UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EQUAÇÃO DE CODAZZI EM VARIEDADES BIDIMENSIONAIS

LAURIANO DE SOUZA E SOUZA

MANAUS - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LAURIANO DE SOUZA E SOUZA

EQUAÇÃO DE CODAZZI EM VARIEDADES BIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. José Kenedy Martins

MANAUS - 2013

LAURIANO DE SOUZA E SOUZA

EQUAÇÃO DE CODAZZI EM VARIEDADES BIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 10 de junho de 2013.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. José Kenedy Martins, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy, Membro
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros, Membro
Universidade Federal do Ceará

AGRADECIMENTOS

Ao meu maravilhoso Deus por permitir mais uma conquista grandiosa em minha vida, dando saúde, proteção, sabedoria e força de vontade para vencer cada etapa desta jornada.

Aos meus pais José Roberto Andrade de Souza(in memorian) e Erlita de Souza e Souza por sempre acreditarem no potencial, principalmente a minha mãe que assumiu o papel de mãe-pai e sempre priorizou os estudos dos filhos.

À minha namorada Regina Carla por me apoiar, e que sempre me ensina com seu jeito de ser.

Às minhas irmães Elda Jane de Souza e Joerlen de Souza que tanto aprendi e aprendo com suas personalidades, principalmente na minha infância, quando me ajudavam a fazer os exercícios da escola.

À minha tia Alcira Mendonça que me acolheu como um filho quando vim para Manaus, e seus filhos. Devo muito a vocês!

Aos demais familiares que de forma direta ou indireta contribuiram para esta vitória: Nilfran Alves, Roberto de Souza, Robson de Souza, Vitória S. Pereira, Hugo A. de Souza, Nicolly A. de Souza.

Aos colegas de mestrado, pelos momentos agradáveis que estivemos juntos durante estes dois anos: Marcos Aurélio, Daiana Viana, Marcelo Viana, Thiago Ferreira, Clebes Brandão, Jefferson Castro, Adrian Ribeiro, Raphael Costa, Geziel Damasceno, Carina Coelho, Camila Pinheiro, Carla Zeline, etc.

Aos professores do mestrado, em especial ao prof. José Kenedy Martins, mais conhecido como Akay de Nataraja, pela orientação no presente trabalho.

Aos professores da graduação Francisco Eteval da Silva Feitosa e Ana Acácia Pereira Valente, por quem tenho grande admiração, e que contribuiram de forma direta para minha entrada no mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(Capes) pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que acreditaram que esse sonho seria possível.

RESUMO

EQUAÇÃO DE CODAZZI EM VARIEDADES BIDIMENSIONAIS

Neste trabalho, dissertamos sobre uma teoria abstrata para a equação de Codazzi em variedades bidimensionais (ou simplesmente superfícies), a saber, a teoria dos pares de Codazzi, que serve como ferramenta analítica para obter novos resultados globais para superfícies nas formas espaciais $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Precisamente, generalizamos alguns teoremas clássicos da teoria de superfícies e unificamos a prova de outros resultados, aparentemente não relacionados. Além disso, estudamos a existência de diferenciais quadráticas holomorfas, estimativas de altura e aplicamos a referida teoria abstrata na classificação das superfícies de Weingarten especiais elípticas, completas e mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal.

Palavras-chave: Equação de Codazzi, pares de Codazzi, formas espaciais, superfícies de Weingarten, diferencial de Hopf.

ABSTRACT

CODAZZI EQUATION IN 2-MANIFOLDS

In this paper, we dissert on an abstract theory for the Codazzi equation in 2-manifolds (or simply surfaces), namely, the theory of Codazzi pairs, which serves as an analytical tool to obtain new results overall for surfaces in the space forms $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ and $\mathbb{H}^3$. Precisely, we generalize some classical theorems of surfaces theory and unified the proof other results, apparently unrelated. Furthermore, we study the existence of holomorphic quadratic differentials and height estimates and we apply such abstract theory in the classification of complete embedded elliptic special Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$ whose Gaussian curvature does not change sign.

Keywords: Codazzi equation, Codazzi pairs, space forms, Weingarten surfaces, differential Hopf.

Sumário

Introdução

Com a imersão de uma superfície Σ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, sempre é possível obter as chamadas equações de Gauss e Codazzi, que são as relações de compatibilidade entre a primeira e a segunda formas fundamentais de Σ. Lembramos que a equação de Codazzi permanece invariante quando substituímos o espaço ambiente $\mathbb{R}^3$ por outra forma espacial $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{H}^3$.

Muitos resultados clássicos da teoria de superfícies em $\mathbb{R}^3$, dependem principalmente da equação de Codazzi para serem verificados, e podem ser generalizados para superfícies imersas nos espaços modelos tridimensionais quando consideramos sobre a superfície pares de formas quadráticas (I, II), em que I é uma métrica Riemanniana e os coeficientes de I e II, verificam a equação de Codazzi. Dentre estes resultados estão, o teorema de Hopf, que afirma que as esferas redondas são as únicas esferas de curvatura média constante, e o teorema de Liebmann, que garante a unicidade das superfícies completas de curvatura constante positiva.

Autores como T. K. Milnor, U. Simon e Oliker, desenvolveram amplamente esta teoria abstrata, ver por exemplo [17], [18] ou [19]. Tendo como material de apoio alguns destes trabalhos e outros envolvendo certas classes de superfícies, a presente dissertação, baseada no artigo [1], e em partes no artigo [2], tem como objetivo, utilizar a teoria abstrata de pares de Codazzi como uma ferramenta analítica para obter novos resultados globais para superfícies nas formas espaciais $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, e dar uma aplicação desta teoria para classificar as superfícies de Weingarten especiais elípticas em $\mathbb{R}^3$. Vale ressaltar que esta teoria unifica a prova de teoremas aparentemente não relacionados, fornece uma ferramenta analítica para provar resultados de unicidade para superfícies de Weingarten e revela a existência de diferenciais quadráticas holomorfas.

Para isso, organizamos o trabalho em três capítulos, como segue. No capítulo 1, fixamos as notações, definições e resultados fundamentais no decorrer do texto. Definimos par fundamental de uma superfície Σ, bem como as curvaturas média e extrínseca em relação à parametrizações locais e especiais, relação entre pontos umbílicos e a diferencial de Hopf, e a definição de par de Codazzi.

Já o capítulo 2 foi dividido em três seções. Na primeira seção, falamos sobre a generalização de resultados clássicos da teoria de superfícies para as formas espaciais acima mencionadas, utilizando como ferramenta os pares de Codazzi. Na segunda seção, definimos o tensor e a função de Codazzi associada a um par fundamental (I, II), e algumas aplicações envolvendo este tipo de função, que revela o quanto o par fundamental deixa de ser de Codazzi. E na terceira seção, sob certas condições em um par de Codazzi, exibimos um novo par de Codazzi na superfície Σ, cuja diferencial de Hopf é holomorfa, e este novo par fornece informações geométricas sobre o par inicial. Neste caso, trabalhamos com pares de Weingartein especiais.

Finalmente, no capítulo 3, mostramos uma aplicação da teoria de pares de Codazzi para classificar as superfícies de Weingarten especiais elípticas em $\mathbb{R}^3$, que satisfazem o princípio do máximo de Hopf. Além disso, estimamos a altura máxima que uma superfície desta classe de superfícies atinge.

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo deste capítulo, uma variedade diferenciável bidimensional ou simplesmente superfície diferenciável, será denotada por Σ. Vamos supor que tal superfície é orientável, e que ser diferenciável é sempre de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Para uma melhor compreensão do trabalho a ser apresentado, primeiramente destacamos resultados e definições essenciais para o seu desenvolvimento. Para mais informações consultar [9]. Achamos conveniente não apenas enunciá-los e sim demonstrá-los, pois servem de pré-requisitos para os demais capítulos. Começamos pela definição de *par fundamental*.

1.1 Par Fundamental

Sejam Σ uma superfície e (U, φ) um sistema de coordenadas em um ponto $p \in \Sigma$, com $U \subset \Sigma$ e $\varphi = (x, y)$. Indicamos por $T_p\Sigma$ o plano tangente a Σ em p, cuja base associada a φ é $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$.

O plano cotangente, denotado por $T_p^*\Sigma$, é o espaço dual de $T_p\Sigma$, com base $\{dx, dy\}$. Além disso, $\mathfrak{X}(\Sigma)$ representa o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em Σ, e $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ o conjunto das funções reais diferenciáveis em Σ.

Definição 1.1. *Um par fundamental em uma superfície Σ é um par (I, II) de formas quadráticas reais, onde I é uma métrica Riemanniana.*

Associado ao par fundamental (I, II) está o operador de Weingarten $S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$, definido por

$$II(X, Y) = I(SX, Y), \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \tag{1.1}$$

Esta definição é motivada pela teoria de superfícies imersas em uma variedade Riemanniana de dimensão 3. De uma forma geral para uma variedade diferenciável de dimensão n imersa em uma variedade Riemanniana de dimensão $n+m$, $m \geq 1$, como pode ser visto, por exemplo, nas referências [6] e [7]. Assim, dar um par fundamental em Σ é equivalente a dar uma métrica Riemanniana I em Σ, induzida pela imersão, e um operador S auto-adjunto, visto que a segunda forma fundamental II fica completamente determinada por I e S.

Em particular, temos a seguinte definição.

Definição 1.2. *A curvatura média H e a curvatura extrínseca K_e associadas ao par (I, II), são definidas em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais por*

$$H = H(I, II) = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}, \tag{1.2}$$

$$K_e = K(I, II) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \tag{1.3}$$

onde

$$\begin{aligned} I &= Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2, & (1.4)\\ II &= edx^2 + 2fdxdy + gdy^2, & (1.5) \end{aligned}$$

para parâmetros locais $(x, y) \in \Sigma$, em que $E, F, G, e, f, g \in C^\infty(U)$.

Além disso, as curvaturas principais do par fundamental (I, II) são

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K_e} \tag{1.6}$$

e

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K_e}, \tag{1.7}$$

em que k_1 é a curvatura máxima e k_2 a curvatura mínima, isto é, $k_1 \geq k_2$.

A partir de agora, vamos trabalhar com os resultados de Geometria Riemanniana complexificados. Para isto identifiquemos a parametrização (x, y) em $U \subset \Sigma$, onde Σ representa uma superfície de Riemann, com o parâmetro complexo $z = x + iy$, e denotemos por $T_p^{\mathbb{C}}\Sigma$ o plano tangente complexificado de $T_p\Sigma$

Recordemos que uma superfície conexa Σ é uma superfície de Riemann se admite um atlas $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ tal que $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $\varphi_j o \varphi_i^{-1}$ são sempre funções holomorfas.

Assim, dado um parâmetro $z = x + iy$, podemos definir campos de vetores em U por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

de modo que $\left\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right\}$ é uma base de $T_p^{\mathbb{C}}\Sigma$.

Definimos a base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right\}$, como sendo as 1-formas complexas locais

$$dz := dx + idy,$$

$$d\overline{z} := dx - idy.$$

Aqui, uma função $f : \Sigma \to \mathbb{C}$ é holomorfa se, e somente se, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ para toda parametrização local de Σ.

Sabemos que se ∇ é a conexão de Levi-Civita associada à métrica Riemanniana I, então em parâmetros locais (x, y), os símbolos de Christofell $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U), i, j, k = 1, 2$, são dados por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.8}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.9}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.10}$$

A seguir escreveremos as curvaturas H e K_e, e os símbolos de Christofell complexificados.

1.1.1 Complexificação das curvaturas média, extrínseca e símbolos de Christofell

Seja $(z, \overline{z})$ um parâmetro complexo local em Σ, onde $z = x + iy$ e Σ é uma superfície de Riemann. Podemos reescrever I e II como

$$I = Pdz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \overline{P}d\overline{z}^2, \tag{1.11}$$

$$II = Qdz^2 + 2\rho|dz|^2 + \overline{Q}d\overline{z}^2 \tag{1.12}$$

onde

$$|dz|^2 = dzd\overline{z},$$

e, usando (1.4) e (1.5),

$$\begin{aligned}
P &= I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}(E - G - 2iF), && (1.13)\\
\lambda &= I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{4}(E + G), && (1.14)\\
\overline{P} &= I\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{4}(E - G + 2iF), && (1.15)\\
Q &= I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}(e - g - 2if), && (1.16)
\end{aligned}$$

$$\rho = I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{4}(e+g), \tag{1.17}$$

$$\overline{Q} = I\left(S\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{4}(e-g+2if). \tag{1.18}$$

Proposição 1.1. *As curvaturas média e extrínseca de um par fundamental (I, II), em coordenadas complexas, são dadas por*

$$H = \frac{P\overline{Q} - 2\lambda\rho + \overline{P}Q}{2(|P|^2 - \lambda^2)}, \tag{1.19}$$

$$K_e = \frac{|Q|^2 - \rho^2}{|P|^2 - \lambda^2}. \tag{1.20}$$

Demonstração. De fato, pois de (1.13) a (1.18), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{|Q|^2 - \rho^2}{|P|^2 - \lambda^2} &= \frac{Q\overline{Q} - \rho^2}{P\overline{P} - \lambda^2} = \frac{\frac{1}{16}(e-g-2if)(e-g+2if) - \frac{1}{16}(e+g)^2}{\frac{1}{16}(E-G-2iF)(E-G+2iF) - \frac{1}{16}(E+G)^2} \\
&= \frac{(e-g)^2 - (2if)^2 - (e+g)^2}{(E-G)^2 - (2iF)^2 - (E+G)^2} \\
&= \frac{-4eg + 4f^2}{-4EG + 4F^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = K_e.
\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos a curvatura média H. ∎

Os símbolos de Christofell $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ da conexão ∇ também podem ser complexificados. Neste caso, tais símbolos estão associados a parametrização $(z, \overline{z})$, e são denotados por $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$, isto é,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \tag{1.21}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{C}\Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \tag{1.22}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \mathbb{C}\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \tag{1.23}$$

Há uma relação entre os símbolos de Christofell Γ_{ij}^k associados a parametrização (x, y), e os símbolos de Christofell $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$ associados a parametrização $(z, \overline{z})$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{4}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} - 2i\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) - 2i\left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\Gamma_{11}^1 - 2i\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\Gamma_{11}^2 - 2i\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-2i\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{22}^{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)+\left(\Gamma_{11}^{2}-2i\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{22}^{2}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial z}-i\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left(\Gamma_{11}^{1}-2i\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{22}^{1}+i\Gamma_{11}^{2}+2\Gamma_{12}^{2}-i\Gamma_{22}^{2}\right)\frac{\partial}{\partial z}\\
&\quad+\frac{1}{4}\left(\Gamma_{11}^{1}-2i\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{22}^{1}-i\Gamma_{11}^{2}-2\Gamma_{12}^{2}+i\Gamma_{22}^{2}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{4}\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{22}^{1}+2\Gamma_{12}^{2}\right)+i\left(\Gamma_{11}^{2}-\Gamma_{22}^{2}-2\Gamma_{12}^{1}\right)\right]\frac{\partial}{\partial z}\\
&\quad+\frac{1}{4}\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{22}^{1}-2\Gamma_{12}^{2}\right)-i\left(\Gamma_{11}^{2}-\Gamma_{22}^{2}+2\Gamma_{12}^{1}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \overline{z}},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \overline{z}},\\
\frac{\partial}{\partial y} &= i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, a partir de (1.21), temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} &= \frac{1}{4}\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{22}^{1}+2\Gamma_{12}^{2}\right)+i\left(\Gamma_{11}^{2}-\Gamma_{22}^{2}-2\Gamma_{12}^{1}\right)\right],\\
\mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} &= \frac{1}{4}\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{22}^{1}-2\Gamma_{12}^{2}\right)-i\left(\Gamma_{11}^{2}-\Gamma_{22}^{2}+2\Gamma_{12}^{1}\right)\right].
\end{aligned}
$$

De forma análoga, usando (1.22) e (1.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\Gamma_{12}^{1} &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{22}^{1}+i\left(\Gamma_{11}^{2}+\Gamma_{22}^{2}\right)\right],\\
\mathbb{C}\Gamma_{12}^{2} &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{22}^{1}-i\left(\Gamma_{11}^{2}+\Gamma_{22}^{2}\right)\right],\\
\mathbb{C}\Gamma_{22}^{1} &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{22}^{1}-2\Gamma_{12}^{2}+i\left(\Gamma_{11}^{2}-\Gamma_{22}^{2}+2\Gamma_{12}^{1}\right)\right],\\
\mathbb{C}\Gamma_{22}^{2} &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{22}^{1}+2\Gamma_{12}^{2}-i\left(\Gamma_{11}^{2}-\Gamma_{22}^{2}-2\Gamma_{12}^{1}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} &= \overline{\mathbb{C}\Gamma_{22}^{2}},\\
\mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} &= \overline{\mathbb{C}\Gamma_{22}^{1}},\\
\mathbb{C}\Gamma_{12}^{1} &= \overline{\mathbb{C}\Gamma_{12}^{2}}.
\end{aligned}
$$

Proposição 1.2. *Em coordenadas complexas $(z, \overline{z})$ escrevemos*

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}\left(\overline{P}P_z - 2\lambda\lambda_z + \lambda P_{\overline{z}}\right), \tag{1.24}$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} = -\frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}\left(PP_{\overline{z}} - 2P\lambda_z + \lambda P_z\right), \tag{1.25}$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}\left(\overline{P}P_{\overline{z}} - \lambda\overline{P}_z\right), \tag{1.26}$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}\left(P\overline{P}_z - \lambda P_{\overline{z}}\right), \tag{1.27}$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}\left(\overline{P}P_z - 2\overline{P}\lambda_{\overline{z}} + \lambda\overline{P}_{\overline{z}}\right), \tag{1.28}$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}\left(P\overline{P}_{\overline{z}} - 2\lambda\lambda_{\overline{z}} + \lambda\overline{P}_z\right). \tag{1.29}$$

Demonstração. Com efeito, de (1.21) obtemos

$$\begin{aligned}
I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} I\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \\
I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) + \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} I\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right).
\end{aligned}$$

Daí, por (1.13), (1.14) e (1.15),

$$\begin{aligned}
I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} P + \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2}\lambda, \\
I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1}\lambda + \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2}\overline{P}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a compatibilidade de ∇ com a métrica Riemanniana I e (1.13)-(1.14), obtemos

$$I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}P = \frac{1}{2}P_z$$

e

$$\begin{aligned}
I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) &= \frac{\partial}{\partial z} I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) - I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\lambda - I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \lambda_z - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \lambda_z - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}P = \lambda_z - \frac{1}{2}P_{\overline{z}}.
\end{aligned}$$

Assim, comparando as igualdades acima, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} P\mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} + \lambda\mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2}P_z \\ \lambda\mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} + \overline{P}\mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} = \lambda_z - \frac{1}{2}P_{\overline{z}}, \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{pmatrix} P & \lambda \\ \lambda & \overline{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_z \\ \lambda_z - \frac{1}{2}P_{\overline{z}} \end{pmatrix}.$$

Mas a matriz $\begin{pmatrix} P & \lambda \\ \lambda & \overline{P} \end{pmatrix}$ é invertível, pois I é uma métrica Riemanniana. Logo

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P & \lambda \\ \lambda & \overline{P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_z \\ \lambda_z - \frac{1}{2}P_{\overline{z}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{P\overline{P} - \lambda^2} \begin{pmatrix} \overline{P} & -\lambda \\ -\lambda & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_z \\ \lambda_z - \frac{1}{2}P_{\overline{z}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{|P|^2 - \lambda^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\overline{P}P_z - \lambda\lambda_z + \frac{\lambda}{2}P_{\overline{z}} \\ \frac{-\lambda}{2}P_z + P\lambda_z - \frac{1}{2}PP_{\overline{z}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2(|P|^2-\lambda^2)}(\overline{P}P_z - 2\lambda\lambda_z + \lambda P_{\overline{z}}) \\ -\frac{1}{2(|P|^2-\lambda^2)}(\lambda P_z - 2P\lambda_z + PP_{\overline{z}}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade de matrizes, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} &= \frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}(\overline{P}P_z - 2\lambda\lambda_z + \lambda P_{\overline{z}}), \\
\mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} &= -\frac{1}{2(|P|^2 - \lambda^2)}(\lambda P_z - 2P\lambda_z + PP_{\overline{z}}).
\end{aligned}$$

Os demais casos são calculados de forma análoga. ■

1.1.2 Parametrizações Especiais

Uma outra maneira de trabalhar com um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ é através das parametrizações especiais *isotérmicas* e *duplamente ortogonais*, que definiremos a seguir.

Definição 1.3 (Parâmetros Isotérmicos)**.** *Dizemos que os parâmetros locais (x, y) são isotérmicos com relação à métrica Riemanniana $I = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$, quando $E = G > 0$ e $F = 0$.*

Definição 1.4 (Parâmetro Conforme)**.** *Dizemos que o parâmetro complexo $z = x + iy$ é um parâmetro conforme com relação à métrica Riemanniana $I = Pdz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \overline{P}d\overline{z}^2$, quando $P = 0$.*

Observação 1.1. *O parâmetro complexo $z = x + iy$ é um parâmetro conforme para I se, e somente se, (x, y) são parâmetros isotérmicos.*

Assim, considerando um parâmetro conforme z, obtemos equações para uma par fundamental (I, II), expressas nas proposições abaixo.

Proposição 1.3. *Sejam (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ e z um parâmetro conforme local para I. Então*

$$I = 2\lambda|dz|^2, \tag{1.30}$$

$$II = Qdz^2 + 2H\lambda|dz|^2 + \overline{Q}d\overline{z}^2. \tag{1.31}$$

Além disso,

$$K_e = H^2 - \frac{|Q|^2}{\lambda^2}, \tag{1.32}$$

$$S\frac{\partial}{\partial z} = H\frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \tag{1.33}$$

$$S\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\overline{Q}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} + H\frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \tag{1.34}$$

Demonstração. Como $P = 0$, pois z é um parâmetro conforme local, então (1.19) se reduz a

$$H = \frac{\rho}{\lambda}. \tag{1.35}$$

Daí, (1.30) e (1.31) seguem da substituição de (1.35) e $P = 0$ em (1.11) e (1.12). Substituindo também (1.35) e $P = 0$ em (1.20), obtemos (1.32).

Seja S o operador de Weingartein associado ao par (I, II). Podemos escrever funções complexas locais a e b por:

$$S\frac{\partial}{\partial z} = a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Aplicando o produto interno na igualdade anterior por $\frac{\partial}{\partial z}$, e depois fazendo o mesmo para $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, temos respectivamente que

$$Q = I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = b\lambda,$$

$$\lambda H = I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = a\lambda,$$

donde segue (1.33).

Analogamente, encontramos (1.34). ■

Observação 1.2. *Dado um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ, II é uma métrica Riemanniana se, e somente se, $K_e(I, II) > 0$.*

Além disso, considerando um parâmetro conforme z em relação à métrica Riemanniana $II = Qdz^2 + 2H\lambda|dz|^2 + \overline{Q}d\overline{z}^2$, temos que $Q = 0$ e o par fundamental (II, I) é tal que

$$II = 2\rho|dz|^2, \tag{1.36}$$
$$I = Pdz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \overline{P}d\overline{z}^2. \tag{1.37}$$

Daí, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ, em que II é uma métrica Riemanniana, e z um parâmetro conforme com relação a II. Então*

$$S\frac{\partial}{\partial z} = K_e\left(\frac{H}{K_e}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{P}{\rho}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right). \tag{1.38}$$

Demonstração. De (1.19) e (1.20), usando que $Q = 0$,

$$H = \frac{-\lambda\rho}{|P|^2 - \lambda^2},$$
$$K_e = \frac{-\rho^2}{|P|^2 - \lambda^2},$$

donde segue que $H\rho = \lambda K_e \Leftrightarrow \dfrac{\lambda}{\rho} = \dfrac{H}{K_e}$.

Sendo

$$S\frac{\partial}{\partial z} = a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \overline{z}},$$

para funções complexas locais a e b, temos

$$0 = I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = aP + b\lambda,$$
$$\rho = I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = a\lambda + b\overline{P}.$$

Multiplicando por $\overline{P}$ a primeira equação e por λ a segunda equação, obtemos

$$a|P|^2 + b\lambda\overline{P} = 0, \tag{1.39}$$
$$a\lambda^2 + b\lambda\overline{P} = \rho\lambda. \tag{1.40}$$

Daí, obtemos

$$a(|P|^2 - \lambda^2) = -\rho\lambda$$

ou

$$a = \frac{-\rho\lambda}{|P|^2 - \lambda^2} = K_e\frac{\lambda}{\rho} = K_e\frac{H}{K_e}.$$

Substituindo a em (1.39), e fazendo os devidos cálculos, obtemos

$$b = -K_e \frac{P}{\rho}.$$

E isso prova (1.38). ■

Definição 1.5 (Parâmetros Duplamente Ortogonais). *Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ. Dizemos que os parâmetros locais (x, y) são duplamente ortogonais com relação a (I, II), se $F = f = 0$, em que $I = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$ e $II = edx^2 + 2fdxdy + gdy^2$.*

Para parâmetros duplamente ortogonais (x, y), a base coordenada $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ é tal que

$$S\frac{\partial}{\partial x} = k_1 \frac{\partial}{\partial x},\ S\frac{\partial}{\partial y} = k_2 \frac{\partial}{\partial y},$$

em que S é o operador de Weingarten e k_1, k_2 as curvaturas principais do par (I, II).

Daí, segue-se que

$$I = Edx^2 + Gdy^2, \tag{1.41}$$

$$II = k_1 Edx^2 + k_2 Gdy^2. \tag{1.42}$$

Proposição 1.5. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ e (x, y) parâmetros duplamente ortogonais para (I, II). Então os símbolos de Christoffel são dados por:*

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_x}{2E}, \tag{1.43}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_y}{2G}, \tag{1.44}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_y}{2E}, \tag{1.45}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_x}{2G}, \tag{1.46}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_x}{2E}, \tag{1.47}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{G_y}{2G}. \tag{1.48}$$

Demonstração. Análogo ao que fizemos na Proposição 1.2, temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}\left(GE_x - 2FF_x + FE_y\right), \\
\Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2(EG - F^2)}\left(EE_y - 2EF_x + FE_x\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left(GE_y - FG_x\right),\\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left(EG_x - FE_y\right),\\
\Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2(EG-F^2)}\left(GG_x - 2GF_y + FG_y\right),\\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left(EG_y - 2FF_y + FG_x\right).
\end{aligned}$$

Substituindo $F = f = 0$ nas equações acima, obtemos o que queríamos. ■

1.1.3 Pontos Umbílicos e a Diferencial de Hopf

Dado um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ, definimos a *curvatura assimétrica* de (I, II) por :

$$q = q(I, II) = H^2 - K_e = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4},$$

em que $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ e $K_e = k_1 k_2$.

Definição 1.6. *Seja (I, II) um par fundamental em Σ. Dizemos que (I, II) é um par umbílico no ponto $p \in \Sigma$ (ou $p \in \Sigma$ é um ponto umbílico do par (I, II)), se II é proporcional à I em p, isto é, $II = \alpha I$ em p, para algum α real.*

De forma equivalente à definição anterior, dizemos que um par fundamental é umbílico em $p \in \Sigma$ quando acontece uma das seguintes situações:

- $k_1(p) = k_2(p)$. Neste caso, $H^2 = K_e$ em p.
- $S = \beta Id_p$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$, sendo Id a aplicação identidade.
- $q(p) = 0$.

Observação 1.3. *O par (I, II) é totalmente umbílico, se $q = 0\ \forall\, p \in \Sigma$.*

Definição 1.7. *Sejam z um parâmetro conforme local e (I, II) um par fundamental em Σ dado por (1.11) e (1.12) . Dizemos que a forma quadrática Qdz^2 de II é a diferencial de Hopf do par (I, II). Noutras palavras, a parte $(2, 0)$ de II é a diferencial de Hopf de (I, II).*

Proposição 1.6. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ e z um parâmetro conforme local em Σ com respeito a I. Então (I, II) é umbílico em $p \in \Sigma$ se, e somente se, $Q(p) = 0$.*

Demonstração. Sendo z um parâmetro conforme local para I, temos:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\rho}{\lambda},\\
K_e &= \frac{\rho^2 - |Q|^2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Segue das expressões acima que

$$|Q|^2 = q\lambda^2. \tag{1.49}$$

De (1.49) concluímos que, (I, II) é umbílico em $p \in \Sigma$ se, e somente se, $Q(p) = 0$. ■

Da proposição anterior, observamos que a diferencial de Hopf determina a umbilicidade do par fundamental (I, II) nos pontos da superfície Σ.

1.2 Par de Codazzi

Quando o par fundamental (I, II) verifica, de forma abstrata, a equação de Codazzi de uma imersão isométrica para superfícies em formas espaciais $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, veja, por exemplo, [6], esta equação se escreve

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX = S[X, Y], \; X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

onde S é o operador de Weingarten associado a (I, II) e ∇ representa a conexão de Levi-Civita associada à métrica I.

Assim, temos a seguinte definição.

Definição 1.8. *Dizemos que um par fundamental (I, II), com operador de Weingarten S, é uma par de Codazzi se*

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = 0, \; \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \tag{1.50}$$

Exemplo 1.1. *A primeira e a segunda formas fundamentais de uma superfície imersa em uma forma espacial de dimensão 3 é um par de Codazzi.*

Um caso particular de par de Codazzi é o chamado par de Weingarten que satisfaz uma relação não trivial $W(H(I, II), K_e(I, II)) = 0$, onde W é um funcional diferenciável, definido em um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ que contém o conjunto de pontos $\{(H(p), K_e(p)) : p \in \Sigma\}$. Outros tipos de pares de Codazzi serão estudados nos próximos capítulos.

Mas exemplos de pares de Codazzi podem ser encontrados em [17] e [19].

Capítulo 2

Teoria dos Pares de Codazzi

Neste capítulo, usamos a teoria abstrata de pares de Codazzi para generalizar alguns resultados clássicos da teoria de superfície nas formas espaciais $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, que dependem, em essência, da *equação de Codazzi* da imersão, tais como, o teorema de Hopf que afirma que as superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante são totalmente umbílicas e o teorema de Liebmann, que afirma que as únicas superfícies completas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante positiva são as esferas totalmente umbílicas. Além disso, usamos esta abordagem abstrata para obter algumas aplicações quando estudamos as superfícies de Weingarten especiais, dentre outros resultados que comentaremos mais a frente.

2.1 Pares de Codazzi na Teoria de superfícies

Começamos por enunciar dois resultados, um de *Análise Complexa* e o outro da *Teoria de Superfícies*, que farão parte da demonstração do primeiro teorema desta seção.

Lema 2.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um conjunto aberto U de $\mathbb{C}$. Suponha que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right| \leq h(z)|f(z)|,$$

onde h é uma função real contínua, não negativa. Além disso, suponha que $z_0 \in U$ seja um zero de f. Então existe uma vizinhança $V \subset U$ de z_0, onde ou $f \equiv 0$ ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), z \in V,$$

para algum $k \geq 1$ e uma função contínua $f_k(z)$, tal que $f_k(z_0) \neq 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que o zero de f é a origem 0 e U é o disco de centro 0 e raio R. A prova do lema é consequência das seguintes afirmações.

Afirmação 1:

Com as mesmas hipóteses do lema e o fato de $\lim_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$, para algum $k \geq 1$. Então $\lim_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{z^k}$ existe.

Afirmação 2:

Com as mesmas hipóteses do lema, se $\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z^{k-1}} = 0 \ \forall\ k \geq 1$, então $f \equiv 0$ em alguma vizinha de 0.

Com efeito, da afirmação 2, sabemos que se f não é identicamente nula em uma vizinhança de 0, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$, mas $\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z^{k}}$ pode não existir. Porém a afirmação 1 nos diz que $\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z^{k}} = c \neq 0$, isto é, existe tal limite e é não nulo. Logo, podemos escrever

$$f(z) = cz^k + R, \quad \lim_{z\to 0}\frac{R}{z^k} = 0,$$

ou

$$f(z) = z^k f_k(z), \quad f_k(z) = c + \frac{R}{z^k},$$

tal que $f_k(0) = c \neq 0$, e isto prova o lema. ■

As provas das afirmações 1 e 2, podem ser encontradas em [3], onde é usado a teoria de integrais para resolvê - las.

Observação 2.1. *O segundo caso do Lema* 2.1*, significa que os zeros de f são isolados e de índice negativo.*

Teorema 2.1 (Teorema de Poincaré)**.** *A soma dos índices de um campo de vetores diferenciável X com singularidades isoladas em uma superfície compacta Σ é igual a característica de Euler-Poincaré de Σ.*

Demonstração. Ver [5]. ■

Como consequência do teorema de Poincaré temos os seguintes corolários:

Corolário 2.1. *Se Σ é uma esfera topológica, então todos os campos vetoriais com singularidades isoladas têm a soma de seus índices igual a* 2*.*

Corolário 2.2. *Se Σ é um toro topológico, então todos os campos vetoriais com singularidades isoladas têm a soma de seus índices igual a* 0*.*

O teorema abaixo, generaliza os teoremas de Hopf e Liebmann comentados na introdução deste capítulo.

Teorema 2.2. *Seja (I, II) uma par de Codazzi em uma superfície Σ. Se (I, II) é um par de Weingarten para um funcional $W(x, y)$ tal que $\forall\ t$,*

$$W_x(t, t^2) + 2tW_y(t, t^2) \neq 0, \tag{2.1}$$

então ou os pontos umbílicos de (I, II) são isolados e de índice negativo ou o par é totalmente umbílico. Em particular, se Σ é uma esfera topológica, então (I, II) é totalmente umbílico.

Demonstração. Seja z um parâmetro conforme local com relação à métrica I. Então o par fundamental (I, II) se escreve como em (1.30) - (1.31), e as equações (1.24), (1.25), (1.28) e (1.29) se reduzem a

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^{1} = \frac{\lambda_z}{\lambda},\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^{2} = 0,\ \mathbb{C}\Gamma_{22}^{1} = 0,\ \mathbb{C}\Gamma_{22}^{2} = \frac{\lambda_{\overline{z}}}{\lambda}.$$

Consequentemente, (1.21) e (1.23) são dadas por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\lambda_z}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.2}$$
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\lambda_{\overline{z}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \tag{2.3}$$

Em particular, para $X = \dfrac{\partial}{\partial z}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ e $\left[\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right] = 0$, a equação de Codazzi (1.50), fica

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} S\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Usando (1.33) e (1.34), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\left(\frac{\overline{Q}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} + H\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \\
&= \frac{\overline{Q}}{\lambda}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\overline{Q}}{\lambda}\right)_z\frac{\partial}{\partial z} + H\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + H_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} S\frac{\partial}{\partial z} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\left(H\frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \\
&= H\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial z} + H_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q}{\lambda}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + \left(\frac{Q}{\lambda}\right)_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}
\end{aligned}$$

Substituindo as igualdade acima na equação de Codazzi, e usando (2.2)-(2.3), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{Q}}{\lambda}\frac{\lambda_z}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\overline{Q}}{\lambda}\right)_z\frac{\partial}{\partial z} + H_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - H_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{Q}{\lambda}\frac{\lambda_{\overline{z}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \left(\frac{Q}{\lambda}\right)_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= 0 \\
\left[\frac{\overline{Q}\lambda_z}{\lambda^2} + \left(\frac{\overline{Q}}{\lambda}\right)_z - H_{\overline{z}}\right]\frac{\partial}{\partial z} + \left[H_z - \frac{Q\lambda_{\overline{z}}}{\lambda^2} - \left(\frac{Q}{\lambda}\right)_{\overline{z}}\right]\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= 0 \\
\left(\frac{\overline{Q}\lambda_z}{\lambda^2} + \frac{\overline{Q}_z\lambda - \overline{Q}\lambda_z}{\lambda^2} - H_{\overline{z}}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \left(H_z - \frac{Q\lambda_{\overline{z}}}{\lambda^2} + \frac{-Q_{\overline{z}}\lambda + Q\lambda_{\overline{z}}}{\lambda^2}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= 0 \\
\left(\frac{\overline{Q}_z\lambda}{\lambda^2} - H_{\overline{z}}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \left(H_z - \frac{Q_{\overline{z}}\lambda}{\lambda^2}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= 0.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ são linearmente indepentententes, então

$$\begin{aligned} \frac{\overline{Q}_z}{\lambda} - H_{\overline{z}} &= 0, \\ H_z - \frac{Q_{\overline{z}}}{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

ou

$$\overline{Q}_z = \lambda H_{\overline{z}}, \tag{2.4}$$

$$Q_{\overline{z}} = \lambda H_z. \tag{2.5}$$

Derivando (1.32) em relação a z, obtemos

$$(K_e)_z = 2HH_z - |Q|^2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z - \frac{Q_z\overline{Q} + Q\overline{Q}_z}{\lambda^2}. \tag{2.6}$$

Por hipótese $W(H, K_e) = 0$, em que H e K_e são as curvaturas média e extrínseca de (I, II). Então

$$H_z W_H(H, K_e) + (K_e)_z W_{K_e}(H, K_e) = 0.$$

Substituindo (2.5) e (2.6), na equação acima, temos

$$\begin{aligned} H_z W_H(H, K_e) + \left[2HH_z - |Q|^2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z - \frac{Q_z\overline{Q} + Q\overline{Q}_z}{\lambda^2}\right] W_{K_e}(H, K_e) = 0 \\ [W_H(H, K_e) + 2HW_{K_e}(H, K_e)]H_z = W_{K_e}(H, K_e)\left[|Q|^2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z + \frac{Q_z\overline{Q} + Q\overline{Q}_z}{\lambda^2}\right] \\ [W_H(H, K_e) + 2HW_{K_e}(H, K_e)]Q_{\overline{z}} = \lambda W_{K_e}(H, K_e)\left[|Q|^2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z + \frac{Q_z\overline{Q} + Q\overline{Q}_z}{\lambda^2}\right]. \end{aligned}$$

Se $p \in \Sigma$ é um ponto umbílico de (I, II), isto é, $H^2 = K_e$ em p, então

$$[W_H(H, H^2) + 2HW_{K_e}(H, H^2)]Q_{\overline{z}} = \lambda W_{K_e}(H, H^2)\left[|Q|^2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z + \frac{Q_z\overline{Q} + Q\overline{Q}_z}{\lambda^2}\right],$$

donde

$$g := W_H(H, H^2) + 2HW_{K_e}(H, H^2) \neq 0 \;\forall\; H(p),$$

usando (2.1).

Em particular $g \neq 0$ em uma vizinhança U de p.

Além disso,

$$\begin{aligned}
|gQ_{\overline{z}}| &= |\lambda W_{K_e}(H,K_e)|\left| |Q|^2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z + \frac{Q_z\overline{Q}+Q\overline{Q}_z}{\lambda^2}\right| \\
&\leq |\lambda W_{K_e}(H,K_e)|\left[|Q|^2\left|\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z\right| + \frac{|Q_z||\overline{Q}|+|Q||\overline{Q}_z|}{|\lambda^2|}\right] \\
&= |\lambda W_{K_e}(H,K_e)|\left[|Q|\left|\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_z\right| + \frac{|Q_z|+|\overline{Q}_z|}{|\lambda^2|}\right]|Q| \\
|Q_{\overline{z}}| &\leq h|Q|,
\end{aligned}$$

onde $h = \dfrac{|\lambda W_K(H,K_e)|}{|g|}\left[|Q|\left|\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right)_z\right| + \dfrac{|Q_z|+|\overline{Q}_z|}{|\lambda^2|}\right]$.

Note que h é contínua na vizinhança U de p, pois $g \neq 0$ nesta vizinhança. Logo, pelo Lema 2.1, $Q \equiv 0$ em U ou p é um zero isolado de índice negativo de Q.

Em particular, se Σ é uma esfera topológica, então pelo Corolário 2.1 a diferencial de Hopf do par (I, II) é identicamente nula, isto é, (I, II) é totalmente umbílico. ■

O resultado acima também é válido, por exemplo, para superfícies que são homeomorfas ao toro, conforme o

Corolário 2.3. *Seja Σ um toro topológico sob as hipóteses do Teorema 2.2, então o par (I, II) ou é totalmente umbílico ou livre de pontos umbílicos.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, se (I, II) não é totalmente umbílico, então os pontos umbílicos de (I, II) são isolados e de índice negativo. Mas pelo Corolário 2.2, concluímos que o par (I, II) é livre de pontos umbílicos. ■

Agora, usaremos a teoria abstrata de pares de Codazzi para unificar a prova de dois teoremas da teoria de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, aparentemente não relacionados, como consequência do Teorema 2.2. São eles: *teorema de Bonnet* e *Unicidade do Problema de Christoffel*.

O teorema de Bonnet diz que *duas imersões isométricas de uma superfície homeomorfa a uma esfera em $\mathbb{R}^3$, com a mesma curvatura média, coincidem, a menos de isometria de* $\mathbb{R}^3$. Vamos primeiramente demonstrar a versão abstrata desse teorema.

Corolário 2.4 (Teorema de Bonnet Abstrato)**.** *Sejam Σ uma esfera topológica, (I, II_1) e (I, II_2) dois pares de Codazzi com a mesma métrica Riemanniana I. Se ambos os pares têm a mesma curvatura média, então $II_1 = II_2$.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que o par fundamental $(I, II_1 - II_2)$ é de Codazzi.

Com efeito, seja $S = S_1 - S_2$ o operador de Weingarten associado ao par $(I, II_1 - II_2)$, em que S_1 e S_2 são respectivamente os operadores de Weingarten associados a (I, II_1) e (I, II_2).

Assim,

$$
\begin{aligned}
\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] &= \nabla_X (S_1 - S_2)Y - \nabla_Y (S_1 - S_2)X - (S_1 - S_2)[X,Y] \\
&= \nabla_X S_1 Y - \nabla_X S_2 Y - \nabla_Y S_1 X + \nabla_Y S_2 X - S_1[X,Y] \\
&\quad + S_2[X,Y] \\
&= (\nabla_X S_1 Y - \nabla_Y S_1 X - S_1[X,Y]) - (\nabla_X S_2 Y - \nabla_Y S_2 X \\
&\quad - S_2[X,Y]).
\end{aligned}
$$

Como (I, II_1) e (I, II_2) são pares de Codazzi, então

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = 0.$$

Logo $(I, II_1 - II_2)$ é um par de Codazzi.

Por hipótese, sendo $H(I, II_1) = H(I, II_2)$, segue que $H(I, II_1 - II_2) \equiv 0$.

Em particular, tomando um parâmetro conforme local z, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
I &= 2\lambda |dz|^2, \\
II_i &= Q_i dz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \overline{Q_i} d\overline{z}^2, \ i = \ 1, \ 2.
\end{aligned}
$$

Assim o par $(I, II_1 - II_2)$ é tal que $II_1 - II_2 = Qdz^2 + \overline{Q}dz^2$, onde $Q = Q_1 - Q_2$.

Além disso, considerando o funcional $W(x,y) = x$, temos que

$$W_x(t, t^2) + 2tW_y(t, t^2) = 1 + 2t.0 = 1 \neq 0.$$

Como $W(H, K_e) = H = 0$, em que H e K_e são as curvaturas média e extrínseca de $(I, II_1 - II_2)$, então $(I, II_1 - II_2)$ é um par de Weingarten. E sendo Σ uma esfera topológica, concluímos, pelo Teorema 2.2, que esse par é totalmente umbílico, ou seja, $Q \equiv 0$. Portanto $II_1 = II_2$, como queríamos demonstrar. ■

Para o próximo resultado, precisaremos da definição da terceira forma fundamental em uma superfície Σ.

Definição 2.1. *Seja (I, II) um par fundamental em Σ com curvaturas média e extrínseca H e K_e. Definimos a terceira forma fundamental de Σ por*

$$III(X,Y) = -K_e I(X,Y) + 2HII(X,Y), \ X, \ Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \tag{2.7}$$

Ver, por exemplo em [17].

Em particular, se Σ é uma superfície imersa em uma variedade Riemanniana de dimensão 3, então a terceira forma fundamental é dada por

$$III(X,Y) = I(SX, SY), \ X, \ Y \in \mathfrak{X}(\Sigma), \tag{2.8}$$

onde S é o operador de Weingarten em Σ.

Corolário 2.5. *Sejam Σ uma esfera topológica e $(I_i, II_i), i = 1, 2$, dois pares de Codazzi com curvatura média H_i e curvatura extrínseca K_e^i. Se ambos os pares têm a mesma Terceira Forma Fundamental com $K_e^i(p) \neq 0$, $\forall\ p \in \Sigma$ e $\frac{H_1}{K_e^1} = \frac{H_2}{K_e^2}$, então $(I_1, II_1) = (I_2, II_2)$.*

Demonstração. Sendo $K_e^i(p) \neq 0\ \forall\ p \in \Sigma$, então o operador de Weingarten S_i associado ao par (I_i, II_i) é invertível. Consequentemente S_i^2 também é invertível. Assim III é uma métrica Riemanniana em Σ. Logo (III, II_i) é um par fundamental.

Seja $\widehat{S}_i$ o operador de Weingarten associado ao par (III, II_i). Então por (1.1)

$$II_i(X, Y) = III(\widehat{S}_i X, Y),\ X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Usando (1.1) e (2.8) na igualdade acima, temos

$$I_i(S_i X, Y) = II_i(X, Y) = III(\widehat{S}_i X, Y) = I_i(S_i \widehat{S}_i X, S_i Y),\ X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

Segue de

$$I_i(X, S_i Y) = I_i(S_i \widehat{S}_i X, S_i Y),$$

que $S_i \widehat{S}_i = Id$, isto é, $\widehat{S}_i = S_i^{-1}$.

Mostremos agora que $\overline{\nabla}$ definida por $S_i \overline{\nabla}_X Y = \nabla^i_X S_i Y$ é a conexão de Levi-Civita de III em Σ, em que ∇^i é a conexão de Levi-Civita associada aos pares de Codazzi (I_i, II_i), $i, j = 1, 2$.

Sejam $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f,\ g \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$.

Usando as propriedades da conexão afim ∇^i e a definição de $\overline{\nabla}$, temos:

1. $\overline{\nabla}$ é uma conexão afim.

   De fato, pois

$$\begin{aligned} i)\ S_i \overline{\nabla}_{fX+gY} Z &= \nabla^i_{fX+gY} S_i Z \\ &= f \nabla^i_X S_i Z + g \nabla^i_Y S_i Z \\ &= f S_i \overline{\nabla}_X Z + g S_i \overline{\nabla}_Y Z \\ &= S_i (f \overline{\nabla}_X Z + g \overline{\nabla}_Y Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ S_i \overline{\nabla}_X (Y + Z) &= \nabla^i_X S_i (Y + Z) \\ &= \nabla^i_X S_i Y + \nabla^i_X S_i Z \\ &= S_i \overline{\nabla}_X Y + S_i \overline{\nabla}_X Z \\ &= S_i (\overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X Z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
iii)\ S_i\overline{\nabla}_X(fY) &= \nabla^i_X S_i(fY)\\
&= \nabla^i_X f(S_iY)\\
&= f\nabla^i_X S_iY + X(f)S_iY\\
&= fS_i\overline{\nabla}_X Y + X(f)S_iY\\
&= S_i(f\overline{\nabla}_X Y + X(f)Y)
\end{aligned}
$$

2. $\overline{\nabla}$ é simétrica.

   De fato, pois

$$
\begin{aligned}
S_i(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) &= S_i\overline{\nabla}_X Y - S_i\overline{\nabla}_Y X\\
&= \nabla^i_X S_iY - \nabla^i_Y S_iX\\
&= S_i[X,Y].
\end{aligned}
$$

   Visto que (I_i, II_i) é um par de Codazzi.

3. $\overline{\nabla}$ é compatível com a métrica Riemanniana III.

   De fato, pois

$$
\begin{aligned}
III(\overline{\nabla}_X Y, Z) + III(Y, \overline{\nabla}_X Z) &= I_i(S_i\overline{\nabla}_X Y, S_iZ) + I_i(S_iY, S_i\overline{\nabla}_X Z)\\
&= I_i(\nabla^i_X S_iY, S_iZ) + I_i(S_iY, \nabla^i_X S_iZ)\\
&= XI_i(S_iY, S_iZ)\\
&= XIII(Y,Z).
\end{aligned}
$$

Como o operador de Weingarten associado ao par (III, II_i) é S^{-1}, então usando a definição de $\overline{\nabla}$ e o fato do par (I_i, II_i) ser de Codazzi, temos

$$
\begin{aligned}
S_i(\overline{\nabla}_X S^{-1}Y - \overline{\nabla}_Y S^{-1}X - S^{-1}[X,Y]) &= S_i\overline{\nabla}_X S^{-1}Y - S_i\overline{\nabla}_Y S^{-1}X - S_iS^{-1}[X,Y]\\
&= \nabla^i_X S_iS^{-1}Y - \nabla^i_Y S_iS^{-1}X - S_iS^{-1}[X,Y]\\
&= \nabla^i_X Y - \nabla^i_Y X - [X,Y]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo (III, II_i) é um par de Codazzi.

Sendo auto-adjunto o operador S_1, existe uma base ortonormal, em relação à métrica Riemanniana I_1, $\{X_1, X_2\}$ de $T_p\Sigma$ tal que $S_1X_1 = \alpha_1X_1$ e $S_1X_2 = \alpha_2X_2$, isto é, X_1, X_2 são autovetores e α_1, α_2 são autovalores de S_1. Observamos que $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, 2$, pois $K^1_e \neq 0$. Além disso,

$$
I_1(X_j, X_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j = k\\ 0, & \text{se} \quad j \neq k \end{cases}.
$$

Logo para a métrica Riemanniana III, temos:

$$\begin{aligned} III(X_j, X_k) &= I_1(S_1X_j, S_1X_k) \\ &= I_1(\alpha_j X_j, \alpha_k X_k) \\ &= \alpha_j\alpha_k I_1(X_j, X_k) \\ &= \alpha_j\alpha_k\delta_{jk},\ j,k = 1,2 \end{aligned}$$

Assim, uma base ortonormal com relação à métrica III é $\{Y_1, Y_2\}$, em que $Y_1 = \frac{1}{\alpha_1}X_1$ e $Y_2 = \frac{1}{\alpha_2}X_2$. Segue que

$$\begin{aligned} 2H(III, II_1) &= II_1(Y_1, Y_1) + II_1(Y_2, Y_2) \\ &= I_1(S_1Y_1, Y_1) + I_1(S_1Y_2, Y_2) \\ &= \frac{1}{\alpha_1^2}I_1(S_1X_1, X_1) + \frac{1}{\alpha_2^2}I_1(S_1X_2, X_2) \\ &= \frac{1}{\alpha_1}I_1(X_1, X_1) + \frac{1}{\alpha_2}I_1(X_2, X_2) \\ &= \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \\ &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} H(III, II_1) &= \frac{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2} \\ &= \frac{H_1}{K_e^1} \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$H(III, II_2) = \frac{H_2}{K_e^2}.$$

Daí, $H(III, II_1) = H(III, II_2)$, pois por hipótese $\dfrac{H_1}{K_e^1} = \dfrac{H_2}{K_e^2}$. Consequentemente, usando o Corolário 2.4 para os pares de Codazzi (III, II_1) e (III, II_2), temos $II_1 = II_2$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} K_e(III, II_1) &= II_1(Y_1, Y_2)II_1(Y_2, Y_2) \\ &= I_1(S_1Y_1, Y_1)I_1(S_1Y_2, Y_2) \\ &= \frac{1}{\alpha_1}I_1(X_1, X_1)\frac{1}{\alpha_2}I_1(X_2, X_2) \\ &= \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} \\ &= \frac{1}{K_e^1} \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos

$$K_e(III, II_2) = \frac{1}{K_e^2}.$$

Segue destas expressões que $\frac{1}{K_e^1} = \frac{1}{K_e^2}$. Consequentemente $K_e^1 = K_e^2$.

Por fim, usando (2.7), temos que

$$I_i = -\frac{1}{K_e^i} + 2\frac{H_i}{K_e^i}II_i.$$

Portanto $I_1 = I_2$.

■

O corolário anterior é a versão abstrata do teorema da unicidade do problema de Christoffel. Lembramos que, em $\mathbb{R}^3$, este resultado nos diz que *duas imersões isométricas de uma superfície homeomorfa a uma esfera*, com as mesmas hipóteses dadas, coincidem.

Observação 2.2. *Os teoremas de Bonnet e Unicidade do Problema de Christoffel, ambos em $\mathbb{R}^3$, são consequências do teorema de Bonnet abstrato, quando é aplicado para pares de Codazzi (I, II) e (III, II), respectivamente. Ressaltamos que em $\mathbb{R}^3$, estes resultados são provados usando a teoria de integração em superfícies.*

O próximo resultado é uma generalização de um teorema provado por Grove em [12] sobre a rigidez de ovalóides. Ele provou que dois ovalóides em $\mathbb{R}^3$, com a mesma segunda forma fundamental e curvatura extrínseca, são congruentes.

Observação 2.3. *As superfícies conexas e compactas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana positiva são chamadas ovalóides.*

Teorema 2.3 (Teorema de Grove Abstrato)**.** *Seja Σ uma esfera topológica e (I_i, II), $i = 1$, 2, dois pares de Codazzi em Σ, com a mesma curvatura extrínseca $K_e > 0$. Então $I_1 = I_2$.*

Demonstração. Sendo $K_e(I_i, II) > 0$, então II é uma métrica Riemanniana em Σ. Tomando um parâmetro conforme local z para II, temos que

$$\begin{aligned} I_i &= P_i dz^2 + 2\lambda_i |dz|^2 + \overline{P_i} d\overline{z}^2, \\ II &= 2\rho |dz|^2. \end{aligned}$$

Assim, as curvaturas média e extrínseca do par (I_i, II) são dadas por

$$H_i(I_i, II) = \frac{-2\lambda_i \rho}{2(|P_i|^2 - \lambda_i^2)} = \frac{\lambda_i \rho}{\lambda_i^2 - |P_i|^2}, \tag{2.9}$$

e

$$K_e(I_i, II) = \frac{-\rho^2}{|P_i|^2 - \lambda_i^2} = \frac{\rho^2}{\lambda_i^2 - |P_i|^2}. \tag{2.10}$$

Denotemos por ∇^i a conexão de Levi-Civita associada à métrica I_i, e escrevemos

$$\begin{aligned} \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} &= \Gamma^{1,i}_{11} \frac{\partial}{\partial z} + \Gamma^{2,i}_{11} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \\ \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \Gamma^{1,i}_{12} \frac{\partial}{\partial z} + \overline{\Gamma^{1,i}_{12}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \end{aligned}$$

onde $\overline{\Gamma^{1,i}_{12}} = \Gamma^{2,i}_{12}$.

Sendo (I_i, II) um par de Codazzi, temos que

$$\nabla^i_{\frac{\partial}{\partial z}} S_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} S_i \frac{\partial}{\partial z} = 0. \tag{2.11}$$

Fazendo o produto interno em (2.11) por $\dfrac{\partial}{\partial z}$, e usando a compatibilidade de ∇^i com I_i, obtemos

$$I_i \left(\nabla^i_{\frac{\partial}{\partial z}} S_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right) - I_i \left(\nabla^i_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} S_i \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right) - I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial \overline{z}} I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) + I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial z}, \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0. \tag{2.12}$$

Note que,

$$I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \rho$$

e

$$I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = Q = 0.$$

Logo (2.12) fica,

$$\rho_z - I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) + I_i \left(S_i \frac{\partial}{\partial z}, \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0.$$

Mas,

$$I_i\left(S_i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) = I_i\left(S_i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \Gamma^{1,i}_{11}\frac{\partial}{\partial z} + \Gamma^{2,i}_{11}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \Gamma^{1,i}_{11}\rho + \Gamma^{2,i}_{11}\overline{Q} = \Gamma^{1,i}_{11}\rho$$

e

$$I_i\left(S_i\frac{\partial}{\partial z}, \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}\frac{\partial}{\partial z}\right) = I_i\left(S_i\frac{\partial}{\partial z}, \Gamma^{1,i}_{12}\frac{\partial}{\partial z} + \overline{\Gamma^{1,i}_{12}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \Gamma^{1,i}_{12}Q + \overline{\Gamma^{1,i}_{12}}\rho = \overline{\Gamma^{1,i}_{12}}\rho.$$

Assim,

$$\rho_z = \Gamma^{1,i}_{11}\rho - \overline{\Gamma^{1,i}_{12}}\rho = (\Gamma^{1,i}_{11} - \overline{\Gamma^{1,i}_{12}})\rho, \tag{2.13}$$

em que

$$\Gamma^{1,i}_{11} = \frac{1}{2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)}(2\lambda_i\lambda_{iz} - \overline{P_i}P_{iz} - \lambda_i P_{i\bar{z}}), \tag{2.14}$$

$$\overline{\Gamma^{1,i}_{12}} = \frac{1}{2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)}(\lambda_i P_{i\bar{z}} - \overline{P_{iz}}P_i). \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15), escrevemos

$$\begin{aligned} 2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)\Gamma^{1,i}_{11} &= 2\lambda_i\lambda_{iz} - \overline{P_i}P_{iz} - \lambda_i P_{i\bar{z}}, \\ \lambda_i P_{i\bar{z}} &= 2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)\overline{\Gamma^{1,i}_{12}} + \overline{P_{iz}}P_i. \end{aligned}$$

Daí,

$$2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)\Gamma^{1,i}_{11} = 2\lambda_i\lambda_{iz} - \overline{P_i}P_{iz} - 2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)\overline{\Gamma^{1,i}_{12}} - \overline{P_{iz}}P_i,$$

que implica em

$$2\lambda_i\lambda_{iz} = 2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)(\Gamma^{1,i}_{11} + \overline{\Gamma^{1,i}_{12}}) + \overline{P_i}P_{iz} + \overline{P_{iz}}P_i. \tag{2.16}$$

Por outro lado,

$$(\lambda_i^2 - |P_i|^2)_z = 2\lambda_i\lambda_{iz} - P_{iz}\overline{P_i} - P_i\overline{P_{iz}}.$$

Substituindo (2.16) na expressão acima, resulta que

$$(\lambda_i^2 - |P_i|^2)_z = 2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)(\Gamma^{1,i}_{11} + \overline{\Gamma^{1,i}_{12}}). \tag{2.17}$$

Derivando (2.10), obtemos

$$(K_e)_z = \frac{2\rho\rho_z(\lambda_i^2 - |P_i|^2) - \rho^2(\lambda_i^2 - |P_i|^2)_z}{(\lambda_i^2 - |P_i|^2)^2},$$

e por (2.13) e (2.17),

$$
\begin{aligned}
(K_e)_z &= \frac{2\rho^2(\Gamma_{11}^{1,i}-\overline{\Gamma_{12}^{1,i}})(\lambda_i^2-|P_i|^2)-2\rho^2(\lambda_i^2-|P_i|^2)(\Gamma_{11}^{1,i}+\overline{\Gamma_{12}^{1,i}})}{(\lambda_i^2-|P_i|^2)^2}\\
&= \frac{2\rho^2(\lambda_i^2-|P_i|^2)(\Gamma_{11}^{1,i}-\overline{\Gamma_{12}^{1,i}}-\Gamma_{11}^{1,i}-\overline{\Gamma_{12}^{1,i}})}{(\lambda_i^2-|P_i|^2)^2}\\
&= \frac{-4\rho^2\overline{\Gamma_{12}^{1,i}}}{\lambda_i^2-|P_i|^2}\\
&= -4K_e\overline{\Gamma_{12}^{1,i}}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$(K_e)_{\overline{z}} = -4K_e\Gamma_{12}^{1,i}.$$

Como

$$
\begin{aligned}
P_{i\overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial\overline{z}}I_i\left(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= 2I_i\left(\nabla^i_{\frac{\partial}{\partial\overline{z}}}\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= 2(\Gamma_{12}^{1,i}P_i+\overline{\Gamma_{12}^{1,i}}\lambda_i).
\end{aligned}
$$

Então substituindo

$$\Gamma_{12}^{1,i} = -\frac{1}{4K_e}(K_e)_{\overline{z}}$$

e

$$\overline{\Gamma_{12}^{1,i}} = -\frac{1}{4K_e}(K_e)_z,$$

segue que

$$P_{i\overline{z}} = -\frac{1}{2K_e}((K_e)_{\overline{z}}P_i+(K_e)_z\lambda_i). \tag{2.18}$$

Por (2.9) e (2.10)

$$\lambda_i = \frac{\rho}{K_e}H_i,\ i=1,2 \ e\ \rho,K_e>0.$$

Assim,

$$|\lambda_1-\lambda_2| = |\frac{\rho}{K_e}H_1-\frac{\rho}{K_e}H_2| = \frac{\rho}{K_e}|H_1-H_2| = \frac{\rho}{K_e}\sqrt{(H_1-H_2)^2}. \tag{2.19}$$

Afirmamos que

$$\sqrt{(H_1-H_2)^2} \le |\sqrt{H_1^2-K_e}-\sqrt{H_2^2-K_e}|. \tag{2.20}$$

De fato, pois de (2.20)

$$\begin{aligned}
(H_1 - H_2)^2 &\leq (\sqrt{H_1^2 - K_e} - \sqrt{H_2^2 - K_e})^2 \\
H_1^2 - 2H_1H_2 + H_2^2 &\leq H_1^2 - K_e - 2\sqrt{(H_1^2 - K_e)(H_2^2 - K_e)} + H_2^2 - K_e \\
-2H_1H_2 &\leq -2K_e - 2\sqrt{(H_1^2 - K_e)(H_2^2 - K_e))} \\
2\sqrt{(H_1^2 - K_e)(H_2^2 - K_e)} &\leq 2H_1H_2 - 2K_e \\
\sqrt{(H_1^2 - K_e)(H_2^2 - K_e)} &\leq H_1H_2 - K_e \\
(H_1^2 - K_e)(H_2^2 - K_e) &\leq (H_1H_2 - K_e)^2 \\
H_1^2H_2^2 - H_1^2K_e - H_2^2K_e + K_e^2 &\leq H_1^2H_2^2 - 2H_1H_2K_e + K_e^2 \\
-(H_1^2 + H_2^2)K_e &\leq -2H_1H_2K_e \\
-(H_1^2 + H_2^2) &\leq -2H_1H_2 \\
2H_1H_2 &\leq H_1^2 + H_2^2 \\
0 &\leq H_1^2 - 2H_1H_2 + H_2^2 \\
0 &\leq (H_1 - H_2)^2.
\end{aligned}$$

Isso garante que a desigualdade é sempre verdadeira.
Logo usando (2.20) em (2.19), obtemos

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq \frac{\rho}{K_e}|\sqrt{H_1^2 - K_e} - \sqrt{H_2^2 - K_e}|. \tag{2.21}$$

Além disso, como S_i é o operador de Weingarten associado ao par (I_i, II), então pela Proposição 1.4, a matriz de S_i em relação à base $\left\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} K_e\frac{H}{K_e} & -\frac{K_e}{\rho}\overline{P_i} \\ -\frac{K_e}{\rho}P_i & K_e\frac{H}{K_e} \end{pmatrix},$$

donde

$$K_e = det(S_i)_{\mathfrak{B}} = H^2 - \frac{K_e^2}{\rho^2}|P_i|^2.$$

Daí, segue-se que

$$|P_i| = \frac{\rho}{K_e}\sqrt{H^2 - K_e}.$$

Substituindo em (2.21) a expressão acima, temos

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq ||P_1| - |P_2|| \leq |P_1 - P_2|. \tag{2.22}$$

Por outro lado, de (2.18) e (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}
|P_{1\bar{z}} - P_{2\bar{z}}| &= \frac{|(K_e)_{\bar{z}}P_1 + (K_e)_z\lambda_1 - (K_e)_{\bar{z}}P_2 - (K_e)_z\lambda_2|}{2K_e} \\
&\leq \frac{|(K_e)_{\bar{z}}||P_1 - P_2| + |(K_e)_z||\lambda_1 - \lambda_2|}{2K_e} \\
&\leq \frac{|(K_e)_{\bar{z}}||P_1 - P_2| + |(K_e)_z||P_1 - P_2|}{2K_e} \\
&= \frac{|(K_e)_{\bar{z}}| + |(K_e)_z|}{2K_e}|P_1 - P_2|.
\end{aligned}$$

Como por hipótese Σ é uma esfera topológica, então usando o Lema 2.1, concluímos que a forma quadrática $(P_1 - P_2)dz^2$ é identicamente nula em Σ, logo $P_1 \equiv P_2$. Além disso, como a curvatura extrínseca é a mesma para os pares (I_i, II), $i = 1, 2$, então $\lambda_1 = \lambda_2$ por (2.10). Portanto $I_1 = I_2$. ■

2.2 O tensor e a função de Codazzi

Sabemos que nem sempre um par fundamental em uma superfície é um par de Codazzi, mas conseguimos obter consequências importantes sobre a superfície, quando definimos o tensor de Codazzi e a função de Codazzi. Tal estudo será desenvolvido nesta seção.

Definição 2.2. *Dado um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ, com operador de Weingarten S, chamaremos tensor de Codazzi de (I, II) para a aplicação $T_S : \mathfrak{X}(\Sigma)\times\mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ definida por*

$$T_S(X, Y) = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y],\ \ X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Segue da definição anterior, que um par fundamental (I, II) é um par de Codazzi em Σ, quando $T_S(X, Y) = 0$, X, $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

O tensor de Codazzi de um par fundamental em uma superfície satisfaz as seguintes propriedades básicas:

Lema 2.2. *Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ, com operador de Weingarten S e tensor de Codazzi T_S. Então*

1. *T_S é anti-simétrico, isto é, $T_S(X, Y) = -T_S(Y, X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$*

2. *T_S é $\mathcal{C}^\infty(\Sigma) -$ bilinear, isto é,*

$$\begin{aligned}
T_S(f_1X_1 + f_2X_2, Y) &= f_1T_S(X_1, Y) + f_2T_S(X_2, Y), \\
T_S(X, f_1Y_1 + f_2Y_2) &= f_1T_S(X, Y_1) + f_2T_S(X, Y_2),
\end{aligned}$$

$X_1, X_2, Y_1, Y_2, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e f_1, f_2 $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$.

3. Dados campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, temos

$$T_{fS}(X,Y) = fT_S(X,Y) + X(f)SY - Y(f)SX. \tag{2.23}$$

Demonstração. *1*. Sejam X, $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Como $[X,Y] = -[Y,X]$, então

$$\begin{aligned} T_S(X,Y) &= \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] \\ &= -(\nabla_Y SX - \nabla_X SY + S[X,Y]) \\ &= -(\nabla_Y SX - \nabla_X SY - S[Y,X]) \\ &= -T_S(Y,X). \end{aligned}$$

2. Sejam X_1, X_2, $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e f_1, $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. Temos que

$$T_S(f_1X_1 + f_2X_2, Y) = \nabla_{f_1X_1+f_2X_2} SY - \nabla_Y S(f_1X_1 + f_2X_2) - S[f_1X_1 + f_2X_2, Y]. \tag{2.24}$$

Mas

$$\nabla_{f_1X_1+f_2X_2} SY = f_1\nabla_{X_1} SY + f_2\nabla_{X_2} SY, \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \nabla_Y S(f_1X_1 + f_2X_2) &= \nabla_Y (f_1SX_1 + f_2SX_2) \\ &= f_1\nabla_Y SX_1 + Y(f_1)SX_1 + f_2\nabla_Y SX_2 + Y(f_2)SX_2, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} S[f_1X_1 + f_2X_2, Y] &= S[f_1X_1, Y] + S[f_2X_2, Y] \\ &= S(f_1[X_1, Y] - Y(f_1)X_1) + S(f_2[X_2, Y] - Y(f_2)X_2) \\ &= f_1S[X_1, Y] - Y(f_1)SX_1 + f_2S[X_2, Y] - Y(f_2)SX_2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Fazendo a substituição de (2.25), (2.26) e (2.27) em (2.24), obtemos

$$T_S(f_1X_1 + f_2X_2, Y) = f_1T_S(X_1, Y) + f_2T_S(X_2, Y).$$

De forma análoga, obtemos

$$T_S(X, f_1Y_1 + f_2Y_2) = f_1T_S(X, Y_1) + f_2T_S(X, Y_2).$$

3. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, então

$$\begin{aligned} T_{fS}(X,Y) &= \nabla_X fSY - \nabla_Y fSX - fS[X,Y] \\ &= f\nabla_X SY + X(f)SY - f\nabla_Y SX - Y(f)SX - fS[X,Y] \\ &= f(\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y]) + X(f)SY - Y(f)SX \\ &= fT_S(X,Y) + X(f)SY - Y(f)SX. \end{aligned}$$

■

Associado ao tensor de Codazzi de um par fundamental (I, II), definimos a função de Codazzi, a qual mede o quanto o par fundamental deixa de ser Codazzi.

Definição 2.3. *Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ, com operador de Weingarten associado S. Chamamos de função de Codazzi do par (I, II) a função $\tau_S : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por*

$$I(T_S(u,v), T_S(u,v)) = \tau_S(p)(I(u,u)I(v,v) - I(u,v)^2),$$

onde $\{u, v\}$ é uma base de $T_p\Sigma$, com $p \in \Sigma$.

Vamos mostrar que a função de Codazzi τ_S é uma função diferenciável bem-definida, isto é, independe da escolha da base de $T_p\Sigma$.

De fato, seja $\{u', v'\}$ outra base de $T_p\Sigma$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1 u + \beta_1 v \\ v' &= \alpha_2 u + \beta_2 v, \ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tal que $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} T_S(u', v') &= T_S(\alpha_1 u + \beta_1 v, \alpha_2 u + \beta_2 v) \\ &= \alpha_1\alpha_2 T_S(u,u) + \alpha_1\beta_2 T_S(u,v) + \beta_1\alpha_2 T_S(v,u) + \alpha_1\beta_2 T_S(v,v) \\ &= \alpha_1\beta_2 T_S(u,v) - \beta_1\alpha_2 T_S(u,v) \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) T_S(u,v), \end{aligned} \tag{2.28}$$

em que $T_S(u,u) = T_S(v,v) = 0$ e $T_S(v,u) = -T_S(u,v)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} I(u', u') &= I(\alpha_1 u + \beta_1 v, \alpha_2 u + \beta_2 v) \\ &= \alpha_1^2 I(u,u) + 2\alpha_1\beta_1 I(u,v) + \beta_1^2 I(v,v), \\ I(v', v') &= \alpha_2^2 I(u,u) + 2\alpha_2\beta_2 I(u,v) + \beta_2^2 I(v,v), \\ I(u', v') &= \alpha_1\alpha_2 I(u,v) + (\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1) I(u,v) + \beta_1\beta_2 I(v,v). \end{aligned}$$

Segue que

$$I(u',u')I(v',v') - I(u',v')^2 = (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2(I(u,u)I(v,v) - I(u,v)^2). \tag{2.29}$$

Por fim, usando (2.28) e (2.29), temos:

$$\tau_S(p) = \frac{I(T_S(u',v'),T_S(u',v'))}{I(u',u')I(v',v') - I(u',v')^2} = \frac{I(T_S(u,v),T_S(u,v))}{I(u,u)I(v,v) - I(u,v)^2}.$$

Observação 2.4. *τ_S é identicamente nula se, e somente se, (I, II) é um par de Codazzi.*

Lema 2.3. *Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ, com operador de Weingarten associado S, curvatura média H e curvatura extrínseca K_e. Se z é um parâmetro conforme local para I, tal que*

$$\begin{aligned} I &= 2\lambda|dz|^2, \\ II &= Qdz^2 + 2H\lambda|dz|^2 + \overline{Q}d\overline{z}^2. \end{aligned}$$

Então

$$|Q_{\overline{z}}|^2 = \frac{\lambda\tau_{\widetilde{S}}}{2(H^2 - K_e)}|Q|^2,$$

onde $\widetilde{S}$ é o operador de traço nulo $S - HId$, e Id_p a aplicação identidade do plano tangente em $p \in \Sigma$.

Demonstração. Para um parâmetro conforme local z, sabemos que a conexão de Levi-Civita compatível com I é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\lambda_z}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= 0. \end{aligned}$$

Temos também que o operador de Weingarten S é dado por

$$\begin{aligned} S\frac{\partial}{\partial z} &= H\frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \\ S\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{\overline{Q}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} + H\frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \end{aligned}$$

Então

$$T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\widetilde{S}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\widetilde{S}\frac{\partial}{\partial z},$$

onde $\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right] = 0.$

Mas

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\widetilde{S}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}(S - HId)\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}S\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}HId\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}(\frac{\overline{Q}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} + H\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}HId\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\overline{Q}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}H\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}HId\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \\
&= \frac{\overline{Q}}{\lambda}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\overline{Q}}{\lambda}\right)_z\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{\overline{Q}\lambda_z}{\lambda^2} + \frac{\overline{Q}_z\lambda - \overline{Q}\lambda_z}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{\overline{Q}_z}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\widetilde{S}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{Q_{\overline{z}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Logo

$$T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\overline{Q}_z\frac{\partial}{\partial z} - Q_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right). \tag{2.30}$$

Além disso, a definição da função de Codazzi fica:

$$I\left(T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right), T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\right) = -\tau_{\widetilde{S}}\left(I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^2\right), \tag{2.31}$$

onde $I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = I\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = 0.$

Então substituindo (2.30) em (2.31), temos:

$$\begin{aligned}
-\tau_{\widetilde{S}}\lambda^2 &= \frac{1}{\lambda^2}I\left(\overline{Q}_z\frac{\partial}{\partial z} - Q_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \overline{Q}_z\frac{\partial}{\partial z} - Q_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(-\overline{Q}_zQ_{\overline{z}}\lambda - Q_{\overline{z}}\overline{Q}_z\lambda) \\
&= -\frac{2\overline{Q}_zQ_{\overline{z}}}{\lambda} \\
&= -\frac{2|Q_{\overline{z}}|^2}{\lambda}
\end{aligned}$$

Segue da igualdade acima que

$$|Q_{\overline{z}}|^2 = \frac{\lambda\tau_{\widetilde{S}}}{2}\lambda^2.$$

De (1.32),

$$\lambda^2 = \frac{|Q|^2}{H^2 - K_e}.$$

Portanto,

$$|Q_{\overline{z}}|^2 = \frac{\lambda \tau_{\widetilde{S}}}{2(H^2 - K_e)}|Q^2|,$$

como queríamos demonstrar. ■

Para o próximo resultado, dado um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ, denotaremos por $\Sigma_U \subseteq \Sigma$, o conjunto dos pontos umbílicos deste par.

Teorema 2.4. *Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ com operador de Weingarten associado S, curvatura média H e curvatura extrínseca K_e. Suponhamos que cada ponto $p \in \partial\Sigma_U$ tenha uma vizinhança V_p, tal que*

$$\frac{\tau_{\widetilde{S}}}{H^2 - K_e}$$

é limitada em $V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U)$, onde $\widetilde{S} = S - HId$. Então ou a diferencial de Hopf de (I, II) é identicamente nula ou seus zeros são isolados e de índice negativo. Em particular, se Σ é uma esfera topológica, então o par é totalmente umbílico.

Demonstração. Por hipótese, para cada $p \in \partial\Sigma$, existe uma vizinhança V_p e uma constante m_0 tal que

$$\frac{\tau_{\widetilde{S}}}{H^2 - K_e} \leq m_0$$

em $V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U)$. Assim, usando o Lema 2.3, temos que

$$|Q_{\overline{z}}|^2 \leq m_0 \frac{\lambda}{2}|Q|^2 \tag{2.32}$$

em $V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U)$. Além disso, concluímos que (2.32) se mantém em V_p, pois esta desigualdade é válida no interior de Σ_U.

Portanto, pelo Lema 2.1, ou a diferencial de Hopf de (I, II) é identicamente nula ou seus zeros são isolados e de índice negativo. Em particular, se Σ é uma esfera topológica, então novamente pelo Corolário 2.1, o par (I, II) é totalmente umbílico. ■

Note que, se (I, II) é um par de Codazzi, então usando (2.30), (2.4) e (2.5),

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) &= \frac{\overline{Q}_z}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{Q_{\overline{z}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \\ &= H_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} - H_z \frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo a expressão acima em (2.31), obtemos

$$\begin{aligned}
-\tau_{\widetilde{S}}\lambda^2 &= I\left(H_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} - H_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, H_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} - H_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \\
&= -H_{\overline{z}}H_zI\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) - H_zH_{\overline{z}}I\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= -\lambda H_zH_{\overline{z}} - \lambda H_zH_{\overline{z}} \\
&= -2\lambda H_zH_{\overline{z}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\tau_{\widetilde{S}} &= \frac{2}{\lambda}|H_z|^2 \\
&= \frac{2}{\lambda}\left|\frac{1}{2}(H_x - iH_y)\right|^2 \\
&= \frac{1}{2\lambda}(H_x^2 + H_y^2) \\
&= ||\nabla H||^2,
\end{aligned}$$

em que ∇H denota o gradiente de H e $||\nabla H||^2 = I(\nabla H, \nabla H)$.

Portanto, o Teorema 2.4 pode ser aplicado para pares de Codazzi quando $\dfrac{||\nabla H||^2}{H^2 - K_e}$ é limitado. Noutras palavras, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.6. *Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ com operador de Weingarten associado S, curvatura média H e curvatura extrínseca K_e. Suponhamos que cada ponto $p \in \partial\Sigma_U$ tenha uma vizinhança V_p tal que*

$$\frac{||\nabla H||^2}{H^2 - K_e}$$

é limitado em $V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U)$, onde $||\nabla H||^2 = I(\nabla H, \nabla H)$. Então ou a diferencial de Hopf de (I, II) é identicamente nula ou seus zeros são isolados e de índice negativo. Em particular, se Σ é uma esfera topológica, então o par é totalmente umbílico.

2.3 Diferenciais Quadráticas Holomorfas

Nesta seção, dado um par de Codazzi com certas hipóteses, obtemos um novo par de Codazzi com curvatura média constante nula, que está geometricamente relacionado com o primeiro. A partir deste segundo par de Codazzi, mostramos a existência de uma diferencial quadrática holomorfa que fornece informações importantes sobre o comportamento geométrico do par inicial.

Sabemos que se (x, y) são parâmetros duplamente ortogonais para um par fundamental

(I, II), então podemos escrever

$$I = Edx^2 + Gdy^2, \ II = k_1 Edx^2 + k_2 Gdy^2.$$

Temos também, que para campos coordenados $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right\}$, o tensor de Codazzi T_S se expressa por

$$\begin{aligned} T_S\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} S\frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} S\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} k_2\frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} k_1\frac{\partial}{\partial x} \\ &= k_2\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y} + (k_2)_x\frac{\partial}{\partial y} - k_1\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x} - (k_1)_y\frac{\partial}{\partial x} \\ &= (k_2 - k_1)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y} + (k_2)_x\frac{\partial}{\partial y} - (k_1)_y\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{12}^1\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2\frac{\partial}{\partial y},$$

então pela Proposição 1.5, temos que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{E_y}{2E}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{G_x}{2G}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Daí, o tensor de Codazzi fica:

$$\begin{aligned} T_S\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= (k_2 - k_1)\left(\frac{E_y}{2E}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{G_x}{2G}\frac{\partial}{\partial y}\right) + (k_2)_x\frac{\partial}{\partial y} - (k_1)_y\frac{\partial}{\partial x} \\ &= -\left(k_1\frac{E_y}{2E} + (k_1)_y\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(k_2\frac{G_x}{2G} + (k_2)_x\right)\frac{\partial}{\partial y} + k_2\frac{E_y}{2E}\frac{\partial}{\partial x} - k_1\frac{G_x}{2G}\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Como $(k_1E)_y = k_1E_y + (k_1)_yE$, então

$$(k_1)_y = \frac{(k_1E)_y}{E} - \frac{k_1E_y}{E}.$$

De forma análoga, verificamos que

$$(k_2)_x = \frac{(k_2G)_x}{G} - \frac{k_2G_x}{G}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T_S\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\left(k_1\frac{E_y}{2E}+\frac{(k_1E)_y}{E}-\frac{k_1E_y}{E}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(k_2\frac{G_x}{2G}+\frac{(k_2G)_x}{G}-\frac{k_2G_x}{G}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
&\quad +k_2\frac{E_y}{2E}\frac{\partial}{\partial x}-k_1\frac{G_x}{2G}\frac{\partial}{\partial y}\\
&= -\left(\frac{(k_1E)_y}{E}-\frac{k_1E_y}{2E}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{(k_2G)_x}{G}-\frac{k_2G_x}{2G}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
&\quad +k_2\frac{E_y}{2E}\frac{\partial}{\partial x}-k_1\frac{G_x}{2G}\frac{\partial}{\partial y}\\
&= \left(-\frac{(k_1E)_y}{E}+\frac{k_1E_y}{2E}+\frac{k_2E_y}{2E}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{(k_2G)_x}{G}-\frac{k_2G_x}{2G}-\frac{k_1G_x}{2G}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
&= -\frac{1}{E}\left((k_1E)_y-\frac{k_1+k_2}{2}E_y\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{G}\left((k_2G)_x-\frac{k_1+k_2}{2}G_x\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
&= -\frac{1}{E}((k_1E)_y-HE_y)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{G}((k_2G)_x-HG_x)\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Ao longo desta seção, denotaremos por II' a forma quadrática associada ao par fundamental (I,II) dada por $II'=II-HI$.

Lema 2.4. *Seja (I,II) um par de Codazzi em uma superfície Σ com curvaturas média e extrínseca H e K_e, respectivamente. Seja φ uma função diferenciável em Σ tal que a função $\frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2-K_e}}$ possa ser estendida diferenciavelmente a Σ. Então*

$$\begin{aligned}
A &= \cosh\varphi I+\frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2-K_e}}II', \qquad (2.34)\\
B &= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi I+\cosh\varphi II', \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

é um par fundamental com curvatura média $H(A,B)=0$, curvatura extrínseca $K_e(A,B)=-(H^2-K_e)$, e cujo tensor de Codazzi $T_{\widetilde{S}}$ satisfaz

$$T_{\widetilde{S}}(X,Y)=\omega(Y)X-\omega(X)Y,\ \omega=\frac{1}{2}(dH-\sqrt{H^2-K_e}d\varphi),\ \forall\, X,Y\in\mathfrak{X}(\Sigma). \qquad (2.36)$$

Demonstração. Seja (x,y) parâmetros duplamente ortogonais com relação ao par de Codazzi (I,II), tal que

$$I=Edx^2+Gdy^2,\ II=k_1Edx^2+k_2Gdy^2,$$

em que $k_1 \geq k_2$. Daí,

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \cosh\varphi I\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2 - K_e}} II'\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= \cosh\varphi E + \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2 - K_e}}\left[II\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) - HI\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
&= \cosh\varphi E + \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2 - K_e}}(k_1 E - HE) \\
&= \cosh\varphi E + \sinh\varphi \frac{k_1 - H}{\sqrt{H^2 - K_e}} E \\
&= \cosh\varphi E + \sinh\varphi \frac{H + \sqrt{H^2 - K_e} - H}{\sqrt{H^2 - K_e}} E \\
&= \cosh\varphi E + \sinh\varphi E \\
&= (\cosh\varphi + \sinh\varphi) E \\
&= \left(\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} + \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\right) E \\
&= e^{\varphi} E,
\end{aligned}$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \cosh\varphi I\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2 - K_e}} II'\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0, \text{ pois } F = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \cosh\varphi I\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2 - K_e}}\left[II\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) - HI\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \\
&= \cosh\varphi G + \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2 - K_e}}(k_2 G - HG) \\
&= \cosh\varphi G + \sinh\varphi \frac{k_2 - H}{\sqrt{H^2 - K_e}} G \\
&= \cosh\varphi G + \sinh\varphi \frac{H - \sqrt{H^2 - K_e} - H}{\sqrt{H^2 - K_e}} G \\
&= \cosh\varphi G - \sinh\varphi G \\
&= (\cosh\varphi - \sinh\varphi) G \\
&= \left(\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} - \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\right) G \\
&= e^{-\varphi} G.
\end{aligned}$$

Logo $A = e^{\varphi} E dx^2 + e^{-\varphi} G dy^2$.

Temos também que

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi I\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)+\cosh\varphi\left[II\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)-HI\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi E+\cosh\varphi(k_1E-HE)\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi E+\cosh\varphi(k_1-H)E\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi E+\cosh\varphi(H+\sqrt{H^2-K_e}-H)E\\
&= \sqrt{H^2-K_e}(\sinh\varphi+\cosh\varphi)E\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}+\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\right)E\\
&= \sqrt{H^2-K_e}e^{\varphi}E,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi I\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)+\cosh\varphi\left[II\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)-HI\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi G+\cosh\varphi(k_2G-HG)\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi G+\cosh\varphi(k_2-H)G\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi G+\cosh\varphi(H-\sqrt{H^2-K_e}-H)G\\
&= \sqrt{H^2-K_e}(\sinh\varphi-\cosh\varphi)G\\
&= \sqrt{H^2-K_e}\left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}-\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\right)G\\
&= -\sqrt{H^2-K_e}e^{-\varphi}G,
\end{aligned}$$

e $B\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=0$, pois $F=0$.

Logo,

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{H^2-K_e}e^{\varphi}Edx^2-\sqrt{H^2-K_e}e^{-\varphi}Gdy^2\\
&= \sqrt{H^2-K_e}(e^{\varphi}Edx^2-e^{-\varphi}Gdy^2)\\
&= \frac{k_1-k_2}{2}(e^{\varphi}Edx^2-e^{-\varphi}Gdy^2).
\end{aligned}$$

Note que $H^2-K_e=\frac{(k_1-k_2)^2}{4}$.

Assim o par (A,B), onde $A=e^{\varphi}Edx^2+e^{-\varphi}Gdy^2$ e $B=\frac{k_1-k_2}{2}(e^{\varphi}Edx^2-e^{-\varphi}Gdy^2)$ é um par fundamental, pois A é uma métrica Riemanniana em Σ. Além disso, como $F=f=0$, temos

$$K_e(I,II)=\frac{eg}{EG} \text{ e } H(I,II)=\frac{eG+gE}{2EG}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} K_e(A,B) &= \frac{\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right) e^{\varphi}E\left[-e^{-\varphi}G\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)\right]}{e^{\varphi}Ee^{-\varphi}G} \\ &= -\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)^2 \\ &= -(H^2-K_e) \end{aligned}$$

e

$$H(A,B) = \frac{\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right) e^{\varphi}Ee^{-\varphi}G - \left(\frac{k_1-k_2}{2}\right) e^{-\varphi}Ge^{\varphi}E}{2e^{\varphi}Ee^{-\varphi}G} = 0.$$

Por fim, vamos mostrar que o tensor de Codazzi $T_{\widetilde{S}}$ é dado por (2.36).

Primeiramente observemos que $\dfrac{k_1-k_2}{2}$ e $-\dfrac{k_1-k_2}{2}$ são as curvaturas principais associadas ao par (A,B). Além disso, $e^{\varphi}E$ e $e^{-\varphi}G$ são os coeficientes de A. Então de (2.33), temos:

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\frac{1}{e^{\varphi}E}\left(\frac{k_1-k_2}{2}e^{\varphi}E\right)_y\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{e^{-\varphi}G}\left(\frac{k_1-k_2}{2}e^{-\varphi}G\right)_x\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{2e^{\varphi}E}\left[(k_1-k_2)_y e^{\varphi}E + (k_1-k_2)(e^{\varphi}E)_y\right]\frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad -\frac{1}{2e^{-\varphi}G}\left[(k_1-k_2)_x e^{-\varphi}G + (k_1-k_2)(e^{-\varphi}G)_x\right]\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{2}\left[(k_1-k_2)_y + (k_1-k_2)\varphi_y + (k_1-k_2)\frac{E_y}{E}\right]\frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[(k_1-k_2)_x - (k_1-k_2)\varphi_x + (k_1-k_2)\frac{G_x}{G}\right]\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Como (I,II) é um par de Codazzi, então $T_S=0$. Assim de (2.33), obtemos

$$-\frac{1}{E}((k_1E)_y - HE_y) = 0,\ \frac{1}{G}((k_2G)_x - HG_x) = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (k_1E)_y - HE_y &= 0 \\ (k_1)_yE + k_1E_y - HE_y &= 0 \\ (k_1)_yE + \left(k_1 - \frac{k_1+k_2}{2}\right)E_y &= 0 \\ (k_1)_yE + \frac{k_1-k_2}{2}E_y &= 0. \end{aligned}$$

Segue que

$$2(k_1)_y = -(k_1-k_2)\frac{E_y}{E}. \tag{2.37}$$

De forma análoga, verificamos que

$$2(k_2)_x = (k_1 - k_2)\frac{G_x}{G}. \tag{2.38}$$

Substituindo (2.37) e (2.38) em $T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\frac{1}{2}\left[(k_1)_y - (k_2)_y + (k_1 - k_2)\varphi_y - 2(k_1)_y\right]\frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[(k_1)_x - (k_2)_x - (k_1 - k_2)\varphi_x + 2(k_2)_x\right]\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\frac{1}{2}[-(k_1)_y - (k_2)_y + (k_1 - k_2)\varphi_y]\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}[(k_1)_x + (k_2)_x - (k_1 - k_2)\varphi_x]\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(\frac{(k_1)_y + (k_2)_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\varphi_y\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{(k_1)_x + (k_2)_x}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\varphi_x\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(H_y - \sqrt{H^2 - K_e}\varphi_y\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(H_x - \sqrt{H^2 - K_e}\varphi_x\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \omega\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

E por linearidade, obtemos (2.36) ∎

Com as mesmas hipóteses do Lema 2.4, se tomarmos um parâmetro conforme z para A, temos pela Proposição 1.3 que o par (A, B) é tal que

$$A = 2\lambda|dz|^2, B = Qdz^2 + \overline{Q}d\overline{z}^2, \tag{2.39}$$

em que $H(A, B) = 0$. Além disso, de (2.30) e (2.36),

$$\frac{1}{\lambda}\left(\overline{Q}_z\frac{\partial}{\partial z} - Q_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = T_{\widetilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\frac{\partial}{\partial z} - \omega\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Daí,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{\lambda}Q_{\overline{z}}$$

ou

$$Q_{\overline{z}} = \lambda\omega\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(H_z - \sqrt{H^2 - K_e}\varphi_z\right).$$

Assim, concluímos que o par (A, B) é um par de Codazzi se, e somente se, $dH - \sqrt{H^2 - K_e}d\varphi = 0$, ou de forma equivalente $Q_{\overline{z}} = 0$.

Noutras palavras, temos o

Corolário 2.7. *Seja (I, II) uma par de Codazzi em Σ com curvaturas média e extrínseca H e K_e, respectivamente. Seja φ uma função diferenciável em Σ tal que a função* $\dfrac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2 - K_e}}$

possa ser estendida diferenciavelmente a Σ. Então para o par fundamental

$$\begin{aligned} A &= \cosh\varphi I + \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{H^2-K_e}} II' \\ B &= \sqrt{H^2-K_e}\sinh\varphi I + \cosh\varphi II', \end{aligned}$$

com curvatura média $H(A,B)=0$ e curvatura extrínseca $K_e(A,B) = -(H^2-K_e)$, as seguintes condições são equivalentes:

1. *(A,B) é um par de Codazzi.*
2. *A diferencial de Hopf de (A,B) é holomorfa para a estrutura conforme induzida por A.*
3. *$dH - \sqrt{H^2-K_e}d\varphi = 0$.*

Agora veremos uma situação onde o corolário anterior pode ser usado. Mas para isso, precisamos da seguinte definição.

Definição 2.4. *Dizemos que um par de Codazzi (I,II) é um par de Weingarten especial, se existe uma função diferenciável f definida em um intervalo $\mathcal{J} \subseteq [0,\infty)$, tal que suas curvaturas média H e extrínseca K_e satisfazem $H = f(H^2-K_e)$.*

Se o par de Codazzi (I,II) é um par de Weingarten, com $H=H(t)$, $K_e=K_e(t)$, t variando em um certo intervalo, então pela condição 3 do Corolário 2.7, temos que

$$\sqrt{H(t)^2-K_e(t)}\varphi'(t) = H'(t).$$

Assim, existe uma primitiva $\varphi(t)$ da função $\varphi'(t) = \dfrac{H'(t)}{\sqrt{H(t)^2-K_e(t)}}$.

Além disso, se $\dfrac{\sinh\varphi(t)}{\sqrt{H(t)^2-K_e(t)}}$ está bem definida, inclusive nos pontos umbílicos, então novamente usando o Corolário 2.7, concluímos que o par de Codazzi (A,B), dado por (2.39), existirá em toda superfície Σ.

Se (I,II) é um par de Weingarten especial, isto é, satisfaz $H = f(H^2-K_e)$, então podemos parametrizar $H(t) = f(t^2)$, em que $t^2 = H(t)^2 - K_e(t)$. Segue-se que a função

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2)ds$$

é uma primitiva de $\varphi'(t)$. Além disso, a função

$$\frac{\sinh\varphi(t)}{\sqrt{H(t)^2-K_e(t)}} = \frac{\sinh\varphi(t)}{t}$$

está bem definida, inclusive para os pontos umbílicos, isto é, pontos nos quais $t = 0$, pois

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sinh \varphi(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \cosh \varphi(t)\varphi'(t) = \varphi'(0) = 2f'(0).$$

Consequentemente a métrica A, dada no Corolário 2.7, está bem definida.

Corolário 2.8. *Sejam Σ uma superfície e f uma função diferenciável definida em um intervalo $\mathcal{J} \subseteq [0,\infty)$. Seja $\varphi(t)$ a primitiva de $2f'(t^2)$ neste intervalo, tal que a função $\dfrac{\sinh \varphi(t)}{t}$ seja bem definida. Então todo par de Weingarten especial (I, II) em Σ satisfazendo $H = f(H^2 - K_e)$ é dado por*

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\sinh \varphi(t)}{t} Q + \cosh \varphi(t) A - \frac{\sinh \varphi(t)}{t} \overline{Q}, \\ II - f(t^2) I &= -\cosh \varphi(t) Q + t \sinh \varphi(t) A - \cosh \varphi(t) \overline{Q}, \end{aligned}$$

onde A é uma métrica Riemanniana em Σ e Q uma 2-forma holomorfa para A, tal que a imagem da função $t : \Sigma \to [0,\infty)$ definida por $2|Q| = tA$ está contida em $\mathcal{J}$. Em particular, $t^2 = H^2 - K_e$.

Demonstração. Dado um par de Weingarten especial (I, II) em Σ, então pelo Corolário 2.7, existem uma primitiva $\varphi(t)$ de $\varphi'(t) = 2f'(t^2)$ e um par de Codazzi (A, B), cuja diferencial de Hopf Q é uma 2-forma holomorfa com respeito à métrica A. Além disso, podemos escrever $A = 2\lambda$ e $B = Q + \overline{Q}$, desde que $H(A, B) = 0$.

Como $K(A, B) = -(H^2 - K_e)$, então

$$t^2 = H^2 - K_e = -K(A, B) = \frac{|Q|^2}{\lambda^2} = 4\frac{|Q|^2}{|A|^2}.$$

Segue que $t^2 = \left(2\dfrac{|Q|}{|A|}\right)^2$, donde $2|Q| = tA$.

Agora, usando (2.34) e (2.35), temos

$$A = \left(\cosh \varphi(t) - \frac{\sinh \varphi(t)}{t} f(t^2)\right) I + \frac{\sinh \varphi(t)}{t} II, \tag{2.40}$$

$$Q + \overline{Q} = (t \sinh \varphi(t) - \cosh \varphi(t) f(t^2)) I + \cosh \varphi(t) II. \tag{2.41}$$

Multiplicando por $t \cosh \varphi(t)$ (2.40) e por $-\sinh \varphi(t)$ (2.41), então

$$\begin{aligned} t \cosh \varphi(t) A &= (t \cosh^2 \varphi(t) - \cosh \varphi(t) \sinh \varphi(t) f(t^2)) I + \cosh \varphi(t) \sinh \varphi(t) II, \\ -\sinh \varphi(t)(Q + \overline{Q}) &= (-t \sinh^2 \varphi(t) + \sinh \varphi(t) \cosh \varphi(t) f(t^2)) I - \sinh \varphi(t) \cosh \varphi(t) II. \end{aligned}$$

Somando as equações anteriores e isolando I, obtemos

$$I = -\frac{\sinh\varphi(t)}{t}Q + \cosh\varphi(t)A - \frac{\sinh\varphi(t)}{t}\overline{Q}.$$

De forma análoga, ao multiplicarmos as equações (2.40) e (2.41) por $t\sinh\varphi(t)$ e $-\cosh\varphi(t)$, respectivamente,obtemos

$$II - f(t^2)I = -\cosh\varphi(t)Q + t\sinh\varphi(t)A - \cosh\varphi\overline{Q}.$$

E isso finaliza a demonstração. ■

Capítulo 3

Uma aplicação para superfícies em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, exibimos alguns resultados referente a uma família de superfícies em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz o princípio do máximo de Hopf, e estimamos a altura máxima que uma superfície dessa família pode alcançar. Em seguida, aplicamos a teoria abstrata de pares de Codazzi, para classificar as superfícies de Weingarten completas e mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, que particularmente, satisfazem o princípio do máximo de Hopf.

3.1 O Princípio do Máximo de Hopf

Nesta seção, enunciaremos algumas definições e conceitos necessários para o desenvolvimento do capítulo. Não faremos a prova de alguns resultados, mas indicaremos referências onde tais justificativas podem ser encontradas. Começaremos com o princípio do máximo de Hopf para equações elípticas de segunda ordem. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em [10].

Seja L o operador dado por

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

onde a_{ij}, b_i e c são funções reais de classe $\mathcal{C}^\infty$ que dependem somente de $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$, sendo Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$. Além disso, $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ é uma matriz simétrica.

Adotamos a seguinte definição que pode ser encontrada em [10].

Definição 3.1. *Dizemos que o operador L é uniformemente elíptico, se existe uma constante θ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,$$

$\forall x \in \Omega$ *e* $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Usando a definição anterior, podemos enunciar o Princípio do Máximo no interior e fronteira de Hopf, conforme os teoremas a seguir.

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo no Interior de Hopf)**.** *Seja L um operador uniformemente elíptico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponhamos que $Lu \geq 0$ para uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Então,*

- *se $c \equiv 0$ e u atinge seu máximo em Ω, u é constante.*
- *se $c \leq 0$, u atinge seu máximo em Ω e esse máximo é nao negativo, u é constante.*

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo na Fronteira de Hopf)**.** *Seja L um operador uniformemente elíptico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega$ duas vezes diferenciável. Se $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

1. *u é de classe C^1 em x_0;*
2. *$u(x_0) \geq u(x)$, $\forall\, x \in \Omega$;*
3. *$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = 0$, em que η é o vetor normal interior de $\partial\Omega$.*

Então,

1. *se $c \equiv 0$, u é constante;*
2. *se $c \leq 0$ e $u(x_0) \geq 0$, u é constante.*

Agora, se Σ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$, vista localmente como gráfico de uma função u em $\mathcal{C}^2(\Omega)$, em que Ω é um domínio do plano tangente a Σ, então a versão geométrica do princípio do máximo é dada conforme o corolário abaixo.

Corolário 3.1 (Princípio do Máximo)**.** *Sejam Σ_1 e Σ_2 duas superfícies em $\mathbb{R}^3$ vistas como gráficos de funções diferenciáveis u_1 e u_2, com curvatura média constante H_1 e H_2, respectivamente. Suponha que*

- *existe um ponto $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ tal que Σ_1 e Σ_2 são tangentes em p(interior ou fronteira);*
- *$H_1 = H_2$;*
- *em uma vizinhança de p, $u_2 \geq u_1$, com relação a orientação dada pelo vetor curvatura média.*

Então $u_1 = u_2$ em uma vizinhança de p.

Observação 3.1. *O corolário anterior nos diz que as superfícies Σ_1 e Σ_2 coincidem em uma vizinhança de p.*

Em todo este capítulo, trabalharemos com famílias de superfícies satisfazendo o princípio do máximo. Particularizaremos para superfícies de Weingarten especiais elípticas.

Definição 3.2. *Dizemos que uma família $\mathcal{A}$ de superfícies orientadas em $\mathbb{R}^3$ satisfaz o princípio do máximo de Hopf, se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *$\mathcal{A}$ é invariante sob isometrias de $\mathbb{R}^3$. Noutras palavras, se $\Sigma \in \mathcal{A}$ e φ é uma isometria de $\mathbb{R}^3$, então $\varphi(\Sigma) \in \mathcal{A}$.*
2. *Se $\Sigma \in \mathcal{A}$ e $\widetilde{\Sigma}$ é outra superfície contida em Σ, então $\widetilde{\Sigma} \in \mathcal{A}$.*
3. *Existe uma superfície compacta, mergulhada e sem bordo em $\mathcal{A}$.*
4. *Quaisquer duas superfícies em $\mathcal{A}$ satisfazem o princípio do máximo (interior e fronteira).*

Vamos enunciar o seguinte resultado clássico.

Lema 3.1. *Se Σ é uma superfície compacta, mergulhada em $\mathbb{R}^3$ que possui planos de simetria em todas as direções de $\mathbb{R}^3$, então Σ é uma esfera.*

Demonstração. Veja Lema 1.2 em [8]. ■

Usaremos o Lema 3.1 e o *método da reflexão de Alexandrov* para provar a

Proposição 3.1. *Se uma família de superfícies $\mathcal{A}$ satisfaz o princípio do máximo de Hopf, então existe, a menos de isometria de $\mathbb{R}^3$, uma única superfície compacta, mergulhada e sem bordo em $\mathcal{A}$. Tal superfície é necessáriamente a esfera totalmente umbílica.*

Demonstração. Sendo $\mathcal{A}$ uma família de superfícies que satisfaz o princípio do máximo de Hopf, então existe uma superfície Σ compacta, mergulhada e sem bordo em $\mathcal{A}$. Consideremos $P(t)$ uma família a um parâmetro de superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{R}^3$, isto é, uma família de planos paralelos. Para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos $\Sigma^+(t)$ a reflexão de Σ com relação a $P(t)$. Por compacidade de Σ, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que Σ e $\Sigma^+(t_0)$ são tangentes em um ponto p (interior ou fronteira). Como Σ e $\Sigma^+(t_0)$ satisfazem o princípio do máximo de Hopf, concluímos que tais superfícies coincidem em uma vizinhança de p, donde $P(t_0)$ é um plano de simetria de $\mathbb{R}^3$. Portanto, pelo Lema 3.1, Σ é uma esfera totalmente umbílica. ■

3.2 Estimativas de altura

Nesta seção, dada uma superfície $\Sigma \in \mathcal{A}$ satisfazendo as propriedades da Definição 3.2, iremos desenvolver um método geométrico para estimar a altura máxima que esta superfície pode alcançar, quando seu bordo está contido em um plano de $\mathbb{R}^3$.

Vamos considerar Σ como um gráfico, cujo bordo está contido em um plano P de $\mathbb{R}^3$. Sem perda de generalidade, podemos supor que este plano é o plano-xy.

Começamos com o seguinte teorema.

Teorema 3.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma família de superfícies em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo o princípio do máximo de Hopf, e $\Sigma \in \mathcal{A}$ um gráfico compacto em um domínio Ω no plano-xy com bordo $\partial\Sigma$ contido nesse plano. Então para todo $p \in \Sigma$, a distância em $\mathbb{R}^3$ de p ao plano-xy é menor do que ou igual a $4\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, onde $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ é o raio da única esfera totalmente umbílica em $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja Σ um gráfico definido no domínio Ω do plano P. Pela proposição 3.1, Σ_0 representa, a única esfera totalmente umbílica em $\mathcal{A}$. Além disso, dado $t \in \mathbb{R}$, sejam $P(t)$ planos horizontais de $\mathbb{R}^3$, em que $P = P(0)$ e t é a distância entre P e $P(t)$.

Afirmamos que para cada $t > 2R_{\mathcal{A}}$, o diâmetro de qualquer componente conexa limitada por $\Sigma(t) = P(t) \cap \Sigma$ é menor que ou igual a $2R_{\mathcal{A}}$.

Suponhamos por absurdo que tal afirmação é falsa, então para alguma componente conexa $C(t)$ de $\Sigma(t)$, existem pontos p e q no interior de $\Omega(t)$ no plano $P(t)$ limitado por $C(t)$ tal que $d(p,q) > 2R_{\mathcal{A}}$.

Seja β uma curva em $\Omega(t)$ unindo p e q, tal que β e $C(t)$ são disjuntas. Além disso, sejam Q o domínio em $\mathbb{R}^3$ limitado por $\Sigma \cup \Omega$ e Π o retângulo dado por

$$\Pi = \{\alpha_s(r) : s \in \mathcal{I}, r \in [0,t]\},$$

em que $\mathcal{I}$ é o intervalo onde β está definida, e α_s é a geodésica parametrizada pelo comprimento de arco r, com condições iniciais $\alpha_s(0) = \beta(s)$ e $\alpha_s'(0) = -e_3 = (0,0,-1)$. Como Σ é um gráfico e β está contida no interior de $\Omega(t)$, então $\Pi \subset Q$.

Seja $\widetilde{p} \in \Pi$ um ponto cuja distância a $\partial\Pi$ é maior do que $R_{\mathcal{A}}$. Tal ponto necessariamente existe, pois se tomarmos $p = \alpha_s(0) = \beta(s)$ tal que $d(p,\widetilde{p}) = d(\widetilde{p},q)$, então $d(p,\widetilde{p}) + d(\widetilde{p},q) > 2R_{\mathcal{A}}$, donde segue o resultado.

Seja $\eta(r)$ uma geodésica horizontal passando por $\widetilde{p}$. Como $d(\widetilde{p},\partial\Pi) > R_{\mathcal{A}}$, então cada ponto de $\eta(r)$ está longe de $\partial\Pi$ uma distância maior que $R_{\mathcal{A}}$. Podemos escolher a reta horizontal $\eta = \eta(t_1)$ no plano $P(t_1)$ como tal geodésica que passa por $\widetilde{p}$ e é ortogonal a geodésica com vetor velocidade $\alpha_s'(0)$, ligando p e q.

Sejam q_0 o primeiro ponto em que η encontra Q e q_1 o último, e consideremos esferas $\Sigma_0(t_1) \in \mathcal{A}$ centradas em cada ponto de η, obtidas da esfera rotacional Σ_0 por meio de translações de $\mathbb{R}^3$. Existe uma primeira esfera $\Sigma_0(t_1^0)$ nesta família(próxima de q_0) que encontra Σ em um ponto $\widetilde{q_0}$. Se os vetores normais destas superfícies coincidem neste ponto, então $\Sigma = \Sigma_0(t_1^0)$, pelo princípio do máximo, o que é um absurdo.

Por outro lado, se os vetores normais são opostos, então consideramos a primeira esfera $\Sigma_0(t_1^0)$ em $\mathcal{A}$ encontrando Π em um ponto interior de Π, e para cada $t_1 > t_1^0$ denotamos por $\widetilde{\Sigma_0}(t_1)$ a parte da esfera $\Sigma_0(t_1)$ que passa por Π. Como essas esferas deixam Q em q_1 e nenhuma dessas esferas encontram $\partial\Pi$, existe um primeiro valor r_1 tal que $\Sigma_0(r_1)$ encontra Σ em um ponto $\widetilde{q_0}$, em que os vetores normais coincidem. Assim, pelo princípio do máximo, $\Sigma = \Sigma_0(r_1)$, o que é uma contradição. Portanto a afirmação feita é sempre verdade.

Por fim, veremos que $P(t) \cap \Sigma = \Sigma(t)$ para $t > 4R_{\mathcal{A}}$. Mas para isso, basta provarmos a seguinte afirmação.

Afirmação. Seja Ω_1 uma componente conexa limitada por $\Sigma(2R_{\mathcal{A}}) = P(2R_{\mathcal{A}}) \cap \Sigma$. A distância de qualquer ponto em Σ(que é um gráfico sobre Ω_1) ao plano $P(2R_{\mathcal{A}})$ é menor que ou igual ao diâmetro de Ω_1.

Seja σ uma reta suporte de $\partial\Omega_1$ em $P(2R_{\mathcal{A}})$ com vetor normal unitário exterior v, e tomemos $\eta(r)$ uma geodésica com $\eta(0) \in \sigma$ e $\eta'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + e_3)$. Para cada r, consideramos os planos $\Pi(r)$ em $\mathbb{R}^3$ passando por $\eta(r)$ e ortogonais a $\eta'(r) = \eta(0)$. A interseção de tais planos com os planos horizontais $P(2R_{\mathcal{A}})$ são retas paralelas à σ, sendo $\frac{\pi}{4}$ o ângulo entre eles.

Suponhamos que a afirmação dada é falsa, então existe um ponto $p \in \Sigma$(gráfico sobre Ω_1) tal que sua distância ao plano $P(2R_{\mathcal{A}})$ é maior que o diâmetro de Ω_1. Seja Σ_1 a parte compacta do gráfico Σ sobre Ω_1. Para r suficientemente grande, observamos que $\Pi(r)$ não intercepta Σ_1. Além disso, para $r = 0$, o plano $\Pi(0)$ contém a reta suporte σ, e a reflexão de p com relação a $\Pi(0)$ é um ponto cuja projeção ortogonal em $P(2R_{\mathcal{A}})$ não está em Ω_1. Portanto, usando o princípio da reflaxão de Alexandrov para os planos $\Pi(r)$, com r suficientemente grande, existe um primeiro valor $r_0 > 0$ tal que ou a reflexão da parte de σ_1 que está sobre $\Pi(r)$ encontra primeiro σ_1 em um ponto interior ou ambas as superfícies são tangentes em um ponto na fronteira, mas isso é uma contradição, pelo princípio do máximo. ■

Como consequência do resultado anterior e do método de Alexandrov, estimamos a distância máxima atingida por uma superfície compacta e mergulhada Σ, cuja fronteira está contida em um plano.

Corolário 3.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma família de superfícies em $\mathbb{R}^3$, satisfazendo o princípio do máximo de Hopf. Então cada superfície compacta e mergulhada $\Sigma \in \mathcal{A}$, cuja fronteira está contida em um plano P, verifica que para cada $p \in \Sigma$, a distância em $\mathbb{R}^3$ de p ao plano P é menor do que ou igual a $8\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, onde $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ é o raio da única esfera totalmente umbílica contida em $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $p \in \Sigma$ tal que $d(p, P) \geq d(x, P)$, $\forall x \in \Sigma$. Tal ponto necessariamente existe, pois Σ é compacta.

Seja $P(t)$ a folheação de planos paralelos a P, com $P(0) = P$. Para $t \in \left(\frac{h}{2}, h\right]$, consideremos $\widetilde{\Sigma}^+(t)$ a reflexão de $\Sigma^+(t)$, com relação a $P(t)$.

Afirmação. $\Sigma^+\left(\frac{h}{2}\right)$(parte de Σ que está sobre o plano $P\left(\frac{h}{2}\right)$) é um gráfico em um domínio deste plano.

Se a afirmação é falsa, existe $\bar{t} \in \left(\frac{h}{2}, h\right]$ tal que $\Sigma^-(\bar{t})$ e $\widetilde{\Sigma}^+(\bar{t})$ são tangentes em um ponto da fronteira. Pelo princípio do máximo, $P(\bar{t})$ é um plano de simetria de Σ. Mas isso é impossível, pois neste caso, Σ é uma superfície compacta sem bordo.

Logo, $\Sigma^+\left(\frac{h}{2}\right)$ é um gráfico em um domínio de $P\left(\frac{h}{2}\right)$. Daí, pelo teorema 3.3, $d(p, P\left(\frac{h}{2}\right)) \leq 4R_{\mathcal{A}}$, $\forall p \in \Sigma\left(\frac{h}{2}\right)$, donde $d(p, P) \leq 8R_{\mathcal{A}}$, $\forall p \in \Sigma$. ■

3.2.1 Superfícies de Weingarten Especiais Elípticas

Um caso particular de família de superfícies que satisfaz o princípio do máximo de Hopf, é a de superfícies de Weingarten especiais elípticas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante não nula (para detalhes ver [4]). A partir de agora, daremos uma aplicação da teoria de pares de Codazzi para esta classe de superfícies.

Definição 3.3. *Seja Σ uma superfície de $\mathbb{R}^3$ e $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos que Σ é uma superfície de Weingarten especial com respeito a f, se suas curvaturas média H e Gaussiana K, satisfazem $H = f(H^2 - K)$.*

Definição 3.4. *Seja Σ uma superfície de Weingarten especial satisfazendo $H = f(H^2 - K)$, em que f está definida em $[0, a), 0 < a \leq \infty$. Dizemos que Σ é elíptica quando $4tf'(t)^2 < 1$, $\forall\ t \in [0, a)$.*

Em termos de pares de Codazzi, a definição anterior se escreve da seguinte maneira.

Definição 3.5. *Seja (I, II) um par de Codazzi em Σ. Se as curvaturas média e Gaussiana, H e K, satisfazem $H = f(H^2 - K)$, em que f é uma função diferenciável definida em $[0, a)$, $0 < a \leq \infty$ e $4tf'(t)^2 < 1$, $\forall\ t \in [0, a)$, dizemos que o par (I, II) é um par de Weingarten especial elíptico.*

Exemplo 3.1. *Em [4], Fabiano G. B. Brito e Ricardo Sá Earp, provaram que duas superfícies de Wiengarten especiais elípticas satisfazem o princípio do máximo de Hopf.*

Já em [20], Rosenberg e Sa Earp provaram o Teorema 3.4 abaixo, para superfícies de Weingarten especiais elípticas satisfazendo o princípio do máximo de Hopf e estimativas de altura. Uma outra demonstração deste teorema, pode ser encontrada em [16], para uma família qualquer de superfícies satisfazendo o princípio do máximo de Hopf.

Teorema 3.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma família de superfícies em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo o princípio do máximo de Hopf. Então,*

- *$\mathcal{A}$ não contém uma superfície mergulhada homeomorfa ao plano.*
- *Uma superfície $\Sigma \in \mathcal{A}$ com dois fins é uma superfície rotacional contida em um cilindro de $\mathbb{R}^3$.*

O lema abaixo é fundamental para demonstrar o teorema principal deste capítulo, que trata da classificação de superfícies de Weingarten completas e mergulhadas em $\mathbb{R}^3$.

Lema 3.2. *Seja (I, II) um par de Weingarten especial elíptico em uma superfície Σ, com curvaturas média e Gaussiana H e K, respectivamente. Se $H^2 - K \neq 0$ em Σ, então a nova métrica $g_0 = \sqrt{H^2 - K}A$ é uma métrica plana em Σ, onde A é dada em (2.34) em termos da primitiva φ de $2f'(t^2)$. Assim, se I é completa e $H^2 - K \geq c_0 > 0$, então a métrica g_0 é completa. Em particular, Σ com a estrutura conforme dada por A(ou por g_0) é o plano complexo, o plano complexo furado ou o toro.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.8, sabemos que $2|Q| = tA$, em que $t = \sqrt{H^2 - K}$ e Q é uma forma quadrática holomorfa para A. Assim, como $q = H^2 - K \neq 0$ em Σ, então $g_0 = tA = 2|Q|$ é uma métrica plana bem definida em Σ, pois podemos tomar um parâmetro conforme local z tal que $2Qdz^2 = dz^2$, donde $g_0 = |dz|^2$.

Agora, vamos mostrar que g_0 é uma métrica completa, sendo I completa.

Com efeito, do corolário 2.8, temos

$$\begin{aligned}
|I| &= |\cosh\varphi A - \frac{\sinh\varphi(t)}{t}(Q+\overline{Q})| \\
&\leq |\cosh\varphi(t)||A| + |\sinh\varphi(t)|\left(\frac{|Q|}{|t|}+\frac{|\overline{Q}|}{|t|}\right) \\
&\leq |\cosh\varphi(t)||A| + |\cosh\varphi(t)||A|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I \leq 2\cosh\varphi(t)A \tag{3.1}$$

Por outro lado, como (I, II) é um par de Weingarten especial elíptico, segue que $4t^2f'(t^2)^2 < 1$. Assim, $t^2\varphi'(t)^2 < 1$, visto que $\varphi'(t) = 2f'(t^2)$, ou de forma equivalente $|\varphi'(t)| < \frac{1}{t}$, cuja integral é $|\varphi(t)| < |\log t|$.

Observamos que

$$\cosh\varphi(t) \leq \cosh\log t = \frac{e^{\log t}+e^{-\log t}}{2} = \frac{t+1/t}{2} = \frac{t^2+1}{2t} = t\frac{t^2+1}{2t^2}.$$

Mas $\dfrac{t^2+1}{2t^2} \leq \dfrac{c_0+1}{2c_0}$, pois $t \geq \sqrt{c_0}$. Logo, $\cosh\varphi(t) \leq t\delta_0$, onde $\delta_0 = \dfrac{c_0+1}{2c_0}$.

Por fim, de (3.1), segue que

$$\frac{1}{2\delta_0}I \leq g_0.$$

Logo, g_0 é uma métrica plana completa, pois I é completa. Portanto o recobrimento universal Riemanniano de Σ para a métrica g_0 é o plano Euclidiano. Daí, Σ é conformemente equivalente ao plano complexo, ao plano complexo furado ou ao toro(ver [11]). ■

Observação 3.2. *Sejam (M, g_1) e (M, g_2) variedades Riemannianas. Se (M, g_2) é completa e existe uma constante c tal que $g_1 \geq cg_2$, então (M, g_1) é completa.*

O último teorema deste trabalho é um fato conhecido para superfícies com curvatura média constante. Ver por exemplo [14] e [15] , que mostram que uma superfície completa em $\mathbb{R}^3$, com curvatura média constante não nula e curvatura Gaussiana que não muda de sinal é uma esfera ou um cilindro circular reto. No caso em que a curvatura média é nula, a superfície completa é uma superfície mínina, tal superfície tem curvatura Gaussiana não-positiva em todos os seus pontos. Vejamos agora este resultado, usando pares de Weingarten especiais elípticos, como ferramenta principal.

Teorema 3.5. *Seja Σ uma superfície de Weingarten especial elíptica em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo $H = f(H^2 - K)$. Suponhamos que sua curvatura Gaussiana não muda de sinal.*

1. *Se Σ é completa e $K \geq 0$ em todos os pontos dessa superfície, então Σ é uma esfera totalmente umbílica, um plano ou um cilindro circular reto.*

2. *Se Σ é propriamente mergulhada, e $K \leq 0$ em todos os pontos dessa superfície, então Σ ou é um cilindro circular reto ou uma superfície mínima (isto é, $f(0) = 0$).*

Demonstração. No caso 1, se $K = 0$, então $H = f(H^2)$. Considerando a função $g(t) = t - f(t^2)$, segue que $g(H) = H - f(H^2) = 0$ e $g'(t) = 1 - 2tf'(t^2)$. Mas Σ é uma superfície de Weingarten especial elíptica, logo de $(2tf'(t^2))^2 = 4t^2 f'(t^2)^2 < 1$, segue que $g'(t) = 1 - 2tf'(t^2) > 0$. Concluímos que g é uma função estritamente crescente. Além disso, observamos que H é o zero da função g, consequentemente H é constante.

Se $f(0) = 0 (H = 0)$, e usando o fato de Σ ser completa com $K = 0$, obtemos que Σ é um plano. Por outro lado, se $f(0) \neq 0 (H \neq 0)$, então novamente usando o fato de Σ ser completa e $K = 0$, segue que Σ é um cilindro circular reto.

Agora, se existe um ponto $p \in \Sigma$, com $K(p) > 0$, então ou Σ é homeomorfa a uma esfera ou é completa e mergulhada homeomorfa ao plano(ver[13]). Além disso $f(0) \neq 0$(ver[21]). Mas o segundo caso não é possível, pelo Teorema 3.4, pois Σ é uma superfície de Wiengarten especial elíptica. Logo Σ é homeomorfa a uma esfera.

Considerando a função diferenciável $W(x, y) = x - f(x^2 - y)$, temos que

$$W_x(x, y) = 1 - 2xf'(x^2 - y) \text{ e } W_y(x, y) = f'(x^2 - y).$$

Assim,

$$W_x(t, t^2) + 2tW_y(t, t^2) = 1, \forall t.$$

Como Σ é homeomorfa a uma esfera, concluímos que Σ é uma esfera totalmente umbílica, pelo Teorema 2.2.

No caso 2, sendo $K \leq 0$, então

$$0 \geq K = H^2 - (H^2 - K) = f(H^2 - K)^2 - (H^2 - K). \tag{3.2}$$

Se $f(0) \neq 0$, como a função $f(s)^2 - s$ é contínua para $s \geq 0$ e é positiva em $s = 0$, então existe $s_0 > 0$ tal que $f(s)^2 - s > 0$ para $s \in [0, s_0]$. Consequentemente $H^2 - K \geq s_0 > 0$ em Σ, por (3.2). Daí, pelo Lema 3.2, Σ é homeomorfa ao plano complexo, ao plano complexo furado ou ao toro. Usando novamente o Teorema 3.4, Σ não pode ser homeomorfa ao plano. Além disso, como toda superfície compacta em $\mathbb{R}^3$ possui pontos com curvatura Gaussiana positiva, então Σ também não pode ser homeomorfa ao toro. Logo Σ é homeomorfa ao plano complexo furado, e pelo Teorema 3.4, Σ é uma superfície de rotação e está contida em um cilindro C de $\mathbb{R}^3$.

Por fim, vamos mostrar que Σ é um cilindro circular reto.

De fato, a menos de isometria de $\mathbb{R}^3$, podemos supor que Σ é uma superfície de rotação com respeito ao eixo z. Seja $\alpha = \Sigma \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y = 0\}$ a curva geratriz de Σ. Segue que α é uma linha de curvatura, cuja curvatura k_α não muda de sinal no plano $y = 0$, pois $K \leq 0$. Assim, α é uma curva convexa.

Observamos que α está contida numa faixa determinada pelo eixo z e pela reta paralela a $C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y = 0\}$, logo α é uma reta paralela ao eixo z. Portanto Σ é um cilindro circular reto. ∎

Este resultado pode ser estendido para superfícies de Weingarten especiais elípticas em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, visto que, a equação de Codazzi é a mesma nesses espaços modelos.

Referências Bibliográficas

[1] ALEDO, J.A; ESPINAR, J.M.; GÁLVEZ, J.A, *The Codazzi Equation for Surfaces*, Xiv:0902.2283v1 [math.DG], 2009. 1

[2] ALEDO, J.A; ESPINAR, J.M.; GÁLVEZ, J.A, *The Codazzi Equation for Surfaces*, Advances Mathematics, 2010. 1

[3] ALENCAR, H; CARMO, M.P.; TRIBUZY, R., *A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality*, Comm. Anal. Geom., **15** (2007), 283 - 298. 16

[4] BRITO, F.; SA EARP, R., *On the structure of certain Weingarten surfaces with boundary a circle*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **6** (1997), 243 - 255. 49, 50

[5] CARMO, M.P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Rio de Janeiro: SBM, 2010. 16

[6] CARMO, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 3, 14

[7] DAJCZER, M., *Submanifolds and isometric immersion*, Houston, Publish or Perish, 1990. 3

[8] DANESI, M.M., *Uma Caracterização das Superfícies de Curvatura Média Constante de Bordo Planar Convexo*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007. 47

[9] ESPINAR, J.M., *La ecuación de Codazzi en superficies*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 2008. 3

[10] EVANS, L.C., *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 1998. 45

[11] FARKAS, H.M.; KRA, I., *Riemann Surfaces*, Springer Verlag, Berlin, 1980. 51

[12] GROVE, V.C., *On closed convex surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 777 - 786. 24

[13] HEIJENOORT, J.V., *On locally convex manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., (1952), 223 - 242. 52

[14] HOFFMAN, D., *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Diff. Geom., **8** (1977), 161 - 176. 51

[15] KLOTZ, T.; OSSERMAN, R., *Complete Surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *with constant mean curvature*, Comment. Math. Helv., **41** (1966-67), 313 - 318. 51

[16] MEEKS, W., *The topology and geometry of embedded Surfaces of constant mean curvature*, J. Diff. Geom., **27** (1988), 539 - 552. 50

[17] MILNOR, T.K., *Abstract Weingarten Surfaces*, J. Diff. Geom., **15** (1980), 365 - 380. 1, 14, 20

[18] MILNOR, T.K., *Codazzi Pairs on Surfaces*, Proc. Colloq. Global Anal. and Global Geom., Berlin (1979). 1

[19] OLIKER, V.; SIMON, U., *Codazzi Tensors and equations of Monge-Ampère type on compact manifolds of constant sectional curvature*, J. Reine Angew. Math., **342** (1983), 35 - 65. 1, 14

[20] ROSENBERG, H.; SA EARP, R., *The Geometry of properly embedded special surfaces in* $\mathbb{R}^3$*; e. g., surfaces satisfying* $aH + bK = 1$*, where* a *and* b *are positive*, Duke Math. J., **73** (1994), 291 - 306. 50

[21] SA EARP, R.; TOUBIANA, E., *A note on special surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Mat. Comtemp.,**4** (1993), 108 - 118. 52