ . (A reta  $r$  intervém nesta demonstração apenas para detectar um vértice "saliente" do polígono.) Sejam  $A$  e  $C$  os vértices adjacente a  $B$ . Há dois casos possíveis:*

**Caso 1: A, B e C são os únicos vértices do polígono P contidos no triângulo ABC.**

Conforme a Figura 3.13:

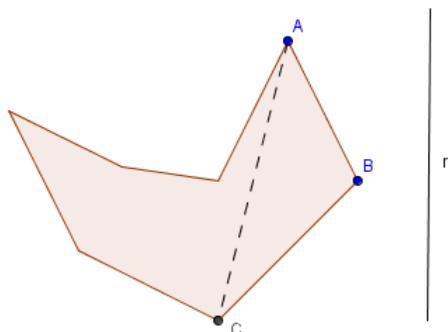


Figura 3.13: Caso 1.

B é um vértice saliente. Como o triângulo ABC não contém nenhum outro vértice de P além de A, B e C, começamos a decomposição de P em triângulos traçando-se AC.

Assim, determinamos um polígono P', obtido de P substituindo-se os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  por  $\overline{AC}$ , com  $n - 1$  lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema não vale, temos então que P' pode ser decomposto em triângulos na forma do enunciado.

Acrescentando a P' o triângulo ABC, obtemos uma decomposição de P da forma requerida. Isto contradiz que o teorema seja falso para P e conclui a demonstração deste caso.

**Caso 2: O triângulo ABC contém outros vértices do polígono P além de A, B e C.**

Observemos a Figura 3.14:

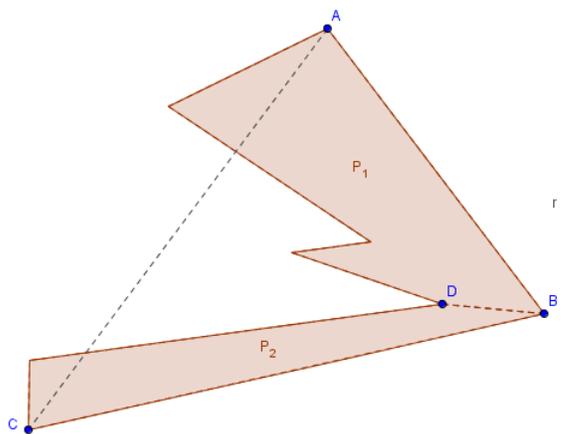


Figura 3.14: Caso 2.

Seja  $D$  o vértice de  $P$  contido no triângulo  $ABC$ , mais afastado de  $\overline{AC}$ , a decomposição começa com a diagonal  $\overline{DB}$  que não pode conter outros vértices de  $P$  além de  $D$  e  $B$ . Essa diagonal, portanto, decompõe  $P$  em dois polígonos adjacentes  $P_1$  e  $P_2$ , ambos com menos lados do que  $P$ . O teorema vale, então, para  $P_1$  e  $P_2$ , que se decompõem em triângulos justapostos, na forma do enunciado. Juntando essas decomposições com  $\overline{DB}$ , obtemos uma decomposição de  $P$ . Contradição. Isto prova o segundo caso.

## 3.6 Área de Superfície Plana

Conforme Morgado [19], a área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de forma tal que:

- 1º) Associamos a superfícies equivalentes uma mesma área;
- 2º) Associamos a uma soma de superfícies uma área que é a soma das superfícies parcelas.

Como mostra a Figura 3.15:

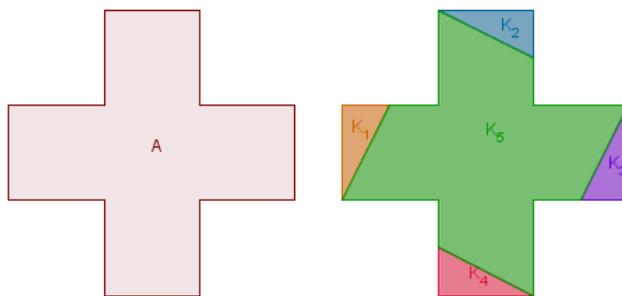


Figura 3.15: Superfícies Equivalentes

$$\text{Área (A)} = A(K_1) + A(K_2) + A(K_3) + A(K_4) + A(K_5)$$

### 3.6.1 Área do Retângulo

A partir da área do retângulo iremos deduzir as demais áreas. Seguindo a ideia de Costa [8], seja o quadrado  $Q$ , unitário, a nossa unidade de área. Para um natural  $n \geq 2$ , qualquer, considere sobre cada um dos lados do quadrado  $(n - 1)$  pontos, de modo a dividir cada lado em  $n$  segmentos de mesmo comprimento  $\frac{1}{n}$ . Através de segmentos de reta unindo ordenadamente pontos correspondentes em lados opostos do quadrado, obteremos  $n^2$  pequenos novos quadrados (conforme a Figura 3.16),  $Q^*$ , todos com a mesma área.

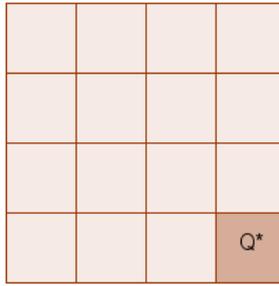


Figura 3.16: Quadrado Q

Assim, temos que  $A(Q) = n^2$ .  $A(Q^*) = 1$ , pois Q é unitário, logo

$$A(Q^*) = \frac{1}{n^2}$$

Diante deste fato, necessitaremos do resultado a seguir para podermos demonstrar a área do retângulo.

**Proposição 3.6.1.** "Suponha que um número real não negativo  $r$  e um número real positivo  $L$  possuem a propriedade: para todo número natural  $n$ , vale  $r \leq \frac{L}{n}$ . Nestas condições,  $r = 0$ ."

**Demonstração: 4.** *Provaremos por absurdo. Em primeiro lugar, a hipótese assegura que  $r \geq 0$  e que  $L > 0$  e queremos mostrar que  $r = 0$ . Suponhamos, por absurdo, que  $r > 0$ . Temos então que  $\frac{L}{r}$  é um número real positivo bem definido. Como o conjunto dos números naturais é infinito, existe um número natural  $n$  tal que  $n > \frac{L}{r}$  (propriedade arquimediana). A partir desta desigualdade temos que  $n > \frac{L}{r} \Rightarrow n \cdot r > L \Rightarrow r > \frac{L}{n}$ . Contradição pois, por hipótese,  $r \leq \frac{L}{n}$ . Logo,  $r = 0$ .*

**Teorema 3.6.1.** "Seja um retângulo  $R$  cujos lados tem por medida os números reais  $b$  e  $h$ . Então, Área ( $R$ ) =  $b \cdot h$ ."

**Demonstração: 5.** *Vamos representar o retângulo como  $R = ABCD$ , através de seus vértices e dividir a prova em dois casos.*

**Caso 1: As medidas  $b$  e  $h$  dos lados do retângulo  $R$  são números racionais.**

Dados quaisquer dois números racionais, é possível expressá-los como frações de mesmo denominador. Suponhamos, então,  $b = \frac{m}{n}$  e  $h = \frac{p}{n}$ . Isto significa que é possível dividir o lado  $\overline{AB}$  do retângulo em  $m$  segmentos congruentes de comprimento  $\frac{1}{n}$  e, igualmente, dividir o lado  $\overline{BC}$  do retângulo em  $p$  segmentos congruentes de comprimento  $\frac{1}{n}$ .

De acordo com a Figura 3.17:

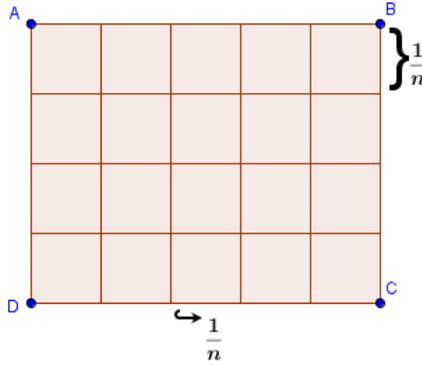


Figura 3.17: Caso 1

O retângulo  $R$  fica dividido em  $m \cdot p$  quadrados congruentes. Denotando por  $Q^*$  cada um destes quadrados da subdivisão, temos que  $A(Q^*) = \frac{1}{n^2}$ . Como  $m \cdot p$  quadrados congruentes formam o retângulo  $R$ , encontramos que  $A(R) = m \cdot p \cdot A(Q^*) = m \cdot p \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} = b \cdot h$ .

**Caso 2: Pelo menos a medida de um lado do retângulo é um número irracional.**

Suponhamos que a medida  $AB = CD$  seja um número irracional. Desta forma a medida  $BC = AD$  pode ou não ser irracional. Consideremos agora um número natural  $n$ , arbitrário e suficientemente grande, assim  $\frac{1}{n}$  é um número muito próximo de zero e o segmento de comprimento  $\frac{1}{n}$  é bem pequeno. Como a medida  $AB = CD$  é um número irracional ele não é múltiplo de  $\frac{1}{n}$ . Assim, existem números naturais  $p$  e  $q$ , tais que  $\frac{p}{n} < AB = CD < \frac{p+1}{n}$  e  $\frac{q}{n} \leq BC = AD < \frac{q+1}{n}$ .

Como mostra a Figura 3.18:

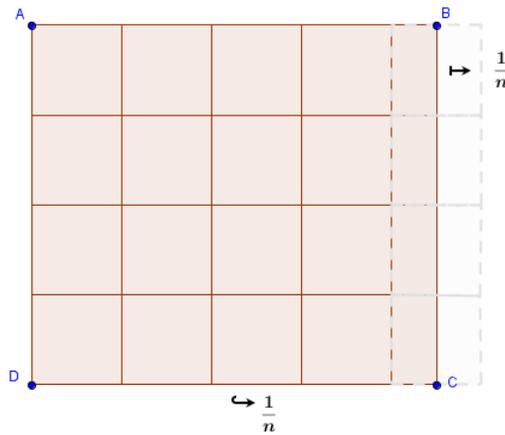


Figura 3.18: Caso 2

Na primeira expressão a desigualdade é garantida ser estrita porque a medida AB é irracional, enquanto na segunda expressão é possível ocorrer a igualdade, uma vez que não está definido se BC é um número racional ou irracional. De um lado, o conjunto de desigualdades representado nos permite escrever

$$\frac{p \cdot q}{n^2} < AB \cdot BC < \frac{(p+1)(q+1)}{n^2}$$

Por outro lado, contando a existência de  $p \cdot q$  pequenos quadrados contidos no retângulo, podemos escrever que

$$\frac{p \cdot q}{n^2} \leq A(R) < \frac{(p+1)(q+1)}{n^2}$$

Como o retângulo ABCD está fixado, as medidas dos lados AB e BC são números fixos, assim como o número  $A(R)$ . Desta forma, os números  $AB \cdot BC$  e  $A(R)$  estão espremidos num mesmo intervalo de números reais, cujo extremo inferior é  $\frac{p \cdot q}{n^2}$  e cujo extremo superior é  $\frac{(p+1)(q+1)}{n^2}$ , observemos a Figura 3.19.

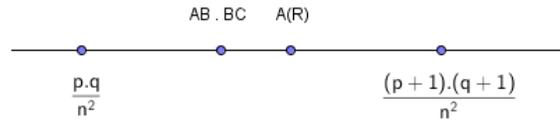


Figura 3.19: Extremo inferior e Extremo superior

Portanto, podemos escrever que

$$|AB \cdot BC - A(R)| < \frac{(p+1)(q+1) - p \cdot q}{n^2} = \frac{(p+q+1)}{n^2}$$

Ou seja,

$$|AB \cdot BC - A(R)| < \left(\frac{p}{n} + \frac{q}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} < \frac{AB+CD+1}{n} = \frac{L}{n}$$

Onde  $L = AB + CD + 1 > 0$  é um número real fixo que depende apenas do retângulo. Olhando a desigualdade expressa entre o primeiro e o último membro da expressão anterior e usando a Proposição 3.6.1 provada anteriormente, concluimos que

$$\begin{aligned} |AB \cdot BC - A(R)| = 0 &\Rightarrow AB \cdot BC = A(R) \\ A(R) &= b \cdot h \end{aligned}$$

### 3.6.2 Quadrado

Como o quadrado é um caso particular do retângulo (ver Figura 3.20), temos que a área de um quadrado de lado  $a$  é

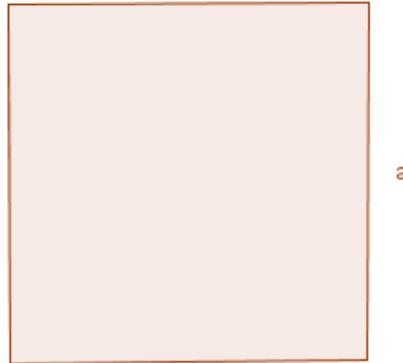


Figura 3.20: Quadrado de lado  $a$

$$A_Q = a.a, \text{ ou seja, } \boxed{A_Q = a^2}.$$

### 3.6.3 Paralelogramo

Como verificado na seção 3.5.1, o paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$  é equivalente a um retângulo de base  $b$  e altura  $h$ . Logo, como mostra a Figura 3.21.

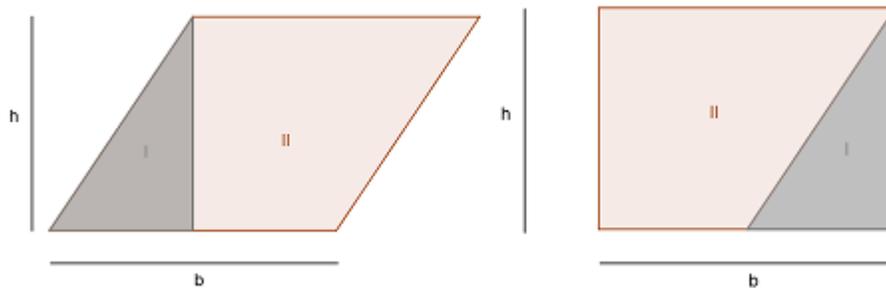


Figura 3.21: Retângulo de base  $b$  e altura  $h$

$$\boxed{A_p = b.h}$$

### 3.6.4 Triângulo

Como verificado na seção 3.5.2, todo triângulo de base  $b$  e altura  $h$  é equivalente a um paralelogramo de base  $b$  e altura  $\frac{h}{2}$ . Logo, conforme a Figura 3.22.

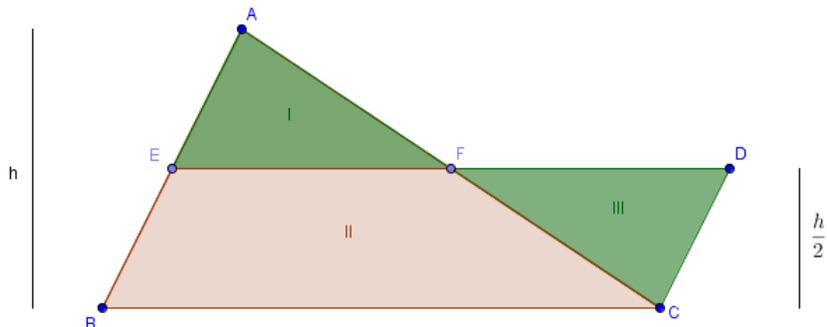


Figura 3.22: Triângulo de base  $b$  e altura  $h$

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2}$$

### 3.6.5 Trapézio

Dado o trapézio  $T_{rz}$  de base maior  $B$ , base menor  $b$  e altura  $h$ , notemos que ele é uma soma de dois polígonos contíguos, os triângulos  $T_1$  (de base  $B$  e altura  $h$ ) e  $T_2$  (de base  $b$  e altura  $h$ ). Como a uma soma de superfícies associamos uma área que é a soma das superfícies parcelas (ver Figura 3.23), temos então que:

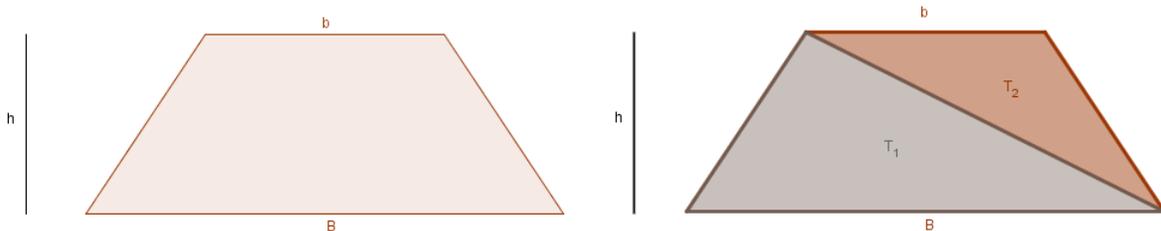


Figura 3.23: Trapézio  $T_{rz}$  de base maior  $B$ , base menor  $b$  e altura  $h$

$$A_{T_{rz}} = A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{T_{rz}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

### 3.6.6 Losango

Um losango de diagonal maior  $D$  e diagonal menor  $d$  é a soma de 2 triângulos contíguos congruentes,  $T_1$  e  $T_2$ , de base  $D$  e altura  $\frac{d}{2}$  (as diagonais de um losango se interceptam nos respectivos pontos médios). Assim, como mostra a Figura 3.24, temos:

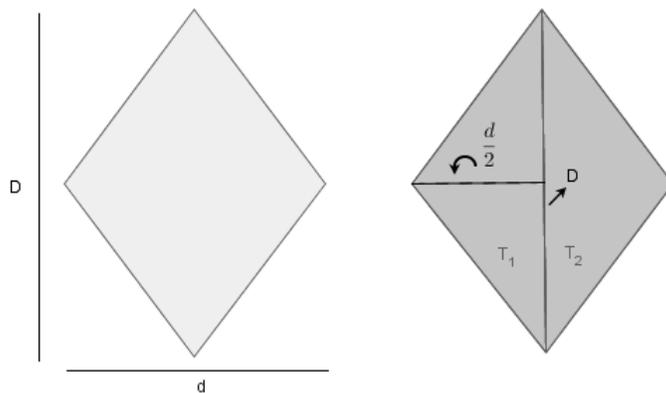


Figura 3.24: Losango diagonal maior  $D$  e diagonal menor  $d$

$$A_L = 2A_T = 2 \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} = 2 \frac{D \cdot d}{4}$$

$$A_L = \frac{D \cdot d}{2}$$

### 3.6.7 Polígono Regular

Como já foi demonstrado, todo polígono pode ser decomposto em triângulos. Assim, dado um polígono regular de  $n$  lados de medidas iguais a  $l$  e apótema de medida  $m$ , como mostra a Figura 3.25, temos que:

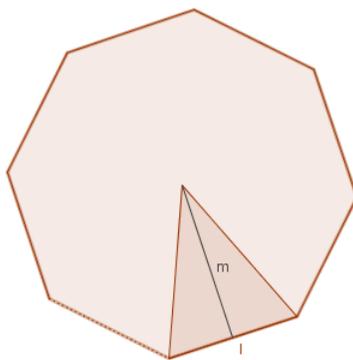


Figura 3.25: Polígono Regular

- Serão obtidos  $n$  triângulos congruentes de base  $l$  e altura  $m$ ;
- O perímetro do polígono será dado por  $2p = n.l$  e assim:

$$\begin{cases} A_p = n.A_T \\ A_T = \frac{l.m}{2} \end{cases} \implies A_p = n.\frac{l.m}{2} = \frac{n.l.m}{2} = \frac{2p.m}{2} = p.m.$$

$$A_p = p.m$$

### 3.6.8 Círculo

Seguindo a ideia de demonstração de Gowers e Kilhian [12], temos que, dado um polígono regular de  $n$  lados iguais  $l$  e um círculo de raio  $r$  inscrito neste polígono, temos então que o apótema do polígono coincide com o raio do círculo, como mostra a Figura 3.26.

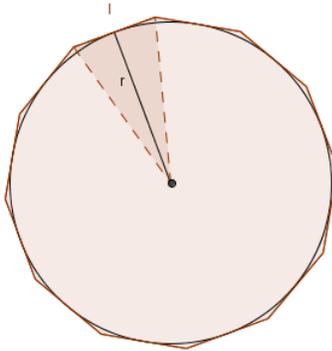


Figura 3.26: Círculo de raio  $r$  inscrito num polígono regular de  $n$  lados

Notemos que:

- A área do polígono ( $A_p$ ) é aproximadamente a área do círculo ( $A_C$ ). Assim, pelo item anterior, temos que:

$$A_p = p.r = \frac{n.l.r}{2} \cong A_C$$

- O perímetro (P) do polígono é aproximadamente o comprimento (C) da circunferência:

$$P = n.l \cong C$$

Fazendo  $n$  crescer indefinidamente o polígono de  $n$  lados se confunde com o círculo circunscrito e obtemos os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n.l.r}{2} = A_C \quad (3.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n.l = C \quad (3.2)$$

Temos que  $\pi$  é a razão da circunferência pelo diâmetro de um círculo, assim

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n.l}{2r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n.l}{2r}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da equação 3.1 por  $r$ , obteremos

$$A_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n.l.r}{2} \cdot \frac{r}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2.n.l}{2r} = r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n.l}{2r} = r^2 \cdot \pi$$

$$\boxed{A_C = \pi.r^2}.$$

## 3.7 Áreas Arbitrárias

Como fica a área de figuras planas cujo bordo contém curvas arbitrárias?

No caso em que o bordo contém partes curvas, o cálculo de áreas pode ser bastante difícil e exigir técnicas de cálculo diferencial e integral. No entanto, é possível estabelecer uma filosofia geral para o cálculo da área de uma figura plana arbitrária.

### 3.7.1 Método da Exaustão

Observemos a Figura 3.27. A exemplo de Costa [8], vamos primeiramente colocar o maior número possível de quadrados unitários dentro da Figura  $F$ . Esgotados os espaços possíveis, passamos a usar quadrados de lado  $\frac{1}{2}$ , e prosseguimos até não ser mais possível usar este tipo de quadrado para preencher o espaço interior à figura. Desta forma, o processo continua com quadrados de lado medindo  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  e, assim, sucessivamente.

A que conclusão podemos chegar?

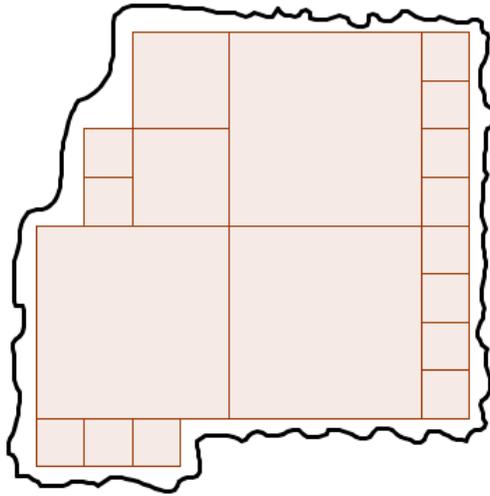


Figura 3.27: Figura F

Da figura 3.27, concluímos que:

$$3 < \text{Área}(F) \text{ e } 3 + \frac{2}{2^2} + \frac{12}{4^2} < \text{Área}(F)$$

Os valores obtidos nestas desigualdades nos fornecem valores aproximados para  $\text{Área}(F)$ , sendo o valor 3, à esquerda, um aproximação mais grosseira da área do que o valor  $3 + \frac{2}{2^2} + \frac{12}{4^2} = \frac{17}{4}$ . Mas, ao continuarmos preenchendo o interior da Figura F com quadradinhos  $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{8^2}, \dots$  e, assim, sucessivamente, obteremos valores de área cada vez mais próximos do real. De modo geral, a área seria obtida como soma de uma série de termos positivos do tipo  $3 + \frac{2}{2^2} + \frac{12}{4^2} + \frac{5}{8^2} + \dots = \text{Área}(F)$ . Assim, determinar o valor de uma área nesta situação geral é equivalente a determinar o valor de uma soma infinita. O cálculo de somas infinitas constitui um processo delicado que, desde a época grega, está nas raízes dos problemas fundamentais. Esta técnica apresentada para o cálculo da área é denominada exaustão. Neste caso usamos quadrados de tamanhos diferentes, mas pode-se realizar outros tipos de exaustão, como fez Arquimedes para calcular a área do círculo, utilizando sequencias de áreas de sucessivos polígonos regulares inscritos no círculo e como fez Fermat, utilizando retângulos para calcular a áreas sob uma curva.

### 3.7.2 Área sob Curvas: Cálculo Integral

De acordo com Courant e Robbins [10], não se conheciam, até o século XVII, fórmulas ou métodos que se pudessem aplicar para resolver o problema de calcular áreas de regiões limitadas por curvas quaisquer. Foi então que, a partir deste século, se estabeleceram os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral.

Como calcularíamos, como mostra a Figura 3.28, por exemplo, a área de uma região limitada por uma parábola e duas retas?

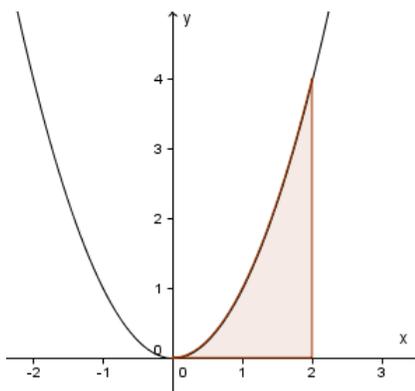


Figura 3.28: Exemplo de área sob uma curva

Segundo Boyer [5], o matemático francês Pierre de Fermat chegou a um teorema sobre a área sob curvas da forma  $y = x^n$ . A forma de determinação desta área seguia o seguinte raciocínio: Suponhamos que se queira calcular a área sob essa curva desde  $x = 0$  até  $x = a$ , Fermat subdividia o intervalo desde  $x = 0$  até  $x = a$  em uma infinidade de subintervalos tomando os pontos com abscissa  $a, aE, aE^2, aE^3, \dots$  onde  $0 < E < 1$ . Nesses pontos ele levantava ordenadas da curva e depois aproximava a área sob a curva por meio de retângulos, como mostra a Figura 3.29.

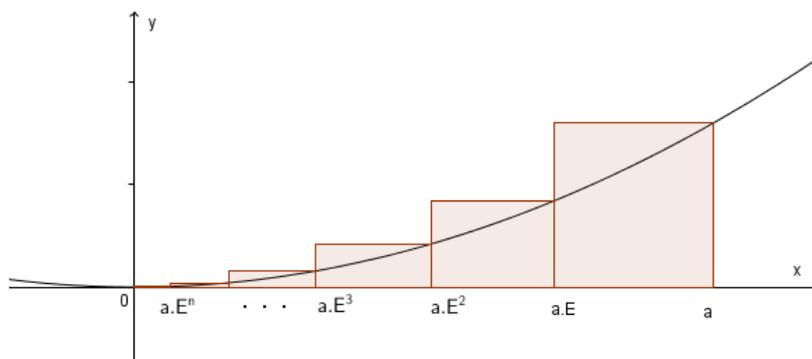


Figura 3.29: Exemplo de área sob a curva por meio de retângulos

As áreas dos retângulos circunscritos de aproximação, a começar pelo maior, são dados pelos termos em progressão geométrica  $a^n(a - aE), a^n E^n(aE - aE^2), a^n E^{2n}(aE^2 - aE^3), \dots$ . A soma infinita destes termos é

$$\frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^{n+1}}{1 + E + E^2 \dots + E^n}$$

Quando  $E$  tende a 1 (ou seja, os retângulos se tornam cada vez mais estreitos) a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob a curva, obtemos então  $\frac{a^{n+1}}{1+n}$  que é a área procurada sob a curva  $y = x^n$  desde  $x = 0$  até  $x = a$ .

A necessidade de se determinar um método mais geral para o cálculo de áreas limitadas por curvas está na base do cálculo integral e foi abordada já no século III a.C. por Arquimedes que utilizou o método de exaustão representando a área como o limite das sequencias de áreas de sucessivos polígonos regulares inscritos na região limitada da curva. O cálculo deste limite dependia de procedimentos especiais e restritos para cada tipo de problema. Uma das principais realizações do cálculo foi substituir esses procedimentos por um método geral e poderoso: a integral.

Newton e Leibniz foram os pioneiros do Cálculo Diferencial e Integral e Bernhard Riemann, em 1854, forneceu uma definição rigorosa para a integral de uma função em um intervalo.

### 3.7.3 Integral de Riemann

Seja inicialmente  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b]$  e tal que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Consideremos uma partição do intervalo  $[a, b]$  formada pelo conjunto de pontos  $P = a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . Assim, subdividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos da forma  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Tomando as  $n$  divisões de  $[a, b]$  de mesmo tamanho, temos então que cada um dos subintervalos terá comprimento  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ . Consideremos os retângulos com bases nesses intervalos. Cada um desses retângulos terá altura igual ao valor mínimo da função restrita ao subintervalo base, ou seja, em cada um dos sub-intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  podemos considerar o ponto  $m_i$  que fornece o valor mínimo  $f(m_i)$  da função. A união desses retângulos é uma região à qual podemos atribuir área: a soma das áreas dos retângulos (Ver a Figura 3.30), obtendo um valor aproximado por falta para a área da região, que é dado por:

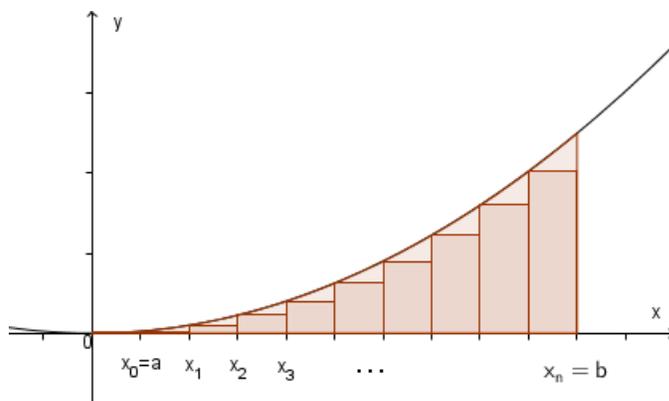


Figura 3.30: Soma Inferior de Riemann

$$s(P, f) = \Delta x \cdot f(m_1) + \Delta x \cdot f(m_2) + \Delta x \cdot f(m_3) + \dots + \Delta x \cdot f(m_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(m_i)$$

que é a Soma Inferior de Riemann relativa à partição P e à função  $f$ .

Da mesma forma, podemos considerar retângulos com base nesses mesmos intervalos cuja altura será igual ao valor máximo da função restrita ao subintervalo base, ou seja, em cada um dos sub-intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  podemos considerar o ponto  $M_i$  que fornece o valor máximo  $f(M_i)$  da função, como mostra a Figura 3.31, obtendo um valor aproximado por excesso para a área da região, que é dado por:

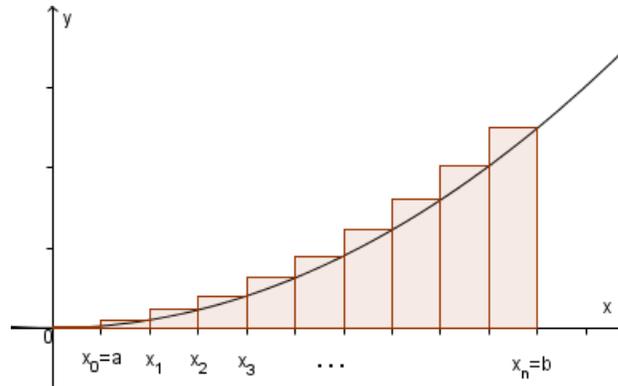


Figura 3.31: Soma Superior de Riemann

$$S(P, f) = \Delta x \cdot f(M_1) + \Delta x \cdot f(M_2) + \Delta x \cdot f(M_3) + \dots + \Delta x \cdot f(M_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(M_i)$$

que é a Soma Superior de Riemann relativa à partição P e à função  $f$ .

Tomando um ponto  $x_i^*$  diferente de  $m_i$  e de  $M_i$  em cada um dos subintervalos, obteremos um valor aproximado para a área da região

$$s^*(P, f) = \Delta x \cdot f(x_1^*) + \Delta x \cdot f(x_2^*) + \Delta x \cdot f(x_3^*) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n^*) = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i^*)$$

Obviamente,  $s(P, f) \leq s^*(P, f) \leq S(P, f)$ .

Tomando uma quantidade cada vez maior de intervalos, obteremos uma quantidade maior de retângulos cuja soma de suas áreas estará cada vez mais próxima da área A da região. Ou seja, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obteremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s(P, f)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [S(P, f)] = A \quad .$$

Logo, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s^*(P, f)] = A \quad .$$

Definimos, assim, a integral definida como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [s^*(P, f)]$$

Onde, conforme podemos conferir em Mol [18], O símbolo  $\int$ , o  $dx$ , e o nome "integral" foram introduzidos por Leibniz para sugerir a maneira pela qual o limite é obtido.

## 3.8 Calculando a área do Triângulo e do Trapézio através da Integral

Apresentaremos a dedução das áreas do triângulo e do trapézio utilizando o conceito de integral.

### 3.8.1 Área do Triângulo

Vamos considerar a área do triângulo  $T$  formado pelas retas  $y = ax$ ,  $x = b$ , que se interceptam no ponto  $(b, h)$ , e o eixo das abscissas. Assim este triângulo possui base  $b$  e altura  $h$ , conforme mostra a Figura 3.32.

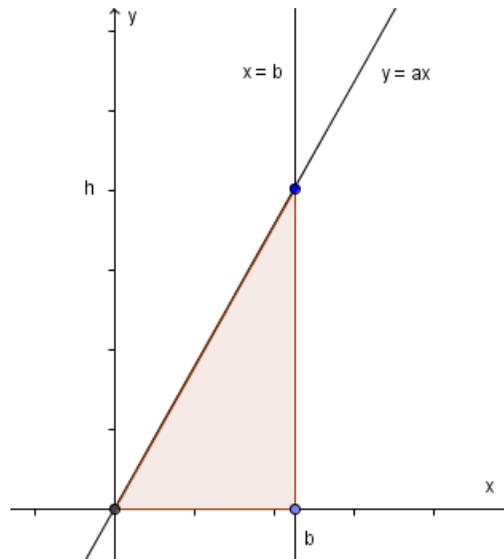


Figura 3.32: Área do triângulo  $T$

Como o ponto  $(b, h)$  é ponto da reta  $y = ax$ , temos então que

$$h = a \cdot b \Rightarrow a = \frac{h}{b}$$

Logo, podemos representar a reta  $y = ax$  como  $y = \frac{h}{b}x$  Desta forma, temos que  $A(T) =$

$$\int_0^b \frac{h}{b}x dx = \frac{hx^2}{2b} \Big|_0^b = \frac{hb^2}{2b} = \frac{bh}{2}.$$

### 3.8.2 Área do Trapézio

Vamos calcular a área do trapézio  $T_{pz}$  formado pelas retas  $y = ax$ ,  $y = h$ ,  $y = a'x + c$  e o eixo das abscissas. No ponto  $(b, h)$ , e o eixo das abscissas. Observemos as Figuras 3.33 e 3.34.

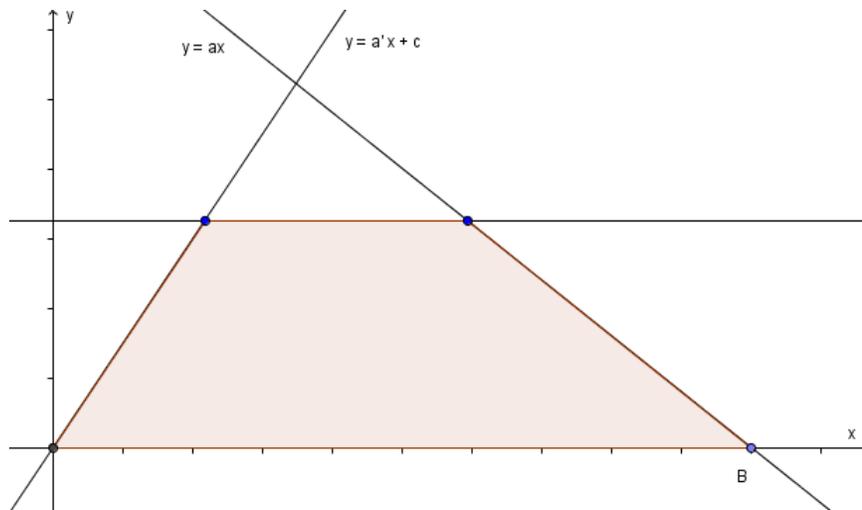


Figura 3.33: Área do Trapézio  $T_{pz}$

Podemos dividir este trapézio em 3 áreas:

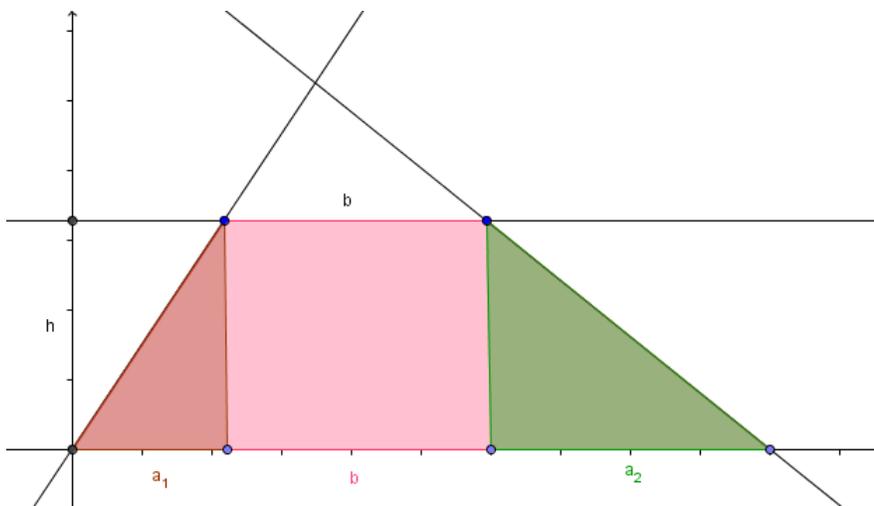


Figura 3.34: Área do Trapézio em 3 áreas

$A_1 = A(T_1)$ , onde  $T_1$  é o triângulo de base  $a_1$  e altura  $h$ .

$A_2 = A(T_2)$ , onde  $T_2$  é o triângulo de base  $a_2$  e altura  $h$ .

$A_3 = A(R)$ , onde  $R$  é o retângulo de base  $b$  e altura  $h$ .

Observe que o trapézio possui base menor  $b$  e base maior  $B = a_1 + b + a_2$ .

Para calcularmos a área do retângulo basta calcularmos área sob a reta  $y = h$  no intervalo de  $a_1$  a  $a_1 + b$  que é dada por

$$A_3 = A(R) = \int_{a_1}^{a_1+b} h dx = hx \Big|_{a_1}^{a_1+b} = (a_1 + b)h - a_1h + bh - a_1h = bh.$$

Assim, a área do trapézio é a soma destas 3 áreas:

$$\begin{aligned} A(T_{pz}) &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= \frac{a_1 \cdot h}{2} + \frac{a_2 \cdot h}{2} + bh \\ &= \frac{a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + 2bh}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_2 + b + b) \cdot h}{2} \\ &= \frac{(B + b) \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## O Teorema de Pick

### 4.1 Quem foi Pick

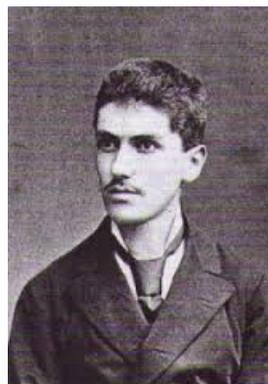


Figura 4.1: Georg Alexander Pick

Segundo Connor [7], Georg Alexander Pick nasceu em uma família judia em 10 de agosto de 1859, em Viena, Áustria e morreu em 26 de julho de 1942 em Theresienstadt, Bhoemia, atual República Tcheca.

Entrou na Universidade de Viena em 1875, aos 16 anos. Estudou Matemática e Física e graduou-se em 1879 com uma qualificação que lhe permitiu ensinar essas duas disciplinas. Concluiu seu doutorado em 1880, sendo nomeado assistente de Ernest Mach na Universidade Karl- Ferdinand, em Praga. Em 1888, foi promovido a Professor Extraordinário de Matemática e, em 1892, foi nomeado Professor Ordinário (Titular) na Universidade Alemã de Praga. Em seus 67 artigos publicados trata sobre diversos temas como Álgebra Linear, Cálculo Integral, Análise Funcional, Geometria, Funções de Varáveis Complexas, Equações Diferenciais e Geometria Diferencial, sendo essas quatro últimas áreas responsáveis por mais da metade de suas publicações.

Em 1911, participou do comitê que indicou Albert Einstein para uma cadeira de Física-Matemática na Universidade Alemã de Praga. Aposentou-se em 1927, sendo no-

meado professor emérito e retornou à sua cidade natal, Viena. Em 1938, após o Anschluss (anexação da Áustria por parte da Alemanha), voltou à Praga onde foi eleito membro da Academia Tcheca de Ciências e Artes mas, após a invasão de Praga pelos nazistas em março de 1939, foi excluído da Academia. Aos 82 anos, Pick foi preso e enviado ao campo de concentração de Theresienstadt, onde faleceu.

## 4.2 Teorema de Pick

Publicado pela primeira vez em 1900, em um periódico tcheco, sob a forma de um artigo de 8 páginas intitulado Geometrisches zur Zahlenlehre (Resultados Geométricos sobre a Teoria dos Números), Pick [20], o Teorema de Pick não recebeu muita atenção mas, após ser divulgado pelo matemático polonês H. Steinhaus em 1969 no seu livro "Mathematical Snapshots"[23], foi descoberto e apreciado por sua simplicidade e elegância. É uma fórmula simples para o cálculo de um polígono cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada.

**Teorema 4.2.1.** *"A área de um polígono simples representado em uma malha quadriculada é dada por  $A = I + \frac{B}{2} - 1$ , onde  $I$  é a quantidade de nós interiores do polígono e  $B$  é a quantidade de nós da borda do polígono".*

A saber:

- Polígono Simples: polígono formado por uma poligonal fechada simples (sem intersecções entre suas arestas) e que não possui "buracos" em seu interior;
- Nó: cada ponto de intersecção da malha, que representam os vértices de cada quadrado da malha;
- Nós Internos (I): nós que fazem parte do interior da figura;
- Nós da Borda (B): nós que fazem parte da borda que contorna a figura.

A figura 4.2, mostra o cálculo da área do Polígono aplicando a Fórmula de Pick.

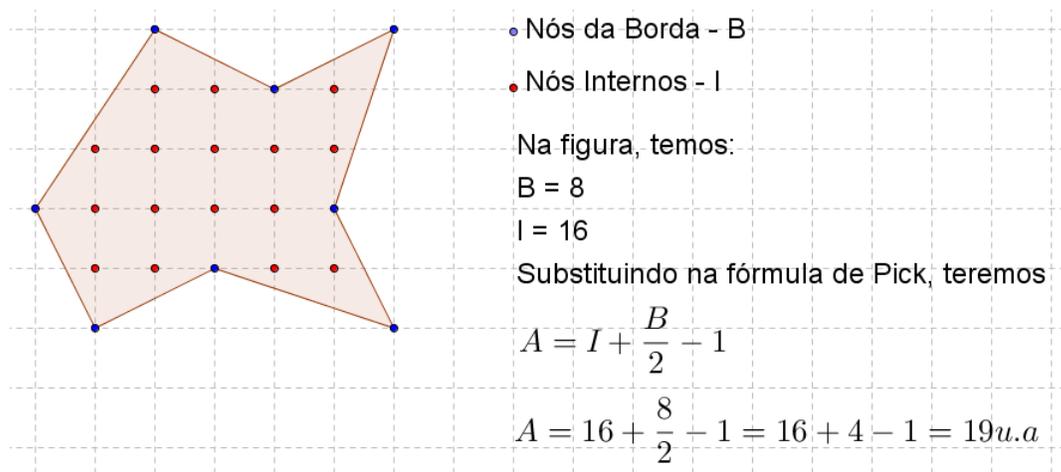


Figura 4.2: Cálculo da área do Polígono aplicando o Teorema de Pick

## 4.3 Demonstração do Teorema

### 4.3.1 Resultados a serem considerados

Seguindo as ideias da demonstração de Lima [14] no livro intitulado *Meu professor de Matemática*, utilizaremos na demonstração os resultados e definições que se seguem:

- (i) Triângulo Fundamental: é o triângulo que possui os 3 vértices, e nenhum outro ponto, seja da borda ou do seu interior, sobre os vértices da malha quadriculada.

Na figura 4.3 temos exemplos de triângulos que são (a) e que não são (b) fundamentais:

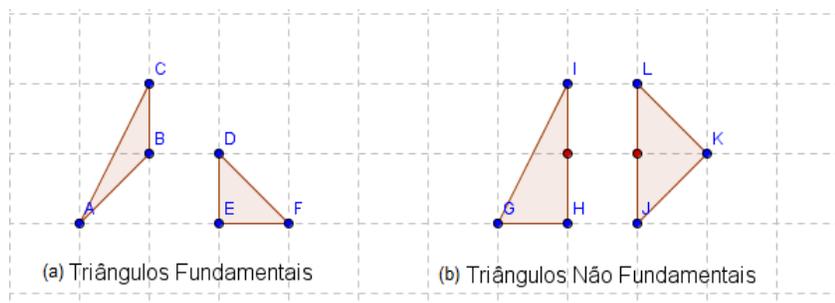


Figura 4.3: Triângulos Fundamentais e Triângulos não Fundamentais

- (ii) A área de um triângulo fundamental é igual a  $\frac{1}{2}$ ;

- (iii) A soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é igual a  $(n - 2).\pi$ ;

- (iv) Todo polígono de  $n$  lados pode ser decomposto como a reunião de  $n - 2$  triângulos justapostos, cujos vértices são os vértices do polígono dado;
- (v) Todo triângulo cujos vértices são vértices de quadrados de uma malha quadriculada pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais, em consequência do item (iv), todo polígono com vértices coincidindo com vértices dos quadrados de uma malha quadriculada podem ser decompostos em uma reunião de triângulos fundamentais.

### 4.3.2 Propriedade do número de Pick: *Aditividade*

A área de um polígono  $P$  é dada por  $A(P) = I + \frac{1}{2}B - 1$  que é, segundo Rupolo [22] um número característico, que depende, do polígono  $P$  e o chamamos de número de Pick representando por  $Pick(P) = I + \frac{1}{2}B - 1$ . Assim, se o número de Pick é a área de um polígono simples então ele é aditivo. Por exemplo, se um polígono  $P$  for composto pela justaposição de outros dois polígonos  $P_1, P_2$ , então:

$$Pick(P) = Pick(P_1) + Pick(P_2) \tag{4.1}$$

**Demonstração: 6.** *Considere os polígonos  $P_1$  e  $P_2$ , arbitrários, representados na Figura 4.4:*

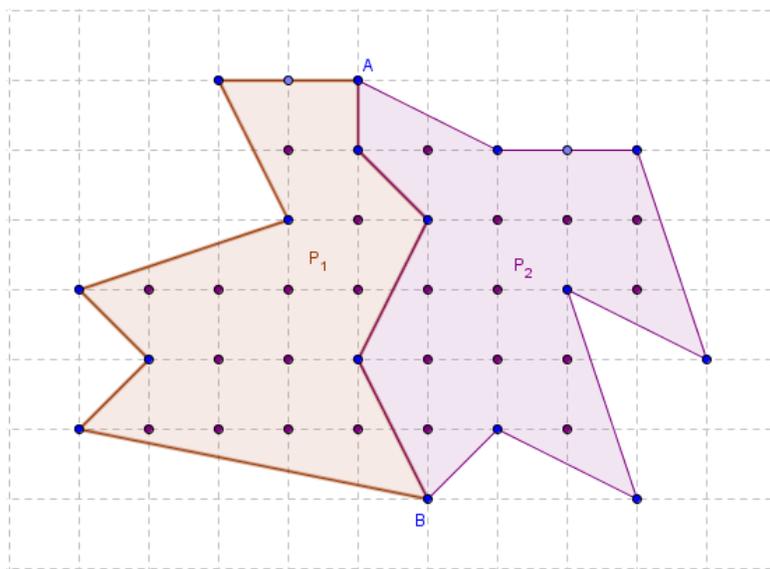


Figura 4.4: Polígonos  $P_1$  e  $P_2$

Sejam  $B_1$  os nós da borda e  $I_1$  os nós interiores do polígono  $P_1$  e  $B_2$  os nós da borda e  $I_2$  os nós interiores do polígono  $P_2$ . Justapondo os dois polígonos obtemos um polígono  $P$  com  $B$  nós da borda e  $I$  nós interiores.

Note que, desta forma, temos  $k$  nós de contato entre  $P_1$  e  $P_2$ , que antes eram pontos da borda, e que se tornaram nós interiores do polígono  $P$ . Assim, a quantidade de nós interiores de  $P$  será

$$I = I_1 + I_2 + k \quad (4.2)$$

Essa quantidade  $k$  de nós das bordas de  $P_1$  e  $P_2$  não serão contabilizadas como nós da borda de  $P$  pois se tornaram nós interiores. Temos então que a quantidade de nós da borda de  $P_1$  que serão consideradas é  $B_1 - k$ , entre eles,  $A$  e  $B$ . A quantidade de nós da borda de  $P_2$  que serão consideradas é  $B_2 - k$ , entre eles,  $A$  e  $B$ . Como os nós  $A$  e  $B$  foram considerados duas vezes, teremos então que a quantidade de nós da borda de  $P$  será dada por

$$B = (B_1 - k) + (B_2 - k) - 2 = B_1 + B_2 - 2k - 2 \quad (4.3)$$

Substituindo na fórmula de Pick, teremos:

$$\begin{aligned} \text{Pick}(P) &= I + \frac{B}{2} - 1 = I_1 + I_2 + k + \frac{(B_1 + B_2 - 2k - 2)}{2} - 1 = \\ &= \frac{(2I_1 + 2I_2 + 2k + B_1 + B_2 - 2k - 2 - 2)}{2} = \\ &= \frac{(2I_1 + 2I_2 + B_1 + B_2 - 2 - 2)}{2} = \\ &= \frac{(2I_1 + B_1 - 2 + 2I_2 + B_2 - 2)}{2} = \\ &= \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1\right) = \\ &= \text{Pick}(P_1) + \text{Pick}(P_2) \end{aligned}$$

### 4.3.3 Teorema de Pick : $A(P) = I + \frac{1}{2}B - 1$

A aditividade do número de Pick nos sugere a ideia de demonstrarmos o teorema através da decomposição de um polígono  $P$  em triângulos fundamentais, conforme demonstrações de Tavares [24].

**Demonstração: 7.** *O polígono  $P$  pode ser decomposto por  $T$  triângulos fundamentais de área  $\frac{1}{2}$ .*

*Logo, a  $A(P) = \frac{1}{2}T$ .*

*Como temos  $T$  triângulos e a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $\pi$  radianos então a soma dos ângulos internos do polígono  $P$  é  $\pi T$  radianos.*

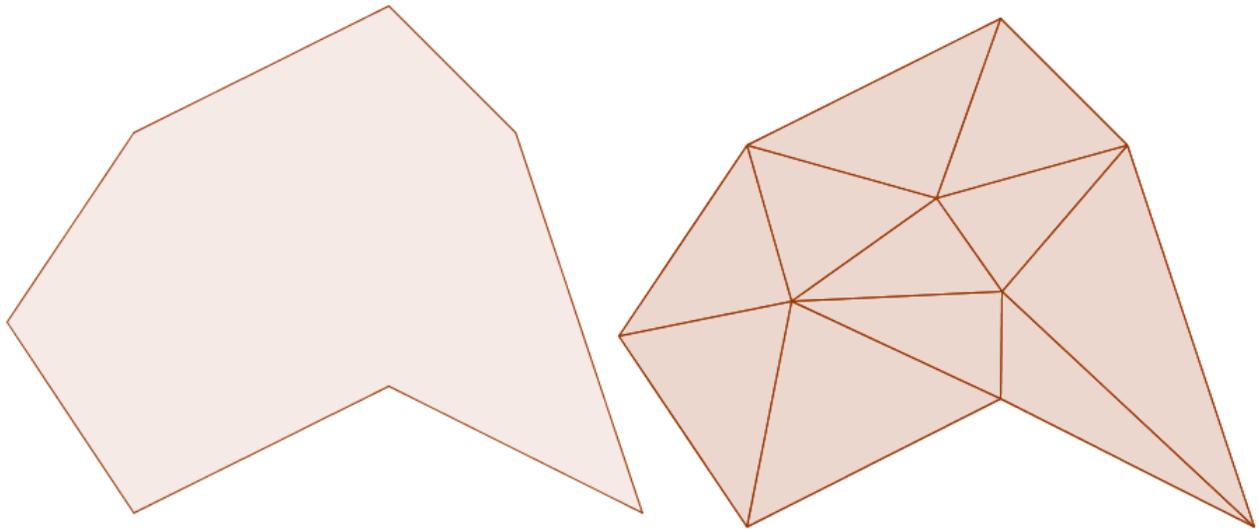


Figura 4.5: Decomposição de um polígono em  $T$  triângulos

Podemos realizar a mesma soma, mas agora adicionando os ângulos vértice a vértice, como mostra a Figura 4.6.

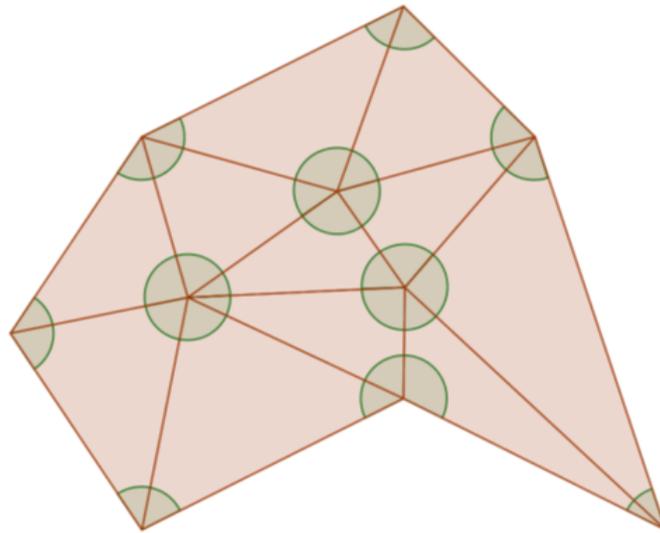


Figura 4.6: Soma de ângulos vértice a vértice

Neste caso, temos  $I$  vértices interiores formando ângulos de  $2\pi$  radianos nos dando um total de  $2\pi I$  radianos. Temos ainda  $B$  vértices que coincidem com os ângulos internos de um polígono de  $B$  lados cuja soma é  $\pi(B - 2)$ .

Assim,

$$\pi T = 2\pi I + \pi(B - 2)$$

$$T = 2I + B - 2 \tag{4.4}$$

Como a área de  $A(P) = \frac{1}{2}T$ , segue-se que

$$A(P) = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}(2I + B - 2) = \frac{(2I + B - 2)}{2} = I + \frac{B}{2} - 1 \tag{4.5}$$

que é o Teorema de Pick.

## 4.4 Aplicações

O Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá criou um programa computacional da fórmula de Pick, disponível em <http://www.dma.uem.br/kit/textos/pick/pick.html>, com o seu auxílio ou através do software Geogebra, podemos citar algumas aplicações:

- (i) Desenvolvimento de áreas de lesões: A imagem da Figura 4.7 de lesão é fotografada e acompanha-se diariamente o seu desenvolvimento e a velocidade da cicatrização, o que permitirá determinar a melhor droga, entre outras, em testes.

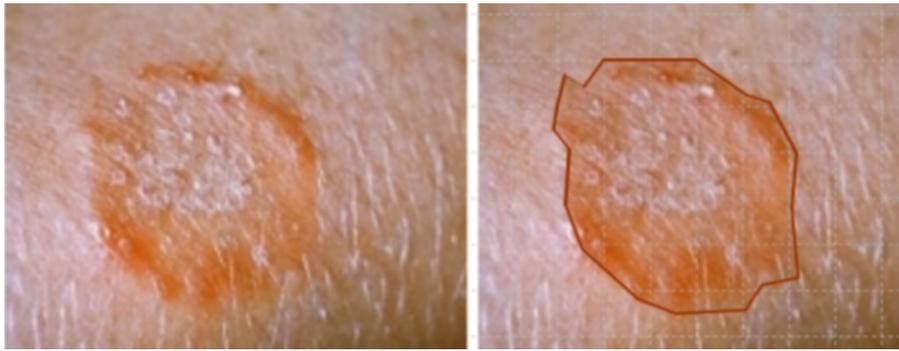


Figura 4.7: Lesão causada por doença de pele

- (ii) Área de Queimadas e Devastações: A partir de fotos de satélites, como mostra a Figura 4.8, realiza-se o cálculo de área de regiões de queimadas e de devastações de forma a poder acompanhar e intervir na redução ou estagnação do evento.

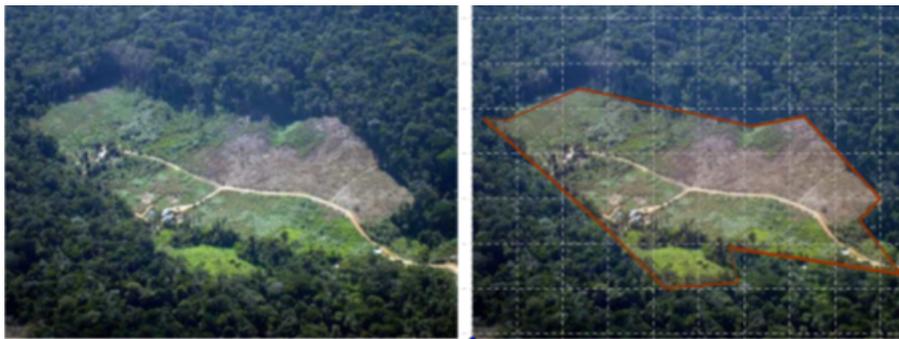


Figura 4.8: Desmatamento da Amazônia

- (iii) Cálculo de áreas de espaços geográficos: Com o auxílio de imagens de rios, lagos, mapas de estados e países, como mostra a Figura 4.9, calculamos a aproximação de suas áreas.



Figura 4.9: Lagoa Rodrigo de Freitas

# Capítulo 5

## Atividades Orientadoras de Ensino

### 5.1 Público Alvo e Período de Aplicação

O objeto de conhecimento "Área de Figuras Planas" é componente curricular do 4º bimestre do 6º Ano do Ensino Fundamental. Assim, visando uma complementação curricular, as atividades foram iniciadas no 4º bimestre do ano letivo de 2013 com uma turma de 28 alunos voluntários do 6º Ano do Ensino Fundamental de 2013 do Colégio Militar de Manaus como parte da programação do Clube de Matemática e foram continuadas no 1º bimestre de 2014. Os encontros aconteceram no turno invertido das aulas, das 14 às 16 horas, uma vez na semana, totalizando 8 encontros.

A seguir, apresentamos o desenvolvimento das atividades de forma sequenciada sendo que elas foram particionadas nos diversos encontros.

### 5.2 Atividade 1: Área de Figuras Planas

A atividade consistiu em trabalhar com as peças do TANGRAM para que, conforme orientação de Costa [9] através da equivalência entre figuras, pudéssemos deduzir as fórmulas para o cálculo de área.

Iniciamos definindo superfície como uma porção do plano limitada por uma curva (que geralmente, mas não necessariamente, é uma poligonal) e área como um número que representa a medida desta região.

Dividimos a turma em duplas e distribuimos o TANGRAM a cada uma delas. Identificamos os 7 polígonos que formam as peças do TANGRAM e iniciamos uma disputa para a montagem das três imagens representadas na Figura 5.1 utilizando todas as peças.

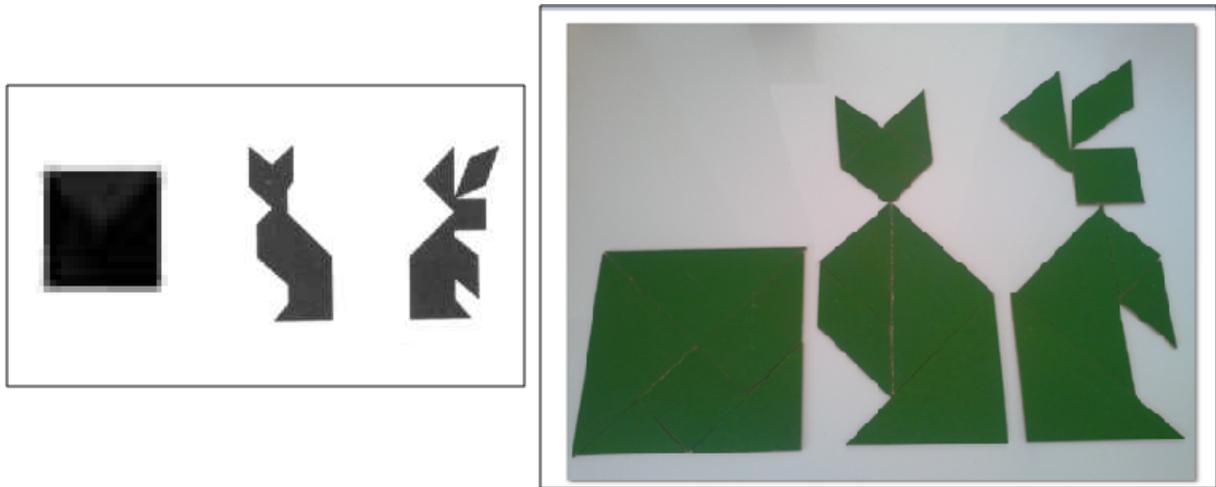


Figura 5.1: Atividade com Tangram

Perguntamos aos alunos qual das três figuras possuía a maior área. De imediato foram dadas respostas diferentes e solicitamos que olhassem com calma e com atenção no que todos concordaram, então, que as três figuras tinham a mesma área pois foram construídas com as mesmas 7 peças.

Dando continuidade, passamos para as deduções das áreas das figuras planas.

**Área do Retângulo:** A partir de um retângulo dividido em uma unidade padrão de área, como mostra a Figura 5.2, deduzimos intuitivamente a área do retângulo como sendo o produto da medida da base pela medida da altura.

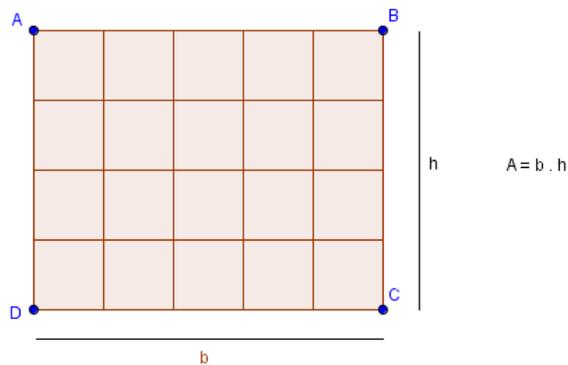


Figura 5.2: Área do Retângulo

**Área do Quadrado:** O quadrado é um caso particular do retângulo, em que a medida da base e da altura são iguais (observe a Figura 5.3), assim:

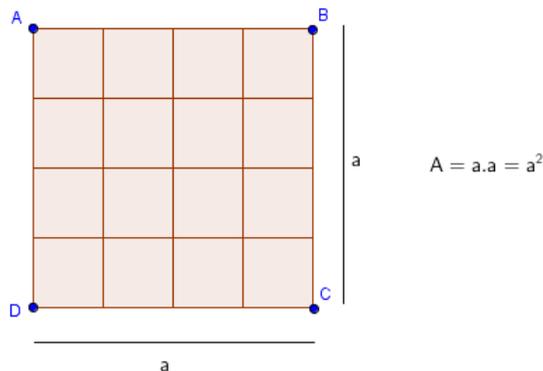


Figura 5.3: Área do Quadrado

**Área do Paralelogramo:** Solicitamos que os alunos utilizassem 3 peças do TANGRAM: os dois triângulos menores e o quadrado (ver Figura 5.4). E construísem primeiramente um retângulo e, em seguida, com as mesmas peças, um paralelogramo. Assim, os alunos concluíram que as duas figuras eram equivalentes e, portanto, possuíam a mesma área:  $A_{paralelogramo} = A_{retângulo} = b.h$ , com ambos os polígonos possuindo base  $b$  e altura  $h$ .



Figura 5.4: Área do Paralelogramo

**Área do Triângulo:** Solicitamos que os alunos utilizassem 3 peças do TANGRAM: os dois triângulos menores e o paralelogramo (ver Figura 5.5). E construísem primeiramente um paralelogramo e, em seguida, com as mesmas peças, um triângulo.

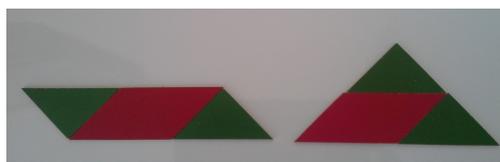


Figura 5.5: Área do Triângulo

Temos então que as duas figuras são equivalentes e, portanto, possuem a mesma área. Note que ambos os polígonos possuem mesma base  $b$  (ver Figura 5.6), porém, a altura do retângulo (que equivale à altura de um dos triângulos pequenos) é metade da altura do triângulo (que equivale à altura dos dois triângulos pequenos, que são congruentes).

Assim, se o triângulo construído possui altura  $h$ , o retângulo construído possui altura  $\frac{h}{2}$ , logo  $A_{retângulo} = base \cdot altura = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(b \cdot h)}{2} = A_{triângulo}$ .

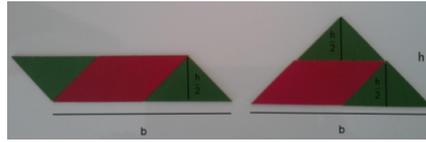


Figura 5.6: Figuras Equivalentes 1

**Área do Trapézio:** Solicitamos que os alunos utilizassem 3 peças do TANGRAM: os dois triângulos menores e o quadrado. E construísem primeiramente um paralelogramo e, em seguida, com as mesmas peças, um trapézio, como mostra a Figura 5.7.



Figura 5.7: Área do Trapézio

Mais uma vez, temos que as duas figuras são equivalentes e, portanto, possuem a mesma área. Para calcularmos a área do trapézio precisamos então calcular a área do paralelogramo. Para isso, utilizaremos a decomposição do paralelogramo em um retângulo e dois triângulos congruentes (ver Figura 5.8). Começamos nomeando as medidas dos dois quadriláteros: ambos possuem a mesma altura  $h$ .

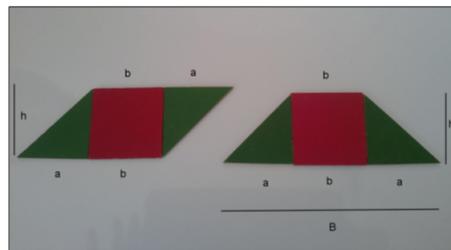


Figura 5.8: Figuras Equivalentes 2

O trapézio possui duas bases, a base menor  $b$  e a base maior  $B$  que, conforme a construção, é  $B = a + b + a = 2a + b$ . O paralelogramo é formado por dois triângulos de base  $a$  e altura  $h$  e um quadrado de lado  $b$  e altura  $h$ . Temos então que:

$$A_{triângulo} = \frac{(base \cdot altura)}{2} = \frac{(a \cdot h)}{2} \quad (5.1)$$

$$A_{\text{quadrado}} = b.h \quad (5.2)$$

$$A_{\text{trapézio}} = A_{\text{paralelogramo}} = 2A_{\text{triângulo}} + A_{\text{quadrado}} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} A_{\text{trapézio}} &= \frac{(2.a.h)}{2} + b.h = \frac{(2ah + 2bh)}{2} = \frac{(2a + 2b)h}{2} = \\ &= \frac{(a + a + b + b)h}{2} = \frac{[(2a + b) + b]h}{2} = \frac{((B + b).h)}{2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Área do Losango:** Utilizando os dois triângulos congruentes maiores que compõem o TANGRAM construímos um losango onde a diagonal maior  $D$  do losango é a base de cada triângulo e a diagonal menor  $d$  equivale a duas alturas do triângulo (ver Figura 5.9), ou seja, a altura de cada triângulo é  $\frac{d}{2}$ .

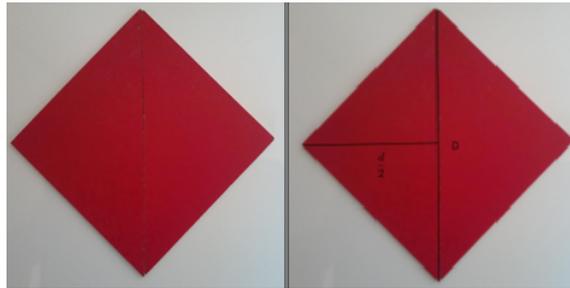


Figura 5.9: Área do Losango

Assim,

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{(\frac{D.d}{2})}{2} = \frac{(D.d)}{4} \quad (5.5)$$

$$A_{\text{losango}} = 2A_{\text{triângulo}} = 2 \cdot \frac{(D.d)}{4} = \frac{(2.D.d)}{4} = \frac{(D.d)}{2} \quad (5.6)$$

Dando continuidade à atividade, solicitamos aos alunos que fizessem a aplicação das fórmulas em um exercício da Figura 5.10 que foi distribuído:

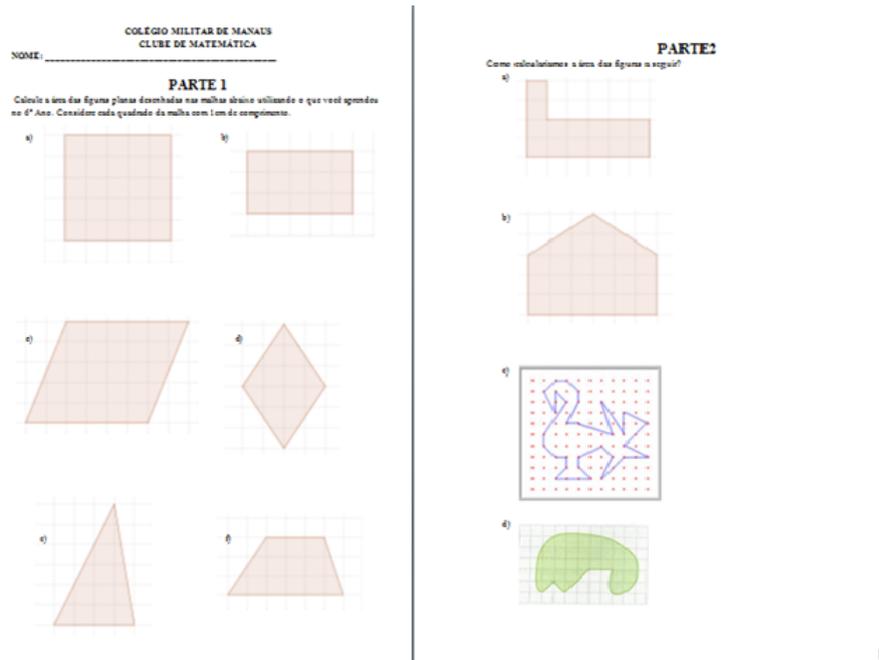


Figura 5.10: Exercício

A resolução da 1ª parte transcorreu tranquilamente, porém muitos tiveram dúvidas em como proceder para realizar o cálculo de áreas da 2ª parte.

Projetamos cada uma das figuras da 2ª parte e iniciamos um debate para determinarmos se era possível calcular essas áreas e qual seria a melhor forma de fazê-lo.

Uma das ideias que surgiram foi a de calcular a área da unidade padrão, no caso do quadrado de  $1\text{cm}$  de lado que é  $1\text{cm}^2$ , e multiplicar pela quantidade de quadrados que compõem a figura. Ao passarmos para a figura da letra b, verificamos que este procedimento não era o mais apropriado pois a figura não era formada apenas de quadrados.

Outra ideia apresentada foi a de dividir a figura, decompondo-as em polígonos os quais sabemos calcular as áreas (ver Figura 5.11 e 5.12), conforme apresentado:

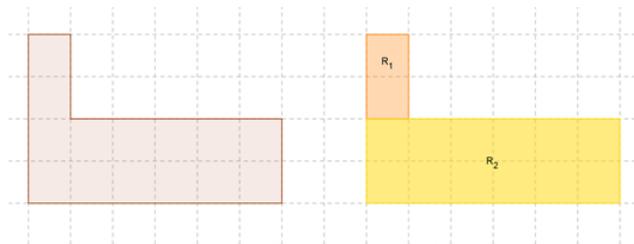


Figura 5.11:  $A = R_1 + R_2$



Figura 5.12:  $A = T + R$

Verificamos que o mesmo procedimento poderia ser adotado na letra c, sendo que daria mais trabalho pois seriam vários polígonos. Os alunos passaram a questionar se não haveria uma forma mais simples para calcular a área de figuras deste tipo no que respondemos que apresentariamos um novo método mais adiante.

Ao analisar a figura da região não poligonal, de imediato os alunos contaram os quadrados dentro da figura, no caso 25 quadrados completos que equivalem a  $25cm^2$  de área, sendo que alguns deram uma quantidade maior pois há quadrados "quase todo" dentro da Figura 5.13.

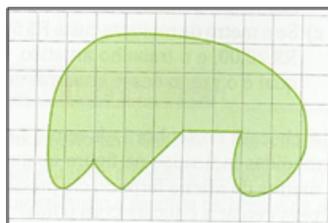


Figura 5.13: Região não poligonal

Questionamos se esse seria o valor da área e eles disseram que não, que era um resultado aproximado, menor. Perguntamos se poderíamos utilizar a decomposição da figura em polígonos e eles responderam que sim, prontamente alguns alunos se manifestaram e disseram que ainda assim obteriam uma aproximação pois como o contorno da figura não era uma poligonal ainda assim sobriam partes. Perguntamos se obteríamos o mesmo valor,  $25cm^2$ , e eles disseram que não que seria um valor maior, mais próximo mas ainda assim menor que o valor real da área.

Aproveitamos a oportunidade e discorremos de como os matemáticos antigos tratavam esta questão do cálculo de área, dando uma ideia do método da exaustão e do cálculo integral.

## 5.3 Atividade 2: Teorema de Pick e o cálculo da Área de Mapas

A atividade consistiu em aplicar a Fórmula de Pick para calcularmos a área de estados e regiões através de mapas. Iniciamos apresentando uma breve biografia do matemático George Pick. Em seguida, definimos, em uma malha quadriculada (ver Figura 5.14), o que seriam os nós, nós internos e nós da borda de uma figura ali representada.

- Nó: definiremos como nó cada ponto de intersecção da malha, que representam os vértices de cada quadrado da malha;
- Nós Internos:  $I$  nós que fazem parte do interior da figura;
- Nós da Borda:  $B$  nós que fazem parte da borda que contorna a figura

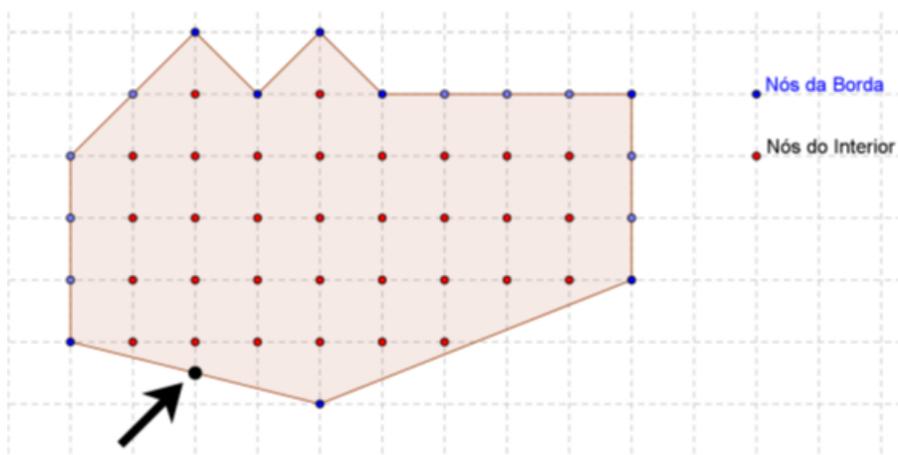


Figura 5.14: Nós na malha quadriculada

Reforçamos com os alunos que pontos como o que está destacado com a seta na figura anterior não é contabilizado nem como nó interior nem como nó da borda pois ele não é vértice de nenhum quadrado que compõem a malha quadriculada. Em seguida, apresentamos o Teorema de Pick:

**Teorema 5.3.1.** "A área de um polígono representado em uma malha quadriculada é dada por  $A = I + \frac{B}{2} - 1$ , onde  $I$  é a quantidade de nós interiores do polígono e  $B$  é a quantidade de nós da borda do polígono".

Esclarecemos que este resultado é válido apenas para polígonos simples cujos vértices coincidam com os vértices dos quadrados (nós) que compõem a malha quadriculada. Exemplificamos para os alunos o que seriam polígonos simples e polígonos não simples, conforme o que se segue na Figura 5.15 e 5.16, respectivamente.

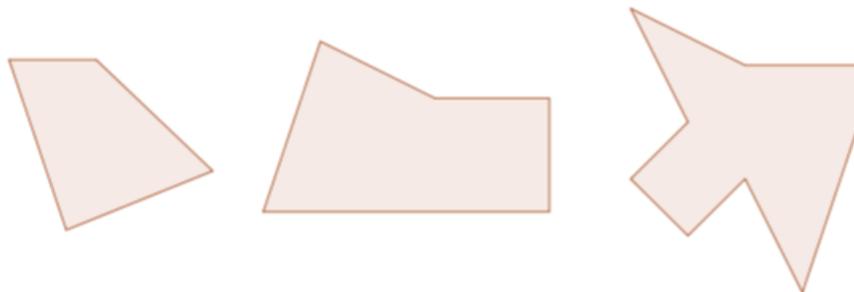


Figura 5.15: Polígonos Simples

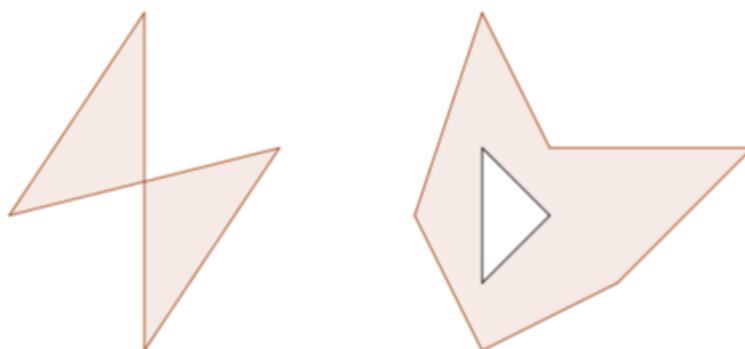


Figura 5.16: Polígonos Não Simples

Projetamos as mesmas figuras do exercício dado na atividade 1 e pedimos aos alunos que calculassem novamente as áreas, desta vez aplicando a fórmula de Pick. Aproveitamos para verificar se a noção de nós internos e nós da borda estava bem entendida, solicitando que determinados alunos destacassem os nós internos e nós dos pontos da borda como mostra a Figura 5.17 e 5.18.

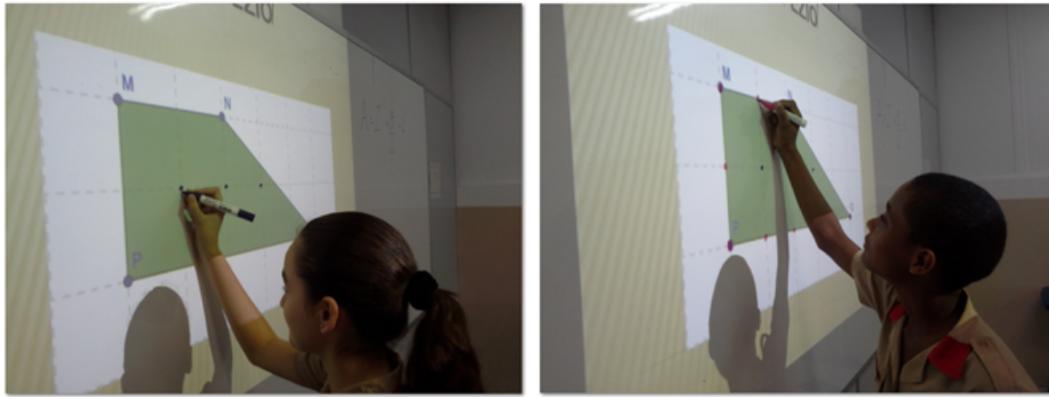


Figura 5.17: Alunos destacando os nós internos e da borda de polígonos

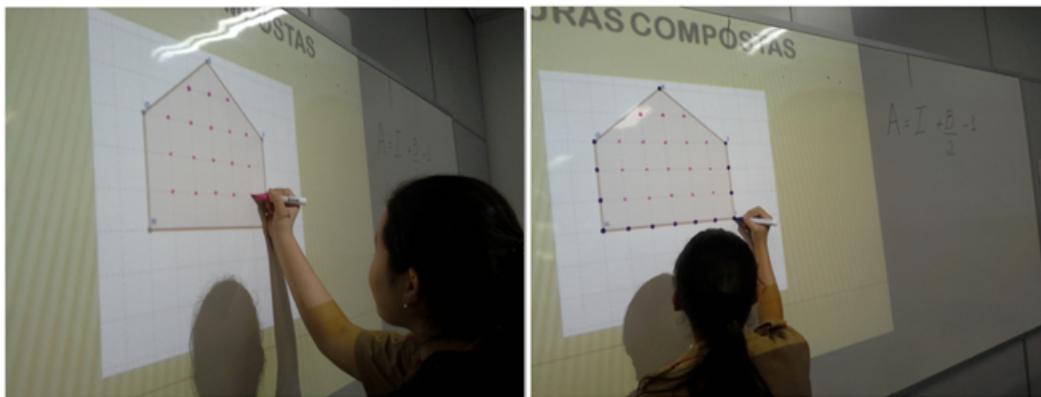


Figura 5.18: Alunos aplicando a fórmula de Pick no cálculo de figuras compostas por polígonos

Os alunos perguntaram se não era possível utilizar a fórmula de Pick para os outros tipos de polígonos e para figuras que não eram polígonos. Respondemos que sim, mas o que obteríamos seriam apenas aproximações e não o valor exato da área, conforme comprovaríamos com o prosseguimento da atividade.

Distribuímos para cada dupla um mapa com escala de um estado ou de uma região do Brasil, uma folha de papel quadriculado de  $10mm$  e uma folha de papel de seda, como mostra a Figura 5.19 e 5.20. Solicitamos que repassassem o desenho para o papel quadriculado, contabilizassem os nós internos e da borda e fizessem o cálculo da área utilizando a fórmula de Pick.

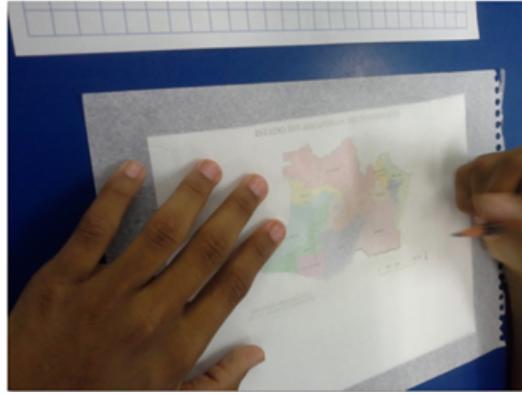


Figura 5.19: Alunos contornando o mapa utilizando o papel de seda para representá-lo na folha quadriculada

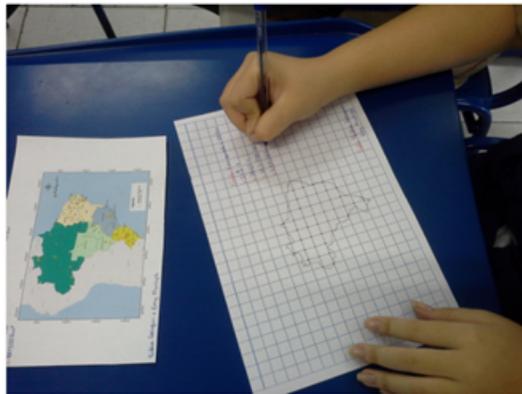


Figura 5.20: Alunos calculando a área do mapa através da fórmula de Pick

Após todos terem terminado perguntamos se este valor encontrado era o valor da área do mapa, alguns disseram que achavam que sim mas outros lembraram que aquele não era o valor real porque o mapa possui uma escala que deve ser considerada. Assim, se a escala for 1:40 000 000 significa que cada 1 cm do mapa corresponde a 40 mil centímetros ou 400 km . Ou seja, cada quadrado da malha quadriculada possui área equivalente a  $400 \cdot 400 = 160.000 \text{ km}^2$  nesta escala dada. Assim, os alunos deveriam multiplicar o valor encontrado utilizando a fórmula de Pick pelo quadrado do valor da escala de seu mapa.

Como mostra a Figura 5.21, temos como exemplo o mapa representando o estado de São Paulo com escala 1 : 7.000.000 (1 cm equivale a 70km).

$$I = 46, B = 8$$

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 46 + \frac{8}{2} - 1 = 49$$

$$A = 49 \times 70 \times 70 = 240100 \text{ km}^2$$

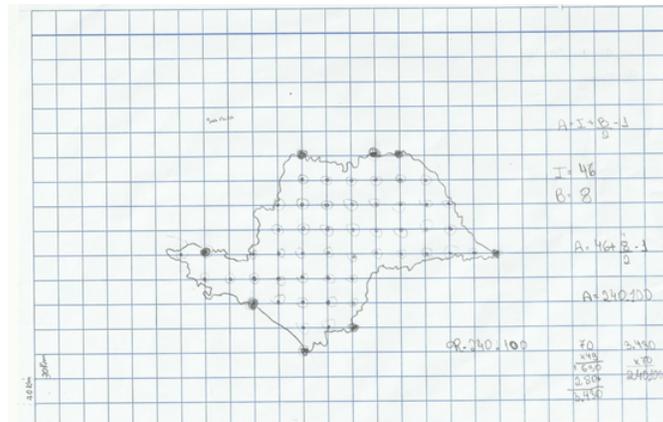


Figura 5.21: Mapa representando o estado de São Paulo

Solicitamos que cada dupla apresentasse o resultado encontrado e comparamos com o valor real, segundo dados do IBGE. No exemplo apresentado, a área real do estado do São Paulo é de  $248.222,801 \text{ km}^2$ . No geral, todos os valores encontrados eram menores que o valor real. Questionamos o porquê de não termos obtidos o valor exato da área e os alunos observaram que os mapas não tinham a forma de polígonos e por isso só era possível obter uma aproximação.

Prosseguimos com a última etapa da atividade, distribuindo para cada dupla uma folha quadriculada com o desenho de três mapas do estado do Amazonas: um desenho do contorno do mapa, outro desenho do mapa com um polígono inscrito e outro desenho do mapa com um polígono circunscrito, como mostra a Figura 5.22. Todos com escala 1: 16650000 (1cm equivale a 166,5 km).

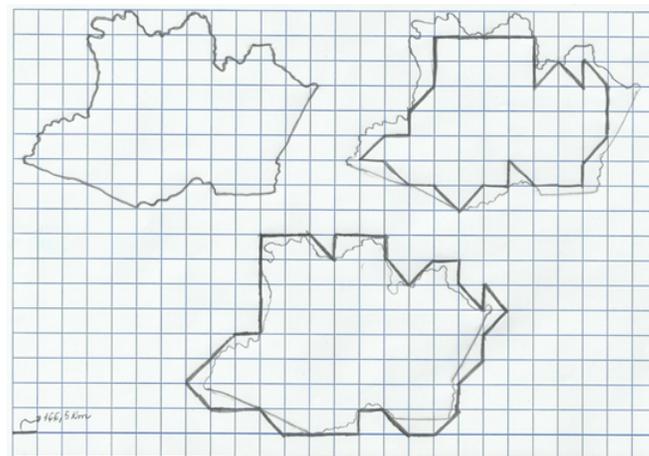


Figura 5.22: Modelo da atividade

Explicamos que a atividade consistia em calcular as áreas das 3 figuras utilizando a fórmula de Pick. Antes de iniciar os cálculos, perguntamos qual dos 3 mapas nos dariam o valor mais aproximado. A maioria dos alunos achou que seria a área do primeiro mapa, o segundo daria um valor menor e o terceiro daria um valor maior (ver Figura 5.23 e 5.24).

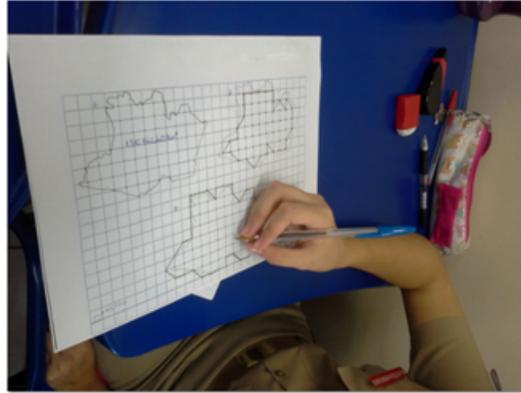


Figura 5.23: Alunos analisando as áreas dos mapas do estado do Amazonas



Figura 5.24: Cálculo das áreas dos mapas do estado do Amazonas

A Figura 5.25, mostra o momento em que os alunos estão fazendo a conferência dos resultados.

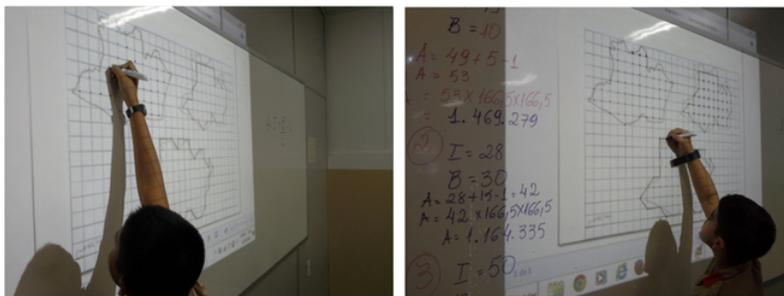


Figura 5.25: Confirmação e conferências dos resultados encontrados

A figura 5.26, mostra o resultado dos cálculos de uma das duplas.

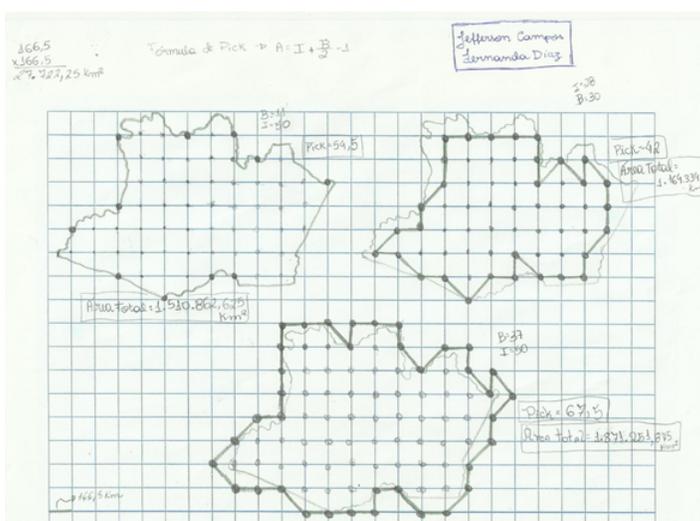


Figura 5.26: Cálculos realizados pelos alunos

Os resultados encontrados foram identificados em forma de tabela:

Mapa	I	B	$A = I + \frac{B}{2} - 1$	A em $km^2$ ( $A \times 166,5 \times 166,5$ )
1	50	11	54,5	1.510.862,625
2	28	30	42	1.164.334,5
3	50	37	67,5	1.871.251,875

Segundo o IBGE, a área do estado do Amazonas é  $1.559.150,148 km^2$ . Assim, o valor mais aproximado da área foi o obtido pela aplicação da fórmula de Pick considerando o contorno do mapa como uma poligonal.

## 5.4 Avaliação da Atividade

Distribuímos aos alunos um questionário com duas perguntas:

1. Que vantagens e desvantagens você poderia citar na aplicação da Fórmula de Pick para o cálculo de áreas?
2. Que considerações você pode fazer a respeito das atividades realizadas com os mapas?

No geral, as vantagens citadas foram: "é mais fácil e prática de calcular porque não é preciso usar muitos números no cálculo, não é preciso gravar muitas fórmulas", "é uma fórmula universal para calcular áreas", "facilita na hora de calcular figuras que não são comuns, sem muitas complicações e sem precisar dividir uma figura maior em menores para encontrar um valor aproximado", "não preciso decorar muitas fórmulas que até chegam a ser confusas", "calculamos áreas maiores e mais complexas de maneira mais rápida e às vezes mais precisa". Entre as desvantagens, a maioria dos alunos citou que "nem sempre dá o resultado correto", "se não for um polígono a fórmula não mostrará o número exato", "a figura tem que estar na malha".

Com relação à segunda pergunta, os alunos responderam que "achei uma atividade legal porque deu para entender bem o assunto, fez com que a gente treinasse bastante a fórmula", "foi um melhor jeito para a fixação do assunto", "achei legal, algo novo, que não era do meu conhecimento. Prático e bem interessante", "gostei bastante pois não sabia desse método e pude perceber suas vantagens e precisão", "graças a essa atividade nós pudemos executar o teorema na prática".

Durante os encontros notamos o empenho e envolvimento dos alunos em realizar o que foi solicitado, estando atentos às explicações e participativos quando solicitados a responderem perguntas ou a irem ao quadro resolver os cálculos. Podemos concluir então que a atividade foi bastante satisfatória e atingiu o objetivo de motivar os alunos em um novo aprendizado e de fazê-los participar na construção deste conhecimento de forma prática e enriquecedora.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste trabalho propusemos uma nova abordagem para o ensino-aprendizagem do cálculo de área de figuras planas no Ensino Fundamental II que se iniciou com uma atividade com o TANGRAM despertando o interesse dos alunos e seguindo uma sequência didática que possibilitou uma compreensão da problemática do cálculo de áreas que não se restringe apenas a formas poligonais mas também a formas com contornos irregulares apresentando uma nova forma para se calcular áreas através da Fórmula de Pick e de sua aplicação em uma atividade interdisciplinar utilizando mapas. Pretendemos contribuir ainda, com este trabalho, no incentivo aos professores para que possam, junto com os alunos, deduzir as fórmulas do cálculo de área propiciando uma efetiva construção e aquisição do conhecimento.

Sugerimos ainda, para enriquecimento da atividade, a utilização de programas de geometria dinâmica como o Geogebra que foi utilizado na construção das figuras apresentadas neste trabalho. Através destes programas, além de possibilitar aos alunos a construção e visualização das figuras para calcular as áreas, pode-se fazer a verificação dos resultados através do comando área disponível no Geogebra, por exemplo.

Porém, para se atingir efetivamente este objetivo, deveríamos ter uma organização curricular que facilitasse o desenvolvimento dos conteúdos e garantisse a possibilidade da interdisciplinaridade e da contextualização. Deparamo-nos, entretanto, com uma grade curricular extensa que não nos permite uma flexibilidade e liberdade de tempo para a realização de atividades práticas e que garanta o alcance das metas do ensino da Matemática que é, segundo os PCN [6], garantir o desenvolvimento de capacidades como a observação, estabelecimento das relações, comunicação em diferentes linguagens, inclusive simbólicas e gráficas; argumentação e validação de processos e resultados; estímulo às formas de raciocínio, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa.

A aplicação do trabalho com os alunos só foi possível por ter sido realizada como atividade do Clube de Matemática em horários específicos, não comprometendo o seguimento dos conteúdos previstos para o bimestre. Desta forma, vemos na implantação do Ensino Integral e em Tempo Integral uma possibilidade de propiciar que o ensino da Ma-

temática atinja o objetivo proposto nos PCN [6] que é desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do pensamento lógico e o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e de argumentação, preparando-o para estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade.

Esperamos assim, com este trabalho, não apenas incentivar práticas pedagógicas diferenciadas e motivadoras mas também gerar discussões relacionadas ao ensino da Matemática que possam contribuir para que desperte no aluno uma grande admiração e compreensão do largo alcance da Matemática, estimulando seu interesse pela disciplina.

O ensino da Matemática, segundo Ávila [2], é justificado pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exhibe, proporcionando ao educando excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais. E cabe a nós, professores, unir esforços e propiciarmos de forma gradativa essas oportunidades a nossos alunos.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, Doherty, GUZZO, Sandro Marcos e ZENON, W.T. A. "*Fórmula de Pick computacional*". Disponível em <<http://www.dma.uem.br/kit/textos/pick/pick-doc.html>>. Acesso em 25 fevereiro 2014.
- [2] ÁVILA, Geraldo S.S. *Várias faces da matemática*. São Paulo: Blucher, 2007.
- [3] BERLINGHOFF, Willian P. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Willian P. Berlinghoff, Fernando Q. Gouveia; tradução Elza Gomide, Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.
- [4] BOLTIANSKI, V. G. *Figuras equivalentes e equicompostas. [Coleção Matemática: aprendendo e ensinando]: traduzido por Seiji Hariki*. São Paulo: Atual: Moscou: Editora MIR, 1996.
- [5] BOYER, Carl B. *História da Matemática: tradução: Elza F. Gomide*. São Paulo. Edgard Blucher, 1974.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3º e 4º ciclo do ensino fundamental)*. Brasília: MEC/SEF., 1998.
- [7] CONNOR, JJ O' e EF, Robertson. *Georg Alexander Pick*. Disponível em <<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Pick.html>>. Acesso em: 15 fev. 2014.
- [8] COSTA, Celso.; CARDIM, Nancy. *Tópicos de aritmética, álgebra e geometria para o ensino médio*. Rio de Janeiro: UFF/CEP EB, 2006.
- [9] COSTA, Celso.; FIGUEIREDO, Luiz M. S. *Instrumentação para o ensino da geometria*. Rio de Janeiro: UFF/CEP, 2007.
- [10] COURANT, Richard.; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.
- [11] DOLCE, Osvaldo.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana*. 7. Ed. São Paulo: Atual, 1993.

- [12] GOWERS, Timothy. *Matemática: uma breve introdução*. Lisboa: Ed. Gradiva, 2008.
- [13] KILHIAN, Kleber. "*Demonstração da área do círculo*, 2009. Disponível em <<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/08/demonstracao-da-area-do-circulo.html>>. Acesso em: 22 março 2014.
- [14] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: Fundamentos da Matemática Elementar - SBM, 1991.
- [15] LINTZ, R.G. *História da Matemática*. Blumenau: ED. Da FURB, 1999.
- [16] MALTA, Iaci. et al. *Uma introdução ao cálculo*. Rio de Janeiro: Ed. PUC Rio; São Paulo: Loyola, 2002.
- [17] MARQUES, Eriem Cortez. *Tópicos sobre polígonos*. [Trabalho de Conclusão de Curso]. São Paulo: Universidade Federal de São Carlos, Curso de Matemática, Departamento de Matemática: 2012.
- [18] MOL, Rogério Santos. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte : CAED-UFGM, 2013.
- [19] MORGADO, A. C.; WAGNER, E. M. *Geometria II: métrica plana*. Rio de Janeiro: F.C. Araújo da Silva, 2002.
- [20] PICK, G. A. (1900). *Geometrisches zur Zahlenlehre* (Geometric results on number theory). Sitzungsber. des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereins für Böhmen "Lotos", Prag, 1900.
- [21] ROQUE, Tatiana.; Carvalho, J. B. P. F. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. v. 1. 466p.
- [22] RUPOLO, Diogo. *Estudo das aplicações do método de monte Carlo à determinação da área de figuras planas não-regulares*. [Trabalho de Conclusão de Curso]. Mato Grosso: Universidade do Estado de Mato Grosso, Curso de Matemática, Departamento de Matemática: 2010.
- [23] STEINHAUS, H. *Mathematical Snapshots*. Oxford University Press, 1969.
- [24] TAVARES, J. Nunes. "*O teorema de Pick*". Disponível em: <<http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html>>. Acesso em: 8 março 2014.

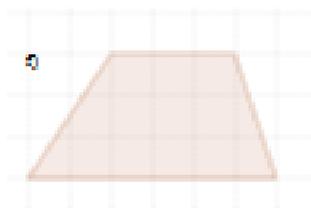
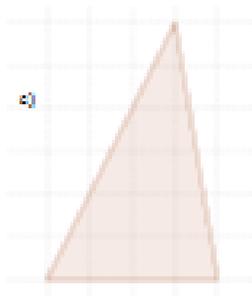
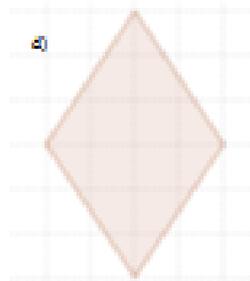
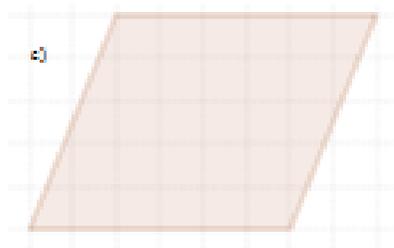
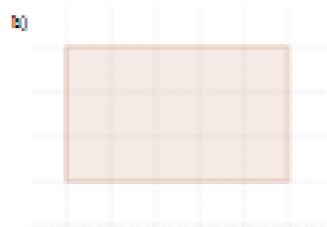
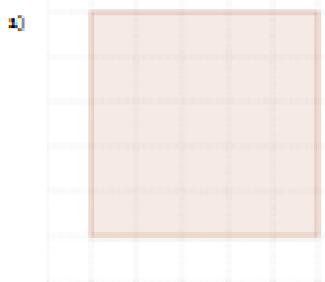
## APÊNDICES

### COLÉGIO MILITAR DE MANAUS CLUBE DE MATEMÁTICA

NOME: \_\_\_\_\_

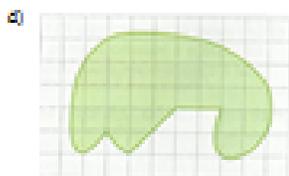
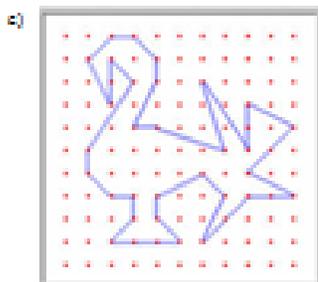
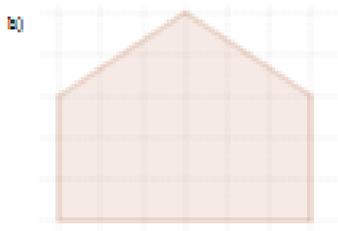
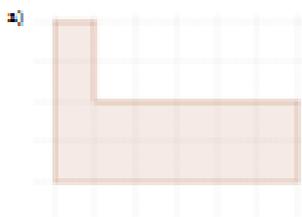
#### PARTE 1

Calcule a área das figuras planas desenhadas nas malhas abaixo utilizando o que você aprendeu no 6º Ano. Considere cada quadrado da malha com 1cm de comprimento.



## PARTE 2

Como calcularíamos a área das figuras a seguir?



**Atividade: Cálculo de Área dos Mapas do Amazonas**

