

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM  
CONTABILIDADE E CONTROLADORIA**

**ANÁLISE DA ESTRUTURA FATORIAL DE MERCADO EM OPÇÕES DE AÇÕES  
INDIVIDUAIS E OPÇÕES DE ÍNDICE DE MERCADO**

**SIMÃO SOUZA DA SILVA**

Orientador: Prof. Dr. Tristão Socrates Baptista Cavalcante

Manaus - Am  
Maio/2016

**ANÁLISE DA ESTRUTURA FATORIAL DE MERCADO EM OPÇÕES DE AÇÕES  
INDIVIDUAIS E OPÇÕES DE ÍNDICE DE MERCADO**

**SIMÃO SOUZA DA SILVA**

Dissertação de Mestrado apresentada a Banca de Examinadores do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Contabilidade e Controladoria como requisito para obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Controladoria.

Orientador: Prof. Dr. Tristão Socrates Baptista Cavalcante

Manaus - Am  
Maio/2016

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586a Silva, Simao Souza da  
Análise da estrutura fatorial de mercado em opções de ações individuais e opções de índice de mercado / Simao Souza da Silva. 2016  
77 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Tristão Socrates Baptista Cavalcante  
Dissertação (Mestrado Profissional em Contabilidade e Controladoria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Opções. 2. Ações. 3. Modelo Fatorial. 4. Firmas Individuais. 5. Índice de Mercado. I. Cavalcante, Tristão Socrates Baptista II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

SIMÃO SOUZA DA SILVA

**ANÁLISE DA ESTRUTURA FATORIAL DE MERCADO EM OPÇÕES DE AÇÕES  
INDIVIDUAIS E OPÇÕES DE ÍNDICE DE MERCADO**

Dissertação apresentada a Banca de Examinadores do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Contabilidade e Controladoria da Universidade Federal do Amazonas como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Controladoria.

**APROVADA EM 19 DE MAIO DE 2016.**

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Tristão Socrates Baptista Cavalcante – UFAM  
Presidente da Banca

---

Prof. Dr. Luiz Augusto de Carvalho Francisco Soares - UFAM  
Membro Examinador

---

Prof. Dr. Manoel Martins do Carmo Filho - UFAM  
Membro Examinador

---

Prof. Dra. Kleomara Gomes Cerquinho - UFAM  
Membro Examinador

---

Prof. Dra. Jean Serrão de Oliveira - UFAM  
Membro Examinador

---

Prof. Dra. Joésia Moreira Julião Pacheco - CETAM  
Membro Examinador Externo

Dedico os resultados deste trabalho em memória de minha mãe e a todos aqueles que me são próximos aos quais durante todo esse tempo os privei da minha presença e dedicação.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço a Deus, autor e consumidor da vida e grande arquiteto do universo, pela capacidade, paciência, perseverança e fé.

Agradeço a Assembleia Legislativa do Estado do Amazonas pelo apoio financeiro para a concretização desse trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Tristão Socrates Baptista Cavalcante pela paciência e liberdade com a qual foi conduzido esse trabalho.

Agradeço ao Professor Livre Docente Dr. Waldemar Antônio da Rocha de Souza pela incentivo e conselhos sempre valiosos, bem como, a inspiração.

Agradeço minha família e amigos pelo apoio e compreensão.

## RESUMO

SILVA, Simão Souza da. **Análise da estrutura fatorial de mercado em opções de ações individuais e opções de índice de mercado.** 2016. p. 77. Dissertação (Mestrado Profissional em contabilidade e controladoria) – Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Contabilidade e Controladoria, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2016.

Opções são derivativos financeiros que permitem ao seu possuidor, mediante o pagamento do prêmio, adquirir certa proteção contra os movimentos ascendentes e descendentes do mercado. O célebre trabalho de Black-Scholes (1973) impulsionou a produção científica de modelos matemáticos em finanças voltados a previsão do comportamento dos preços das ações e opções e outros derivativos. Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) identificaram um fator estrutural em comum entre preços das opções de ações das empresas do índice *Dow Jones Industries* e o índice S&P500, a partir dessa descoberta desenvolveram um modelo de avaliação de opções de ações que leva em conta a volatilidade estocástica do retorno do mercado e a parte idiossincrática dos retornos das firmas individuais. A consistência dos testes do modelo motivou a investigação da aplicabilidade desse modelo no mercado brasileiro. Assim, pretende-se responder a seguinte questão: como o modelo de estrutura fatorial de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) avalia os preços das opções de ações de firmas individuais participantes do índice Ibovespa. Trata-se de um modelo recente e pouco explorado, assim, o objetivo geral é avaliar o desempenho do modelo de estrutura fatorial de mercado na previsão dos preços de opções de ações da Petrobrás S.A. e da Vale S.A com vencimentos em 30 e 60 dias. Especificamente se pretende: levantar as cotações das ações e suas opções; investigar a existência de algum fator estrutural em comum entre os preços das opções de ações das firmas e os preços das opções de ações do índice de mercado Ibovespa, estimar os preços de opções com vencimento em 30 e 60 dias e, por fim, comparar os preços dos modelos com os preços do mercado. Esta pesquisa caracteriza-se em relação aos objetivos como exploratória, documental quando aos procedimentos e quali-quantitativa quanto a sua abordagem. Os dados da pesquisa foram coletados no período de 1º de abril a 30 de junho de 2015. Os resultados da análise da componente principais não identificaram a presença de estrutura fatorial em comum entre os preços das opções das firmas individuais e do índice de mercado, apresentando baixo poder explicativo. Quanto a eficiência do modelo, qualitativamente, verificou-se que este conseguiu estimar satisfatória a desvalorização das opções da Petrobrás com vencimento em 30 e 60 dias e das opções da Vale para 30 dias. Quantitativamente, as previsões do modelo subestimaram os preços das opções das firmas individuais.

Palavras-chave: Opções, ações, modelo fatorial, firmas individuais, índice de mercado,

## ABSTRACT

SILVA, Simão Souza da. **Análise da estrutura fatorial de mercado em opções de ações individuais e opções de índice de mercado.** 2016. p. 75. Dissertação (Mestrado Profissional em contabilidade e controladoria) – Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Contabilidade e Controladoria, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2016.

Options are financial derivatives that allow its holder, upon payment of the premium, acquire some protection against market upward and downward movements. The celebrated work of Black-Scholes (1973) boosted the scientific production of mathematical models in finance aimed at predicting the behavior of stock prices and options and other derivatives. Christoffersen, Fournier and Jacobs (2013) identified a structural factor in common between prices of stock options of companies in the Dow Jones Industries index and the S & P500 index from that discovery developed a model to valuation of stock options that take into account the stochastic volatility of the market return and idiosyncratic part of the individual firms returns. The consistency of model testing led to the investigation of the applicability of this model in Brazil. Thus, we intend to answer the following question: how the factor structure Christoffersen, Fournier and Jacobs (2013) model evaluates the prices of stock options of individual firms participating in the Ibovespa index. This is a recent and few explored model, thus, the overall objective is to evaluate the performance of the market factor structure model in predicting the prices of stock options of Petrobras S.A. and Vale S.A with maturing in 30 and 60 days. Specifically aims to: raise the price of the shares and options; investigate the existence of a structural factor in common between the prices of firms' stock options and prices of stock options of the Ibovespa stock market index, estimating the prices of options maturing in 30 and 60 days and, finally, compare the prices of models with market prices. This research is characterized in relation to the objectives as exploratory, documentary when the procedures and qualitative and quantitative as its approach. The survey data were collected from April 1 to June 30, 2015. The principal component analyze did not identify the presence of factor structure in common between the prices of the options of individual firms and the market index, showing low explanatory power. As the model's efficiency, qualitatively, it was found that this estimate could satisfied with the devaluation of the options Petrobras with maturing in 30 and 60 days and options and Vale in 30 days. Quantitatively, the model predictions underestimated the prices of options on individual firms.

Key-words: Options, equity, factor model, individuals firms, market index.

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Evolução temporal da volatilidade implícita média do Ibovespa, Petrobrás e Vale no período de 1º de abril a 30 de junho de 2015 .....	48
Gráfico 2 - Nível da volatilidade implícita do Ibovespa e nível da volatilidade implícita da análise da componente principal.....	48
Gráfico 3 - Inclinação da curva do moneyness para os dados da amostra e para a componente principal.....	49
Gráfico 4 - Inclinação da curva da estrutura a termo obtida diretamente dos dados e obtidas pela análise da componente principal.....	50
Gráfico 5 - Regressão linear da taxa de retorno do Ibovespa e da taxa de retorno das ações da Petrobrás no período .....	51
Gráfico 6 - Regressão linear da taxa de retorno do Ibovespa e da taxa de retorno das ações da Vale no Período .....	52
Gráfico 7 - Regressão linear das cotações do Ibovespa em função dos preços das opções do índice no período .....	53
Gráfico 8 - Regressão linear das cotações do Petrobrás em função dos preços de suas opções do índice no período .....	53
Gráfico 9 - Regressão linear das cotações da Vale em função dos preços das opções no período.....	53
Gráfico 10 - Preço das opções da Petrobrás obtidos pelos modelos e os preços de mercado no dia anterior ao vencimento .....	56
Gráfico 11 - Preço das opções da Petrobrás obtidos pelos modelos e os preços de mercado no dia anterior ao vencimento .....	57
Gráfico 12 - Evolução histórica nos preços das ações da Petrobras (Petr4).....	59
Gráfico 13 - Evolução histórica nos preços das ações da Vale (Vale5).....	60
Gráfico 14 - Evolução histórica nos preços do minério de ferro.....	60

## LISTA DE TABELAS

Tabela1: Empresas, Código e Contratos de Opções.....	43
Tabela 2: Estatística resumida da Volatilidade Implícita (IV) .....	46
Tabela_3: Análise da Componente Principal dos níveis de volatilidade implícita das ações, cargas das componentes e propriedades .....	47
Tabela_4: Análise da Componente Principal da inclinação do moneyness da volatilidade implícita das ações, cargas das componentes e propriedades.....	49
Tabela_5: Análise da Componente Principal da inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita das ações, cargas das componentes e propriedades.....	50
Tabela_6: Estimativa dos parâmetros do modelo.....	55
Tabela_7: Previsão do modelo para a Petrobrás em 30 dias. ....	56
Tabela_8: Previsão do modelo para a Petrobrás em 60 dias. ....	57
Tabela_9:Previsão do modelo para a Vale em 30 dias.....	58
Tabela_10: Previsão do modelo para a Vale em 60 dias.....	58

## Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 TEMA E PROBLEMA.....	1
1.2 OBJETIVOS.....	2
1.2.1 Objetivo Geral.....	2
1.2.2 Objetivos Específicos.....	2
1.3 JUSTIFICATIVA.....	3
1.4 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA.....	3
1.5 ESTRUTURA DA PESQUISA.....	3
<b>2. REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	5
2.1 MERCADO FINANCEIRO E SEUS PRODUTOS.....	8
2.1.1 As Gregas.....	10
2.1.2 Opções.....	10
2.1.3 <i>Moneyness</i> .....	11
2.2 MODELAGEM DE MERCADO.....	11
2.3 MODELO DE DOIS FATORES DE FAMA E MACBETH.....	13
2.4 MODELO FATORIAL.....	14
2.5 PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO DO RISCO NEUTRO.....	15
2.6 RETORNOS ESPERADOS.....	16
2.7 VOLATILIDADES E RISCO.....	17
2.8 FATORES COMUNS DE RISCO.....	22
2.9 CARTEIRA DE INVESTIMENTO.....	23
2.10 RISCO SISTÊMICO E ESTRUTURA A PREÇO.....	25
2.11 ESTRUTURA A TERMO.....	26
2.12 ESTRUTURA A FATOR DA VOLATILIDADE.....	27
2.13 REGRESSÃO <i>CROSS-SECTION</i> .....	28
2.14 PRECIFICANDO A VOLATILIDADE SISTÊMICA NA <i>CROSS-SECTION</i> .....	30
2.15 AVALIAÇÃO DE OPÇÃO DE AÇÃO USANDO ESTRUTURA FATORIAL ÚNICA.....	32
2.15.1 A Distribuição do Risco Neutro.....	33
2.16 MODELO FATORIAL DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES.....	34
2.17 PROPRIEDADES DO MODELO.....	36
2.17.1 Nível de Volatilidade da Opção de Ação.....	36
2.17.2 Assimetria da Opção de Ação.....	37
2.17.3 A Estrutura a Termo da Volatilidade de Ações.....	38
2.17.4 Gerenciamento do Risco de Opção de Ação.....	39
2.17.5 Retornos Esperados em Opção de Ação.....	40
<b>3. METODOLOGIA DA PESQUISA</b> .....	41

3.1 TIPOLOGIA DA PESQUISA .....	41
3.2 DADOS.....	42
3.3 TRATAMENTO DE DADOS .....	43
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>46</b>
4.1 ANÁLISE PRELIMINAR DOS DADOS .....	46
4.2 DETERMINAÇÃO DOS BETAS .....	51
4.3 DETERMINAÇÃO DOS DELTAS .....	52
4.4 CALIBRAÇÃO DO MODELO.....	54
4.5 AVALIAÇÃO DO MODELO.....	55
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>61</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>65</b>

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 TEMA E PROBLEMA

O mercado de capitais é o termômetro do desempenho das modernas economias globalizadas. Governos, Instituições financeiras, empresas de grande porte, fundos de investimentos, *dealers* ou *market-makers*, bem como, investidores individuais estão expostos ao risco de oscilação nos preços dos ativos e a possibilidade de lucros ou prejuízos iminentes. Na tentativa de prever o comportamento do mercado, ao longo do tempo diversos modelos têm sido desenvolvidos, sem, entretanto, conseguir prever com precisão o comportamento do mercado.

A despeito do risco, o mercado financeiro oferece os melhores retornos àqueles investidores que se sujeitam à essa dinâmica de preços e riscos. As ciências financeiras, econômicas e afins se preocupam com o estudo desse cenário tão imprevisível e impressionante.

As pesquisas sobre o tema ações e opções tentam antecipar o movimento do mercado financeiro por meio de modelos matemáticos objetivando uma melhor avaliação dos preços das ações e de suas opções. As opções são instrumentos financeiros que permitem ao seu possuidor, mediante o pagamento do prêmio, adquirir certa proteção contra os movimentos ascendentes e descendentes do mercado (*hedge*).

O tempo consolidou o modelo de precificação de Black-Scholes (1973), transformando-o em um marco na evolução das finanças. O modelo determina o valor de uma opção de compra de uma ação a partir da determinação da probabilidade da opção expirar *in-the-money*, admitindo que os preços estariam distribuídos normalmente. Em 1993, Heston lançou seu modelo nos moldes de Black-Scholes (1973), porém, admitindo que os preços estava distribuídos obedecendo a determinada função característica harmônica.

A partir do modelo de Heston, Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) lançaram um modelo de precificação de opções introduzindo informações acerca da existência de uma estrutura fatorial de mercado entre as ações individuais e o mercado, o que conduziu a adição dois termos na função característica de Heston (1993).

Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) identificaram um fator em comum entre preços das opções de ações das empresas do *Dow Jones Industries* e o índice S&P500. A análise da primeira componente principal explicou 77% da variação do nível de volatilidade implícita, 77% da variação da inclinação do *moneyness* das opções de ações e 60% da inclinação da

estrutura a termo da volatilidade implícita das ações. Além disso, a primeira componente principal mostrou uma correlação entre as opções de ações individuais de 92% com o nível da volatilidade da opção do índice S&P 500, correlação de 64% com a inclinação do *moneyness* da opção do índice e uma correlação de 80% com a inclinação da estrutura a termo da opção de índice.

Com base nessa descoberta, Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) desenvolveram um modelo de avaliação de opções de ações que captura a estrutura fatorial de mercado. O modelo leva em conta a volatilidade estocástica do retorno do mercado e também a parte idiossincrática dos retornos das firmas individuais.

Diante dos resultados obtidos por Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) é de interesse investigar a aplicabilidade desse modelo no mercado brasileiro. Assim a questão de pesquisa é: como o modelo fatorial de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) prevê o preço das opções de ações das firmas Petrobras e Vale no mercado brasileiro?

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral é avaliar o desempenho do modelo de estrutura fatorial de mercado na previsão dos preços de opções de ações dessas empresas em 30 e 60 dias.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Especificamente se pretende:

- Levantar as cotações das ações e das opções no período de 1º de abril a 30 de junho de 2015;
- Investigar a existência de fatores em comum nos preços das ações da Petrobras e Vale e os preços das opções índice de mercado Ibovespa;
- Estimar os preços das opções usando o modelo em uma rotina de programação e;
- Testar a eficiência do modelo de estrutura fatorial na previsão dos preços das opções de ações da Petrobras e da Vale para vencimento em 30 e 60 dias.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Esta pesquisa se justifica pela exploração de um modelo de precificação de opções recentemente publicado e pouco conhecido no Brasil. Seu estudo contribui para a divulgação do modelo, bem como, para a consolidação dessa linha de pesquisa no país. Contribui ainda para municiar os investidores e participantes do mercado com mais uma ferramenta para avaliação dos preços futuros das opções, permitindo-lhes medir e gerenciar sua exposição total risco da variância do mercado. Contribui ainda para aprofundamento do conhecimento em novas oportunidades de investimentos, dotando o pesquisador de um conhecimento sólido em finanças e modelagem financeira.

### 1.4 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa está voltada ao estudo de derivativos do mercado financeiro, especifica opções de ações. Foram objetos de estudos as duas maiores empresas brasileira em termos de valor de mercado, a Petróleo Brasileiro S.A. – Petrobras e a Vale S.A. Para a previsão dos preços das opções foi adotado o modelo da estrutura fatorial de mercado desenvolvido por Christoffersen, Founier e Jacobs (2013), subsidiariamente foi utilizado o modelo de Heston meramente para comparação. Os dados para parametrização do modelo foram coletados nos boletins diários da Bovespa abrangendo o período de 1º de abril a 30 de junho de 2015, correspondendo a um trimestre.

O cenário econômico não era favorável às empresas. A Petrobras enfrentava um conturbado momento de descrédito dos investidores decorrentes de incidentes operacionais e ambientais, fortalecidos pelos escândalos de corrupção na alta administração da empresa. Por sua vez, a Vale enfrentava a queda no preço do minério de ferro, no qual a empresa é o maior produtor mundial, bem como, a crise que atingiu seus principais mercados consumidores, notadamente a China.

Outro fato a se considerar, diz respeito, ao tipo de mercado em que os ativos financeiros dessas empresas são negociados. O mercado brasileiro de capital é considerado um mercado emergente, portanto, mais propenso a oscilações bruscas nos preços dos ativos decorrentes da maior sensibilidade a influência de eventos econômicos internos individuais e globais, ocasionando perda de valor de mercado.

### 1.5 ESTRUTURA DA PESQUISA

O restante do trabalho está dividido da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão da literatura relacionada a opções, modelos de precificação e estado da arte. No

Capítulo 3, destaca-se a metodologia da pesquisa, destacadamente, sua tipificação, dados da pesquisa, bem como, o respectivo processo de coleta, seleção e tratamento.

Os resultados e discussões estão registrados no Capítulo 4. Iniciando com uma análise preliminar dos dados da amostra, seguido da determinação os betas, deltas. Ajustes do modelo e avaliação do modelo seguem logo após.

Por fim, no Capítulo 5, apresenta-se as considerações finais da pesquisa, contemplando a revisão dos objetivos e considerações acerca da análise quali-quantitativa. Restando, por fim, as perspectivas futuras quanto ao tema.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Em um de seus célebres trabalhos, Fama e French (1993) identificaram cinco fatores de risco comum nos retornos de ações e títulos da dívida. Sendo três fatores do mercado de ação: um fator global de mercado e dois fatores relacionados ao tamanho da firma e o *book-to-market equity* (razão entre o valor contábil de uma firma e os valor de suas ações no mercado) e, os outros dois fatores do mercado de títulos da dívida, relacionados a maturidade e risco de inadimplência.

Assim, os retornos das ações compartilhariam variações devido aos fatores do mercado de ações, e estes, estariam ligados aos retornos dos títulos por meio da variação compartilhada dos fatores do mercado de títulos. Exceto para empresas com baixo grau, os fatores do mercado de títulos capturariam a variação comum nos retornos dos títulos. O mais importante, os cinco fatores parecem explicar os retornos médios das ações e títulos da dívida.

No mesmo ano, Heston (1993) usando uma técnica inovadora à época deduziu uma solução de forma fechada para o preço da opção de compra (*call*) europeia em um ativo com volatilidade estocástica.

O modelo admitia correlação arbitrária entre a volatilidade e retornos do ativo a vista (*spot*), apresentando taxas de juros estocásticas e mostrando como aplicar o modelo a opções de ações e opções de câmbio. As simulações mostraram que a correlação entre volatilidade e preço do ativo a vista (*spot*) era importante para explicar a assimetria do retorno e o viés do preço de exercício do modelo de Black-Scholes de 1973. A técnica-solução estava baseada em uma função característica que poderia ser aplicada à outros problemas semelhantes.

Outro relevante marco histórico diz respeito a Cox, Ingersoll e Ross (1985). Eles usaram um modelo de precificação de ativo de equilíbrio geral intertemporal para estudar a estrutura a termo das taxas de juros. Nesse modelo, antecipações, aversão ao risco, alternativas de investimentos e preferências sobre a cronometragem do consumo tem todos um papel na determinação dos preços dos títulos.

Muitos dos fatores tradicionalmente mencionados como influentes da estrutura a termo são, assim, inclusos de maneira que seja plenamente consistente com o comportamento maximizado e as expectativas racionais. O modelo levou à fórmulas específicas para os preços dos títulos, bem adequados aos testes empíricos.

Outros pesquisadores como Dennis e Mayhew (2002) investigaram a importante relação de vários fatores na explicação do viés da volatilidade observada nos preços de opções de ação negociadas na *Chicago Board Options Exchange*.

A assimetria da densidade do risco neutro implícita dos preços das opções de ações individuais tendia a ser mais negativa para ações que tinham maiores betas, sugerindo que o risco de mercado seria importante quando se precificasse opções de ações individuais. Perceberam ainda, que a assimetria implícita tenderia a ser mais negativa em períodos de alta volatilidade do mercado e quando a densidade de risco neutro para opções de índice era mais negativamente enviesada.

Outros fatores específicos das firmas, como o tamanho da firma e o volume de transações também ajudariam a explicar a variação *cross-section* na assimetria. No entanto, não encontraram qualquer relação robusta entre assimetria e a alavancagem da firma. Nem encontraram evidências de que a assimetria estaria relacionada a taxa *put/call*, o que poderia ser visto como uma *proxy* para a pressão das negociações ou o sentimento do mercado. Dennis e Mayhew (2002) concluem que os fatores específicos da firma parecem ser mais importantes dos que fatores sistêmicos na explicação da variação do viés para firmas individuais.

Bakshi, Kapadia e Madan (2003) estudaram a precificação diferencial das opções de ação individual *versus* o índice de mercado e relacionaram as variações na assimetria do retorno. Mostraram como a aversão ao risco introduz a assimetria na densidade do risco neutro. Por fim, deduziram as leis que decompõem a assimetria do retorno individual em uma componente sistêmica e uma componente idiossincrática. As análises empíricas das opções do índice OEX e 30 ações individuais demonstraram que as distribuições do risco neutro individual diferem daqueles do índice de mercado por ser muito menos negativamente assimétrica. Seu artigo explicou a presença e a evolução da assimetria de risco neutro no tempo e na *cross-section* de ações individuais.

Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006) examinaram a precificação do risco da volatilidade agregada na *cross-section* dos retornos de ações. Descobriram que ações com alta sensibilidade a inovações na volatilidade agregada tem baixos retornos médios. Ação com alta volatilidade idiossincrática com relação ao modelo de Fama e French de 1993 tem retornos médios abissalmente baixos. Esse fenômeno não poderia ser explicado pela exposição ao risco da volatilidade agregada. Os efeitos do tamanho, valor de mercado, momento e liquidez não poderiam contar para ou os baixos retornos médios ganhos das ações com alta exposição ao

risco da volatilidade sistêmica ou aos baixos retornos médios de ações com alta volatilidade idiossincrática.

Por sua vez, Duan e Wei (2007) demonstraram o impacto do risco sistêmico nos preços de opções de ações individuais. Os preços das opções seriam caracterizados pelo nível e inclinação das curvas de volatilidade implícita e o risco sistêmico é medido como a proporção da variância sistêmica na variância total. Usando cotações diárias de opção no índice S&P100 e suas 30 maiores ações componentes, os autores mostraram que, após controlar o risco total do ativo subjacente, uma quantia mais elevada de risco sistêmico leva a um nível mais elevado de volatilidade implícita e a uma inclinação mais íngreme da curva de volatilidade implícita. Desse modo, a proporção do risco sistêmico poderia ajudar a diferenciar a estrutura a preço através das opções de ação individual.

Já Goyal e Saretto (2008) estudaram a *cross-section* dos retornos de opções de ação construindo decil-carteras dos *straddles* e os *delta-hedged* de *calls* e *puts* baseados em ações de curta posição na diferença entre volatilidade realizada histórica e volatilidade implícita *at-the-money*. Descobriram que uma estratégia de negociação de custo zero que tem uma longa posição na carteira com uma grande diferença positiva ou uma curta com uma grande diferença negativa, entre essas duas medidas da volatilidade produzem um retorno mensal médio significativo economicamente e estatisticamente, para vários grupos de indústrias, para características de liquidez de opção e não são explicadas pelos modelos de fator de risco usuais.

Ainda sobre volatilidade e estrutura fatorial, para Kelly, Lustig e Van Nieuwerburgh (2012) a volatilidade ao nível da firma obedece a uma forte estrutura fatorial. Essa estrutura seria distinta de uma variação comum nos próprios retornos – após a remoção de fatores comuns nos retornos, os resíduos não estariam correlacionados, contudo, a volatilidade idiossincrática possuiria a mesma estrutura fatorial quanto a volatilidade total.

De fato, a volatilidade idiossincrática domina a variação total das firmas – menos do que 5% da variação nos retornos diários é atribuída aos fatores comuns. A estrutura fatorial se mantém não apenas para os retornos, desse modo, qualquer explicação para estrutura fatorial da volatilidade dever contribuir tanto para a volatilidade fundamental quanto para o retorno, descartando argumentos baseados puramente em taxas de descontos ou no comportamento do investidor.

Para Engle e Figlewski (2014) a volatilidade implícita refletiria tanto a volatilidade empírica esperada como o prêmio do risco. A variação estocástica em ambos criaria riscos não

cobertos em uma posição *delta-hedged* de opções. Desenvolveram o modelo EGARCH/DCC para as dinâmicas das volatilidades e determinaram a correlação entre as volatilidades implícitas diárias de opções em 28 ações de grandes empresas. Os fortes dados suportam uma estrutura geral de correlação e também um modelo de um-fator com o índice VIX como o fator comum. Usando as volatilidades implícitas de ações que estão ou altamente correlacionadas com a volatilidade implícita das ações subjacentes ou da mesma indústria juntas com a VIX, poderia melhorar significativamente o *hedging* das mudanças na volatilidade implícita individual.

## 2.1 MERCADO FINANCEIRO E SEUS PRODUTOS

Nesse momento é relevante lançar algumas definições e conceitos elementares, objetivando contextualizar a pesquisa.

Derivativo, conforme Hull (2009) é um instrumento financeiro cujo valor depende ou deriva do valor de outras variáveis subjacentes mais básica, o ativo-objeto. Muito frequentemente, os derivativos das variáveis subjacentes estão nos preços dos ativos negociados. Esses derivativos são negociados em bolsa de valores.

Uma bolsa de derivativos é um mercado onde indivíduos negociam contratos padronizados definidos pela própria bolsa. No mercado de balcão as transações são realizadas por telefone ou por computador conectado à rede de *dealers*, normalmente entre duas instituições financeiras ou entre uma instituição e um cliente. As instituições financeiras agem como *market makers* para a maioria dos instrumentos comumente negociados. Isso significa que eles estão sempre preparados para cotar tanto um *bid price* (um preço no qual eles estão preparados para comprar) quanto um *offer price* (um preço no qual eles estão preparados para vender). Opções são tanto negociadas em bolsas quanto em mercado de balcão.

Há dois tipos de opções. A opção *call* ou de compra, que dá ao possuidor o direito de comprar um ativo subjacente em uma certa data por um certo preço. E a opção *put* ou de venda, que dá ao seu possuidor o direito de vender um ativo subjacente em certa data por certo preço. O preço ativo subjacente no contrato é conhecido como o preço do exercício ou *strike price*; a data do contrato é conhecida como a data de vencimento ou maturidade. As opções podem ser americanas ou europeias.

As opções americanas podem ser exercidas em qualquer momento até o vencimento, as opções europeias podem ser exercidas apenas na própria data de vencimento.

Uma opção de ação é um derivativo cujo valor é dependente do preço de uma ação. Não somente dele, os preços de uma opção podem depender de quase qualquer outra variável, desde os preços dos suínos até a quantidade de neve caindo em certo *resort* de esqui.

O investidor que compra a opção toma a longa posição (*long position*) e o investidor que vende ou subscreve a opção toma a curta posição (*short position*). O *straddle* consiste em uma estratégia de comprar ou vender uma opção *call* e uma *put* de mesmo preço de exercício e mesmo vencimento, gerando retornos quando a volatilidade realizada futura diferir das expectativas do mercado. Outro produto do mercado de capitais são os contratos futuros.

Um *forward contract* é um acordo de compra ou venda de um ativo a ser entregue em certa data no futuro por um preço acertado previamente. O seu oposto é o contrato a vista (*spot contract*), um acordo de compra ou venda de um ativo no preço de hoje. Um contrato futuro é negociado no mercado de balcão, normalmente entre duas instituições financeiras ou entre uma instituição financeira e um de seus clientes.

Uma das partes em um contrato futuro assume uma longa posição (*long position*) e concorda em comprar um ativo subjacente ou ativo objeto em uma certa data futura específica por um certo preço específico. A outra parte assume uma curta posição (*short position*) e concorda em vender o ativo na mesma data pelo mesmo preço.

De acordo com Hull (2009), um contrato futuro (*future contract*) é um acordo entre duas partes para compra ou venda de um ativo em um certo momento no futuro por um certo preço. Os contratos futuros são negociados normalmente em bolsa de derivativos.

Três categorias de negociantes podem ser identificadas no mercado de derivativos: *hedgers*, especuladores e árbitros. Os *hedgers* usam derivativos para reduzir o risco que eles enfrentam do potencial movimento futuro em uma variável de mercado. Os especuladores usam os derivativos para apostar na direção futura de uma variável de mercado. Os árbitros tomam posição de compensação em dois ou mais instrumentos para travar um lucro.

O *market-maker* é o um indivíduo que, quando assume essa posição, cotará um preço *bid* e um *offer* na opção. O *bid* é o preço no qual o *market-maker* está preparado para comprar e o *offer* é o preço no qual o *market maker* está preparado para vender. O *bid* e o *offer* são cotados ao mesmo tempo, e o valor pelo qual o *offer* excede o *bid* é chamado como *bid-offer spread* ou *bid-ask spread*.

### 2.1.1 As Gregas

O delta de uma opção é definido como a taxa de variação do preço da opção com respeito ao preço do ativo subjacente. É a inclinação da curva que relaciona o preço da opção ao preço do ativo subjacente. Isso significa que se o delta é 0,6, quando o preço da ação muda em uma pequena quantidade o preço da opção varia 60%.

O Vega de uma carteira de derivativos é a taxa de variação do valor da carteira com respeito a volatilidade do ativo subjacente. Se o valor absoluto do vega é alto, o valor da carteira é muito sensível as pequenas variações na volatilidade.

O Gama de uma carteira de opções em um ativo subjacente é a taxa de variação do delta da carteira com respeito ao preço do ativo subjacente. Se o gama é grande, o delta é altamente sensível ao preço do ativo subjacente.

O Theta de uma carteira de opções é a taxa de variação do valor da carteira com respeito a passagem do tempo com tudo o mais permanecendo o mesmo.

### 2.1.2 Opções

Uma opção é um título derivativo do mercado financeiro. Uma opção faculta ao seu possuidor o direito de comprar ou vender algo, sob certas condições dentro de um período de tempo especificado, de acordo com Black e Scholes (1973), distinguindo-se em opções *call* e *put*. As opções do tipo *call* facultam ao seu possuído do direito de compra e, as opções do tipo *put* o de venda. O preço pago pelo ativo objeto da opção quando está é exercida é chamado de preço de exercício ou *striking price*. E o preço pago para adquirir a opção é chamado de preço ou prêmio da opção.

Quanto ao exercício, as opções podem ser classificadas como americanas ou europeias; as americanas asseguram o direito de exercício em qualquer tempo enquanto dentro da validade da opção, por outro lado, as opções europeias asseguram ao seu possuidor o direito de exercício apenas na data de seu vencimento ou maturidade da opção, a partir do qual o direito do possuidor da opção deixa de existir.

Black e Scholes (1993) caracterizam as situações em que as opções *call* são exercidas. Quando o preço da ação é maior que o preço de exercício da opção, é dado como certo seu exercício, no caso contrário, em que o preço da ação é menor que o preço da opção, também, é dado como certo que ela vencerá sem ser exercida.

Outro fator a influenciar o preço da opção é a vida útil. Se a data de vencimento está ainda distante, o valor da opção ou prêmio, definido como a diferença entre o preço da ação e o preço de exercício da opção, será muito baixo. No outro extremo, o valor de uma opção declina nas proximidades do seu vencimento se o valor da ação não se altera.

De acordo com Dennis e Mayhew (2002), sob a suposição do paradigma de precificação do risco neutro, o preço de uma opção seria igual ao seu pagamento esperado descontado sob a medida do risco neutro. Essa expectativa pode ser calculada integrando a função de pagamento sobre a função de densidade de risco neutro.

### 2.1.3 *Moneyness*

Nos termos de Brittain, Garcia e Irwin (2011), opções que são ativamente negociadas contêm informação mais precisa do que aquelas não líquidas. Opções são negociadas por diversos exercícios ou preços de exercício, e o desvio entre o preço de exercício e o preço corrente do ativo é usado para classificar uma opção em termos de seu *moneyness*.

Uma opção *call* ou de compra é dita *in-the-money* (ITM) se o preço do ativo subjacente é maior que o preço de exercício; é dita *out-the-money* (OTM) se o preço do ativo é menor que o preço de exercício e, é dita *at-the-money* (ATM) se o preço do ativo é igual ao preço de exercício da opção.

Uma opção *put* é *in-the-money* (ITM) se o preço do exercício é maior do que o preço futuro e é *out-of-the-money* (OTM) se o preço de exercício é menor do que o preço futuro. Se os preços de exercício e futuros são iguais, a opção é dita como *at-the-money* (ATM).

## 2.2 MODELAGEM DE MERCADO

Para Fama e MacBeth (1973) o mercado de capital é admitido como perfeito no sentido que os investidores são tomadores de preços e não há custos de transação nem custo de informação.

As distribuições dos retornos percentuais de um período em todos os ativos e carteira são admitidas como normal ou conforme a algum outro membro da classe de dois parâmetros. Os investidores são admitidos como avessos a risco e se comportam como se eles escolhessem entre as carteiras com base na máxima utilidade esperada. Os investidores possuem diferentes preferências pelo risco.

Diferentes pessoas reagem ao risco de diferentes maneiras. Há três categorias para descrever como os investidores respondem ao risco, conforme Gittman e ????. A primeira categoria descreve o comportamento da maior das pessoas no tempo, é chamada de aversão ao risco.

Uma pessoa que é avessa ao risco (*risk-averse*) prefere risco um menor a despeito de investimentos mais arriscados, mantendo a taxa de retorno fixada. Um investidor avesso ao risco que acredita que dois diferentes investimentos tem o mesmo retorno esperado escolherá o investimento cujos retornos são mais certos. Dizendo de outro modo, quando decidindo entre dois investimentos, um investidor avesso ao risco não fará o investimento mais arriscado a menos que este ofereça um retorno esperado mais elevado para compensar o investidor por enfrentar o risco adicional.

A segunda atitude em relação ao risco é chamada de neutralidade ao risco. Um investidor que é neutro ao risco (*risk-neutral*) escolhe investimentos baseados apenas em seus retornos esperados, sendo indiferente aos riscos. Quando decidindo entre dois investimentos, um investidor neutro ao risco sempre escolherá o investimento com o retorno esperado mais elevados sem levar em consideração o seu risco.

Finalmente, um investidor buscador de risco (*risk-seeking*) é aquele que prefere investimentos com riscos mais altos e pode mesmo sacrificar algum retorno esperado quando decide por um investimento de maior risco.

Em um mercado de capital perfeito, investidores avessos a risco e distribuição de retorno de dois parâmetros implicam no importante teorema da definição de eficiente: A carteira ótima para qualquer investidor deve ser eficiente no sentido que nenhuma outra carteira com o mesmo ou maior retorno esperado tem menor dispersão do retorno.

Para Brittain, Garcia e Irwin (2011), os retornos empíricos são calculados usando a hipótese de eficiência de mercado como referência subjacente para avaliar a eficiência da precificação. Essa hipótese afirma que os preços correntes refletem a informação conhecida e funcionam como uma expectativa não enviesada dos preços futuros. Como resultado, os lucros econômicos para manter um ativo financeiro seria zero.

No modelo de mercado postulado por Bakshi, Kapadia e Madan (2003), o retorno da ação individual pode ser decomposto em uma componente sistêmica e uma componente idiossincrática, expresso por uma relação entre as assimetrias individual, do índice e idiossincrática. Uma vez que, a componente de risco idiossincrático é simétrica (ou enviesado

positivamente) e a distribuição do índice é enviesada negativamente, pode-se restringir a assimetria individual do risco neutro a ser menos negativo do que a do mercado. Em um exemplo particular, a alavancagem para a assimetria tem como implicação que alguns retornos de ações individuais são neutros ao risco e mais enviesados a esquerda do que o índice, o que seria inconsistente com os dados utilizados.

Para Bakshi, Kapadia e Madan (2003) seria crucial conceber que as distribuições de risco neutro do índice, negativamente enviesadas, fossem possíveis mesmo quando a distribuição do retorno físico fosse simétrica. O resultado foi conseguido quando o processo do retorno era da família das distribuições físicas de cauda grossa (*fat*) e o agente representativo sendo avesso ao risco. Esse resultado mantinha-se para uma ampla classe de funções de utilidade e assim forneceu o fundamento para a assimetria de risco neutro negativa.

Esses autores concluíram que as inclinações dos *smiles* da ação individual seriam constantemente negativas, porém, muito menos negativas do que as do índice. A diferença registrada na inclinação do índice e *smiles* individuais produziria uma substancial diferença no preço relativo das opções, portanto, a estrutura dos preços de opções de ação individual seria mais plana comparada com aquela de índice de mercado, decorrente da aversão ao risco.

Além disso, as variações nas assimetrias do risco neutro seriam instrumentais na explicação do preço diferencial das opções de ação individual.

Quanto mais enviesado negativamente a distribuição de retorno, mais íngremes seriam seus *smiles* da volatilidade. E ainda, quando as distribuições de risco neutro evoluíssem para terem a cauda mais grossa, o *smile* alcançaria sua menor inclinação decrescente. Especificamente, uma curtose de risco neutro mais elevada, achataria o *smile* na presença da cauda a esquerda. As regressões *cross-sectional* confirmaram que, na média, ações enviesadas menos negativamente tem *smiles* mais planos.

### 2.3 MODELO DE DOIS FATORES DE FAMA E MACBETH

Fama e MacBeth (1973) postularam um mercado com investidores avessos ao risco que tomavam decisões em carteiras, período a período, de acordo com um modelo de dois fatores, para determinar suas implicações nas propriedades observáveis dos retornos de títulos e carteiras.

Para isso propuseram duas categorias de implicações. Primeira, há condições nos retornos esperados que seriam implícitas do fato de que em um mundo de dois parâmetros os investidores manteriam carteiras eficientes. Segunda, há condições no comportamento dos retornos através do tempo que são implícitos pela suposição do modelo de dois parâmetros de que o mercado de capital é perfeito ou sem atrito, no sentido que não há custos de transação nem informação.

## 2.4 MODELO FATORIAL

O modelo de fator de Kelly, Lustig e Van Nieuwerburgh (2012) é da forma:

$$r_{i,t} = \gamma_{0,i} + \gamma_i' F_t + \varepsilon_{i,t}$$

Usando todas as observações do retorno de data  $t$  no ano (onde a frequência  $t$  é ou diária ou mensal).

A volatilidade idiossincrática de uma firma seria calculada como o desvio padrão dos resíduos  $\varepsilon_{i,t}$  dentro do ano-calendário. O resultado desse procedimento seria um painel de estimativas da volatilidade idiossincrática por firma-ano.

O primeiro modelo fatorial de retorno considerado por Kelly, Lustig e Van Nieuwerburgh (2012) especifica  $F_t$  como um vetor 3x1 dos fatores de Fama-French (1993). O segundo modelo fatorial do retorno usado era puramente estatístico. Nesse caso,  $F_t$  conteria as primeiras  $K \times 1$  componentes principais dos retornos dentro do ano, onde admite-se que  $K$  esteja entre 1 e 10.

De acordo com Kelly, Lustig e Van Nieuwerburgh (2012) se os retornos têm fatores em comum e as volatilidades desses fatores variam no tempo, então a variância a nível de firma também herdaria uma estrutura fatorial.

Ademais, as volatilidades dos resíduos mostraram um mesmo grau de variação comum a respeito do fato que os fatores de retornos comuns teriam sido removidos. O fato interessante é que a variação comum nos retornos, contabilizado por esses modelos fatoriais, seria responsável por muito pouco da variação total dos retornos. A média da log volatilidade idiossincrática dos modelos fatoriais seria virtualmente igual a média da volatilidade do retorno total.

Semelhantemente, a dispersão na log volatilidade da firma seriam mais ou menos não afetada pela remoção dos fatores comuns, as comunidades entre retornos teriam muito pouca

influência nas comunidades das volatilidades dos retornos. A distribuição *cross-section* da volatilidade total e da volatilidade idiossincrática seria, assim, quantitativamente, idênticas.

## 2.5 PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO DO RISCO NEUTRO

De acordo com Dennis e Mayhew (2002) as densidades implícitas de risco neutro tendem a ser mais negativamente enviesadas do que as densidades log normais e que o valor da assimetria variaria no tempo.

Adicionalmente, conforme Bakshi, Kapadia e Madan (2000) os momentos da densidade de risco neutro podem ser expressos em termos dos preços dos pagamentos que dependem do preço futuro da ação. Qualquer função de pagamento com expectativas delimitadas pode ser medida por um contínuo de *calls* e *puts out-of-the-money*. Portanto, os preços desses pagamentos podem ser expressos como uma combinação linear dos preços das *calls* e *puts*. Isso forneceria uma simples maneira para calcular a assimetria de risco neutro.

Dennis e Mayhew (2002) realizaram análises *cross-sectional* para determinar como a assimetria de risco neutro estaria relacionada a alavancagem, tamanho da firma, beta, volume de transação e taxa de volume *call/put*. Os autores concluíram que firmas com mais alavancagem tem assimetria mais negativa e firmas com grandes betas e grande valor de mercado tem assimetria mais negativa, enquanto que firmas com volume de transação mais elevados teriam assimetria mais positiva.

Ainda, por meio da análise da regressão *cross-sectional*, Dennis e Mayhew (2002) determinaram a extensão para a qual as assimetrias das ações individuais são influenciadas pela volatilidade e assimetria do mercado, estimando a regressão *cross-sectional* das séries temporais agrupadas. A assimetria da ação individual tende a ser mais negativa (enviesado a esquerda) quando a volatilidade do mercado é mais elevada e quando a assimetria do mercado é mais negativa.

Por fim, Bakshi, Kapadia e Madan (2003) consolidam um número de propriedades-núcleos refletidas por todas as distribuições (de preço) do risco neutro individual da seguinte forma: ações individuais são suavemente enviesadas a esquerda (ou mesmo positivamente enviesada), enquanto as distribuições de retorno de índice são pesadamente enviesadas a esquerda.

Por meio de contraste, não há padrão consistente para o preço dos quatro momentos na regressão *cross-section*, embora, a assimetria individual seja negativa na maior parte do tempo, suas magnitudes são raramente mais negativas em relação ao índice, a assimetria do índice nunca seria positiva mesmo periodicamente. E por último, a relação empírica entre a assimetria do índice de risco neutro e os mais altos momentos da distribuição física, mostraram que a diferença substancial nas magnitudes da assimetria de risco neutro e físico seriam primariamente uma consequência da aversão ao risco e das distribuições físicas de cauda longa.

Outra variável importante nos modelos diz respeito ao retorno esperado.

## 2.6 RETORNOS ESPERADOS

No modelo de Fama e Macbeth, a implicação do modelo de dois parâmetros para os retornos esperados deduz-se da condição de eficiência ou relação risco-retorno esperado. Primeiro, é conveniente reescrever essa condição como:

$$E(\tilde{R}_i) = [E(\tilde{R}_m) - S_m] + S_m \sigma(\tilde{R}_m) \beta_i$$

Onde

$$\beta_i = \frac{cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)}{\sigma^2(\tilde{R}_m)} = \frac{\sum_{j=1}^N x_{jm} \sigma_{ij}}{\sigma^2(\tilde{R}_m)} = \frac{cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) / \sigma(\tilde{R}_m)}{\sigma(\tilde{R}_m)},$$

O parâmetro  $\beta_i$  pode ser interpretado como o risco do ativo  $i$  na carteira  $m$ , medido com relação ao  $\sigma(\tilde{R}_m)$ , o risco total de  $m$ . A interceptação nessa equação:

$$E(\tilde{R}_0) \equiv E(\tilde{R}_m) - S_m \sigma(\tilde{R}_m),$$

é o retorno esperado em um título cujo retorno não está correlacionado com  $\tilde{R}_m$ - isto é, um título de beta-zero. Assim,  $\beta = 0$  implica que um título contribui em nada para  $\sigma(\tilde{R}_m)$ , o que significa dizer que ele é o ativo de menor risco nessa carteira. É bom notar da equação anterior, entretanto, que assim como  $x_{im} \sigma_{ij} = x_{im} \sigma^2(\tilde{R}_i)$  é só um dos  $N$  termos em  $\beta_i$ ,  $\beta_i = 0$  não implica que o título  $i$  tem variância do retorno nula.

Assim, segue-se que:

$$S_m = \frac{E(\tilde{R}_m) - E(\tilde{R}_0)}{\sigma(\tilde{R}_m)},$$

Tal que a equação  $E(\tilde{R}_i)$  acima pode ser reescrita como:

$$E(\tilde{R}_i) = E(\tilde{R}_0) + [E(\tilde{R}_m) - E(\tilde{R}_0)]\beta_i,$$

Traduzindo, o retorno esperado no título  $i$  é igual a  $E(\tilde{R}_0)$ , o retorno esperado em um título que é menos arriscada na carteira  $m$ , mais um prêmio de risco que é  $\beta_i$ , vezes a diferença entre  $E(\tilde{R}_m)$  e  $E(\tilde{R}_0)$ .

Acerca dessa equação pode-se supor três hipóteses, a saber: A relação entre o retorno esperado em um título e seu risco e qualquer carteira eficiente  $m$  é linear;  $\beta_i$  é uma medida completa do risco do título  $i$  na carteira eficiente  $m$ ; e, em um mercado de investidores avessos ao risco, o risco mais elevado dever estar associado à retornos esperados mais elevados, isto é,  $E(\tilde{R}_m) - E(\tilde{R}_0) > 0$ .

## 2.7 VOLATILIDADES E RISCO

A volatilidade implícita no preço de uma opção é amplamente considerada como a previsão do mercado de opções da volatilidade do retorno futuro sobre a vida restante de opções relevantes, conforme Christensen e Prabhala (1998).

Se os mercados de opções são eficientes, a volatilidade implícita seria uma previsão eficiente da volatilidade futura, isto é, a volatilidade implícita incluiria a informação contida em todas as outras variáveis no conjunto de informações do mercado na explicação da volatilidade futura.

Para Brittain, Garcia e Irwin (2011) a volatilidade implícita de uma opção seria a volatilidade que produziria um preço teórico de opção igual ao prêmio da opção corrente. A volatilidade implícita tem se tornado tão amplamente usada que muitos negociantes de opções tomam decisões baseados na volatilidade implícita da opção, e não em seu prêmio.

Este mesmo entendimento é compartilhado por Engle e Figlewski (2014). Para eles, a volatilidade implícita reflete tanto a volatilidade empírica esperada como o prêmio do risco. A variação estocástica em ambos cria riscos não cobertos em uma posição *delta-hedged* de opções. Assim, a volatilidade implícita, o valor da volatilidade que vem de dentro da formula de precificação de opção do mercado, seria um valor de “risco neutro”, que encerraria tanto a estimativa objetiva do mercado de volatilidade realizada futura quanto a tolerância do mercado ao risco da volatilidade.

Esses mesmos autores acrescentam ao modelo de Black-Scholes que a volatilidade instantânea seria uma constante conhecida ou, na pior das hipóteses, uma função não-estocástica do tempo.

Empiricamente, a variação estocástica na volatilidade produziria risco em uma posição do *delta hedged* do mundo real de duas maneiras. A volatilidade realizada da ação subsequente poderia ser maior ou menor do que a esperada, levando a erros de coberturas (*hedging*) cujo tamanho seria determinado pelo gama da opção.

Na outra, os choques no prêmio do risco da volatilidade do mercado também mudariam os preços da opção. Mesmo que uma opção escrita tenha uma cobertura (*hedged*) delta, gama e theta, um aumento na volatilidade implícita causaria um aumento no preço da opção, e um sinal imediato da perda no mercado sobre a posição.

A sensibilidade do preço da opção a mudança na volatilidade implícita é medida pelo vega, a derivada parcial da fórmula de precificação da opção com respeito ao parâmetro da volatilidade.

Para Engle e Figlewski (2014), nem a volatilidade implícita nem o prêmio do risco seriam diretamente observáveis e ambos poderiam mudar imprevisivelmente no tempo. Entretanto, à medida que essas flutuações fossem independentes das ações, o risco do vega poderia ser reduzido através da diversificação da carteira.

Em um único ponto no tempo, opções em uma dada ação geralmente exibem um intervalo das volatilidades implícitas para contratos com uma única validade, conhecida como volatilidade *smile* ou *smirk*.

Uma superfície de volatilidade refere-se a todo o conjunto de contratos com todas as maturidades tomadas juntas. As tentativas para modelar as dinâmicas da superfície de volatilidade acharam evidências de múltiplos fatores subjacentes relacionados ao seu nível, inclinação e curvatura, como na estrutura a termo da taxa de juros.

O cenário de volatilidade constante original de Black-Scholes (1973) permite a uma opção ser avaliada baseando-se em um continuamente equilibrado *delta hedged* contra a ação subjacente. Entretanto, no mundo real, grandes mudanças nos preços das ações expõem os *hedgers* ao risco gama, que aumenta com a volatilidade do ativo subjacente.

Além disso, a própria volatilidade variaria estocasticamente no tempo, apresentando riscos relacionados à volatilidade adicional que não estaria presente ou seria protegível por

*hedge* dentro do modelo Black-Scholes. A estimação do parâmetro seria o desafio dos modelos, contudo, a volatilidade seria um fator latente estocástico não observável.

Na teoria padrão, ao contrário de Black-Scholes, o risco da ação pode ser reduzido através de diversificação, mas não eliminado, pois, ações individuais co-variam fortemente com um fator comum de mercado. A correlação entre o retorno da ação subjacente e os retornos em outros ativos ou do mercado como um todo, apenas tornar-se-iam importantes para opções baseadas em múltiplas ações subjacentes. Entretanto, uma vez que a volatilidade é admitida como sendo variável no tempo estocasticamente, o *delta-hedging* deixa o risco da volatilidade descoberto.

Combinando os *deltas-hedges* em uma carteira pode-se mitigar o risco, porém, ele não poderia ser eliminado se os choques da volatilidade implícita estivessem correlatos entre as ações. Nesse caso, isso poderia até ser apropriado incorporar uma sensibilidade da opção ao risco do vega não diversificável dentro de um cenário de precificação teórico para opções, semelhante ao *Capital Asset Pricing Model* para ações. O problema é que com  $n$  ações, há  $(n^2 - n)/2$  correlações distintas.

Para Engle e Figlewski (2014) as exposições ao risco que não podem ser perfeitamente cobertas poder-se-iam esperar que fossem precificadas pelo mercado. A volatilidade estocástica seriam um desses fatores de risco, a volatilidade implícita seria uma média bem acima da volatilidade realizada da ação subjacente sobre o resto da vida da opção.

O preço de mercado do risco da volatilidade é positivo, entretanto, o preço de mercado do risco da volatilidade é frequentemente dito ser negativo.

Em muitos casos, isso é simplesmente uma maneira diferente de descrever o mesmo fenômeno. A volatilidade de risco neutro seria mais elevada do que a volatilidade empírica, o que faria com que os preços das opções fossem mais elevados do que se não houvesse prêmio do risco da volatilidade.

Os investidores pagam um prêmio positivo para comprar opções, pois, sua exposição positiva a volatilidade é uma cobertura (*hedge*) ao risco da volatilidade. Os retornos nessas opções de altos preços então seriam menores na média, assim o efeito do prêmio do risco da volatilidade nos retornos da opção seria negativo.

Para Engle e Figlewski (2014) os preços da opção impõem as dinâmicas dos retornos sob a medida do mundo real ou físico e também a variação temporal na tolerância do mercado para o risco relacionado a opção.

Desse modo, um aumento na volatilidade esperada do mundo real aumentaria a volatilidade implícita e o valor da opção, porém, o preço da opção pode também mover-se sem qualquer mudança no preço da ação ou na verdadeira volatilidade esperada, se as atitudes de risco mudam. Em um *delta-hedged*, qualquer mudança inesperada na volatilidade implícita produziria um choque no preço da opção. Como está amplamente documentado, os retornos nas posições da opção do *delta-hedged* no mundo real estão expostos a substancial flutuação nos seus retornos supostamente sem risco devido ao risco do vega.

Ainda, conforme Engle e Figlewski (2014), se o *delta-hedging* não é sem risco, os *market-makers* de opções e os gestores de carteira de ação estariam agora na mesma situação. As posições de opção poderiam ter cobertura do delta contra as mudanças no preço da ação, porém, o risco do vega teria que ser gerenciado.

Os modelos dinâmicos da superfície de volatilidade foram desenvolvidos para prever mudanças nas volatilidades implícitas esperadas, o risco do vega descoberto deveria ser diversificado.

A mesma questão em carteira de ação surge com opções: O risco do vega é idiossincrático, de modo que seu efeito é largamente eliminado em uma carteira amplamente diversificada de cobertura (hedges) *delta*, ou seja, há um fator comum na volatilidade implícita do mercado que sempre permanecerá. E mesmo sem um fator comum, conquanto que os choques na volatilidade implícita não seriam perfeitamente independentes entre as opções, o conhecimento de sua estrutura de covariância permitiria uma diversificação mais eficiente através da construção de carteira de risco do vega mínimo *delta-hedging*.

Em 1993, a *Chicago Board Options Exchange* apresentou o índice VIX para medir a volatilidade implícita de opções no mercado global de ações. Dada sua aparente conexão às atitudes de risco de mercado, o VIX é frequentemente conhecido como o calibre do medo do mercado.

O VIX foi determinado para ser uma medida viável da componente comum das flutuações da volatilidade implícita nas opções individuais e carteiras de opções. Contratos futuros e opções introduzidos recentemente ligados ao VIX permitem cobrir diretamente a exposição do vega a esse fator comum.

Ainda, segundo Chirstersen e Prabhala (1998), de cada preço de opção *call*  $C_t$  observado, calcula-se a volatilidade implícita  $\sigma_{it}$  resolvendo numericamente a fórmula de precificação de opção *call* de Black-Scholes (1973):

$$C_t = S_t N(d_t) - K_t e^{-r_{f,t} \tau_t} N(d_t - \sigma_{it} \sqrt{\tau_t}),$$

Onde  $d_t = [\log(S_t/K_t) + (r_{f,t} + \sigma_{it}/2)\tau_t] / \sigma_{it} \sqrt{\tau_t}$ ,  $\tau_t$  representa o tempo até o vencimento,  $r_{f,t}$  representa a taxa de juros e  $N(\cdot)$  representa a função distribuição normal padrão.

Enquanto a volatilidade implícita representa uma previsão da volatilidade *ex-ante*, pode-se calcular também a volatilidade do retorno *ex-post* sobre a vida de cada opção como o desvio padrão da amostra dos retornos diários do índice sobre a vida restante da opção. Isso é,

$$\sigma_{ht} = \sqrt{\frac{1}{\tau_t} \sum_{k=1}^{\tau_t} (r_{t,k} - \bar{r}_t)^2},$$

Onde  $\tau_t$  é o número dias até o vencimento,  $\bar{r}_t = \tau_t^{-1} \sum_{k=1}^{\tau_t} r_{t,k}$  e  $r_{t,k}$  é o retorno do índice no dia  $k$  do mês  $t$ . Ambas medidas da volatilidade são expressas em termos anuais para facilitar a interpretação. Geralmente, utiliza-se séries de log-volatilidades, as quais denota-se por  $i_t = \log \sigma_{it}$  e  $h_t = \log \sigma_{ht}$  (log é o logaritmo natural).

O conteúdo da informação da volatilidade implícita, na literatura, é tipicamente obtido pela estimação de uma regressão da forma:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_i i_t + e_t,$$

Onde  $h_t$  denota a volatilidade realizada do período  $t$  e  $i_t$  denota a volatilidade implícita no início do período  $t$ , como definido acima.

Christersen e Prabhala (1998) concluíram que as volatilidades implícitas contem alguma informação sobre a volatilidade futura, contudo, ela parece ser uma previsão enviesada da volatilidade futura uma vez que  $\alpha_1$ , confiavelmente, seria diferente da unidade e o intercepto  $\alpha_0$  seria diferente de zero.

Por fim, afirmam que a volatilidade implícita prediz a volatilidade realizada futura isoladamente, bem como, em conjunto com a história passada da volatilidade realizada do mercado de opções. A volatilidade implícita incluiria o conteúdo das informações da volatilidade passada em algumas especificações.

## 2.8 FATORES COMUNS DE RISCO

Fama e French (1993) identificaram cinco fatores comuns de risco nos retornos de ações e títulos da dívida. Três fatores do mercado de ação: um fator global de mercado e fatores relacionados ao tamanho da firma e o *book-to-market equity* BE/ME (razão entre o valor contábil de uma firma e os valor de suas ações no mercado). Dois fatores do mercado de títulos da dívida, relacionados a maturidade e risco de inadimplência.

Os retornos das ações teriam compartilhados variações devido aos fatores do mercado de ações, e eles estariam ligados aos retornos dos títulos por meio da variação compartilhada dos fatores do mercado de títulos. Exceto para empresas com baixo grau, os fatores do mercado de títulos capturariam a variação comum nos retornos dos títulos. O mais importante, os cinco fatores aparentemente explicariam os retornos médios das ações e títulos da dívida.

Para as ações, carteiras construídas para simular os fatores de riscos relacionados ao tamanho e BE/ME capturaram uma forte variação comum nos retornos. O tamanho e o *book-to-market equity* representariam (*proxy*) a sensibilidade aos fatores comuns de risco nos retornos da ação. Desse modo, um fator de mercado e as representantes (*proxies*) para os fatores de risco relacionados ao tamanho e o *book-to-market equity* pareceram fazer um bom trabalho explicando a *cross-section* dos retornos médios das ações.

Para Fama e French (1993) as regressões das séries temporais mostrara que os fatores tamanho e *book-to-market equity* poderiam explicar as diferenças nos retornos médios entre as ações. Mas, esses fatores sozinhos não poderiam explicar a grande diferença entre os retornos médios em ações e títulos públicos mensais. Esse trabalho foi atribuído ao fator de mercado.

Em regressões que também incluem os fatores tamanho e *book-to-market equity*, todas as carteiras de ações produziram inclinações nos fatores de mercado que estavam perto de 1. Esse prêmio do risco para os fatores de mercado então ligam os retornos médios em ações e títulos públicos.

Para os títulos da dívida, a simulação de carteiras para os dois fatores da estrutura a termo (um prêmio a termo e um prêmio por inadimplência) capturaram a maioria das variações nos retornos nas carteiras de títulos governamentais e corporativos. Os fatores da estrutura a termo também explicaram os retornos médios nos títulos, mas os prêmios médios para os fatores da estrutura a termo, como a média dos excessos de retornos dos títulos, estariam próximas de 0. Desse modo, a hipótese de que todas as carteiras de títulos da dívida do governo e corporativo tem os mesmos retornos esperados no longo prazo também não poderia ser rejeitada.

A variação comum nos retornos da ação é largamente capturada pelos três retornos das carteiras de ação, e a variação comum nos retornos dos títulos é largamente explicado pelos dois retornos da carteira de títulos.

Os mercados de ações e títulos, entretanto, estão longe de estatisticamente segmentados (FAMA e FRENCH, 1993). Usados sozinhos, as regressões de séries temporais, os fatores da estrutura a termo capturam a forte variação nos retornos da ação; de fato, as inclinações nos fatores das estruturas a termo nas regressões para ações seriam as mesmas que para os títulos. Mas interessante, quando os fatores do mercado de ações foram também incluídos nas regressões, todas as carteiras de ação apresentam cargas quase da mesma maneira nos dois fatores da estrutura a termo e nos fatores de mercado dos retornos. Como resultado, uma carteira do mercado de ações captura a variação comum nos retornos da ação associado com o fator de mercado e os dois fatores da estrutura a termo.

A ligação estocástica entre os mercados de títulos da dívida e ações, contudo, parece vir amplamente dos fatores da estrutura a termo (FAMA e FRENCH, 1993). Usado sozinhos, os excessos de retorno do mercado e a simulação dos retornos para os fatores tamanho e *book-to-market equity* pareceram capturar a variação comum nos retornos dos títulos. Mas quando os dois fatores da estrutura a termo são incluídos nas regressões do título, o poder explicativo dos fatores do mercado de ações desaparece para todos menos os títulos de corporações de baixo grau.

Por fim, Fama e French (1993) concluíram que há pelo menos três fatores do mercado de ações e dois fatores da estrutura a termo nos retornos. Os retornos das ações teriam variações compartilhadas devido aos três fatores do mercado de ações, e eles estariam ligados aos retornos dos títulos através da variação compartilhada nos dois fatores da estrutura a termo. Exceto para títulos de corporação de baixo grau, apenas os dois fatores da estrutura a termo pareceram produzir uma variação comum nos retornos dos títulos da dívida governamental e corporativo.

## 2.9 CARTEIRA DE INVESTIMENTO

No modelo de carteira de Fama e MacBeth (1973), o investidor olha os ativos individuais apenas em termos de suas contribuições para o valor esperado e dispersão, ou risco, do retorno de sua carteira.

Com as distribuições normais do retorno, o risco de uma carteira  $p$  é medido pelo desvio padrão,  $\sigma(\tilde{R}_p)$ , do seu retorno,  $\tilde{R}_p$ , e o risco de um ativo para o investidor que mantém  $p$  é a

contribuição do ativo ao  $\sigma(\tilde{R}_p)$ . Se  $x_{ip}$  é a proporção dos fundos da carteira investidos no ativo  $i$ ,  $\sigma_{ij} = \text{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$  é a covariância entre os retornos dos ativos  $i$  e  $j$  e  $N$  é o número de ativos.

Desse modo, a contribuição do ativo  $i$  para  $\sigma(\tilde{R}_p)$ , isto é, o risco do ativo  $i$  na carteira  $p$ , é proporcional a:

$$\sum_{j=1}^N x_{jp} \sigma_{ij} / \sigma(\tilde{R}_p) = \text{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) / \sigma(\tilde{R}_p)$$

Observa-se, ainda, que mesmo o peso  $x_{jp}$  variando de carteira para carteira, o risco de um ativo é diferente para diferentes carteiras.

Para um investidor individual a relação entre o risco de um ativo e seu retorno esperado é implícito pelo fato de que a carteira ótima do investidor é eficiente. Desse modo, se ele escolhe uma carteira  $m$ , o fato que  $m$  é eficiente significa que os pesos  $x_{im}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , maximizam o retorno esperado da carteira:

$$E(\tilde{R}_m) = \sum_{i=1}^N x_{im} E(\tilde{R}_i)$$

Sujeito as restrições  $E(\tilde{R}_p) = E(\tilde{R}_m)$  e  $\sum_{i=1}^N x_{im} = 1$ .

O método Lagrangeano pode, então, ser usado para mostra que os pesos  $x_{im}$  podem ser escolhidos de uma tal maneira que qualquer ativo  $i$  em  $m$ :

$$E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_m) = S_m \left[ \frac{\sum_{j=1}^N x_{jm} \sigma_{ij}}{\sigma(\tilde{R}_m)} - \sigma(\tilde{R}_m) \right]$$

Onde  $S_m$  é taxa de mudança do  $E(\tilde{R}_p)$  com respeito a uma mudança em  $\sigma(\tilde{R}_p)$  no ponto da definição de eficiência correspondente a carteira  $m$ . Se há restrições não negativas nos pesos (isto é, se é proibido vendas a descoberto (*short selling*)), então essa expressão apenas se mantém para os ativos  $i$  tais que  $x_{im} > 0$ .

Para Fama e MacBeth (1973) embora essa equação seja apenas uma condição dos pesos  $x_{jm}$  necessários para a eficiência da carteira, isso pode ser interpretado como a relação entre o risco do ativo  $i$  na carteira  $m$  e o retorno esperado no ativo. A equação diz que a diferença entre o retorno esperado no ativo e o retorno esperado na carteira é proporcional a diferença entre o risco do ativo e o risco da carteira. O fator de proporcionalidade é  $S_m$ , a inclinação do conjunto

eficiente no ponto correspondente a carteira  $m$ . E o risco do ativo é sua contribuição ao risco total da carteira,  $\sigma(\tilde{R}_m)$ .

## 2.10 RISCO SISTÊMICO E ESTRUTURA A PREÇO

Na perspectiva de Duan e Wei (2007) existem características intrigantes nos preços de opções, tais como: a volatilidade implícita de Black-Scholes é mais elevada do que a histórica ou volatilidade realizada; a assimetria negativa do risco neutro é mais nítida do que aquela da distribuição física, e as opções de índice tem uma mais pronunciada volatilidade *smile/smirk* do que as opções de ações individuais.

Coletivamente, essas características indicam diferenças estruturais entre as distribuições de risco neutro e dos retornos físicos. Em particular, desde que as duas distribuições estejam ligadas por meios dos prêmios do risco dos fatores de risco sistêmico, a diferença estrutural deve estar relacionada ao risco sistêmico do ativo subjacente.

Investigando como a estrutura a preço de opções de ações individuais é afetada pelo valor do risco sistêmico nos ativos subjacentes, usando a volatilidade implícita para representar as estruturas a preços de opções, Duan e Wei (2007) demonstraram uma clara ligação entre os preços de opções e o risco sistêmico.

Especificamente, após controlar o nível global do risco total, um valor mais elevado do risco sistêmico levaria à um nível mais elevado da volatilidade implícita e à uma curva mais íngreme da volatilidade implícita. Assim, o risco sistêmico de uma ação individual seria medido pela proporção de risco sistêmico, definido como a taxa da variância sistêmica sobre o total da variância.

O risco sistêmico desempenha um importante papel na determinação dos preços da opção. Claramente, para Duan e Wei (2007) a volatilidade implícita estaria relacionada à proporção do risco sistêmico do ativo subjacente e o grau dessa relação dependeria do *moneyness* da opção. Enquanto o retorno do mercado fosse assimétrico e/ou leptocúrtico, o nível e a inclinação da curva da volatilidade implícita estariam relacionados a proporção do risco sistêmico. E mais importante ainda, a medida do risco sistêmico seria uma proporção relativa.

Dennis e Mayhew (2002) investigaram a importância relativa de várias características da firma (isto é, a volatilidade implícita, tamanho da firma, volume de negociação, alavancagem e beta) na explicação da assimetria do risco neutro implícito nos preços das opções.

Entre outras coisas, eles estabeleceram empiricamente uma ligação entre a assimetria de risco neutro e o risco sistêmico da ação subjacente. Pontualmente, a assimetria de risco neutro tende a ser mais negativa para ações com grandes betas, indicando a importância do risco do mercado na precificação de opção. O foco do estudo estava na descoberta de um fator condutor para a assimetria de risco neutro observada nos preços da opção.

Para facilitar as comparações entre os preços de exercício de opções e a *cross-section* das opções de ação, a estrutura a preço da opção – como os preços de opção diferem através dos preços do exercício – é frequentemente representada por meio da inclinação da curva da volatilidade implícita (BAKSHI, KAPADIA e MADAN, 2003), embora, seja amplamente conhecido que o *smile* é de alguma maneira devido a existência de distribuições de retorno do risco neutro enviesado negativamente e com cauda pesada (*heavy-tailed*).

Duan e Wei (2007) demonstraram que a estrutura a preço de opções de ações individuais depende da proporção de risco sistêmico no risco total, mostrando que o risco sistêmico é condutor do comportamento da volatilidade implícita, da assimetria e da curtose do risco neutro.

Bollen e Whaley (2004) ao invés de depender de distribuições mais gerais ou apresentar mais fatores de risco apelaram aos argumentos baseados na demanda na resolução de diferentes estruturas a preços de opção. Eles mostraram que a extensão do desequilíbrio na demanda e oferta poderia determinar o nível e a inclinação da curva da volatilidade implícita. Desse modo, as diferentes estruturas de preços entre opções de ações individuais são atribuídas a diferentes extensões do desequilíbrio.

Assim, a literatura destaca a existência de uma estrutura fatorial entre o mercado e os preços das opções de ação individual.

## 2.11 ESTRUTURA A TERMO

A estrutura a termo das taxas de juros, para Cox, Ingersoll e Ross (1985), mede a relação entre os rendimentos em títulos livre de inadimplência, os quais se diferem apenas em relação aos seus prazos de vencimentos.

Oferecendo uma lista completa das taxas de juros através do tempo, a estrutura a termo incorpora as antecipações do mercado dos eventos futuros. Uma explicação da estrutura a termo nos daria uma maneira para extrair essa informação e prever como as mudanças nas variáveis subjacentes afetariam a curva de rendimento.

Em um mundo de certezas, as previsões das taxas futuras de equilíbrio devem coincidir com as taxas a vista futura, porém, quando incertezas sobre as taxas futuras são introduzidas, a análise torna-se muito mais complexa. Em geral, as teorias anteriores de estruturas a termo tomam o modelo de certeza ou segurança como seus pontos de partida e prosseguem examinando as generalizações estocásticas das relações de equilíbrio da certeza.

Ainda, de acordo com Cox, Ingersoll e Ross (1985), em sua forma mais simples, as hipóteses de expectativa postulam que os títulos são precificados de tal modo que as previsões das taxas futuras implícitas são iguais as taxas à vista esperadas.

Geralmente, essa abordagem é caracterizada pelas seguintes preposições: o retorno em se manter um título por um longo prazo até o vencimento é igual ao retorno esperado em repetidos investimentos em uma série de títulos de curto prazo; a taxa esperada do retorno sobre o próximo período de manutenção do título é a mesma para os títulos de todos os vencimentos.

Outra hipótese é a de preferência da liquidez. A aversão ao risco faria as taxas previstas serem sistematicamente maiores do que as taxas à vista esperadas, geralmente por um valor crescente com o vencimento. Esse prêmio a prazo ou a termo seria o incremento exigido para induzir os investidores a manterem os títulos (mais ariscados) por prazos mais longos.

Por fim, existe a hipótese de segmentação do mercado afirmando que indivíduos têm fortes preferências de vencimento e esses títulos de diferentes vencimentos são negociados em mercados separados e distintos. A demanda e a oferta de títulos de um vencimento particular seriam supostamente pouco afetadas pelos preços dos títulos de maturidades próximas. Assim, não há agora razão para os prêmios de prazo serem positivos ou serem função crescente do vencimento.

## 2.12 ESTRUTURA A FATOR DA VOLATILIDADE

A volatilidade ao nível da firma obedece a uma forte estrutura a fator (KELLY, LUSTIG e VAN NIEUWERBUGH, 2012). Se os próprios fatores têm volatilidade variável no tempo, então a volatilidade ao nível da firma naturalmente herdará uma estrutura a fator também.

O modelo de mercado é um exemplo ilustrativo, especificando que os retornos na ação  $i$  segue  $r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \epsilon_{i,t}$ , o que sugere que a variância ao nível da ação é  $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon,i}^2$ , desse modo, a volatilidade ao nível da firma tem uma componente comum ( $\beta_i^2 \sigma_m^2$ ), bem como, uma componente idiossincrática ( $\sigma_{\epsilon,i}^2$ ).

A estrutura fatorial da volatilidade ao nível da firma permaneceria efetivamente inalterada mesmo após contribuir para os fatores comuns nos retornos. Kelly, Lustig e Van Nieuwerburgh (2012) examinaram os resíduos dos modelos de fator que incluem os três fatores de Fama-French (1993), bem como, a decomposição do fator estatístico usando a análise das componentes principais.

As volatilidades dos resíduos desses modelos possuem um grau extremamente alto de variação comum através das ações individuais. A volatilidade do resíduo contribuiria para a vasta maioria da variação em uma volatilidade de ação típica. Desse modo, haveria pouca distinção entre a volatilidade total e a idiossincrática ao nível de firma, e ambas possuiriam efetivamente a mesma estrutura fatorial comum. Além disso, os resíduos no modelo fatorial do retorno estariam virtualmente não correlacionados.

Os fatores omitidos não seriam uma explicação para o co-movimento em volatilidades. O co-movimento da volatilidade permaneceria extremamente alto mesmo após a remoção de fatores comuns dos retornos. Assim, a comunidade entre retornos teria pouca influência na comunidade das volatilidades do retorno. A distribuição da *cross-section* da volatilidade total e a volatilidade idiossincrática seriam aproximadamente idênticas.

### 2.13 REGRESSÃO *CROSS-SECTION*

É bem conhecido que a volatilidade dos retornos de ações varia através do tempo. Para Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006) a volatilidade do mercado variável no tempo induz a mudanças no conjunto de oportunidades de investimentos pela mudança na expectativa dos retornos futuros do mercado, ou seja, pela mudança na permuta risco-retorno.

Se a volatilidade do retorno do mercado é um fator de risco sistêmico, a teoria de preço arbitrado ou modelo de um fator prediria que a volatilidade agregada também seria precificada na *cross-section* das ações. Consequentemente, ações com diferentes sensibilidades as inovações na volatilidade agregada teriam diferentes retornos esperados.

Ainda, de acordo com Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006) usar a *cross-section* dos retornos da ação, ao invés de opções do mercado, permitiria criar carteiras de ações que tem diferentes sensibilidades às inovações na volatilidade do mercado.

Se o preço do risco da volatilidade agregada é negativo, ações com sensibilidades grandes e positivas ao risco da volatilidade teriam baixos retornos médios. Usar a regressão *cross-section* nos retornos de ações também permitiria controlar facilmente a bateria de efeitos da *cross-section*, tal como os fatores valor e tamanho de Fama e French (1993).

As teorias econômicas fornecem várias razões do porque o preço do risco de inovação na volatilidade do mercado ser negativo. Os investidores querem se protegerem (*hedge*) contra as mudanças na volatilidade do mercado, pois, o aumento da volatilidade representa uma deterioração nas oportunidades de investimentos.

Agentes avessos ao risco demandam ações que os protegem (*hedge*) contra esse risco. Os períodos de alta volatilidade também tendem a coincidir com movimentos descendentes do mercado.

Ativos com alta sensibilidade ao risco da volatilidade do mercado fornecem proteção (*hedges*) contra o risco de quebra do mercado. A demanda mais alta por ativos com alta carga de volatilidade sistemática aumenta seu preço e reduz seu retorno médio. Finalmente, ações que vão mal quando a volatilidade aumenta tendem a ter retornos assimetricamente negativos em horizontes intermediários, enquanto que ações que vão bem quando a volatilidade sobe tendem a ter retornos assimetricamente positivos.

Se os investidores têm preferências sobre a co-assimetria, ações que tem alta sensibilidade as inovações na volatilidade de mercado seriam mais atrativas e, conseqüentemente, teriam retornos mais baixos.

Ademais, se a volatilidade agregada é um fator de risco ortogonal a existência de fatores de risco, a sensibilidade das ações a volatilidade agregada vezes o momento na volatilidade agregada aparecerá nos resíduos do modelo de Fama-French (1993). Firms com maiores sensibilidades a volatilidade agregada conseqüentemente teriam maiores volatilidades idiossincráticas relativas ao modelo de Fama-French, todo o restante permanecendo igual. As diferenças nas volatilidades dos verdadeiros erros idiossincráticos das firmas, os quais não são precificados, tornaria essa relação ruidosa.

Os resultados de Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006) contrariam as teorias econômicas que sugerem que a volatilidade idiossincrática estaria positivamente relacionada aos retornos

esperados, pois, conforme Merton (1987) sugere, em um mercado de informação segmentada, firmas com maiores variâncias do que firmas específicas requerem maiores retornos médios para compensar os investidores por manterem carteiras diversificadas imperfeitamente. Ações com volatilidade idiossincrática alta teriam retornos médios baixos.

## 2.14 PRECIFICANDO A VOLATILIDADE SISTÊMICA NA *CROSS-SECTION*

Quando as oportunidades de investimentos variam no tempo, de acordo com Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006), os modelos multifatores mostrariam que os prêmios do risco estariam associados à covariância condicional entre os retornos do ativo e as inovações nas variáveis de estado que descrevem a variação temporal das oportunidades de investimentos.

O *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (ICAPM) mostra que os investidores se preocupam tanto com os retornos do mercado quanto com as mudanças nas previsões dos retornos do mercado futuro. Quando o agente representativo é mais avesso ao risco do que a função utilidade log, os ativos que covariam positivamente com boas notícias sobre os retornos futuros esperados no mercado teriam retornos médios mais elevados.

Esses ativos comandariam um prêmio do risco porque eles reduziriam a capacidade do consumidor de fazer *hedge* contra a deterioração nas oportunidades de investimentos. A intuição do Modelo é que os investidores avessos ao risco querem proteger-se (fazer *hedge*) contra as mudanças na volatilidade agregada porque a volatilidade positivamente afeta os retornos esperados do mercado, como em Merton (1973).

Para Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006) o modelo ICAPM adaptado ao ambiente heterocedástico, permitindo tanto as covariâncias variáveis no tempo quanto volatilidade estocástica do mercado, os investidores avessos ao risco também querem se proteger (*hedge*) contra a variação na volatilidade do mercado futura.

O retorno esperado de um ativo depende do risco do retorno do mercado, das mudanças nas previsões dos retornos do mercado futuro e das mudanças nas previsões das volatilidades do mercado futuro.

Para um investidor mais avesso ao risco do que a utilidade log, um ativo que tem uma covariância positiva entre seu retorno e uma variável que positivamente prediz as volatilidades do mercado futuro provocaria nesse ativo um retorno esperado menor. Esse efeito surge porque

os investidores avessos ao risco reduzem o consumo corrente para aumentar a poupança de segurança na presença do aumento das incertezas em torno dos retornos do mercado.

Motivado por esses modelos multifatores, Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006) estudaram como a exposição ao risco da volatilidade do mercado é precificada na regressão *cross-section* dos retornos das ações.

A principal previsão do modelo fatorial definido por Ang, Hodrick, Xing e Zhang (2006) é que ações com diferentes cargas no risco da volatilidade agregada teriam diferentes retornos médios.

As opções permitem a um investidor ter uma visão acerca do preço do título subjacente e da volatilidade. Uma estratégia de negociação de opções bem-sucedida conta com um sinal acerca de pelo menos uma dessas entradas, de acordo com Goyal e Saretto (2008). No vernáculo de negociadores de opções, no coração de todo comércio de volatilidade permanece a convicção dos negociantes que a expectativa do mercado sobre a volatilidade futura, a qual está implícita no preço da opção, de alguma maneira não é correta. Assim, todos os modelos de precificação de opção exigem ao menos uma estimativa dos parâmetros que caracterizariam a distribuição de probabilidades da volatilidade futura. A volatilidade medida incorretamente seria a maior fonte de precificação incorreta de opções.

A volatilidade tende a reverter à sua média histórica no longo prazo. De acordo com Goyal e Saretto (2008) qualquer previsão da volatilidade futura deveria levar em conta essa reversão à média. Tal previsão estaria embebida na volatilidade implícita da ação, o que pode ser obtido invertendo um modelo de precificação de opção, tal como o modelo de Black-Scholes. Estritamente falando, a volatilidade implícita é uma grosseira estimativa do risco neutro do mercado da volatilidade futura do ativo subjacente. Portanto, a volatilidade implícita de uma opção em uma ação refletiria o fato que a volatilidade futura, na média, estaria mais perto de sua volatilidade histórica do que de sua volatilidade corrente.

Assim, uma estratégia de transação de custo-zero envolveria uma posição longa em uma carteira de opções com uma diferença positiva grande entre a volatilidade histórica e a implícita, e uma posição curta em uma carteira de opções com uma diferença negativa grande, gerando retornos significantes estatisticamente e economicamente.

Os atritos das transações reduzem a lucratividade da estratégia da carteira de opção. De acordo com a ideia de que a liquidez afeta a implementação das estratégias de carteira, os lucros seriam mais elevados para opções sem liquidez do que para opções líquidas. Portanto,

considerar a liquidez reduz, mas não elimina a importância econômica do lucro das carteiras, segundo Goyal e Saretto (2008).

Considerando a possibilidade de que os agentes econômicos não usam toda a informação disponível ao formar expectativa sobre a volatilidade futura de ação. Em particular, eles ignoram a informação contida na distribuição da regressão *cross-sectional* das volatilidades implícitas e consideram os ativos individualmente quando prevê a volatilidade. Isso leva a estimativa incorreta do parâmetro de reversão da média na volatilidade estocástica subjacente e, portanto, a incorreta precificação das opções.

## 2.15 AVALIAÇÃO DE OPÇÃO DE AÇÃO USANDO ESTRUTURA FATORIAL ÚNICA

Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) modelaram um mercado de ações consistindo de  $n$  firmas dirigidas por um único fator de mercado,  $I_t$ . Os preços das ações individuais foram denotados por  $S_t^j$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$  e os investidores também teriam acesso a um título livre de risco ou de risco neutro o qual pagaria um retorno de  $r$ .

O fator de mercado evoluiria de acordo com o seguinte processo:

$$\frac{dI_t}{I_t} = (r + \mu_I)dt + \sigma_{I,t}dW_t^{(I,1)},$$

Onde  $\mu_I$  é o prêmio do risco do mercado instantâneo e onde a volatilidade é estocástica e segue o processo da raiz quadrada, semelhante ao modelo de Heston (1993):

$$d\sigma_{I,t}^2 = \kappa_I(\theta_I - \sigma_{I,t}^2) + \delta_I\sigma_{I,t}dW_t^{(I,2)}.$$

$\theta_I$  representa a variância de longo prazo,  $\kappa_I$  captura a velocidade de reversão a média de  $\sigma_{I,t}^2$  até  $\theta_I$  e  $\delta_I$  mede a volatilidade da volatilidade. As inovações para o retorno do fator de mercado e volatilidade estão correlacionados pelo coeficiente  $\rho_I$ . As estimativas convencionais de  $\rho_I$  são negativas e grandes capturando o assim chamado efeito alavanca nos retornos do mercado agregado.

Os preços da ação individual são conduzidos pelo fator de mercado, bem como, por um termo idiossincrático, o qual também tem volatilidade estocástica:

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} - rdt = \alpha_j dt + \beta_j \left( \frac{dI_t}{I_t} - rdt \right) + \sigma_{j,t} dW_t^{(j,1)}$$

$$d\sigma_{j,t}^2 = \kappa_j(\theta_j - \sigma_{j,t}^2) + \delta_j\sigma_{j,t}dW_t^{(j,2)},$$

Onde  $\alpha_j$  denota o excesso de retorno e  $\beta_j$  é o beta do mercado da firma  $j$ .

As inovações para os retornos idiossincráticos e volatilidade estão correlacionados com o coeficiente  $\rho_j$ . Como sugerido pelas leis da assimétrica deduzida por Bakshi, Kapadia e Madan (2003), a assimetria da componente do retorno idiossincrático é necessária para explicar a diferença na estrutura a preço de ações individuais e opções de índices. Observa-se que esse modelo de mercado de ações tem um total de  $2(n + 1)$  inovações.

### 2.15.1 A Distribuição do Risco Neutro

Para que o modelo de mercado de ações pudesse ser usado para avaliar derivativos, Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) precisaram admitir uma mudança na medida da distribuição física ou real do risco  $P$  para a distribuição o risco neutro  $Q$ .

Seguindo Cox, Ingersoll e Ross (1985) além de outros, o preço do risco da variância do mercado é admitido da forma  $\lambda_I \sigma_{I,t}$ , e, também, que o risco da variância idiossincrática é não precificado.

Assim, dada a mudança de medida do risco físico  $P$  para a medida do risco neutro  $Q$ , o processo governando o fator de mercado sobre a medida  $Q$  é dado por:

$$\frac{dI_t}{I_t} = rdt + \sigma_{I,t} d\tilde{W}_t^{(I,1)}$$

$$d\sigma_{I,t}^2 = \tilde{\kappa}_I (\tilde{\theta}_I - \sigma_{I,t}^2) + \delta_I \sigma_{I,t} d\tilde{W}_t^{(I,2)}$$

Com  $\tilde{\kappa}_I = \kappa_I + \delta_I \lambda_I$  e  $\tilde{\theta}_I = \frac{\kappa_I \theta_I}{\tilde{\kappa}_I}$ , e o processo governando as ações individuais sob a medida  $Q$  são dados por:

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} + -rdt + \beta_j \left( \frac{dI_t}{I_t} - rdt \right) + \sigma_{j,t} d\tilde{W}_t^{(j,1)}$$

$$d\sigma_{j,t}^2 = \kappa_j (\theta_j - \sigma_{j,t}^2) + \delta_j \sigma_{j,t} d\tilde{W}_t^{(j,2)}$$

Onde  $d\tilde{W}_t$  denota contraparte do risco neutro de  $dW_t$  para o qual,

$$d\tilde{W}_t = dW_t + d\langle W, W' \rangle_t \gamma_t,$$

$$\text{Onde: } \gamma_t^{(I,1)} = \frac{\mu_I - \rho_I \lambda_I \sigma_{I,t}^2}{\sigma_{I,t}(1-\rho_I^2)}, \gamma_t^{(I,2)} = \frac{\lambda_I \sigma_{I,t}^2 - \rho_I \mu_I}{\sigma_{I,t}(1-\rho_I^2)} \text{ e } \gamma_t^{(j,2)} = \frac{\alpha_j}{\sigma_{j,t}(1-\rho_j^2)}, \gamma_t^{(j,2)} = -\frac{\rho_j \alpha_j}{\sigma_{j,t}(1-\rho_j^2)}.$$

Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) observaram que a estrutura fatorial de mercado é preservada sob  $Q$ . Consequentemente, o beta do mercado é o mesmo sob as distribuições física e de risco neutro. Isso é consistente com a literatura que documenta que os betas do risco neutro e objetivo estão economicamente próximos da maioria das ações.

É importante observar que nesse cenário modelado, os momentos mais elevados e seus prêmios, como definido pela diferença entre o momento sob  $P$  e  $Q$ , são afetados pelo ajuste do *drift* nos processos de variância.

## 2.16 MODELO FATORIAL DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

O modelo fatorial de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) foi moldado em um cenário afim, o que implica que a função característica para o logaritmo do nível do índice e o logaritmo dos preços da ação podem ser derivadas analiticamente. A função característica para o índice é idêntica a aquela de Heston (1993) com inclusão do fator de mercado.

Para opções de ações individuais, a função característica condicionada ao risco neutro  $\tilde{\phi}^j(\tau, u)$  para o preço da opção,  $S_T^j$ , é dado por:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^j(\tau, u) &= E_t^Q[\exp(iu \ln(S_T^j))] \\ &= (S_T^j)^{iu} \exp(iur\tau(A(\tau, u) + B(\tau, u)) - C(\tau, u)\sigma_{I,t}^2 - D(\tau, u)\sigma_{j,t}^2),\end{aligned}$$

Em que,  $\tau = T - t$  é o tempo até a maturidade e as expressões para  $A(\tau, u)$ ,  $B(\tau, u)$ ,  $C(\tau, u)$  e  $D(\tau, u)$  são as seguintes:

$$\begin{aligned}A(\tau, u) &= \frac{\tilde{\kappa}_I \tilde{\theta}_I}{\delta_I^2} \left\{ 2 \ln \left( 1 - \frac{(\Psi_1 - \kappa_I^C)}{2\Psi_1} (1 - e^{-\Psi_1 \tau}) \right) + (\Psi_1 - \kappa_I^C) \tau \right\} \\ B(\tau, u) &= \frac{\tilde{\kappa}_j \tilde{\theta}_j}{\delta_j^2} \left\{ 2 \ln \left( 1 - \frac{(\Psi_2 - \kappa_j^C)}{2\Psi_2} (1 - e^{-\Psi_2 \tau}) \right) + (\Psi_2 - \kappa_j^C) \tau \right\} \\ C(\tau, u) &= \frac{2g_1(1 - e^{-\Psi_1 \tau})}{2\Psi_1 - (\Psi_1 - \kappa_I^C)(1 - e^{-\Psi_1 \tau})} \\ D(\tau, u) &= \frac{2g_2(1 - e^{-\Psi_2 \tau})}{2\Psi_2 - (\Psi_2 - \kappa_j^C)(1 - e^{-\Psi_2 \tau})}\end{aligned}$$

Com

$$\Psi_1 = \sqrt{(\kappa_1^c)^2 + 2\delta_1^2 g_1} \text{ e } \Psi_2 = \sqrt{(\kappa_j^c)^2 + 2\delta_j^2 g_2} \text{ e}$$

$$g_1 = \frac{i u}{2} \beta_j^2 (1 - i u) \text{ e } g_2 = \frac{i u}{2} (1 - i u) \text{ e}$$

$$\kappa_1^c = \tilde{\kappa}_1 - i u \rho_1 \beta_j \delta_1 \text{ e } \kappa_j^c = \kappa_j - i u \rho_1 \delta_1.$$

Dada a função característica para o log do preço a vista log sob a medida do risco neutro  $Q$ , o preço de uma opção de compra (*call*) de ação europeia com preço de exercício  $K$  e maturidade  $\tau = T - t$  é:

$$C_t^j(S_t^j, K, \tau) = S_t^j \Pi_1^j - K e^{-r\tau} \Pi_2^j,$$

As probabilidades do risco neutro  $\Pi_1^j$  e  $\Pi_2^j$  são definidas por:

$$\Pi_1^j = \frac{1}{2} + \frac{e^{-r\tau}}{\pi S_t^j} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i u \ln k \tilde{\phi}^j(\tau, u - i)}}{i u} \right] du,$$

$$\Pi_2^j = \frac{1}{2} + \frac{e^{-r\tau}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i u \ln k \tilde{\phi}^j(\tau, u)}}{i u} \right] du,$$

As integrais são calculadas numericamente. O primeiro termo diz respeito a probabilidade do preço da ação no vencimento ser igual ao preço da ação hoje, já o segundo, diz respeito a probabilidade da opção ser exercida.

O modelo fatorial de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) deriva diretamente do modelo de Heston (1993). A equação de avaliação do preço da opção *call* apresenta as mesmas características do modelo clássico de Black-Scholes (1973):

$$C(S, T) = S \cdot N(d_1) - K e^{rt} N(d_2).$$

em os  $N$ 's representam são funções distribuições normais de probabilidade.

O modelo segue a mesma forma do modelo de Heston (1993) para a obtenção do preço da opção:

$$C(S, v, T) = S \cdot F(t, T) P_1 - K P(t, T) P_2$$

Aonde  $P_1$  e  $P_2$  são as probabilidades de ocorrência dos eventos, contudo, no modelo de Heston (1993) as função densidade de probabilidade não são mais distribuições normais e são

funções característica, ou seja, funções conhecidas como harmônica que incorporando variáveis complexas.

Contribuição de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) para o modelo diz respeito a utilização de uma função característica nos moldes de Heston (1993),

$$f_f(x, v, t; \phi) = \exp(C(T - t; \phi) + D(T - t; \phi) + i\phi x)$$

porém, mais longa que a primeira por incluir dois termos a mais na função característica, além de introduzir variáveis de mercado e das ações individuais simultaneamente.

## 2.17 PROPRIEDADES DO MODELO

O modelo fatorial de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) apresenta implicações chaves para o gerenciamento do risco de opção e para retornos esperados de opção de ação. Por conveniência, os autores admitem que o beta é positivo para todas as firmas para simplificar a interpretação de certas expressões.

### 2.17.1 Nível de Volatilidade da Opção de Ação

Duan e Wei (2009) mostram empiricamente que firmas com risco sistêmico mais elevado tem um nível mais elevado de variação de risco neutro.

Primeiro, Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) definiram a variância *spot* total para a firma  $j$  no tempo  $t$ :

$$V_{j,t} = \beta_j^2 \sigma_{I,t}^2 + \sigma_{j,t}^2,$$

E definiram a expectativa sob a medida do risco físico  $P$  e risco neutro  $Q$  da correspondente variância integrada por:

$$E_t^P [V_{j,t:T}] \equiv E_t^P \left[ \int_t^T V_{j,s} ds \right] e$$

$$E_t^Q [V_{j,t:T}] \equiv E_t^Q \left[ \int_t^T V_{j,s} ds \right],$$

Decompondo a expectativa de  $P$  em variância do mercado integrada e variância idiossincrática, tem-se:

$$E_t^P [V_{j,t:T}] = \beta_j^2 E_t^P [\sigma_{I,t:T}^2] + E_t^P [\sigma_{j,t:T}^2],$$

Em que  $\sigma_{I,t:T}^2$  e  $\sigma_{j,t:T}^2$  correspondem à variância integrada de  $t$  a  $T$  do mercado e das firmas individuais, respectivamente.

Do modelo, a expectativa da variância total integrada para a ação  $j$  sob a medida do risco neutro  $Q$  é:

$$E_t^Q[V_{j,t:T}] = \beta_j^2 E_t^Q[\sigma_{I,t:T}^2] + E_t^Q[\sigma_{j,t:T}^2] = \beta_j^2 E_t^Q[\sigma_{I,t:T}^2] + E_t^P[\sigma_{j,t:T}^2].$$

Conforme os autores, a segunda equação se mantém quando o risco idiossincrático é não precificado, tal que,  $E_t^P[\sigma_{j,t:T}^2] = E_t^Q[\sigma_{j,t:T}^2]$ .

Para quaisquer duas firmas tendo o mesmo nível de variância total esperada sob a medida do risco físico  $P$  ( $E_t^P[V_{1,t:T}] = E_t^P[V_{2,t:T}]$ ), tem-se:

$$E_t^P[\sigma_{1,t:T}^2] - E_t^P[\sigma_{2,t:T}^2] = -(\beta_1^2 - \beta_2^2)E_t^P[\sigma_{I,t:T}^2].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E_t^Q[V_{1,t:T}] - E_t^Q[V_{2,t:T}] &= (\beta_1^2 - \beta_2^2)E_t^Q[\sigma_{I,t:T}^2] + (E_t^Q[\sigma_{1,t:T}^2] - E_t^Q[\sigma_{2,t:T}^2]) \\ &= (\beta_1^2 - \beta_2^2)E_t^Q[\sigma_{I,t:T}^2] + (E_t^P[\sigma_{1,t:T}^2] - E_t^P[\sigma_{2,t:T}^2]) \\ &= (\beta_1^2 - \beta_2^2)(E_t^Q[\sigma_{I,t:T}^2] - E_t^P[\sigma_{I,t:T}^2]). \end{aligned}$$

Quando o prêmio da variância do mercado é negativo, temos  $\tilde{\theta}_I > \theta_I$  o que implica que  $E_t^Q[\sigma_{I,t:T}^2] > E_t^P[\sigma_{I,t:T}^2]$ . Portanto, temos que:

$$\beta_1 > \beta_2 \Leftrightarrow E_t^Q[\sigma_{1,t:T}^2] > E_t^Q[\sigma_{2,t:T}^2].$$

Assim, Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) concluem que o modelo está de acordo com as descobertas de Duan e Wei (2009) de que as firmas com betas elevados tendem a ter um nível elevado de variância do risco neutro.

### 2.17.2 Assimetria da Opção de Ação

Para entender a inclinação das curvas do *moneyness* da volatilidade implícita da ação, é preciso entender como o beta influencia a assimetria da distribuição de retorno da ação de risco neutro.

De acordo com Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) a assimetria total condicionada aos retornos integrados da firma  $j$  sob a medida do risco físico  $P$ , denotado por  $TSk_j^P$  é dado por:

$$TSk_j^P = Sk^P \left( \int_t^T \frac{dS_j^u}{S_j^u} \right) = Sk_I^P (A_{j,t:T}^P)^{3/2} + Sk_j^P (1 - A_{j,t:T}^P)^{3/2},$$

A assimetria total condicionada aos retornos integrados da firma  $j$  sob do risco neutro  $Q$ , denotado por  $TSk_j^Q$ , é dado por :

$$TSk_j^Q = Sk^Q \left( \int_t^T \frac{dS_j^u}{S_j^u} \right) = Sk_I^Q (A_{j,t:T}^Q)^{3/2} + Sk_j^Q (1 - A_{j,t:T}^Q)^{3/2},$$

Sendo,  $A_{j,t:T}^P = \frac{E_t^P[\beta_j^2 \sigma_{I,t:T}^2]}{E_t^P[V_{j,t:T}]}$  e  $A_{j,t:T}^Q = \frac{E_t^Q[\beta_j^2 \sigma_{I,t:T}^2]}{E_t^Q[V_{j,t:T}]}$ , são as proporções do risco sistêmico da firma  $j$  sob  $P$  e  $Q$ , onde  $Sk_I = Sk \left( \int_t^T \frac{dI_s}{I_s} \right)$  e  $Sk_j = Sk \left( \int_t^T \sigma_{j,s} dW_s^{(j,1)} \right)$  é a assimetria do mercado e idiosincrática, respectivamente.

O resultado mostra que  $\beta_j$  tem papel importante na determinação da assimetria total condicional da firma  $j$ . A equação acima mostra que sob a medida de risco neutro,  $\beta_j$  afeta a inclinação da curva de volatilidade implícita da ação através de  $TSk_{j,t:T}^Q$  pela influência da proporção do risco sistêmico,  $A_{j,t:T}^Q$ .

Um  $A_{j,t:T}^Q$  mais elevado implica em uma carga mais elevada da assimetria de risco do mercado. Considere duas firmas com a mesma variância total esperada sob  $Q$  e  $\beta_1 > \beta_2$ , o que implica que  $A_{1,t:T}^Q > A_{2,t:T}^Q$ . A firma 1 tem uma carga maior de assimetria de risco neutro de índice do que a firma 2.

Quando a distribuição  $Q$  do índice é mais negativamente assimétrica do que a distribuição da ação idiosincrática, como descoberto empiricamente por Bakshi, Kapadia e Madan (2003), tem-se as seguintes previsões *cross-sectional*: firmas de betas mais elevados tem distribuição  $Q$  mais assimétrica negativamente. Observe que essa previsão está de acordo com as descobertas empíricas *cross-sectional* de Duan e Wei (2009) e Dennis e Mayhew (2002).

### 2.17.3 A Estrutura a Termo da Volatilidade de Ações

O modelo fatorial de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) sugere a seguinte estrutura a termo de duas componentes da variância de ações:

$$E_t^Q[V_{j,t:T}] = (\beta_j^2 \tilde{\theta}_I + \theta_j) + \beta_j^2 (\sigma_{I,t}^2 - \tilde{\theta}_I) e^{-\tilde{\kappa}_I(T-t)} + (\sigma_{j,t}^2 - \theta_j) e^{-\kappa_I(T-t)}.$$

Essa expressão mostra como a estrutura a termo da variância do mercado afeta a estrutura a termo da variância para a firma  $j$ . Dada as diferentes velocidades de reversão da média sistêmica e idiossincrática ( $\tilde{\kappa}_I \neq \kappa_j$ ), o  $\beta_j$  tem importantes implicações para a estrutura a termo das volatilidades. O processo de variância idiossincrática é mais persistente (constante) do que a variância de mercado. Quando o processo de variância idiossincrática é mais persistente ( $\tilde{\kappa}_I > \kappa_j$ ), valores mais elevados do beta implicam em uma reversão mais rápida em direção a variância total incondicional ( $V_{j,t:T} = \beta_j^2 \tilde{\theta}_I + \theta_j$ ). Como resultado, quando o processo de variância do mercado é menos persistente do que a variância idiossincrática, as firmas com betas mais elevados são mais prováveis terem as estruturas a termo da volatilidade mais íngremes. Em outras palavras, quanto mais elevados são os betas das firmas é esperado uma maior inclinação positiva quando a estrutura a termo da variância do mercado é inclinadamente crescente e vice-versa.

Em resumo, o modelo sugere que firmas com betas mais elevados teriam níveis mais elevados da volatilidade, inclinações do *moneyness* mais íngremes e mais elevada inclinação da maturidade absoluta.

#### 2.17.4 Gerenciamento do Risco de Opção de Ação

Conforme Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) os modelos de avaliação de opção de ação clássicos usam derivadas parciais para estimar a sensibilidade do preço da opção ao preço do ativo subjacente (delta) e a variância da opção (vega). No modelo, o preço da opção da ação adicionalmente está exposto as mudanças no nível do mercado e a variância do mercado.

Os gestores de carteiras com fundos de opção de ação diversificados precisam saber a sensibilidade do preço da opção da ação a essas variáveis de nível de mercado para, adequadamente, gerir o risco.

Nesse sentido, um contrato de derivativo  $f^j$  escrito no preço da ação,  $S_t^j$ , tem a sensibilidade do  $f^j$  com respeito ao nível do índice,  $I_t$  (delta do mercado) dado por:

$$\frac{\partial f^j}{\partial I_t} = \frac{\partial f^j}{\partial S_t^j} \frac{S_t^j}{I_t} \beta_j,$$

A sensibilidade de  $f^j$  com respeito a variância do mercado (o vega do mercado) é dado por:

$$\frac{\partial f^j}{\partial \sigma_{l,t}^2} = \frac{\partial f^j}{\partial V_{j,t}} \beta_j^2.$$

Isso mostra que o vega da firma de uma maneira direta fornece a ligação entre o usual delta do preço da ação,  $\frac{\partial f^j}{\partial S_t^j}$ , e o delta do mercado,  $\frac{\partial f^j}{\partial I_t}$ , bem como a ligação entre o usual vega da ação,  $\frac{\partial f^j}{\partial V_{j,t}}$ , e o vega do mercado,  $\frac{\partial f^j}{\partial \sigma_{l,t}^2}$ .

Esse resultado permite aos participantes do mercado com carteiras de opções de ação em diferentes firmas medir e gerenciar sua exposição total ao nível do índice e a variância do mercado. Ele também permite aos investidores envolvidos com negociações dispersas, que vendem opções de índice e compram opção de ação, medir e gerenciar sua exposição geral ao risco de mercado e ao risco da variância do mercado.

### 2.17.5 Retornos Esperados em Opção de Ação

Os retornos da opção são principalmente interessantes em gerenciamento de carteiras, fazendo-se necessário uma expressão para os retornos esperados da opção de ação sob a medida do risco físico como uma função do retorno esperado do mercado.

Para Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) um derivativo  $f^j$  escrito no preço da ação,  $S_t^j$ , tem excesso de retorno esperado no contrato do derivativo dado por:

$$\frac{1}{dt} E_t^P \left[ \frac{df^j}{f^j} - r dt \right] = \frac{\partial f^j}{\partial S_t^j} \frac{S_t^j}{f^j} (\alpha_j + \beta_j \mu_l) = \frac{\partial f^j}{\partial S_t^j} \frac{S_t^j}{f^j} \alpha_j + \frac{\partial f^j}{\partial I_t} \frac{I_t}{f^j} \mu_l,$$

O modelo desse modo decompõe o excesso de retorno da opção em duas partes. O delta da opção de ação e o beta da ação. Dito de outro modo, opções de ações proveem os investidores com duas fontes de alavancagem. Primeiro, o beta com respeito ao mercado, e segundo, a elasticidade do preço da opção com respeito as mudanças no preço da ação.

Em linhas gerais, este é o modelo fatorial proposto por Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013), a seguir descreve-se os procedimentos metodológicos da pesquisa.

### **3. METODOLOGIA DA PESQUISA**

#### **3.1 TIPOLOGIA DA PESQUISA**

Para Richardson (2012) a escolha do método representa a escolha dos procedimentos sistemáticos para a descrição e explicação dos fenômenos.

Esta pesquisa caracteriza-se em relação aos objetivos como exploratória, pois, se busca conhecer melhor um assunto, do qual se tem pouco conhecimento, com maior profundidade, tornando-o claro (BEUREN, 2012). Em relação aos procedimentos, como documental, já que, busca organizar informações que encontram dispersas, conferindo-lhes uma nova importância como fonte de consulta (BEUREN, 2012). Quanto à abordagem, é quali-quantitativa. Quantitativa, pois segundo Beuren (2012), se pretende numerar ou medir unidades ou características homogêneas de uma amostra com empregos de instrumentos estatísticos como base para a análise dos dados, buscando descobrir e classificar a relação entre variáveis, além da relação causa-efeito. Qualitativa, pois, de acordo com Richardson (2012) não será utilizada técnica estatística para análise do comportamento do mercado no que tange a evolução dos preços das ações das empresas estudadas.

A amostra é não probabilística, por acessibilidade e conveniência dependendo exclusivamente dos critérios do pesquisador (RICHARDSON, 2012; BEUREN, 2012) devido à facilidade em acesso aos dados, pois, os dados são públicos e estão disponíveis em formato eletrônico.

Quanto ao instrumento trata-se de uma pesquisa em fontes secundárias (BEUREN, 2012), pois a questão de pesquisa busca avaliar informações disponíveis que ainda não foram analisadas por métodos científicos. É uma pesquisa documental baseada em fontes secundárias de informação, fazendo-se necessário coletar dados já disponibilizados para o público em formato digital. Os dados serão analisados documentalmente e interpretados (BEUREN, 2012).

A metodologia da pesquisa divide nas seguintes etapas: Primeiramente, procedeu-se a coleta dos dados; em seguida os dados foram filtrados conforme os critérios de maturidade, liquidez. Estimou-se as volatilidades implícitas, seguida por nova filtragem. Estimou-se os vegas, betas e deltas das ações e do índice. Aplicou-se uma regressão linear com duas variáveis para se estimar os três fatores da regressão. Aplicou-se análise da componente principal para verificar o grau de comunidade entres os três fatores individualmente; desenvolveu-se o algoritmo para o cálculo dos preços das opções para 30 e 60 dias; coletou-se os preços das opções com vencimento em 30 e 60 dias, e por fim, comparou-se os preços do modelo com os

preços do mercado por meio de análise estatística. Os detalhes serão apresentados nas próximas seções.

### 3.2 DADOS

Para esta pesquisa foram escolhidas as duas maiores empresas brasileiras com projeção no cenário internacional, a saber, a Petrobrás S.A. e a Vale S.A.

Petróleo Brasileiro S.A. (Petrobras) é uma sociedade de economia mista de capital aberto, tendo a União como seu principal investidor, atua nos segmentos de exploração e produção, refino, comercialização, transporte, petroquímica, distribuição de derivados, gás natural, energia elétrica, gás-química e biocombustíveis. As principais subsidiárias e controladas são a Petrobras Distribuidora, Transpetro, Liquigas, Petrobras Biocombustíveis e Gaspetro.

A Petrobras possui grande importância econômica e estratégica para o país destacadamente. A empresa está presente em 19 países e possui cerca de 78 mil funcionários, conforme dados de 2016. A produção diária de óleo equivalente alcança mais de 2,7 bilhões de barris obtidas em suas 122 plataformas de produção e refinado em suas 16 refinarias espalhadas pelo Brasil e exterior. Tem uma reserva provada de aproximadamente 13,3 bilhões de barris de óleo equivalente, além disso, dispõem de uma frota de 151 navios, 5 usinas de biocombustíveis, 20 usinas termelétricas, 1 usina de energia eólica e outra de energia solar. Contando com cerca 8.176 postos de combustíveis, sendo 382 fora do país e mais três fábricas de lubrificantes.

A Vale S.A. é uma empresa privada de capital aberto que atua no ramo de mineração e uma das maiores operadoras de logística do país. É a terceira maior empresa de mineração do mundo e a maior produtora mundial de minério de ferro, pelotas para a produção de aço e a segunda maior exploradora de níquel, além disso, produz ferroliga, manganês, bauxita, cobre, caulim, potássio, alumina e alumínio. Atua também no setor de energia elétrica por meio de consórcios.

Os dados da pesquisa foram extraídos dos Boletins Diários de Informações da Bolsa de Valores de São Paulo – BDI, disponível eletronicamente. Inicialmente, foram coletados todos os BDI's dos pregões realizados entre 1º de abril a 30 de julho de 2015, perfazendo 61 boletins. Posteriormente, foram colecionados os BDI's fora da amostra, dia 17 de julho de 2015 e dos dias 14 de agosto e 18 de setembro do mesmo ano, esses últimos correspondem ao último dia de

negociação anterior aos vencimentos das opções, portanto, 30 e 60 dias até o vencimento, respectivamente.

A amostra de ações individuais é composta pelas firmas Petrobrás (PERT4) e Vale do Rio Doce (VALE5), em função de seus títulos apresentarem maior liquidez no mercado brasileiro. O Índice Ibovespa será a *proxy* para o fator de mercado.

Foram selecionados, para o período de 1º de abril a 30 de junho, os preços das ações, preços de exercício, dias até a maturidade, preço do fim do dia da opção e quantidade de opções negociadas da Petrobrás e da Vale sobre ações preferenciais e do índice Ibovespa que apresentaram negociação diária; foram descartadas opções com menos de 30 dias e mais do que 365 dias até o vencimento (DTM), foram descartadas as opções que apresentaram *moneyness* (taxa entre preço à vista e o preço de exercício) menor do que 0,7 e maior do que 1,5 e, aquelas que não satisfazem as condições usuais de arbitragem. Um resumo dos dados está demonstrado na Tabela 1.

**Tabela 1:** Empresas, Código e Contratos de Opções.

Empresas	Código	Total de Opções			Maturidade Média (dias)	Volatilidade Implícita Média
		Total	Calls	Puts		
Ibovespa	IBOV	894	392	502	161	34,95%
Petrobras	PETR	4.683	3.221	1.462	89	50,04%
Vale	VALE	3.881	2.473	1.408	75	32,17%
Média		3.153	2.029	1.124	108	39,05%

**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

A taxa de juros adotada foi a média do período da taxa SELIC, 13,14%, extraída do endereço eletrônico do Banco Central do Brasil, além disso, os dividendos foram considerados nulos em razão da pequena janela temporal da pesquisa, um trimestre, assim, por simplificação do modelo todas as opções americanas foram consideradas europeias.

### 3.3 TRATAMENTO DE DADOS

Os dados foram inicialmente organizados em painel. Usando o programa Matlab foram estimadas as volatilidades implícitas médias, mínimas e máximas de Black-Scholes para as ações e para o Índice por meio da função *blsimpv*, bem como, o *vega* e a sua média por meio da função *blsvega*. Após a estimativa da volatilidade implícita foram descartadas as opções que apresentaram volatilidade implícita menores que 5% e maiores do que 150%.

Os dados da volatilidade implícita, *moneyness* e dias até a maturidade foram organizados em uma seção cruzada ou *cross-section* sobre a qual fora aplicada uma regressão linear bidimensional por meio da função fitlm nos dados das firmas e do índice, obtendo-se os três termos da regressão.

Para cada dia  $t$  foi executada a seguinte regressão para a firma  $j$ :

$$IV_{j,l,t} = a_{j,t} + b_{j,t}(S_t^j/K_{j,t}) + c_{j,t}(DTM_{j,t}) + \epsilon_{j,l,t}.$$

Onde  $l$  denota uma opção disponível para a firma  $j$  no dia  $t$ . Os regressores sofreram padronização diária pela subtração da média e pela divisão pelo desvio padrão. A mesma regressão foi executada nas opções do Ibovespa, conforme Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013), interpreta-se  $a_{j,t}$  como uma medida do nível da volatilidade implícita da firma  $j$  em  $t$ . Semelhantemente,  $b_{j,t}$  captura a inclinação da curva da volatilidade implícita, enquanto,  $c_{j,t}$  é a *proxy* para a inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita.

Por meio da função *pca* foi realizada a análise da componente principal dos termos da regressão *cross-section* das firmas e do índice e determinados os novos coeficientes. Dos resultados da análise da componente principal foram verificados a variação capturada ou poder explicativo de cada variável e correlação de cada componente, os dados foram organizados em formas de tabelas e gráficos.

Posteriormente, o modelo foi implementado no *software* Matlab, seguindo o algoritmo de Moodley (2005) e Rouah (2013). Inicialmente fora implementado e testado o modelo de Heston (1993) como referência para adaptação do modelo fatorial de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) em razão da indisponibilidade do algoritmo original.

É necessário estimar dois vetores das variáveis latentes  $\{\sigma_{I,t}^2, \sigma_{j,t}^2\}$  e dois conjuntos de parâmetros estruturais  $\{\Theta_I, \Theta_j\}$ , onde  $\Theta_I = \{\tilde{\kappa}_I, \tilde{\theta}_I, \delta_I, \rho_I\}$  são os parâmetros de mercado e  $\Theta_j = \{\kappa_j, \theta_j, \delta_j, \rho_j, \beta_j\}$  são os parâmetros individuais. A metodologia de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) envolve dois passos principais.

No primeiro passo, estimou-se a dinâmica do índice de mercado  $\{\Theta_I, \sigma_{I,t}^2\}$  baseando-se apenas nos preços da opção do Ibovespa. No segundo passo, usou-se opções de ação para a firma  $j$  apenas, toma-se a dinâmica do índice de mercado como dado, e estima-se a dinâmica da firma específica  $\{\Theta_j, \sigma_{j,t}^2\}$  para cada firma condicionada a estimativa de  $\{\Theta_I, \sigma_{I,t}^2\}$ .

Dado um conjunto de valores iniciais para a caracterização dos parâmetros estruturais do índice, primeiro estimou-se a variância do mercado a vista em cada dia resolvendo:

$$\operatorname{argmin}_{\sigma_{I,t}^2} \sum_{m=1}^{N_{I,t}} \left( C_{I,t,m} - C_m(\Theta_I^0, \sigma_{I,t}^2) \right)^2 / \operatorname{Vega}_{I,t,m}^2, \text{ para } t = 1, 2, \dots, T,$$

Aonde  $C_{I,t,m}$  são os preços do mercado da opção e  $C_m(\Theta_I^0, \sigma_{I,t}^2)$  são os preços obtidos por meio do modelo de Heston.

Os valores iniciais foram os mesmos sugeridos por Rouah (2013) e o modelo de Heston (MOODLEY, 2005) foi utilizado para calcular os preços do modelo. Para calibração do modelo, foram selecionadas apenas opções de compra cujo vencimento não ultrapassou 30 dias do final da janela temporal.

Para determinação dos betas das firmas individuais, estimou-se as taxas de retorno diário das firmas e do índice. Os dados foram organizados em gráficos de dispersão e aplicada uma regressão linear simples para determinação do coeficiente angular, conforme Gittman e Zutter (2010).

Para determinação dos deltas, os preços das opções das firmas e do índice e os preços das ações e do índice foram organizados em gráficos de dispersão e aplicada uma regressão linear simples para determinação do coeficiente angular, conforme Gittman e Zutter (2010).

Por fim, para testar o modelo foram selecionadas opções com vencimento em 30 e 60 dias a contar de 17 de julho de 2015, portanto, fora do período da amostra inicial. Os preços obtidos no modelo foram comparados com os preços do mercado visando determinar a eficiência das previsões. Subsidiariamente, os resultados foram comparados com o modelo original de Heston, do qual o modelo em estudo é derivado, apenas como referência. Os resultados foram organizados em gráficos e tabelas.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 ANÁLISE PRELIMINAR DOS DADOS

Inicialmente, procurou-se verificar a existência de fatores em comuns nos três coeficientes de uma regressão *cross-section* das opções das ações e do índice de mercado, a saber: níveis de volatilidade implícita, inclinação da curva do *moneyness* e inclinação da estrutura a termo. Isso foi realizado por meio de Análise da Componente Principal nos níveis específicos da volatilidade implícita das firmas, na inclinação da volatilidade implícita com respeito ao *moneyness* da opção e a inclinação da volatilidade implícita com respeito a maturidade da opção, conforme a metodologia de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013). Este procedimento visava identificar a existência de alguma relação entre essas variáveis individuais e as variáveis de mercado.

**Tabela 2:** Estatística resumida da Volatilidade Implícita (IV).

Código	Opções Call				Opções Puts			
	IV média	IV máx.	IV mín.	Vega médio	IV média	IV máx.	IV mín.	Vega médio
IBOV	45,63%	94,79%	5,21%	12.548,01	26,88%	37,30%	12,16%	7.796,36
PETR	48,67%	112,45%	5,29%	1,78	52,39%	134,46%	16,75%	1,54
VALE	43,61%	149,29%	6,52%	2,20	45,23%	92,06%	11,15%	2,26
Média	45,97%	118,84%	5,67%	4184,00	41,50%	87,94%	13,36%	2600,06

**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

A Tabela 2 evidencia que as volatilidades implícitas médias das opções *call* foram aproximadamente iguais, entre 43 e 48%, sendo as opções de compra da Petrobrás as mais voláteis e as opções da Vale as menos. Quanto as opções de venda, verifica-se que as opções da Petrobras ainda apresentam as maiores volatilidades, em contrapartida, as opções do Ibovespa passaram a ter as menores volatilidades, com o aumento da diferença entre as volatilidades das opções é possível verificar a heterogeneidade na volatilidade das opções de vendas estudadas.

Quanto aos níveis de sensibilidade das opções, o vega, Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) obtiveram um resultado diferente, pois o vega das opções S&P500 chegou a 200%, mas nada comparado aos resultados da Tabela 2. Tais discrepâncias decorreriam das diferenças de consolidação entre os mercados pesquisados.

Se pretendeu inicialmente, verificar o alcance para o qual a volatilidade variável no tempo de ações divide um ou mais componentes comuns com o índice Ibovespa. Para inferir a

grau de comunidade na volatilidade de risco neutro, precisou-se de estimativas diárias do nível e inclinação da curva do *moneyness* da volatilidade implícita, bem como, da inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita para todas as firmas e o índice.

Todas as opções sobre o Ibovespa e todas as opções *put* sobre as ações individuais são do tipo europeia, porém, a maioria das opções *call* sobre as ações das empresas individuais são americanas. Admitiu-se que o valor dos dividendos distribuídos no período como nulo e as opções foram consideradas como europeias. Para o cálculo da volatilidade implícita aplicou-se Black-Scholes, e o *software* Matlab.

#### 4.1.1 Fatores comuns nos níveis de volatilidade

Inicialmente se pretendeu verificar a existência de uma estrutura fatorial no mercado brasileiro de ações. Para este fim, aplicou a técnica estatística da análise de componente principal nos dados das ações da Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5) e dados do índice da Bovespa.

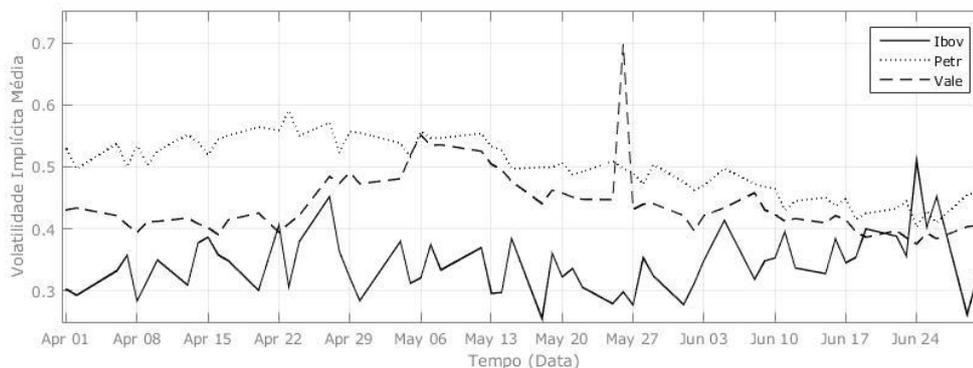
**Tabela 3:** Análise da Componente Principal dos níveis de volatilidade implícita das ações, cargas das componentes e propriedades.

	1a. Comp.	2a. Comp.	3a. Comp.
PETR	71,58%	2,24%	69,80%
VALE	36,68%	83,85%	-40,30%
MÉDIA	54,13%	43,04%	14,75%
Varição Capturada	44,19%	33,89%	21,92%
Correlação com os níveis de volatilidade implícita do Ibovespa	-68,42%	54,90%	48,00%

**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

A Tabela 3 demonstra a análise da componente principal para os coeficientes caracterizados como os níveis de volatilidade  $a_{jt}$ . Os resultados são bastante surpreendentes. A primeira componente principal dos níveis de volatilidade capturou menos do que 50% da variação *cross-sectional* total e tem uma correlação de -64,42% como respeito aos níveis de volatilidade do índice Ibovespa. Este resultado destoa de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) que obtiveram 77% de variação captura e 92% de correlação. Assim, a primeira componente principal explicaria sozinha apenas 44,19% da variação e estaria inversamente correlacionada. As demais componentes apresentam correlação positiva, porém, com menor poder explicativo. Assim, percebe-se que não houve preponderância de qualquer das componentes.

**Gráfico 1:** Evolução temporal da volatilidade implícita média do Ibovespa, Petrobrás e Vale no período de 1º de abril a 30 de junho de 2015.

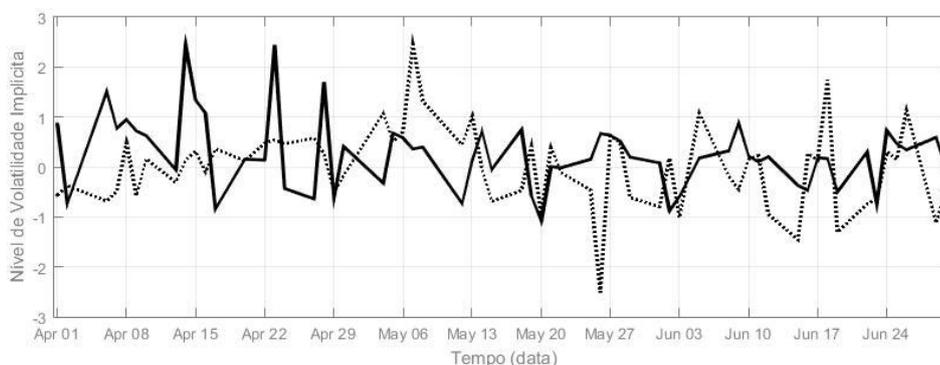


**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Verifica-se, Gráfico 1, que a volatilidade implícita média das opções da Vale apresentou o padrão mais próximo ao índice de mercado no início e no final da amostra. Contudo, contrariando Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) não foi possível identificar um padrão entre as volatilidades. No centro é possível verificar uma simetria, enquanto a Petrobras apresenta uma depressão, as demais volatilidades apresentam montes ou picos.

Verifica-se, ainda, que as volatilidades individuais estiveram acima da volatilidade do índice de mercado em quase todo o período da amostra.

**Gráfico 2:** Nível da volatilidade implícita do Ibovespa e nível da volatilidade implícita da análise da componente principal.



**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

O Gráfico 2 é marcado pela oposição. Observa-se a inversão entre os valores, caracterizando a falta de padrão entre os níveis de volatilidade obtidos diretamente da amostra daqueles obtidos por meio da análise da componente principal.

#### 4.1.2 Fatores comuns na inclinação do *moneyness*

A análise da componente principal da inclinação do *moneyness* da volatilidade implícita está na Tabela 4.

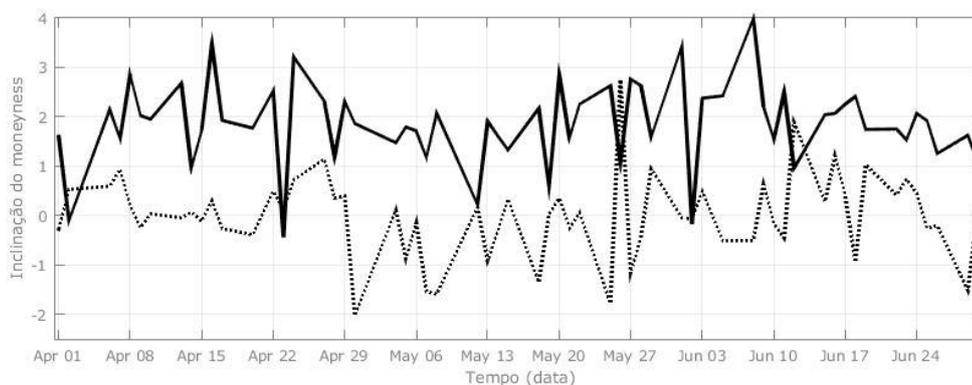
**Tabela 4:** Análise da Componente Principal da inclinação do *moneyness* da volatilidade implícita das ações, cargas das componentes e propriedades.

	1a. Comp.	2a. Comp.	3a. Comp.
PETR	70,82%	33,19%	62,31%
VALE	0,43%	88,05%	-47,40%
Média	35,63%	60,62%	7,45%
Varição Capturada	39,94%	36,03%	24,03%
Correlação com a inclinação do <i>moneyness</i> do Ibovespa	77,27%	-35,18%	-52,83%

**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Verifica-se que não há uma predominância de qualquer das componentes principais. A variação captura evidencia que sozinha, nenhuma das três componentes principais conseguiria explicar a variação *cross-sectional*. Percebe-se ainda que apenas a primeira componente principal da inclinação do *moneyness* está altamente correlacionada a inclinação do *moneyness* do índice Ibovespa.

**Gráfico 3:** Inclinação da curva do *moneyness* para os dados da amostra e para a componente principal.



**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Nitidamente, tanto as curvas da inclinação do *moneyness* obtidas diretamente dos dados (linha cheia) quanto as obtidas pela análise da componente principal (linha pontilhada) evoluem inversamente, permitindo visualizar uma espécie de ilhas entre ambos. Novamente, este resultado contraria Christoffersen, Founier e Jacobs (2013).

#### 4.1.3 Fatores em comum na inclinação da estrutura a termo

Os resultados da análise da componente principal da inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita são apresentados na Tabela 5.

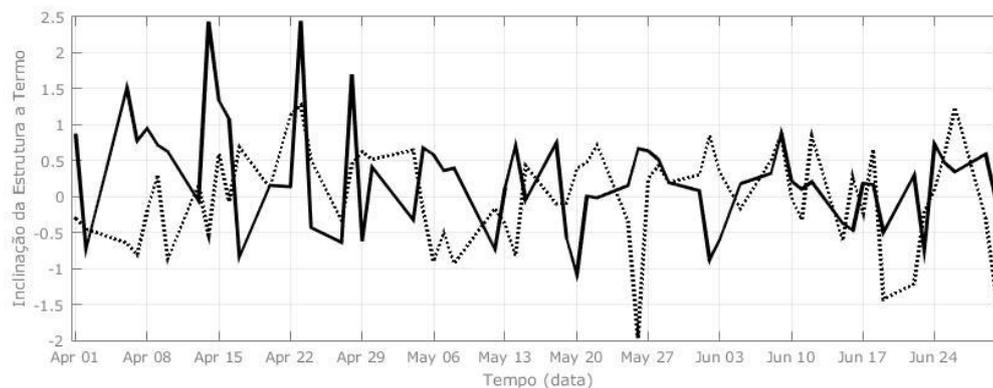
**Tabela 5:** Análise da Componente Principal da inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita das ações, cargas das componentes e propriedades.

	1a. Comp.	2a. Comp.	3a. Comp.
PETR	67,88%	-22,63%	-69,86%
VALE	69,04%	-12,73%	71,21%
Média	68,46%	-17,68%	0,68%
Varição Capturada	52,38%	32,15%	15,47%
Correlação com a inclinação da estrutura a termo do Ibovespa.	31,35%	94,84%	-4,75%

**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

A análise da componente principal mostra que as duas primeiras componentes capturam quase 85% da variação *cross-section* da inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita das opções de ações individuais. Estando a segunda componente altamente correlacionada, 95%, com a inclinação da estrutura a termo do Ibovespa. Estes resultados apontam para não existência de fatores em comuns entre a inclinação da estrutura a termo das opções de ações individuais e de opções do Ibovespa, contrariando os resultados de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013).

**Gráfico 4:** Inclinação da curva da estrutura a termo obtida diretamente dos dados e obtidas pela análise da componente principal.



**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Os melhores resultados foram obtidos pela comparação entre a inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita do Ibovespa obtido diretamente dos dados com os obtidos por

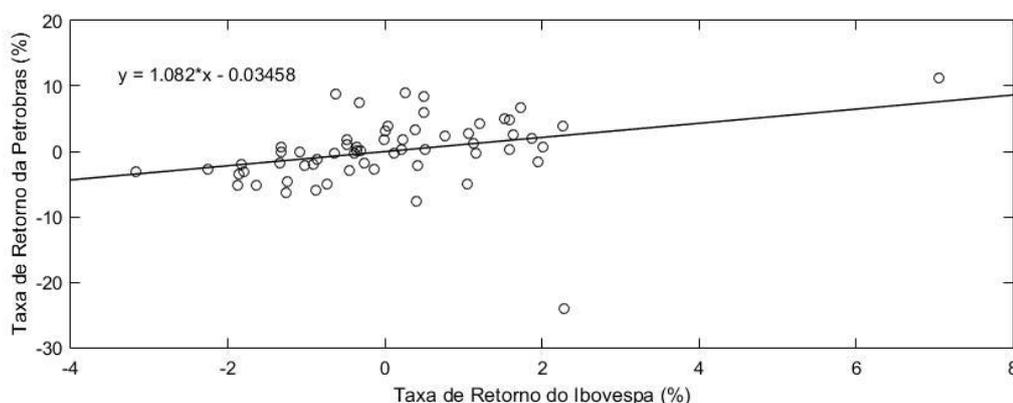
meio da análise da componente principal. Em alguns instantes é possível perceber algum padrão mesclado a comportamentos antagônicos.

Assim, percebe-se que os resultados obtidos com dados de opções das duas principais empresas do mercado brasileiro são divergentes dos obtidos por Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013). Credita-se tal divergência ao número reduzido da amostra (duas empresas) com aquele utilizado no modelo (29 empresas). Dessa forma, a análise dos resultados não identificou a existência de um fator em comum entre essas variáveis.

#### 4.2 DETERMINAÇÃO DOS BETAS

O coeficiente beta está relacionado a medida do risco não diversificável, é o grau de movimento do retorno de um ativo em resposta as mudanças no retorno do mercado (GITTMAN e ZUTTER, 2010). Com base nos retornos diários das ações das firmas individuais e do Ibovespa obteve-se os gráficos a seguir. Para determinação dos betas ou risco do ativos, aplicou-se uma regressão linear estimando-se o coeficiente angular, conforme os Gráficos 5 e 6, determinando o beta da Petrobrás e o da Vale.

**Gráfico 5:** Regressão linear da taxa de retorno do Ibovespa e da taxa de retorno das ações da Petrobrás no período.



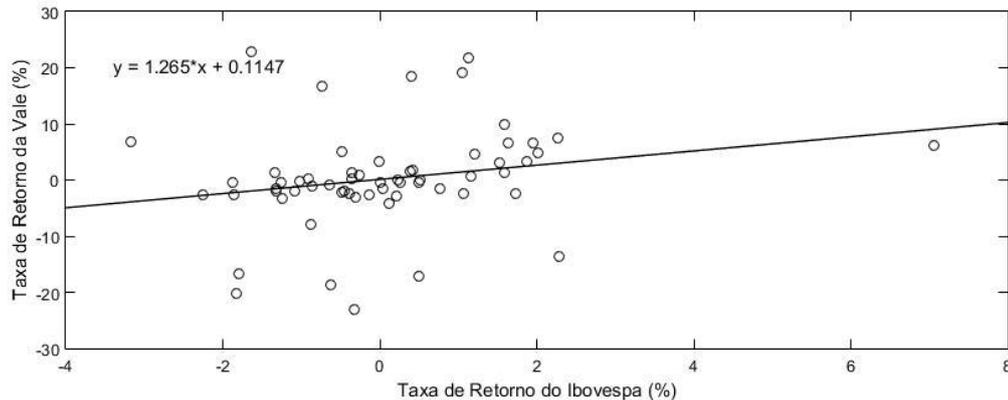
**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

O gráfico 5 mostra que as taxas de retorno da Petrobrás estão positivamente relacionadas a taxa de retorno do Ibovespa, beta positivo, indicando que o crescimento nos retornos da Petrobrás acompanha o crescimento nos retornos do Ibovespa e o inverso também se verifica. Para cada variação positiva de uma unidade nos retornos do Ibovespa a Petrobrás tem uma variação positiva de 1,08 em seus retornos. Assim, verifica-se que o risco das ações da Petrobrás são maiores que o risco do mercado.

Utilizando-se o mesmo procedimento, obteve-se o beta da Vale (VALE 5) a seguir.

Da mesma forma, a taxa de retorno da Vale apresenta-se positivamente relacionada ao comportamento da taxa de retorno do Ibovespa, beta positivo, na proporção de aproximada 1,26. Percebe-se também que o risco das ações da Vale é superior ao risco de mercado.

**Gráfico 6:** Regressão linear da taxa de retorno do Ibovespa e da taxa de retorno das ações da Vale no Período.



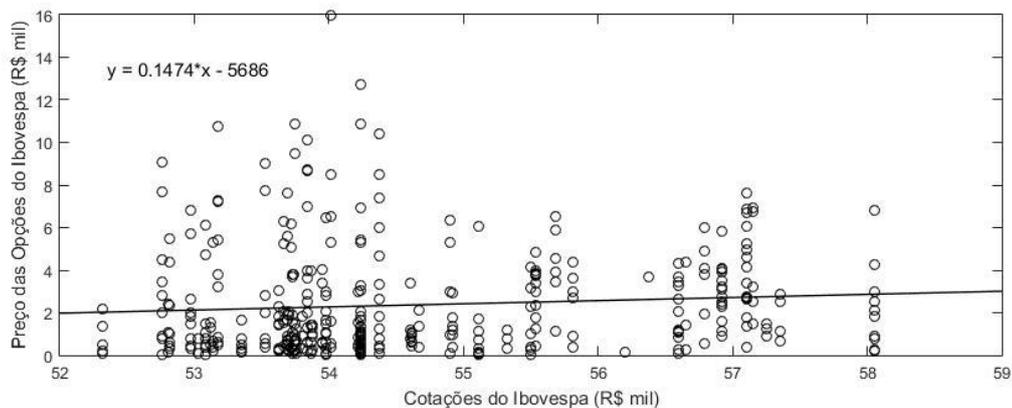
**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

As firmas individuais apresentam respostas positivamente relacionadas as variações nos retornos do mercado, sendo as ações da Vale as que respondem mais fortemente, caracterizando maior risco aos investidores desses ativos.

#### 4.3 DETERMINAÇÃO DOS DELTAS

O delta informa da sensibilidade dos preços da opção com relação ao preço da ação. Aplicou-se uma regressão linear no gráfico das cotações do Ibovespa em função dos preços das opções do mesmo índice, conforme a seguir.

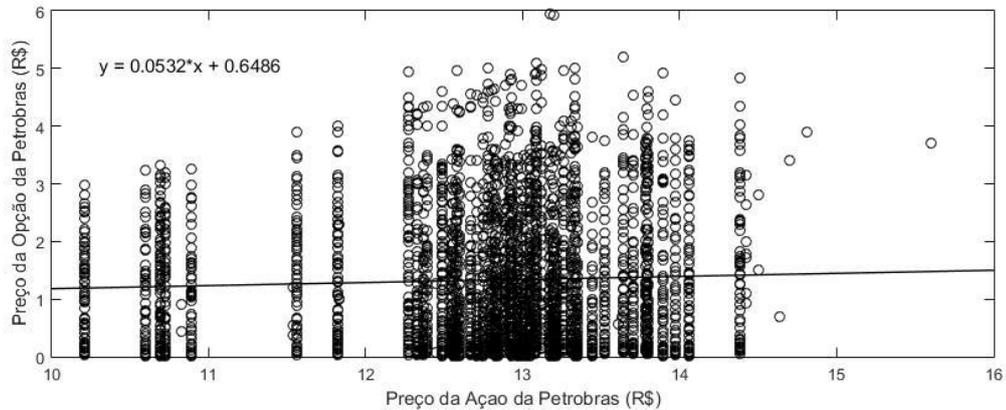
**Gráfico 7:** Regressão linear das cotações do Ibovespa em função dos preços das opções do índice no período.



**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

O delta informa sobre a sensibilidade das opções em relação aos preços do ativo-objeto. Verifica-se que para as opções do índice Ibovespa, essa sensibilidade é praticamente nula.

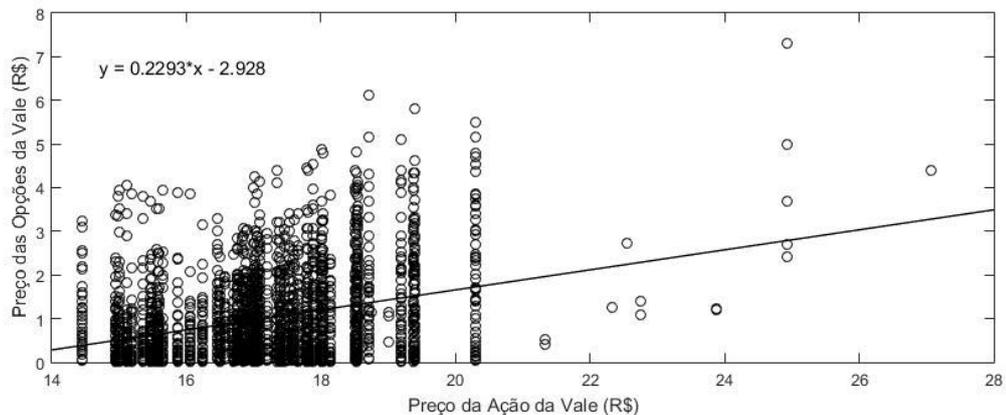
**Gráfico 8:** Regressão linear das cotações do Petrobrás em função dos preços de suas opções do índice no período.



**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Verifica-se, do Gráfico 8, que os preços das opções *call* sobre as ações da Petrobrás apresentaram baixíssima sensibilidade as variações no preço do ativo subjacentes. Indicando que os preços das opções não respondem eficientemente ao movimento decorrente da oscilação nos preços das ações.

**Gráfico 9:** Regressão linear das cotações da Vale em função dos preços das opções no período.



**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Os preços das opções *call* de ações da Vale carregam uma maior sensibilidade as variações nos preços das ações no mesmo período, 0,22. O delta da Vale foi o maior obtido entre os dados da amostra.

#### 4.4 CALIBRAÇÃO DO MODELO

É necessário estimar dois vetores das variáveis latentes  $\{\sigma_{I,t}^2, \sigma_{j,t}^2\}$  e dois conjuntos de parâmetros estruturais  $\{\Theta_I, \Theta_j\}$ , onde  $\Theta_I = \{\tilde{\kappa}_I, \tilde{\theta}_I, \delta_I, \rho_I\}$  são os parâmetros de mercado e  $\Theta_j = \{\kappa_j, \theta_j, \delta_j, \rho_j, \beta_j\}$  são os parâmetros individuais. A metodologia de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) envolve dois passos principais.

No primeiro passo, estima-se a dinâmica do índice de mercado  $\{\Theta_I, \sigma_{I,t}^2\}$  baseando-se apenas nos preços da opção do Ibovespa. No segundo passo, usamos opções de ação para a firma  $j$  apenas, tomamos a dinâmica do índice de mercado como dado, e estimamos a dinâmica da firma específica  $\{\Theta_j, \sigma_{j,t}^2\}$  para cada firma condicionada na estimativa de  $\{\Theta_I, \sigma_{I,t}^2\}$ .

Dado um conjunto de valores iniciais  $\Theta_I^0$ , para a caracterização dos parâmetros estruturais do índice, primeiro estimamos a variância do mercado a vista em cada dia resolvendo:

$$\hat{\sigma}_{I,t}^2 = \underset{\sigma_{I,t}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{m=1}^{N_{I,t}} \left( C_{I,t,m} - C_m(\Theta_I^0, \sigma_{I,t}^2) \right)^2 / Vega_{I,t,m}^2, \text{ para } t = 1, 2, \dots, T,$$

Onde  $C_{I,t,m}$  é o preço de mercado do contrato de opção de índice  $m$  no dia  $t$ ,  $C_m(\Theta_I^0, \sigma_{I,t}^2)$  é o preço da opção do índice do modelo,  $N_{I,t}$  é o numero de contratos do índice disponível no dia  $t$  e  $Vega_{I,t}$  é a sensibilidade de Black-Scholes do preço da opção do índice com respeito a volatilidade calculada da volatilidade implícita.

Uma vez que o conjunto de variância do mercado é obtido, resolve-se para o conjunto de parâmetros caracterizadores da dinâmica do índice com se segue:

$$\hat{\Theta}_I = \underset{\Theta_I}{\operatorname{argmin}} \sum_{m,t}^{N_I} \left( C_{I,t,m} - C_m(\Theta_I, \hat{\sigma}_{I,t}^2) \right)^2 / Vega_{I,t,m}^2,$$

Onde  $N_I \equiv \sum_t^T N_{I,t}$  representa o número total de contratos de opção de índice disponível.

Dado um valor inicial  $\Theta_j^0$  e o  $\hat{\sigma}_{j,t}^2$  estimado e  $\hat{\Theta}_I$ , pode-se estimar a variação da ação a cada dia por resolver:

$$\hat{\sigma}_{j,t}^2 = \underset{\sigma_{j,t}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{m=1}^{N_{j,t}} \left( C_{j,t,m} - C_m(\Theta_j^0, \hat{\Theta}_I, \hat{\sigma}_{j,t}^2, \sigma_{j,t}^2) \right)^2 / Vega_{j,t,m}^2, \text{ para } t = 1, 2, \dots, T,$$

Onde  $C_{j,t,m}$  é o preço da opção  $m$  para a firma  $j$  com preço  $t$ ,  $C_m(\Theta_j^0, \hat{\Theta}_1, \hat{\sigma}_{j,t}^2, \sigma_{j,t}^2)$  é o preço da opção da ação do modelo,  $N_{j,t}$  é o número de contratos de ação disponível do dia  $t$  e  $Vega_{j,t,m}$  é o Vega de Black-Scholes da opção da ação.

Uma vez que o conjunto de variâncias *spot* do mercado é obtido, resolve-se para o conjunto de parâmetros característico da dinâmica da ação como se segue:

$$\hat{\Theta}_j = \underset{\Theta_j}{\operatorname{argmin}} \sum_{m,t}^{N_j} \left( C_{j,t,m} - C_m(\Theta_j, \hat{\Theta}_1, \hat{\sigma}_{j,t}^2, \sigma_{j,t}^2) \right)^2 / Vega_{j,t,m}^2$$

Onde  $N_j \equiv \sum_t^T N_{j,t}$  representa o número total de contratos disponível para o título  $j$ . Utilizando-se a função `lsqnonlin` e uma rotina de programação no *software* Matlab (MOODLEY, 2005) obteve-se os parâmetros estimados ou calibrados do modelo, os valores iniciais foram os mesmos utilizados no trabalho Rouah (2013). Dessa forma, os parâmetros *kappa*, *theta*, *sigma*, *rho*, *v0* foram estimados para o fator de mercado (Ibovespa) e para a Petrobrás e Vale, conforme tabela a seguir.

**Tabela 6:** Estimativa dos parâmetros do modelo.

	Kappa	Theta	Sigma	Rho	Vo
Valores iniciais	6,5482	0,0731	2,3012	-0,4176	0,1838
Valores Estimados Ibov	7,3575	0,0058	1,7072	-0,4291	0,1637
Valores Estimados Petr	6,1117	0,0037	2,3496	-0,3959	0,1392
Valores Estimados Vale	17,3452	0,0341	4,1283	-0,4281	0,0138

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

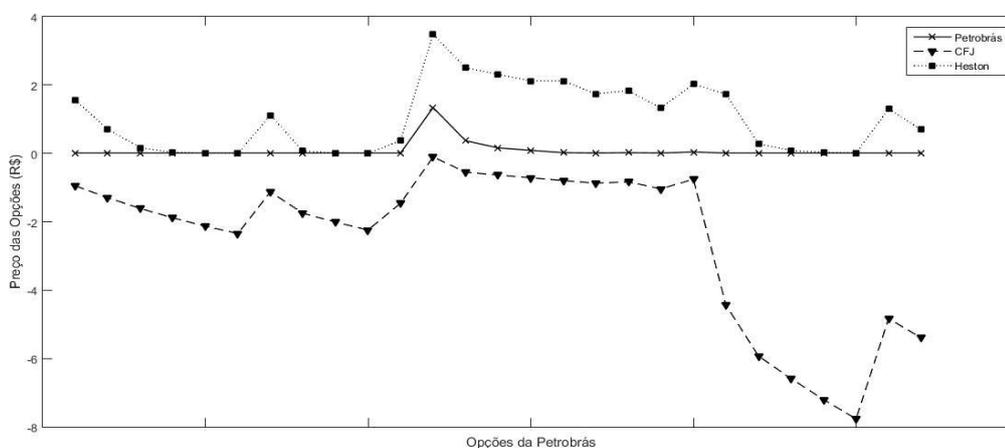
Os valores dos parâmetros estão dentro dos limites aceitáveis dos modelos, contudo, ressalta-se que se tratam de soluções locais relacionadas a rotina de otimização utilizada, a qual, dentre outros fatores depende das condições de contorno, sendo, portanto, possível obter mais de uma dezena de parâmetros diferentes para o mesmo conjunto de dados.

#### 4.5 AVALIAÇÃO DO MODELO

Como teste do modelo, estimou-se os preços das opções da Petrobrás e da Vale com maturidade em 30 e 60 dias. Os dados das cotações foram obtidos no dia 17 de julho de 2015 e para o vencimento em 14 de agosto e 18 de setembro do mesmo ano, ambas as datas correspondem ao último dia de negociação da opção antes da maturidade. Subsidiariamente, optou-se por comparar os resultados do modelo fatorial com o modelo original de Heston.

Sinteticamente, os resultados dessas estimativas estão demonstrados nos gráficos a seguir.

**Gráfico 10:** Preço das opções da Petrobrás obtidos pelos modelos e os preços de mercado no dia anterior ao vencimento.



**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Os resultados das previsões dos modelos para os preços das opções com vencimento em 30 e 60 dias em comparação com os preços obtidos no mercado estão evidenciados no Gráfico 10 para as opções da Petrobrás. No aspecto quantitativo, observa-se que o modelo fatorial estimou os preços sempre abaixo do valor de mercado, caracterizando que em nenhum momento as estimativas foram iguais aos preços reais. No aspecto qualitativo, o resultado coincide com a expectativa do mercado, pois, as opções não apresentavam valor significativo de mercado no dia dos respectivos vencimentos.

Observa-se da variação relativa na Tabela 7 que o modelo fatorial apresentou estimativa grosseiramente discrepantes dos valores de mercado na avaliação das opções com maturidade em 30 dias. Resultados mais consistente foram obtidos pelo modelo de Heston.

**Tabela 7:** Previsão do modelo para a Petrobrás em 30 dias.

Preço	CFJ	Var (%)	Heston	Var (%)
0,01	-0,95	9.561,00	1,56	163,55
0,01	-1,30	13.076,00	0,71	53,80
0,01	-1,61	16.193,00	0,16	9,63
0,01	-1,89	18.953,00	0,03	1,09
0,01	-2,13	21.389,00	0,01	-0,17
0,01	-2,34	23.533,00	0,00	-0,37
0,01	-1,13	11.371,00	1,11	97,86
0,01	-1,75	17.615,00	0,07	3,40
0,01	-2,01	20.209,00	0,01	0,18
0,01	-2,24	22.496,00	0,00	-0,31
0,01	-1,46	14.681,00	0,38	25,07

1,34	-0,10	107,71	3,48	2.073,18
0,37	-0,55	248,62	2,50	387,98
0,16	-0,63	495,63	2,31	339,70
0,09	-0,71	893,44	2,12	284,13
0,02	-0,79	4.066,00	2,12	264,62
0,01	-0,87	8.806,00	1,74	198,90
0,02	-0,83	4.260,50	1,84	218,12
0,01	-1,04	10.479,00	1,33	127,31
0,04	-0,75	1.984,75	2,02	263,15
<b>Média</b>		<b>11.020,93</b>		<b>225,54</b>

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Quando se observa a variação relativa da avaliação das opções com vencimento em 60, Tabela 8, as discrepâncias se acentuam ainda mais.

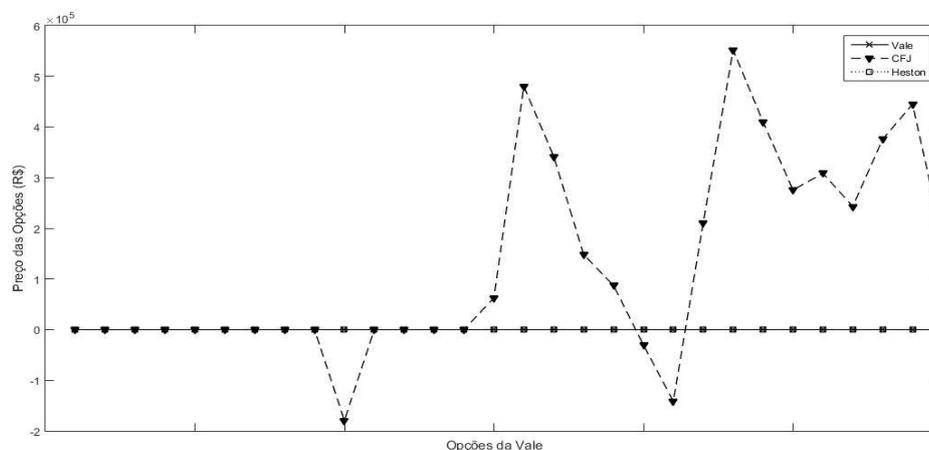
**Tabela 8:** Previsão do modelo para a Petrobrás em 60 dias.

Preço	CFJ	Var (%)	Heston	Var (%)
0,01	-4,44	44.457,00	1,73	38,82
0,01	-5,93	59.355,00	0,28	4,59
0,01	-6,59	65.974,00	0,08	1,11
0,01	-7,20	72.096,00	0,03	0,30
0,01	-7,77	77.756,00	0,01	0,04
0,01	-4,83	48.404,00	1,30	26,64
0,01	-5,39	54.040,00	0,70	12,87
<b>Média</b>		<b>60.297,43</b>		<b>12,05</b>

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Com relação as previsões para os preços das opções da Vale em 30 e 60 dias, observa-se um comportamento análogo aos resultados da Petrobrás para 30 dias.

**Gráfico 11:** Preço das opções da Vale obtidos pelos modelos e os preços de mercado no dia anterior ao vencimento.



Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Verifica-se, quantitativamente, que os preços estimados pelo modelo fatorial desta vez oscilaram hora abaixo dos preços do mercado hora acima, contudo, permaneceu a inconsistência dos resultados, conforme demonstrado nas tabelas a seguir.

**Tabela 9:** Previsão do modelo para a Vale em 30 dias.

<b>Preço</b>	<b>CFJ</b>	<b>Var (%)</b>	<b>Heston</b>	<b>Var (%)</b>
3,91	-6,99	278,70	4,12	-5,27
2,20	-7,94	461,10	3,11	-41,25
1,81	-9,26	611,64	2,15	-18,58
0,76	-10,52	1.484,28	1,17	-54,34
0,03	-11,73	39.187,00	0,26	-767,33
0,01	-12,88	128.901,00	0,01	-30,00
0,01	-13,98	139.947,00	0,00	100,09
0,01	-15,04	150.521,00	0,00	63,00
0,01	-16,05	160.643,00	0,01	-31,00
0,01	-179.509,00	1,80E+09	0,00	120,00
4,00	-5,86	246,45	4,59	-14,75
0,01	-13,44	134.485,00	0,01	-12,00
0,01	-12,31	123.195,00	0,05	-390,00
0,01	-13,16	131.708,00	0,00	132,00
<b>Média</b>		1,28E+08		-67,82

**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Verifica-se com base na variação relativa que os preços do modelo não se aproximaram dos preços do mercado.

**Tabela 10:** Previsão do modelo para a Vale em 60 dias.

<b>Preço</b>	<b>CFJ</b>	<b>Var (%)</b>	<b>Heston</b>	<b>Var (%)</b>
2,49	6,26E+04	-2,51E+06	1,38	44,76
1,26	4,80E+05	-3,81E+07	0,51	59,35
0,33	3,42E+05	-1,04E+08	0,08	76,55
0,01	1,48E+05	-1,48E+09	0,01	32,00
0,01	8,69E+04	-8,69E+08	0,01	-16,00
0,01	-3,05E+04	3,05E+08	0,01	48,00
0,01	-1,42E+05	1,42E+09	0,00	115,00
0,01	2,11E+05	-2,11E+09	0,02	-139,00
1,58	5,52E+05	-3,49E+07	0,92	41,80
0,63	4,10E+05	-6,51E+07	0,19	69,41
0,03	2,75E+05	-9,18E+08	0,03	-2,67
0,06	3,08E+05	-5,14E+08	0,05	17,67
0,01	2,43E+05	-2,43E+09	0,03	-160,00
0,37	3,76E+05	-1,02E+08	0,12	68,70
0,82	4,45E+05	-5,42E+07	0,33	59,66
0,01	1,79E+05	-1,79E+09	0,02	-51,00
<b>Média</b>		<b>-5,49E+08</b>		<b>16,51</b>

**Fonte:** Dados da pesquisa (2015).

Qualitativamente, verifica-se que o modelo estimou acertadamente a desvalorização ocorrida no preço das opções da Vale, coincidindo com a expectativa do mercado para 30 dias, entretanto, o mesmo não se verifica para 60 dias.

Sob o ponto de vista geral, qualitativamente o modelo previu adequadamente as expectativas do mercado para os preços das opções da Petrobrás com vencimento em 30 e 60 dias e da Vale com vencimento em 30 dias. O modelo previu a desvalorização das opções, fato esse demonstrado tanto pelos preços das opções exibidos nas Tabelas 7 a 10 quanto pelo reduzido número de opções negociadas, caindo acentuadamente.

Sob o ponto de vista quantitativo, verifica-se a imprecisão dos resultados. Uma possível explicação para esse fator decorre da análise do comportamento histórico dos preços das ações das empresas estudadas.

No caso da Petrobras verifica-se, no Gráfico a seguir, que eventos associando a empresa à escândalos de corrupção e ambientais possivelmente ocasionaram a desvalorização no preço das ações no mercado.

**Gráfico 12:** Evolução histórica nos preços das ações da Petrobras (Petr4).



**Fonte:** [www.bmfbovespa.com.br](http://www.bmfbovespa.com.br)

No que tange a Vale, verifica-se, Gráfico 13, situação análoga. A desvalorização das ações está associada, possivelmente, à queda nos preços das *commodities* no mercado internacional e crise nos principais mercados consumidores como a China, Gráfico 14. A partir de meados de julho de 2015 a Vale vem perdendo valor de mercado acentuadamente no período anterior ao período da coleta de dados.

**Gráfico 13:** Evolução histórica nos preços das ações da Vale (Vale5).

Published on TradingView.com, July 17, 2016 22:24 EST

BMFBOVESPA\_DLY:VALE5, W 13.74 ▼ -0.08 (-0.58%) O:13.29 H:14.45 L:13.23 C:13.74

Fonte: [www.bmfbovespa.com.br](http://www.bmfbovespa.com.br)

O gráfico a seguir evidencia a paridade no preço do minério de ferro entre o dólar americano e a moeda chinesa. Verifica-se a queda nos preços a partir de janeiro de 2011, alcançado os menores preços em torno do período estudado.

**Gráfico 14:** Evolução histórica nos preços do minério de ferro.Fonte: [www.vale.com](http://www.vale.com)

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo de estrutura fatorial de mercado de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013), derivado do modelo Heston (1993), pressupõe a partir de um conjunto de informações de um grupo específico de firmas e um fator de mercado que seria possível avaliar eficientemente os preços de opções de ações. A solução da função característica contempla informações a respeito de ações individuais e do mercado, simultaneamente.

Esta pesquisa teve por objetivo principal avaliar a aplicabilidade do modelo fatorial de mercado desenvolvido por Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) na determinação dos preços de opções de ações da Petrobrás S. A. e Vale do Rio Doce S. A. negociadas na Bovespa. Para parametrização do modelo foram utilizando dados das ações Petr4, Vale5 e do índice Ibovespa no período de 1º de abril a 30 de junho de 2015, sendo definido como fator de mercado o índice Ibovespa. Especificamente, foram levantados as cotações dos preços das ações e opções das duas firmas individuais e das opções do índice Ibovespa, verificou-se por meio da análise da componente principal se os preços das opções das ações destas firmas carregavam em si informações a respeito do comportamento do mercado, posteriormente foram estimados os preços das opções por meio do desenvolvimento das rotinas de programação, por fim, testou-se o modelo para estimar os preços das opções de ações com vencimento em 30 e 60 dias, comparando-os com os preços do modelo como os preços de mercado.

Quanto a evolução da volatilidade implícita média das opções da Petrobrás, Vale e do Ibovespa, verificou que não apresentaram qualquer semelhança no período analisado, sendo, as volatilidades implícitas individuais superiores a volatilidade do índice Ibovespa em quase todo o período, contrariando os resultados de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013).

No que diz respeito a existência de estrutura fatorial em comum entre as variáveis individuais e as variáveis de mercado. Os resultados da análise da componente principal para os níveis de volatilidade mostraram que a primeira componente principal capturou menos do que 50% da variação *cross-sectional* total e teve uma correlação de -64,42% com respeito aos níveis de volatilidade do índice Ibovespa, destoando de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) que obtiveram 77% de variação captura e 92% de correlação. Assim, diante desses dados percebe-se que os níveis de volatilidade não compartilham informações em comum.

A análise da componente principal para inclinação do *moneyness* da volatilidade implícita mostrou que não há uma predominância de qualquer das componentes principais. A variação capturada evidencia que sozinha, nenhuma das três componentes principais

conseguiria explicar a variação *cross-sectional*. Percebe-se, assim, que a inclinação na curva do *moneyness* das firmas individuais não compartilha informações em comum com o índice de mercado.

Os resultados da análise da componente principal para a inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita mostraram que a primeira componente capturou apenas 52% da variação *cross-section* da inclinação da estrutura a termo da volatilidade implícita das opções de ações individuais com correlação de 32%. Estes resultados não apontam para existência de fatores em comuns entre a inclinação da estrutura a termo das ações individuais e do índice Ibovespa.

Assim, a análise da componente principal não detectou a existência de fatores em comum entre os preços das ações Petr4 e Vale5 com o índice Ibovespa, pois, com base nos dados da pesquisa os preços dos ativos subjacentes, as ações PETR4 e VALE5 não refletiram ou não são capazes por si só de influenciar o índice Ibovespa no período analisado. Os preços dessas ações não carregam informações relevantes do comportamento do mercado, apesar da evidente liquidez de seus títulos. Os resultados obtidos são divergentes dos obtidos por Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013).

Quanto às gregas, o beta da Petrobrás, inclinação do gráfico da taxa de retorno da Petrobrás *versus* taxa de retorno do Ibovespa, chegou a 1,08 no período, demonstrando uma relação diretamente proporcional e indicando que o risco das ações se encontra acima do risco de mercado. A mesma situação ocorreu para a Vale, entretanto, esta apresentou risco mais elevado, obtendo-se um beta de 1,2 aproximadamente. Demonstrando que o investidor incorre em maior risco ao aplicar seus recursos na Vale nesse período.

Os vegas das opções do índice Ibovespa apresentaram níveis elevados, demonstrando a maior sensibilidade dos preços das opções do índice Ibovespa quando comparado aos resultados obtidos por Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013). O S&P500 apresentou vega das opções que chegaram a 200%, o índice Ibovespa chegou a 12.548,01 para as opções *call* e 7.796,36 para as opções *put*. Este resultado é um indicativo da instabilidade do mercado de capitais brasileiro, frente a um mercado mais sólido, como o do estudo original.

O delta informa sobre a sensibilidade dos preços das opções em relação aos preços do ativo-objeto. Verificou-se que para as opções do índice Ibovespa o delta foi de 0,14, para a Petrobrás de 0,05 e de 0,22 para a Vale, apontado para a maior sensibilidade nos preços das

opções da Vale em relação as próprias ações. Assim, a Vale representa um indicador mais robusto que a Petrobrás e o Índice Ibovespa da tendência do mercado.

Como teste do modelo, estimou-se os preços das opções da Petrobrás e da Vale com maturidades em 30 e 60 dias. Os dados das cotações foram obtidos no dia 17 de julho de 2015 e para o vencimento em 14 de agosto e 18 de setembro do mesmo ano, ambas as datas correspondes ao último dia de negociação da opção antes do vencimento.

Sob o ponto qualitativo, as previsões dos preços do modelo adequadamente estimaram a desvalorização das opções das empresas estudadas, indicado a possibilidade de perda de investimento e a impossibilidade de realização de *hedge* com base naquelas opções.

Sob o ponto de vista quantitativo, os resultados das previsões dos modelos para os preços das opções com vencimento em 30 e 60 dias foram subestimados quando comparado aos preços do mercado. Sob o ponto de vista geral, o modelo fatorial não conseguir prever com exatidão os preços das opções.

Credita-se essa divergência ao momento econômico enfrentado pelas empresas estudadas, devido ao envolvimento em escândalos de corrupção na alta administração, bem como, incidentes operacionais e ambientais no caso da Petrobrás e, a queda no preço do minério de ferro e a crise no seu principal mercado consumidor, no caso da Vale.

Portanto, o modelo fatorial de mercado desenvolvido por Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013), não estimou eficientemente os preços das opções de compra de ações da Petrobrás e da Vale com vencimentos em 30 e 60 dias, sob o ponto de vista quantitativo. Entretanto, sob o aspecto qualitativo os resultados para as previsões com 30 dias até o vencimento para ambas as empresas e em 60 dias apenas para a Petrobrás foram satisfatórios, o modelo previu acertadamente a desvalorização dos preços opções.

Quanto a limitações da pesquisa. A amostra contemplou apenas duas empresas e dados de um trimestre enquanto a pesquisa de Christoffersen, Fournier e Jacobs (2013) utilizou uma janela temporal de mais de 15 anos e 29 empresas individuais, em razão da disponibilidade de dados. Os parâmetros foram estimados dentro dos limites aceitáveis dos modelos, contudo, se tratam de soluções locais relacionadas a rotina de otimização utilizada, a qual, dentre outros fatores depende das condições de contorno, sendo, portanto, possível obter mais de uma dezena de parâmetros diferentes para o mesmo conjunto de dados.

Outras limitações dizem respeito as dificuldades em reproduzir o modelo fatorial devido a reduzida quantidade de informações constante no trabalho original, bem como, a não disponibilização do código do programa utilizado no Matlab..

E por fim, outro fator a se considerar diz respeito aos tipos de mercado. O mercado norte-americano encontra-se consolidado e maduro, apresentando menores oscilações e conseqüentemente, menor lucratividade, diferentemente do mercado brasileiro, um mercado emergente, mais instável e imaturo, suscetível a grandes oscilações. Deve-se considerar, também, o desempenho econômico em declínio das empresas estudadas, decorrente de situações de corrupção e crises em mercados consumidores.

Esta pesquisa não pretende esgotar o tema, restando ainda muito que verificar a fim de constatar a aplicabilidade ou não do modelo fatorial ao mercado brasileiro. Entre outras possibilidades, se poderia aumentar a janela temporal e utilizar um conjunto com mais empresas. Do mesmo modo, se poderia implementar outro algoritmo com maior facilidade de manuseio e interpretação.

## REFERÊNCIAS

- ANG, Andrew., HODRICK, Robert. J., XING, Yuhang e ZHANG, Xiaoyan et al. *The cross-section of volatility and expected returns. The Journal of Finance*, v. 61, n. 1, p. 259-299, 2006.
- BAKSHI, G., KAPADIA, N. *Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium, Review of Financial Studies*, 16, 527.566, 2003.
- BAKSHI, G., KAPADIA, N., MADAN, D. *Stock return characteristics, skew laws, and differential pricing of individual equity options, Review of Financial Studies*, 10, 101.143, 2003.
- BLACK, F., SCHOLES, M. *Valuation of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy*, 81, 637.654, 1973.
- BEUREN, Ilse Maria. Como elaborar trabalhos monográficos em contabilidade: teoria e prática. 3ª Ed. São Paulo: Atlas, 2012.
- BRITTAİN, Lee; GARCIA, Philip; IRWIN, Scott H. *Live and feeder cattle options markets: returns, risk, and volatility forecasting. Journal of Agricultural and Resource Economics*, p. 28-47, 2011.
- BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. Estatística básica. Saraiva, 2010.
- COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. *A theory of the term structure of interest rates, Econometrica*, 53, 385.408, 1985.
- CHRISTENSEN, Bent J.; PRABHALA, Nagpurnanand R. *The relation between implied and realized volatility. Journal of Financial Economics*, v. 50, n. 2, p. 125-150, 1998.
- CHRISTOFFERSEN, Peter; FOURNIER, Mathieu; JACOBS, Kris. *The factor structure in equity options. Rotman School of Management Working Paper*, n. 2224270, 2013.
- DENNIS, P., MAYHEW, S. *Risk-neutral skewness: Evidence from stock options, Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 471.93, 2002.
- DUAN, J. C., WEI, J. *Systematic risk and the price structure of individual equity options, Review of Financial Studies*, 22, 1981.2006, 2007.
- ENGLE, R.; FIGLEWSKI, S. *Modeling the dynamics of correlations among implied volatilities, Working Paper, Stern School, New York University*, 2012.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. *Common risk factors in the returns on stocks and bonds. Journal of financial economics*, v. 33, n. 1, p. 3-56, 1993.
- FAMA, Eugene F.; MACBETH, James D. *Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. The journal of political economy*, p. 607-636, 1973.
- GITMAN, Lawrence J.; ZUTTER, Chad J. *Principles of managerial finance*. Pearson, 13 ed., 2010.

GOYAL A., SARETTO A. *Cross-section of option returns and volatility. Journal of Financial Economics*, 94, 310.326, 2009.

HAIR, Joseph F. et al. *Análise multivariada de dados*. Bookman, 2009.

HESTON, S. *Closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options*, *Review of Financial Studies*, 6, 327.343, 1993.

HULL, John. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education Internacional, 2009.

KELLY, B., LUSTIG, H., VAN NIEUWERBURGH, S. *The volatility factor structure*, *Working Paper, NYU Stern*, 2012.

MOODLEY, Nimalin. *The Heston model: A practical approach with Matlab code*. University of Witwatersrand, 2005.

RICHARDSON, Roberto Jarry. *Pesquisa social: métodos e técnicas*. 3ª Ed. rev. e ampl., São Paulo, Atlas, 2012.

ROUAH, Fabrice D. *The Heston model and its extensions in MATLAB and C#*. John Wiley & Sons, 2013.