

Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco
e estimativas de autovalores para uma classe de operadores
diferenciais elípticos

Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

Manaus-AM
Março/2015

Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco
e estimativas de autovalores para uma classe de operadores
diferenciais elípticos

por

Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

sob orientação do

Professor Dr. José Nazareno Vieira Gomes

e coorientação do

Professor Dr. Marco Rigoli

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em
Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM,
como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-AM

Março/2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M672u Miranda, Juliana Ferreira Ribeiro de
Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco e
estimativas de autovalores para uma classe de operadores
diferenciais elípticos / Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda. 2015
80 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Coorientador: Marco Rigoli
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Princípio do máximo fraco. 2. Estimativas de altura. 3.
Autovalores. 4. Problema de Dirichlet. I. Gomes, José Nazareno
Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

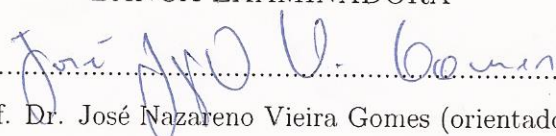
Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco
e estimativas de autovalores para uma classe de operadores
diferenciais elípticos

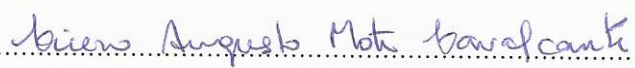
Tese apresentada ao Programa de Doutorado em
Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM,
como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática.

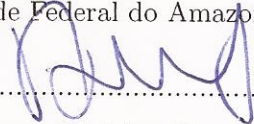
Área de concentração: Geometria Diferencial.

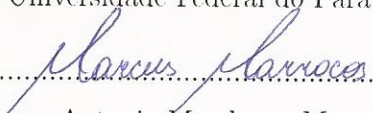
Manaus, 31 de março de 2015.

BANCA EXAMINADORA


.....
Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM


.....
Prof. Dr. Cicero Augusto Mota Cavalcante (membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM


.....
Prof. Dr. Giovany Malcher Figueiredo (membro)
Universidade Federal do Pará - UFPA


.....
Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos (membro externo)
Universidade Federal do ABC - UFABC


.....
Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso (membro externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC

*Dedico este trabalho aos meus pais Ricardo e Sonia,
e aos meus filhos Matheus e Lucas.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, pela luz e pelos anjos que sempre colocou em meu caminho, e por tornar possível uma realização como esta. Agradeço meus pais por me ensinarem a sonhar, a crer nos sonhos e a buscá-los, por serem minhas muletas, me sustentando sempre nos caminhos que escolhi, e pelo apoio nos momentos de pressão. Agradeço aos meus filhos pela paciência e espera, por nem sempre entenderem, mas aceitarem minhas ausências de corpo e muitas vezes de alma, e por suportarem minha intolerância cotidiana. Agradeço também minhas sobrinhas, irmãs e famílias e a vovó que também fizeram parte desse busca. Agradeço ao professor Renato Tribuzy por me colocar nos caminhos da geometria e por ter me dado a oportunidade de fazer parte dos estudos com o professor Marco Rigoli. Agradeço ao professor Marco Rigoli por ter compartilhado parte de suas pesquisas e por ter sido sempre muito gentil; também devo agradecer todos os colegas de doutorado da UNIMI, principalmente, Simona, Guglielmo, Pit, Thommy, Mono, Mateu, que me acolheram com muito carinho e foram sempre muito prestativos. Agradeço ao professor e amigo Nazareno por muita coisa...por ter me recebido para dar andamento às pesquisas iniciadas, por ter tido paciência em me ouvir, por acreditar em mim....ele foi peça fundamental para a conclusão desse trabalho. Agradeço ao professor Marcos Marrocos pelas observações valiosas. Agradeço aos parceiros de doutorado da UFAM pelo apoio indispensável, principalmente, Francisco Feitosa, Elzimar Rufino, Marcos Aurélio e Max Ferreira, pela descontração e paciência em me ouvir. Agradeço aos amigos que ficaram na torcida, em especial a Inês Padilha, Silvia Dias. Agradeço aos colegas do DM, pelo apoio em todos os sentidos. E finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro no período em que estive no exterior.

Ringrazio il professore Marco Rigoli per aver condiviso con me parte della sue ricerche e di essere stato sempre molto gentile; devo anche ringraziare tutti dottorandi UNIMI-Matematica, soprattutto Simona, Guglielmo, Pit, Thommy, Mono, Mateu, che mi hanno accolto con grande affetto e sono stati sempre molto disponibile. Grazie nel cuore.

*Uma mágoa não é motivo para outra mágoa.
Uma lágrima não é motivo para outra lágrima.
Uma dor não é motivo para outra dor.
Só o riso, o amor e o prazer merecem revanche.
O resto, mais que perda de tempo...
é perda de vida.*

Chico Xavier

Resumo

Esta tese é composta de duas partes. Inicialmente apresentamos uma forma aberta do princípio do máximo fraco para uma classe específica de operadores elípticos com aplicações em estimativas de altura de hipersuperfícies imersas com k -curvatura média constante em *produtos warped*, cuja base é um intervalo da reta. Posteriormente, exibimos estimativas envolvendo autovalores de um operador na forma η -divergente em domínios limitados, com condições de bordo de Dirichlet, de uma variedade riemanniana completa e encontramos uma estimativa sharp, em relação a fórmula assintótica de Weyl, para os autovalores do operador η -laplaciano.

Palavras-chave: Princípio do máximo fraco, Estimativas de altura, Autovalores, Problema de Dirichlet.

Abstract

This thesis is composed of two parts. Initially we present an open form of the weak maximum principle for a specific class of elliptic operators, with applications in height estimates of hypersurfaces with constant k -curvature immersed in it products warped, whose the base is an interval. Subsequently, we show estimates involving eigenvalues of Dirichlet problem for an operator in the η -divergent form defined in a bounded domain of a complete Riemannian manifold, and we found a sharp estimate, in relation to Weyl asymptotic formula, for the eigenvalues of the operator η -laplaciano.

Keywords: Weak maximum principle, Height estimates, Dirichlet problem, Eigenvalue.

Conteúdo

Introdução	1
1 Sobre o Princípio do Máximo Fraco	13
1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco	13
1.1.1 Parabolicidade e o Princípio do Máximo Fraco	20
1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped	24
1.2.1 Gráficos em produtos warped	24
1.2.2 Hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante	28
1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos	33
1.3.1 Hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante	34
1.3.2 Hipóteses alternativas para os Teoremas 1.12 e 1.13	41
1.4 Aplicações a gráficos de Killing	44
2 Estimativas com autovalores	47
2.1 Motivando a definição do operador $\mathcal{L}$	47
2.2 O problema de Dirichlet	53
2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$	54
2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano	63
Apêndice	70
Bibliografia	76

Introdução

Na primeira parte desta tese exibimos uma forma aberta do princípio do máximo fraco e fizemos algumas aplicações. O princípio do máximo foi inicialmente demonstrado para o operador laplaciano definido em domínios do $\mathbb{R}^n$. Posteriormente surgiram princípios do máximo para vários tipos de operadores definidos em muitos outros domínios. Suas várias formas têm sido amplamente utilizadas em áreas distintas da matemática, e no caso da geometria diferencial as aplicações são inúmeras.

Sabemos que uma função contínua $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ assume o máximo em um ponto x_0 de $[a, b]$. Se u tem segunda derivada contínua e se tiver um máximo entre a e b , então

$$i) u'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad ii) u''(x_0) \leq 0.$$

Substituindo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ por uma variedade riemanniana compacta $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sem bordo, para $u \in \mathcal{C}^2(M)$ existe $x_0 \in M$ tal que

$$i) u^* = u(x_0), \quad ii) |\nabla u(x_0)| = 0 \quad \text{e} \quad iii) \Delta u(x_0) \leq 0,$$

em que u^* é o valor máximo atingido por u em M . Este é o que podemos chamar de “Princípio do Máximo usual” ou “Princípio do Máximo finito”. Se M não é compacta, ainda que $u \in \mathcal{C}^2(M)$ e $u^* < +\infty$, é fato que a existência de x_0 não é garantida, portanto precisaremos de alguma hipótese adicional.

Começemos analisando o caso do espaço euclidiano. É possível mostrar, ver por exemplo [47], que para $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ e $u^* < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad ii) |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad iii) \Delta u(x_k) < \frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Nesta direção, Omori [41] provou que se $(M, \langle, \rangle)$ é completa, com curvatura seccional limitada inferiormente, então dada uma função $u \in \mathcal{C}^2(M)$ limitada superiormente, existe uma sequência $\{x_k\} \subset M$ tal que

$$i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad ii) |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad iii) \nabla^2(u)(x_k) < \frac{1}{k} \langle, \rangle.$$

Posteriormente Yau [53] melhorou o resultado de Omori substituindo a hipótese sob a curvatura seccional pela mesma hipótese sob a curvatura de Ricci obtendo

$$i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad ii) |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad iii) \Delta(u)(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Anos mais tarde, Pigola, Rigoli e Setti [47] definiram que uma variedade riemanniana $(M, \langle, \rangle)$, não necessariamente completa, satisfaz o “Princípio do Máximo de Omori-Yau” ou “Princípio do Máximo no infinito” se dada uma função $u \in \mathcal{C}^2(M)$, $u^* < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\} \subset M$ tal que

$$i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad ii) |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad iii) \Delta(u)(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Além disso, eles mostraram que a validade do princípio do máximo pode ser expressa através de condições que não envolvem necessariamente limitação sob as curvaturas.

Na mesma linha de Grigor'yan [30], os mesmos autores de [47] apresentaram uma equivalência de M ser estocasticamente completa com a validade das seguintes propriedades:

(P_1) Para cada $u \in \mathcal{C}^2(M)$, $u^* < +\infty$ e cada $\epsilon > 0$

$$\inf_{\Omega_\epsilon} \Delta u \leq 0, \quad \Omega_\epsilon = \{x \in M : u(x) > u^* - \epsilon\}.$$

(P_2) Para cada $u \in \mathcal{C}^2(M)$, $u^* < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\} \subset M$ tal que

$$i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad ii) \Delta(u)(x_k) < \frac{1}{k}.$$

(P_3) Para cada $u \in \mathcal{C}^2(M)$, $u^* < +\infty$ e toda $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, se $\Delta u \geq f(u)$ então $f(u^*) \leq 0$.

Desse modo eles estabeleceram que M , não necessariamente completa, satisfaz o princípio do máximo fraco (WMP) se para toda função $u \in \mathcal{C}^2(M)$ limitada superiormente, existir uma sequência $\{x_k\} \subset M$ tal que

$$i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad ii) \Delta(u)(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Observaram ainda que toda variedade parabólica satisfaz o princípio do máximo fraco.

O princípio do máximo e o princípio do máximo fraco foram estendidos a outros operadores e sob condições de diferenciabilidade mais fracas nas funções definidas em M , ver por exemplo [1, 4, 7, 47]. Nesta direção, definimos para $u \in \mathcal{C}^1(M)$ o operador

$$Lu = L_{\varphi, T, X}u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{-1} \varphi(x, |\nabla u|) T(\nabla u, \cdot)^\#) - \langle X, \nabla u \rangle,$$

no sentido fraco, em que T é um campo de 2-tensores simétricos definido em $(M, \langle, \rangle)$ satisfazendo

$$0 < T_-(r) \leq T(Y, Y) \leq T_+(r),$$

para cada $Y \in T_x M$, $|Y| = 1$, e todo $x \in \partial B_r$, em que B_r denota a bola geodésica de raio r centrada na origem o , $\varphi : M \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ satisfazendo

$$\begin{cases} \text{i) } \varphi(x, 0) = 0 \text{ para todo } x \in M \\ \text{ii) } \varphi(x, t) > 0 \text{ em } M \times \mathbb{R}^+ \\ \text{iii) } \varphi(x, t) \leq A(x)t^\delta \text{ em } M \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

para algum $\delta > 0$, $A(x) > 0$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Ademais definimos que para $q(x) \in \mathcal{C}^0(M)$, $q(x) > 0$, o q -WMP se verifica em M para o operador L se para cada $u \in \mathcal{C}^1(M)$ com $u^* = \sup_M u < +\infty$ e cada $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\gamma < u^*$, temos

$$\inf_{\Omega_\gamma} \{q(x)Lu\} \leq 0 \quad (\text{no sentido fraco}), \quad \Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) > \gamma\}.$$

Nosso primeiro teorema é descrito como segue

Teorema 1 *O q -WMP é válido em M para o operador L se, e somente se, o q -WMP aberto é válido em M , ou seja, para cada $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, cada aberto $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$, e cada $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \text{i) } q(x)Lv \geq f(v) \text{ em } \Omega \\ \text{ii) } \sup_\Omega v < +\infty \end{cases}$$

temos que ou $\sup_\Omega v = \sup_{\partial\Omega} v$ ou $f(\sup_\Omega v) \leq 0$.

Como consequência obtemos algumas aplicações em estimativas de altura de hipersuperfícies não compactas com k -curvatura média constante imersas em *produtos warped*.

Os três resultados a seguir são aplicações a gráficos em *produtos warped*.

Teorema 2 *Seja $(\mathbb{P}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$ uma variedade riemanniana n -dimensional e assumamos que o WMP é válido em $\mathbb{P}^n$ para o operador curvatura média. Seja $\bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ e, para uma função suave $u : \mathbb{P} \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$, seja $\Sigma(u)$ um gráfico em $\bar{M}$ com $H^* = \sup_{\mathbb{P}} H \leq 0$. Assumamos que u e $|Du|_{\mathbb{P}}$ são limitadas superiormente. Então ou $\Sigma(u)$ é um slice $\mathbb{P}_{u_0}$, com $\mathcal{H}(u_0) = H^* \equiv H$, ou $\mathcal{H}(u^*) \leq H^*$, com $u^* = \sup_{\mathbb{P}} u$.*

Teorema 3 *Seja $(\mathbb{P}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$ uma variedade riemanniana n -dimensional e assumamos que o WMP é válido em $\mathbb{P}^n$ para o operador curvatura média. Considere $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}$ um aberto com $\partial\mathcal{U} \neq \emptyset$ e $\bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$. Para $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{U}}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ com $u(\bar{\mathcal{U}}) \subset I$, seja $\Sigma(u)$ um gráfico em $\bar{M}$ com $\sup_{\mathcal{U}} H \leq 0$. Assumamos que u e $|Du|_{\mathbb{P}}$ são limitadas superiormente. Se $\sup_{\mathcal{U}} u > \sup_{\partial\mathcal{U}} u$ então $\mathcal{H}(\sup_{\mathcal{U}} u) \leq \sup_{\mathcal{U}} H$.*

Nos dois teoremas anteriores assumimos a validade do WMP para o operador curvatura média. Exibimos uma condição suficiente para a ocorrência deste fato conforme Teorema 1.9 bem como os comentários acerca dele.

A seguir precisamos considerar a função altura h , bem como a função ângulo $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle$, ambas sobre uma hipersuperfície Σ^n com curvatura média e k -curvatura média, respectivamente, constantes em *produtos warped*.

Teorema 4 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de curvatura média H constante, estocasticamente completa, tal que, para uma orientação adequada do normal N , $H \geq 0$. Suponha que a função altura h é limitada superiormente em Σ^n . Se $\tau \in \mathbb{R}$ é tal que $\mathcal{H}(\tau) > H$, $\mathcal{H}' \geq 0$ para $t > \tau$, então $h(x) \leq \tau$ em Σ^n .*

Teorema 5 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície completa com k -curvatura média constante para algum $2 \leq k \leq n$ e $\sup_{\Sigma^n} |H_1| < +\infty$. Assumamos a existência de um ponto elíptico em Σ^n tal que, para uma orientação adequada do normal N , $H_k > 0$. Suponha*

$$K_{\Sigma^n}(x) \geq -G^2(r(x))$$

para alguma $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo

$$i) G(0) > 0; \quad ii) G'(t) \geq 0; \quad iii) \frac{1}{G(t)} \notin L^1(+\infty).$$

Assumamos que existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}(\tau) > H_k^{1/k}$, com $\mathcal{H}' \geq 0$ para $t > \tau$, e seja $\Omega_\tau = \{x \in \Sigma^n : h(x) > \tau\}$. Se a função altura h é limitada superiormente em Σ^n , então ou $\sup_{\Omega_\tau} \Theta > 0$ ou $\Omega_\tau = \emptyset$, ou seja, $h(x) \leq \tau$ em Σ^n .

Para os próximos resultados consideramos $\Omega \subset \Sigma^n$ um aberto e exibimos o *slab* em que $F(\Omega)$ está contido. Novamente consideramos os casos em que a curvatura média e k -curvatura média, respectivamente, são constantes, e agora Σ^n está imersa em um produto riemanniano.

Teorema 6 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície estocasticamente completa com curvatura média constante $H > 0$. Suponha que para algum $\alpha > 0$, $\text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq -n\alpha$ e $H^2 > \alpha$. Seja $\Omega \subset \Sigma^n$ um aberto com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\Omega)$ está contida em um slab e $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$. Se*

$$\beta = \sup_{\Omega} \Theta < 0$$

então

$$F(\Omega) \subset \left[0, \frac{(1+\beta)H}{H^2 - \alpha}\right] \times \mathbb{P}^n.$$

Em particular, isto acontece para todo conjunto relativamente compacto $\Omega \subset \Sigma^n$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$ e $\beta = \sup_{\Omega} \Theta < 0$.

Quando consideramos a existência de um ponto elíptico sobre Σ^n temos o próximo resultado.

Teorema 7 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície imersa com k -curvatura média H_k constante, não nula, para algum $k = 2, \dots, n$, e com um ponto elíptico. Escolha o normal N tal que $H_k > 0$ e suponha que $K_{\mathbb{P}} \geq -\alpha$ para algum $\alpha > 0$. Suponha ainda que*

$$H_k^{\frac{k+1}{k}} > \alpha H_{k-1}^*, \text{ em que } H_{k-1}^* = \sup_{\Sigma^n} H_{k-1}(x),$$

e que o WMP seja válido em Σ^n para o operador L_{k-1} . Seja $\Omega \subset \Sigma^n$ um aberto com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\Omega)$ está contido em um slab e $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$. Se

$$\beta = \sup_{\Omega} \Theta < 0$$

então

$$F(\Omega) \subset \left[0, \frac{(1+\beta)H_k}{H_k^{\frac{k+1}{k}} - \alpha H_{k-1}^*}\right] \times \mathbb{P}^n.$$

Finalizamos o primeiro capítulo com uma belíssima aplicação a uma hipersuperfície dada por um gráfico de Killing.

Teorema 8 *Sejam $\bar{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana completa munida de um campo de Killing completo Y e $\mathbb{P}$ uma folha integral da folheação de Killing. Considere $F = F_u : \mathbb{P} \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ um gráfico de Killing com curvatura média constante $H \geq 0$. Assuma que*

$$\sup_{\mathbb{P}} |Y| < +\infty \quad e \quad \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log \int_{B_R} |Y|}{R^2} < +\infty,$$

em que $B_R = B_R(o)$ é a bola geodésica em $\mathbb{P}$ centrada em uma origem fixa o e com raio geodésico R . Se existe um valor regular τ de u tal que u é limitada superiormente em alguma componente conexa do conjunto

$$\Omega_\tau = \{x \in \Sigma : u(x) > \tau\},$$

então o gráfico de Killing é mínimo.

Na segunda parte desta tese fizemos estimativas envolvendo os autovalores de uma classe de operadores elípticos, conforme equação (15), que contém o η -laplaciano e por sua vez o laplaciano. Em todos os casos assumimos a condição de bordo de Dirichlet. A seguir algumas considerações sobre este assunto.

O problema de Dirichlet para o operador laplaciano em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dado por

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = -\lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

A constante λ que satisfaz (1) é chamada de autovalor e a solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ a autofunção correspondente. A existência ou não de soluções para (1) é conhecida como “problema da membrana”, em que a membrana fixa é a pele de um tambor, ao tocarmos o tambor a pele vibra e as frequências da vibração são os autovalores do laplaciano que dependem da sua forma, do material entre outros.

Encontramos aplicações do estudo de autovalores de operadores diferenciais em muitas áreas como por exemplo, na mecânica quântica, em que as quantidades, como energia, impulso, posição, são representadas por operadores hermitianos em um espaço de Hilbert. Os autovalores do operador correspondente à energia são interpretados como os possíveis valores da energia que um sistema pode atingir, e a diferença entre eles significa a diferença entre níveis de energia.

H.Weyl em 1911 estudou o problema (1) e foi o primeiro a publicar uma prova do comportamento assintótico dos autovalores do laplaciano (cf.[50]), comportamento este já estudado anos antes por Rayleigh, e conjecturado por Sommerfeld e Lorentz no ano anterior. A expansão assintótica de Weyl é dada por

$$(2) \quad \lambda_k \sim \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol}\Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}} \quad (k \rightarrow \infty),$$

em que ω_n é o volume da bola unitária do $\mathbb{R}^n$. A descoberta de Weyl tornou-se uma ferramenta importante de comparação e estimativas relacionadas a autovalores, não só do laplaciano mas também de operadores mais gerais: os elípticos; e mais ainda, os domínios do $\mathbb{R}^n$ puderam ser substituídos por domínios em variedades riemannianas.

Notamos que dessa expansão assintótica podemos obter

$$(3) \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \sim \frac{n}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol}\Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}$$

e

$$(4) \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \sim \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(\omega_n \text{vol}\Omega)^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}}.$$

Estimativas boas portanto são aquelas que nos fornecem as melhores cotas levando em consideração as relações (2), (3) e (4). Surgiram então as inequações universais para o laplaciano em domínios do $\mathbb{R}^n$, como por exemplo a inequação de Payne-Pólya-Weinberger [42, 43] que com o método das funções testes provaram

$$(5) \quad \lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{nk} \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

Hile-Protter [31] relacionaram de forma mais precisa a equação (5) como segue

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{nk}{4}.$$

Posteriormente Yang [52] obteve a primeira inequação de Yang

$$(6) \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \lambda_i$$

e a segunda inequação de Yang

$$(7) \quad \lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

Além disso ele obteve

$$(8) \quad \lambda_{k+1} - \lambda_k \leq 2 \left[\left(\frac{2}{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2 - \left(1 + \frac{4}{n} \right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \lambda_j \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A fórmula assintótica de Weyl garante que a estimativa obtida por Yang é melhor do que a obtida por Payne-Pólya-Weinberger. Outro fato utilizado para o cálculo de estimativas de autovalores do laplaciano em domínios do $\mathbb{R}^n$ é a fórmula recursiva de Cheng-Yang [17]. Apresentamos uma generalização desta fórmula no Apêndice do Capítulo 2. Fazendo uso de tal fórmula, Cheng e Yang ainda em [17] obtiveram para Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ o seguinte resultado

$$(9) \quad \lambda_{k+1} \leq \mathbf{C}(n, k) k^{\frac{2}{n}} \lambda_1,$$

em que $\mathbf{C}(n, k)$ é uma constante. Mais uma vez a expansão de Weyl garante que esta cota é a melhor possível em relação a ordem de k .

Uma outra desigualdade que envolve os autovalores do problema de Dirichlet do operador laplaciano é a conjectura de Pólya a qual afirma que em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$\lambda_k \geq \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}$$

para $k \in \{1, 2, \dots\}$. Em torno da conjectura de Pólya, Li-Yau [39] provaram ser válida a desigualdade

$$(10) \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \frac{n}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}$$

para $k = 1, 2, \dots$

Para o caso do operador laplaciano em uma variedade M compacta com bordo, foi provada por Cheng-Yang [20] um tipo de inequação ainda mais geral envolvendo o problema (1). Eles obtiveram,

$$(11) \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_M u_i^2 |\nabla h|^2 dM \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_M (2\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + u_i \Delta h)^2 dM,$$

em que u_i é a autofunção associada ao autovalor λ_i , $h \in \mathcal{C}^3(M) \cap \mathcal{C}^2(\partial M)$ e k inteiro. Pouco tempo depois, aplicando a equação (11) em um domínio Ω de uma variedade riemanniana completa M e usando o fato dado pelo Teorema de Nash [40] de que toda

variedade riemanniana completa M pode ser vista como subvariedade isometricamente imersa no $\mathbb{R}^m$, para algum $m \geq n$, Chen-Cheng [15] obtiveram inequações do tipo Yang, a saber: do tipo primeira-Yang

$$(12) \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\lambda_i + \frac{n^2}{4} H_0^2 \right),$$

e do tipo segunda-Yang

$$\lambda_{k+1} + \frac{n^2}{4} H_0^2 \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i + \frac{n^2}{4} H_0^2 \right),$$

em que $H_0 = \sup_{\bar{\Omega}} \|H\|$ e $\|H\|$ é a norma do vetor curvatura média da imersão. Ademais, fazendo uso da fórmula recursiva de Cheng-Yang, obtiveram

$$\lambda_{k+1} + \frac{n^2}{4} H_0^2 \leq \bar{\mathbf{C}}(n, k) k^{\frac{2}{n}} \left(\lambda_1 + \frac{n^2}{4} H_0^2 \right),$$

em que $\bar{\mathbf{C}}(n, k)$ é constante.

Mais tarde Cheng-Yang [19], usando também a referida fórmula recursiva, encontraram também uma relação para a média dos k primeiros autovalores do laplaciano definido em um domínio limitado de uma variedade riemanniana isometricamente imersa em um espaço euclidiano, a saber

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}$$

para $k = 1, 2, \dots$

Trabalhando com o operador η -laplaciano que também denotaremos por L (sem confundir com L do Capítulo 1), Xia-Xu [51] estenderam, sob as mesmas hipóteses, a inequação (11) obtendo

$$(13) \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_M u_i^2 |\nabla h|^2 \text{d}m \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_M (2\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + u_i Lh)^2 \text{d}m,$$

em que $\text{d}m = e^{-\eta} \text{d}M$. Além disso, eles também consideraram um domínio Ω de uma variedade riemanniana completa M isometricamente imersa em um espaço euclidiano para provar que

$$(14) \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) (4\lambda_i + 4\eta_0 \sqrt{\lambda_i} + n^2 H_0^2 + \eta_0^2)$$

em que $\eta_0 = \max_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$ e $H_0 = \sup_{\bar{\Omega}} \|H\|$.

Escrevemos esta fórmula em outro formato o que nos permitiu obter a extensão das inequações apresentadas anteriormente para variedades riemannianas.

Consideramos Ω um domínio de uma variedade completa M e o problema de autovalores com condição de bordo de Dirichlet para o operador

$$(15) \quad \mathcal{L}(u) := \operatorname{div}_{\eta}(T(\nabla u)) = \operatorname{div}(T(\nabla u)) - \langle \nabla \eta, T(\nabla u) \rangle$$

em que T é um $(0, 2)$ -tensor simétrico em M definido positivo, ou seja,

$$(16) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(u) &= -\lambda u & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este operador é uma extensão do η -laplaciano uma vez que fazendo $T = I$ temos o operador L .

Escrevemos o teorema da divergência para $\mathcal{L}$ e, por conseguinte, sua fórmula de integração por partes para observar que este operador é formalmente auto-adjunto no espaço de todas as funções em $L^2(\Omega, \operatorname{dm})$ que se anulam em $\partial\Omega$. Assim, da teoria espectral podemos escrever $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow \infty$, em que

$$\lambda_i = - \int_{\Omega} u_i \mathcal{L} u_i \operatorname{dm} = \int_{\Omega} T(\nabla u_i, \nabla u_i) \operatorname{dm}.$$

Recentemente, Alencar-Neto-Zhou [2] provaram uma fórmula generalizada tipo Bochner para o operador que foi introduzido por Cheng-Yau [21] a saber

$$\square f = \operatorname{tr}(\nabla^2 f \circ T) = \langle \nabla^2 f, T \rangle,$$

em que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ e T é um $(1, 1)$ -tensor simétrico. A fórmula generalizada tipo Bochner para o operador $\square$ é dada por

$$\frac{1}{2} \square(|\nabla f|^2) = \langle \nabla f, \nabla(\square f) \rangle + R_T(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T \rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T \rangle,$$

em que $R_T(X, Y) = \operatorname{tr}(T \circ (Z \rightarrow R(X, Z)Y))$ e R é o tensor curvatura de M . Para o caso em que M é orientável e compacta, Cheng-Yau provaram que o operador $\square$ é auto-adjunto se, e somente se, $\operatorname{div} T = 0$.

Relacionamos os operadores $\mathcal{L}$ e $\square$. Assim, obtemos a fórmula tipo Bochner:

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla f, \nabla(\mathcal{L} f) \rangle + R_{\eta, T}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T \rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T \rangle,$$

em que $R_{\eta,T} := R_T - \nabla(\operatorname{div}_\eta T)^\sharp$.

De posse da fórmula tipo Bochner para $\mathcal{L}$, o mais natural agora é estudarmos hipersuperfícies com k -curvatura média constante através das propriedades do operador $\mathcal{L}$, bem como obtermos algumas generalizações dos teoremas de Lichnerowicz e Obata, ou até mesmo das recentes generalizações obtidas por Alencar-Neto-Zhou [2]. Além disso, podemos obter algumas generalizações dos trabalhos de Uhlenbeck [49], Berger [11], Soulf [48] e Mesquita [35]. A seguir apresentamos os principais resultados que provamos envolvendo estimativas de autovalores do operador $\mathcal{L}$.

Lema 1 *Sejam $\mathcal{L}u = \operatorname{div}_\eta(T(\nabla u))$, λ_i o i -ésimo autovalor do problema (16) e u_i a autofunção correspondente a λ_i . Então para $h \in \mathcal{C}^3(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$, e k inteiro, temos*

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_{\Omega} u_i^2 T(\nabla h, \nabla h) \, \mathrm{d}m \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} (u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i))^2 \, \mathrm{d}m.$$

Lema 2 *Sejam Ω um domínio de uma variedade riemanniana n -dimensional M isometricamente imersa no $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}u = \operatorname{div}_\eta(T(\nabla u))$, λ_i o i -ésimo autovalor do problema (16) e u_i a autofunção correspondente a λ_i . Então*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T) \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left[\int_{\Omega} u_i^2 \left(\|\operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot))\|^2 + |\operatorname{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta)|^2 \right) \, \mathrm{d}m \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_{\Omega} u_i \left(\langle \operatorname{tr}(\nabla T), T(\nabla u_i) \rangle - \langle T(\nabla \eta), T(\nabla u_i) \rangle \right) \, \mathrm{d}m + 4\lambda_i \right]. \end{aligned}$$

Proposição 1 *Sejam Ω um domínio de uma variedade riemanniana n -dimensional M isometricamente imersa no $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}u = \operatorname{div}_\eta(T(\nabla u))$, λ_i o i -ésimo autovalor do problema (16) e u_i a autofunção correspondente a λ_i . Então*

$$\operatorname{tr}(T) \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left((m-n)^2 A_0^2 T_*^2 + (T_0 + T_* \eta_0)^2 + 4(T_0 + T_* \eta_0) \lambda_i^{\frac{1}{2}} + 4\lambda_i \right),$$

em que $A_0 = \max\{\sup_{\bar{\Omega}} |A_{e_k}|, k = n+1, \dots, m\}$, A_{e_k} o operador de Weingarten da imersão na direção e_k , $\eta_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$, $T_* = \sup_{\bar{\Omega}} |T|$ e $T_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\operatorname{tr}(\nabla T)|$.

A próxima proposição é uma importante ferramenta para a obtenção das generalizações que discutiremos a seguir.

Proposição 2 *Sejam Ω um domínio de uma variedade riemanniana n -dimensional M isometricamente imersa no $\mathbb{R}^m$ com vetor curvatura média H e λ_i o i -ésimo autovalor do problema (16) para $T = I$. Então*

$$(17) \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left[\lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4} \right],$$

em que $\eta_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$, $H_0 = \sup_{\bar{\Omega}} \|H\|$ e $\bar{\eta}_0 = \sup_{\bar{\Omega}} L\eta$ são constantes.

Um fato interessante é quando consideramos $v_i := \lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4}$, de modo que (17) é equivalente a

$$\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_i$$

que tem o mesmo formato da equação (6) para o caso do espaço euclidiano. As inequações a seguir estendem os resultados de Cheng e Yang, [18] e [20], obtidos para domínios da esfera unitária $\mathbb{S}^n(1)$ e para domínios do espaço projetivo $\mathbb{CP}^n(4)$.

Teorema 9 *Nas hipóteses da Proposição 2 temos as três equações seguintes*

$$\begin{aligned} v_{k+1} &\leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{i=1}^k v_i \\ v_{k+1} &\leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n} \right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ v_{k+1} - v_k &\leq 2 \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Teorema 10 *Nas hipóteses da Proposição 2 temos*

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \geq \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}},$$

para $k=1, 2, \dots$.

Finalmente, provamos a desejada estimativa que está de acordo com a expansão assintótica de Weyl.

Teorema 11 *Nas hipóteses da Proposição 2 temos*

$$v_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n} \right) k^{\frac{2}{n}} v_1$$

Capítulo 1

Sobre o Princípio do Máximo Fraco

Ressaltamos ao leitor que, apesar desta tese constar de dois temas distintos e com notações adequadas aos assuntos abordados em cada um deles, alguns fatos preliminares do presente capítulo podem ser melhor esclarecidos no Capítulo 2 à frente. Neste capítulo exibiremos uma outra forma do princípio do máximo fraco e mostraremos algumas aplicações.

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

Seja $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade riemanniana não necessariamente completa e consideremos o operador Laplace-Beltrami Δ . Dizemos que M satisfaz o princípio do máximo fraco (WMP) para Δ se para cada função $u \in \mathcal{C}^2$ em M tal que $u^* = \sup_M u < +\infty$ e cada $\gamma < u^*$ temos

$$\inf_{\Omega_\gamma} \Delta u \leq 0,$$

com

$$\Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) > \gamma\}.$$

É bem conhecido que o WMP é equivalente à completude estocástica do movimento browniano associado a Δ (ver [46]) e à validade do teste Khasminskii (ver [34, 47]). Nesta seção apresentaremos outra forma do Princípio do Máximo fraco que nos será útil para aplicações geométricas; não nos restringiremos ao caso do operador Δ . Primeiramente

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

iremos definir uma classe de operadores conforme equação (1.3) abaixo, para maiores detalhes ver [1, 3].

Seja T um campo de 2-tensores simétricos definido em uma variedade riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Consideremos que, para funções contínuas T_- e T_+ em $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, o tensor T satisfaça

$$(1.1) \quad 0 < T_-(r) \leq T(Y, Y) \leq T_+(r)$$

para cada $Y \in T_x M$, $|Y| = 1$, e todo $x \in \partial B_r$, em que B_r denota a bola geodésica de raio r centrada na origem o . Seja $\varphi : M \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $\varphi(\cdot, t) \in \mathcal{C}^0(M)$ para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi(x, \cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_0^+) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ para cada $x \in M$, e denotando $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$,

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{i) } \varphi(x, 0) = 0 \text{ para todo } x \in M; \\ \text{ii) } \varphi(x, t) > 0 \text{ em } M \times \mathbb{R}^+; \\ \text{iii) } \varphi(x, t) \leq A(x)t^\delta \text{ em } M \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

para algum $\delta > 0$ e $A \in \mathcal{C}^0(M)$, $A > 0$. Seja X um campo de vetores em M . Para $u \in \mathcal{C}^1(M)$ definimos

$$(1.3) \quad Lu = L_{\varphi, T, X} u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{-1} \varphi(x, |\nabla u|) T(\nabla u, \cdot)^\sharp) - \langle X, \nabla u \rangle$$

no sentido fraco, em que $^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ denota o isomorfismo musical, ou seja, a inversa da aplicação canônica $*$: $TM \rightarrow TM^*$ que associa cada campo $X \in TM$ ao seu dual X^* .

Observação 1.1 *Notemos que a inequação (1.1) e o item ii) em (1.2) são as condições de elipticidade do operador L . É bom destacar que as propriedades (1.1) e (1.2) não serão usadas na demonstração do Teorema 1.1 a seguir, no entanto, elas são a base na busca de condições suficientes para garantir que a propriedade expressa na Definição 1.1 abaixo seja válida na variedade que estamos considerando. Ver por exemplo em [1, 3], ou vários outros resultados apresentados em [47].*

No que segue tomamos $q(x) \in \mathcal{C}^0(M)$, $q(x) > 0$.

Definição 1.1 *Dizemos que o q -WMP (o Princípio do Máximo q -Fraco) se verifica em M para o operador L em (1.3) se, para cada $u \in \mathcal{C}^1(M)$ com $u^* = \sup_M u < +\infty$ e cada $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\gamma < u^*$, temos*

$$(1.4) \quad \inf_{\Omega_\gamma} \{q(x)Lu\} \leq 0$$

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

no sentido fraco, em que

$$\Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) > \gamma\}.$$

No caso em que $q(x)$ é uma constante positiva simplesmente diremos que L satisfaz o WMP (Princípio do Máximo Fraco).

Ressaltamos que quando $q(x)$ é limitada entre duas constantes positivas a validade de WMP é equivalente a validade de q -WMP. De fato, é fácil ver que quando $q(x)$ é limitada por baixo por uma constante positiva, então o q -WMP implica o WMP, enquanto a recíproca ocorre quando $q(x)$ é limitada por cima.

Observemos que (1.4) no sentido fraco é expresso como segue: para todo $\varepsilon > 0$

$$- \int_{\Omega_\gamma} (|\nabla u|^{-1} \varphi(x, |\nabla u|) T(\nabla u, \nabla \psi) + \langle X, \nabla u \rangle \psi) \leq \int_{\Omega_\gamma} \frac{\varepsilon}{q(x)} \psi,$$

para toda $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_\gamma)$, $\psi \geq 0$, $\psi \not\equiv 0$. Por outro lado, a inequação estrita

$$\inf_{\Omega_\gamma} \{q(x) Lu\} < 0,$$

no sentido fraco significa que para algum $\varepsilon > 0$

$$- \int_{\Omega_\gamma} (|\nabla u|^{-1} \varphi(x, |\nabla u|) T(\nabla u, \nabla \psi) + \langle X, \nabla u \rangle \psi) \leq - \int_{\Omega_\gamma} \frac{\varepsilon}{q(x)} \psi,$$

para toda $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_\gamma)$, $\psi \geq 0$, $\psi \not\equiv 0$.

O fato seguinte merece ser mencionado, visto que estende a Proposição 3.4 em [47] para o operador (1.3).

Proposição 1.1 *Sejam $(M, \langle, \rangle_M)$ e $(N, \langle, \rangle_N)$ variedades riemannianas não compactas, e assuma que existam compactos $A \subset M$ e $B \subset N$, e uma isometria riemanniana $F : M \setminus A \rightarrow N \setminus B$ que preserva sequências divergentes nos espaços ambientes, ou seja, $\{x_k\}$ diverge em M se, e somente se, $\{F(x_k)\}$ diverge em N . Seja X um campo de vetores em M , T um campo de 2-tensores simétricos em M satisfazendo (1.1) e φ como em (1.2) que define o operador diferencial $L_{\varphi, T, X}$ em M ; sejam Y, S, ψ com as mesmas propriedades em N e defina o operador diferencial $L_{\psi, S, Y}$ em N . Assuma que*

$$Y = F_* X, \quad S = F_* T, \quad \psi(y, t) = \varphi(F^{-1}(y), t)$$

em $N \setminus B$. Então o WMP é válido em M para o operador $L_{\varphi, T, X}$ se, e somente se, o WMP é válido em N para o operador $L_{\psi, S, Y}$.

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

Observemos que a condição: “ $\{x_k\}$ diverge em M se, e somente se, $\{F(x_k)\}$ diverge em N ” faz sentido para qualquer sequência divergente mesmo que F não esteja globalmente definida em M pois a sequência pode eventualmente sair do compacto A .

Demonstração: Suponhamos que WMP é válido em M para o operador $L_{\varphi,T,X}$. Seja $v \in \mathcal{C}^1(N)$ com $v^* < +\infty$. Sem perda de generalidade podemos assumir que v^* não é atingido e é estritamente positivo. Consideremos K_1, K_2 dois domínios relativamente compactos em M tais que $A \subseteq K_1 \subseteq \overline{K_1} \subseteq K_2$. Escolhemos uma função de corte (cut-off function) suave $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo

$$\lambda \equiv \begin{cases} 0 & \text{em } K_1; \\ 1 & \text{em } M \setminus K_2, \end{cases}$$

e defina uma função $u \in \mathcal{C}^1(M)$ por

$$u = \begin{cases} \lambda(v \circ F), & \text{em } M \setminus A; \\ 0, & \text{em } A. \end{cases}$$

Afirmamos que $v^* = u^*$ e que u^* não é atingido. Por construção $u^* \leq v^*$. Por outro lado, seja $\{\bar{y}_k\}$ uma sequência em N tal que $v(\bar{y}_k) \nearrow v^*$. Como v não atinge v^* a sequência $\{\bar{y}_k\}$ é divergente, portanto para k suficientemente grande $\bar{y}_k$ não pertence a B . Pela hipótese sobre F , $\{\bar{x}_k\} = \{F^{-1}(\bar{y}_k)\}$ é uma sequência divergente em M . Assim $u(\bar{x}_k) = \lambda(\bar{x}_k)(v \circ F(\bar{x}_k)) = v(\bar{y}_k)$ para k suficientemente grande, mostrando que $u(\bar{x}_k) \nearrow v^*$ e $v^* = u^*$. Além disso, u^* não é atingido, de fato, $u(x) = 0$ em A , e $u(x) \leq v(F(x)) < v^* = u^*$ em $M \setminus A$, logo u não atinge u^* , como afirmado. Desta forma podemos fixar $\gamma < v^*$ suficientemente próximo de v^* tal que

$$\Sigma_\gamma = \{y \in N : v(y) > \gamma\} \subset N \setminus (B \cup F(\overline{K_2} \setminus A))$$

e considerar $F^{-1}(\Sigma_\gamma) = \{x \in M \setminus A : (v \circ F)(x) > \gamma\}$. Como $v^* = u^* > 0$ podemos supor que $\gamma > 0$ e segue que

$$\Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) > \gamma\} = \{x \in M \setminus A : \lambda(x)(v \circ F)(x) > \gamma\}.$$

Em particular $(v \circ F)(x) > \gamma$ e então $\Omega_\gamma \subseteq F^{-1}(\Sigma_\gamma)$.

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

A validade do WMP em M resulta que para cada $\varepsilon > 0$ existe algum $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_\gamma)$, $\tilde{\psi} \geq 0$, $\tilde{\psi} \not\equiv 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{F^{-1}(\Sigma_\gamma)} \varepsilon \tilde{\psi} &= \int_{\Omega_\gamma} \varepsilon \tilde{\psi} \\ &\geq - \int_{\Omega_\gamma} \left(|\nabla u|^{-1} \varphi(x, |\nabla u|) T(\nabla u, \nabla \tilde{\psi}) + \langle X, \nabla u \rangle \tilde{\psi} \right) \\ &= - \int_{F^{-1}(\Sigma_\gamma)} \left(|\nabla u|^{-1} \varphi(x, |\nabla u|) T(\nabla u, \nabla \tilde{\psi}) + \langle X, \nabla u \rangle \tilde{\psi} \right) \\ &= - \int_{\Sigma_\gamma} |\nabla(u \circ F^{-1})|^{-1} \varphi(F^{-1}(y), |\nabla(u \circ F^{-1})|) T(u, F^{-1}, \tilde{\psi}, F^{-1}) \\ &\quad - \int_{\Sigma_\gamma} \langle X \circ F^{-1}, \nabla(u \circ F^{-1}) \rangle \tilde{\psi} \circ F^{-1}, \end{aligned}$$

onde $T(u, F^{-1}, \tilde{\psi}, F^{-1}) = T(\nabla(u \circ F^{-1}), \nabla(\tilde{\psi} \circ F^{-1}))$. Mas para $y \in \Sigma_\gamma$, $F^{-1}(y) \in M \setminus K_2$ e portanto

$$u(F^{-1}(y)) = (v \circ F)(F^{-1}(y)) = v(y);$$

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} \circ F^{-1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma_\gamma), \quad \tilde{\varphi} \geq 0, \quad \tilde{\varphi} \not\equiv 0;$$

$$X \circ F^{-1} = Y \text{ e } T(\nabla(u \circ F^{-1}), \nabla \tilde{\varphi}) = S(\nabla v, \nabla \tilde{\varphi}).$$

Logo, sendo F uma isometria

$$\int_{\Sigma_\gamma} \varepsilon \tilde{\varphi} \geq - \int_{\Sigma_\gamma} (|\nabla v|^{-1} \psi(y, |\nabla v|) S(\nabla v, \nabla \tilde{\varphi}) + \langle Y, \nabla v \rangle \tilde{\varphi}).$$

Isto prova que o WMP é válido para o operador $L_{\psi, S, Y}$ em N . Repetindo o mesmo argumento trocando M por N se prova que se WMP é válido em N , então também o é em M (note que $F^{-1} : N \setminus B \rightarrow M \setminus A$ é uma isometria riemanniana que leva sequências divergentes em sequências divergentes). $\square$

Teorema 1.1 *O q -WMP é válido em M para o operador L se, e somente se, o q -WMP aberto é válido em M , ou seja, para cada $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, cada aberto $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$, e cada $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$(1.5) \quad \begin{cases} i) & q(x)Lv \geq f(v) \text{ em } \Omega; \\ ii) & \sup_\Omega v < +\infty, \end{cases}$$

temos que, ou

$$(1.6) \quad \sup_\Omega v = \sup_{\partial\Omega} v$$

ou

$$(1.7) \quad f(\sup_{\Omega} v) \leq 0.$$

Observação 1.2 *Observemos que o q -WMP em M para o operador L é também equivalente a seguinte dupla afirmação: O q -WMP é válido em M para o operador L se, e somente se, para cada $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, para cada aberto $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$, e cada $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} i) & q(x)Lv \leq f(v) \text{ em } \Omega, \\ ii) & \inf_{\Omega} v > -\infty, \end{cases}$$

temos que, ou

$$\inf_{\Omega} v = \inf_{\partial\Omega} v$$

ou

$$f(\inf_{\Omega} v) \geq 0.$$

Demonstração: Consideremos que o q -WMP é válido para o operador L em M e sejam f , v e Ω como nas hipóteses do teorema. Suponhamos que (1.6) não é satisfeita, ou seja

$$(1.8) \quad \sup_{\Omega} v > \sup_{\partial\Omega} v.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$(1.9) \quad \sup_{\Omega} v - 2\varepsilon > \sup_{\partial\Omega} v + 2\varepsilon$$

e definimos

$$(1.10) \quad U_{2\varepsilon} = \{x \in \Omega : v(x) > \sup_{\Omega} v - 2\varepsilon\}.$$

Notemos que $U_{2\varepsilon} \neq \emptyset$. Além disso, para todo $x \in \overline{U}_{2\varepsilon}$ temos de (1.9)

$$v(x) \geq \sup_{\Omega} v - 2\varepsilon > \sup_{\partial\Omega} v + 2\varepsilon > \sup_{\partial\Omega} v,$$

então $x \in \Omega$ por (1.8), ou seja, $\overline{U}_{2\varepsilon} \subset \Omega$, e portanto

$$\overline{U}_{\varepsilon} \subset U_{2\varepsilon} \subset \overline{U}_{2\varepsilon} \subset \Omega,$$

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

em que U_ε é definido de maneira similar a (1.10). Somando, se necessário, uma constante positiva a v , podemos supor que $\sup_\Omega v > 2\varepsilon$ e seja $\gamma = \sup_\Omega v - \varepsilon > 0$. Escolhemos uma função corte suave $\psi : M \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\psi \equiv \begin{cases} 1 & \text{em } U_\varepsilon, \\ 0 & \text{em } M \setminus U_{2\varepsilon}, \end{cases}$$

e definimos

$$(1.11) \quad u(x) = \begin{cases} \psi(x)v(x) & \text{em } \Omega, \\ 0 & \text{em } M \setminus \Omega. \end{cases}$$

Temos que $u \in \mathcal{C}^1(M)$, $u^* < +\infty$ e

$$(1.12) \quad Lu = Lv \quad \text{em } U_\varepsilon.$$

Afirmamos que

$$\Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) > \gamma\} = U_\varepsilon = \{x \in \Omega : v(x) > \gamma = \sup_\Omega v - \varepsilon\}.$$

Como $v(x) = u(x)$ em U_ε , é suficiente mostrar que $\Omega_\gamma \subset U_\varepsilon$. Para todo $x \in \Omega_\gamma$ tem-se $u(x) > \gamma > 0$. Em particular, por (1.11), e para $x \in \Omega$ e $v(x) > 0$, segue que

$$v(x) \geq \psi(x)v(x) = u(x) > \gamma = \sup_\Omega v - \varepsilon$$

e isto significa que $x \in U_\varepsilon$.

Como para qualquer constante $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(v+\alpha) = Lv$, usando (1.12) e (1.5) deduzimos que

$$Lu = L(v + \alpha) = Lv \geq \frac{1}{q(x)}f(v) \quad \text{em } \Omega_\gamma$$

ou equivalentemente

$$q(x)Lu \geq f(v) \quad \text{em } \Omega_\gamma.$$

Aplicando o q -WMP para u inferimos que

$$0 \geq \inf_{\Omega_\gamma} \{q(x)Lu\} \geq \inf_{\Omega_\gamma} f(v).$$

Mas $\Omega_\gamma = U_\varepsilon$ e assim, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e usando a continuidade de f obtemos (1.7).

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

Para a recíproca, assumimos a validade do q -WMP aberto para L . Suponhamos por absurdo que o q -WMP não é válido. Então, existe $u \in \mathcal{C}^1(M)$ com $u^* < +\infty$, e $\gamma < u^*$ tais que

$$(1.13) \quad \beta = \inf_{\Omega_\gamma} \{q(x)Lu\} > 0.$$

Isto implica que u é não constante e portanto, como β está aumentando com γ , escolhemos γ suficientemente próximo a u^* , e podemos supor que

$$\partial\Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) = \gamma\} \neq \emptyset.$$

Sejam $\Omega = \Omega_\gamma$ e $v = u|_{\overline{\Omega}}$. Por (1.13) e pelo fato de $u^* < +\infty$ temos

$$\begin{cases} q(x)Lv \geq \beta \text{ on } \Omega, \\ \sup_{\Omega} v = u^* < +\infty. \end{cases}$$

Como $f(v) \equiv \beta > 0$, a alternativa (1.7) não pode ocorrer; e a alternativa (1.6) também não, porque

$$\sup_{\Omega} v = u^* > \gamma = \sup_{\partial\Omega} v,$$

o que resulta na contradição desejada. $\square$

Uma leitura cuidadosa desta prova nos permite reescrever o teorema acima como segue.

Teorema 1.2 *O q -WMP é válido em M para o operador L se, e somente se, para cada $\beta \in \mathbb{R}^+$, cada aberto $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$, e cada $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} i) \ q(x)Lv \geq \beta \text{ em } \Omega; \\ ii) \ \sup_{\Omega} v < +\infty, \end{cases}$$

temos

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v.$$

1.1.1 Parabolicidade e o Princípio do Máximo Fraco

A discussão acima e o fato de que, como explicado com alguns detalhes em [47], a parabolicidade para o operador Laplace-Beltrami Δ é equivalente a uma certa forma mais forte do WMP, sugerem introduzir a seguinte

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

Definição 1.2 Dizemos que o operador L como em (1.3) é fortemente parabólico (SP) em M se para cada $u \in \mathcal{C}^1(M)$ não constante com $u^* < +\infty$ e para cada $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\gamma < u^*$ temos

$$\inf_{\Omega_\gamma} \{Lu\} < 0.$$

É imediato comparar esta definição com a mais familiar

Definição 1.3 Dizemos que o operador L é parabólico em M se para cada $u \in \mathcal{C}^1(M)$ com $u^* < +\infty$ e $Lu \geq 0$ implicar em u constante.

É claro que a parabolicidade forte de L implica a parabolicidade de L . Para a recíproca, se L é parabólico e satisfaz a Propriedade 1.1 abaixo, então L também será fortemente parabólico. Observamos que ampliamos a classe funcional para $\text{Lip}_{\text{loc}}(M)$ ou $\mathcal{C}^0(M) \cap W_{\text{loc}}^{1,1+\delta}(M)$.

Propriedade 1.1 Para cada aberto $\Omega \subseteq M$, se $u \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap W_{\text{loc}}^{1,1+\delta}(\Omega)$ satisfaz $Lu \geq 0$ em Ω então, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado, a função $v(x) = \max\{u(x), \alpha\}$ também satisfaz $Lv \geq 0$ em Ω .

De fato, assumindo a validade da Propriedade 1.1 e da Definição 1.3 com $u \in \mathcal{C}^0(M) \cap W_{\text{loc}}^{1,1+\delta}(M)$. Para ver a validade da Definição 1.2 argumentamos por contradição e supomos que existe u não constante com $u^* < +\infty$, e $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\gamma < u^*$ tais que $Lu \geq 0$ em Ω_γ .

Incrementando γ podemos assumir $\partial\Omega_\gamma \neq \emptyset$, porque caso contrário $\Omega_\gamma = M$ e o resultado é imediato. Consideremos a função

$$v(x) = \begin{cases} \max\{u(x), \gamma + \frac{u^* - \gamma}{2}\} & \text{em } \Omega_\gamma, \\ \gamma + \frac{u^* - \gamma}{2} & \text{em } M \setminus \Omega_\gamma. \end{cases}$$

Então $v^* = u^* < +\infty$ e pela Propriedade 1.1 em Ω_γ temos que $Lv \geq 0$ em Ω_γ , implicando que $Lv \geq 0$ em M . Pela Definição 1.3 v é constante e então $v = \gamma + \frac{u^* - \gamma}{2} < u^* = v^* = v$, o que é uma contradição.

Notemos que a Propriedade 1.1 é conhecida e válida, por exemplo, para o laplaciano e para operadores da forma $Lu = \text{div}(T(\nabla u, \cdot)^\sharp) - \langle X, \nabla u \rangle$. Em particular, se $X = (\text{div} T)^\sharp$ temos o operador do tipo traço $Lu = \text{tr}(T \circ \nabla^2 u) = \text{div}(T(\nabla u, \cdot)^\sharp) - \langle (\text{div} T)^\sharp, \nabla u \rangle$. Para maiores esclarecimentos recomendamos ao leitor verificar a Definição 2.1 no Capítulo 2.

1.1 Uma forma equivalente ao Princípio do Máximo Fraco

Além disso, a Propriedade 1.1 também é válida para a classe de operadores da forma $L_{p,Q}u =: \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \langle \nabla Q, \nabla u \rangle$ com $p \in (1, +\infty)$ e $Q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função potencial (ver Proposição 7.2 de [12] para resultados mais gerais).

Assim, a Propriedade 1.1 é uma condição suficiente para a equivalência entre parabolicidade forte e parabolicidade para o operador L na classe $\operatorname{Lip}_{\operatorname{loc}}(M)$ ou na classe $\mathcal{C}^0(M) \cap W_{\operatorname{loc}}^{1,1+\delta}(M)$. Uma questão interessante é saber se também é uma condição necessária.

Como era de se esperar temos a seguinte versão aberta da parabolicidade forte para o operador L .

Teorema 1.3 *A parabolicidade forte para o operador L como na Definição 1.2 é equivalente a seguinte SP aberta: para cada $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, cada aberto $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$ e cada $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, não constante, satisfazendo*

$$\begin{cases} Lv \geq f(v) \text{ em } \Omega, \\ \sup_{\Omega} v < +\infty \end{cases}$$

temos que, ou

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v$$

ou, para cada $\varepsilon > 0$

$$(1.14) \quad \inf_{U_\varepsilon} f(v) < 0$$

em que

$$U_\varepsilon = \{x \in \Omega : v(x) > \sup_{\Omega} v - \varepsilon\}.$$

A prova do teorema acima é análoga a do Teorema 1.1, bastando ressaltar que a mínima, mas essencial, diferença entre eles está nas conclusões (1.14) do Teorema 1.3 e (1.7) do Teorema 1.1.

Definição 1.4 *O operador L é Ahlfors parabólico em M se para cada aberto $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$ e cada $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, não constante, satisfazendo*

$$(1.15) \quad \begin{cases} Lv \geq 0 \text{ em } \Omega, \\ \sup_{\Omega} v < +\infty, \end{cases}$$

temos que

$$(1.16) \quad \sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v.$$

Como consequência do Teorema 1.3 concluímos que, se L é SP então L é Ahlfors parabólico. Interessantemente, em estrita analogia com o Teorema 1.2, temos que a recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.4 *O operador L é SP em M se, e somente se, é Ahlfors parabólico.*

Demonstração: Basta-nos provar que Ahlfors parabolicidade implica em SP. Suponhamos por absurdo a existência de uma $u \in \mathcal{C}^1(M)$, não constante e $u^* < +\infty$, e de $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\gamma < u^*$ tais que $\inf_{\Omega_\gamma} Lu \geq 0$, ou seja,

$$Lu \geq 0 \text{ em } \Omega_\gamma.$$

Como u é não constante, pela possibilidade de aumentar γ podemos supor $\partial\Omega_\gamma \neq \emptyset$. Seja $v = u|_{\overline{\Omega}_\gamma}$ então, para $\Omega = \Omega_\gamma$, $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, v é não constante em Ω e satisfaz (1.15). Portanto, por (1.16),

$$u^* = \sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v = \gamma$$

o que é uma contradição. □

Já provamos um número suficiente de condições que garantem a parabolicidade forte para o operador geral L em (1.3). Entretanto, uma vez que no que segue vamos considerar somente o caso $\varphi(x, t) = t$ apresentamos aqui o resultado válido para o caso linear.

Teorema 1.5 *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade riemanniana não compacta e $L = L_{\varphi, T, X}$ como em (1.3), com $\varphi(x, t) = t$. Assuma a existência de $\gamma \in \mathcal{C}^2(M)$ tal que*

$$\begin{cases} \gamma(x) \rightarrow +\infty \text{ para } x \rightarrow \infty, \\ L\gamma < 0 \text{ fora de um conjunto compacto de } M. \end{cases}$$

Então o operador L é fortemente parabólico.

A demonstração deste fato é análoga a prova do Teorema A em [1], com uma modificação no mesmo sentido da observada entre as demonstrações do Teorema 1.1 e do Teorema 1.3. Ver também [14].

Se $L\gamma < 0$ no sentido fraco fora de um compacto para $\gamma \in \mathcal{C}^1(M)$ precisamos que T seja positivo definido.

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

Seja $\bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ uma variedade *produto warped*, em que $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $(\mathbb{P}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$ é uma variedade riemanniana n -dimensional e $\varrho : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua. A variedade produto $I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ está munida com métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dt^2 + \varrho(t)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}.$$

Cada folha $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}$, que chamaremos de um *slice* da folheação $t \in I \rightarrow \mathbb{P}_t$ de $\bar{M}$, é uma hipersuperfície totalmente umbílica com curvatura média constante. O campo de vetores curvatura média H_t é dado por

$$H_t = -\mathcal{H}(t)\partial_t, \text{ com } \mathcal{H}(t) = \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}.$$

1.2.1 Gráficos em produtos warped

Dada uma função suave $u : \mathbb{P}^n \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$, consideremos a imersão $F : \mathbb{P}^n \rightarrow \bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ dada pelo gráfico de u , ou seja, $F(x) = (u(x), x)$, e denotemos por $\Sigma(u)$ a imagem $F(\mathbb{P}^n)$. A métrica induzida em $\mathbb{P}^n$ da métrica do *produto warped* no espaço ambiente é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = du^2 + \varrho(u)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}$$

e o campo de vetores

$$N = \frac{\varrho(u)}{\sqrt{\varrho(u)^2 + |Du|_{\mathbb{P}}^2}} \left(\frac{1}{\varrho(u)^2} Du - \partial_t \right)$$

define o normal unitário ao gráfico $\Sigma(u)$ satisfazendo $-1 \leq \langle N, \partial_t \rangle < 0$. A função curvatura média H de $\Sigma(u)$ com respeito a essa orientação é dada por

$$\operatorname{div}_{\mathbb{P}} \left(\frac{Du}{\sqrt{\varrho(u)^2 + |Du|_{\mathbb{P}}^2}} \right) = n\varrho(u) \left(\frac{\varrho'(u)}{\sqrt{\varrho(u)^2 + |Du|_{\mathbb{P}}^2}} - H \right).$$

Note que $\operatorname{div}_{\mathbb{P}}$, D e $|\cdot|_{\mathbb{P}}$ são tomadas com respeito a métrica original $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}$ de $\mathbb{P}^n$. Fixamos uma origem $o \in \mathbb{P}^n$ e para $u_0 = u(o)$ seja

$$\phi(t) = \int_{u_0}^t \frac{ds}{\varrho(s)}.$$

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

Definindo

$$(1.17) \quad w(x) = \phi(u(x)),$$

um cálculo direto mostra que w satisfaz

$$(1.18) \quad \operatorname{div}_{\mathbb{P}} \left(\frac{Dw}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} \right) = n\varrho(\phi^{-1}(w)) \left(\frac{\mathcal{H}(\phi^{-1}(w))}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} - H \right).$$

Nos referimos ao operador em (1.18) de operador curvatura média em $(\mathbb{P}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$.

Observemos que a mudança de variável em (1.17) tem uma interpretação geométrica. Neste caso, olhamos a métrica do *produto warped* como uma métrica conforme à métrica produto em $J \times \mathbb{P}^n$, em que $J \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, para maiores detalhes ver [6].

Teorema 1.6 *Seja $(\mathbb{P}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$ uma variedade riemanniana n -dimensional e assuma que o WMP é válido em $\mathbb{P}^n$ para o operador curvatura média. Seja $\bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ e, para uma função suave $u : \mathbb{P} \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$, seja $\Sigma(u)$ um gráfico em $\bar{M}$ com $H^* = \sup_{\mathbb{P}} H \leq 0$. Assuma que u e $|Du|_{\mathbb{P}}$ são limitadas superiormente. Então ou $\Sigma(u)$ é um slice $\mathbb{P}_{u_0}$, com $\mathcal{H}(u_0) = H^* \equiv H$, ou $\mathcal{H}(u^*) \leq H^*$, com $u^* = \sup_{\mathbb{P}} u$.*

Demonstração: Assuma que $\Sigma(u)$ não é um *slice*, ou seja, que u é não constante, e, por contradição, supomos que $\mathcal{H}(u^*) > H^*$. Por continuidade de $\mathcal{H}(t)$ podemos escolher um valor regular de u , $\gamma < u^*$, suficientemente próximo de u^* tal que $\mathcal{H}(t) > H^*$ para $t \in [\gamma, u^*]$. Definimos então w como em (1.17) e observamos que $w^* = \sup_{\mathbb{P}} w = \phi(u^*)$, e

$$\Omega_{\gamma} = \{x \in \mathbb{P} : u(x) > \gamma\} = \Omega = \{x \in \mathbb{P} : w(x) > \phi(\gamma)\}.$$

Temos que $\partial\Omega \neq \emptyset$ pois γ é um valor regular de u . Além disso, a função w satisfaz a equação

$$\operatorname{div}_{\mathbb{P}} \left(\frac{Dw}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} \right) = n\varrho(u) \left(\frac{\mathcal{H}(u)}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} - H(x) \right) \quad \text{em } \Omega,$$

com

$$u = \phi^{-1}(w).$$

Como por hipótese $H(x) \leq 0$ temos

$$\frac{H(x)}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} \geq H(x),$$

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

então

$$n\varrho(u) \left(\frac{\mathcal{H}(u)}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} - H(x) \right) \geq n\varrho(u) \frac{\mathcal{H}(u) - H(x)}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}}.$$

Por outro lado, observemos que em Ω temos

$$\mathcal{H}(u) > H^* \geq H(x).$$

Como

$$|Dw|_{\mathbb{P}}^2 = \frac{|Du|_{\mathbb{P}}^2}{\varrho(u)},$$

$|Du|_{\mathbb{P}}^2$ e $\varrho(u)$ são limitadas em $\bar{\Omega}$, então existe uma constante positiva C tal que

$$\frac{n\varrho(u)}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} \geq C \text{ em } \Omega,$$

e

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbb{P}} \left(\frac{Dw}{\sqrt{1 + |Dw|_{\mathbb{P}}^2}} \right) \geq C(\mathcal{H}(u) - H(x)) \geq C(\mathcal{H}(u) - H^*) > 0 \text{ em } \Omega, \\ \sup_{\Omega} w = w^* < +\infty. \end{cases}$$

Agora, aplicando o Teorema 1.1, como $\mathcal{H}(u^*) - H^* > 0$, a alternativa (1.7) não pode ocorrer. Temos ainda que

$$\sup_{\Omega} w = w^* > \phi(\gamma) = \sup_{\partial\Omega} w,$$

e então a outra alternativa também não pode ocorrer, nos dando a contradição desejada.

□

O corolário seguinte é uma consequência imediata do Teorema 1.6.

Corolário 1.1 *Seja $(\mathbb{P}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$ uma variedade riemanniana n -dimensional e assuma que o WMP é válido em $\mathbb{P}^n$ para o operador curvatura média. Seja $\bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ e para uma função suave $u : \mathbb{P} \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ seja $\Sigma(u)$ um gráfico mínimo em $\bar{M}$. Assuma que u e $|Du|_{\mathbb{P}}$ são limitadas superiormente. Então ou $\Sigma(u)$ é um slice $\mathbb{P}_{u_0}$, com $\varrho'(u_0) = 0$, ou $\varrho'(u^*) \leq 0$, com $u^* = \sup_{\mathbb{P}} u$.*

No próximo resultado estimamos H inferiormente.

Teorema 1.7 *Seja $(\mathbb{P}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$ uma variedade riemanniana n -dimensional e assuma que o WMP é válido em $\mathbb{P}^n$ para o operador curvatura média. Considere $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}$ um aberto com $\partial\mathcal{U} \neq \emptyset$ e $\bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$. Para $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{U}}) \cap \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})$ com $u(\bar{\mathcal{U}}) \subset I$, seja $\Sigma(u)$ um gráfico em $\bar{M}$ com $\sup_{\mathcal{U}} H \leq 0$. Assuma que u e $|Du|_{\mathbb{P}}$ são limitadas superiormente. Se $\sup_{\mathcal{U}} u > \sup_{\partial\mathcal{U}} u$ então $\mathcal{H}(\sup_{\mathcal{U}} u) \leq \sup_{\mathcal{U}} H$.*

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

Demonstração: Como $\sup_{\mathcal{U}} u > \sup_{\partial\mathcal{U}} u$ temos que u é não constante. Suponhamos por absurdo que $\mathcal{H}(\sup_{\mathcal{U}} u) > \sup_{\mathcal{U}} H$. Escolhemos $\gamma < \sup_{\mathcal{U}} u$, suficientemente próximo de $\sup_{\mathcal{U}} u$ tal que $\mathcal{H}(t) > \sup_{\mathcal{U}} H$ para $t \in [\gamma, \sup_{\mathcal{U}} u]$, e $\bar{\Omega}_\gamma \subset \mathcal{U}$, em que

$$\Omega_\gamma = \{x \in \mathcal{U} : u(x) > \gamma\}.$$

Agora procedemos como na prova do Teorema 1.6 e obtemos a contradição desejada. $\square$

Corolário 1.2 *Seja $(\mathbb{P}^n, \langle, \rangle_{\mathbb{P}})$ uma variedade riemanniana n -dimensional e assuma que o WMP é válido em $\mathbb{P}^n$ para o operador curvatura média. Considere $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}$ um aberto com $\partial\mathcal{U} \neq \emptyset$ e $\bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ com $\varrho' > 0$. Para $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{U}}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ com $u(\bar{\mathcal{U}}) \subset I$, seja $\Sigma(u)$ um gráfico mínimo em $\bar{M}$. Assuma que u e $|Du|_{\mathbb{P}}$ são limitadas superiormente. Então $\sup_{\mathcal{U}} u = \sup_{\partial\mathcal{U}} u$.*

Nos resultados acima assumimos a validade do WMP para o operador curvatura média. Uma condição suficiente para isso é dada pela completude da variedade riemanniana $(\mathbb{P}^n, \langle, \rangle_{\mathbb{P}})$ em conjunto com a seguinte condição de crescimento do volume

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{vol} B_r}{r^2} < +\infty,$$

em que B_r é a bola geodésica em $\mathbb{P}$ centrada em o e de raio r . Mais precisamente,

Teorema 1.8 ([47]) *Seja $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade completa. Assuma que*

$$(1.19) \quad \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{vol} B_r}{r^2} < +\infty.$$

Seja $u \in \mathcal{C}^2(M)$ tal que $u^ = \sup_M u < +\infty$, e o campo $\frac{Du}{\sqrt{1+|u|^2}}$ seja $\mathcal{C}^1$. Então, dado $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\Omega_\gamma = \{x \in \mathcal{U} : u(x) > \gamma\} \neq \emptyset$$

temos $\inf_{\Omega_\gamma} \text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|u|^2}} \right) \leq 0$.

Sendo assim, podemos escrever o Teorema 1.6 na seguinte versão, cuja demonstração é imediata.

Teorema 1.9 *Seja $(\mathbb{P}^n, \langle, \rangle_{\mathbb{P}})$ uma variedade riemanniana n -dimensional completa. Fixe uma origem $o \in \mathbb{P}$ e suponha que a condição (1.19) é satisfeita. Seja $\bar{M} = \mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ e para $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P})$ considere $\Sigma(u)$ um gráfico em $\bar{M}$ com $H^* = \sup_{\mathbb{P}} H \leq 0$. Assuma que u e $|Du|_{\mathbb{P}}$ são limitadas superiormente. Então ou $\Sigma(u)$ é um slice $\mathbb{P}_{u_0}$, com $\mathcal{H}(u_0) = H^* \equiv H$, ou $\mathcal{H}(u^*) \leq H^*$, com $u^* = \sup_{\mathbb{P}} u$.*

1.2.2 Hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante

Começamos com o caso em que a curvatura média é constante. Primeiramente precisamos de algumas definições. Dada uma hipersuperfície isometricamente imersa

$$F : \Sigma^n \rightarrow \bar{M} = I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n,$$

sua função altura $h \in C^\infty(\Sigma^n)$ é definida como $h = \pi_I \circ F$, em que π_I denota a projeção no fator $I \subseteq \mathbb{R}$. Em I introduzimos a função

$$(1.20) \quad \sigma(t) = \int_{t_0}^t \varrho(r) dr$$

para algum $t_0 \in I$ fixo, e, quando a hipersuperfície é orientável, denotaremos Θ a função ângulo $\Theta : \Sigma^n \rightarrow [-1, 1]$ dada por

$$\Theta = \langle N, \partial_t \rangle$$

em que N denota a escolha de um campo de vetores unitários normais a Σ^n . Um cálculo simples mostra que

$$|\nabla h|^2 = 1 - \Theta^2 \quad \text{em } \Sigma^n.$$

Lembramos que uma variedade riemanniana M é estocasticamente completa se para algum $(x, t) \in M \times (0, +\infty)$

$$\int_M p(x, y, t) dy = 1,$$

em que $p : M \times M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é o núcleo do calor do operador Laplace-Beltrami.

Pigola, Rigoli e Setti em [46] demonstraram que a completude estocástica de uma variedade riemanniana é equivalente a validade do WMP para operador Laplace-Beltrami Δ . É neste sentido que utilizaremos a completude estocástica da variedade. Para maiores detalhes ver [46].

Teorema 1.10 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de curvatura média H constante, estocasticamente completa, tal que, para uma orientação adequada do normal N , $H \geq 0$. Suponha que a função altura h é limitada superiormente em Σ^n . Se $\tau \in \mathbb{R}$ é tal que $\mathcal{H}(\tau) > H$, $\mathcal{H}' \geq 0$ para $t > \tau$, então $h(x) \leq \tau$ em Σ^n .*

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

Demonstração: Por contradição suponhamos que $\sup_{\Sigma^n} h = h^* > \tau$. Observemos que h não pode ser constante em Σ^n , caso contrário $h \equiv h^*$ e $F(\Sigma^n)$ seria um *slice* $\{h^*\} \times \mathbb{P}^n$ com curvatura média constante $H = \mathcal{H}(h^*)$, mas $\mathcal{H}$ é não decrescente para $t > \tau$, e $h^* > \tau$ o que implicaria $H = \mathcal{H}(h^*) \geq \mathcal{H}(\tau)$, contradizendo a hipótese de $H < \mathcal{H}(\tau)$. Logo h é não constante e podemos escolher um valor regular τ_0 , com $\tau < \tau_0 < h^*$, de modo que o bordo de Ω_{τ_0} é não vazio, em que

$$\Omega_{\tau_0} = \{x \in \Sigma^n : h(x) > \tau_0\}.$$

Da Proposição 6 em [7] temos

$$\Delta(\sigma \circ h) = n\varrho(h)(\mathcal{H}(h) + \Theta H).$$

Pelas hipóteses sobre $\mathcal{H}(\tau)$ e $\mathcal{H}'$ conclui-se para $t > \tau$ que $\mathcal{H}(t) \geq \mathcal{H}(\tau) > H \geq 0$. Assim, em Ω_{τ_0} temos $\varrho(h) \geq \varrho(\tau_0) > 0$ e $\mathcal{H}(h) \geq \mathcal{H}(\tau_0) \geq \mathcal{H}(\tau) > H$. Como $H \geq 0$ e $-1 \leq \Theta \leq 0$ então $\Theta H \geq -H$ e

$$\mathcal{H}(h) + \Theta H \geq \mathcal{H}(h) - H \geq \mathcal{H}(\tau_0) - H > 0,$$

assim

$$\Delta(\sigma \circ h) \geq n\varrho(\tau_0)(\mathcal{H}(\tau_0) - H) \quad \text{em } \Omega_{\tau_0}.$$

De (1.20), $\sigma(t)$ é uma função crescente e portanto

$$\Lambda_{\sigma(\tau_0)} = \{x \in \Sigma^n : \sigma(h(x)) > \sigma(\tau_0)\} = \Omega_{\tau_0} \quad \text{e} \quad \partial\Lambda_{\sigma(\tau_0)} = \partial\Omega_{\tau_0}.$$

Tomemos $\Omega = \Lambda_{\sigma(\tau_0)}$ e $v = \sigma(h)|_{\bar{\Omega}}$, então

$$\begin{cases} \Delta v \geq n\varrho(\tau_0)(\mathcal{H}(\tau_0) - H) > 0 & \text{em } \Omega, \\ \sup_{\Omega} v = \sigma(h^*) < +\infty. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 1.1 devemos ter ou $\mathcal{H}(\tau_0) - H \leq 0$ ou $\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v$. Mas $\mathcal{H}(\tau_0) \geq \mathcal{H} > H$ e $\sup_{\Omega} v = \sigma(h^*) > \sigma(\tau_0) = \sup_{\partial\Omega} v$, obtendo assim uma contradição. $\square$

Agora vamos focar nossa atenção nas curvaturas de maior grau. Novamente necessitamos de algumas definições e alguns fatos úteis. Seja A o operador Weingarten na direção de N . Seus autovalores $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ são chamados de curvaturas principais na

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

direção de N da hipersuperfície orientável Σ^n . Suas funções simétricas elementares S_k , $k = 0, \dots, n$, $S_0 \equiv 1$, definem a k -curvatura média da hipersuperfície pela fórmula

$$H_k = \binom{n}{k}^{-1} S_k.$$

Assim, $H_1 = H$ é a curvatura média, H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker. Os tensores de Newton associados a imersão são definidos indutivamente por

$$P_0 = I, \quad P_k = S_k I - A \circ P_{k-1},$$

em que I é a identidade em $T\Sigma^n$. Para uso posterior, note que

$$\operatorname{tr} P_k = (n - k)S_k, \quad \operatorname{tr} A \circ P_k = (k + 1)S_{k+1}.$$

Associado a cada tensor de Newton definido globalmente $P_k : T\Sigma^n \rightarrow T\Sigma^n$, consideramos o operador diferencial de segunda ordem $L_k : \mathcal{C}^\infty(\Sigma^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma^n)$ dado por

$$(1.21) \quad L_k u = \operatorname{tr}(P_k \circ \nabla^2 u).$$

Em particular, L_0 é o operador Laplace-Beltrami. É imediato da Definição 2.1 e da equação (2.3), ambas do Capítulo 2, que

$$L_k u = \operatorname{div}(P_k(\nabla u)) - \langle (\operatorname{div} P_k)^\sharp, \nabla u \rangle.$$

Isto implica que L_k é elíptico se, e somente se, P_k é positivo definido.

Note que a elipticidade do operador L_1 é garantida assumindo que $H_2 > 0$. De fato, se isso acontece a curvatura média não se anula em Σ^n , pela inequação básica $H_1^2 \geq H_2$. Portanto, a imersão é automaticamente orientável. Ademais

$$n^2 H_1^2 = \sum_{j=1}^n \kappa_j^2 + n(n-1)H_2 > \kappa_i^2$$

para todo $i = 1, \dots, n$, e assim os autovalores $\mu_{1,i}$ de P_1 satisfazem $\mu_{1,i} = nH_1 - \kappa_i > 0$ para todo i , escolhendo N para que $H_1 > 0$. Isto mostra a elipticidade de L_1 . Em relação a L_j quando $j \geq 2$, assumiremos a existência de um ponto elíptico em Σ^n , ou seja, um ponto $p \in \Sigma^n$ no qual o operador de Weingarten A tem autovalores positivos com respeito a uma orientação apropriada. Pelo Lema 1 em [36], a existência de p implica que se $H_k > 0$ em toda Σ^n então o mesmo acontece para H_j , $j = 1, \dots, k-1$, e aplicando as inequações de Gårding [26], temos

$$H_1 \geq H_2^{1/2} \geq \dots \geq H_{k-1}^{1/(k-1)} \geq H_k^{1/k} > 0 \quad \text{em } \Sigma^n,$$

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

com igualdade em qualquer nível somente nos pontos umbílicos. Em particular, a hipersuperfície é orientável. Além disso, pela Proposição 3.2 em [8] também sabemos que cada operador L_j é elíptico para $j \leq k-1$. Observemos que a existência de um ponto elíptico não é garantida, em geral, mesmo no caso compacto; esferas totalmente geodésicas e o toro de Clifford em $\mathbb{S}^{n+1}$ são exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas, compactas sem pontos elípticos. No entanto, não é difícil ver que toda hipersuperfície compacta em um hemisfério aberto tem pontos elípticos.

No que segue indicaremos por K_M a curvatura seccional da variedade riemanniana M . A fim de garantir a validade do WMP para o tipo de operadores que usaremos no próximo resultado, ou seja, operadores do tipo traço que não podem ser colocados na forma divergente, utilizaremos a forma do princípio do máximo forte para tais operadores, isto é, assumiremos um limite inferior para K_{Σ^n} (ver [7]). Isso poderia ter sido feito também no Teorema 1.10 relaxando a hipótese sobre K_{Σ^n} para a curvatura de Ricci de Σ^n (ver [47]).

Teorema 1.11 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow I \times_{\varrho} \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície completa com k -curvatura média constante para algum $2 \leq k \leq n$ e $\sup_{\Sigma^n} |H_1| < +\infty$. Assuma a existência de um ponto elíptico em Σ^n tal que, para uma orientação adequada do normal N , $H_k > 0$. Suponha*

$$K_{\Sigma^n}(x) \geq -G^2(r(x))$$

para alguma $G \in C^1(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo

$$i) G(0) > 0; \quad ii) G'(t) \geq 0; \quad iii) \frac{1}{G(t)} \notin L^1(+\infty).$$

Assuma que existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}(\tau) > H_k^{1/k}$, com $\mathcal{H}' \geq 0$ para $t > \tau$, e seja $\Omega_\tau = \{x \in \Sigma^n : h(x) > \tau\}$. Se a função altura h é limitada superiormente em Σ^n , então ou $\sup_{\Omega_\tau} \Theta > 0$ ou $\Omega_\tau = \emptyset$, ou seja, $h(x) \leq \tau$ em Σ^n .

Demonstração: Assuma que $\Omega_\tau \neq \emptyset$ e por contradição suponha que $\Theta \leq 0$ em Ω_τ . Consideremos que o WMP seja válido em Σ^n para o operador L_{k-1} definido na equação (1.21), em funções $C^2(\Sigma^n)$, por

$$L_{k-1}u = \text{tr}(P_{k-1} \circ \nabla^2 u),$$

1.2 Aplicações a hipersuperfícies em produtos warped

em que, pela equação (34) em [7],

$$P_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{c_{k-1}}{c_j} \mathcal{H}(h)^{k-1-j} \Theta^j P_j.$$

com $c_k = (n-k) \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n}{k+1}$.

Como $\Omega_\tau \neq \emptyset$, então $h^* > \tau$. Se h é constante em Σ^n , então $h \equiv h^*$ e $F(\Sigma^n)$ é um *slice* $\{h^*\} \times \mathbb{P}^n$ com k -curvatura média $H_k = \mathcal{H}(h^*)^k$. Mas $\mathcal{H}$ é não decrescente para $t > \tau$, o que implica

$$H_k^{\frac{1}{k}} = \mathcal{H}(h^*) \geq \mathcal{H}(\tau),$$

o que contradiz a hipótese $\mathcal{H}(\tau) > H_k^{\frac{1}{k}}$. Desta maneira podemos supor que h é não constante e assim podemos fixar um valor regular $\tau < \tau_0 < h^*$ para o qual $\partial\Omega_{\tau_0} \neq \emptyset$. Note que como $\Omega_{\tau_0} \subset \Omega_\tau$ então $\Theta \leq 0$ em Ω_{τ_0} . Novamente, pela equação (34) em [7], temos

$$L_{k-1}(\sigma \circ h) = c_{k-1} \varrho(h) (\mathcal{H}(h)^k + (-1)^{k-1} \Theta^k H_k) \quad \text{em } \Omega_{\tau_0}.$$

Pelas hipóteses sobre $\mathcal{H}(\tau)$ e $\mathcal{H}'$ conclui-se que para $t > \tau$ que $\mathcal{H}(t) \geq \mathcal{H}(\tau) > H_k^{\frac{1}{k}} > 0$. Assim, em Ω_{τ_0} temos $\varrho(h) > \varrho(\tau_0) > 0$ e $\mathcal{H}(h)^k \geq \mathcal{H}(\tau_0)^k \geq \mathcal{H}(\tau)^k > H_k$. Como $H_k > 0$, então $(-1)^{k-1} \Theta^k H_k \geq -H_k$ e

$$\mathcal{H}(h)^k + (-1)^{k-1} \Theta^k H_k \geq \mathcal{H}(h)^k - H_k \geq \mathcal{H}(\tau_0)^k - H_k > 0,$$

implicando que

$$L_{k-1}(\sigma \circ h) \geq c_{k-1} \varrho(\tau_0) (\mathcal{H}(\tau_0)^k - H_k) \quad \text{em } \Omega_{\tau_0}.$$

De (1.20), $\sigma(t)$ é uma função crescente e consequentemente

$$\Lambda_{\sigma(\tau_0)} = \{x \in \Sigma^n : \sigma(h(x)) > \sigma(\tau_0)\} = \Omega_{\tau_0} \quad \text{e} \quad \partial\Lambda_{\sigma(\tau_0)} = \partial\Omega_{\tau_0}.$$

Tomamos $\Omega = \Lambda_{\sigma(\tau_0)}$ e $v = \sigma(h)|_{\bar{\Omega}}$, de modo que

$$\begin{cases} L_{k-1}v \geq c_{k-1} \varrho(\tau_0) (\mathcal{H}(\tau_0)^k - H_k) > 0 & \text{em } \Omega, \\ \sup_{\Omega} v = \sigma(h^*) < +\infty. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 1.1 devemos ter ou $\mathcal{H}(\tau_0)^k - H_k \leq 0$, que é impossível, ou $\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v$, que também não é possível porque $\sup_{\Omega} v = \sigma(h^*) > \sigma(\tau_0) = \sup_{\partial\Omega} v$, o que nos dá a contradição.

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

Nos resta provar a validade do WMP em Σ^n para L_{k-1} . Nas hipóteses do teorema sabemos que

$$(1.22) \quad H_1 \geq H_j^{1/j} \geq H_k^{1/k} > 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Assim temos $\mathcal{H}(h) > 0$ em Σ^n e P_{k-1} é positivo definido

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_{k-1}) &= c_{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} |\Theta|^j \mathcal{H}(h)^{k-1-j} H_j \\ &\geq c_{k-1} \mathcal{H}(h)^{k-1} > 0 \quad \text{em } \Sigma^n. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\text{tr}(P_{k-1}) \leq c_{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{H}(h)^{k-1-j} H_j^*,$$

assim, a partir da hipótese de que

$$\sup_{\Sigma^n} |H_1| < +\infty$$

e usando (1.22) obtemos

$$(1.23) \quad 0 < \text{tr}(P_{k-1})(x) \leq \Lambda$$

em Σ^n , para alguma constante positiva Λ .

Pela hipótese sobre a curvatura seccional de Σ^n e usando o Teorema 3 em [4], temos que $\frac{1}{\text{tr}(P_{k-1}(x))}$ -WMP é válido em Σ^n para o operador L_{k-1} . Como, de (1.23), $\frac{1}{\text{tr}(P_{k-1}(x))}$ é limitada inferiormente por uma constante positiva e então o WMP é válido para L_{k-1} .

□

Observação 1.3 *O Teorema 1.11 complementa o Teorema 21 de [7] e estende a primeira parte da Proposição 4 de [25] para o caso não compacto.*

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

No que segue consideraremos o caso de um produto riemanniano $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$. De agora em diante, se a função ângulo Θ de uma hipersuperfície orientável não muda de sinal, a

orientação de N será escolhida de tal forma que $\Theta \leq 0$. Observemos que se a hipersuperfície é um gráfico local sobre $\mathbb{P}^n$ então ou $\Theta > 0$ ou $\Theta < 0$. Assim, pedir que Θ não mude de sinal é uma hipótese mais fraca que pedir que a hipersuperfície seja um gráfico local.

1.3.1 Hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante

Começamos considerando o caso de curvatura média constante. A equação (3.8) do Teorema 3.1 de [5] mostra que se $F : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície orientável com curvatura média constante H e

$$\phi = hH + \Theta$$

então

$$(1.24) \quad \Delta\phi = -\Theta \left(|A|^2 - nH^2 + \text{Ric}_{\mathbb{P}}(\hat{N}, \hat{N}) \right).$$

Aqui A é o operador de Weingarten da hipersuperfície e $\hat{N}$ denota a projeção de N sobre o fibrado $\mathbb{P}^n$, ou seja,

$$N = \langle N, \partial_t \rangle \partial_t + \hat{N}.$$

Em particular,

$$(1.25) \quad |\hat{N}|_{\mathbb{P}}^2 = |\nabla h|^2 \leq 1.$$

Também temos

$$(1.26) \quad \Delta h = nH\Theta.$$

Lembrando que o WMP para Δ em Σ^n é equivalente a completude estocástica de $(\Sigma^n, \langle, \rangle)$, temos

Teorema 1.12 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície estocasticamente completa com curvatura média constante $H > 0$. Suponha que para algum $\alpha > 0$*

$$(1.27) \quad \text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq -n\alpha$$

e

$$(1.28) \quad H^2 > \alpha.$$

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

Seja $\Omega \subset \Sigma^n$ um aberto com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\Omega)$ está contida em um slab e $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$. Se

$$(1.29) \quad \beta = \sup_{\Omega} \Theta < 0$$

então

$$(1.30) \quad F(\Omega) \subset \left[0, \frac{(1+\beta)H}{H^2 - \alpha}\right] \times \mathbb{P}^n.$$

Em particular, isto acontece para todo conjunto relativamente compacto $\Omega \subset \Sigma^n$ com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$ e $\beta = \sup_{\Omega} \Theta < 0$.

Demonstração: Seja $\delta > 0$ tal que

$$\alpha < \alpha + \frac{\delta}{n} \leq H^2,$$

e consideremos a função

$$\psi = \phi - \frac{\alpha + \delta/n}{H}h = \Theta + \frac{H^2 - \alpha - \delta/n}{H}h.$$

Usando (1.24) e (1.26) obtemos

$$\Delta\psi = -\Theta(|A|^2 - nH^2 + \text{Ric}_{\mathbb{P}}(\hat{N}, \hat{N}) + n\alpha + \delta).$$

De (1.27), (1.25) e pelo fato de que $\alpha > 0$, temos

$$\text{Ric}_{\mathbb{P}}(\hat{N}, \hat{N}) \geq -n\alpha|\hat{N}|_{\mathbb{P}}^2 = -n\alpha|\nabla h|^2 \geq -n\alpha \text{ em } \Sigma^n.$$

Como $|A|^2 \geq nH^2$, resulta que $\Delta\psi \geq -\Theta\delta$ em Σ^n , e por (1.29) temos

$$\Delta\psi \geq -\Theta\delta \geq -\beta\delta > 0 \text{ em } \Omega.$$

Definimos $v = \psi|_{\bar{\Omega}}$. Como $F(\Omega)$ está contido em um slab temos

$$(1.31) \quad \begin{cases} \Delta v \geq -\beta\delta > 0 \text{ em } \Omega; \\ \sup_{\Omega} v < +\infty. \end{cases}$$

Como Σ^n é estocasticamente completa e a alternativa (1.7) do Teorema 1.1 não pode ocorrer, obtemos

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v.$$

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

Mas $F(\partial\Omega) \subset \{0\} \times \mathbb{P}^n$ então $h \equiv 0$ em $\partial\Omega$ e assim $v \equiv \psi \equiv \Theta \leq \beta$ em $\partial\Omega$, então

$$\beta \geq \sup_{\partial\Omega} v = \sup_{\Omega} v.$$

Assim, podemos concluir que

$$\beta \geq v = \psi = \Theta + \frac{H^2 - \alpha - \delta/n}{H}h \geq -1 + \frac{H^2 - \alpha - \delta/n}{H}h \text{ em } \Omega,$$

ou seja,

$$h(x) \leq \frac{(1 + \beta)H}{H^2 - \alpha - \delta/n} \text{ em } \Omega,$$

para cada $\delta > 0$ tal que $\alpha < \alpha + \delta/n \leq H^2$. Fazendo $\delta \rightarrow 0^+$ concluimos

$$(1.32) \quad h(x) \leq \frac{(1 + \beta)H}{H^2 - \alpha} \text{ em } \Omega.$$

Por outro lado, de (1.26) e (1.29)

$$\Delta h \leq nH\beta < 0 \text{ em } \Omega,$$

e como $F(\Omega)$ está contido em um *slab*, a função $w = h|_{\overline{\Omega}}$ é limitada inferiormente. Assim podemos escrever

$$\begin{cases} \Delta w \leq nH\beta < 0, & \text{em } \Omega; \\ \inf_{\Omega} w > +\infty. \end{cases}$$

Com o raciocínio análogo ao acima, usando agora os dois fatos descritos na Observação 1.2, obtemos

$$\inf_{\Omega} w = \inf_{\partial\Omega} w = 0,$$

ou seja,

$$(1.33) \quad w = h(x) \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Colocando (1.32) e (1.33) juntas obtemos (1.30).

A última afirmação segue do fato que sendo Ω relativamente compacto, $F(\Omega)$ está contido em um *slab*. $\square$

Observação 1.4 No Teorema 1.12 se assumirmos Σ^n parabólica para o operador Laplace-Beltrami Δ , então (1.29) pode ser relaxada a

$$\Theta \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

concluindo (1.30) sem nenhuma mudança. Para ver isto, observemos simplesmente que como β poderia ser 0, em vez de (1.31) teríamos

$$\begin{cases} \Delta v \geq 0 \text{ em } \Omega; \\ \sup_{\Omega} v < +\infty. \end{cases}$$

Da parabolicidade Ahlfors ou

$$(1.34) \quad \sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v$$

ou v é constante em Ω , e neste último caso (1.34) ainda é válida. O resto da demonstração é como no Teorema 1.12. O mesmo raciocínio se aplica para o limite inferior $h(x) \geq 0$.

Observamos também que no caso “limite” $\alpha = 0$, em outras palavras, o caso $\text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq 0$, pode ser facilmente obtido. De fato, fixemos $\hat{\alpha} > 0$ suficientemente pequeno de tal maneira que (1.28) seja válida. Então (1.27) é obviamente verdade com $\hat{\alpha}$ no lugar de α . Aplicando o Teorema 1.12 e fazendo $\hat{\alpha} \downarrow 0^+$, no lugar de (1.30) obtemos uma melhor estimativa da altura

$$F(\Omega) \subset \left[0, (1 + \beta) \frac{1}{H}\right] \times \mathbb{P}^n.$$

Assim, juntando as observações acima, temos que se fortalecemos a hipótese, de estocasticamente completa para a parabolicidade do operador Δ e exigimos $\text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq 0$ podemos eliminar (1.28) e relaxar (1.29) para $\Theta \leq 0$ em Ω e obter a estimativa de altura

$$F(\Omega) \subset \left[0, \frac{1}{H}\right] \times \mathbb{P}^n.$$

Em outras palavras temos

Corolário 1.3 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície parabólica com curvatura média constante $H > 0$ e assumamos $\text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq 0$. Seja $\Omega \subset \Sigma^n$ um aberto com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\Omega)$ está contido em um slab e $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$. Se $\Theta \leq 0$ em Ω então*

$$F(\Omega) \subset \left[0, \frac{1}{H}\right] \times \mathbb{P}^n.$$

Este resultado está de acordo com as estimativas de altura obtidas por Rosenberg e Cheng para Σ^n compacta, conforme [16] (ver também [32]).

O próximo resultado estende o Teorema 1.12 para curvatura média de ordem superior.

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

Teorema 1.13 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície imersa com k -curvatura média H_k constante, não nula, para algum $k = 2, \dots, n$, e com um ponto elíptico. Escolha o normal N tal que $H_k > 0$ e suponha que para algum $\alpha > 0$*

$$(1.35) \quad K_{\mathbb{P}} \geq -\alpha.$$

Suponha ainda que

$$(1.36) \quad H_k^{\frac{k+1}{k}} > \alpha H_{k-1}^*, \text{ em que } H_{k-1}^* = \sup_{\Sigma^n} H_{k-1}(x),$$

e que o WMP seja válido em Σ^n para o operador L_{k-1} . Seja $\Omega \subset \Sigma^n$ um aberto com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\Omega)$ está contido em um slab e $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$. Se

$$(1.37) \quad \beta = \sup_{\Omega} \Theta < 0$$

então

$$(1.38) \quad F(\Omega) \subset \left[0, \frac{(1 + \beta)H_k}{H_k^{\frac{k+1}{k}} - \alpha H_{k-1}^*} \right] \times \mathbb{P}^n.$$

Demonstração: Consideremos a função

$$\phi = H_k^{1/k} h + \Theta.$$

Sabemos de (21) da Proposição 6 em [7] que

$$(1.39) \quad L_{k-1}h = c_{k-1}H_k\Theta,$$

em que $c_{k-1} = k \binom{n}{k}$. Por outro lado, como H_k é constante, do Lema 27 em [7] também temos

$$(1.40) \quad L_{k-1}\Theta = -\Theta \binom{n}{k} (nH_1H_k - (n-k)H_{k+1}) - \Theta \sum_{i=1}^n \mu_{k-1,i} K_{\mathbb{P}}(\hat{E}_i, \hat{N}) |\hat{E}_i \wedge \hat{N}|^2.$$

Aqui os $\mu_{k-1,i}$'s são os autovalores de P_{k-1} , $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ^n que diagonaliza A , e o símbolo “ $\wedge$ ” denota a projeção na fibra $\mathbb{P}^n$ de um campo de vetores do espaço produto $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$, ou seja,

$$N = \langle N, \partial_t \rangle \partial_t + \hat{N} \text{ e } E_i = \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t + \hat{E}_i, \text{ } i = 1, \dots, n.$$

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

Lembramos que L_{k-1} é elíptico ou, equivalentemente, que os autovalores $\mu_{k-1,i}$ são todos positivos. Segue de (1.39) e (1.40) que

$$L_{k-1}\phi = -\Theta\binom{n}{k}(nH_1H_k - (n-k)H_{k+1} - kH_k^{\frac{k+1}{k}}) - \Theta\sum_{i=1}^n\mu_{k-1,i}K_{\mathbb{P}}(\hat{E}_i, \hat{N})|\hat{E}_i \wedge \hat{N}|^2.$$

Usando as inequações de Gårding,

$$nH_1H_k - kH_k^{\frac{k+1}{k}} \geq nH_k^{\frac{k+1}{k}} - kH_k^{\frac{k+1}{k}} = (n-k)H_k^{\frac{k+1}{k}},$$

portanto

$$nH_1H_k - kH_k^{\frac{k+1}{k}} - (n-k)H_{k+1} \geq (n-k)(H_k^{\frac{k+1}{k}} - H_{k+1}) \geq 0,$$

logo

$$(1.41) \quad L_{k-1}\phi \geq -\Theta\sum_{i=1}^n\mu_{k-1,i}K_{\mathbb{P}}(\hat{E}_i, \hat{N})|\hat{E}_i \wedge \hat{N}|^2.$$

Para algum $\delta > 0$ tal que

$$\alpha H_{k-1}^* < \alpha H_{k-1}^* + \delta \leq H_k^{\frac{k+1}{k}}$$

consideremos a função

$$\psi = \phi - \frac{\alpha H_{k-1}^* + \delta}{H_k}h = \Theta + \frac{H_k^{\frac{k+1}{k}} - \alpha H_{k-1}^* - \delta}{H_k}h.$$

Então usando (1.39) e (1.41) obtemos

$$(1.42) \quad L_{k-1}\psi \geq -\Theta\sum_{i=1}^n\mu_{k-1,i}K_{\mathbb{P}}(\hat{E}_i, \hat{N})|\hat{E}_i \wedge \hat{N}|^2 - \Theta c_{k-1}(\alpha H_{k-1}^* + \delta).$$

Observemos que

$$(1.43) \quad |\hat{E}_i \wedge \hat{N}|^2 = |\nabla h|^2 - \langle E_i, \nabla h \rangle^2 \leq |\nabla h|^2 \leq 1.$$

De (1.35), (1.43), do fato de que $\alpha > 0$ e que cada $\mu_{k-1,i} > 0$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n\mu_{k-1,i}K_{\mathbb{P}}(\hat{E}_i, \hat{N})|\hat{E}_i \wedge \hat{N}|^2 &\geq -\alpha\sum_{i=1}^n\mu_{k-1,i}|\nabla h|^2 \geq -\alpha\text{tr}(P_{k-1}) \\ &= -\alpha c_{k-1}H_{k-1} \geq -\alpha c_{k-1}H_{k-1}^*, \end{aligned}$$

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

ou seja,

$$(1.44) \quad \sum_{i=1}^n \mu_{k-1,i} K_{\mathbb{P}}(\hat{E}_i, \hat{N}) |\hat{E}_i \wedge \hat{N}|^2 \geq -\alpha c_{k-1} H_{k-1}^*.$$

Finalmente, de (1.42), (1.44) e (1.37) obtemos

$$L_{k-1}\psi \geq -c_{k-1}\Theta\delta \geq -c_{k-1}\beta\delta \quad \text{em } \Omega.$$

Definimos $v = \psi|_{\bar{\Omega}}$. como $F(\Omega)$ está contido em um *slab* podemos escrever

$$\begin{cases} L_{k-1}v \geq -c_{k-1}\beta\delta > 0 \text{ em } \Omega; \\ \sup_{\Omega} v < +\infty. \end{cases}$$

Assim, como o WMP é válido em Σ^n para L_{k-1} e a alternativa (1.7) do Teorema 1.1 não pode ocorrer temos

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v.$$

Mas $F(\partial\Omega) \subset \{0\} \times \mathbb{P}^n$ o que implica que $h \equiv 0$ em $\partial\Omega$ então $v \equiv \psi \equiv \Theta \leq \beta$ em $\partial\Omega$, implicando que

$$\beta \geq \sup_{\partial\Omega} v = \sup_{\Omega} v.$$

Segue daí

$$\beta \geq v = \psi = \Theta + \frac{H_k^{\frac{k+1}{k}} - \alpha H_{k-1}^* - \delta}{H_k} h \geq -1 + \frac{H_k^{\frac{k+1}{k}} - \alpha H_{k-1}^* - \delta}{H_k} h \quad \text{em } \Omega.$$

ou seja,

$$h(x) \leq \frac{(1 + \beta)H_k}{H_k^{\frac{k+1}{k}} - \alpha H_{k-1}^* - \delta} \quad \text{em } \Omega,$$

para cada $\delta > 0$ tal que $\alpha H_{k-1}^* < \alpha H_{k-1}^* + \delta \leq H_k^{\frac{k+1}{k}}$. Fazendo $\delta \rightarrow 0^+$ obtemos

$$(1.45) \quad h(x) \leq \frac{(1 + \beta)H_k}{H_k^{\frac{k+1}{k}} - \alpha H_{k-1}^*} \quad \text{em } \Omega.$$

Por outro lado, de (1.37) e (1.39)

$$L_{k-1}h \leq c_{k-1}H_k\beta < 0 \quad \text{em } \Omega,$$

e concluimos como no Teorema 1.12 que

$$(1.46) \quad h(x) \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

De (1.45) e (1.46) concluimos (1.38). □

Observação 1.5 A seguinte versão do Teorema 1.13 para o caso “limite” $\alpha = 0$ pode ser obtida raciocinando de maneira similar a Observação 1.4, usada para provar o Corolário 1.3.

Corolário 1.4 *Seja $F : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície imersa com k -curvatura média H_k constante, para algum $k = 2, \dots, n$, com um ponto elíptico (em particular, $H_k \neq 0$), e assuma $K_{\mathbb{P}} \geq 0$. Escolha o normal N tal que $H_k > 0$, e assuma que Σ^n é L_{k-1} parabólica. Seja $\Omega \subset \Sigma^n$ um aberto com $\partial\Omega \neq \emptyset$ tal que $F(\Omega)$ está contido em um slab e $F(\partial\Omega) \subset \mathbb{P}_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^n$. Se $\Theta \leq 0$ em Ω então*

$$F(\Omega) \subset \left[0, \frac{1}{H_k^{\frac{1}{k}}} \right] \times \mathbb{P}^n.$$

1.3.2 Hipóteses alternativas para os Teoremas 1.12 e 1.13

Em relação ao Teorema 1.12, é importante ressaltar que existem condições geométricas que implicam a completude estocástica de Σ^n ou, de forma equivalente, a validade do WMP para o operador laplaciano. Por exemplo, como comprovado por Grigor'yan em [29] (ver também [30]), a completude de Σ^n e a condição de crescimento de volume

$$(1.47) \quad \frac{r}{\log \text{vol} B_r} \notin L^1(+\infty),$$

em que B_r é a bola geodésica em Σ^n centrada em uma origem fixa e de raio r , implicam a validade de WMP para o Δ em Σ^n . A condição (1.47) é válida, em particular, se

$$(1.48) \quad \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{vol} B_r}{r^2} < +\infty.$$

Portanto, o Teorema 1.12 continua válido se trocarmos a completude estocástica pela completude e, ou a condição (1.47) ou a condição (1.48).

Por outro lado, se no Teorema 1.12 em vez de $\text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq -n\alpha$, assumirmos que

$$(1.49) \quad K_{\mathbb{P}} \geq -\alpha$$

para algum $\alpha > 0$, então obviamente $\text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq -n\alpha$. Além disso, pela equação de Gauss para a hipersuperfície Σ^n temos

$$\begin{aligned} K_{\Sigma^n}(X, Y) &= \bar{K}(X, Y) + \langle AX, X \rangle \langle AY, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle^2 \\ &\geq \bar{K}(X, Y) - 2|A|^2, \end{aligned}$$

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

em que $\{X, Y\}$ é uma base ortonormal para algum 2-dimensional plano tangente a Σ^n . Aqui $\bar{K}(X, Y)$ denota a curvatura seccional no espaço ambiente $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ do 2-dimensional plano gerado por $\{X, Y\}$. Observemos que

$$\bar{K}(X, Y) = K_{\mathbb{P}}(\hat{X}, \hat{Y})|\hat{X} \wedge \hat{Y}|^2,$$

em que $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ denotam as projeções de X e Y no fibrado $\mathbb{P}^n$, respectivamente, ou seja,

$$X = \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \hat{X} \quad \text{e} \quad Y = \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t + \hat{Y}.$$

Então, usando que

$$|\hat{X} \wedge \hat{Y}|^2 \leq |X \wedge Y|^2 = 1$$

obtemos que $\bar{K}(X, Y) \geq -\alpha$ e portanto

$$(1.50) \quad K_{\Sigma^n}(X, Y) \geq -\alpha - 2|A|^2.$$

Logo, fixando uma origem $o \in \Sigma^n$ e denotando por $r(x)$ a função distância a o em Σ^n , se

$$(1.51) \quad |A(x)| \leq G(r(x))$$

concluimos de (1.50) que a curvatura seccional radial de o satisfaz

$$K_{\Sigma^n}(x) \geq -\alpha - 2G(r(x))^2.$$

Assim, se Σ^n é completa e assumimos $G \in \mathcal{C}^1([0, +\infty))$ satisfazendo

$$(i) \ G(0) > 0, \quad (ii) \ G'(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad (iii) \ 1/G(t) \notin L^1(+\infty),$$

pelo Teorema 3 em [4] o Princípio do Máximo de Omori-Yau (portanto o WMP) é válido em Σ^n para o Δ . Como consequência, o Teorema 1.12 continua verdadeiro se trocarmos a completude estocástica e a condição (1.27) sobre curvatura de Ricci de $\mathbb{P}^n$ pela completude, a condição (1.49) sobre a curvatura seccional de $\mathbb{P}^n$, e a condição (1.51) sobre o crescimento da segunda forma fundamental de Σ^n , em que G satisfaz as condições acima.

Finalmente, um outro caminho para se obter a completude estocástica de Σ^n no Teorema 1.12 é aplicar o teste de Khas'minskii [33], no qual afirma que uma variedade riemanniana é estocasticamente completa se admite uma função $\gamma \in \mathcal{C}^2$, tal que

$$\begin{cases} \gamma(x) \rightarrow +\infty \text{ quando } x \rightarrow \infty; \\ \Delta\gamma \leq \lambda\gamma, \text{ fora de um subconjunto compacto,} \end{cases}$$

1.3 Aplicações a hipersuperfícies em espaços produtos

para alguma constante positiva $\lambda > 0$. Segue daqui, que o Teorema 1.12 continua válido se substituirmos a completude estocástica pela condição de $h : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ tenda ao $+\infty$ quando $x \rightarrow \infty$, sem precisar da hipótese da variedade ser completa. Na verdade, como $H > 0$ é constante, segue de (1.26) que

$$\Delta h \leq nH < +\infty.$$

Logo, pelo teste de Khas'minskii com $\gamma = h$, obtemos a completude estocástica de Σ^n .

Como no caso do Teorema 1.12, podemos forcecer hipóteses alternativas do Teorema 1.13, ou seja, sob condições geométricas apropriadas, temos a validade do WMP em Σ^n para o operador L_{k-1} . Por exemplo, assuma que Σ^n é completa e que para uma origem fixada $o \in \Sigma^n$,

$$(1.52) \quad |A(x)| \leq G(r(x)),$$

em que $r(x)$ denota a função distância a o em Σ^n e $G \in \mathcal{C}^1([0, +\infty))$ satisfaz

$$(i) \ G(0) > 0, \ (ii) \ G'(t) \geq 0 \quad e \quad (iii) \ 1/G(t) \notin L^1(+\infty).$$

Segue, como anteriormente (ver a prova de (1.50)), que as curvaturas seccionais radiais de o satisfazem

$$(1.53) \quad K_{\Sigma^n}(x) \geq -\alpha - 2G(r(x))^2.$$

Agora observemos que (1.53), a completude de Σ^n e o fato que $H_{k-1}(x) > 0$ em Σ^n implicam, pelo Teorema 3 em [4], a validade do q -princípio do máximo de Omori-Yau em Σ^n para L_{k-1} , com

$$q(x) = \frac{1}{c_{k-1}H_{k-1}(x)}.$$

Em particular, a validade do q -WMP em Σ^n para L_{k-1} . Entretanto, como $H_{k-1}(x)$ é limitada superiormente em Σ^n por (1.36), então $q(x)$ é limitada inferiormente por uma constante positiva, e pela observação depois da Definição 1.1 isso implica na validade do WMP para L_{k-1} em Σ^n . Como consequência, o Teorema 1.13 continua válido se substituirmos a validade do WMP em Σ^n para o operador L_{k-1} pela completude de Σ^n e a condição (1.52) sobre crescimento da sua segunda forma fundamental.

Por outro lado, uma maneira de fornecer outra hipótese alternativa do Teorema 1.12 foi o de aplicar o critério de Khas'minskii para a completude estocástica de Σ^n . No

1.4 Aplicações a gráficos de Killing

Teorema A de [1] temos que um teste similar resulta na validade do WMP para uma classe ampla de operadores incluindo os operadores do tipo L_{k-1} considerados acima. Em particular, o Teorema A em [1] com $q(x) \equiv 1$ e $L = L_{k-1}$ diz que o WMP é válido em Σ^n para o operador L_{k-1} se Σ^n admite uma função $\gamma \in \mathcal{C}^2$ tal que

$$\begin{cases} \gamma(x) \rightarrow +\infty \text{ quando } x \rightarrow \infty; \\ L_{k-1}\gamma \leq B, \text{ fora de um subconjunto compacto,} \end{cases}$$

para alguma constante $B > 0$. Segue daqui que o Teorema 1.13 continua verdadeiro se mudarmos a validade do WMP em Σ^n para o operador L_{k-1} pela condição que $h : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ se aproxime do $+\infty$ quando $x \rightarrow \infty$ (sem exigir que a variedade seja completa). De fato, como $H_k > 0$ é constante, segue de (1.39) que

$$L_{k-1}h \leq c_{k-1}H_k < +\infty.$$

Portanto, escolhendo $\gamma = h$ obtemos a validade do WMP em Σ^n para o operador L_{k-1} .

1.4 Aplicações a gráficos de Killing

Trataremos agora o caso em que a variedade $\bar{M}^{n+1}$ está munida de um campo de vetores Killing Y , não singular, com linhas de fluxo completo e distribuição ortogonal $\delta = \langle Y \rangle^\perp$ integrável, ou seja, de acordo com o Teorema de Frobenius, $[U, V] \in \delta$ para todo $U, V \in \delta$. Seja $\mathbb{P}$ uma folha integral fixa. Note que as folhas da folheação são hipersuperfícies totalmente geodésicas de $\bar{M}^{n+1}$. O fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ gerado por Y aplica isometricamente $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$ na folha $\mathbb{P}_s = \Phi_s(\mathbb{P})$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, em que $\Phi_s = \Phi(s, \cdot)$. Consideremos a imersão $F : \mathbb{P} \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ dada por

$$F(x) = F_u(x) = \Phi(u(x), x)$$

para alguma função suave $u : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso a hipersuperfície $F(\mathbb{P})$ é chamada de gráfico de Killing de u (ver [24]). Como Y é não singular podemos definir $\gamma = |Y|^{-2} > 0$. O normal unitário ao gráfico é dado por

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x) + |Du|^2(x)}} (\gamma(x)Y(x) - \Phi_{u(x)*}(Du(x))),$$

em que D denota a derivada covariante em $\mathbb{P}$ e, por simplicidade de notação, denotamos por γ e Y as restrições de γ e Y em $\mathbb{P}$ ao longo de F . O gráfico de Killing F tem

1.4 Aplicações a gráficos de Killing

curvatura média constante H , na direção do normal N , se, e somente se, (ver [3])

$$(1.54) \quad Lu = \operatorname{div}_{\log \sqrt{\gamma}} \left(\frac{Du}{W} \right) = nH \text{ em } \mathbb{P},$$

em que,

$$W = \sqrt{\gamma + |Du|^2}$$

e L é o operador

$$(1.55) \quad Lu = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{W} \right) - \left\langle \nabla(\log \sqrt{\gamma}), \frac{Du}{W} \right\rangle = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{W} \right) - \left\langle \frac{D\gamma}{2\gamma}, \frac{Du}{W} \right\rangle,$$

conforme definido em (2.2). Aqui div é a divergência em $\mathbb{P}$. Temos então o seguinte

Teorema 1.14 *Sejam $\bar{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana completa munida de um campo de Killing completo Y e $\mathbb{P}$ uma folha integral da folheação de Killing. Considere $F = F_u : \mathbb{P} \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ um gráfico de Killing com curvatura média constante $H \geq 0$. Assuma que*

$$(1.56) \quad \sup_{\mathbb{P}} |Y| < +\infty$$

e

$$(1.57) \quad \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log \int_{B_R} |Y|}{R^2} < +\infty,$$

em que $B_R = B_R(o)$ é a bola geodésica em $\mathbb{P}$ centrada em uma origem fixa o e com raio geodésico R . Se existe um valor regular τ de u tal que u é limitada superiormente em alguma componente conexa do conjunto

$$\Omega_\tau = \{x \in \Sigma : u(x) > \tau\},$$

então o gráfico de Killing é mínimo.

Demonstração: Primeiramente, verificamos a validade do WMP para o operador L (1.55) definido em $\mathbb{P}$ aplicando o Teorema 6 de [3]. Para aplicar o Teorema 6 de [3] observamos que $\mathbb{P}$ é completa e, seguindo a notação do Teorema 6 de [3], tomamos $\phi(x) = \log \sqrt{\gamma(x)} = -\log |Y(x)|$, e escolhemos h a métrica em $\mathbb{P}$, tal que h_- e h_+ são ambas identicamente iguais a 1. Definimos

$$\varphi(x, t) = \frac{t}{\sqrt{\gamma(x) + t^2}}.$$

1.4 Aplicações a gráficos de Killing

Então φ claramente satisfaz i), ii) e iii) em (19) de [3] com

$$\delta = 1 \quad \text{e} \quad A(x) = |Y(x)|.$$

Observemos que as condições de estrutura (19) de [3] são as condições em (1.2). Temos que a hipótese (20) de [3] é garantida por (1.56). Seguindo ainda a notação do Teorema 6 de [3], escolhamos $\varsigma = 0$ e $\mu = 0$, tais que $\tau = -2$. Então, a hipótese (24) de [3] corresponde a nossa condição (1.57). Assim, segue do Teorema 6 de [3] que para cada função $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{P})$ tal que $u^* = \sup_{\mathbb{P}} u < +\infty$ e cada $\gamma < u^*$ temos

$$\inf_{\Omega_\gamma} Lu \leq 0, \quad \text{com} \quad \Omega_\gamma = \{x \in \mathbb{P} : u(x) > \gamma\}.$$

Em outras palavras, obtemos a validade do WMP para o operador L de (1.55) em $\mathbb{P}$.

Seja Ω uma componente conexa de Ω_τ em que u é limitada superiormente. Note que $\emptyset \neq \partial\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{P} : u(x) = \tau\}$. Seja $v = u|_{\bar{\Omega}}$. Por contradição, suponha $H > 0$. De (1.54)

$$\begin{cases} Lv = nH > 0 \text{ em } \Omega; \\ \sup_{\Omega} v < +\infty. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 1.1, como $H > 0$ a alternativa (1.7) não pode ocorrer, então concluímos que

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v = \tau,$$

isto é, $u \equiv \tau$ em Ω e $F_u(x) = \Phi(\tau, x) \subseteq \mathbb{P}_\tau$ em Ω . Assim, Ω com a métrica induzida é isométrico a um aberto de $\mathbb{P}_\tau$ que é totalmente geodésico em $\bar{M}^{n+1}$, implicando que $H = 0$, o que é uma contradição. Do teorema acima deduzimos o corolário a seguir relacionado com os resultados apresentados em [3].

Corolário 1.5 *Nas hipóteses do Teorema 1.14 se u é limitada superiormente então o gráfico de Killing $F_u : \mathbb{P} \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ é mínimo.*

Capítulo 2

Estimativas com autovalores

Nosso objetivo aqui será provar os Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3. O primeiro é uma generalização de resultados decorrentes da primeira inequação de Yang, como por exemplo de (7), o segundo generaliza o limite inferior para a média dos k primeiros autovalores baseado na Conjectura de Pólya (10), enquanto que o terceiro estende a estimativa (9) que nos fornece um limite superior para o k -ésimo autovalor em função do primeiro autovalor. Para isso começaremos definindo um operador que nos remete a resultados bem gerais bem como aplicar um cálculo tensorial livre de contas em coordenadas. Além disso, espera-se que este operador seja útil para a obtenção de ferramentas de rigidez ou caracterização de objetos geométricos conhecidos.

Ressaltamos que por motivos convencionais a notação utilizada neste capítulo será um pouco diversa da notação do capítulo anterior.

2.1 Motivando a definição do operador $\mathcal{L}$

Relembremos que um $(1, 1)$ -tensor em uma variedade riemanniana $(M, \langle, \rangle)$ é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear

$$T : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Enquanto que, num $(0, 2)$ -tensor, o domínio é $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ e o contradomínio é o anel $\mathcal{C}^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M . Além disso, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, pede-se que $T(X, Y)$ seja uma função diferenciável em um aberto $U \subset M$ e T é $\mathcal{C}^\infty(U)$ -linear em cada variável. Também é conveniente se referir a T como um campo de 2-tensores.

2.1 Motivando a definição do operador $\mathcal{L}$

Dado um $(0, 2)$ -tensor T , podemos identificá-lo com um $(1, 1)$ -tensor T mediante a métrica riemanniana $\langle, \rangle$, fazendo

$$\langle T(X), Y \rangle := T(X, Y).$$

Em particular, o tensor métrico $\langle, \rangle$ será identificado com o $(1, 1)$ -tensor identidade I em $\mathfrak{X}(M)$.

Seja $(x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M^n , $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ o referencial coordenado e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal. Utilizando a *convenção de Einstein da soma*, segundo a qual estará implícita uma soma sempre que houver índices repetidos e em posições invertidas, temos que o *traço* de um $(0, 2)$ -tensor T é dado por

$$(2.1) \quad \text{tr}(T) = g^{ij}T(\partial_i, \partial_j) = g^{ij}\langle T(\partial_i), \partial_j \rangle.$$

Observemos que $T(\partial_i) = g^{kl}\langle T(\partial_i), \partial_k \rangle \partial_l = g^{kl}\langle \partial_i, T^*(\partial_k) \rangle \partial_l$, em que T^* é o operador adjunto de T . Consideremos outro $(0, 2)$ -tensor S para relembrarmos que o *produto interno de Hilbert-Schmidt* é dado por

$$\begin{aligned} \langle T, S \rangle &:= \text{tr}(TS^*) \stackrel{(2.1)}{=} g^{ij}\langle (TS^*)(\partial_i), \partial_j \rangle = g^{ij}\langle T(S^*(\partial_i)), \partial_j \rangle \\ &= g^{ij}\langle T(g^{kl}\langle \partial_i, S(\partial_k) \rangle \partial_l), \partial_j \rangle \\ &= g^{ij}g^{kl}\langle S(\partial_k), \partial_i \rangle \langle T(\partial_l), \partial_j \rangle = g^{ij}g^{kl}S_{ki}T_{lj}. \end{aligned}$$

A simetria da matriz (g^{ij}) e uma renumeração nos índices permite-nos escrever

$$\langle T, S \rangle = g^{ik}g^{jl}T_{ij}S_{kl}.$$

Assim, em $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$\begin{aligned} \langle T, S \rangle &= \sum_{i,j} T_{ij}S_{ij} = \sum_{i,j} \langle T(e_i), e_j \rangle \langle S(e_i), e_j \rangle = \sum_i \langle T(e_i), S(e_i) \rangle, \\ \langle T, T \rangle &= \sum_i \langle T(e_i), T(e_i) \rangle = \sum_i |T(e_i)|^2 \end{aligned}$$

e

$$\langle T, I \rangle = \sum_i \langle T(e_i), I(e_i) \rangle = \sum_i \langle T(e_i), e_i \rangle = \text{tr}(T).$$

2.1 Motivando a definição do operador $\mathcal{L}$

Definição 2.1 A divergência de um $(1, 1)$ -tensor T em $(M, \langle, \rangle)$ é definida como o $(0, 1)$ -tensor dado por

$$(\operatorname{div} T)(v)(p) = \operatorname{tr}(w \mapsto (\nabla_w T)(v)(p)),$$

em que $p \in M$, $v, w \in T_p M$, ∇ denota a derivada covariante de T e tr o traço calculado na métrica $\langle, \rangle$.

Se T é um $(1, 1)$ -tensor e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ então $(\operatorname{div} T)(\nabla f) = \langle \operatorname{div} T, df \rangle = \langle (\operatorname{div} T)^\sharp, \nabla f \rangle$. Ao se escrever esta relação para um $(0, 2)$ -tensor, fica implícito que se está trabalhando com o $(1, 1)$ -tensor correspondente. Ademais, quando não houver perigo de confusão, omitiremos por simplicidade o “ $^\sharp$ ”.

Para cada campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos considerar o $(1, 1)$ -tensor ∇X dado por $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Desta maneira, a divergência de X é dada por $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(\nabla X)$. Além disso, vamos fixar uma função $\eta \in \mathcal{C}^\infty(M)$, para definirmos a η -divergência de X como segue

$$\operatorname{div}_\eta X := \operatorname{div} X - \langle \nabla \eta, X \rangle.$$

É imediato das propriedades usuais da divergência de campos de vetores que, para $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ teremos

$$\operatorname{div}_\eta(X + Y) = \operatorname{div}_\eta X + \operatorname{div}_\eta Y$$

$$\operatorname{div}_\eta(fX) = f \operatorname{div}_\eta X + \langle \nabla f, X \rangle$$

$$\operatorname{div}(e^{-\eta} X) = e^{-\eta} \operatorname{div}_\eta X.$$

Quando $(M, \langle, \rangle)$ é uma variedade riemanniana orientada, tais propriedades nos levam a considerar um peso em sua forma volume dM , bem como na forma volume $d\partial M$ de seu bordo, como segue: $dm = e^{-\eta} dM$ e $d\mu = e^{-\eta} d\partial M$. Portanto, se ν é um campo de vetores normais unitários exterior ao ∂M e X é um campo de vetores tangentes compactamente suportado em M , teremos

$$\int_M \operatorname{div}_\eta X dm = \int_M e^{-\eta} \operatorname{div}_\eta X dM = \int_M \operatorname{div}(e^{-\eta} X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\mu,$$

que é a expressão do teorema da divergência (ou Teorema de Stokes) para *variedades com peso*.

2.1 Motivando a definição do operador $\mathcal{L}$

Para o caso em que $X = \nabla f$, para alguma $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, o operador η -laplaciano L é dado por

$$(2.2) \quad L(f) := \operatorname{div}_\eta \nabla f.$$

É imediato que L satisfaz propriedades análogas às do laplaciano. Por exemplo, para $f, \ell \in \mathcal{C}^\infty(M)$ teremos

$$L(f\ell) = fL(\ell) + \ell L(f) + 2\langle \nabla f, \nabla \ell \rangle,$$

ou ainda uma extensão natural da conhecida fórmula de Bochner, a saber:

$$\frac{1}{2}L|\nabla f|^2 = \operatorname{Ric}_\eta(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla Lf, \nabla f \rangle,$$

em que se dá origem a uma extensão do tensor de Ricci, $\operatorname{Ric}_\eta := \operatorname{Ric} + \nabla^2 \eta$, o qual é conhecido como tensor de Bakry-Émery-Ricci. Atualmente, esse tensor tem sido especialmente estudado na teoria de sólitons e quase sólitons de Ricci, uma vez que um sólito de Ricci gradiente $(M, \langle, \rangle, \nabla \eta, \lambda)$ é caracterizado por $\operatorname{Ric}_\eta = \lambda \langle, \rangle$ para alguma constante λ , enquanto que num quase sólito de Ricci gradiente, λ é uma função real suave em M . Para maiores detalhes ver por exemplo [10, 13, 27, 44, 45].

Agora vamos considerar um $(0, 2)$ -tensor simétrico T em M positivo definido, de modo que o seu $(1, 1)$ -tensor correspondente seja simétrico e positivo definido. Assim, vamos definir um operador que é uma extensão do η -laplaciano (2.2).

Definição 2.2 *Seja T um $(1, 1)$ -tensor simétrico, positivo definido em $(M, \langle, \rangle)$. Definimos o operador (η, T) -divergente por*

$$\mathcal{L}(f) := \operatorname{div}_\eta(T(\nabla f)) = \operatorname{div}(T(\nabla f)) - \langle T(\nabla \eta), \nabla f \rangle$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

É imediato das propriedades de div_η e da simetria de T que

$$\mathcal{L}(f\ell) = f\mathcal{L}(\ell) + \ell\mathcal{L}(f) + 2T(\nabla f, \nabla \ell)$$

para $f, \ell \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Além disso, associado ao operador (η, T) -divergente temos.

Definição 2.3 *Definimos o η -divergente de um $(1, 1)$ -tensor T em $(M, \langle, \rangle)$ como o $(0, 1)$ -tensor dado por*

$$\operatorname{div}_\eta T := \operatorname{div} T - d\eta \circ T.$$

2.1 Motivando a definição do operador $\mathcal{L}$

Novamente pela simetria de T temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(T(X)) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} T(X), e_i \rangle = \sum_i \langle (\nabla_{e_i} T)X, e_i \rangle + \langle T(\nabla_{e_i} X), e_i \rangle \\ &= (\operatorname{div} T)(X) + \langle \nabla X, T \rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \nabla f X, T \rangle &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(fX), T(e_i) \rangle = \sum_i T(f \nabla_{e_i} X + e_i(f)X, e_i) \\ &= f \sum_i T(\nabla_{e_i} X, e_i) + \sum_i T(X, e_i(f)e_i) \\ &= f \langle \nabla X, T \rangle + T(X, \nabla f).\end{aligned}$$

A relação a seguir, cuja versão para η constante foi empregada como ferramenta por Barros e Gomes [9], por Barros, Gomes e Ribeiro [10], por Gomes [27] e em seguida, para η não necessariamente constante, por Mesquita [35], relaciona o operador (η, T) -divergente com o $(0, 1)$ -tensor $\operatorname{div}_\eta T$.

Lema 2.1 ([35]) *Sejam $\eta, f : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves, T um $(0, 2)$ -tensor simétrico e $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Então vale*

$$\operatorname{div}_\eta(T(fZ)) = f \langle \operatorname{div}_\eta T, Z \rangle + f \langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla f, Z).$$

Em particular, se $Z = \nabla h$ para alguma $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então

$$(2.3) \quad \operatorname{div}_\eta(T(f \nabla h)) = f \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla h \rangle + f \langle \nabla^2 h, T \rangle + T(\nabla f, \nabla h).$$

Recentemente Alencar-Neto-Zhou [2] provaram uma fórmula generalizada tipo Bochner e aplicaram ao operador que foi introduzido por Cheng-Yau [21] a saber

$$\square f = \operatorname{tr}(\nabla^2 f \circ T) = \langle \nabla^2 f, T \rangle,$$

em que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e T é um $(1, 1)$ -tensor simétrico. A fórmula generalizada tipo Bochner para o operador $\square$ é dada por

$$\frac{1}{2} \square(|\nabla f|^2) = \langle \nabla f, \nabla(\square f) \rangle + R_T(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T \rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T \rangle,$$

em que $R_T(X, Y) = \operatorname{tr}(T \circ (Z \rightarrow R(X, Z)Y))$ e R é o tensor curvatura de M . Para o caso em que M é orientável e compacta, Cheng-Yau provaram que o operador $\square$ é auto-adjunto se, e somente se, $\operatorname{div} T = 0$. De fato, sendo M orientável (não necessariamente

2.1 Motivando a definição do operador $\mathcal{L}$

compacta) é imediato da equação (2.3), do teorema da divergência e da simetria de T que

$$\int_M (f\Box h - h\Box f)dM = \int_M (h\langle \operatorname{div} T, \nabla f \rangle - f\langle \operatorname{div} T, \nabla h \rangle)dM,$$

para toda $f, h \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$, donde podemos concluir o fato afirmado anteriormente provado por Cheng-Yau. Por exemplo, denotando $R = \operatorname{tr}(Ric)$, é bem conhecido que $\operatorname{div} Ric = \frac{dR}{2}$ e $\operatorname{div}(RI) = dR$, logo o tensor $G := Ric - \frac{R}{2}\langle \cdot, \cdot \rangle$ tem divergente nulo, e portanto $\Box f = \langle \nabla^2 f, G \rangle$ é auto-adjunto.

Observemos que $\mathcal{L}$, $\operatorname{div}_\eta T$ e $\Box$ se relacionam por (2.3), isto é

$$(2.4) \quad \mathcal{L}f = \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla f \rangle + \Box f.$$

Em particular, se o operador $\Box$ é auto-adjunto, tal relação se resume a

$$\mathcal{L}f = -\langle \nabla_\eta, \nabla f \rangle + \Box f.$$

A relação (2.4) nos fornece a seguinte fórmula

$$\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla(|\nabla f|^2) \rangle + \Box(|\nabla f|^2).$$

Mais precisamente, a fórmula tipo Bochner para o operador $\mathcal{L}$ é dada por

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla f, \nabla(\mathcal{L}f) \rangle + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T \rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T \rangle,$$

em que $R_{\eta,T} := R_T - \nabla(\operatorname{div}_\eta T)^\sharp$.

De fato, observemos inicialmente que pela equação (2.4) podemos deduzir

$$\begin{aligned} \langle \nabla \mathcal{L}f, \nabla f \rangle &= \langle \nabla_{\nabla f} \operatorname{div}_\eta T, \nabla f \rangle + \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla_{\nabla f} \nabla f \rangle + \langle \nabla(\Box f), \nabla f \rangle \\ &= \nabla(\operatorname{div}_\eta T)^\sharp(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}\langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla(|\nabla f|^2) \rangle + \langle \nabla(\Box f), \nabla f \rangle \\ &= \nabla(\operatorname{div}_\eta T)^\sharp(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) - \frac{1}{2}\Box(|\nabla f|^2) + \langle \nabla(\Box f), \nabla f \rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla \mathcal{L}f, \nabla f \rangle - \nabla(\operatorname{div}_\eta T)^\sharp(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}\Box(|\nabla f|^2) - \langle \nabla(\Box f), \nabla f \rangle,$$

donde vamos concluir nossa afirmação imediatamente através da fórmula tipo Bochner para o operador $\Box$ de Cheng-Yau.

2.2 O problema de Dirichlet

Para o que segue denotaremos por $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade riemanniana completa e $\Omega \subset M$ um domínio, ou seja, um aberto conexo e limitado em M . Além disso, observemos que o teorema da divergência continua válido da seguinte forma $\int_{\Omega} \mathcal{L}f \, d\mu = \int_{\partial\Omega} T(\nabla f, \nu) \, d\mu$, em que $d\mu = e^{-\eta} d\partial\Omega$ é a forma volume com peso no $\partial\Omega$ induzida pelo campo de vetores normais unitários μ exterior a Ω ao longo de $\partial\Omega$. Assim, a fórmula de integração por partes é dada por

$$\int_{\Omega} \ell \mathcal{L}f \, d\mu = - \int_{\Omega} T(\nabla \ell, \nabla f) \, d\mu + \int_{\partial\Omega} \ell T(\nabla f, \nu) \, d\mu,$$

para toda $f, \ell \in C^{\infty}(\Omega)$. Portanto, o operador $\mathcal{L}$ é formalmente auto-adjunto no espaço de todas as funções em $L^2(\Omega, d\mu)$ que se anulam em $\partial\Omega$. Desse modo o problema de autovalores

$$(2.5) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u &= -\lambda u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui um espectro real e discreto $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow \infty$, em que cada autovalor é repetido de acordo com sua multiplicidade. Em particular, para as autofunções u_i temos

$$\lambda_i = - \int_{\Omega} u_i \mathcal{L}u_i \, d\mu = \int_{\Omega} T(\nabla u_i, \nabla u_i) \, d\mu.$$

Destacamos que o problema (2.5), para o caso em que $\mathcal{L}$ é o η -laplaciano, está intimamente relacionado a problemas de autovalores em espaços com *produto warped* (ver [22, 37, 38]). Por exemplo, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, associado à função η definimos

$$f(x) = \frac{1}{4}(2\Delta\eta - |\nabla\eta|^2).$$

Assim $f(x)$ é a curvatura escalar da métrica $g_0 + e^{-\eta} d\theta^2$ no produto $\Omega \times \mathbb{S}^1$ com g_0 sendo a métrica euclidiana no domínio Ω . Observamos que a curvatura escalar modificada de uma métrica g e uma função dilatação η , como introduzido por Perelman em [44], é $R^m = R + 4f$, em que R é a curvatura escalar de g e $f = f(x)$ como definida acima.

Conforme já esclarecemos na introdução a busca de limites superiores e inferiores para os autovalores do problema (2.5) e também diferenças entre eles, teve início e motivação no caso particular em que $\mathcal{L}$ é o operador laplaciano e Ω um domínio de $\mathbb{R}^2$, o

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

conhecido *problema da membrana*, que teve origem na música. A expansão assintótica de Weyl dada por (2) e suas consequências imediatas (3) e (4) serão a base para obtermos nossas estimativas. Além disso tomaremos como referência as inequações de Payne-Pólya-Weinberger, Hile-Protter, Yang, Cheng-Yang, Li-Yau e Xia-Xu, todas elas comentadas na introdução. Uma ressalva imediata de (3) é que

$$\frac{4}{nk} \sum_{i=1}^k \lambda_i \sim \frac{4}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}},$$

e por conseguinte de (5)

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \sim \frac{4}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}.$$

Enquanto que um raciocínio análogo nos permite deduzir a partir de (3), (4) e (8) que

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq 2 \left[\left(\frac{2}{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2 - \left(1 + \frac{4}{n} \right) \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \sim 0.$$

Portanto, a estimativa (8) é melhor que (5).

Na Seção 2.4 faremos extensões dos resultados (9) e (10) para o caso particular em que o operador $\mathcal{L}$ é o η -laplaciano.

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

De acordo com a motivação discutida na introdução, passamos agora a prova dos principais resultados deste capítulo. Inicialmente demonstraremos o lema abaixo que estende para o operador $\mathcal{L}$ os resultados obtidos nas equações (11) e (13). Para o que segue assumiremos que as autofunções associadas ao problema (2.5) são ortonormais em $L^2(\Omega, \text{dm})$.

Lema 2.2 *Sejam $\mathcal{L}u = \text{div}_\eta(T(\nabla u))$, λ_i o i -ésimo autovalor do problema (2.5) e u_i a autofunção correspondente a λ_i . Então para $h \in \mathcal{C}^3(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$, e k inteiro, temos*

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_{\Omega} u_i^2 T(\nabla h, \nabla h) \text{dm} \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} (u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i))^2 \text{dm}.$$

Demonstração: A inequação de Rayleigh-Ritz nos diz que

$$\lambda_{k+1} \leq - \frac{\int_{\Omega} \psi \mathcal{L} \psi \text{dm}}{\int_{\Omega} \psi^2 \text{dm}},$$

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

para qualquer função não nula $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0 \text{ and } \int_{\Omega} \psi u_i \, d\mathbf{m} = 0, \forall i = 1, \dots, k.$$

Para $i, j \in \{1, \dots, k\}$, e $h \in \mathcal{C}^3(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$, consideraremos

$$\phi_i = hu_i - \sum_{j=1}^k c_{ij} u_j \quad \text{então } \phi_i|_{\partial\Omega} = 0$$

e para que

$$0 = \int_{\Omega} \phi_i u_i \, d\mathbf{m} = \int_{\Omega} hu_i u_i \, d\mathbf{m} - \sum_{j=1}^k c_{ij} \int_{\Omega} u_j u_i \, d\mathbf{m} = \int_{\Omega} hu_i u_i \, d\mathbf{m} - \sum_{j=1}^k c_{ij} \delta_{jl}$$

é suficiente considerar $c_{ij} = \int_{\Omega} hu_i u_j \, d\mathbf{m}$. Então podemos escrever

$$(2.6) \quad \lambda_{k+1} \leq - \frac{\int_{\Omega} \phi_i \mathcal{L} \phi_i \, d\mathbf{m}}{\int_{\Omega} \phi_i^2 \, d\mathbf{m}}.$$

Como

$$\mathcal{L} \phi_i = \mathcal{L}(hu_i) - \sum_{j=1}^k c_{ij} \mathcal{L} u_j = -\lambda_i hu_i + u_i \mathcal{L} h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) + \sum_{j=1}^k c_{ij} \lambda_j u_j,$$

então

$$-\phi_i \mathcal{L} \phi_i = -\phi_i (u_i \mathcal{L} h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)) + \phi_i \lambda_i hu_i - \sum_{j=1}^k c_{ij} \lambda_j u_j \phi_i$$

ou equivalentemente

$$(2.7) \quad -\phi_i \mathcal{L} \phi_i = -\phi_i (u_i \mathcal{L} h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)) + \lambda_i \phi_i^2 + \sum_{j=1}^k c_{ij} \lambda_i u_j \phi_i - \sum_{j=1}^k c_{ij} \lambda_j u_j \phi_i.$$

Substituindo (2.7) em (2.6)

$$\lambda_{k+1} \leq - \frac{\int_{\Omega} (\phi_i (u_i \mathcal{L} h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)) - \lambda_i \phi_i^2) \, d\mathbf{m}}{\int_{\Omega} \phi_i^2 \, d\mathbf{m}}$$

o que resulta em

$$(2.8) \quad (\lambda_{k+1} - \lambda_i) |\phi_i|^2 \leq - \int_{\Omega} \phi_i (u_i \mathcal{L} h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)) \, d\mathbf{m}.$$

Agora, vamos estimar

$$P_i = - \int_{\Omega} \phi_i (u_i \mathcal{L} h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)) \, d\mathbf{m}.$$

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

Seja

$$b_{ij} = - \int (u_j \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_j)) u_i \, \mathrm{d}m,$$

como $\int_{\Omega} \phi_i u_j \, \mathrm{d}m = 0$, podemos escrever

$$P_i = - \int_{\Omega} \phi_i (u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j) \, \mathrm{d}m.$$

Portanto

$$\begin{aligned} P_i &= - \int_{\Omega} \phi_i (u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j) \, \mathrm{d}m \\ &\leq |\phi_i| |u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j|, \end{aligned}$$

e assim temos

$$(2.9) \quad (\lambda_{k+1} - \lambda_i) P_i^2 \leq (\lambda_{k+1} - \lambda_i) |\phi_i|^2 |u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j|^2.$$

De (2.8) e (2.9) obtemos

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i) P_i \leq |u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j|^2$$

o que implica em

$$(2.10) \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 P_i \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) |u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j|^2.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \lambda_i c_{ij} &= - \int_{\Omega} h u_j \mathcal{L}u_i \, \mathrm{d}m = - \int_{\Omega} u_i \mathcal{L}(h u_j) \, \mathrm{d}m \\ &= - \int_{\Omega} u_i (-\lambda_j h u_j + u_j \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_j)) \, \mathrm{d}m = \lambda_j c_{ij} + b_{ij}, \end{aligned}$$

portanto,

$$(2.11) \quad b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}, \text{ e observamos que } b_{ij} = -b_{ji}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j|^2 &= |u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)|^2 + \sum_{j=1}^k b_{ij}^2 \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^k b_{ij} \int_{\Omega} (u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)) u_j \, \mathrm{d}m \\ &= |(u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i))|^2 - \sum_{j=1}^k b_{ij}^2 \end{aligned}$$

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

logo, usando (2.11)

$$(2.12) \quad |(u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i) - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j)|^2 = |(u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i))|^2 - \sum_{j=1}^k (\lambda_i - \lambda_j)^2 c_{ij}^2$$

e temos também que

$$\begin{aligned} P_i &= - \int_{\Omega} (hu_i - \sum_{j=1}^k c_{ij} u_j)(u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)) dm \\ &= - \int_{\Omega} (hu_i^2 \mathcal{L}h + 2hu_i T(\nabla h, \nabla u_i)) dm + \sum_{j=1}^k c_{ij} b_{ij} \\ &= \int_{\Omega} T(\nabla(hu_i^2), \nabla h) dm - 2 \int_{\Omega} hu_i T(\nabla h, \nabla u_i) dm + \sum_{j=1}^k (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^2. \end{aligned}$$

Assim

$$(2.13) \quad P_i = \int_{\Omega} u_i^2 T(\nabla h, \nabla h) dm + \sum_{j=1}^k (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^2.$$

Substituindo (2.12) e (2.13) em (2.10)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_{\Omega} u_i^2 T(\nabla h, \nabla h) dm + \sum_{i,j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^2 \leq \\ &\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} (u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i))^2 dm - \sum_{i,j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) (\lambda_i - \lambda_j)^2 c_{ij}^2. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) (\lambda_{k+1} - \lambda_j + \lambda_j - \lambda_i) (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) (\lambda_{k+1} - \lambda_j) (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) (\lambda_j - \lambda_i) (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^2 \\ &= - \sum_{i,j=1}^k (\lambda_k - \lambda_i) (\lambda_i - \lambda_j)^2 c_{ij}^2. \end{aligned}$$

Finalmente concluímos que

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_{\Omega} u_i^2 T(\nabla h, \nabla h) dm \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} (u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i))^2 dm.$$

□

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

Os próximos dois resultados nos permitem estender as inequações (12) e (14) para o operador $\mathcal{L}$. Destacamos que, apesar da estreita relação entre eles, o primeiro, para o caso em que $T = I$, nos remete a inequações mais precisas que o segundo. Além disso, a partir do Lema 2.3 escreveremos a inequação (14) em um formato que possibilitou estendermos também outros resultados já conhecidos para o operador laplaciano.

Lema 2.3 *Sejam Ω um domínio de uma variedade riemanniana n -dimensional M isometricamente imersa no $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}u = \operatorname{div}_\eta(T(\nabla u))$, λ_i o i -ésimo autovalor do problema (2.5) e u_i a autofunção correspondente a λ_i . Então*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T) \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left[\int_{\Omega} u_i^2 \left(\|\operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot))\|^2 + |\operatorname{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta)|^2 \right) dm \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_{\Omega} u_i \left(\langle \operatorname{tr}(\nabla T), T(\nabla u_i) \rangle - \langle T(\nabla \eta), T(\nabla u_i) \rangle \right) dm + 4\lambda_i \right]. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $x = (x_1, \dots, x_m)$ o vetor posição da imersão de M em $\mathbb{R}^m$. Considere $h = x_\ell$ no Lema 2.2 e tome a soma em ℓ . Assim temos, para $\Lambda_i^j = \lambda_{k+j} - \lambda_i$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\Lambda_i^1)^2 \int_{\Omega} u_i^2 \sum_{\ell=1}^m T(\nabla x_\ell, \nabla x_\ell) dm &\leq \sum_{i=1}^k \Lambda_i^1 \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^m (u_i \mathcal{L}x_\ell + 2T(\nabla x_\ell, \nabla u_i))^2 dm \\ &= \sum_{i=1}^k \Lambda_i^1 \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^m \left(u_i^2 \operatorname{div}_\eta(T(\nabla x_\ell)) + 2T(\nabla x_\ell, \nabla u_i) \right)^2 dm, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\Lambda_i^1)^2 \int_{\Omega} u_i^2 \sum_{\ell=1}^m T(\nabla x_\ell, \nabla x_\ell) dm &\leq \sum_{i=1}^k \Lambda_i^1 \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^m \left(u_i^2 (\operatorname{div}_\eta(T(\nabla x_\ell)))^2 \right. \\ (2.14) \quad &\quad \left. + 4u_i \operatorname{div}_\eta(T(\nabla x_\ell)) T(\nabla x_\ell, \nabla u_i) + 4T(\nabla x_\ell, \nabla u_i)^2 \right) dm. \end{aligned}$$

Denotando por ∇^0 a conexão canônica do $\mathbb{R}^m$ e sendo $\{e_1, \dots, e_m\}$ um referencial ortonormal local geodésico em $p \in M$ e adaptado a M , podemos escrever

$$\begin{aligned} \nabla^0 x_\ell &= \sum_{i=1}^n e_i(x_\ell) e_i + \sum_{i=n+1}^m e_i(x_\ell) e_i, \\ e_\ell &= \nabla x_\ell + (\nabla x_\ell)^\perp. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^m T(\nabla x_\ell, \nabla u_i)^2 &= \sum_{\ell=1}^m \langle \nabla x_\ell, T(\nabla u_i) \rangle^2 = \sum_{\ell=1}^m \langle e_\ell - (\nabla x_\ell)^\perp, T(\nabla u_i) \rangle^2 \\ (2.15) \quad &= \sum_{\ell=1}^n \langle e_\ell, T(\nabla u_i) \rangle^2 = |T(\nabla u_i)|^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^m T(\nabla x_\ell, \nabla x_\ell) &= \sum_{\ell=1}^m \langle \nabla x_\ell, T(\nabla x_\ell) \rangle = \sum_{\ell=1}^m \langle e_\ell - (\nabla x_\ell)^\perp, T(\nabla x_\ell) \rangle \\
 &= \sum_{\ell=1}^n \langle e_\ell, T(\nabla x_\ell) \rangle = \sum_{\ell=1}^n \langle T(e_\ell), \nabla x_\ell \rangle \\
 (2.16) \qquad &= \sum_{\ell=1}^n \langle e_\ell, T(e_\ell) \rangle = \text{tr}(T).
 \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
 \text{div}_\eta(T(\nabla x)) &:= (\text{div}_\eta(T(\nabla x_1)), \dots, \text{div}_\eta(T(\nabla x_m))) \\
 &= (\text{div}(T(\nabla x_1)) - \langle \nabla \eta, T(\nabla x_1) \rangle, \dots, \text{div}(T(\nabla x_m)) - \langle \nabla \eta, T(\nabla x_m) \rangle).
 \end{aligned}$$

Donde vamos escrever

$$(2.17) \qquad \text{div}_\eta(T(\nabla x)) = \text{div}(T(\nabla x)) - d\eta \circ T(\nabla x).$$

Dessa maneira temos que

$$\begin{aligned}
 \text{div}(T(\nabla x)) &:= (\text{div}(T(\nabla x_1)), \dots, \text{div}(T(\nabla x_m))) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n e_i(\langle T(\nabla x_1), e_i \rangle), \dots, \sum_{i=1}^n e_i(\langle T(\nabla x_m), e_i \rangle) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (e_i(\langle T(\sum_{j=1}^n e_j(x_1)e_j), e_i \rangle), \dots, e_i(\langle T(\sum_{j=1}^n e_j(x_m)e_j), e_i \rangle)) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (e_i(e_j(x_1)\langle T(e_j), e_i \rangle), \dots, e_i(e_j(x_m)\langle T(e_j), e_i \rangle)),
 \end{aligned}$$

derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{div}(T(\nabla x)) &= \sum_{i,j=1}^n (e_i(e_j(x_1))\langle T(e_j), e_i \rangle, \dots, e_i(e_j(x_m))\langle T(e_j), e_i \rangle) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^n (e_j(x_1)\langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle, \dots, e_j(x_m)\langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \langle T(e_j), e_i \rangle (e_i(e_j(x_1)), \dots, e_i(e_j(x_m))) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle (e_j(x_1), \dots, e_j(x_m)).
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(T(\nabla x)) &= \sum_{i,j=1}^n \langle T(e_j), e_i \rangle (\nabla_{e_i}^0 e_j)(x) + \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle e_j(x) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \langle T(e_j), e_i \rangle \nabla_{e_i}^0 e_j + \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle e_j \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \langle T(e_j), e_i \rangle (\nabla_{e_i} e_j + \alpha(e_i, e_j)) + \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle e_j \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \langle T(e_j), e_i \rangle \alpha(e_i, e_j) + \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle e_j \\
 (2.18) \quad &= \sum_{j=1}^n \alpha(T(e_j), e_j) + \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle e_j.
 \end{aligned}$$

Como T é simétrico temos que $\langle T(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, T(e_i) \rangle$, o que implica

$$\langle \nabla_{e_i} T(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, \nabla_{e_i} T(e_i) \rangle,$$

que substituindo em (2.18) temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(T(\nabla x)) &= \sum_{i=1}^n \alpha(T(e_i), e_i) + \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} T(e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha(T(e_i), e_i) + \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} T)(e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha(T(e_i), e_i) + \sum_{i=1}^n (\nabla T)(e_i, e_i) \\
 &= \operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot)) + \operatorname{tr}(\nabla T),
 \end{aligned}$$

em que $\operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot)) := \sum_{i=1}^n \alpha(T(e_i), e_i) \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e $\operatorname{tr}(\nabla T) := \sum_{i=1}^n (\nabla T)(e_i, e_i) \in \mathfrak{X}(M)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 d\eta \circ T(\nabla x) &:= (\langle \nabla \eta, T(\nabla x_1) \rangle, \dots, \langle \nabla \eta, T(\nabla x_m) \rangle) \\
 &= (\langle \nabla \eta, T(\sum_{i=1}^n e_i(x_1) e_i) \rangle, \dots, \langle \nabla \eta, T(\sum_{i=1}^n e_i(x_m) e_i) \rangle) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla \eta, T(e_i) \rangle (e_i(x_1), \dots, e_i(x_m)) \\
 (2.19) \quad &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla \eta, T(e_i) \rangle e_i(x) = \sum_{i=1}^n \langle T(\nabla \eta), e_i \rangle e_i = T(\nabla \eta).
 \end{aligned}$$

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

Substituindo (2.18) e (2.19) em (2.17)

$$(2.20) \quad \operatorname{div}_\eta(T(\nabla x)) = \operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot)) + \operatorname{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta).$$

Agora podemos calcular

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \sum_{\ell=1}^m (\operatorname{div}_\eta(T(\nabla x_\ell)))^2 &= \|\operatorname{div}_\eta(T(\nabla x))\|^2 \\ &= \|\operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot))\|^2 + |\operatorname{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta)|^2 \end{aligned}$$

e

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \sum_{\ell=1}^m \operatorname{div}_\eta(T(\nabla x_\ell))T(\nabla x_\ell, \nabla u_i) &= \sum_{\ell=1}^m \operatorname{div}_\eta(T(\nabla x_\ell))T(\nabla u_i)(x_\ell) \\ &= \langle \operatorname{div}_\eta(T(\nabla x)), T(\nabla u_i) \rangle \\ &= \langle \operatorname{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta), T(\nabla u_i) \rangle \\ &= \langle \operatorname{tr}(\nabla T), T(\nabla u_i) \rangle - \langle T(\nabla \eta), T(\nabla u_i) \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo (2.15)-(2.22) em (2.14)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T) \sum_{i=1}^k (\Lambda_i^1)^2 &\leq \sum_{i=1}^k \Lambda_i^1 \left(\int_{\Omega} u_i^2 \left(\|\operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot))\|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\operatorname{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta)|^2 \right) \mathrm{d}m + 4 \int_{\Omega} |T(\nabla u_i)|^2 \mathrm{d}m \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_{\Omega} u_i \left(\langle \operatorname{tr}(\nabla T), T(\nabla u_i) \rangle - \langle T(\nabla \eta), T(\nabla u_i) \rangle \right) \mathrm{d}m \right). \end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T) \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left[\int_{\Omega} u_i^2 \left(\|\operatorname{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot))\|^2 + |\operatorname{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta)|^2 \right) \mathrm{d}m \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_{\Omega} u_i \left(\langle \operatorname{tr}(\nabla T), T(\nabla u_i) \rangle - \langle T(\nabla \eta), T(\nabla u_i) \rangle \right) \mathrm{d}m + 4\lambda_i \right]. \end{aligned}$$

□

Como consequência do lema acima obtemos a

Proposição 2.1 *Sejam Ω um domínio de uma variedade riemanniana n -dimensional M isometricamente imersa no $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}u = \operatorname{div}_\eta(T(\nabla u))$, λ_i o i -ésimo autovalor do problema (2.5) e u_i a autofunção correspondente a λ_i . Então*

$$\operatorname{tr}(T) \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left((m-n)^2 A_0^2 T_*^2 + (T_0 + T_* \eta_0)^2 + 4(T_0 + T_* \eta_0) \lambda_i^{\frac{1}{2}} + 4\lambda_i \right),$$

2.3 Estimativas com autovalores para o operador $\mathcal{L}$

em que $A_0 = \max\{\sup_{\bar{\Omega}} |A_{e_k}|, k = n+1, \dots, m\}$, A_{e_k} o operador de Weingarten da imersão na direção e_k , $\eta_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$, $T_* = \sup_{\bar{\Omega}} |T|$ e $T_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\text{tr}(\nabla T)|$.

Demonstração: Para a demonstração faremos uso do Lema 2.3, bem como de suas notações pré-fixadas. Notemos inicialmente que

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \|\text{tr}(\alpha(T(\cdot), \cdot))\|^2 + |\text{tr}(\nabla T) - T(\nabla \eta)|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha(T(e_i), e_i) \right\|^2 + |\text{tr}(\nabla T)|^2 \\ &\quad - 2\langle \text{tr}(\nabla T), T(\nabla \eta) \rangle + |T(\nabla \eta)|^2. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} |T(\nabla \eta)|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle T(\nabla \eta), e_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^n \langle \nabla \eta, T(e_i) \rangle^2 \\ &\leq |\nabla \eta|^2 \sum_{i=1}^n |T(e_i)|^2 = |\nabla \eta|^2 |T|^2, \end{aligned}$$

assim, para $T_* = \sup_{\bar{\Omega}} |T|$ e $\eta_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$

$$(2.24) \quad |T(\nabla \eta)|^2 \leq T_*^2 \eta_0^2.$$

Além disso, para $T_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\text{tr}(\nabla T)|$ temos

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Omega} u_i^2 \langle \text{tr}(\nabla T), T(\nabla \eta) \rangle dm &\leq 2 \int_{\Omega} u_i^2 |\text{tr}(\nabla T)| |T(\nabla \eta)| dm \\ &\leq 2T_0 T_* \eta_0 \int_{\Omega} u_i^2 dm \\ (2.25) \quad &\leq 2T_0 T_* \eta_0. \end{aligned}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha(T(e_i), e_i) \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^m \langle \alpha(T(e_i), e_i), e_k \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^m \langle A_{e_k} e_i, T(e_i) \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=n+1}^m \left(\sum_{i=1}^n \langle A_{e_k} e_i, T(e_i) \rangle \right) e_k \right\|^2 \\ (2.26) \quad &= \left\| \sum_{k=n+1}^m \langle A_{e_k}, T \rangle e_k \right\|^2. \end{aligned}$$

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

Estimando o lado direito vamos obter

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^n \alpha(T(e_i), e_i) \right\|^2 &\leq \sum_{k=n+1}^m |\langle A_{e_k}, T \rangle|^2 \sum_{k=n+1}^m |e_k|^2 \\
 &\leq (m-n) \sum_{k=n+1}^m |A_{e_k}|^2 |T|^2 \\
 (2.27) \qquad \qquad \qquad &\leq (m-n)^2 A_0^2 T_*^2,
 \end{aligned}$$

em que $A_0 = \max\{\sup_{\bar{\Omega}} |A_{e_k}|, k = n+1, \dots, m\}$, e cada A_{e_k} o operador de Weingarten da imersão na direção e_k . Ressaltamos que o caráter tensorial do operador de Weingarten e a orientação de M nos permite assumir que $\{e_k\}$, $k = n+1, \dots, m$ é um referencial ortonormal global de vetores normais a M .

Para o que falta precisamos estimar

$$\begin{aligned}
 4 \int_{\Omega} u_i \langle \text{tr}(\nabla T), T(\nabla u_i) \rangle \text{dm} &\leq 4 \int_{\Omega} |u_i| |\text{tr}(\nabla T)| |T(\nabla u_i)| \text{dm} \\
 &\leq 4 \left(\int_{\Omega} u_i^2 \text{dm} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\text{tr}(\nabla T)|^2 |T(\nabla u_i)|^2 \text{dm} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 (2.28) \qquad \qquad \qquad &\leq 4T_0 \lambda_i^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 -4 \int_{\Omega} u_i \langle T(\nabla \eta), T(\nabla u_i) \rangle \text{dm} &\leq 4 \left(\int_{\Omega} |(T(\nabla \eta)|^2 |T(\nabla u_i)|^2 \text{dm} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 (2.29) \qquad \qquad \qquad &\leq 4T_* \eta_0 \lambda_i^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Desse modo, substituindo (2.23)-(2.29) no Lema 2.3 concluímos

$$\text{tr}(T) \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left((m-n)^2 A_0^2 T_*^2 + (T_0 + T_* \eta_0)^2 + 4(T_0 + T_* \eta_0) \lambda_i^{\frac{1}{2}} + 4\lambda_i \right)$$

□

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

Nesta seção aplicaremos os resultados da seção anterior e obteremos um limite superior para os autovalores do problema (2.5) no caso em que $T = I$, ou seja, quando o operador $\mathcal{L}$ é o operador η -laplaciano.

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

Proposição 2.2 *Seja $\Omega \subset M$ um domínio de uma variedade riemanniana n -dimensional M isometricamente imersa no $\mathbb{R}^m$ com vetor curvatura média H e λ_i o i -ésimo autovalor do problema (2.5) para $T = I$. Então*

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left[\lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4} \right]$$

em que $\eta_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$, $\bar{\eta}_0 = \sup_{\bar{\Omega}} \mathcal{L}\eta$ e $H_0 = \sup_{\bar{\Omega}} \|H\|$ são constantes.

Demonstração: Pelo Lema 2.3, para $T = I$ temos

$$n \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left[\int_{\Omega} u_i^2 (n^2 \|H\|^2 + |\nabla \eta|^2) dm - 4 \int_{\Omega} u_i \langle \nabla \eta, \nabla u_i \rangle dm + 4\lambda_i \right].$$

Assim, para $\eta_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$ e $H_0 = \sup_{\bar{\Omega}} \|H\|$ obtemos

$$n \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 4\lambda_i - 4 \int_{\Omega} u_i \langle \nabla \eta, \nabla u_i \rangle dm \right).$$

Mas

$$\begin{aligned} -4 \int_{\Omega} u_i \langle \nabla \eta, \nabla u_i \rangle dm &= -2 \int_{\Omega} \langle \nabla \eta, \nabla u_i^2 \rangle dm \\ &= 2 \int_{\Omega} u_i^2 \mathcal{L}\eta dm \\ &\leq 2\bar{\eta}_0, \end{aligned}$$

em que $\bar{\eta}_0 = \sup_{\bar{\Omega}} \mathcal{L}\eta$. Substituindo este resultado na inequação anterior obtemos

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left[\lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4} \right]$$

o que completa a prova. $\square$

Observemos que no caso da existência de uma família de imersões isométricas que preservam a curvatura média H , obtemos as mesmas inequações envolvendo os autovalores para todas as variedades, como ocorre por exemplo na família associada que transforma o catenóide no helicóide.

Outro fato interessante é quando consideramos $v_i := \lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4}$. Sendo assim, a inequação da Proposição 2.2 é equivalente a

$$(2.30) \quad \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_i.$$

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

Em particular, quando η_0 é constante temos a inequação (12) para o operador laplaciano, e a equação (2.30) tem o mesmo formato da equação para o caso do espaço euclidiano, conforme equação (6). De agora em diante quando nos referirmos ao i -ésimo autovalor λ_i do problema (2.5) sempre consideraremos

$$v_i := \lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4}.$$

A seguir demonstraremos algumas inequações que são consequências da Proposição 2.2. Tais resultados estendem os resultados de Cheng e Yang, [18] e [20], obtidos para domínios da esfera unitária $\mathbb{S}^n(1)$ e para domínios do espaço projetivo $\mathbb{CP}^n(4)$.

Teorema 2.1 *Nas hipóteses da Proposição 2.2 temos as três equações seguintes*

$$(2.31) \quad v_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i$$

$$(2.32) \quad v_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(2.33) \quad v_{k+1} - v_k \leq 2 \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração: Da equação (2.30) podemos escrever

$$\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)(v_{k+1} - v_i) - \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)v_i \leq 0,$$

o que implica

$$\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)v_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)v_i.$$

Afirmamos que

$$(2.34) \quad v_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) v_i,$$

para todo $i=1, \dots, k$. Com efeito, caso contrário existiria i_0 tal que

$$v_{k+1} > \left(1 + \frac{4}{n}\right) v_{i_0} > \left(1 + \frac{4}{n}\right) v_{i_0-1} > \dots > \left(1 + \frac{4}{n}\right) v_1$$

o que implicaria

$$\sum_{i=1}^{i_0} (v_{i_0+1} - v_i) v_{i_0+1} > \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^{i_0} (v_{i_0} - v_i) v_i$$

que seria uma contradição a inequação (2.30). Somando em i a equação (2.34) obtemos

$$v_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i$$

o que prova (2.31). Para provar (2.32), notemos que (2.30) é equivalente a

$$\mathcal{P}(v_{k+1}) = k(v_{k+1})^2 - v_{k+1} \left(2 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k (v_i)^2 \leq 0$$

então podemos afirmar que o discriminante de $\mathcal{P}(v_{k+1})$ satisfaz

$$(2.35) \quad \mathcal{D} = \left(2 + \frac{4}{n}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - 4k \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k (v_i)^2 \geq 0.$$

Como $\mathcal{P}(v_{k+1}) \leq 0$ temos $r_{k+1}^\eta \leq v_{k+1} \leq R_{k+1}^\eta$, em que r_{k+1}^η e R_{k+1}^η são, respectivamente, a menor e a maior raiz de $\mathcal{P}$. Então

$$(2.36) \quad v_{k+1} \leq R_{k+1}^\eta = \frac{1}{2k} \left[\left(2 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \sqrt{\mathcal{D}} \right]$$

Substituindo (2.35) em (2.36) obtemos

$$\begin{aligned} v_{k+1} &\leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{kn}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k (v_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^k (v_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned}
 v_{k+1} &\leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^k (v_i)^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^k (v_i)^2 - \frac{2}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i \right)^2 + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^k (v_i)^2 - \frac{2}{k} \sum_{i,j=1}^k v_i v_j + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$v_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente para provar (2.33), como (2.30) é verdade para qualquer k , segue que

$$\sum_{i=1}^k (v_k - v_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (v_k - v_i) v_i,$$

isto é, podemos novamente observar que o polinômio $\mathcal{P}(v_k) \leq 0$. Analogamente temos

$$(2.37) \quad v_k \geq r_k^\eta = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^k v_i - \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto de (2.32) e (2.37)

$$v_{k+1} - v_k \leq 2 \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

□

Observemos que (2.31) é uma inequação tipo segunda-Yang e (2.33) generaliza a inequação (8).

Temos ainda um limite inferior para a média dos k primeiros autovalores estendendo assim a inequação (10), ou seja

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

Teorema 2.2 *Nas hipóteses da Proposição 2.2 temos*

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \geq \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}},$$

para $k=1,2,\dots$.

Demonstração: Utilizando a inequação (2.30)

$$\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_i$$

e a (2.47) do Corolário 2.4 obtemos

$$F_{k+1} \leq \mathcal{C}(n, k) \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4}{n}} F_k \leq \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4}{n}} F_k,$$

ou seja,

$$\frac{F_{k+1}}{(k+1)^{\frac{4}{n}}} \leq \frac{F_k}{k^{\frac{4}{n}}}.$$

Podemos escrever então

$$(2.38) \quad \frac{F_{k+l}}{(k+l)^{\frac{4}{n}}} \leq \frac{F_k}{k^{\frac{4}{n}}},$$

para qualquer inteiro positivo l .

Além disso, usando (2.48) temos

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \frac{F_k}{k^{\frac{4}{n}}} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \Lambda_k^2 - T_k}{k^{\frac{4}{n}}} = \frac{\frac{2}{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (v_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i)}{k^{\frac{4}{n}}} \\ &\leq \frac{\frac{2}{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2}{k^{\frac{4}{n}}} \end{aligned}$$

e

$$(2.40) \quad \frac{F_{k+l}}{(k+l)^{\frac{4}{n}}} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(\frac{\frac{1}{k+l} \sum_{i=1}^{k+l} v_i}{(k+l)^{\frac{2}{n}}}\right)^2 - \frac{\frac{1}{k+l} \sum_{i=1}^{k+l} v_i^2}{(k+l)^{\frac{4}{n}}}.$$

Por outro lado, da fórmula assintótica de Weyl temos que

$$(2.41) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i}{k^{\frac{2}{n}}} = \frac{n}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}}$$

e

$$(2.42) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i^2}{k^{\frac{4}{n}}} = \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{4}{n}}},$$

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

então (2.41) implica

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i}{k^{\frac{2}{n}}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4}}{k^{\frac{2}{n}}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \eta_0^2 + 2\bar{\eta}_0}{4} \right)}{k^{\frac{2}{n}}}, \end{aligned}$$

e portanto

$$(2.43) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i}{k^{\frac{2}{n}}} = \frac{n}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}}.$$

Analogamente de (2.42) temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i + \frac{n^2 H_0^2 + \phi_0^2 + 4\phi_0}{4(1+\phi_0)} \right)^2}{k^{\frac{4}{n}}} &= \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{4}{n}}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{n^2 H_0^2 + \phi_0^2 + 4\phi_0}{4(1+\phi_0)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i}{k^{\frac{2}{n}}} \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n^2 H_0^2 + \phi_0^2 + 4\phi_0}{4(1+\phi_0)} \right)^2}{k^{\frac{2}{n}}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$(2.44) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i^2}{k^{\frac{4}{n}}} = \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{4}{n}}}.$$

Desse modo, de (2.40), (2.43) e (2.44) concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_{k+l}}{(k+l)^{\frac{4}{n}}} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) \left(\frac{\frac{1}{k+l} \sum_{i=1}^{k+l} v_i}{(k+l)^{\frac{2}{n}}} \right)^2 - \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+l} \sum_{i=1}^{k+l} v_i^2}{(k+l)^{\frac{4}{n}}} \\ (2.45) \quad &= \frac{2n}{(n+2)(n+4)} \frac{16\pi^4}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{4}{n}}}. \end{aligned}$$

Finalmente, de (2.38), (2.39) e (2.45) concluímos que para qualquer inteiro positivo k

$$\frac{\frac{2}{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2}{k^{\frac{4}{n}}} \geq \frac{2n}{(n+2)(n+4)} \frac{16\pi^4}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{4}{n}}}$$

ou seja,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \geq \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol} \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}.$$

□

É imediato de (2.30) e do Corolário 2.1 o seguinte resultado que estende para o operador η -laplaciano a estimativa (9).

Teorema 2.3 *Nas hipóteses da Proposição 2.2 temos*

$$v_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n} \right) k^{\frac{2}{n}} v_1.$$

Apêndice

Neste apêndice provaremos os resultados técnicos utilizados no Capítulo 2.

Lema 2.4 *Sejam $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_{k+1}$, números reais não negativos e c, n números reais positivos. Se*

$$(2.46) \quad \sum_{i=1}^k (\eta_{k+1} - \eta_i)^2 \leq \frac{4c}{n} \sum_{i=1}^k (\eta_{k+1} - \eta_i) \eta_i,$$

então

$$(2.47) \quad F_{k+1} \leq C(n, k, c) \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} F_k,$$

em que

$$(2.48) \quad \Lambda_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_i, \quad T_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_i^2,$$
$$F_k = \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 - T_k,$$
$$e \quad 0 < C(n, k, c) = 1 - \frac{c}{3n} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\frac{4c}{n}} \frac{\left(1 + \frac{2c}{n} \right) \left(1 + \frac{4c}{n} \right)}{(k+1)^3} < 1.$$

Demonstração: Considere

$$p_{k+1} = \Lambda_{k+1} - \left(1 + \frac{2c}{n} \frac{1}{k+1} \right) \Lambda_k,$$

como

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= (k+1)\Lambda_{k+1} - k\Lambda_k \\ &= (k+1) \left(p_{k+1} + \left(1 + \frac{2c}{n} \frac{1}{k+1} \right) \Lambda_k \right) - k\Lambda_k \\ &= (k+1)p_{k+1} + (k+1)\Lambda_k + \frac{2c}{n}\Lambda_k - k\Lambda_k \end{aligned}$$

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

temos

$$(2.49) \quad \eta_{k+1} = (k+1) \left(p_{k+1} + \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \frac{1}{k+1} \Lambda_k \right).$$

Além disso,

$$F_{k+1} = \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_{k+1}^2 - T_{k+1} = \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_{k+1}^2 - \frac{1}{k+1} \eta_{k+1}^2 - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k \eta_i^2$$

e

$$F_k = \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 - T_k = \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_i^2,$$

então

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_{k+1}^2 - \frac{k}{k+1} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 - \frac{1}{k+1} \eta_{k+1}^2 + \frac{k}{k+1} F_k \\ &= \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \left[p_{k+1} + \left(1 + \frac{2c}{n} \frac{1}{k+1} \right) \Lambda_k \right]^2 - \frac{k}{k+1} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 \\ &\quad - (k+1) \left[p_{k+1} + \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \frac{1}{k+1} \Lambda_k \right]^2 + \frac{k}{k+1} F_k. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \Lambda_k^2 \left[\left(1 + \frac{2c}{n} \right) \left(1 + \frac{2c}{n} \frac{1}{k+1} \right)^2 - \left(1 + \frac{2c}{n} \right)^2 \frac{1}{k+1} - \frac{k}{k+1} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \right] \\ &\quad + 2p_{k+1} \Lambda_k \left[\left(1 + \frac{2c}{n} \right) \left(1 + \frac{2c}{n} \frac{1}{k+1} \right) - \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \right] \\ &\quad - \left(k - \frac{2c}{n} \right) p_{k+1}^2 + \frac{k}{k+1} F_k \\ &= - \left(k - \frac{2c}{n} \right) p_{k+1}^2 + \frac{k}{k+1} F_k + 2p_{k+1} \Lambda_k \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \left(\frac{2c}{n} \frac{1}{k+1} \right) \\ &\quad + \Lambda_k^2 \left[\left(1 + \frac{2c}{n} \right) \left(1 + \frac{4c}{n(k+1)} + \frac{4c^2}{n^2(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} - \frac{2c}{n(k+1)} - \frac{k}{k+1} \right) \right] \end{aligned}$$

$$(2.50) \quad \begin{aligned} F_{k+1} &= - \left(k - \frac{2c}{n} \right) p_{k+1}^2 + \frac{k}{k+1} F_k + 2 \frac{2c}{n} \frac{(1 + \frac{2c}{n})}{k+1} p_{k+1} \Lambda_k \\ &\quad + \frac{2c}{n} \frac{(1 + \frac{2c}{n})}{k+1} \Lambda_k^2 + \frac{4c^2}{n^2} \frac{(1 + \frac{2c}{n})}{(k+1)^2} \Lambda_k^2. \end{aligned}$$

Por (2.46) temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\eta_{k+1} - \eta_i)^2 &= k \eta_{k+1}^2 - 2 \sum_{i=1}^k \eta_i \eta_{k+1} + \sum_{i=1}^k \eta_i^2 = k \eta_{k+1}^2 - 2 \sum_{i=1}^k \eta_i \eta_{k+1} + k T_k \\ &\leq \frac{4c}{n} \sum_{i=1}^k \eta_i \eta_{k+1} - \frac{4c}{n} k T_k. \end{aligned}$$

Ademais

$$\begin{aligned}
 k\eta_{k+1}^2 - \frac{(4c+2n)}{n} \sum_{i=1}^k \eta_i \eta_{k+1} &\leq -k \left(1 + \frac{4c}{n}\right) T_k \\
 \eta_{k+1}^2 - \frac{2}{k} \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \sum_{i=1}^k \eta_i \eta_{k+1} &\leq -\left(1 + \frac{4c}{n}\right) T_k \\
 \eta_{k+1}^2 - \frac{2}{k} \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \sum_{i=1}^k \eta_i \eta_{k+1} + \left(1 + \frac{2c}{n}\right)^2 \Lambda_k^2 &\leq \left(1 + \frac{2c}{n}\right)^2 \Lambda_k^2 - \left(1 + \frac{4c}{n}\right) T_k,
 \end{aligned}$$

portanto,

$$(2.51) \quad \left(\eta_{k+1} - \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \Lambda_k\right)^2 \leq \left(1 + \frac{2c}{n}\right)^2 \Lambda_k^2 - \left(1 + \frac{4c}{n}\right) T_k.$$

Substituindo (2.49) em (2.51) resulta

$$\left\{ (k+1) \left[p_{k+1} + \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \frac{1}{k+1} \Lambda_k \right] - \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \Lambda_k \right\}^2 \leq \left(1 + \frac{2c}{n}\right)^2 \Lambda_k^2 - \left(1 + \frac{4c}{n}\right) T_k$$

o que implica

$$(k+1)^2 p_{k+1}^2 \leq \left(1 + \frac{2c}{n}\right)^2 \Lambda_k^2 - \left(1 + \frac{4c}{n}\right) T_k.$$

Da inequação acima e de (2.48) inferimos

$$\begin{aligned}
 0 &\leq -(k+1)^2 p_{k+1}^2 + \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \Lambda_k^2 + \frac{2c}{n} \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \Lambda_k^2 + \left(1 + \frac{4c}{n}\right) F_k \\
 &\quad - \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \Lambda_k^2 - \frac{4c}{n} \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \Lambda_k^2
 \end{aligned}$$

então

$$(2.52) \quad 0 \leq -(k+1)^2 p_{k+1}^2 - \frac{2c}{n} \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \Lambda_k^2 + \left(1 + \frac{4c}{n}\right) F_k.$$

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

Multiplicando (2.52) por $\left[\frac{1}{k+1} + \frac{2c}{n} \left(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(k+1)^2(2k+1)} \right) \right]$ e adicionando a (2.50), temos

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &\leq \left[1 + \frac{4c}{n} \frac{1}{k+1} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^2} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(k+1)^2(2k+1)} \left(1 + \frac{4c}{n} \right) \right] F_k \\
 &\quad - (2k+1)p_{k+1}^2 + 2 \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{k+1} p_{k+1} \Lambda_k - \frac{4c^2}{n^2} \frac{(1+\frac{2c}{n})^2}{(k+1)^2(2k+1)} \Lambda_k^2 \\
 &\quad - \left(\frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(2k+1)} \right) p_{k+1}^2 \\
 &\leq \left[1 + \frac{4c}{n} \frac{1}{k+1} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^2} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(k+1)^2(2k+1)} \left(1 + \frac{4c}{n} \right) \right] F_k \\
 &\quad - (2k+1) \left(p_{k+1} - \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(k+1)(2k+1)} \Lambda_k \right)^2,
 \end{aligned}$$

donde

$$(2.53) \quad F_{k+1} \leq \left[1 + \frac{4c}{n} \frac{1}{k+1} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^2} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(k+1)^2(2k+1)} \left(1 + \frac{4c}{n} \right) \right] F_k.$$

Como

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} &= \left(1 - \frac{1}{k+1} \right)^{\frac{-4c}{n}} \\
 &\geq 1 + \frac{4c}{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{4c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^2} + \frac{1}{3} \frac{4c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^3} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{4c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^4} \left(1 + \frac{2c}{n} \right),
 \end{aligned}$$

temos

$$\left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} - \frac{c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^4} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) - \frac{1}{3} \frac{4c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^3} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \geq 1 + \frac{4c}{n} \frac{1}{k+1} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^2},$$

adicionando $\frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^2(2k+1)}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 (2.54) \quad &\left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} - \frac{c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^4} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) - \frac{2c(k-1)}{3n(k+1)^3(2k+1)} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(k+1)} \left(1 + \frac{4c}{n} \right) \\
 &\geq 1 + \frac{4c}{n} \frac{1}{k+1} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{4c}{n})}{(k+1)^2} + \frac{2c}{n} \frac{(1+\frac{2c}{n})}{(k+1)^2(2k+1)} \left(1 + \frac{4c}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Substituindo (2.54) em (2.53)

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &\leq \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} - \frac{c}{n} \frac{\left(1 + \frac{4c}{n}\right) \left(1 + \frac{2c}{n}\right)}{(k+1)^4} - \frac{2c(k-1) \left(1 + \frac{2c}{n}\right) \left(1 + \frac{4c}{n}\right)}{3n(k+1)^3(2k+1)} \right] F_k \\
 &= \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} - \left(\frac{c}{k+1} + \frac{2c(k-1)}{3(2k+1)} \right) \frac{\left(1 + \frac{2c}{n}\right) \left(1 + \frac{4c}{n}\right)}{n(k+1)^3} \right] F_k \\
 &= \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} - \left(\frac{3c(2k+1) + 2c(k^2-1)}{3(2k+1)(k+1)} \right) \frac{\left(1 + \frac{2c}{n}\right) \left(1 + \frac{4c}{n}\right)}{n(k+1)^3} \right] F_k \\
 &= \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} - \left(\frac{c(2k^2+6k+1)}{3(2k^2+3k+1)} \right) \frac{\left(1 + \frac{2c}{n}\right) \left(1 + \frac{4c}{n}\right)}{n(k+1)^3} \right] F_k \\
 &\leq \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} - \frac{c}{3} \frac{\left(1 + \frac{2c}{n}\right) \left(1 + \frac{4c}{n}\right)}{n(k+1)^3} \right] F_k.
 \end{aligned}$$

Consequentemente

$$(2.55) \quad F_{k+1} \leq C(n, k, c) \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{4c}{n}} F_k$$

em que

$$C(n, k, c) = \left[1 - \frac{c}{3} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\frac{4c}{n}} \frac{\left(1 + \frac{2c}{n}\right) \left(1 + \frac{4c}{n}\right)}{n(k+1)^3} \right] < 1.$$

Além disso, observamos de (2.52) que F_k é positivo, assim de (2.55), $C(n, k, c)$ também é positivo. $\square$

Corolário 2.1 *Nas hipóteses do Lema 2.4 temos*

$$\eta_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right) k^{\frac{2c}{n}} \eta_1.$$

Demonstração: Pela fórmula (2.47) do Lema 2.4 temos

$$\begin{aligned}
 F_k &\leq C(n, k-1, c) \left(\frac{k}{k-1} \right)^{\frac{4c}{n}} F_{k-1} \leq \left(\frac{1}{k-1} \right)^{\frac{4c}{n}} k^{\frac{4c}{n}} F_{k-1} \\
 &\leq \left(\frac{1}{k-2} \right)^{\frac{4c}{n}} k^{\frac{4c}{n}} F_{k-2} \\
 &\vdots \\
 &\leq k^{\frac{4c}{n}} F_1.
 \end{aligned}$$

Mas $F_1 = \frac{2c}{n} \eta_1^2$, então

$$(2.56) \quad F_k \leq k^{\frac{4c}{n}} \frac{2c}{n} \eta_1^2, \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

2.4 Aplicações ao operador η -laplaciano

De (2.51) e (2.48) deduzimos que

$$\begin{aligned}
 \left[\eta_{k+1} - \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k \right]^2 &\leq \left(1 + \frac{2c}{n} \right)^2 \Lambda_k^2 - \left(1 + \frac{4c}{n} \right) T_k \\
 &= \left(1 + \frac{2c}{n} \right)^2 \Lambda_k^2 + \left(1 + \frac{4c}{n} \right) F_k - \left(1 + \frac{4c}{n} \right) \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 \\
 &\leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right) F_k - \frac{2c}{n} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\eta_{k+1}^2 - 2 \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \eta_{k+1} \Lambda_k + \left(1 + \frac{2c}{n} \right)^2 \Lambda_k^2 + \frac{2c}{n} \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 \leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right) F_k,$$

ou equivalentemente

$$\eta_{k+1}^2 - 2 \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \eta_{k+1} \Lambda_k + \left(1 + \frac{4c}{n} \right) \left(1 + \frac{2c}{n} \right) \Lambda_k^2 \leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right) F_k$$

ou ainda

$$\frac{\frac{2c}{n}}{1 + \frac{4c}{n}} \eta_{k+1}^2 + \frac{1 + \frac{2c}{n}}{1 + \frac{4c}{n}} \left[\eta_{k+1} - \left(1 + \frac{4c}{n} \right) \Lambda_k \right]^2 \leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right) F_k.$$

Assim, da última equação e de (2.56) temos

$$\eta_{k+1}^2 \leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right)^2 \frac{n}{2c} F_k \leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right)^2 k^{\frac{4c}{n}} \eta_1^2,$$

Finalmente,

$$\eta_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4c}{n} \right) k^{\frac{2c}{n}} \eta_1.$$

□

Observemos que os dois resultados acima para o caso $c = 1$ são os obtidos por Cheng-Yang [17].

Bibliografia

- [1] G. Albanese, L. J. Alías, M. Rigoli, A general form of the weak maximum principle and some applications, *Rev. Mat. Iberoam.* 4 29 (2013) 1437-1476.
- [2] H. Alencar, G.S. Neto, D. Zhou, Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators on compact manifolds, *arXiv:1304.5268 [math.DG]* (2013).
- [3] L.J. Alías, J.H.S. de Lira, M. Rigoli, Geometric elliptic functionals and mean curvature, to appear in *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5).
- [4] L.J. Alías, M. Dajczer, M. Rigoli, Higher order mean curvature estimates for bounded complete hypersurface, *Nonlinear Anal.* 84 (2013) 73-83.
- [5] L.J. Alías, M. Dajczer, Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces, *Proc. Edinb. Math. Soc.* 2 50 (2007) 511-526.
- [6] L.J. Alías, M. Dajczer, Normal geodesic graphs of constant mean curvature, *J. Differential Geom.* 75 3 (2007) 387-401.
- [7] L.J. Alías, D. Impera, M. Rigoli, Hypersurface of constant higher order mean curvature in warped products, *Trans. Amer. Math. Soc.* 2 365 (2013) 591-621.
- [8] J.L.M. Barbosa, A.G. Colares, Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature, *Ann. Global Anal. Geom.* 15 (1997) 277-297.
- [9] A. Barros, J.N. Gomes, A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature, *J. Math. Anal. Appl.* 401 (2013) 702-705.
- [10] A. Barros, J.N. Gomes, E. Ribeiro, A note on rigidity of the almost Ricci soliton, *Arch. Math. (Basel)* 100 (2013) 481-490.

- [11] M. Berger, Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes, *Compos. Math.* 26 (1973) 129-149.
- [12] B. Bianchini, L. Mari, M. Rigoli, Semilinear and quasilinear Yamabe type equations with sign-changing nonlinearities on non-compact manifolds, preprint.
- [13] H.D. Cao, Recent progress on Ricci soliton, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 11 (2009) 1-38.
- [14] G. Catino, P. Mastrolia, D. Monticelli, M. Rigoli, Analytic and geometric properties of generic Ricci solitons, preprint.
- [15] D. Chen, Q.-M. Cheng, Extrinsic estimates for eigenvalues of the Laplacian operator, *J. Math. Soc. Japan* 60 (2008) 325-339.
- [16] X. Cheng, H. Rosenberg, Embedded positive constant r -mean curvature hypersurfaces in $M^m \times \mathbb{R}$, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* 77 (2005) 183-199.
- [17] Q. M. Cheng, H. C. Yang, Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian, *Math. Ann.* 337 (2007) 159-175.
- [18] Q. M. Cheng, H.C. Yang, Estimates on eigenvalues of Laplacian, *Math. Ann.* 331 (2005) 445-460.
- [19] Q. M. Cheng, H.C. Yang, Estimates for eigenvalues on Riemannian Manifolds, *J. of Differential Equations* 247 (2009) 2270-2281.
- [20] Q. M. Cheng, H.C. Yang, Inequalities for eigenvalues of Laplacian on domains and compact complex hypersurface in complex projective spaces, *J. Math. Soc. Japan* 58 (2006) 545-561.
- [21] S.Y. Cheng, S.T. Yau, Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Math. Ann.* 225 (1977) 195-204.
- [22] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II, An excursion into geometric analysis, *Surveys in differential geometry*, *Surv. Differ. Geom.*, IX, Int. Press Somerville MA (2004) 83-146.

- [23] E. B. Davies, Spectral theory and differential operators, Cambridge University Press (1995).
- [24] M. Dajczer, P.A. Hinojosa and J.H.S. de Lira, Killing graphs with prescribed mean curvature, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 33 (2008) no.2 231-248.
- [25] S.C. García-Martínez, D. Impera, M. Rigoli, A sharp height estimate for compact hypersurfaces with constant k -mean curvature in warped product spaces, to appear in *Proc. Edinb. Math. Soc.*
- [26] L. Gårding, An inequality for hyperbolic polynomials, *J. Math. Mech.* 8 (1959) 957-965.
- [27] J.N. Gomes, Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Munidas de um campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2012).
- [28] A. Grigor'yan, Heat kernels on weighted manifolds and applications, *Contemp. Math.* 398 (2006) 93-191.
- [29] A. Grigor'yan, On stochastically complete manifolds, (in Russian) *DAN SSSR*, 290 (1986), 534-537. Engl. transl. *Soviet Math. Dokl.* 34 (1987) 310-313.
- [30] A. Grigor'yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 36 (1999) 135-249.
- [31] G. N. Hile, M. H. Protter, Inequalities for eigenvalues of the Laplacian, *Indiana Univ. Math. J.* 29 (1980) 523-538.
- [32] D. Hoffman, J.H.S. de Lira and H. Rosenberg, Constant mean curvature surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006) 491-507.
- [33] R.Z. Khas'minskii, Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solution of the Cauchy problem for parabolic equations, *Teor. Veroyatn. Primen.* 5 (1960) 196-214.

- [34] L. Mari, D. Valtorta, On the equivalence of stochastic completeness and Liouville and Khas'minskii conditions in linear and nonlinear settings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 365 (2013), no. 9, 4699-4727.
- [35] R.R. Mesquita, Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η -laplaciano e aplicações. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2014).
- [36] S. Montiel, A. Ros, Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. *Differential geometry*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., 52, Longman Sci. Tech. Harlow (1991) 279-296.
- [37] M. Li, B-sub-manifolds and their stability, *Math. Nachr.* 279 (2006) 1597-1601.
- [38] M. Li; Z. Anqiang, Eigenvalues and lambda constants on Riemannian submersions, *Geom. Dedicata* 129 (2007) 73-82.
- [39] P. Li, S.T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, *Comm. Math. Phys.* 88 (1983) 309-318.
- [40] J. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Math. Ann.* 63 (1956) 20-63.
- [41] H. Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (2) (1967) 205-214.
- [42] L. E. Payne, G. Pólya, H. F. Weinberger, Sur le quotient de deux fréquences propres consécutives, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 241 (1955) 917-919.
- [43] L. E. Payne, G. Pólya, H. F. Weinberger, On the ratio of consecutive eigenvalues, *J. Math. Phys.*, 35 (1956) 289-298.
- [44] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, *arXiv math/0211159 [math.DG]* (2002).
- [45] S. Pigola, M. Rigoli, M. Rimold, A. Setti, Ricci almost solitons, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, v. 10, 4 (2011) 757-799.

- [46] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti, A remark on the maximum principle and stochastic completeness, *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (2003) 1283-1288.
- [47] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti, Maximum principles on Riemannian manifolds and applications, *Mem. Amer. Math. Soc.* 822 174 (2005).
- [48] A. Soulf, S. Ilias, Domain deformations and eigenvalues of the Dirichlet laplacian in a Riemannian manifold, *Illinois J. Math.* 51 (2007) 645-666.
- [49] K. Uhlenbeck, Generic Properties of Eigenfunctions, *Amer. J. Math.* 98 (1976) 1059-1078.
- [50] H. Weyl, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, *Nachrichten der Königlich-Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse* (1911) 110-117.
- [51] C. Xia, H. Xu, Inequalities for eigenvalues of the drifting Laplacian on Riemannian manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* (2013).
- [52] H. C. Yang, An estimate of the difference between consecutive eigenvalues, preprint IC/91/60 of ICTP, Trieste (1991).
- [53] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975), 201-228.