UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

A interpolação de Lagrange: uma proposta ao Ensino Médio para a Modelagem Matemática de Polinômios

Clicio Freire da Silva

MANAUS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Clicio Freire da Silva

A interpolação de Lagrange: uma proposta ao Ensino Médio para a Modelagem Matemática de Polinômios

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

MANAUS
2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Clicio

R696m A interpolação de Lagrange: uma proposta ao Ensino Médio para a Modelagem Matemática de Polinômios/ Clicio Silva. 2016

46 f: il.: 10cm.

Orientador: Roberto Antônio Cordeiro Prata

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal do Amazonas.

1. Introdução. 2. Conceitos e Teoremas. 3. Interpolação de Lagrange. 4. Abordagem de Polinômios. I. : Roberto Antônio Cordeiro. II. Universidade Federal do Amazonas. III. Título.

CLICIO FREIRE DA SILVA

A INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE: UMA PROPOSTA AO ENSINO MÉDIO PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA DE POLINÔMIOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 31 de maio de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata
Presidente

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Membro

Profª Jeanne Moreira de Souza
Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado disposição, perseverança, força, saúde física e mental e por ter me concedido a oportunidade de evoluir no conhecimento e na aplicação da matemática de uma forma mais dinâmica e atrativa ao ensino da matemática.

Agradeço a meus pais João Nunes da Silva e Delcy Freire da Silva por me apoiarem sempre, por mais que, não entendam direito o que isso significa pra mim, mas que ficam felizes com a minha felicidade.

Agradeço ao meus sogros José Bispo dos Santos e Maria Lúcia Carmo Santos que sempre estiveram do meu lado me incentivando e ficando orgulhosos com minhas conquistas.

Agradeço aos professores do PROFMAT pólo Manaus, muito especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata.

Agradeço aos colegas da turma, que constituíram um grupo muito unido e humilde com a finalidade de ajudar um ao outro a alcançar essa conquista.

Agradeço, finalmente a minha esposa Luciane Soraia Carmo dos Santos Freire e minha filha querida Rebecca dos Santos Freire, que me apoiaram e ajudaram desde a etapa de estudo para Exame de Acesso ao PROFMAT e que mostraram que eu podia mais quando pensei que já não fosse mais conseguir. Sem elas não sei se teria alcançado mais essa conquista.

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade apresentar a Modelagem Matemática como uma importante alternativa no resgate de um ensino significativo de Matemática no Ensino Médio. Para tal, apresentamos a Interpolação de Lagrange resolvido através de estratégias de complementação de algumas situações-problemas modelada no que diz respeito à análise de tendências e previsão de resultados de um experimento. Assim, sugerimos uma proposta de aula para alunos do Ensino Médio na qual realizaram-se atividades de modo que os estudantes conheceram a Interpolação de Lagrange, aprendendo a utilizá-la e aplicá-las desde situações simples até problemas interdisciplinares envolvendo, por exemplo, Biologia, Física e Geografia. Os principais objetivos dessa aula, o material e o tempo necessários, bem como os pré-requisitos para o sucesso da mesma também são detalhados nesse trabalho.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Interpolação de Lagrange, Polinômios e Equações Algébricas, Aproximação, Erro .

ABSTRACT

This study aims to present the mathematical modeling as an important alternative in the recovery of a significant teaching mathematics in high school . We presented Lagrange Interpolation to complement strategy of a problem situation modeled with regard to trend analysis and forecasting of results of an experiment . Thus, we suggest a proposed class for high school students in which are carried out activities so that students know Interpolation of Lagrange , learn to use it and apply it from simple situations to interdisciplinary problems involving, for example , biology, physics and Geography . The main objectives of this class , the material and the time needed and the prerequisites for its success are also detailed in this work .

Keywords: mathematical modeling , Lagrange interpolation , polynomials and equations Algebraic , Approach , Mistake.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números reais.
$\Rightarrow$	Implica em.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	Somatório variando de 1 a n.
$\prod\limits_{i=1}^{n}$	Produto variando de 1 a n.
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A ideia para a escolha do tema originou-se do fato de ser um conteúdo do 3^o Ano do Ensino Médio, série em que atuei nos 15 dos meus 20 anos de atividade em sala de aula na qual pretendi deixar minha contribuição junto a este público tão ávido em aprender e aberto a participar de experiências que lhe são propostas. Trata-se de uma forma de se apresentar um polinômio que contenha uma determinada quantidade de pontos através da Interpolação de Lagrange.

Uma vez que tal tema é abordado nos 7^o e 3^o Anos dos Ensinos Fundamental e Médio como um conjunto de fórmulas prontas que devem ser memorizadas e aplicadas exaustivamente na resolução de exercícios, apresentamos, em contrapartida, uma aplicação diferenciada para o ensino-aprendizagem de forma a fazer com que as "fórmulas" passem a ter sentido e sejam verificadas através de demonstrações pictóricas, estendendo o estudo não apenas para uma quantidade finita de pontos mas para qualquer que seja a situação do cotidiano que envolva a aproximação de curvas, contribuindo para o enriquecimento intelectual e aproximam os alunos para uma parte prática da Matemática que fundamentalmente se desenvolveu como um instrumento a serviço do homem em suas necessidades do cotidiano.

Afim de alcançar os objetivos estabelecidos para promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática propostos pelos PCNs, citado em GUIDE[2] que privilegiam o tratamento de situações problema, propomos a prática de uma atividade interdisciplinar envolvendo dados retirados na própria sala de aula com o uso do número de sapato, altura e IMC (Índice de Massa Corpórea). O uso do EXCEL e GeoGebra como ferramentas para tal, proporcionaram a compreensão dos conceitos a partir de algo que lhes dê sentido, conforme ressalta AZEVEDO[1].

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é propor uma Atividade Didática que consolide o conceito de Polinômios, através de uma aplicação prática, utilizando as ferramentas necessárias a fim de ilustrar a aplicabilidade, ante a contextualização, da Metodologia Modelagem Matemática.

1.2 Organização

Além deste capítulo introdutório, este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, nas considerações iniciais, descrevemos um breve histórico sobre a Álgebra de Polinômios. No Capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e teoremas da Álgebra de Polinômios. No Capítulo 4, apresentamos a Interpolação de Lagrange, bem como sua demonstração e algumas aplicações. No Capítulo 5, fazemos a exposição das atividades realizadas com os alunos do 3º Ano voluntários do Clube de Matemática do Colégio Militar de Manaus aplicando a Interpolação de Lagrange na resolução de problemas. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos nossas considerações finais sobre a prática do processo de ensino e aprendizagem do estudo de polinômios no Ensino Médio.

Capítulo 2

Considerações Iniciais

A relação da Matemática escolar com a Matemática da vida cotidiana do aluno tem um papel importante no processo de ensino-aprendizagem. Assuntos abordados em sala de aula, na maioria das vezes, são distantes da realidade dos alunos, deixando de lado o que na verdade poderia motivá-los. SANTOS[11] aponta que: "Ensinamos demais e os alunos aprendem de menos e cada vez menos". Aprendem menos porque os assuntos são a cada dia mais desinteressantes, mais desligados da realidade dos fatos e os objetivos mais distantes da realidade da vida dos adolescentes".

Situações contextualizadas que despertem o interesse do aluno, ou de um grupo de alunos, carecem de um estudo mais aprofundado, com algumas variáveis a considerar. Em geral, não é algo global nem atemporal. Talvez, por esse motivo, os livros didáticos não estão sendo eficientes. Evidentemente, nem sempre é possível e/ou conveniente, no ensino da matemática, trabalhar de forma contextualiza explorando o cotidiano do aluno.

Polinômio é um conceito matemático importante, presente em situações distintas do dia-a-dia e de caráter integrador, assim sendo, de fácil contextualização. Os Referenciais Curriculares para o Ensino Médio no Brasil, de acordo com MONFORT[7] apontam a importância da exploração do papel do conceito de Polinômio dentro e fora da Matemática para o estudo, o entendimento e a explicação de fenômenos da realidade vivida pelo aluno em seu cotidiano.

Com base nisto, dentre as várias tendências de ensino de matemática disponíveis na literatura, encontramos uma metodologia que nos despertou interesse por se propor a relacionar e dar significado ao conhecimento baseado na experiência vivida pelo aluno no seu cotidiano com o conhecimento matemático sistematizado na escola, partindo de um tema de seu interesse, a Metodologia da Modelagem Matemática. Acreditamos ser essa metodologia capaz de responder a pergunta que tanto atrapalha o processo de ensino e de aprendizagem da matemática: Porque tenho que aprender isso?

Portanto, no intuito de tornar o ensino de Polinômio mais significativo e as aulas mais atrativas aos alunos; proporcionando condições mais eficazes de aprendizagem e de aplicação dos conteúdos aprendidos em situações de interesse do aluno; sugerimos a Metodologia da Modelagem Matemática como alternativa de ensino. Para tanto desenvolvemos uma Atividade Didática a fim de ilustrar a aplicabilidade, ante a contextualização, dessa metodologia. Utilizamos como suporte teórico a concepção de REIS[10] sobre Modelagem Matemática e, sobre Polinômio, utilizamos a abordagem apresentada por GUIDE[2] no trato com a formação do conceito e as contribuições de LIMA[5] Neste trabalho propomos o uso da Modelagem Matemática no estudo de Polinômios através da Interpolação de Lagrange, analisando os resultados apresentados no EXCEL e GeoGebra, numa sequência ordenada de questões que levem o aluno a formar e consolidar conceito de Polinômio. As etapas são apresentadas de forma detalhada para esclarecer ao leitor as possibilidades de trabalho na concepção apresentada.

2.1 Um breve histórico sobre a Álgebra de Polinômios

Durante muitíssimo tempo, a palavra Álgebra designava aquela parte da matemática que se ocupava de estudar as operações entre números e, principalmente, da resolução de equações. Nesse sentido, pode-se dizer que esta ciência é tão antiga quanto a própria história da humanidade, se levamos em conta que esta última se inicia a partir da descoberta da escrita.

De fato, tanto nas tabuletas de argila da suméria quanto nos papiros egípcios, encontramos problemas matemáticos que lidam com a resolução de equações. No Papiro Rhind, por exemplo, documento egípcio que data aproximadamente do ano 1650 a.C. e no qual o escriba conta que está copiando material que provém do ano 2000 a.C., encontramos problemas sobre distribuição de mercadorias que conduzem a equações relativamente simples. Surpreendentemente, descobrimos também que os antigos babilônios sabiam resolver completamente equações de segundo grau.

Desde os seus começos, a Álgebra se preocupou sempre com a procura de métodos gerais e rigorosos. Assim por exemplo, R.J. Gillings, de acordo com MORGADO[8] comentando os métodos que os egípcios usavam para lidar com a resolução de equações diz:

> Os estudiosos da história e filosofia da ciência do século vinte, ao considerar as contribuições dos antigos Egípcios, se inclinam para atitude moderna de que um argumento ou prova lógica deve ser simbólico para ser considerado rigoroso, e que um ou dois exemplos específicos usando números escolhidos não podem ser considerados cientificamente sólidos. Mas isto não é verdade. Um argumento ou demonstração não simbólico pode ser realmente rigoroso quando dado para um valor particular da variável; as condições para o rigor são que o valor particular da variável seja típico e que uma consequênte generalização para qualquer valor seja imediata. Em qualquer dos tópicos mencionados neste livro, onde o tratamento dado pelos escribas seguia estas linhas, ambos os requisitos eram satisfeitos de modo que os argumentos colocados pelos escribas são já rigorosos... o rigor está implícito no método.

Quando finalmente se desenvolveu uma notação apropriada (empregando letras para representar coeficientes e variáveis de uma equação), foi possível determinar "fórmulas gerais"de resolução de equações e discutir métodos de trabalho também "gerais". Porém, mesmo nestes casos, tratava-se de situações relativamente concretas. As letras representavam sempre algum tipo de números (inteiros, racionais, reais ou complexos) e utilizavam-se as propriedades destes de forma mais ou menos intuitiva. Como veremos adiante, a formalização destes conceitos de modo preciso só aconteceria a partir do século XIX.

Foi precisamente nesse século que alargou-se consideravelmente o conceito de operação. Alguns autores da época não mais se restringem a estudar as operações clássicas entre números, mas dão ao termo um significado bem mais amplo e estudam operações entre elementos, sem se preocupar com a natureza destes, interessando-se apenas com as propriedades que estas operações verificam.

A passagem da Álgebra clássica para a assim chamada Álgebra abstrata foi um processo sumamente interessante. Representa não somente um progresso quanto aos conteúdos técnico-científicos da disciplina como amplia consideravelmente o seu campo de aplicação e, o que é mais importante, implica num certo sentido uma mudança na própria concepção do que a matemática é, da compreensão de sua condição de ciência independente e da evolução dos métodos de trabalho.

De acordo com MACHADO[6] "... em matemática, os grandes progressos estiveram sempre ligados a progressos na capacidade de elevar-se um pouco mais no campo da abstração" e, na mesma obra, A. Lichnerowicz observou que é uma característica da matemática repensar integralmente seus próprios conteúdos e nisso reside, inclusive, uma condição essencial para seu progresso". A história da Álgebra Abstrata ilustra perfeitamente estes pontos de vista. Pode-se dizer que há dois fatores que contribuíram fundamentalmente para o desenvolvimento da Álgebra: de um lado, a tendência a aperfeiçoar as notações, de modo a permitir tornar o trabalho com as operações (e equações) cada vez mais simples, rápido e o mais geral possível e, por outro lado, a necessidade de introduzir novos conjuntos de números, com o consequente esforço para compreender sua natureza e sua adequada formalização.

A história das equações polinomiais é muito antiga, tem-se conhecimento que na Babilônia, cerca de 1800 a.C., alguns métodos de resolução de equações do 2^o grau já eram conhecidas. Assim, o problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica, isto é, de um polinômio, é alvo de estudo de muitas pessoas há muito tempo.

Equações Lineares:

São correspondentes as equações do primeiro grau, ou seja, da forma

$$ax + b = 0. \tag{2.1}$$

Segundo registro de historiadores, o primeiro povo a lidar com essas equações foram os Egípcios. No Papiro de Ahmes, também conhecido como o Papiro de Rhind, adquirido pelo escocês Henry Rhind, em 1868, numa cidade as margens do Rio Nilo. Nesse Papiro consta que os Egípcios não se referiam a problemas com objetos concretos, mas já tratavam de incógnitas em seus problemas. Um exemplo disso é o problema 24 do Papiro de Ahmes, que pede o valor de "alia" se "oho" e um sétimo de "aha" é 19. Escrevendo isso na forma moderna, temos:

$$x + \frac{1}{7x} = 19. \tag{2.2}$$

Equações Quadráticas:

São as equações de grau 2, escritas na forma geral

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.3}$$

Aritmeticamente, essas equações foram resolvidas pelos Egípcios. Euclides e seus seguidores as resolveram geometricamente e algebricamente solucionadas pelos Hindus. O escritor árabe Al-Khowarisme (825), deu regras aritméticas as quais demonstra por meios geométricos essas equações. Foi através desse escritor que os árabes introduziram o nome Álgebra.

Os Indianos trataram as quadráticas algebricamente. Shidara (1025) parece ter sido o primeiro a estabelecer o "método hindu" citado por Bhaskara (1150) na seguinte forma:

"Multiplique ambos os lados da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente do] quadrado e adicione a eles um número igual ao quadrado da original [coeficiente da] quantidade incógnita. [Extraia a raiz]."

Utilizando a simbologia moderna, temos que:

Dado $ax^2 + bx + c = 0$, temos inicialmente $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ e então

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2, \tag{2.4}$$

portanto 2ax + b = $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Neste caso, a raiz negativa era deixada de lado.

Ornar Khayyam (1100) tem uma regra para a equação do tipo $x^2 + px = q$. Mais tarde, em 1500, Viéte realizou progressos nos métodos algébricos, isto é, reduzia uma quadrática geral a uma quadrática pura usando uma sutil substituição. Assim:

$x^2 + 2ax = b$, fazendo x = u + z e após z - a, a equação se transforma em u = $\sqrt{a^2 + b}$, portanto x = -a + $\sqrt{a^2 + b}$.

Harriot (1631) mostra soluções por fatorização, e entre os métodos mais aplicados atualmente, citamos aqueles em que o discriminante é utilizado, o qual foi introduzido por Euler (1750) e Bezout (1775) e mais tarde aprimorado por Sylvestre (1840) e Hesse (1844).

Equações Cúbicas:

São as equações de grau 3, isto é, da forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2.5}$$

As cúbicas apresentam uma história muito fascinante, pois são equações que apresentavam um certo grau de dificuldade naquela época.

Temos noticia de que Arquimedes (225 a.C.) manipulou uma cubica vinda de um problema geométrico. Ornar Khayyam, poeta e algebrista, classificou treze casos de cubicas que ele resolveu. Uma característica que marcou esse período, foram os debates realizados entre grandes matemáticos.

Fibonacci (1225) foi desafiado em debate a resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Apesar de conhecermos vários métodos para resolver uma equação do 3° grau, a história não responde a pergunta:

Quem propôs a solução da equação do terceiro grau?

No começo do século XVI , o matemático Bolognês, Scipione Del Ferro, resolveu cúbicas da forma $x^3 + ax = b$. Ferro revela o segredo desse método de resolução a um estudante, chamado Antônio Maria Flor.

Flor, vinte anos mais tarde, realiza um debate com outro italiano de nome Tartaglia. Cada um deles enviou 30 problemas ao outro e aquele que resolvesse o maior número de problemas em 50 dias vencia o duelo. Tartaglia direcionou seus esforços as cúbicas em que não continha o termo do primeiro grau.

Resolvendo esse caso, quando faltava menos de duas semanas para o debate, Tartaglia descobre a solução da cúbica em que o termo do segundo grau não existia, assim, sabendo desses dois métodos, Tartaglia solucionou todos os problemas em menos de duas horas, derrotando seu oponente.

Cardano pediu o esquema a Tartaglia, como conta o historiador Bell, em seu livro. Tartaglia, após muita insistência, fornece o esquema a Cardano sob promessa de manter segredo.

Embora exista muita dúvida quanto a autoria dessa fórmula, Cardano sem dúvida contribuiu significativamente ao desenvolvimento da teoria das equações algébricas.

2.2 Ensino de Polinômios e Equações Algébricas no Ensino Médio

De acordo com os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), o ensino de matemática é sistematizado basicamente em três eixos: álgebra (números e funções), geometria e medidas e análise de dados. Como o objeto de estudo no nosso caso é o ensino de polinômios, faremos uma breve análise do que o PCN da matemática diz a respeito do eixo álgebra, principalmente no que diz respeito ao estudo de polinômos.

> O estudo dos polinômios permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo dos diferentes polinômios deve estar no conceito de função polinomial e em suas propriedades em relação às operações na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.
>
> ...
>
> Com relação à álgebra, há ainda o estudo das equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3x3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimentos. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola (PCNs, Ensino Médio, pag. 119).

Observa-se que, segundo os parâmetros curriculares nacionais, polinômios, equações polinomiais e função polinomial devem constar na parte flexível do currículo, apesar da sua importância no desenvolvimento de boa parte das ciências. Podemos citar aqui principalmente, os Bacharelados em Engenharias e as Licenciaturas de Matemática e de Física.

Chama-nos muito a atenção esta última parte (esse conteúdo deve constar na parte flexível do currículo) que sugere que, para os autores dos PCNs, não é fundamental que se estude de forma aprofundada esse conteúdo. Salvo escolas técnicas, que focam seus ementários em determinadas áreas, a maioria das escolas brasileiras trabalha, ou pelo menos deveria trabalhar, na preparação de um aluno com condições mínimas de acompanhar um Ensino Superior, qualquer que seja a área. Diante disso, observamos no Ensino Superior alunos com baixíssimo rendimento e altas taxas de reprovação nas disciplinas de cálculo integral e diferencial, matérias obrigatórias nos cursos citados no parágrafo anterior. MONFORT[7] faz uma análise das reprovações nas disciplinas de cálculo integral e diferencial nos cursos das Universidades Federais no período de 2009 a 2012 e verifica que o índice de reprovação é expressivo e preocupante, com o agravante dos dados apontarem um crescimento nas reprovações.

Dessa forma vamos apresentar alguns conceitos e teoremas importantes que servirão para a boa desenvoltura das aplicações que serão feitas com a Interpolação de Lagrange, com o objetivo de enriquecer o ensino de polinômios de uma forma que o aluno observe a utilização deste conteúdo em seu cotidiano.

Capítulo 3

Alguns Conceitos e Teoremas da Álgebra de Polinômios

Para este tópico o nosso estudo será feito no corpo dos números complexos.

3.1 Função polinomial ou polinômio

Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, .., a_n)$ e consideremos a função $f : C \to C$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função f é denominada função polinomial ou polinômio associado à sequência dada.

Os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ são chamadas termos do polinômio f.

3.2 Polinômio nulo

Dizemos que um polinômio f é nulo (ou identicamente nulo) quando f assume o valor numérico zero para todo x complexo. Em símbolos indicamos:

$$f = 0 \iff f(x) = 0, \forall x \in C \tag{3.1}$$

Dessa forma, para um polinômio $P(x)$ ser um polinômio nulo é necessário e suficiente que todos os seus coeficientes sejam nulos.

3.3 Polinômios idênticos

Dizemos que dois polinômios f e g são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo x complexo. Em símbolos, indicamos:

$$f = g \Longleftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in C \tag{3.2}$$

3.4 Soma de polinômios

Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \tag{3.3}$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \tag{3.4}$$

chama-se soma de f com g o polinômio

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$$

isto é:

$$(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i \tag{3.5}$$

3.5 Diferença de polinômios

Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \tag{3.6}$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \tag{3.7}$$

chama-se diferença de f com g o polinômio

$$(f - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + ... + (a_n - b_n)x^n$$

isto é:

$$(f - g)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i \tag{3.8}$$

3.6 Produto de polinômios

Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i \tag{3.9}$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \tag{3.10}$$

chama-se produto $f.g$ o polinômio

$$(fg)(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + ... + (a_mb_n)x^{m+n}.$$

Notemos que o produto $f.g$ é o polinômio

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{m+n}x^{m+n} \tag{3.11}$$

cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i} \tag{3.12}$$

3.7 Grau de um polinômio

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se grau de f, e representa-se por $gr(f)$ o número natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo i > p.

Assim, grau de um polinômio f é o índice do "último"termo não nulo de f.

Se o grau do polinômio f é n, então a_n é chamado coeficiente dominante de f. No caso do coeficiente dominante a_n ser igual a 1, f é chamado polinômio unitário.

Teorema 1. Se f, g e $f + g$ são polinômios não nulos, então o grau de $f + g$ é menor ou igual ao maior dos números $gr(f)$ e $gr(g)$.

$$gr(f + g) \leqslant max\{gr(f), gr(g)\} \tag{3.13}$$

Demonstração: Se $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i$, $g(x)$= $\sum\limits_{j=0}^{n} b_jx^j$, $gr(f) = m$ e $gr(g) = n$, com $m \neq n$, admitamos por exemplo m > n. Assim, sendo $c_i = a_i + b_i$, temos:
$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0$, e
$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall\, i > m,$

portanto $gr(f + g) = m =$ máx $\{gr(f), gr(g)\}$. Se admitirmos $m = n$, temos:
$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall\, i > m$, e
$c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo, então: $gr(f + g) \leqslant$ máx $\{gr(f)$,$gr(g)\}$

Teorema 2. Se f e g são dois polinômios não nulos, então o grau de $f.g$ é igual a soma dos graus de f e g.

$$gr(fg) = gr(f).gr(g) \tag{3.14}$$

Demonstração: Se $f(x)$ = $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x)$= $\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, $gr(f) = m$ e $gr(g) = n$, com $m \neq n$,seja $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$, um coeficiente qualquer de $(fg)(x)$.

Temos:
$c_{m+n} = a_m.b_n \neq 0$
$c_k = 0, \forall\ k > m+n$, então $gr(fg) = m+n = gr(f) = gr(g)$.

3.8 Divisão de Polinômios

Teorema 3. Dados os polinômios

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m, com\ a_m \neq 0 \tag{3.15}$$

e

$$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n, com\ b_n \neq 0 \tag{3.16}$$

existem um único polinômio q e um único polinômio r tais que $qg + r = f$ e $gr(r) < gr(g)$, ou $r = 0$.
Primeiramente vamos demonstrar a existência do polinômio e em seguida demonstraremos que a mesma é única.

Demonstração: (Existência)

1^o.grupo de operações:
Vamos formar o monômio $\dfrac{a_m}{b_n}.x^{m-n} = q_0 x^{m-n}$ e construir o polinômio $r_1 = f - (q_0 x^{m-n})g$, chamado de 1^o.resto parcial.
Agora notemos que:
$r_1 = (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ...) - \dfrac{a_m}{b_n}.x^{m-n}.(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ...)$
o que prova o cancelamento de $a_m x^m$(pelo menos), portanto, $gr(r_1) = \alpha < m$.
Para maior comodidade, façamos:
$r_1 = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + ... + c_1 x + c_0$,
que é único para o primeiro grupo de operações;

2^o.grupo de operações:
Vamos formar o monômio $\dfrac{c_\alpha}{b_n}.x^{\alpha-n} = q_1x^{\alpha-n}$ e construir o polinômio $r_2 = r_1 - (q_1x^{\alpha-n})g$, chamado de 2^o.resto parcial.
Dessa forma notemos que:
$r_2 = (c_\alpha x^\alpha + a_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + ...) - \dfrac{c_\alpha}{b_n}.x^{\alpha-n}.(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ...)$
o que prova o cancelamento de $c_\alpha x^\alpha$(pelo menos), portanto, $gr(r_2) = \beta < \alpha$.
Para maior comodidade, façamos:
$r_2 = d_\beta x^\beta + c_{\beta-1}x^{\beta-1} + ... + d_1x + d_0$

3^o.grupo em diante: analogamente

Notando que, em cada grupo de operações, o grau do resto parcial diminui de ao menos uma unidade, concluímos que, após um certo número p de operações resulta um resto parcial r_p de grau inferior ao de g (ou então $r_p = 0$) e $r_p = r_{p-1} - (q_{p-1}x^{\varepsilon-n})g$.

Adicionando-se membro a membro as igualdades acima teremos:

$$r_p = f - (q_0x^{m-n} + q_1x^{\alpha-n} + q_2x^{\beta-n} + ... + q_{p-1}x^{\varepsilon-n})g \tag{3.17}$$

e então $f = qg + r$, com $gr(r) < gr(g)$ ou $r = 0$.
(Unicidade). Admitamos a existência de dois quocientes q_1 e q_2 e dois restos r_1 e r_2 na divisão de f por g, isto é, $f = gq_1 + r_1$ e $f = gq_2 + r_2$ e provemos que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Pela definição de divisão temos:

$q_1g + r_1 = feq_2g + r_2 = f \Longrightarrow q_1g + r_1 = q_2g + r_2 \Longrightarrow (q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$

Se $q_1 \neq q_2$ ou $r_2 \neq r_1$ provemos que a igualdade $gr((q_1-q_2)g) \neq gr(r_2-r_1)$ não se verifica:

$gr((q_1 - q_2)g) = gr((q_1 - q_2) + gr(g) \geq gr(g)$ e $gr(r_2 - r_1) \leqslant max\{r_2, r_1\}$ < $gr(g)$, logo: $gr((q_1 - q_2)g) \neq (gr(r_2 - r_1)$ então, para evitar a contradição, devemos ter:

$$q_1 = q_2 \; e \; r_1 = r_2. \tag{3.18}$$

Teorema 4. O resto da divisão de um polinômio f por $(x-a)$ é igual ao valor numérico de f em a.
Demonstração: De acordo com a definição de divisão $q.(x-a)+r = f$, onde q e r são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $(x-a)$ tem grau 1, o resto r ou é nulo ou tem grau zero, portanto, r é um polinômio constante.
Calculemos os valores dos polinômios da igualdade acima em a:

$$q(a).(a-a)+r(a) = f(a). \tag{3.19}$$

então $r = f(a)$.

Teorema 5. Um polinômio f é divisível por $(x-a)$ se, e somente se, a é raiz de f.

Demonstração: De acordo com o teorema do resto, temos $r = f(a)$, então

$$r = 0 \Longleftrightarrow f(a) = 0. \tag{3.20}$$

Teorema 6. Se um polinômio f é divisível separadamente por $(x-a)$ e $(x-b)$, com $a \neq b$, então f é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$.

Demonstração: Sejam q o quociente e $r = cx+d$ o resto da divisão de f por $(x-a)(x-b)$, então

$$q(x-a).(x-b)+(cx+d) = f \tag{3.21}$$

Calculando os valores numéricos desses polinômios em a, temos:
$q[(a)](a-a)(a-b)+(ca+d) = f(a) = 0 \Longleftrightarrow ca+d = 0$
Calculando os valores numéricos desses polinômios em b, temos:
$q[(b)](b-a)(b-b)+(ca+d) = f(a) = 0 \Longleftrightarrow cb+d = 0$
Logo $c = 0$ e $d = 0$, portanto $r = 0$

3.9 Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 7. Seja $P(z)$ um polinômio em $\mathbb{C}$, com $grau(P) \geq 1$. Então,
(i) $|P|$ assume um mínimo em $\mathbb{C}$, isto é, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|\, para\, todo\, z \in \mathbb{C}$
(ii) Para tal z_0 temos $P(z_0) = 0$

Demonstração: Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, com grau$(P) = n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.
(i) Para polinômios reais, os quais tendem ao infinito se a variável tende a $\pm\infty$. De fato, aplicando as desigualdades triangulares, nesta ordem, temos
$|P(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - |a_1 z| - |a_0|$, e

assim,$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - .... - |a_1||z| - |a_0|$.
Observe que o limite da expressão do lado direito da inequação acima tende a $+\infty$ se, e somente se $|z| \to +\infty$. Portanto,

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty. \tag{3.22}$$

Assim, pela definição do símbolo $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, existe um raio R > 0 tal que |P(z)| > |P(0)| se |z| > R e, como a função |P(z)| é uma função contínua no disco compacto centrado na origem D(0,R) =$\{z \in \mathbb{C}\,|z| \leqslant R\}$. Pelo Teorema de Bolzano Weierstrass segue que a função |P(z)| restrita a tal disco D(0,R) assume um valor mínimo em um ponto $z_0 \in D(0, R)$, ou seja

$$|P(z)| \geq P(|z_0|), \forall z \in D(0, R). \tag{3.23}$$

Porém, também temos $|P(0)| \geq P(|z_0|)$ já que $0 \in D(0, R)$. Donde segue,

$$\begin{cases} |P(z)| \geq |P(z_0)|, \forall z \in D(0, R) \\ |P(z)| \geq |P(0)|, \forall \, |z| > R \\ |P(0)| \geq |P(z_0)|. \end{cases}$$

O que prova a desigualdade, $|P(z)| \geq P(|z_0|)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Isto é, z_0 é o ponto de mínimo global(ou absoluto) da função |P(z)|.
(ii) Dado o círculo unitário centrado na origem $S^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}$, temos:

Para todo $r \geq 0$ e $\omega \in S^1$ temos, $|P(r\omega)|^2 \geq |P(0)|^2$ e
$|P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)|^2 - |P(0)|^2 = [P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)][\overline{P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)}] - |P(0)|^2 \geq 0$, que simplificado nos fornece,

$$2r^k Re[\overline{P(0)}\omega^k Q(r\omega)] + r^{2k}|Q(r\omega)|^2 \geq 0, \forall r \geq 0, \forall \omega \in S^1, \tag{3.24}$$

e então, dividindo por $r^k > 0$ e fixando $\omega \in S^1$ obtemos

$$2Re[\overline{P(0)}Q(r\omega)\omega^k] + r^k|Q(r\omega)|^2 \geq 0, \forall r \geq 0, \tag{3.25}$$

com a expressão no lado esquerdo contínua em $r \in [0, +\infty)$. Logo, em r = 0 temos

$$2Re[\overline{P(0)}Q(0)\omega^k] \geq 0, \omega \text{ arbitrário em } S^1.$$

Seja $\alpha = \overline{P(0)}Q(0)$.Fatorando as potências de 2 escrevemos $k = 2^j m$, com m ímpar. Substituindo $\omega = 1$ temos $Re(\alpha) \geq 0$. Escolhendo ω tal que ω^{2^j}=-1, temos $\omega^k = (\omega^{2^j})^m$=-1 e concluímos $Re[\alpha] \leqslant 0$ e portanto, $Re[\alpha] = 0$. Escolhendo um complexo ω tal que ω^{2^j} = i obtemos $\omega^k = (\omega^{2^j})^m = i^m = \pm i$ e $\overline{\omega}^k = \mp i$ e então, substituindo os valores ω e $\overline{\omega}$ obtemos a dupla de desigualdades $Re[\pm \alpha i]$ = $\mp Im[\alpha] \geq 0$. Portanto, $\alpha = 0$ e, $Q(0) \neq 0, P(0) = 0$.

Com o objetivo de enriquecer este estudo achamos importante inserir o estudo da decomposição de polinômios, bem como a existência das raízes complexas, visto que temos a intenção de explorar tais conceitos nas próximas unidades.

3.10 Teorema da Decomposição

Teorema 8. Todo polinômio P de grau n $(n \geq 1)$

$$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0). \tag{3.26}$$

pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)......(x - r_n) \tag{3.27}$$

em que $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ são as raízes de P.
Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.

Primeiramente vamos demonstrar a existência dessa fatoração e em seguida demonstraremos que a mesma é única.

Demonstração: (Parte 01- Existência)
a) Sendo P um polinômio de grau $n \geq 1$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra temos que P tem ao menos uma raiz r_1. Assim, $P(r_1)$ = 0 e, de acordo com o Teorema de D'Alembert, P é divisível por $x - r_1$, logo:

$$P = (x - r_1).Q_1 \ (1) \tag{3.28}$$

em que Q_1 é polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 1$, então $n - 1 = 0$ e Q_1 é polinômio constante; portanto, $Q_1 = a_n$ e $P = a_n(x - r_1)$, ficando demonstrado nosso teorema.
b) Se $n \neq 2$, então $n \neq 1$ e o Teorema Fundamental da Álgebra é aplicável ao polinômio Q_1, isto é, Q_1 tem ao menos uma raiz r_2. Assim, $Q_1(r_2)$ = 0 e Q_1 é divisível por $x - r_2$, ou seja:

$$Q_1 = (x - r_2).Q_2 \ \ (1')$$

Substituindo (1') em (1) resulta: $P = (x - r_1)(x - r_2).Q_2$ (2)

em que Q_2 é polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 2$, isto é, $n - 2 = 0$, então $Q_2 = a_n$ e $P = a_n(x - r_1)(x - r_2)$, ficando demonstrado o teorema.

c) Após n aplicações sucessivas do Teorema Fundamental da Álgebra chegamos na igualdade:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)......(x - r_n) \tag{3.29}$$

Parte 02- Unicidade
Suponha que P admita duas decomposições:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)......(x - r_n) \tag{3.30}$$

$$P = b_m(x - s_1)(x - s_2)(x - s_3)......(x - s_m) \tag{3.31}$$

Se considerarmos reduzidos e ordenados os dois segundos membros, temos:

$$a_n x^n - a_n Q_1 x^{n-1} + ... = b_m x^m - b_m T_1 x^{m-1} + ... \tag{3.32}$$

e pela definição da igualdade de polinômios, temos necessariamente:

$$n = m \text{ e } a_n = b_m$$

Dessa forma teremos a igualdade:
$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)......(x - r_n) = (x - s_1)(x - s_2)(x - s_3)......(x - s_n)$ (I)
Atribuindo a x o valor de r_1, temos:

$$0 = (r_1 - s_1)(r_1 - s_2)(r_1 - s_3)....(r_1 - s_n) \tag{3.33}$$

e, se o produto é nulo, um dos fatores $r_1 - s_j$ é nulo; com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos obter $r_1 = s_1$.
Dessa forma a igualdade (I) se transforma em:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)......(x - r_n) = (x - r_1)(x - s_2)(x - s_3)......(x - s_n) \tag{3.34}$$

Analogamente podemos obter $r_i = s_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
As igualdades m = n, $b_m = a_n, r_1 = s_1, r_2 = s_2, r_3 = s_3, ..., r_n = s_n$ são a prova da unicidade da decomposição.

3.11 Raízes Complexas

Teorema 9. Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi$ $(b \neq 0)$, então podemos afirmar que essa equação também admite como raiz o número $\overline{z}$ = $a - bi$, conjugado de z.

Demonstração: Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes reais que admite a raiz z, isto é, $P(z) = 0$.
Provemos que $\overline{z}$ também é raiz dessa equação, isto é, $P(\overline{z}) = 0$. Dessa forma temos:
$P(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1(\overline{z}) + a_0$
$P(\overline{z}) = a_n(\overline{z^n}) + a_{n-1}(\overline{z^{n-1}}) + \ldots\ldots\ldots + a_1(\overline{z}) + a_0$
$P(\overline{z}) = (\overline{a_n z^n}) + (\overline{a_{n-1} z^{n-1}}) + \ldots\ldots\ldots + (\overline{a_1 z}) + (\overline{a_0})$

$$P(\overline{z}) = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0. \tag{3.35}$$

Capítulo 4

Interpolação de Lagrange

Nesse Capítulo trataremos de apresentar a interpolação de Lagrange como recurso de modelagem matemática dadas as suas principais características e propriedades, resolvendo alguns exercícios executáveis com alunos em sala de aula, apesar de que, apenas com o conteúdo de ensino médio é possível resolvê-los.

4.1 Quem foi Lagrange?

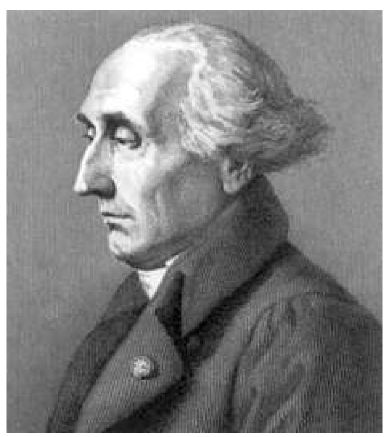


Figura 4.1: Joseph Louis Lagrange

Joseph Louis Lagrange (Turim, 25 de janeiro de 1736- Paris, 10 de abril de 1813) foi um matemático italiano. O pai de Lagrange havia sido tesoureiro de guerra da Sardenha, tendo se casado com Marie-Thérèse Gros, filha de um rico físico. Foi o único de dez irmãos que sobreviveu à infância. Napoleão Bonaparte fez dele senador, conde do império e grande oficial da Legião de Honra.

Aos dezesseis anos tornou-se professor de matemática na Escola Real de Artilharia de Turim. Desde o começo foi um analista, nunca um geômetra, o que pode ser observado em Méchanique Analytique (Mecânica Analítica), sua obra prima, projetada aos 19 anos, mas só publicada em Paris em 1788, quando Lagrange tinha cinquenta e dois anos. "Nenhum diagrama (desenho) será visto neste trabalho", diz ele na abertura de seu livro, e acrescenta que "a ciência da mecânica pode ser considerada como a geometria de um espaço com quatro dimensões- três coordenadas cartesianas e um tempo-coordenada, suficientes para localizar uma partícula móvel tanto no espaço quanto no tempo".

Organizou as pesquisas desenvolvidas pelos associados da Academia de Ciências de Turim. O primeiro volume das memórias da academia foi publicado em 1759, quando Lagrange tinha vinte e três anos.

Aos vinte e três anos aplicou o cálculo diferencial à teoria da probabilidade, indo além de Isaac Newton com um novo começo na teoria matemática do som, trazendo aquela teoria para o domínio da mecânica do sistema de partículas elásticas (ao invés da mecânica dos fluidos), sendo também eleito como membro estrangeiro da Academia de Ciências de Berlim (2 de Outubro de 1759).

Entre os grandes problemas que Lagrange resolveu encontra-se aquele da oscilação da Lua. Por que a Lua apresenta sempre a mesma face para a Terra? O problema é um exemplo do famoso Problema de Euler dos três corpos- a Terra o Sol e a Lua- atraindo-se uns aos outros, de acordo com a lei do inverso do quadrado da distância entre os seus centros de gravidade. Pela solução deste problema recebeu o Grande Prêmio da Academia Francesa de Ciências, aos vinte e oito anos.

Tais sucessos levaram o Rei da Sardenha a oferecer a Lagrange todas as despesas pagas de uma viagem a Paris e Londres.

Ficou em Berlim vinte anos, onde se casou e enviuvou, tendo exercido a função de diretor da divisão físico-matemática da Academia de Berlim, onde fazia e refazia seus trabalhos, nunca se satisfazendo com o resultado, o que significou um desespero para os seus sucessores.

Em carta escrita para D'Alembert, em 1777, diz: "eu tenho sempre olhado a matemática como um objecto de diversão, mais do que de ambição, e posso afirmar para você que tenho mais prazer nos trabalhos de outros do que nos meus próprios, com os quais estou sempre insatisfeito". E, em outra carta histórica de 15 de Setembro de 1782, diz ter quase terminado seu tratado de Mécanique Analytique, acrescentando que, como ainda não sabia quando nem como seria o livro impresso, não estava se apressando com os retoques finais.

Aos cinquenta e um anos, Lagrange sentia-se acabado. Era um caso claro de exaustão nervosa, pelo longo período de trabalho excessivo. Falava pouco, parecia estar sempre distraído e melancólico. Era a triste figura da indiferença, tendo perdido, inclusive, o gosto pela matemática.

Terminada a revolução, foi tratado com muita tolerância. Um decreto especial garantiu-lhe uma pensão, e quando a inflação reduziu sua pensão a nada, foi indicado para professor da Escola Normal, que teve vida efêmera. Foi então indicado para professor da Escola Politécnica, fundada em 1797, tendo planejado o curso de matemática, sendo seu primeiro professor.

Referindo-se a Isaac Newton, ele disse: "foi certamente o gênio por excelência mas temos que concordar que ele foi também o que mais sorte teve: só se pode encontrar uma única vez o sistema solar para ser estabelecido. Ele teve sorte de ter chegado quando o sistema do mundo permanecia ignorado".

Seu último trabalho científico foi a revisão e complementação da Mécanique Analytique para a segunda edição, quando descobriu que seu corpo já não obedecia à sua mente. Morreu na manhã do dia 10 de Abril de 1813, com setenta e sete anos.

4.2 Polinômio Interpolador de Lagrange

Sejam $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$ sendo $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Seja $P_n(x)$ o polinômio de grau $\leqslant n$ que interpola f em $x_0, x_1, ..., x_n$. Podemos representar o polinômio $P_n(x)$ como:

$$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + ... + y_nL_n(x) \tag{4.1}$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n.

Para cada i queremos que a condição $P_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita:

$$P_n(x) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + ... + y_nL_n(x_i) = y_i \tag{4.2}$$

Como pudemos perceber, a resolução de um problema de interpolação também pode ser entendido como a busca da solução de um sistema matricial de álgebra linear. Além disso, vimos que a utilização do polinômio em base canônica leva a uma matriz de Vandermond mal condicionada.

Afim de resolver este problema, o matemático Joseph-Louis de Lagrange escolheu uma outra base que melhorasse o condicionamento da matriz. A ideia foi diagonalizá-la, obtendo uma matriz identidade cuja resolução do sistema linear é simples e direta. Dados n pontos de abscissas (x_i), com i variando de 0 a n, o polinômio interpolador de Lagrange , $P_n(x)$, será obtido através de uma base de polinômios de grau menor ou igual n, que satisfaçam as seguintes condições:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, se \;\; k = i \\ 0, se \;\; k \neq i \end{cases}$$

Observe que vamos obter uma série de k polinômios de tal modo que cada um deles se anula em todos os pontos conhecidos com exceção de um em que $k = i$, de forma que cada polinômio ajuste o valor em um ponto, sendo funções independentes entre si.

Podemos então definir $L_k(x)$ como:

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)....(x_0-x_n)}$
$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2).....(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)....(x_1-x_n)}$
$\vdots$
$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)....(x_n-x_{n-1})}$

Assim, os polinômios de Lagrange podem ser descritos pela fórmula geral:

$$L_k(x) = \prod_{1 \leq j \neq k \leq n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{4.3}$$

O polinômio interpolador de Lagrange é dado pela combinação linear dos $L_k(x)$ polinômios base:

$P_0(x_0) = a_0 L_0(x_0) + ... + a_n L_n(x_0) = y_0$
$P_1(x_1) = a_0 L_0(x_1) + ... + a_n L_n(x_1) = y_1$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
$P_n(x_n) = a_0 L_0(x_n) + ... + a_n L_n(x_n) = y_n$

Dessa forma podemos aplicar este conhecimento algébrico do polinômio interpolador de Lagrange para conhecermos a sua geometria através da interpretação geométrica sendo dada uma quantidade aleatória de pontos.

4.3 Interpretação Geométrica

Dado o conjunto de pontos (2,1) (3,6) (4,4) e (5,5) desejamos construir um polinômio de Lagrange que passe por estes pontos. Primeiro, construímos os L_k polinômios de Lagrange, perceba que somente um polinômio de Lagrange é não nulo em cada ponto. Depois construímos os P_n polinômios de Lagrange, observe que cada polinômio ajusta um ponto do conjunto, sendo igual ao valor da ordenada do ponto. E usando a fórmula geral construímos o polinômio P de Lagrange que passa por todos os pontos dados:

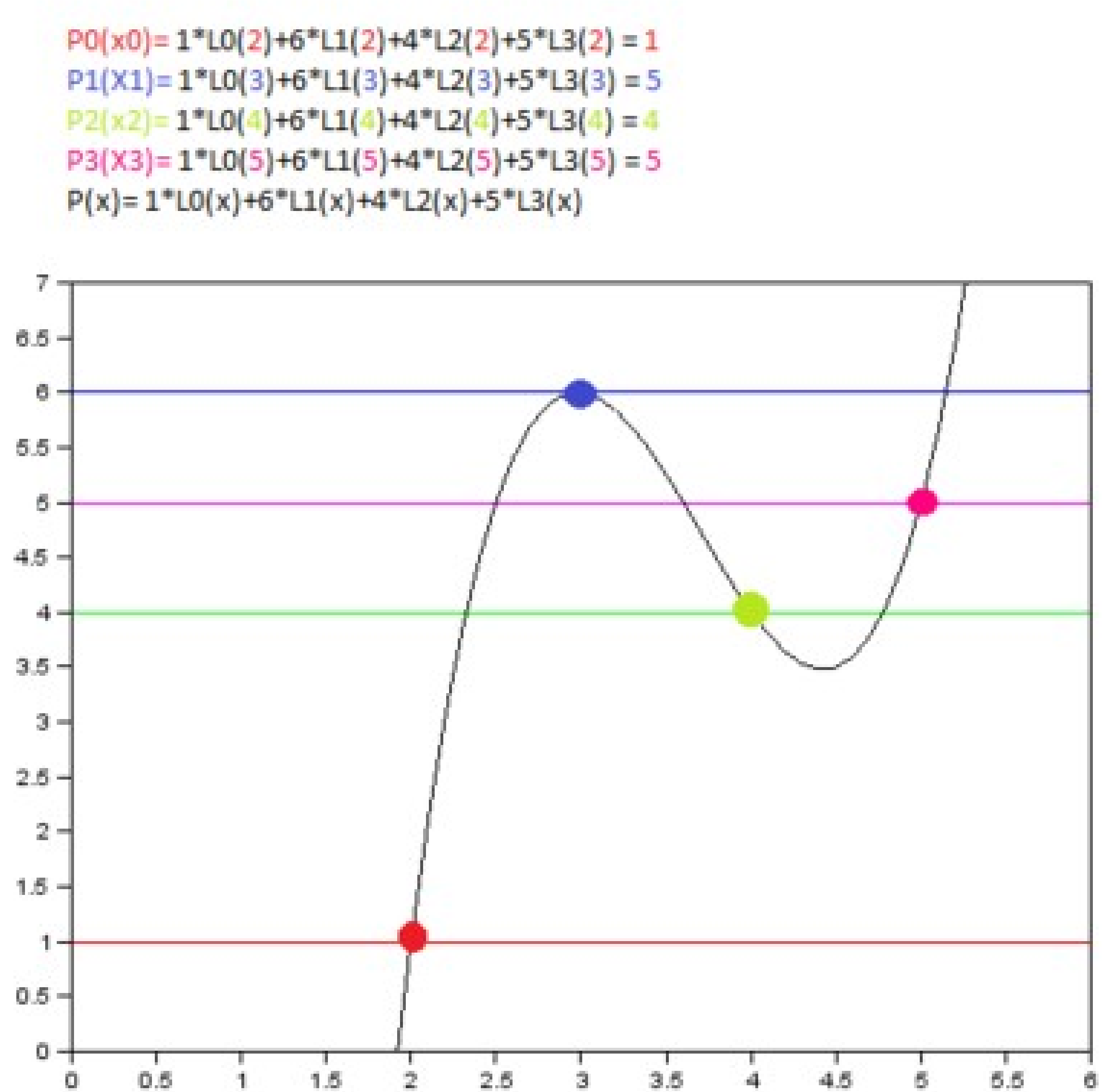


Figura 4.2: Representação dos P_n polinômios de Lagrange

Exemplo 4.1. *A tabela abaixo apresenta a quantidade de um certo produto (y) em função do tempo decorrido (X) que certa linha de produção é capaz de produzir no decorrer do tempo. Queremos obter um polinômio que contenha os dados tabelados abaixo.*

X	1	2	4	7
Y	3	6	8	12

Figura 4.3: Tabela 1

Resolução: Vamos montar cada um dos $L_i(x)$, logo:
$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(1-2)(1-4)(1-7)}$
$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{(2-1)(2-4)(2-7)}$
$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-7)}{(4-1)(4-2)(4-7)}$
$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(7-1)(7-2)(7-4)}$
Dessa forma teremos

$$P(x) = 3L_0(x) + 6L_1(x) + 8L_2(x) + 12L_3(x) \tag{4.4}$$

Graficamente teríamos:

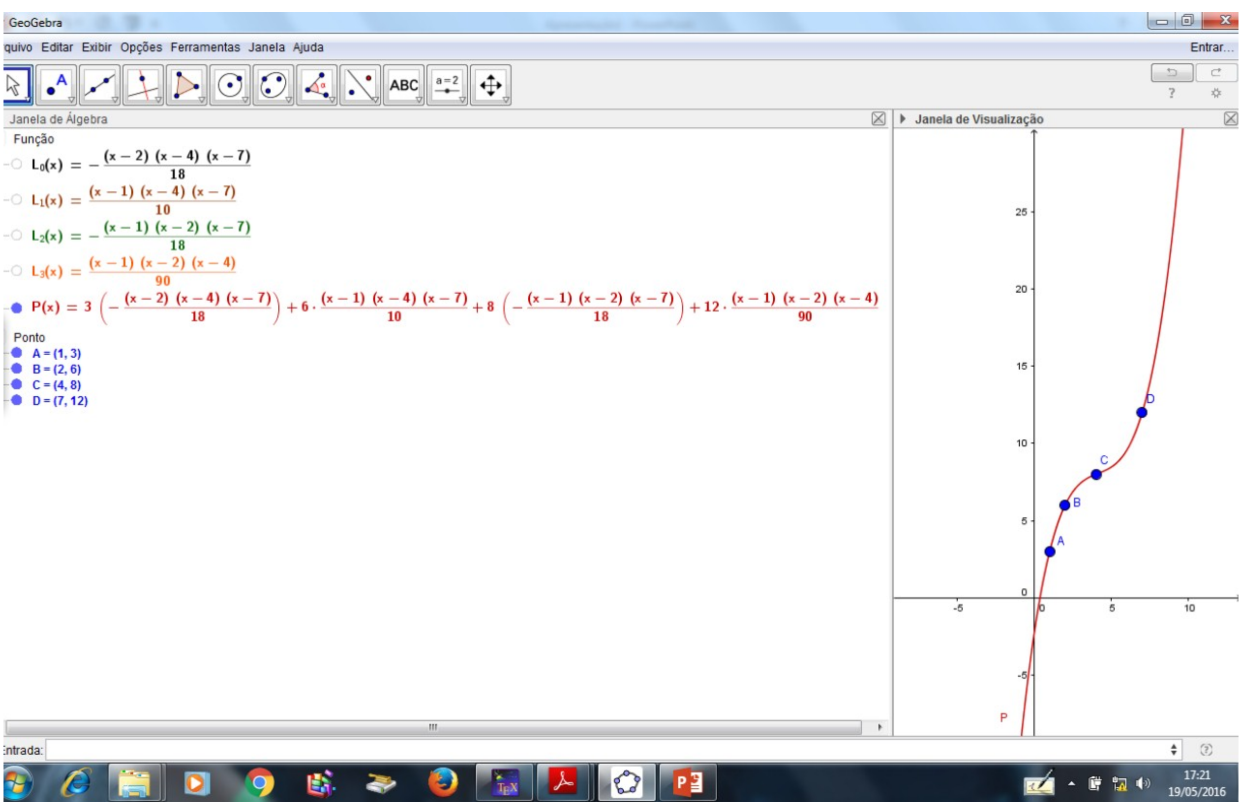


Figura 4.4: Representação dos pontos tabelados no GEoGebra

Exemplo 4.2. *Determinar o polinômio que melhor representa o comportamento da partícula que possui a seguinte leitura de suas posições de acordo com a tabela abaixo:*

X	1	-1	3
Y	2	0	1

Figura 4.5: Tabela 2

Resolução: Vamos analisar cada um dos $L_i(x)$ de acordo com a tabela proposta.
$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(2)(-2)}$
$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2)(-2)}$
$L_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(2)(4)}$
Dessa forma teremos

$$P(x) = 2L_0(x) + 0.L_1(x) + 1L_2(x) \tag{4.5}$$

Geometricamente teríamos a apresentação abaixo:

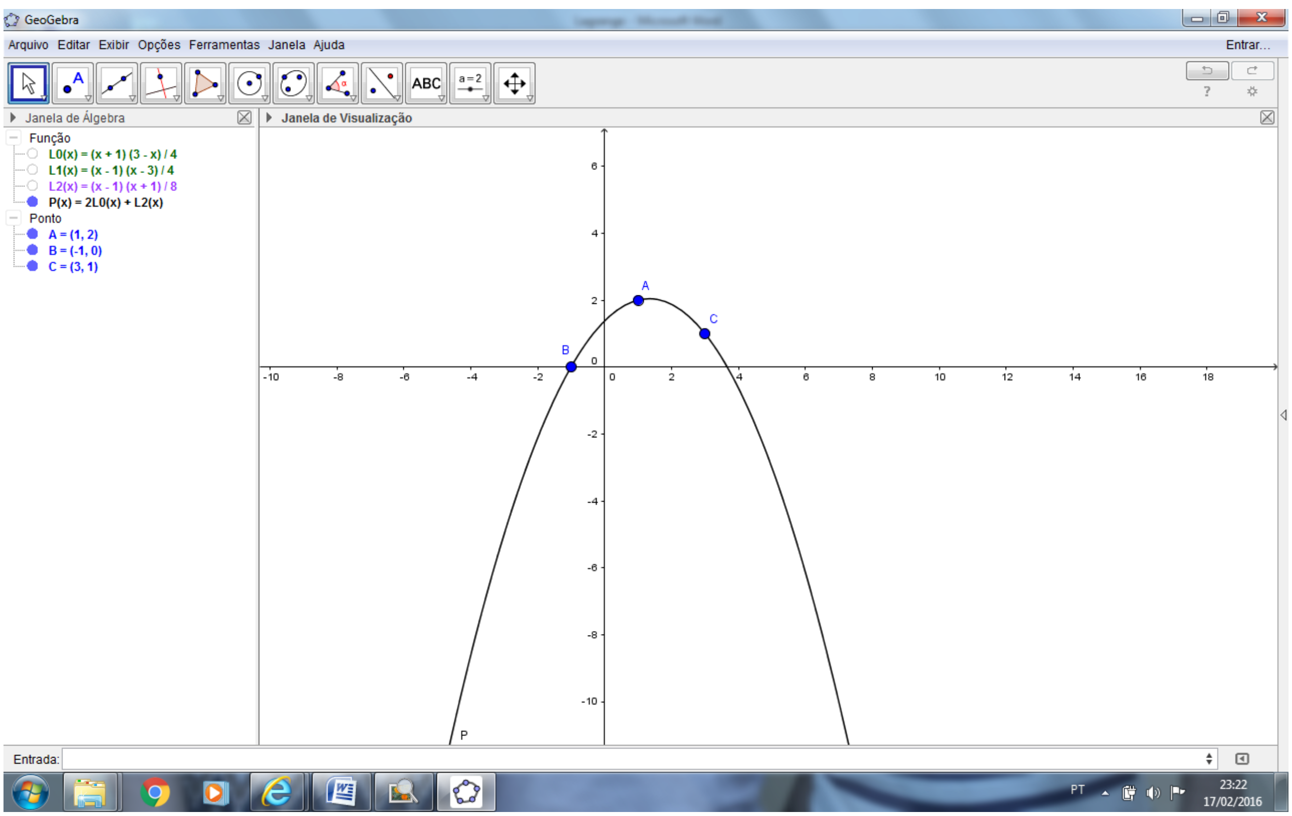


Figura 4.6: Apresentação dos dados tabelados no GeoGebra

Adquirimos assim um polinômio quadrático que contém os pontos da tabela fornecida pelo problema.

Capítulo 5

Uma Abordagem dos Polinômios

Nesse capítulo, será apresentada uma sugestão de aula para se trabalhar a interpolação de Lagrange no Ensino Médio. Nela mostraremos todo o encaminhamento necessário para que o professor desenvolva com sucesso uma aula: exemplo motivador, solução alternativa, apresentação e aplicações da interpolação proposta.
- Objetivos: Mostrar ao aluno a importância de se trabalhar com interpolação na Matemática;
- Apresentar a interpolação de Lagrange e mostrar a sua utilidade em Modelagem Matemática;
- Pré-requisitos: Conhecer a teoria de polinômios; Operações com polinômios;Conceitos básicos no plano cartesiano e suas propriedades;
- Turma indicada: 3^o ano do Ensino Médio
- Tempo necessário: Aproximadamente 1h 40 min (equivalente a 2 tempos de aula);
- Materiais utilizados: Quadro, pilot, computadores que disponham do software Geogebra e EXCEL.

5.1 Público Alvo e Período de Aplicação

O objeto de conhecimento "Polinômios"é componente curricular do 2^o trimestre do 3^o Ano do Ensino Médio. Assim, visando uma complementação curricular, as atividades foram iniciadas no 2^o trimestre do ano letivo de 2016 com uma turma de 31 alunos voluntários do 3^o Ano do Ensino Médio de 2016 do Colégio Militar de Manaus como parte da programação do Clube de Matemática e foram continuadas no 2^o trimestre de 2016. Os encontros aconteceram no turno invertido das aulas, das 14 às 16 horas, uma vez na semana, totalizando 10 encontros. A seguir, apresentamos o desenvolvimento das atividades de forma sequenciada sendo que elas foram particionadas nos diversos encontros.

5.2 Atividade 1: Assimilação dos Conceitos de Polinômios

A atividade consistiu em trabalhar os principais conceitos de polinômios para melhor assimilação das propriedades e características que regem tal conteúdo, bem como as suas aplicações no cotidiano.

Iniciamos com o exercício "Para que valores de k a expressão polinomial

$$(k^2 - 4)x^5 + (k+2)x^4 - 3x + 1 \tag{5.1}$$

tem grau 4?"
Observamos inicialmente a dificuldade dos alunos em trabalhar com mais de uma variável. Dessa forma trabalhamos o conceito de coeficientes e grau de um polinômio, seguindo as seguintes etapas:
(1) $gr(P) = 5$, se $k^2 - 4 \neq 0$. Então $k \neq \pm 2$
(2) $gr(P) = 4$, se $k^2 - 4 = 0$ e $k + 2 \neq$0. Então k = $\pm$2 e k $\neq$-2. Logo $k = 2$.

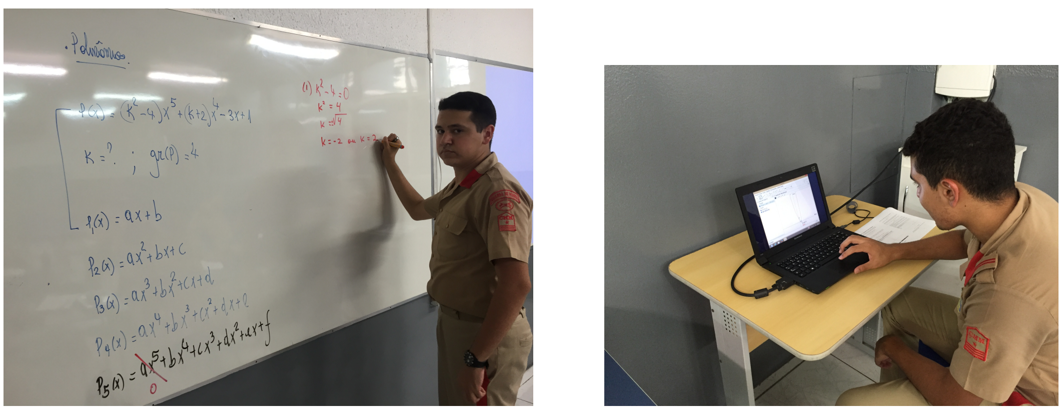


Figura 5.1: Alunos discutindo e preparando a apresentação no GeoGebra

Dessa forma teremos $P(x) = 4x^4 - 3x + 1$, que graficamente pode ser representado por:

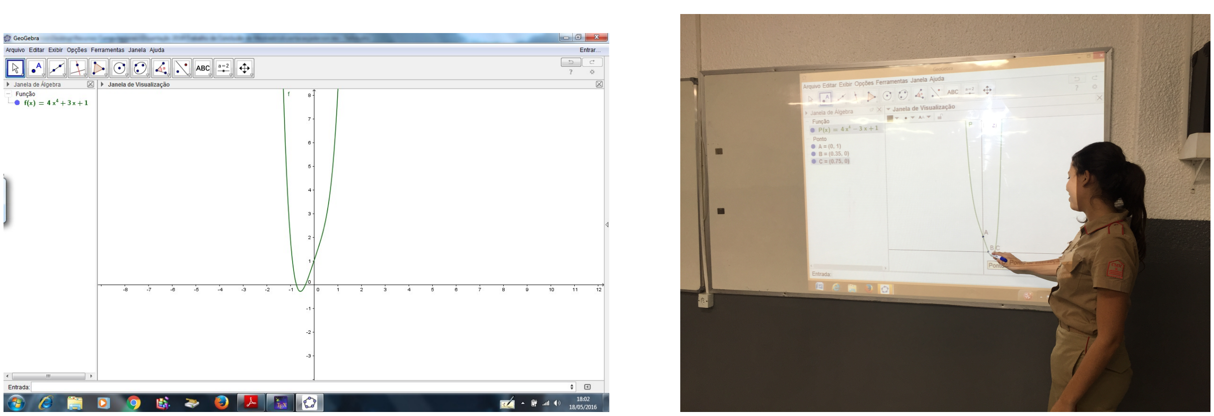


Figura 5.2: Alunos apresentando os resultados no GeoGebra

Em seguida propomos o seguinte exercício "Determine as raízes do polinômio

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \tag{5.2}$$

e em seguida construa o gráfico de $P(x)$".
O objetivo desse exercício seria o de discutir a forma que eles usariam para determinar as raízes e qual a técnica que os alunos usariam para esboçar o gráfico. Dessa forma temos:
(1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0$, logo $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Utilizando a fatoração obtemos

$$x(x-1)(x-2) = 0, \tag{5.3}$$

(2) daí concluímos que as raízes são $x = 0$, $x = 1$, ou $x = 2$, ou seja $S = \{0, 1, 2\}$ como conjunto solução das raízes de $P(x)$.

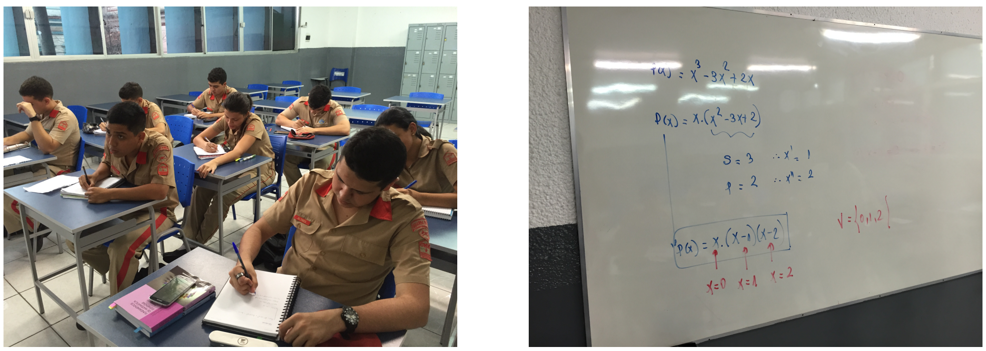


Figura 5.3: Alunos discutindo sobre a decomposição de polinômios

Acompanhando a apresentação dos alunos observamos a grande dificuldade na fatoração dos termos e exploramos então o conceito da fatoração de termos algébricos, o que foi de grande valor para o aprendizado dos alunos.
(3) Dessa forma fizemos a construção do gráfico utilizando o GeoGebra e obtemos o seguinte resultado:

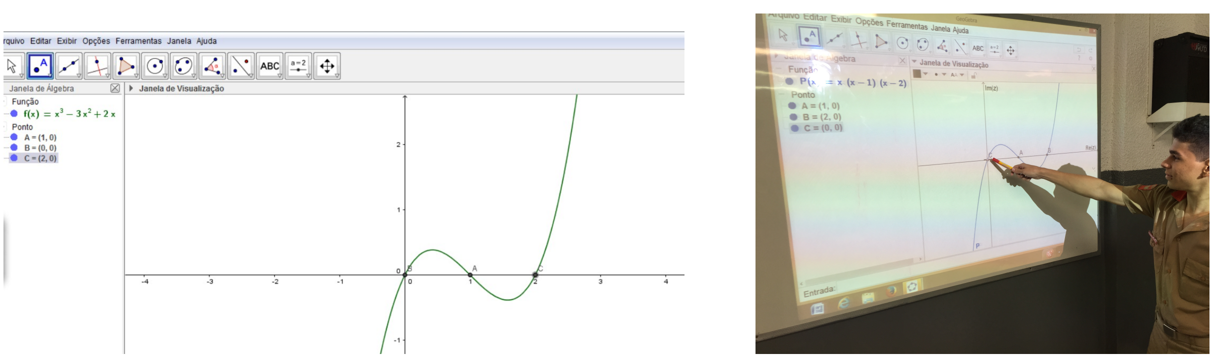


Figura 5.4: Alunos apresentando os resultados no GeoGebra

Discutimos ainda nesse exercício a questão de crescimento/decrescimento do polinômio em questão, bem como o comportamento do sinal de $P(x)$.

Ainda neste tópico exploramos a seguinte questão "Sabendo-se que certa fábrica de chocolate produz x milhares de unidades e que o lucro desta fábrica se comporta de acordo com o polinômio

$$L(x) = (x^2 - 1)(x - 2)^2. \tag{5.4}$$

Para que quantidades de chocolates a empresa teria prejuízo?"

O nosso objetivo nesta questão era o de explorar o conceito de decomposição, estudo das raízes e sinal da função polinomial, bem como a determinação do gráfico do polinômio L(x).

Dessa forma seguimos os seguintes passos:

(1) Igualamos o polinômio $L(x)$ a zero, ou seja

$$L(x) = (x^2 - 1)(x - 2)^2 = 0, logo\ (x^2 - 1)(x - 2)^2 = 0 \tag{5.5}$$

(2) Usamos alguns conceitos básicos sobre nulidade de um polinômio e chegamos ao resultado:

$(x^2 - 1) = 0$ e $(x - 2)^2 = 0$, o que nos leva a concluir que $x = \pm 1$ ou $x = 2$.

Aqui tivemos a oportunidade de explorar o conceito de multiplicidade e de destacar no que essa multiplicidade implicaria no comportamento do gráfico de $L(x)$. Dessa forma podemos dizer que $S = \{-1, 1, 2\}$ é o conjunto das possíveis raízes de $L(x)$.

(3) Fizemos o esboço do gráfico de $L(x)$ no GeoGebra (em unidade de milhar), de tal forma que o resultado obtido foi:

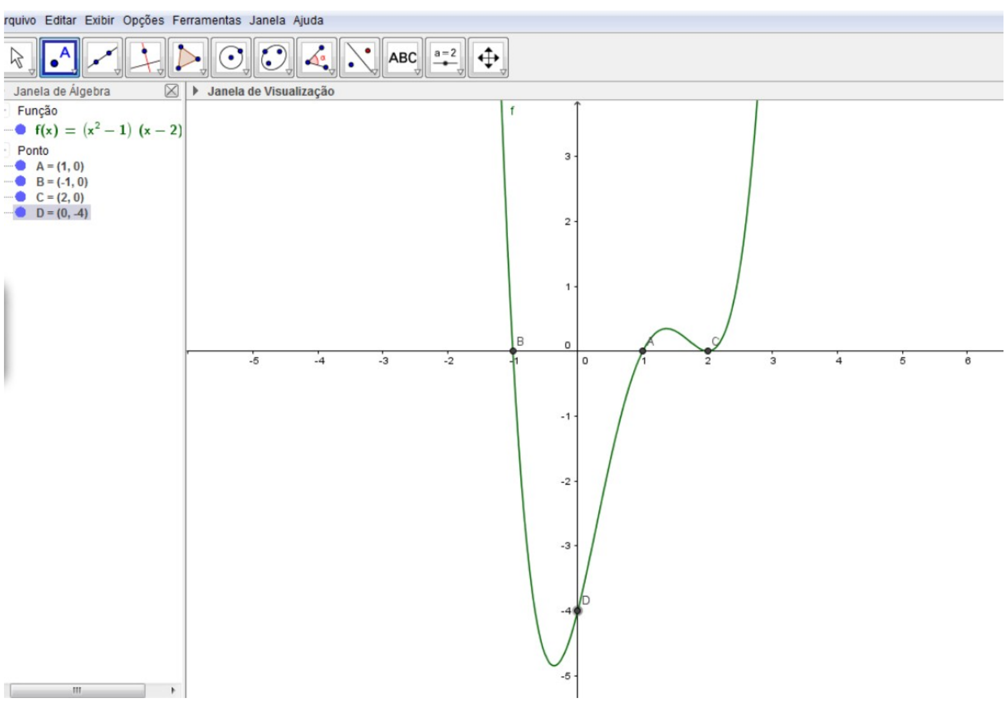


Figura 5.4a- O polinômio $(x^2 - 1)(x - 2)^2$ no GeoGebra

(4) A partir do gráfico observamos que com a quantidade menor que 1000 unidades de chocolate a fábrica ainda estava em prejuízo e que a partir de 2000 unidades a fábrica possuía uma estabilidade de lucro. Os conceitos de raízes, multiplicidade e comportamento do polinômio citado acima ficaram mais claros para os alunos melhorando assim o entendimento do nosso objeto de conhecimento, que era, polinômios.

5.3 Atividade 2: Aplicação da Interpolação de Lagrange

A atividade consistiu inicialmente na aplicação da interpolação de Lagrange para a construção dos gráficos de polinômios. Inicialmente apresentamos uma breve biografia do matemático Joseph Louis Lagrange. Em seguida, definimos os principais elementos para a aplicação da interpolação.

Inicialmente escolhemos de forma aleatória 3 alunos e colhemos as suas respectivas alturas, obtendo os pontos A(1,1.7), B(2,1.6) e C(3,1.8). Dessa forma começamos a explorar a ideia dos polinômios auxiliares, tais que:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}; L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \;\; e \;\; L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \tag{5.6}$$

Dessa forma apresentamos a modelagem do polinômio que continha os pontos apresentados acima, de tal forma que

$$P_1(x) = 1,7L_0(x) + 1,6L_1(x) + 1,8L_2(x) \tag{5.7}$$

Observamos a empolgação dos alunos em calcular tal polinômios e a curiosidade em saber no GeoGebra qual seria a representação gráfica através dessa interpolação.

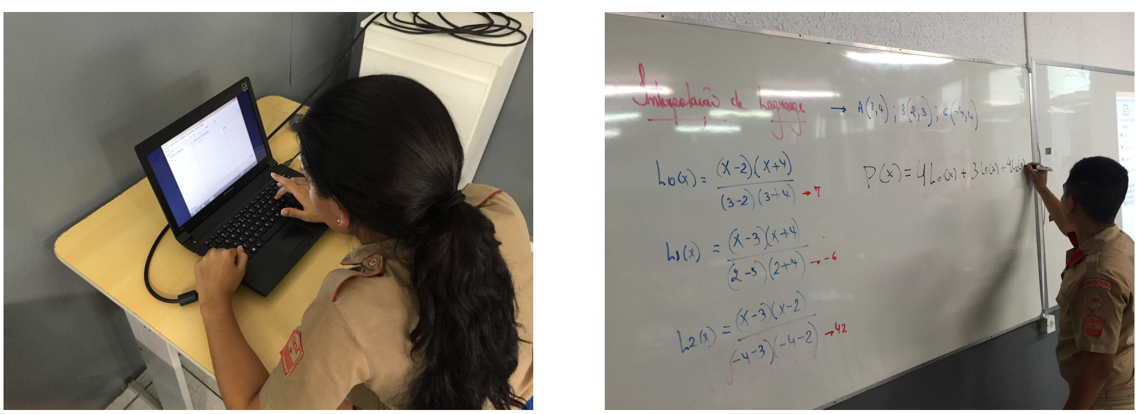
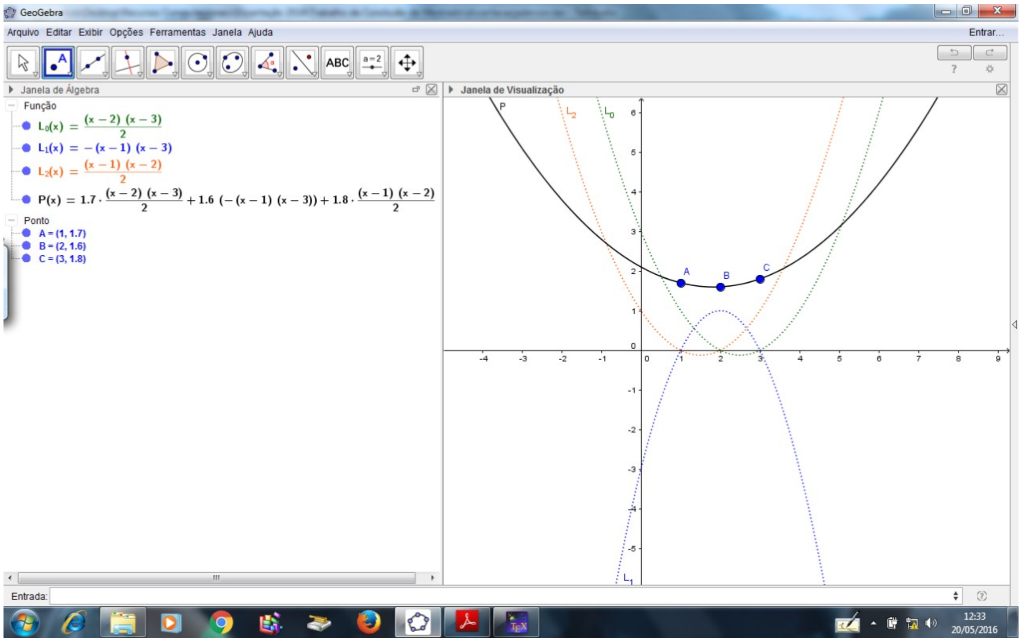


Figura 5.5: Alunos calculando os polinômios auxiliares de Lagrange



5.5a- Comportamento das respectivas alturas no Geogebra

Os alunos observaram que para 3 pontos o gráfico obtido seria um polinômio quadrático.

Daí então demos a sugestão de calcularmos, através da interpolação de Lagrange, um polinômio que representasse o comportamento das notas de Física no primeiro trimestre de cinco alunos do grupo, o que causou uma curiosidade entre os alunos.

Os pares ordenados obtidos pelos alunos foram (1,4.8), (2,6.7), (3,9), (4,8.1) e (5,7.3).Em seguida os alunos calcularam os polinômios auxiliares, de tal forma que

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)};$$
$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)};$$
$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)};$$
$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)};$$
$$L_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)};$$

Os alunos observaram que é necessário se ter atenção nos produtos para se evitar o erro nos sinais e nos polinômios auxiliares. Logo o resultado obtido pelos cálculos foram tais que

$$P_2(x) = 4,8L_0(x) + 6,7L_1(x) + 9L_2(x) + 8,1L_3(x) + 7,3L_4(x) \tag{5.8}$$

Em seguida foram feitos os cálculos e apresetações pelos alunos no Geogebra, que analisaram cada passo do processo e análise dos dados no gráfico adquirido.

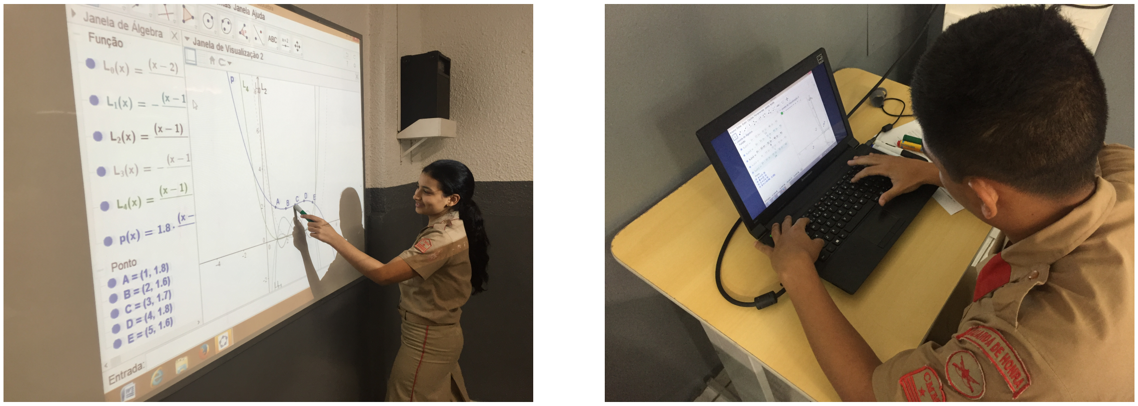
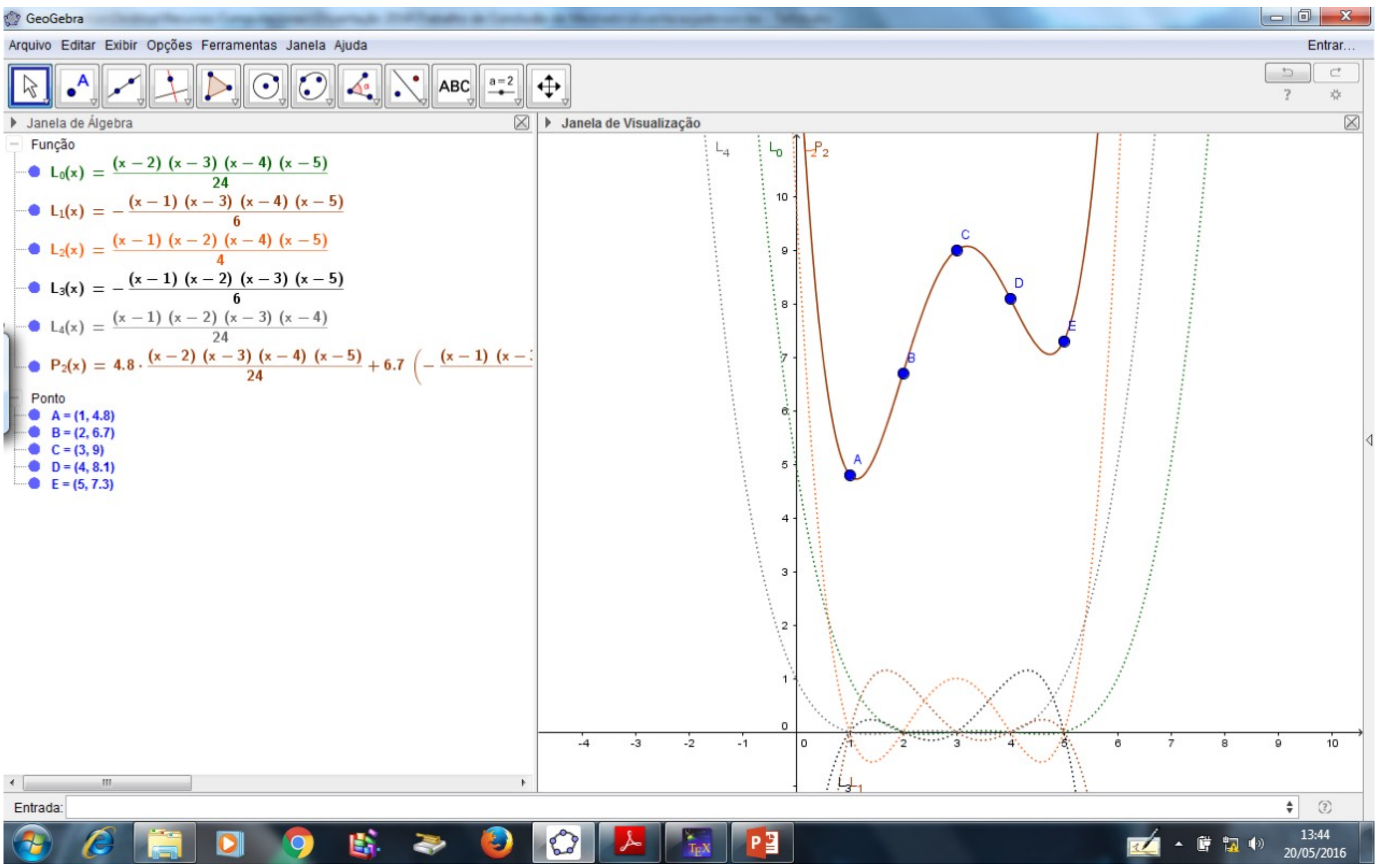


Figura 5.6: Alunos calculando os polinômios auxiliares de Lagrange para 5 pontos



5.6a- Comportamento das respectivas notas no Geogebra

E para concluir a atividade colocamos a disposição dos alunos os valores dos respectivos IMCs dos alunos do Terceiro Ano do Ensino Médio do ano de 2016, com a apresentação dos respectivos gráficos no Excel, dando assim a oportunidade de se continuar a construção de gráficos através da interpolação de Lagrange com o objetivo de enriquecer o estudo das funções polinomiais.

Turma 301				Turma 302				Turma 303				Turma 304			
Ordem	P	H	IMC	Ordem	P	H	IMC	Ordem	P	H	IMC	Ordem	P	H	IMC
1	49	1,7	18,0	1	50,3	1,6	19,2	1	37,6	1,6	15,5	1	44,8	1,6	16,9
2	49,2	1,6	19,5	2	50,4	1,6	19,9	2	47,5	1,5	20,0	2	45,4	1,6	18,0
3	51,3	1,6	19,1	3	52,5	1,7	18,6	3	51,3	1,7	17,3	3	46,7	1,5	20,5
4	53,2	1,7	18,0	4	53,1	1,7	18,6	4	54	1,7	19,1	4	47	1,5	20,9
5	53,4	1,5	22,8	5	53,2	1,7	18,2	5	55,9	1,5	23,9	5	49,1	1,6	18,5
6	55,4	1,8	18,1	6	53,2	1,6	22,1	6	58,7	1,5	25,1	6	50	1,6	18,8
7	55,8	1,6	22,9	7	55,2	1,7	19,3	7	61,1	1,6	24,8	7	53,8	1,6	21,6
8	56,2	1,5	24,0	8	57	1,7	20,4	8	62,4	1,7	22,9	8	54,8	1,7	19,2
9	57,1	1,7	20,7	9	58,4	1,7	21,5	9	62,4	1,6	24,7	9	55,3	1,7	19,8
10	57,4	1,7	20,3	10	58,4	1,6	23,7	10	62,9	1,6	24,3	10	57,4	1,7	19,2
11	58,9	1,6	22,7	11	58,5	1,7	19,5	11	65,2	1,7	23,7	11	58,5	1,7	20,2
12	60,3	1,7	20,9	12	58,7	1,6	24,1	12	67	1,6	26,2	12	60,2	1,7	20,6
13	60,7	1,7	22,3	13	59,2	1,8	19,3	13	67,6	1,6	26,4	13	61,6	1,6	25,6
14	61,6	1,7	20,6	14	60,4	1,6	24,8	14	68,2	1,6	27,3	14	65,7	1,8	19,4
15	61,9	1,6	24,2	15	61,7	1,6	23,8	15	69,5	1,7	25,5	15	71,5	1,7	23,9
16	62,1	1,7	20,5	16	62,2	1,9	18,0	16	71,7	1,7	24,5	16	73	1,6	28,5
17	62,2	1,6	23,4	17	63,2	1,6	24,7	17	72,3	1,6	29,0	17	75,4	1,8	24,1
18	63,4	1,6	23,9	18	63,3	1,7	21,6	18	73,2	1,7	24,5	18	75,6	1,6	28,1
19	64,7	1,7	22,7	19	63,9	1,7	22,1	19	73,2	1,7	24,7	19	76,1	1,8	24,8
20	65,2	1,8	21,3	20	66,8	1,7	23,4	20	81,7	1,7	27,6	20	76,5	1,8	23,6
21	65,8	1,6	24,8	21	68,5	1,8	21,6	21	81,8	1,8	24,7	21	76,5	1,7	27,4
22	66,7	1,6	25,7	22	70	1,7	25,1	22	81,8	1,7	28,6	22	77,6	1,6	29,2
23	69,2	1,6	26,0	23	74,4	1,8	23,0	23	81,8	1,6	32,8	23	77,8	1,7	26,0
24	70,3	1,8	22,4	24	77,1	1,8	24,3	24	82,9	1,7	27,7	24	80,7	1,7	26,7
25	77,5	1,8	23,9	25	77,7	1,6	29,6	25	83,9	1,7	28,7	25	81	1,8	26,1
26	80,2	1,7	26,8	26	79,6	1,8	24,8	26	84,3	1,7	28,8	26	81,4	1,7	27,8
27	80,7	1,7	29,6	27	81,6	1,8	26,6	27	90,4	1,7	30,2	27	81,5	1,7	29,6
28	82,4	1,5	35,2	28	84,7	1,8	27,0	28	91,1	1,8	28,4	28	82,8	1,7	27,3
29	89,1	1,8	26,9	29	99,3	1,6	36,9	29	96,2	1,7	34,5	29	87,5	1,8	26,4
30	106,2	1,7	35,5	30	101,3	1,8	32,7	30	96,2	1,6	38,1	30	88	1,9	25,4

Figura 5.7: IMCs dos alunos

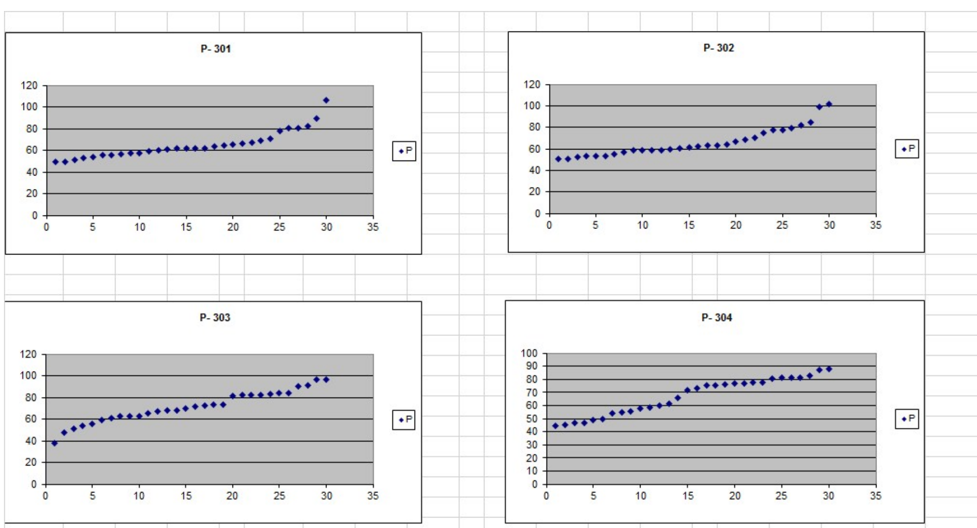


Figura 5.8: Gráficos dos IMCs no Excel

5.4 Avaliação da Atividade

Na aplicação das atividades propostas aos alunos propomos dois questionamentos básicos, que foram:

1. Quais as vantagens e desvantagens que você poderia citar na aplicação da Interpolação Lagrange para a construção de gráficos de polinômios?

2. Quais as considerações que você pode fazer em relação às atividades desenvolvidas sobre este conteúdo?

No geral, as vantagens citadas foram:"é mais fácil e prático construir o gráfico de um polinômio através do GEoGebra, pois temos uma melhor visualização dos elementos calculados nos exercícios, bem como o entendimento sobre as raízes, monotonicidade e sinal das funções polinomiais. Entre as desvantagens, a maioria dos alunos citou a dificuldade de se conseguir montar um polinômios que represente uma quantidade maior de pontos, ficando assim um pouco mais difícil a representação gráfica no Geogebra (por exemplo, as do IMC).

Com relação à segunda pergunta, os alunos responderam que "achamos uma atividade interessante porque deu para entender bem o assunto, fez com que nós treinássemos bastante o método de interpolação", "foi um jeito importante para a fixação do assunto", "achei legal, algo novo, que não era do meu conhecimento. Prático e bem interessante", "gostei bastante pois não sabia desse método e pude perceber suas vantagens e precisão", "graças a essa atividade nós pudemos executar a interpolação de Lagrange na prática".

Durante os encontros notamos o empenho e envolvimento dos alunos em realizar o que foi solicitado, estando atentos às explicações e participativos quando solicitados a responderem perguntas ou a irem ao quadro resolver os cálculos. Podemos concluir então que a atividade foi bastante satisfatória e atingiu o objetivo de motivar os alunos em um novo aprendizado e de fazê-los participar na construção deste conhecimento de forma prática e enriquecedora.

Capítulo 6

Considerações finais

O trabalho apresentado exemplifica uma possibilidade de estudo dos polinômios através da Modelagem Matemática. Utilizar a Modelagem Matemática não é uma tarefa fácil. Exige muita dedicação do professor. As atividades devem ser bem elaboradas e planejadas, proporcionar motivação no ensino dos conteúdos disciplinares e ao mesmo tempo não atrapalhar o bom andamento da aula e do conteúdo programático. Para tal, o professor precisa de muito tempo e comprometimento com o processo. A Modelagem Matemática muda o papel do professor, de detentor do conhecimento para mediador. O professor, além de ter domínio de conteúdo, ele deve estar aberto aos questionamentos e às sugestões dos alunos. Ao mesmo tempo, muda o papel do aluno, tornando-os corresponsáveis pela formação do conhecimento. O fato de buscar informações e pesquisar em parceria com os alunos foi uma experiência nova e gratificante. Possibilitou observar de perto cada dificuldade dos alunos ao longo de cada etapa e questionamentos. Os alunos se envolveram, assumiram responsabilidades em sala de aula e desenvolveram as atividades interessados em querer aprender. Daí tudo fica mais fácil. A motivação permaneceu intrínseca em todas as etapas. Os alunos saíram da condição de passividade, tornando-se mais ativos no processo de ensino e de aprendizagem. Percebemos que os alunos superaram algumas dificuldades relativas ao conceito de polinômios e perceberam a aplicabilidade da Matemática, mais especificamente da Interpolação de Lagrange, em situações do cotidiano. A temática escolhida serviu como uma fonte de oportunidades não apenas para o aprendizado da Matemática, como também para a formação crítica dos alunos, ajudando-os a estabelecer metas de saúde, dado que todos precisam cuidar desta área em suas vidas. Entendemos que o trabalho com a Modelagem Matemática foi positivo. O processo com a Modelagem Matemática, desde o planejamento até a aplicação da atividade, proporcionou ao professor enxergar conhecimentos novos que podem contribuir para a melhoria da prática docente. Como também, entender melhor como os alunos assimilam o conceito de polinômios e equações algébricas e aprender em conjunto, tentando compartilhar com os alunos conhecimentos adquiridos sobre as aplicações da interpolação de Lagrange no cotidiano. Esperamos que este trabalho possa encorajar outros professores a ensinarem através da Modelagem Matemática e servir como tema motivador para futuras ações.

Referências Bibliográficas

[1] AZEVEDO, Fábio Souto.2013.[Aula sobre interpolação e ajuste].Páginas 1-15.

[2] GUIDE, Leonardo F.[Lâminas de cálculo numérico].Páginas 1-57.

[3] IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 06. Editora Atual.

[4] LIMA, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio, Coleção do professor de Matemática, Volume 01. SBM

[5] LIMA, Elon Lages. números e Funções Reais, Sociedade Brasileira de Matemática. PROFMAT

[6] MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. *Fundamentos da Álgebra de Polinômios*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

[7] MONFORT, Evaristo.2010.[Curso de Nivelamento ao M.S.C.qPEQ-2010].Páginas 1-42

[8] MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio, Coleção do professor de Matemática, Volume 03. SBM

[9] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática*. Vol 3. São Paulo: Moderna, 1995.

[10] REIS, Júlio César dos. *Estudo das raízes polinomiais*. *Cálculo: Matemática para todos*. Edição 23. São Paulo: Segmento, 06/2013.

[11] SANTOS, Almir Rogério Silva; VIGLIONI, Humberto Henrique de Barros. *Estudo dos polinômios*. Aracaju: UFS, 2011.