Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação
Ampla UFPA-UFAM

Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η-laplaciano e aplicações

por

Raul Rabello Mesquita

Manaus-Am
Julho/2014

Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η-laplaciano e aplicações

por

Raul Rabello Mesquita

sob orientação do

Professor Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-Am
Julho/2014

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M582f

Mesquita, Raul Rabello

Fórmulas Variacionais tipo Hadamard para os Autovalores do Eta-laplaciano e Aplicações / Raul Rabello Mesquita. 2014

56 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. eta-laplaciano. 2. fórmula tipo Hadamard. 3. fluxo de Ricci. 4. problema de Dirichlet. 5. volume com peso. I. Gomes, José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Raul Rabello Mesquita

Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η-laplaciano e aplicações

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 11 de julho de 2014.

BANCA EXAMINADORA

José N. V. Gomes

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (orientador)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev (membro)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Marcus Marrocos

....

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (membro externo)

Universidade Federal do ABC - UFABC

....

Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira (membro externo)

Universidade de São Paulo - USP

....

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (membro externo)

Universidade Federal do Ceará - UFC

Dedico este trabalho aos meus amigos professores de matemática do Colégio Militar de Manaus.

Agradecimentos

A Nazareno e Marcus, por terem em mim depositado uma confiança que espero um dia merecer;

Ao meu amigo Drago, *my brother of another mother*, por estar sempre pronto para ajudar e por seus valiosos conselhos sobre parte técnica e a redação deste trabalho;

Ao professor Renato Tribuzy e aos seus esforços por uma pós-graduação em matemática em nível de doutorado na Universidade Federal do Amazonas;

À FAPEAM, pelo apoio financeiro;

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas, que tem o belo histórico de sempre apoiar aqueles membros que almejam um crescimento acadêmico;

À banca examinadora, pela paciência e compreensão com minhas (muitas) limitações;

Aos meus companheiros de turma, Henrique e Ponciano, por sua agradável companhia, generosidade, maturidade e desprendimento.

Resumo

Neste trabalho consideramos uma família analítica de estruturas riemannianas em uma variedade diferenciável M com bordo. Impomos a condição de bordo de Dirichlet ao η-laplaciano e mostramos a existência de curvas analíticas de seus autovalores e autofunções. Deduzimos fórmulas variacionais tipo Hadamard. Como primeira aplicação mostramos que existe um subconjunto residual do conjunto das métricas, para o qual todos os autovalores do η-laplaciano são genericamente simples. Consideramos ainda um domínio limitado em M, e então mostramos que o subconjunto de difeomorfismos do domínio onde os autovalores do η-laplaciano são simples, é residual. Em uma segunda aplicação obtemos, para o η-laplaciano, expressões variacionais para os autovalores quando a variação da métrica é conforme. Por fim, é feita uma análise do comportamento dos autovalores do η-laplaciano ao longo do fluxo de Ricci, onde eventualmente se tem a suavidade da respectiva autofunção.

Palavras-chave: η-laplaciano, fórmula tipo Hadamard, fluxo de Ricci, problema de Dirichlet, volume com peso.

Abstract

In this thesis we consider an analytic family of Riemannian structures on a compact smooth manifold M with boundary. We impose the Dirichlet condition to the η-Laplacian and proof the existence of analytic curves of its eigenfunctions and eigenvalues. We next derive Hadamard type variation formulas. As a first application of these formulas we obtain that there is a residual subset of the set of metrics where all eigenvalues of the η-Laplacian operator are generically simple. We consider a bounded domain Ω in M. Then we show that the subset of diffeomorphisms in Ω is residual provided the eigenvalues of the η-laplacian are simple. As another application we obtain variational expressions of the eigenvalues in the case when the metric varies conformally. We conclude our work with analysis of the behaviour of the eigenvalues of η-laplacian along the Ricci flow.

Keywords: η-laplacian, Hadamard-type formula, Ricci flow, Dirichlet problem, weighted volume.

Conteúdo

Introdução

Em um trabalho seminal, Uhlenbeck [25] provou importantes resultados acerca de propriedades genéricas de autovalores e autofunções do operador de Laplace-Beltrami Δ_g em uma variedade riemanniana compacta (M, g) sem bordo e, no intuito de prová-los, usou o teorema da transversalidade de Thom. Em [6], Berger considerou uma família a um parâmetro de métricas riemannianas $g(t)$ em M e obteve fórmulas tipo Hadamard para o operador $\Delta_{g(t)}$. Nosso trabalho aqui será com o η-laplaciano, que é definido por $L := \Delta - \nabla\eta$, que também é conhecido como laplaciano drifting, onde $\eta \in C^\infty(M)$ é a chamada função drifting. Diferentemente de Uhlenbeck, ao invés de aplicarmos teoremas topológicos obtemos nossos resultados usando fórmulas variacionais tipo Hadamard.

Uma das motivações ao focalizar o η-laplaciano é a seguinte. Ao estendermos a fórmula de Bochner para este operador, naturalmente damos origem a uma extensão do tensor curvatura de Ricci, o tensor de Bakry-Émery-Ricci, dado por $Ric_\eta = Ric + \nabla^2\eta$. Este tensor aparece naturalmente no estudo de fluxo de Ricci [8, 21], sólitons de Ricci [16], quase sólitons de Ricci [3, 4], métricas CPE [5] e métricas quase Einstein [2, 7]. Para mais aplicações, ver por exemplo [20]. Assim, é natural procurar por extensões das fórmulas de Berger para o η-laplaciano. Desta forma, nosso objetivo principal aqui é deduzir fórmulas variacionais tipo Hadamard para o η-laplaciano e apresentar algumas aplicações. Um importante passo nessa direção é o Lema 1 abaixo, que relaciona o η-divergente de um tensor com o produto interno de Hilbert-Schmidt. O η-divergente de um $(1, r)$-tensor T é definido como o $(0, r)$-tensor dado por $\mathrm{div}_\eta T = \mathrm{div} T - d\eta \circ T$.

O primeiro capítulo estabelece a notação e usa o produto de Hilbert-Schmidt para expressar a variação de alguns tensores mediante uma variação suave na métrica de uma variedade. A partir de então, tais variações tensoriais serão usadas sistematicamente ao longo deste texto.

Nesta tese, todas as variedades serão consideradas orientáveis e, salvo menção contrária, as compactas serão admitidas com bordo. Cabe lembrar que, para o caso de variedades não orientáveis, podemos efetuar os cálculos no recobrimento duplo orientável, via métrica do recobrimento, desde que o resultado obtido não dependa da orientação, vamos obter por isometria o mesmo resultado para a variedade.

A versão para η constante, da relação abaixo, foi usada por Gomes em [13] e em alguns outros trabalhos.

Lema 1 *Sejam $\eta, f : M \to \mathbb{R}$ funções suaves, T um $(0,2)$-tensor simétrico e $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Então vale*

$$\mathrm{div}_\eta(T(fZ)) = f\langle \mathrm{div}_\eta T, Z\rangle + f\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla f, Z). \tag{1}$$

Em particular, se $Z = \nabla h$ para alguma $h \in C^\infty(M)$, então

$$\mathrm{div}_\eta(T(f\nabla h)) = f\langle \mathrm{div}_\eta T, \nabla h\rangle + f\langle \nabla^2 h, T\rangle + T(\nabla f, \nabla h). \tag{2}$$

Este lema será usado para encontrar as fórmulas variacionais mencionadas. Primeiramente precisamos garantir a existência das curvas de autovalores e autofunções para o η-laplaciano. Para isto, consideraremos uma variedade riemanniana compacta (M, g) munida de uma medida com peso da forma $\mathrm{dm} = e^{-\eta}\mathrm{dM}$, onde dM é a forma volume original de M. Observando que o η-laplaciano L_g é formalmente auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, \mathrm{dm})$ quando consideramos as funções em $C_0^2(M)$, temos o primeiro passo para podermos usar a teoria da perturbação para operadores lineares [18]. Desta forma, iniciamos o Capítulo 2 com o resultado seguinte.

Proposição 1 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta. Considere uma família analítica real a um parâmetro de estruturas riemannianas $g(t)$ em M com $g = g(0)$. Se λ é um autovalor de multiplicidade m para o η-laplaciano*

L_g, então existem $\varepsilon > 0$, escalares λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ e funções ϕ_i, variando analiticamente em t tais que, para todo $|t| < \varepsilon$, valem as seguintes relações:

1. $L_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda_i(t)\phi_i(t)$;
2. $\lambda_i(0) = \lambda$;
3. $\{\phi_i(t)\}$ *é ortonormal em* $L^2(M, \mathrm{dm}_t)$.

O início do trabalho de obtenção das fórmulas variacionais é através do lema abaixo, que calcula a taxa de variação do η-laplaciano com respeito à variação da métrica. Embora esse lema seja essencialmente uma extensão de um resultado de Berger, a demonstração aqui oferecida é diferente, cuja ferramenta principal é o Lema 1.

Lema 2 *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e g_t uma variação diferenciável da métrica g. Então para toda $f \in C_c^\infty(M)$ temos*

$$L'f = \langle \frac{1}{2}dh - \mathrm{div}_\eta H, df\rangle - \langle H, \nabla^2 f\rangle, \tag{3}$$

onde $L' := \frac{d}{dt}|_{t=0}L_{g(t)}$, H é o $(0,2)$-tensor dado por $H_{ij} := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}g_{ij}(t)$ e $h = \mathrm{tr}(H)$.

Logo em seguida obtém-se uma versão do lema acima para o caso em que η varia com o parâmetro t, caso este que aparece necessariamente ao tratarmos de deformação de domínio. Para isso, consideremos a função drift $\eta : M \times I \to \mathbb{R}$ variando também com o parâmetro e escreveremos, por simplicidade, $\dot\eta = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\eta(t)$. Para cada $f \in C_c^\infty(M)$, definimos

$$\bar{L}_t f := \Delta_t f - g_t(\nabla\eta(t), \nabla f).$$

Desta maneira, podemos deduzir o resultado seguinte.

Corolário 1 *Sob as condições do Lema 2 temos*

$$\bar{L}'f = L'f - g(\nabla\dot\eta, \nabla f).$$

De posse dessas ferramentas passa-se em seguida ao problema de Dirichlet propriamente dito, onde obtemos uma fórmula variacional tipo Hadamard para autovalores de L.

Proposição 2 *Sejam* (M, g) *uma variedade riemanniana compacta,* $g(t)$ *uma variação diferenciável da métrica* g*,* $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ *uma família diferenciável de funções e* $\lambda_i(t)$ *uma família diferenciável de números reais tais que* $\lambda_i(0) = \lambda$ *para cada* $i = 1, \ldots, m$ *e, para todo* $|t| < \varepsilon$*,*

$$\begin{cases} -\bar{L}_{g(t)}\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{em } \partial M, \end{cases}$$

onde $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle_{L^2(M, \mathrm{dm}_t)} = \delta_i^j$*. Então a derivada da função* $t \mapsto (\lambda_i + \lambda_j)(t)$ *é dada por*

$$(4)\quad (\lambda_i+\lambda_j)'\delta_{ij} = \int_M \langle \frac{1}{2}L(\phi_i\phi_j)g - 2d\phi_i \otimes d\phi_j, H\rangle \mathrm{dm} + \int_M g(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.$$

Os resultados anteriores versam apenas sobre variação na métrica. Com o fim de passarmos ao caso da variação de domínio, assumimos que $\Omega \subset (M, g)$ é um domínio limitado com fronteira suave, onde (M, g) é uma variedade riemanniana (não necessariamente compacta). Seja $f_t : \Omega \to (M, g)$ uma família analítica de difeomorfismos tal que f_0 é a identidade, e seja λ um autovalor de multiplicidade m para o η-laplaciano.

Ao considerarmos a família de métricas $g_t = f_t^* g$ em Ω, poderemos transpor um problema de variação de domínio para o caso familiar de variação de métrica. Nesse sentido o Corolário 1 acima ainda versa sobre variação métrica. Para o que segue denotaremos $\Omega_t = f_t(\Omega)$.

Proposição 3 *Sejam* (M, g) *uma variedade real analítica,* $\Omega \subset M$ *um domínio limitado,* $f_t : \Omega \to (M, g)$ *uma família analítica de difeomorfismos e* λ *um autovalor de multiplicidade* $m > 1$*. Então existem uma família analítica de funções* $\{\phi_i(t)\} \in C^\infty(\Omega_t)$ *com* $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle_{L^2(\Omega, g(t))} = \delta_{ij}$*, e números reais* $\lambda_i(t)$ *com* $\lambda_i(0) = \lambda$*, que são soluções para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -L\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \Omega_t \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \partial\Omega_t, \end{cases}$$

para todo $|t| < \varepsilon$*,* $i = 1, \ldots, m$*. Além disso, temos que a derivada da aplicação* $t \mapsto (\lambda_i + \lambda_j)(t)$ *é dada por*

$$(\lambda_i + \lambda_j)'\delta_{ij} = -2\int_{\partial\Omega} g(V, \nu)\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\mathrm{d}\mu,$$

onde $V = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t$ *e* ν *é o campo de vetores normais unitários exterior ao bordo de* Ω.

Em [24] observamos uma versão para η constante da relação acima obtida.

Após a obtenção de relações para a primeira variação de autovalores de L, estaremos agora procurando saber como é a segunda variação dos autovalores desse operador. O processo aqui é análogo ao usado acima. Assim como o Lema 2 foi usado na obtenção de λ', acharemos primeiro L'' para com auxílio disto encontrar λ''.

Lema 3 *Sejam* (M, g) *uma variedade riemanniana e* $g(t)$ *uma variação diferenciável da métrica* g. *Então para toda* $f \in C_c^\infty(M)$ *temos*

$$(5)\quad L''f = \langle \frac{1}{2}dh' - \mathrm{div}_\eta H', df\rangle - \langle H', \nabla^2 f\rangle + 2\mathrm{div}_\eta(H^2(\nabla f)) - H(\nabla f, \nabla h).$$

Proposição 4 *Sejam* (M, g) *uma variedade riemanniana compacta,* $g(t)$ *uma variação diferenciável da métrica* g, $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ *uma família diferenciável de funções e* $\lambda_i(t)$ *uma família diferenciável de números reais tais que* $\lambda_i(0) = \lambda$ *para cada* $i = 1, \ldots, m$ *e, para todo* t,

$$\begin{cases} -L_{g(t)}\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{em } \partial M, \end{cases}$$

onde $\langle \phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(M,\mathrm{dm}_t)} = \delta_i^j$. *Então*

$$\begin{aligned} \lambda_i'' &= -\frac{1}{4}\int_M \langle dh', d(\phi_i^2)\rangle \mathrm{dm} - \int_M \langle dh, \phi_i d\phi_i'\rangle \mathrm{dm} + \int_M H(\phi_i \nabla h - 2\nabla \phi_i', \nabla \phi_i)\mathrm{dm} \\ (6)\qquad &+ \int_M (2H^2 - H')(\nabla \phi_i, \nabla \phi_i)\mathrm{dm} - \lambda_i' \int_M (\phi_i^2)'\mathrm{dm}. \end{aligned}$$

A seguir obtemos o análogo à relação (5) para o caso da variação de domínio. Voltamos a lembrar que a família de difeomorfismos acima mencionada nos permite transpor esse caso para a situação de variação de métrica.

Lema 4 *Seja* $f \in C_c^\infty(M)$. *Nas condições do Lema 3, vale*

$$\bar{L}''f = L''f - g(\nabla \ddot{\eta}, \nabla f) - g(\nabla \dot{\eta}, \dot{(\nabla f)}) + H(\nabla \dot{\eta}, \nabla f).$$

Proposição 5 *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e $g(t)$ uma variação diferenciável da métrica g. Então, para toda $f \in C_c^\infty(M)$, temos*

$$\begin{aligned} \bar{L}''f &= \frac{1}{2}\langle dh', df\rangle + \operatorname{div}_\eta((2H^2 - H')(\nabla f)) - g(\nabla\ddot{\eta}, \nabla f) \\ &\quad - g(\nabla\dot{\eta}, (\dot{\nabla f})) + H(\nabla(\dot{\eta} - h), \nabla f). \end{aligned}$$

O capítulo seguinte trata das aplicações. A primeira delas nos fornece condições suficientes para obtermos autovalores simples.

Teorema 1 *Sejam (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta e λ um autovalor para o η-laplaciano para o problema de Dirichlet, com multiplicidade $m > 1$. Então existe g em uma vizinhança $\mathcal{C}^r$ de g_0, $1 \leq r < \infty$, tal que os autovalores $\lambda(g)$ próximos a λ são todos simples.*

Denotando por $\mathcal{M}^r$ o conjunto de todas as métricas riemannianas $\mathcal{C}^r$ em M, temos:

Corolário 2 *Dada uma variedade riemanniana compacta (M, g), existe um conjunto residual das métricas $\Gamma \subset \mathcal{M}^r$ tal que, para todo $g \in \Gamma$, os autovalores para o problema de Dirichlet para o operador L_g são simples.*

No caso de perturbações de domínios por difeomorfismos temos o seguinte resultado.

Teorema 2 *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana, $\Omega \subset M$ um domínio limitado e λ um autovalor do η-laplaciano para o problema de Dirichlet com multiplicidade $m > 1$. Então existe um difeomorfismo f em uma vizinhança $\mathcal{C}^r$ da identidade id_Ω, $1 \leq r < \infty$, tal que os autovalores $\lambda(f)$ próximos a λ são todos simples.*

Denotando por $\mathrm{Diff}^r(\Omega)$ o conjunto dos $\mathcal{C}^r$-diffeomorfismos de um domínio limitado Ω em uma variedade riemanniana (M, g), temos também o seguinte resultado:

Corolário 3 *Dado um domínio limitado Ω em uma variedade riemanniana (M, g), o subconjunto dos difeomorfismos $\mathfrak{D} \subset \mathrm{Diff}^r(\Omega)$ tais que todos os autovalores do operador η-laplaciano são simples, é residual.*

Em [16] Hamilton provou que para qualquer métrica diferenciável g_0 em uma variedade Riemanniana compacta sem bordo M^n, existe uma única solução $g(t)$ para a equação do fluxo de Ricci

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)}, \tag{7}$$

definida em algum intervalo maximal $[0, T)$, $T > 0$.

Simultaneamente, Hamilton mostrou ainda que uma variedade compacta sem bordo M, de dimensão três, que admite uma métrica riemanniana com curvatura de Ricci estritamente positiva, admitirá uma métrica de curvatura constante positiva. Segue daí que se M for simplesmente conexa então ela será difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^3$.

Para provar este resultado, Hamilton considerou o fluxo de Ricci numa variedade compacta sem bordo com uma métrica com curvatura de Ricci estritamente positiva. Ao longo desse fluxo, essa métrica irá se tornando cada vez mais próxima da métrica de curvatura constante positiva numa esfera. Por outro lado, enquanto isso ocorre o volume irá decrescer, e num tempo finito a variedade (cuja métrica se aproximará da esfera) tenderá a um ponto.

Para sanar esse problema, é possível reescalonar a variedade (e também o parâmetro t), de forma que o volume permaneça constante ao longo do fluxo. Desta forma, na métrica reescalonada a variedade não mais se reduzirá a um ponto, a solução para o fluxo existirá para todo t finito e (pode-se mostrar que) convergirá suavemente para uma métrica limite de curvatura seccional constante positiva.

De acordo com tal reescalonamento, a variação será dada mediante o fluxo de Ricci normalizado

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{2r}{n}g(t) - 2Ric_{g(t)},$$

onde $r = r(t)$ (que para cada t é uma constante em M) é tomado de tal forma que o volume se mantenha fixo.

Relembremos que um sóliton de Ricci é um fluxo de Ricci $(M^n, g(t))$, $0 \leq t < T \leq +\infty$, com a propriedade que, para cada $t \in [0, T)$, existe um difeomorfismo $f_t : M^n \to M^n$ e uma constante $\sigma(t) > 0$ tal que $\sigma(t)f_t^* g(0) = g(t)$.

Seguindo esta mesma linha de raciocínio, consideremos $\tau : M \times [0,T) \to \mathbb{R}_+$ suave satisfazendo $\tau(x,0) = 1\ \forall x \in M$, e a variação

$$g(t)(x) = \tau(x,t) f_t^* g_0(x). \tag{8}$$

Se essa variação da métrica também se dá mediante o fluxo de Ricci, ou seja, se são satisfeitas simultaneamente as condições (7) e (8), então um cálculo direto mostra que a variedade (M, g_0) terá a propriedade seguinte:

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g_0 = \alpha(x) g_0, \tag{9}$$

onde $\alpha(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\tau(x,t)$ e $X(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t(x)$.

Nos próximos resultados passaremos a considerar o intervalo maximal $[0,T)$, no qual existe o fluxo de Ricci numa variedade compacta sem bordo, bem como a existência das curvas de autofunções e autovalores do η-laplaciano. Além disso iremos supor que, ao longo do fluxo de Ricci, o autovalor $\lambda(t)$ e sua respectiva autofunção $u(t)$ variam diferenciavelmente com o parâmetro t.

O propósito do resultado a seguir é obter aplicações num quase sóliton de Ricci ou até mesmo num sóliton de Ricci.

Proposição 6 *Consideremos (M, g) uma variedade riemanniana compacta sem bordo, f_t uma família de difeomorfismos de M, $\tau(x,t)$ uma função real diferenciável e positiva em $M \times [0,T)$ com $\tau(x,0) = 1$ e $g(t)(x) = \tau(x,t) f_t^* g(x)$. Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo $g(t)$ com autofunção associada $u(t) = u \circ f_t$. Se $X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t$ e $\tau(x,t) = \mathrm{e}^{2\varphi(t)}$, com $\varphi \in C^\infty(M \times [0,T))$, então*

1. $\lambda'(0) = \int_M \varphi'(0)\left(-n\lambda u^2 + (n-2)|\nabla u|^2\right)\mathrm{dm}$.

2. $\int_M (-\lambda u^2 + |\nabla u|^2)\mathrm{div}X\mathrm{dm} - 2\int_M g\left(\nabla_{\nabla u} X, \nabla u\right)\mathrm{dm} = 0$.

Em particular, se X é conforme, isto é, $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, teremos

$$\int_M \big(-\lambda u^2 + \frac{n-2}{n}|\nabla u|^2\big)\mathrm{div}X\mathrm{dm} = 0.$$

É importante salientar que estamos considerando, no caso anterior bem como nos casos seguintes, que a autofunção u associada ao autovalor λ está normalizada, ou seja, que $\int_M u^2 \mathrm{dm} = 1$. Para não carregar a notação estaremos também omitindo t nas fórmulas, embora as relações obtidas expressem as quantidades em um instante t arbitrário.

O último grupo de aplicações aborda fórmulas variacionais e monotonicidade dos autovalores de L mediante o fluxo de Ricci, para os eventuais casos em que se possa ter diferenciabilidade na autofunção. O primeiro de tais resultados é simplesmente a primeira fórmula variacional para o autovalor:

Proposição 7 *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo o fluxo de Ricci normalizado numa variedade riemanniana compacta sem bordo (M^n, g), então*

$$\lambda' = -\frac{2}{n} r\lambda + \lambda \int_M u^2 R \mathrm{dm} - \int_M R|\nabla u|^2 \mathrm{dm} + 2\int_M Ric(\nabla u, \nabla u) \mathrm{dm},$$

onde $u = u(t,p)$, $p \in M$, denota uma autofunção associada ao autovalor $\lambda = \lambda(t)$, e $R = R(t,p)$ é a curvatura escalar.

Relembrando que em dimensão dois temos $Ric = \frac{R}{2} g$ obtemos o próximo corolário.

Corolário 4 *Seja $\lambda(t)$ a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo o fluxo de Ricci normalizado numa superfície riemanniana compacta sem bordo (M^2, g). Então*

$$\lambda' = \lambda \left(-r + \int_M u^2 R \mathrm{dm} \right).$$

Quando a variedade inicial é homogênea obteremos que a curvatura escalar em cada instante t será constante em M e a expressão para a variação será dada de acordo com o resultado seguinte:

Corolário 5 *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo o fluxo de Ricci normalizado numa variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^n, g), então*

$$\lambda' = -\frac{2R}{n}\lambda + 2\int_M Ric(\nabla u, \nabla u) \mathrm{dm}.$$

Em particular, se $\mu(t) = e^{\frac{2R}{n}t}\lambda(t)$ então

$$\frac{d\mu}{dt} = 2e^{\frac{2R}{n}t} \int_M Ric(\nabla u, \nabla u) \mathrm{dm}$$

e desta forma uma hipótese sobre o sinal da curvatura de Ricci nos fornecerá o tipo de monotonicidade da função μ.

Ainda no caso de variedades homogêneas, considerando o primeiro autovalor não nulo λ_1 do laplaciano, se existir uma constante $\kappa > 0$ tal que $Ric(\nabla u, \nabla u) \geq \kappa |\nabla u|^2$ então vamos provar que $\lambda_1' \geq 2\kappa^2 \frac{n}{n-1}$. Em particular, o caso de dimensão três nos fornece a proposição a seguir.

Proposição 8 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^3, g) com curvatura de Ricci não negativa. Então o autovalor do η-laplaciano é não decrescente ao longo do fluxo de Ricci. Em particular, se a curvatura de Ricci é positiva e $\lambda_1(t)$ denota a evolução do primeiro autovalor não nulo do laplaciano ao longo do fluxo de Ricci, então $\lambda_1' \geq \frac{2n\varepsilon^2 R^2}{n-1}$, para algum $\varepsilon > 0$.*

Ainda em dimensão três, agora sem fazer exigências quanto à homogeneidade, obtemos também uma monotonicidade a partir de determinado valor do parâmetro t. Em outras palavras, considerando o intervalo maximal $[0, T)$ de existência de solução para o fluxo de Ricci, obtemos também, para o caso de dimensão três, um $t_0 \in [0, T)$ a partir do qual o autovalor de L é crescente:

Proposição 9 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana compacta sem bordo (M^3, g) com curvatura de Ricci positiva. Então existe $t_0 \in [0, T)$ tal que o autovalor $\lambda(t)$ do η-laplaciano é crescente para $t \in [t_0, T)$.*

Em [14], Hamilton provou que em qualquer dimensão a não negatividade do operador curvatura é preservada ao longo do fluxo de Ricci. Como a não negatividade desse operador implica na mesma propriedade do tensor de Ricci, é imediato o resultado seguinte.

Proposição 10 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^n, g) com operador curvatura não negativo. Então o autovalor do η-laplaciano é não decrescente ao longo do fluxo de Ricci.*

Proposição 11 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^n, g). Então o autovalor do η-laplaciano satisfaz*

$$\begin{aligned}\lambda' \ \leq \ & \frac{2(n-1)}{n}\lambda^2 + \frac{2}{n}\lambda\int_M g(\nabla\eta, \nabla u^2)\mathrm{dm} - \frac{2}{n}\int_M g(\nabla\eta, \nabla u)^2\mathrm{dm} \\ & -2\int_M \nabla^2\eta(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Combinando o resultado acima com o Corolário 5, obtemos (para o caso do laplaciano) uma estimativa para o valor mínimo assumido por R, num instante t qualquer do fluxo de Ricci.

Corolário 6 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^3, g) com curvatura escalar R não negativa. Se $\lambda = \lambda(t)$ é um autovalor do laplaciano e $R_{min}(t)$ é o menor valor assumido pela curvatura escalar em M no instante t, então*

$$R_{min}(t) \leq \frac{(n-1)}{n\varepsilon}\lambda,$$

onde $\varepsilon > 0$ é tal que $Ric \geq \varepsilon Rg$ ao longo do fluxo de Ricci.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos as notações e alguns preliminares que serão utilizados para provarmos os resultados desta tese.

1.1 Tensores em variedades riemannianas

Relembremos que um $(1,r)$-tensor em uma variedade riemanniana (M,g) é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Enquanto que, num $(0,r)$-tensor, o contradomínio é o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Dado um $(0,r)$-tensor T, podemos identificá-lo com um $(1,r-1)$-tensor $\widetilde{T}$ mediante a métrica riemanniana g, fazendo

$$g(\widetilde{T}(X_1,\ldots,X_{r-1}),X_r) := T(X_1,\ldots,X_r). \tag{1.1}$$

Por razões que se tornarão óbvias durante a exposição deste trabalho omitiremos o " $\sim$ "no $(1,r-1)$-tensor correspondente ao $(0,r)$-tensor T. Em particular, o tensor métrico g será identificado com o $(1,1)$-tensor identidade I em $\mathfrak{X}(M)$.

Com o objetivo de esclarecer criteriosamente as identificações que utilizaremos durante nossas contas, vamos agora trabalhar para definir um importante produto interno entre tensores. Seja $(x_1,\ldots,x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M^n, $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ o referencial coordenado e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal. O *traço* de um $(0,2)$-tensor T é dado por

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i T(e_i, e_i),$$

ou ainda, utilizando a *convenção de Einstein da soma*, segundo a qual estará implícita uma soma sempre que houver índices repetidos e em posições invertidas, temos

$$\mathrm{tr}(T) = g^{ij} T(\partial_i, \partial_j) = g^{ij} g(T(\partial_i), \partial_j). \tag{1.2}$$

Observemos que $T(\partial_i) = g^{kl} g(T(\partial_i), \partial_k)\partial_l = g^{kl} g(\partial_i, T^*(\partial_k))\partial_l$, onde T^* é o operador adjunto de T. Consideremos outro $(0,2)$-tensor S. Vamos procurar uma expressão para[1] $\mathrm{tr}(TS^*)$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(TS^*) &\overset{(1.2)}{=} g^{ij} g\left((TS^*)(\partial_i), \partial_j\right) = g^{ij} g\left(T\left(S^*(\partial_i)\right), \partial_j\right) \\
&= g^{ij} g(T(g^{kl} g(\partial_i, S(\partial_k))\partial_l), \partial_j) \\
&= g^{ij} g^{kl} g(S(\partial_k), \partial_i) g(T(\partial_l), \partial_j) = g^{ij} g^{kl} S_{ki} T_{lj}.
\end{aligned}$$

A simetria da matriz (g^{ij}) e uma renumeração nos índices permite-nos escrever

$$\mathrm{tr}(TS^*) = g^{ik} g^{jl} T_{ij} S_{kl}. \tag{1.3}$$

Assim, em $\{e_1, \ldots, e_n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(TS^*) &= \sum_{i,j} T_{ij} S_{ij} = \sum_{i,j} g(T(e_i), e_j) g(S(e_i), e_j) \\
&= \sum_i g(T(e_i), \sum_j g(S(e_i), e_j) e_j) = \sum_i g(T(e_i), S(e_i)),
\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(TT^*) = \sum_i g(T(e_i), T(e_i)) = \sum_i |T(e_i)|^2 \tag{1.4}$$

e

$$\mathrm{tr}(Tg^*) = \sum_i g\left(T(e_i), I(e_i)\right) = \sum_i g\left(T(e_i), e_i\right) = \mathrm{tr}(T). \tag{1.5}$$

[1]Em $\mathrm{tr}(TS^*)$, T e S^* são os $(1,1)$-tensores associados a T e S^*, respectivamente.

As relações (1.3) e (1.4) nos mostram que podemos definir um *produto interno* entre os $(0,2)$-tensores T e S, fazendo

$$\langle T, S\rangle := \mathrm{tr}(TS^*). \tag{1.6}$$

Este é conhecido como *produto interno de Hilbert-Schmidt.*

Consideremos para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{I}(X) : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ a aplicação que, a cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$, associa $\mathcal{I}(X)(Y) = g(X,Y)$. Cabe aqui assinalar que é comum também representarmos $\mathcal{I}(X)$ por X^* ou por ω_X.

Exemplo 1.1 *Seja $f \in C^\infty(M)$. Se $X = \nabla f$ então para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

$$\mathcal{I}(X)(Y) = \mathcal{I}(\nabla f)(Y) = g(\nabla f, Y) = Y(f) = dfY,$$

ou seja, $\mathcal{I}(\nabla f) = df$.

A partir da próxima seção omitiremos $\mathcal{I}(X)$ e faremos (por exemplo) a identificação de ∇f com df.

Convém definirmos um produto interno no dual $\mathfrak{X}^*(M)$ de $\mathfrak{X}(M)$ da maneira natural, fazendo

$$\langle X^*, Y^*\rangle := g(X,Y), \tag{1.7}$$

onde $X^* = \mathcal{I}(X)$ e $Y^* = \mathcal{I}(Y)$.

Observação 1.1 *Para $J \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, identificaremos $J(X)$ com o produto interno $\langle J, X^*\rangle$. Desta forma, se $f \in C^\infty(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $J(fX+Y) = fJ(X) + J(Y)$.*

Definição 1.1 *A divergência de um $(1,r)$-tensor T em (M,g) é definida como o $(0,r)$-tensor dado por*

$$(\mathrm{div}T)(v_1,\ldots,v_r)(p) = \mathrm{tr}(w \mapsto (\nabla_w T)(v_1,\ldots,v_r)(p)),$$

onde $p \in M$, $(v_1,\ldots,v_r) \in T_pM \times \ldots \times T_pM$, ∇ denota a derivada covariante de T e tr o traço calculado na métrica g.

Exemplo 1.2 *Se T é um $(1,1)$-tensor e $f \in C^\infty(M)$ então $(\mathrm{div}T)(\nabla f) = \langle \mathrm{div}T, df\rangle$. Ao se escrever esta relação para um $(0,2)$-tensor, fica implícito que se está trabalhando com o $(1,1)$-tensor correspondente.*

Para cada campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos considerar o $(1,1)$-tensor ∇X dado por $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Desta maneira, a divergência de X é dada por $\mathrm{div}X = \mathrm{tr}(\nabla X)$. Além disso, vamos fixar uma função $\eta \in C^\infty(M)$, para definirmos o operador η-divergente em $\mathfrak{X}(M)$ como segue

$$\mathrm{div}_\eta := \mathrm{div} - \mathrm{d}\eta,$$

onde $\mathrm{d}\eta$ denota a diferencial de η. É imediato da linearidade de $\mathrm{d}\eta$ e das propriedades usuais da divergência de campos de vetores que, para $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ teremos

$$\mathrm{div}_\eta(X+Y) = \mathrm{div}_\eta X + \mathrm{div}_\eta Y$$

$$\mathrm{div}_\eta(fX) = f\mathrm{div}_\eta X + g(\nabla f, X)$$

$$\mathrm{div}(e^{-\eta}X) = e^{-\eta}\mathrm{div}_\eta X.$$

Quando (M,g) é uma variedade riemanniana orientada, tais propriedades nos levam a considerar um peso em sua forma volume dM, bem como na forma volume $\mathrm{d}\partial M$ de seu bordo, como segue: $\mathrm{dm} = e^{-\eta}\mathrm{dM}$ e $\mathrm{d}\mu = e^{-\eta}\mathrm{d}\partial M$. Portanto, se ν é um campo de vetores normais unitários exterior ao ∂M e X é um campo de vetores tangentes compactamente suportado em (M,g), teremos

$$(1.8)\quad \int_M \mathrm{div}_\eta X \mathrm{dm} = \int_M e^{-\eta}\mathrm{div}_\eta X \mathrm{dM} = \int_M \mathrm{div}(e^{-\eta}X)\mathrm{dM} = \int_{\partial M} g(X,\nu)\mathrm{d}\mu,$$

que é a expressão do Teorema de Stokes para *variedades com peso.*

Para o caso em que $X = \nabla f$, para alguma $f \in C^\infty(M)$, vamos chamar de η-laplaciano o operador L dado por

$$(1.9)\qquad L(f) := \mathrm{div}_\eta \nabla f.$$

É imediato que L satisfaz propriedades análogas às do laplaciano. Por exemplo, para $f, \ell \in C^\infty(M)$ teremos

$$L(f\ell) = fL(\ell) + \ell L(f) + 2g(\nabla f, \nabla \ell),$$

ou ainda uma extensão natural da conhecida fórmula de Bochner, a saber:

$$\frac{1}{2}L|\nabla f|^2 = Ric_\eta(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + g(\nabla Lf, \nabla f),$$

onde se dá origem a uma extensão do tensor de Ricci, $Ric_\eta := Ric + \nabla^2\eta$, que é conhecido como tensor de Bakry-Émery-Ricci.

Para que nossas contas funcionem em perfeita sintonia com os entes relembrados acima, precisamos agregar a esta teoria um novo tensor, como segue: Definimos o η-divergente de um $(1, r)$-tensor T em (M, g) como o $(0, r)$-tensor dado por

$$\mathrm{div}_\eta T := \mathrm{div}T - \mathrm{d}\eta \circ T.$$

O caso mais interessante acontece quando trabalhamos com um $(0, 2)$-tensor simétrico T, para o qual teremos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(T(X)) &= \sum_i g(\nabla_{e_i} T(X), e_i) = \sum_i [g((\nabla_{e_i} T)X, e_i) + g(T(\nabla_{e_i} X), e_i)] \\ &= (\mathrm{div}T)(X) + \langle \nabla X, T \rangle \end{aligned} \tag{1.10}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla f X, T \rangle &= \sum_i g\left(\nabla_{e_i} f X, T(e_i)\right) = \sum_i T\left(f \nabla_{e_i} X + e_i(f) X, e_i\right) \\ &= f \sum_i T\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right) + \sum_i T\left(X, e_i(f) e_i\right) \\ &= f \langle \nabla X, T \rangle + T\left(X, \nabla f\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

A relação a seguir, cuja versão para η constante foi empregada como ferramenta por Gomes em [13], é rica em aplicações.

Lema 1.1 *Sejam $\eta, f : M \to \mathbb{R}$ funções suaves, T um $(0, 2)$-tensor simétrico e $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Então vale*

$$\mathrm{div}_\eta(T(fZ)) = f\langle \mathrm{div}_\eta T, Z \rangle + f\langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla f, Z). \tag{1.12}$$

Em particular, se $Z = \nabla h$ para alguma $h \in C^\infty(M)$, então

$$\mathrm{div}_\eta(T(f\nabla h)) = f\langle \mathrm{div}_\eta T, \nabla h \rangle + f\langle \nabla^2 h, T \rangle + T(\nabla f, \nabla h). \tag{1.13}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\eta(T(fZ)) &:= \operatorname{div}(T(fZ)) - (d\eta\circ T)(fZ)\\ &\overset{(1.10)}{=} (\operatorname{div}T)(fZ) + \langle\nabla fZ, T\rangle - (d\eta\circ T)(fZ)\\ &\overset{(1.11)}{=} f(\operatorname{div}T)(Z) + f\langle\nabla Z, T\rangle + T(Z,\nabla f) - f(d\eta\circ T)(Z)\\ &= f((\operatorname{div}T)(Z) - (d\eta\circ T)(Z)) + f\langle\nabla Z, T\rangle + T(Z,\nabla f)\\ &= f(\operatorname{div}_\eta T)(Z) + f\langle\nabla Z, T\rangle + T(Z,\nabla f).\end{aligned}$$

□

Lema 1.2 *Sejam $f,\eta\in C^\infty(M)$ e seja T um $(0,2)$-tensor simétrico. Então:*

$$\mathrm{d}\eta\circ T = \mathcal{I}(T(\nabla\eta)); \tag{1.14}$$

$$\langle T, \mathrm{d}\eta\otimes\mathrm{d}f\rangle = T(\nabla\eta,\nabla f) = \langle \mathrm{d}\eta\circ T, \mathrm{d}f\rangle; \tag{1.15}$$

$$\langle\operatorname{div}T, \mathrm{d}f\rangle - T(\nabla\eta,\nabla f) = \langle\operatorname{div}_\eta T, \mathrm{d}f\rangle. \tag{1.16}$$

$$\operatorname{div}(fT) = f\operatorname{div}T + T(\nabla f,\cdot) \tag{1.17}$$

$$\nabla(fT) = f\nabla T + \mathrm{d}f\otimes T. \tag{1.18}$$

Demonstração: Para provar a relação (1.14) considere $X\in\mathfrak{X}(M)$ e observe que

$$(\mathrm{d}\eta\circ T)(X) = \mathrm{d}\eta(T(X)) \;=\; g(\nabla\eta, T(X)) = g(T(\nabla\eta), X) = \mathcal{I}(T(\nabla\eta))(X).$$

Para a relação (1.15) considere $\nabla\eta = g^{ik}\eta_i\partial_k$ e $\nabla f = g^{j\ell}f_j\partial_\ell$ para ver que

$$\begin{aligned}T(\nabla\eta,\nabla f) &= g^{ik}g^{j\ell}\eta_i f_j T_{k\ell} = g^{ik}g^{j\ell}(d\eta\otimes\mathrm{d}f)_{ij}T_{k\ell} = \langle\mathrm{d}\eta\otimes\mathrm{d}f, T\rangle\\ &= \langle T, \mathrm{d}\eta\otimes\mathrm{d}f\rangle.\end{aligned}$$

A relação (1.16) segue imediatamente de (1.14), enquanto que as relações (1.17) e (1.18) seguem diretamente da definição de divergência e derivada covariante de tensores. Note-se que nestes dois últimos casos não é necessário que o tensor seja simétrico. □

Um adendo sobre a notação: não é incomum, na literatura, encontrarmos $\flat$ e $\sharp$ para representar $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}^{-1}$, respectivamente. Costuma-se usar $X^\flat$ (ou $\flat(X)$) no lugar de $\mathcal{I}(X)$ e, se $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, também $\omega^\sharp$ (ou $\sharp(\omega)$) no lugar de $\mathcal{I}^{-1}(\omega)$.

Também ocorre, vez por outra, o abuso de notação $\langle \mathrm{div}_\eta T, Z\rangle$ onde Z é um campo e T é um $(1,1)$-tensor (donde segue que $\mathrm{div}_\eta T$ é um $(0,1)$-tensor). Neste caso, está-se fazendo referência ao produto interno $\langle \mathrm{div}_\eta T, \mathcal{I}(Z)\rangle$.

Uma vez que, pelo Observação 1.1 temos $\langle \mathrm{div}_\eta T, \mathcal{I}(Z)\rangle = (\mathrm{div}_\eta T)(Z)$, isso acarreta em podermos escrever

$$\langle \mathrm{div}_\eta T, Z\rangle = (\mathrm{div}_\eta T)(Z).$$

Relembremos a seguinte propriedade da derivada de Lie para um $(0,2)$-tensor em (M,g)

$$(\mathcal{L}_X T)(Y,Z) = X(T(Y,Z)) - T([X,Y],Z) - T(Y,[X,Z]).$$

Em particular,

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y).$$

Lema 1.3 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e seja T um $(0,2)$-tensor simétrico. Então*

$$T(T(X),Y) = T(X,T(Y)).$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} T(T(\partial_i),\partial_j) &= T(g^{k\ell} g(T(\partial_i),\partial_k)\partial_\ell, \partial_j) \\ &= T(g^{k\ell} T(\partial_i,\partial_k)\partial_\ell, \partial_j) \\ &= g^{k\ell} T_{ik} T_{j\ell}. \end{aligned}$$

Analogamente, usando a simetria de T vamos verificar que $T(\partial_i, T(\partial_j))$ resultará exatamente na mesma expressão, o que permite concluir a prova do lema.
$\square$

1.2 Família suave de métricas

Sejam T um $(0,2)$-tensor e X e Y campos em uma variedade riemanniana (M,g).

Suponhamos também que M é munida de uma família diferenciável $\{g_t\}$ de métricas riemannianas (aqui, t varia num aberto I da reta que contém o zero) satisfazendo $g_0 = g$. Para cada t, denoteremos por M_t a variedade (M, g_t).

Ao dizermos que um tensor T varia (suavemente) com o tempo - quando então denotaremo-lo por T_t - estaremos querendo dizer que, para cada i e j, $(T_t)_{ij}$ é uma função diferenciável do tempo.

A fim de estudar variações dos autovalores do laplaciano, temos de introduzir alguma notação que permitirá maior fluência na obtenção das relações.

Teríamos *a priori* que os campos $X = X_t$ e $Y = Y_t$ em $\mathfrak{X}(M)$ iriam também variar diferenciavelmente com o tempo segundo as expressões naturais

(1.19)
$$X_t = g^{ij}(t) g_t(X_t, \partial_i)\partial_j = g^{ij}(t) x_i(t)\partial_j \quad \text{e} \quad Y_t = g^{k\ell}(t) g_t(Y_t, \partial_k)\partial_\ell = g^{k\ell}(t) y_k(t)\partial_\ell.$$

Ao usarmos simplesmente a notação T e X para tensor e campo respectivamente, estaremos indicando o tensor $T_0 = (T_0)_{ij} dx^i \otimes dx^j$ e o campo $X_0 = g^{ij}(0) g_0(X_0, \partial_i)\partial_j = g^{ij} g(X, \partial_i)\partial_j$, que é um elemento de $\mathfrak{X}(M)$.

Iremos denotar por H o $(0,2)$-tensor dado por $H_{ij} = \frac{d}{dt}|_{t=0} g_{ij}(t)$ e escrever $h := \langle H, g\rangle$.

Seja também H' o $(0,2)$-tensor dado por $H'_{ij} := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (H_t)_{ij}$, onde H_t é o $(0,2)$-tensor dado por $H_{ij}(t) = \frac{d}{ds}\big|_{s=t} g_{ij}(s)$. Usaremos ainda $h(t) := \langle H_t, g(t)\rangle$ e $h' := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} h(t)$. Observe-se que teremos $H_0 = H$ e $h(0) = h$ e que

$$\begin{aligned} h' = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle H_t, g(t)\rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{ij}(t)(H_t)_{ij} = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{ij}(t)\right) H_{ij} + g^{ij} H'_{ij} \\ &= -g^{ik} g^{js} H_{ij} H_{ks} + \langle H', g\rangle = -|H|^2 + \langle H', g\rangle. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Estabeleçamos também a notação

$$\begin{aligned} X' &:= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X_t = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (g^{ij}(t) x_i(t)\partial_j) = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{ij}(t)\right) x_i \partial_j + g^{ij} x'_i(0)\partial_j \\ &= -g^{ik} g^{j\ell} H_{k\ell} x_i \partial_j + \dot{X} = -g^{\ell j} H(g^{ik} x_i \partial_k, \partial_\ell)\partial_j \dot{X} \\ &= -g^{\ell j} H(X, \partial_\ell)\partial_j \dot{X} = -g^{\ell j} g(H(X), \partial_\ell)\partial_j \dot{X} = -H(X) + \dot{X} \end{aligned}$$

e

$$\dot{X} := g^{ij}x_i'(0)\partial_j, \quad g^{ij} = g^{ij}(0).$$

Observemos que se $X = X_0$ e $Y = Y_0$ forem simplesmente campos em $\mathfrak{X}(M)$ então teremos trivialmente que $X' = Y' = 0$. De qualquer modo é simples obter isso em detalhes. De fato, se $g(t)$ é uma variação suave *qualquer* da métrica g então

$$x_i(t) = g_t(X, \partial_i) = g_t(\lambda^k\partial_k, \partial_i) = \lambda^k g_{ki}(t)$$

e, portanto,

$$X_t = g^{ij}(t)\lambda^k g_{ki}(t)\partial_j = \delta_k^j\lambda^k\partial_j = \lambda^j\partial_j = X.$$

Desta maneira, para uma família T_t diferenciável de $(0,2)$-tensores, temos:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_t(X_t, Y_t) &= T(\dot{X}, Y) + T(X, \dot{Y}) - T(H(X), Y) \\ &\quad - T(X, H(Y)) + T'(X, Y). \end{aligned} \tag{1.21}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_t(X_t, Y_t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^{ij}(t)g^{k\ell}(t)x_i(t)y_k(t)(T_t)_{j\ell}) \\ &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^{ij}(t)x_i(t))\right) g^{k\ell}y_kT_{j\ell} \\ &\quad + g^{ij}x_i\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^{k\ell}(t)y_k(t))\right) T_{j\ell} + g^{ij}g^{k\ell}x_iy_kT'_{j\ell} \\ &= T\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^{ij}(t)x_i(t))\partial_j, g^{k\ell}y_k\partial_\ell\right) \\ &\quad + T\left(g^{ij}x_i\partial_j, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^{k\ell}(t)y_k(t))\partial_\ell\right) \\ &\quad + T'(g^{ij}x_i\partial_j, g^{k\ell}y_k\partial_\ell) \\ &= T(X', Y) + T(X, Y') + T'(X, Y). \qquad (1.22) \end{aligned}$$

Agora é só aplicar $X' = -H(X) + \dot{X}$ e $Y' = -H(Y) + \dot{Y}$ na relação (1.22).

Tratemos agora com o campo $\nabla_t f$, isto é, o gradiente da f segundo g_t. A relação (1.19) nos diz que nesse caso teremos

$$x_i(t) = g_t(\nabla_t f, \partial_i) = f_i, \tag{1.23}$$

que de fato não varia com o tempo.

Veja que relação (1.23) também já nos informa que $(\dot{\nabla f}) = 0$, daí obtemos

$$(\nabla f)' = -H(\nabla f). \tag{1.24}$$

Ademais, teremos

$$\nabla_t f \;=\; g^{ij}(t)x_i(t)\partial_j \overset{(1.23)}{=} g^{ij}(t)f_i\partial_j. \tag{1.25}$$

Sejam f e ℓ funções suaves em M. De acordo com a equação (1.21), obteremos

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T_t(\nabla_t f, \nabla_t \ell) = -T(H(\nabla f), \nabla \ell) - T(\nabla f, H(\nabla \ell)) + T'(\nabla f, \nabla \ell) \tag{1.26}$$

e

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_t(\nabla_t f, \nabla_t \ell) = -H(\nabla f, \nabla \ell) = -H(\nabla f, \nabla \ell). \tag{1.27}$$

Em prol da limpeza de notação, estaremos doravante omitindo o sub-índice t em g_t e também no gradiente de f segundo g_t. Queremos crer que, nos parágrafos seguintes, deixamos claro pelo contexto quando a métrica está variando ou não, bem como quando se trata do gradiente segundo g_t ou apenas do gradiente segundo g.

Por exemplo: na relação (1.27) acima, passaremos a escrever

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(\nabla f, \nabla \ell) = -H(\nabla f, \nabla \ell)$$

ou, de acordo com o Exemplo 1.1 e a relação (1.7),

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle df, d\ell \rangle = -H(\nabla f, \nabla \ell),$$

casos em que estaremos interpretando que, no primeiro membro, tanto a métrica quanto os gradientes (ou as diferenciais df e $d\ell$) estão variando com o tempo, ao passo que o tensor e os gradientes do segundo membro estão expressos em $t = 0$. Em particular, esses gradientes do segundo membro são considerados na métrica g. Isso é precisamente o que foi feito, por exemplo, na obtenção da relação (2.7) (pág. 28).

Relembremos agora o fato de que, se $A = A(s)$ é um caminho suave de matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, tal que $A(t_0)$ é invertível, então

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=t_0} det(A(s)) = det(A(t_0))\mathrm{tr}(A^{-1}(t_0)A'(t_0)). \tag{1.28}$$

Quando $(M, g(s))$ é uma variedade riemanniana orientável, onde $\{g(s)\}$ é uma família diferenciável de métricas, então

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=t} \mathrm{dM}_s = \frac{1}{2}h(t)\mathrm{dM}_t, \tag{1.29}$$

onde dM_s é a forma-volume de $(M, g(s))$ e $h(t) = \mathrm{tr}(g'_{ij}(t))$. Em particular, se $\eta : M \to \mathbb{R}$ é suave e $\mathrm{dm}_t := e^{-\eta}\mathrm{dM}_t$, então $\frac{d}{ds}\big|_{s=t}\mathrm{dm}_t = \frac{1}{2}h(t)\mathrm{dm}_t$. De fato, como localmente $\mathrm{dM}_s = \sqrt{det(g_{ij}(s))}\mathrm{d}\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, onde $\mathrm{d}\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ é a forma-volume em $\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=t}\mathrm{dM}_s &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{det(g_{ij}(t))}}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{s=t}\big(det(g_{ij}(s))\big)\right)\mathrm{d}\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \\ &\overset{(1.28)}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{det(g_{ij}(t))}}\big(det(g_{ij}(t))\big)\mathrm{tr}(g^{-1}(t)g'(t))\mathrm{d}\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{det(g_{ij}(t))}\mathrm{tr}(g^{-1}(t)g'(t))\mathrm{d}\mathbb{R}^{\mathrm{n}}. \end{aligned}$$

O elemento genérico $b_{ij}(t)$ da matriz $g^{-1}(t)g'(t)$ é dado por $b_{ij}(t) = g^{ik}(t)H_{kj}(t)$. Desta forma, $\mathrm{tr}(g^{-1}(t)g'(t)) = g^{ik}(t)H_{ki}(t)$. Como H_t é simétrico, teremos

$$\mathrm{tr}(g^{-1}(t)g'(t)) = g^{ik}(t)H_{ik}(t) = \langle H_t, g_t\rangle = h(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{s=t}\mathrm{dM}_t &= \frac{1}{2}\sqrt{det(g_{ij}(t))}\mathrm{tr}(g^{-1}(t)g'(t))\mathrm{d}\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \\ &= \frac{1}{2}h\sqrt{det(g_{ij}(t))}\mathrm{d}\mathbb{R}^{\mathrm{n}} = \frac{1}{2}h(t)\mathrm{dM}_t. \end{aligned}$$

Eventualmente precisaremos também da derivada segunda $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{dm}_t$. Trata-se simplesmente de derivarmos a equação (1.29) em $t = 0$, obtendo

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{1}{2}h(t)\mathrm{dm}_t = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{dm}_t = \frac{1}{2}\left(h' + \frac{h^2}{2}\right)\mathrm{dm} \tag{1.30}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{dm}_t = \frac{1}{2}\left(-|H|^2 + \langle H', g\rangle + \frac{h^2}{2}\right)\mathrm{dm}. \tag{1.31}$$

Quanto à relação (1.31) bastará usarmos (1.20), que já nos fornece h' em função de g e de suas derivadas.

Observação 1.2 *Observemos que o conjunto das métricas riemannianas em M é um cone no espaço dos $(0,2)$-tensores simétricos, isto é, se $\lambda > 0$ e g é métrica riemanniana em M, então λg ainda é métrica riemanniana em M. Segue então que existirá $\varepsilon > 0$ de forma que para todo $(0,2)$-tensor T simétrico satisfazendo $|T| < \varepsilon$, $g_0 + T$ ainda será métrica riemanniana em M.*

Finalizando este capítulo, consideremos em uma variedade diferenciável M^n as métricas riemannianas g e $\bar{g} = \tau g$, onde $\tau : M^n \to \mathbb{R}_+$ é uma função diferenciável. Denotando por $^-$ os respectivos entes geométricos calculados na métrica $\bar{g}$ e escrevendo $\tau = e^{2\varphi}$, relembremos as fórmulas seguintes:

$$\bar{\nabla}\ell = e^{-2\varphi}\nabla\ell \tag{1.32}$$

$$\bar{\Delta}\ell = e^{-2\varphi}(\Delta\ell + (n-2)g(\nabla\ell, \nabla\varphi)). \tag{1.33}$$

Ademais, se (M, g_0) é uma variedade riemanniana e f é um difeomorfismo de M, podemos considerar uma métrica riemanniana em M dada por $g = f^*g_0$ e então $\nabla_g(\ell \circ f) = \nabla_{g_0}\ell$, bem como $\Delta_g(\ell \circ f) = \Delta_{g_0}\ell$, $\forall\ \ell \in C^\infty(M)$. Assim,

$$L_g(\ell \circ f) = \Delta_g(\ell \circ f) - \nabla_g(\eta \circ f)(\ell \circ f) = \Delta_{g_0}\ell - \nabla_{g_0}\eta(\ell) = L_{g_0}(\ell). \tag{1.34}$$

Capítulo 2

Fórmulas tipo Hadamard

Consideremos uma variedade riemanniana compacta (M, g) munida de uma medida com peso da forma $\mathrm{dm} = e^{-\eta}\mathrm{dM}$, onde $\eta : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Relembremos que o η-laplaciano é dado por $L_g(\cdot) = \Delta_g - g(\nabla\eta, \nabla)$, que é formalmente auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, \mathrm{dm})$, quando consideramos as funções em $C_0^2(M)$. Essa observação nos permite usar a teoria da perturbação para operadores lineares [18]. Para fazer isso, consideremos o conjunto $\mathcal{M}^r$ de todas as métricas riemannianas $\mathcal{C}^r$ em M. Então cada $g \in \mathcal{M}^r$ determina a sequência

$$0 = \mu_0(g) < \mu_1(g) \leq \mu_2(g) \leq \cdots \leq \mu_k(g) \leq \dots \tag{2.1}$$

dos autovalores de L_g contando com suas multiplicidades. Consideramos cada autovalor $\mu_k(g)$ como uma função de g em $\mathcal{M}^r$. As funções $g \to \mu_k(g)$ são contínuas mas não diferenciáveis em geral, com exceção do caso onde μ_k é simples. De início provaremos a seguinte proposição, como aplicação da teoria de perturbação para operadores lineares na obra acima citada.

Definição 2.1 *Seja $\mathcal{C}(X, Y)$ o espaço dos operadores fechados entre os espaços de Banach X e Y. Uma família $T(x) \in \mathcal{C}(X, Y)$, definida em um domínio D_0 do plano complexo, é dita* holomorfa do tipo A *se:*

- *$D(T(x)) = D$ é independente de x e*

- *$T(x)u$ é holomorfa para todo $x \in D_0$ e para todo $u \in D$.*

Proposição 2.1 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta. Considere uma família analítica real a um parâmetro de estruturas riemannianas $g(t)$ em M com $g = g(0)$. Se λ é um autovalor de multiplicidade $m > 1$ para o η-laplaciano L_g, então existem $\varepsilon > 0$, escalares λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ e funções ϕ_i variando analiticamente em t tais que, para todo $|t| < \varepsilon$, valem as seguintes relações:*

1. $L_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda_i(t)\phi_i(t)$;

2. $\lambda_i(0) = \lambda$;

3. $\{\phi_i(t)\}$ *é ortonormal em* $L^2(M, \mathrm{dm}_t)$.

Demonstração: Primeiramente, consideremos uma extensão $g(z)$ de $g(t)$ a um domínio D_0 do plano complexo $\mathbb{C}$. Desta forma, denotando por $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to \mathbb{C}$, podemos considerar

$$L_{g(z)} : \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C}),$$

que em um sistema de coordenadas locais é dado por

$$L_{g(z)}f = g^{ij}(z)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}(z)\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \tag{2.2}$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C})$, com

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{k\ell}\left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right).$$

Agora observemos que o domínio $D = H^2(M) \cap H^1_0(M)$ do operador $L_{g(z)}$ não depende de z, uma vez que, sendo M compacta, duas métricas quaisquer são equivalentes. Observe ainda que a aplicação $z \mapsto L_{g(z)}f$ é holomorfa para $z \in D_0$ e para toda $f \in D$. Assim, de acordo com a Definição 2.1 concluimos que $L_{g(z)}$ é uma família holomorfa do tipo (A).

Precisamos agora provar a auto-adjunção de $L_{g(z)}f$ sob um produto interno fixo, e para tanto construiremos, para cada t, uma isometria

$$P : L^2(M, \mathrm{dm}) \to L^2(M, \mathrm{dm}_t)$$

tomando, para cada u, $P(u) = \frac{1}{\sqrt[4]{det(g_{ij}(t))}}u$. De fato,

$$\int_M P(u)P(v)\mathrm{dm}_t = \int_M \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij}(t))}} uv\mathrm{dm}_t = \int_M uv\mathrm{dm}.$$

Assim, o operador $\tilde{L}_t := P^{-1} \circ L_t \circ P$ terá exatamente os mesmos autovalores que $L_t : H^2(M, \mathrm{dm}_t) \cap H_0^1(M, \mathrm{dm}_t) \to L^2(M, \mathrm{dm}_t)$. Além disso, a compacidade de M nos dará a auto-adjunção de $\tilde{L}_t$, pois

$$\begin{aligned}\int_M v\tilde{L}_t u\mathrm{dm} &\overset{(isom.)}{=} \int_M P(v)L_t P(u)\mathrm{dm}_t = \int_M P(u)L_t P(v)\mathrm{dm}_t \\ &\overset{(isom.)}{=} \int_M P^{-1}P(u)P^{-1}L_t P(v)\mathrm{dm} = \int_M u\tilde{L}_t v\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Sob estas condições podemos aplicar um teorema devido a Rellich [23] ou o Teorema 3.9 de [18] para concluir o resultado desta proposição. □

2.1 A primeira variação

Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta orientada com bordo ∂M. Se $d\partial M$ é a forma de volume induzida em ∂M, escrevemos $d\mu = e^{-\eta} d\partial M$, onde η é uma função suave em M. Com esta notação, o teorema da divergência permanece válido sob a forma $\int_M L(f)\mathrm{dm} = \int_{\partial M} g(\nabla f, \nu)d\mu$ (ver relação (1.8), p. 15). Assim, a fórmula de integração por partes é dada por

$$\int_M \ell Lf\mathrm{dm} = -\int_M g(\nabla\ell, \nabla f)\mathrm{dm} + \int_{\partial M} \ell g(\nabla f, \nu)\mathrm{d}\mu, \tag{2.3}$$

sejam quais forem $f, \ell \in C^\infty(M)$.

Este operador torna-se formalmente auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, \mathrm{dm})$, quando todas as funções desse espaço se anulam em ∂M.

Observe-se que esse fato nos permite usar a teoria das perturbações de operadores lineares [18], como mencionado à página 24.

Consideremos o produto interno $\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(TS^*)$ induzido por g no espaço dos $(0, 2)$-tensores em M, onde S^* denota o tensor adjunto de S (ver relação 1.3, p. 13). Claramente, em coordenadas locais temos

$$\langle T, S\rangle = g^{ik}g^{j\ell}T_{ij}S_{k\ell}.$$

Além disso, temos $\Delta_g f = \langle \nabla^2 f, g\rangle$ onde $\nabla^2 f = \nabla df$ é o hessiano de f.

Lembremo-nos também de que cada $(0,2)$-tensor T em (M,g) pode ser associado a um único $(1,1)-$tensor por $g(T(Z),Y) := T(Z,Y)$ para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Aqui cometemos um leve abuso de notação denotando também por T seu correspondente $(1,1)-$ tensor.

Começaremos usando o Lema 1.1 (p. 16) que, junto com a identificação da equação 1.16 (p. 17), nos fornece que, para cada $(0,2)$-tensor simétrico T,

$$\mathrm{div}_\eta(T(\varphi Z)) = \varphi\langle \mathrm{div}_\eta T, Z\rangle + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z), \tag{2.4}$$

sejam quais forem $\varphi, \eta \in C^\infty(M)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

2.1.1 Fórmulas variacionais tipo Hadamard

Consideremos agora uma variação suave g_t da métrica g, de maneira que (M, g_t, dm_t) é uma variedade riemanniana com medida suave. Lembremo-nos de que estamos denotando por H o $(0,2)$-tensor dado por $H_{ij} = \frac{d}{dt}|_{t=0} g_{ij}(t)$ e que, escrevendo $h = \langle H, g\rangle$, temos (1.29) $\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{dm}_t = \frac{1}{2}h\mathrm{dm}$.

Lembrando a relação (2.2) (para variação em $t \in \mathbb{R}$), observemos que

$$L(f) = [g^{ij}(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j)](f),$$

e, portanto, L é o operador

$$L = g^{ij}(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j).$$

Considerando o caso geral em que L, f e η variam com o tempo, podemos verificar que

$$\begin{aligned}
[L(f)]' &= (g^{ij})'\left(\partial_i\partial_j f - \Gamma_{ij}^k\partial_k f - \partial_i\eta\partial_j f\right)\\
&\quad + g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f' - (\Gamma_{ij}^k)'\partial_k f - \Gamma_{ij}^k\partial_k f' - \partial_i\eta'\partial_j f - \partial_i\eta\partial_j f'\right)\\
&= (g^{ij})'(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j)(f) + g^{ij}(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j)(f')\\
&\quad - g^{ij}((\Gamma_{ij}^k)'\partial_k + \eta_i'\partial_j)(f)\\
&= \left[(g^{ij})'(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j) - g^{ij}((\Gamma_{ij}^k)'\partial_k + \eta_i'\partial_j)\right](f)\\
&\quad + g^{ij}(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j)(f')\\
&= \left[g^{ij}(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j)\right]'(f) + g^{ij}(\partial_i\partial_j - \Gamma_{ij}^k\partial_k - \eta_i\partial_j)(f')\\
&= L'(f) + L(f'). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

No resultado a seguir (e enquanto estivermos considerando variação na métrica, e não no domínio) não há necessidade alguma em se fazer η variar com o tempo, assim como a função f lá adotada também só varia em M. É evidente, entretanto, que a relação (2.5) vale para ambos os casos.

Lema 2.1 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana e seja g_t uma variação diferenciável da métrica g. Então para toda $f \in C_c^\infty(M)$ temos*

$$L'f = \langle \frac{1}{2}dh - \operatorname{div}_\eta H, df\rangle - \langle H, \nabla^2 f\rangle, \tag{2.6}$$

onde $L' := \frac{d}{dt}|_{t=0} L_{g(t)}$.

Demonstração: Como $\langle df, d\ell\rangle = g^{ij}(t) f_i \ell_j$ e $\frac{d}{dt}|_{t=0} g^{ij} = -g^{ik} g^{js} H_{ks}$, temos

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\langle df, d\ell\rangle = -g^{ik}g^{js}H_{ks}f_i\ell_j = -H(g^{ik}f_i\partial_k, g^{js}\ell_j\partial_s) = -H(\nabla f, \nabla \ell). \tag{2.7}$$

Pela fórmula de integração por partes temos

$$\int_M \ell L_{g(t)} f \mathrm{dm}_t = -\int_M \langle df, d\ell\rangle \mathrm{dm}_t, \tag{2.8}$$

onde ℓ é também um elemento qualquer de $C_c^\infty(M)$. Assim, pela equação (2.7) teremos em $t = 0$ que

$$\int_M \ell L' f \mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_M \ell h L f \mathrm{dm} = \int_M H(\nabla f, \nabla \ell)\mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_M h\langle df, d\ell\rangle \mathrm{dm}. \tag{2.9}$$

Agora, aplicando a relação (2.4) para $T = H$, $f = \ell$ e $Z = \nabla f$ teremos

$$\operatorname{div}_\eta(H(\ell\nabla f)) = \ell\langle \operatorname{div}_\eta H, df\rangle + \ell\langle H, \nabla^2 f\rangle + H(\nabla f, \nabla \ell). \tag{2.10}$$

Além disso,

$$\operatorname{div}_\eta(\ell h \nabla f) = \ell h L f + \ell\langle dh, df\rangle + h\langle df, d\ell\rangle. \tag{2.11}$$

Logo, substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9), obtemos

$$\int_M \ell L' f \mathrm{dm} = \int_M \ell\left(\frac{1}{2}\langle dh, df\rangle - \langle \operatorname{div}_\eta H, df\rangle - \langle H, \nabla^2 f\rangle\right)\mathrm{dm}, \tag{2.12}$$

o que conclui a prova do lema. □

Consideraremos agora uma função suave $\eta : I \times M \to \mathbb{R}$ e escreveremos, por simplicidade, $\dot\eta = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\eta(t)$. Então para cada $f \in C_c^\infty(M)$ definimos

$$\bar{L}_t f := \Delta_t f - g_t(\nabla\eta(t), \nabla f).$$

Corolário 2.1 *Sob as condições do Lema* (2.1) *temos*

$$\bar{L}'f = L'f - g(\nabla\dot{\eta}, \nabla f) \tag{2.13}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\bar{L}_t f &= \Delta' f - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{ij}(t)\eta_i(t) f_j \\
&= \Delta' f - \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{ij}(t)\Big)\eta_i f_j - g^{ij}\partial_i \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\eta(t)\right) f_j \\
&= \Delta' f + g^{ik}g^{js}H_{ks}\eta_i f_j - g(\nabla\dot{\eta}, \nabla f) \\
&= \Delta' f + H(\nabla\eta, \nabla f) - g(\nabla\dot{\eta}, \nabla f) \\
&= L'f - g(\nabla\dot{\eta}, \nabla f).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

□

2.1.2 O problema de Dirichlet

Nesta seção, obteremos fórmulas variacionais tipo Hadamard que generalizam aquelas do artigo de Berger [6].

Proposição 2.2 *Sejam* (M, g) *uma variedade riemanniana compacta,* $g(t)$ *uma variação diferenciável da métrica* g*,* $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ *uma família diferenciável de funções e* $\lambda_i(t)$ *uma família diferenciável de números reais tais que* $\lambda_i(0) = \lambda$ *para cada* $i = 1, \ldots, m$ *e, para todo* t*,*

$$\begin{cases} -\overline{L}_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda_i(t)\phi_i(t) & \text{em } M \\ \phi_i(t) = 0 & \text{em } \partial M, \end{cases}$$

onde $\langle \phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(M,\mathrm{dm}_t)} = \delta_i^j$*. Então a derivada da função* $t \to (\lambda_i + \lambda_j)(t)$ *é dada por*

$$(\lambda_i + \lambda_j)'\delta_{ij} = \int_M \langle \frac{1}{2}L(\phi_i\phi_j)g - 2d\phi_i \otimes d\phi_j, H\rangle \mathrm{dm} + \int_M g(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}. \tag{2.15}$$

Demonstração: Verifiquemos primeiro o caso em que η não depende de t. Derivando a equação $-L_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda(t)\phi_i(t)$ iremos obter, em $t = 0$, que $-L'\phi_i - L\phi_i' = \lambda'\phi_i + \lambda\phi_i'$, e desse modo

$$\begin{aligned}
-\int_M (\phi_j L'\phi_i + \phi_j L\phi_i')\mathrm{dm} &= \int_M (\lambda_i'\phi_i\phi_j + \lambda_j\phi_j\phi_i')\mathrm{dm} \\
&= \lambda_i' \int_M \phi_j\phi_i - \int_M \phi_i' L\phi_j \mathrm{dm}.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes e o fato de que $\phi_i = 0$ em ∂M, deduzimos que

$$\lambda_i'\delta_{ij} = -\int_M \phi_j L'\phi_i \mathrm{dm}.$$

Escrevendo $s_{ij} = (\lambda_i' + \lambda_j')$ teremos, pelo Lema 2.1, que

$$\begin{aligned} -s_{ij}\delta_{ij} &= \int_M \phi_j L'\phi_i \mathrm{dm} + \int_M \phi_i L'\phi_j \mathrm{dm} \\ &= \int_M (\langle \frac{1}{2}dh - \mathrm{div}_\eta H, \phi_j d\phi_i + \phi_i d\phi_j\rangle - \langle H, \phi_j \nabla^2\phi_i + \phi_i\nabla^2\phi_j\rangle)\mathrm{dm} \\ &= \int_M \langle \frac{1}{2}dh, d(\phi_i\phi_j)\rangle \mathrm{dm} - \int_M \phi_j\big(\langle \mathrm{div}_\eta H, d\phi_i\rangle + \langle H, \nabla^2\phi_i\rangle\big)\mathrm{dm} \\ &\quad - \int_M \phi_i\big(\langle \mathrm{div}_\eta H, d\phi_j\rangle + \langle H, \nabla^2\phi_j\rangle\big)\mathrm{dm}. \end{aligned}$$

Usaremos agora o teorema da divergência e a equação (2.4) para deduzir

$$-s_{ij}\delta_{ij} = -\int_M \frac{h}{2} L(\phi_i\phi_j)\mathrm{dm} + 2\int_M H(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{dm} \tag{2.16}$$

ou, equivalentemente,

$$-s_{ij}\delta_{ij} = \int_M \big\langle \frac{1}{2}L(\phi_i\phi_j)g - 2d\phi_i \otimes d\phi_j, H\big\rangle \mathrm{dm}.$$

No caso geral, diferenciamos a equação $-\overline{L}_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda(t)\phi_i(t)$ obtendo, em $t = 0$, que $-\bar{L}'\phi_i - L\phi_i' = \lambda_i'\phi_i + \lambda_i\phi_i'$, e, portanto,

$$-L'\phi_i - L\phi_i' = \lambda_i'\phi_i + \lambda_j\phi_i' - g(\nabla\dot{\eta}, \nabla\phi_i).$$

Desta forma,

$$\lambda_i'\delta_{ij} = -\int_M \phi_j L'\phi_i \mathrm{dm} + \int_M \phi_j g(\nabla\dot{\eta}, \nabla\phi_i)\mathrm{dm}$$

e um cálculo análogo ao feito acima completa a prova. □

2.1.3 Variação do domínio

Para o que se segue, consideraremos uma variedade riemanniana (N, g) e duas aplicações suaves $f : M \to N$ e $\varphi : N \to \mathbb{R}$, onde M é uma variedade com a mesma dimensão de N, e cuja métrica $\bar{g} = f^*g$ será herdada via a métrica induzida.

Vamos supor, a partir de agora, que f também é um difeomorfismo. Então $f : (M, \bar{g}) \to (N, g)$ é uma isometria. Em particular, preserva conexões e ortonormalidade. Dessa forma, se por exemplo $\{e_i\}$ for um referencial $\bar{g}$-geodésico em um ponto $p \in M$, então $\{dfe_i\}$ será g-geodésico em $f(p) \in N$.

Além disso

$$e_k(\varphi \circ f)(p) = (dfe_k)(\varphi)(f(p))$$

e

$$e_k e_k(\varphi \circ f)(p) = dfe_k((dfe_k)(\varphi))(f(p)). \tag{2.17}$$

Isso porque, em cada $p \in M$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} X(\varphi \circ f)_p &= df(X)(\varphi)_{f(p)} \\ X(X(\varphi \circ f))_p &= df(X)(X(\varphi \circ f))_{f(p)} \\ &= df(X)(df(X)(\varphi))_{f(p)}. \end{aligned}$$

Definindo $\bar{\varphi} := \varphi \circ f$ e denotando por $\bar{\nabla}$ e por ∇ os gradientes de funções em M e N, respectivamente, então

$$\begin{aligned} g(df\bar{\nabla}\bar{\varphi}, dfe_i)_{f(p)} &= g(df(\bar{\nabla}(\varphi \circ f), dfe_i))_{f(p)} = (f^*g)(\bar{\nabla}(\varphi \circ f), e_i)_p \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}(\varphi \circ f), e_i)_p = e_i(\varphi \circ f)_p = df_p(e_i)(\varphi) \\ &= df(e_i)(\varphi)_{f(p)} = g(\nabla\varphi, df(e_i))_{f(p)}. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$df(\bar{\nabla}\bar{\varphi}) = \nabla\varphi. \tag{2.18}$$

Se, analogamente, denotarmos por $\bar{\Delta}$ e por Δ os laplacianos de funções em M e N, respectivamente, então a relação (2.17) nos fornecerá

$$\bar{\Delta}\bar{\varphi}_p = \Delta\varphi_{f(p)}. \tag{2.19}$$

Vamos agora, à luz dos comentários acima, atentar para o caso que nos interessa.

Assumamos que $\Omega \subset M$ é um domínio limitado com fronteira suave, onde (M, g) é uma variedade riemanniana completa. Seja f_t uma família analítica de difeomorfismos de Ω, que preserva orientação e tal que f_0 é a identidade, e seja λ um autovalor de multiplicidade m para o η-laplaciano.

Consideremos a família de métricas $g_t = f_t^* g$ em Ω. Seguindo os comentários acima, se $\{e_k\}$ é um referencial g_t-geodésico em $p \in \Omega$, então $\{df_t e_k\}$ é um referencial g-geodésico em $f_t(p) \in \Omega_t$ e também poderemos escrever

$$e_k(\eta \circ f_t)(p) = (df_t e_k)(\eta)(f_t(p))$$

e, analogamente à relação (2.17),

$$e_k e_k(\phi_i(t) \circ f_t)(p) = df_t e_k((df_t e_k)(\phi_i(t))(f_t(p))). \tag{2.20}$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$, sejam $\phi_i(t)$ e $\lambda_i(t)$ como obtidos na Proposição 2.2.

Definamos $\bar{\phi}_i(t) := \phi_i(t) \circ f_t$, $\eta(t) := \eta \circ f_t$ e

$$\bar{L}_t(\bar{\phi}_i(t)) := \Delta_t(\bar{\phi}_i(t)) - g_t(\nabla(\eta(t)), \nabla(\bar{\phi}_i(t))). \tag{2.21}$$

Como $\eta(t,p) = \eta \circ f(t,p)$, obtemos

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(t,p) = d\eta\Big|_{f(0,p)} \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t(p) = d\eta\Big|_p (V) = g(\nabla\eta, V). \tag{2.22}$$

Observe-se que estamos tratando da família de difeomorfismos

$$(\Omega, g_t) \xrightarrow{f_t} (\Omega_t, g),$$

onde na variedade da esquerda o que varia é a métrica, enquanto que na variedade da direita o que varia é o domínio.

De forma semelhante ao que fizemos acima, vamos denotar por $\bar{\nabla}$ e por ∇ os gradientes de funções em (Ω, g_t) e em (Ω_t, g), respectivamente.

Atente-se para o fato de que agora, assim como a relação (2.17) implica em (2.19), a relação (2.20) implicará em

$$\bar{\Delta}(\bar{\phi}_i(t))_p = \Delta(\phi_i(t))_{f_t(p)}. \tag{2.23}$$

Vamos avaliar o que a relação (2.21) nos fornece.

$$\begin{aligned}
\bar{L}_t(\bar{\phi}_i(t))_p &:= \bar{\Delta}_t(\bar{\phi}_i(t))_p - g_t(\bar{\nabla}(\eta(t)), \bar{\nabla}(\bar{\phi}_i(t)))_p \\
&\overset{(2.23)}{=} \Delta(\phi_i(t))_{f_t(p)} - (f_t^* g)(\bar{\nabla}(\eta(t)), \bar{\nabla}(\bar{\phi}_i(t)))_p \\
&= \Delta(\phi_i(t))_{f_t(p)} - g(df_t\bar{\nabla}(\eta(t)), df_t\bar{\nabla}(\bar{\phi}_i(t)))_{f_t(p)} \\
&\overset{(2.18)}{=} \Delta(\phi_i(t))_{f_t(p)} - g(\nabla\eta, \nabla\phi_i(t))_{f_t(p)} := L(\phi_i(t))_{f_t(p)} \\
&= (-\lambda_i(t)\phi_i(t))_{f_t(p)} = -\lambda_i(t)(\phi_i(t) \circ f_f)_p = -\lambda_i(t)\bar{\phi}_i(t)_p.
\end{aligned}$$

Além disso, se $p \in \partial\Omega$ então $f_t(p) \in \partial\Omega_t$ para todo t e portanto

$$\bar{\phi}_i(t)_p = (\phi_i(t) \circ f_t)(p) = (\phi_i(t))(f_t(p)) = 0$$

pois, pela hipótese da Proposição 2.2, $\phi_i(t) = 0$ em $\partial\Omega$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\phi}_i(t), \bar{\phi}_j(t) \rangle_{L^2(\Omega, g_t)} &= \int_\Omega \bar{\phi}_i(t)\bar{\phi}_j(t)\mathrm{dm} \circ df_t = \int_\Omega (\phi_i(t)\phi_j(t))(f_t)\det(df_t)\mathrm{dm} \\ &= \int_{f_t(\Omega)} \phi_i(t).\phi_j(t)\mathrm{dm}_g = \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle_{L^2(\Omega_t, g)} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

e assim em nosso caso, para $\bar{\phi}_i(t) = \phi_i(t) \circ f_t$ teremos $\langle \bar{\phi}_i(t), \bar{\phi}_j(t) \rangle_{L^2(\Omega, g(t))} = \delta_{ij}$ para todo t, e

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\bar{L}_t\bar{\phi}_i(t) &=& \lambda_i(t)\bar{\phi}_i(t) & \text{em } \Omega \\ \bar{\phi}_i(t) &=& 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Ou seja: os $\lambda_i(t)$, autovalores de L_t associados às autofunções $\phi_i(t)$ em Ω_t, são também autovalores de $\bar{L}_t$ associados às autofunções $\bar{\phi}_i(t)$ em Ω, no problema de Dirichlet. Dessa forma, podemos reduzir um problema envolvendo variação de domínio ao problema familiar que trata de variação na métrica.

Seja V o campo em Ω definido por $p \mapsto V_p := \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t \right)(p)$. Segue-se que f_t é seu fluxo e que, para cada $p \in \Omega$,

$$(\mathcal{L}_V g)_p := \lim_{t \to 0} \frac{f_t^*(g_{f_t(p)}) - g_p}{t} = \left(\lim_{t \to 0} \frac{g_t - g_0}{t} \right)_p = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_t \right)_p = H_p, \tag{2.25}$$

ou seja, que $\mathcal{L}_V g = H$ e, portanto,

$$\frac{1}{2}\langle H, g \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = \mathrm{div}V. \tag{2.26}$$

Lembrando que ϕ_i se anula no bordo, segue que

$$\nabla\phi_i = g(\nabla\phi_i, \nu)\nu = \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\nu. \tag{2.27}$$

No resultado a seguir, provaremos uma fórmula geral que generaliza um resultado de Soulf e Ilias [24].

Proposição 2.3 *Sejam (M, g) uma variedade real analítica, $\Omega \subset M$ um domínio limitado, $f_t : \Omega \to (M, g)$ uma família analítica de difeomorfismos*

$(\Omega_t = f_t(\Omega))$ e λ um autovalor de multiplicidade $m > 1$. Então existem uma família analítica de funções $\{\phi_i(t)\} \in C^\infty(\Omega_t)$ com $\langle \phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(\Omega, g(t))} = \delta_{ij}$, e números reais $\lambda_i(t)$ com $\lambda_i(0) = \lambda$, que são soluções para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -L\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \qquad \Omega_t \\ \phi_i(t) &= 0 \qquad \partial\Omega_t, \end{cases}$$

para todo $t, i = 1, \ldots, m$. Além disso, a derivada da aplicação $t \mapsto (\lambda_i + \lambda_j)(t)$ é dada por

$$(\lambda_i + \lambda_j)'\delta_{ij} = -2\int_{\partial\Omega} g(V,\nu)\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\mathrm{d}\mu,$$

onde $V = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t$.

Demonstração: Consideremos em Ω a família de métricas $g_t = f_t^* g$. Tomemos um referencial $g(t)$-geodésico $\{e_i\}$ em $p \in \Omega$. Segue então, das considerações acima, que para $\bar{\phi}_i(t) = \phi_i(t) \circ f_t$ teremos $\langle \bar{\phi}_i(t), \bar{\phi}_j(t)\rangle_{L^2(\Omega, g(t))} = \delta_{ij}$ para todo t, e é válida a relação (2.24).

Como $\phi_{i,0} \circ f_0(p) = \phi_i(p)$ e $\eta(t) = \eta \circ f_t$, teremos pela Proposição 2.2 que

$$s_{ij}\delta_{ij} = \int_\Omega \frac{h}{2} L(\phi_i\phi_j)\mathrm{dm} - 2\int_\Omega H(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{dm} + \int_\Omega g(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm},$$

onde $s_{ij} = (\lambda_i + \lambda_j)'$. Então

$$\begin{aligned} s_{ij}\delta_{ij} &\overset{(2.25)}{=} \int_\Omega \frac{1}{2} L(\phi_i\phi_j)\langle g, H\rangle\mathrm{dm} - 2\int_\Omega \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t^* g\Big)(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{dm} \\ &\quad + \int_\Omega g(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm} \\ &\overset{(2.26)}{=} \int_\Omega L(\phi_i\phi_j)\mathrm{div}V\mathrm{dm} - 2\int_\Omega g(\nabla_{\nabla\phi_i} V, \nabla\phi_j)\mathrm{dm} \\ &\quad -2\int_\Omega g(\nabla_{\nabla\phi_j} V, \nabla\phi_i)\mathrm{dm} + \int_\Omega g(\nabla\dot{\eta}, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}. \end{aligned}$$

Mas

$$g(\nabla_{\nabla\phi_i} V, \nabla\phi_j) = \mathrm{div}_\eta(g(V, \nabla\phi_j)\nabla\phi_i) + \lambda g(V, \nabla\phi_j)\phi_i - \nabla^2\phi_j(V, \nabla\phi_i).$$

Como $\lambda = \lambda_i(0) = \lambda_j(0)$, então fazendo $\frac{s_{ij}}{2}\delta_{ij} = a_{ij}$ poderemos escrever

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= -\lambda \int_\Omega \phi_i\phi_j \mathrm{div} V \mathrm{dm} + \int_\Omega g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{div} V \mathrm{dm} - \int_\Omega \mathrm{div}_\eta(g(V, \nabla\phi_j)\nabla\phi_i)\mathrm{dm} \\
&\quad -\lambda \int_\Omega g(V, \nabla\phi_j)\phi_i \mathrm{dm} + \int_\Omega \nabla^2\phi_j(V, \nabla\phi_i)\mathrm{dm} - \int_\Omega \mathrm{div}_\eta(g(V, \nabla\phi_i)\nabla\phi_j)\mathrm{dm} \\
&\quad -\lambda \int_\Omega g(V, \nabla\phi_i)\phi_j \mathrm{dm} + \int_\Omega \nabla^2\phi_i(V, \nabla\phi_j)\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega g(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm} \\
&= -\lambda \int_\Omega \Big(\phi_i\phi_j \mathrm{div} V + g(V, \nabla(\phi_i\phi_j))\Big)\mathrm{dm} - \int_{\partial\Omega} g(V, \nabla\phi_j) g(\nabla\phi_i, \nu)\mathrm{d}\mu \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} g(V, \nabla\phi_i) g(\nabla\phi_j, \nu)\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{div} V \mathrm{dm} + \int_\Omega \nabla^2\phi_j(V, \nabla\phi_i)\mathrm{dm} \\
&\quad + \int_\Omega \nabla^2\phi_i(V, \nabla\phi_j)\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega g(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.
\end{aligned}$$

Ademais, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\eta(g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)V) + g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)g(\nabla\eta, V) &= \mathrm{div}(g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)V) \\
&= g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)\mathrm{div} V + \nabla^2\phi_j(V, \nabla\phi_i) \\
&\quad + \nabla^2\phi_i(V, \nabla\phi_j).
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
a_{ij} &\overset{(2.27)}{=} -\lambda \int_\Omega \mathrm{div}(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} - 2\int_{\partial\Omega} g(V, \nu)\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_\Omega \mathrm{div}_\eta(g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)V)\mathrm{dm} + \int_\Omega g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)g(\nabla\eta, V)\mathrm{dm} \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega g(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= -\lambda \int_\Omega \mathrm{div}(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} - 2\int_{\partial\Omega} \langle V, \nu\rangle\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\mathrm{d}\mu + \int_{\partial\Omega} \langle V, \nu\rangle\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_\Omega g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)g(\nabla\eta, V)\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega g(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm} \\
&= -\int_{\partial\Omega} g(V, \nu)\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\mathrm{d}\mu - \lambda\int_\Omega \mathrm{div}(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} \\
&\quad + \int_\Omega g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)g(\nabla\eta, V)\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega g(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 = \int_\Omega \mathrm{div}_\eta(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} = \int_\Omega \mathrm{div}(\phi_i\phi_j V)\mathrm{dm} - \int_\Omega \phi_i\phi_j g(\nabla\eta, V)\mathrm{dm}.$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= -\int_{\partial\Omega} g(V,\nu)\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \big(g(\nabla\phi_i,\nabla\phi_j) - \lambda\phi_i\phi_j\big)g(\nabla\eta, V)\mathrm{dm} \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_\Omega g(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Usando agora integração por partes e o fato de que $\lambda_i(0) = \lambda_j(0) = \lambda$, chegamos a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega g(\nabla\dot\eta, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{dm} &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \dot\eta L(\phi_i\phi_j)\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\dot\eta g(\nu, \nabla(\phi_i\phi_j))\mathrm{d}\mu \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \dot\eta\big(\phi_i L\phi_j + \phi_j L\phi_i + 2g(\nabla\phi_i,\nabla\phi_j)\big)\mathrm{dm} \\
&\overset{(2.22)}{=} \int_\Omega g(\nabla\eta, V)\big(\lambda\phi_i\phi_j - g(\nabla\phi_i,\nabla\phi_j)\big)\mathrm{dm}.
\end{aligned}
$$

Estes cálculos nos dizem que os últimos dois termos em (2.28) se cancelam mutuamente, o que nos permite concluir a prova do teorema. □

2.2 Segunda variação

2.2.1 Segunda variação do η-laplaciano

No lema a seguir o tensor H' é definido como na Seção 1.2, onde também fornecemos a relação (1.20), para h'.

Lema 2.2 *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e $g(t)$ uma variação diferenciável da métrica g. Então, para toda $f \in C_c^\infty(M)$, temos*

$$
L''f = \langle \frac{1}{2}dh' - \mathrm{div}_\eta H', df\rangle - \langle H', \nabla^2 f\rangle + 2\mathrm{div}_\eta(H^2(\nabla f)) - H(\nabla f, \nabla h). \qquad (2.29)
$$

Demonstração: Inicialmente vamos derivar a relação

$$
\int_M \ell L_{g(t)} f\mathrm{dm}_t = -\int_M \langle d\ell, df\rangle \mathrm{dm}_t \qquad (2.30)
$$

em um t arbitrário (ver relação (1.29)). Chegaremos à equação

$$
\int_M \ell L'_{g(t)} f\mathrm{dm}_t + \int_M \ell\frac{h(t)}{2}L_{g(t)}f\mathrm{dm}_t = \int_M H_t(\nabla_t f, \nabla_t \ell)\mathrm{dm}_t - \int_M \langle d\ell, df\rangle\frac{h(t)}{2}\mathrm{dm}_t.
$$

Observemos agora que $H_0 = H$, $h(0) = h$, $\mathrm{dm}_0 = \mathrm{dm}$ e que $L_{g(0)} = L$. Então, usando (1.24), (2.40), (1.27) e (1.30) obteremos, ao derivar a relação acima em $t = 0$,

$$\begin{aligned}\int_M \ell L'' f \mathrm{dm} &= -\int_M \ell h L' f \mathrm{dm} - \int_M H(H(\nabla f), \nabla \ell)\mathrm{dm} - \int_M H(\nabla f, H(\nabla \ell))\mathrm{dm} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[\int_M \ell h' L f \mathrm{dm} + \int_M h' \langle d\ell, df\rangle \mathrm{dm}\right] \\ &\quad -\frac{1}{4}\left[\int_M \ell h^2 L f \mathrm{dm} + \int_M h^2 \langle d\ell, df\rangle \mathrm{dm}\right] \\ &\quad +\int_M H'(\nabla f, \nabla \ell)\mathrm{dm} + \int_M h H(\nabla f, \nabla \ell)\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Assim, usando o Lema 1.3 podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_M \ell L'' f \mathrm{dm} &= -\int_M \ell h L' f \mathrm{dm} - 2\int_M H(H(\nabla f), \nabla \ell)\mathrm{dm} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[\int_M \ell h' L f \mathrm{dm} + \int_M h' \langle d\ell, df\rangle \mathrm{dm}\right] \\ &\quad -\frac{1}{4}\left[\int_M \ell h^2 L f \mathrm{dm} + \int_M h^2 \langle d\ell, df\rangle \mathrm{dm}\right] \\ &\quad +\int_M H'(\nabla f, \nabla \ell)\mathrm{dm} + \int_M h H(\nabla f, \nabla \ell)\mathrm{dm}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Nosso objetivo agora será tirar as derivadas de ℓ. Para isso, basta usarmos a relação (1.12), o teorema da divergência e o fato de $\ell \in C_c^\infty(M)$. O que nos remete a

$$\begin{aligned}\int_M H(H(\nabla f), \nabla \ell)\mathrm{dm} &\overset{(1.12)}{=} -\int_M \ell(\mathrm{div}_\eta H)(H(\nabla f))\mathrm{dm} - \int_M \ell\langle \nabla(H(\nabla f)), H\rangle \mathrm{dm} \\ &\overset{(1.12)}{=} -\int_M \ell \mathrm{div}_\eta(H^2(\nabla f))\mathrm{dm}\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\int_M \ell h' L f \mathrm{dm} + \int_M h' \langle df, d\ell\rangle \mathrm{dm} = -\int_M \ell \langle df, dh'\rangle \mathrm{dm}. \tag{2.33}$$

$$\int_M \ell h^2 L f \mathrm{dm} + \int_M h^2 \langle df, d\ell\rangle \mathrm{dm} = -\int_M \ell \langle dh^2, df\rangle \mathrm{dm}. \tag{2.34}$$

$$\int_M H'(\nabla \ell, \nabla f)\mathrm{dm} = -\int_M \ell(\mathrm{div}_\eta H')(\nabla f)\mathrm{dm} - \int_M \ell\langle \nabla^2 f, H'\rangle \mathrm{dm} \tag{2.35}$$

(2.36)
$$\int_M h H(\nabla f, \nabla \ell)\mathrm{dm} = -\int_M \ell(\mathrm{div}_\eta H)(h\nabla f)\mathrm{dm} - \int_M \ell\langle \nabla(h\nabla f), H\rangle \mathrm{dm}.$$

Substituindo (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) e (2.36) em (2.31), chegaremos a

$$\begin{aligned} L''f &= -hL'f + 2\mathrm{div}_\eta(H^2(\nabla f)) + \frac{1}{2}\langle dh', df\rangle + \frac{1}{4}\langle dh^2, df\rangle \\ &\quad -\langle \mathrm{div}_\eta H', df\rangle - \langle H', \nabla^2 f\rangle - \langle \mathrm{div}_\eta H, hdf\rangle - \langle \nabla(h\nabla f), H\rangle. \end{aligned}$$

Observando agora que a expressão (2.6) nos fornece

$$hL'f = \frac{1}{4}\langle dh^2, df\rangle - \langle \mathrm{div}_\eta H, hdf\rangle - h\langle H, \nabla^2 f\rangle,$$

ficaremos com

$$\begin{aligned} L''f &= \langle \frac{1}{2}dh' - \mathrm{div}_\eta H', df\rangle - \langle H', \nabla^2 f\rangle + 2\mathrm{div}_\eta(H^2(\nabla f)) \\ &\quad + h\langle \nabla^2 f, H\rangle - \langle \nabla(h\nabla f), H\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle \nabla(h\nabla f), H\rangle = h\langle \nabla^2 f, H\rangle + H(\nabla f, \nabla h)$$

e portanto

$$L''f = \langle \frac{1}{2}dh' - \mathrm{div}_\eta H', df\rangle - \langle H', \nabla^2 f\rangle + 2\mathrm{div}_\eta(H^2(\nabla f)) - H(\nabla f, \nabla h).$$

$\square$

Lembrando que $\langle H', \nabla^2 f\rangle = -\langle \mathrm{div}_\eta H', df\rangle + \mathrm{div}_\eta(H'(\nabla f))$, poderíamos também escrever a relação (2.29) como

$$L''f = \frac{1}{2}\langle dh', df\rangle + \mathrm{div}_\eta((2H^2 - H')(\nabla f)) - H(\nabla h, \nabla f). \tag{2.37}$$

Como $f\mathrm{div}_\eta(T(\nabla f)) = \mathrm{div}_\eta(fT(\nabla f)) - T(\nabla f, \nabla f)$ para todo $(0,2)$-tensor simétrico T, a equação (2.37) nos dará

$$\begin{aligned} fL''f &= \frac{1}{4}\langle dh', df^2\rangle + \mathrm{div}_\eta(f(2H^2 - H')(\nabla f)) - (2H^2 - H')(\nabla f, \nabla f) \\ &\quad -\frac{1}{2}H(\nabla h, \nabla f^2) \end{aligned}$$

e portanto, se $\phi_i \in C_c^\infty(M)$,

$$\int_M \phi_i L''\phi_i \mathrm{dm} = \frac{1}{4}\int_M \langle dh', d\phi_i^2\rangle - \int_M (2H^2 - H')(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i)\mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_M H(\nabla h, \nabla\phi_i^2). \tag{2.38}$$

De maneira análoga obteremos que se $\phi_i \in C_c^\infty(M)$ então

$$\int_M \phi_i L'\phi_i' \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\int_M \langle dh, \phi_i d\phi_i'\rangle \mathrm{dm} + \int_M H(\nabla\phi_i', \nabla\phi_i)\mathrm{dm}. \tag{2.39}$$

Proposição 2.4 *Sejam* (M,g) *uma variedade riemanniana compacta,* $g(t)$ *uma variação diferenciável da métrica* g*,* $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ *uma família diferenciável de funções e* $\lambda_i(t)$ *uma família diferenciável de números reais tais que* $\lambda_i(0)=\lambda$ *para cada* $i=1,\ldots,m$ *e, para todo* t*,*

$$\begin{cases} -L_{g(t)}\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{em } \partial M, \end{cases}$$

onde $\langle \phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(M,\mathrm{dm}_t)} = \delta_i^j$*. Então*

$$\begin{aligned} \lambda_i'' &= -\frac{1}{4}\int_M \langle dh', d(\phi_i^2)\rangle \mathrm{dm} - \int_M \langle dh, \phi_i d\phi_i'\rangle \mathrm{dm} + \int_M H(\phi_i\nabla h - 2\nabla\phi_i', \nabla\phi_i)\mathrm{dm} \\ &+ \int_M (2H^2 - H')(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i)\mathrm{dm} - \lambda_i'\int_M (\phi_i^2)'\mathrm{dm}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Demonstração: Derivando a equação $-L_{g(s)}\phi_i(s) = \lambda_i(s)\phi_i(s)$ em $s=t$, obtemos

$$-L'_{g(t)}\phi_i(t) - L_{g(t)}\phi_i'(t) = \lambda_i'(t)\phi_i(t) + \lambda_i(t)\phi_i'(t).$$

Derivando agora em $t=0$ e multiplicando por ϕ_j, chegaremos a

$$-\phi_j L''\phi_i - 2\phi_j L'\phi_i' - \phi_j L\phi_i'' = \lambda_i''\phi_i\phi_j + 2\lambda_i'\phi_i'\phi_j + \lambda_i\phi_i''\phi_j$$

ou, lembrando que $\lambda_i(0)=\lambda_j(0)$,

$$-\phi_j L''\phi_i - 2\phi_j L'\phi_i' - \phi_j L\phi_i'' = \lambda_i''\phi_i\phi_j + 2\lambda_i'\phi_i'\phi_j + \lambda_j\phi_i''\phi_j$$

e, portanto,

$$-\phi_j L''\phi_i - 2\phi_j L'\phi_i' - \phi_j L\phi_i'' = \lambda_i''\phi_i\phi_j + 2\lambda_i'\phi_i'\phi_j - \phi_i'' L\phi_j.$$

Usando integração por partes chegamos a

$$\lambda_i''\delta_{ij} = -\int_M \phi_j L''\phi_i \mathrm{dm} - 2\int_M \phi_j L'\phi_i' \mathrm{dm} - 2\lambda_i'\int_M \phi_i'\phi_j \mathrm{dm},$$

ou seja,

$$\lambda_i'' = -\int_M \phi_i L''\phi_i \mathrm{dm} - 2\int_M \phi_i L'\phi_i' \mathrm{dm} - \lambda_i'\int_M (\phi_i^2)'\mathrm{dm}.$$

Aplicando as relações (2.38) e (2.39) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_i'' &= -\frac{1}{4}\int_M \langle dh', d\phi_i^2\rangle \mathrm{dm} - \int_M \langle dh, \phi_i d\phi_i'\rangle \mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_M H(\nabla h, \nabla\phi_i^2)\mathrm{dm} \\ &\quad -2\int_M H(\nabla\phi_i', \nabla\phi_i)\mathrm{dm} + \int_M (2H^2 - H')(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i)\mathrm{dm} - \lambda_i'\int_M (\phi_i^2)'\mathrm{dm}, \end{aligned}$$

o que nos leva diretamente à relação (2.40). □

2.2.2 Variação do domínio

Lema 2.3 *Se $f \in C_c^\infty(M)$, então*

$$\bar{L}''f = L''f - g(\nabla\ddot{\eta}, \nabla f) - g(\nabla\dot{\eta}, (\dot{\nabla} f)) + H(\nabla\dot{\eta}, \nabla f). \tag{2.41}$$

Demonstração: Como $\bar{L}'_t f = L'_t f - g_t(\nabla\dot{\eta}(t), \nabla f)$ teremos, usando (1.21) (p. 20), que

$$\begin{aligned}
\bar{L}''f &= L''f - \frac{d}{dt}|_{t=0} g_t(\nabla\eta'(t), \nabla f) \\
&= L''f - g\left((\nabla\dot{\eta'}(t)), \nabla f\right) - g(\nabla\eta'(0), (\dot{\nabla} f)) + H(\nabla\eta'(0), \nabla f) \\
&= L''f - g\left(g^{ij}\frac{d}{dt}|_{t=0}(\partial_i(\eta'(t))\partial_j, \nabla f\right) - g(\nabla\dot{\eta}, (\dot{\nabla} f)) + H(\nabla\dot{\eta}, \nabla f) \\
&= L''f - g\left(g^{ij}\partial_i(\frac{d}{dt}|_{t=0}\eta'(t))\partial_j, \nabla f\right) - g(\nabla\dot{\eta}, (\dot{\nabla} f)) + H(\nabla\dot{\eta}, \nabla f) \\
&= L''f - g\left(g^{ij}\partial_i(\ddot{\eta})\partial_j, \nabla f\right) - g(\nabla\dot{\eta}, (\dot{\nabla} f)) + H(\nabla\dot{\eta}, \nabla f) \\
&= L''f - g(\nabla\ddot{\eta}, \nabla f) - g(\nabla\dot{\eta}, (\dot{\nabla} f)) + H(\nabla\dot{\eta}, \nabla f).
\end{aligned}$$

Proposição 2.5 *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e g_t uma variação diferenciável da métrica g. Então, para toda $f \in C_c^\infty(M)$, temos*

$$\begin{aligned}
\bar{L}''f &= \frac{1}{2}\langle dh', df\rangle + \mathrm{div}_\eta((2H^2 - H')(\nabla f)) - g(\nabla\ddot{\eta}, \nabla f) \\
&\quad -g(\nabla\dot{\eta}, (\dot{\nabla} f)) + H(\nabla(\dot{\eta} - h), \nabla f).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Demonstração: Basta usarmos o Lema 2.3 e a relação (2.37). □

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Autovalores simples

Voltemos agora nossa atenção para duas aplicações das fórmulas tipo Hadamard obtidas na seção anterior. Provemos primeiro o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Sejam (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta e λ um autovalor do η-laplaciano para o problema de Dirichlet, com multiplicidade $m > 1$. Então existe g em uma vizinhança $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r < \infty$, de g_0, tal que os autovalores $\lambda(g)$ próximos a λ são todos simples.*

Demonstração: Consideremos $g(t) = g + tT$, onde T é um $(0, 2)$-tensor simétrico T qualquer em (M^n, g). Podemos escolher t suficientemente pequeno para que $g(t)$ seja uma métrica riemanniana e o autovalor $\lambda(t)$ satisfaça

$$\begin{cases} -L_{g(t)}\phi_i(t) &= \lambda(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{em } \partial M. \end{cases}$$

Como $H = \frac{d}{dt}g(t) = T$ e $L = L_g$, teremos pela Proposição 2.2 que

$$\lambda'\delta_{ij} = \int_M \langle \frac{1}{4}L(\phi_i\phi_j)g - d\phi_i \otimes d\phi_j, T\rangle \text{dm}. \tag{3.1}$$

Agora, considerando o simetrizador $S = \frac{d\phi_i \otimes d\phi_j + d\phi_j \otimes d\phi_i}{2}$ e usando o fato de que

$$\langle d\phi_i \otimes d\phi_j, T\rangle = \langle d\phi_j \otimes d\phi_i, T\rangle$$

nós deduzimos a próxima identidade:

$$\lambda'\delta_{ij} = \int_M \langle \frac{1}{4}L(\phi_i\phi_j)g - S, T\rangle \mathrm{dm}. \tag{3.2}$$

Se $i \neq j$, tem-se

$$\frac{1}{4}L(\phi_i\phi_j)g = S. \tag{3.3}$$

Além disso, tomando o traço na equação (3.3) chegamos a

$$\begin{aligned} g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) &= \frac{n}{4}L(\phi_i\phi_j) \\ &= \frac{n}{4}(\phi_i L\phi_j + \phi_j L\phi_i + 2g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)) \\ &= \frac{n}{2}(-\lambda\phi_i\phi_j + g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para $n \neq 2$ podemos escrever

$$\frac{n\lambda}{n-2}\phi_i\phi_j = g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j). \tag{3.5}$$

A partir desta identidade vamos utilizar um argumento usado por Uhlenbeck [25].

Fixando $p \in M$, consideremos a curva integral α em M tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(s) = \nabla\phi_i(\alpha(s))$. Definindo $\beta(s) := \phi_j(\alpha(s))$, encontramos

$$\begin{aligned} \beta'(s) = g(\nabla\phi_j(\alpha(s)), \alpha'(s)) &= g(\nabla\phi_j, \nabla\phi_i)(\alpha(s)) \\ &= \frac{n\lambda}{n-2}\phi_i\phi_j(\alpha(s)) \\ &= \frac{n\lambda}{n-2}\phi_i(\alpha(s))\beta(s), \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois M é compacta. Para o caso $n = 2$, obteremos da equação (3.4) que $\phi_i\phi_j = 0$. Segue então do princípio da continuação única [17] que pelo menos uma das autofunções se anula, o que novamente constitui um absurdo. Isso completa a prova do Teorema 3.1.

Corolário 3.1 *Dada uma variedade riemanniana compacta (M, g) com bordo, existe um conjunto residual das métricas $\Gamma \subset \mathcal{M}^r$ tal que, para todo $g \in \Gamma$, os autovalores para o problema de Dirichlet relativo ao operador L_g são simples.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}_m$ o conjunto das métricas em $\mathcal{M}^r$ tais que os primeiros m autovalores de L_g são simples. É sabido que se esses autovalores dependem continuamente da métrica (veja [1]), então para cada m o conjunto $\mathcal{C}_m$ é aberto em $\mathcal{M}^r$. Por outro lado, segue do Teorema 3.1 que o conjunto $\mathcal{C}_m$ é denso em $\mathcal{M}^r$. Como $\mathcal{M}^r$ é um espaço métrico completo na topologia $\mathcal{C}^r$, o conjunto $\Gamma = \cap_{m=1}^{\infty}\mathcal{C}_m$ é denso, e isso prova o Corolário 3.1.

Teorema 3.2 *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e Ω um domínio limitado em M. Seja λ um autovalor do η-laplaciano para o problema de Dirichlet com multiplicidade $m > 1$. Então existe um difeomorfismo f em uma vizinhança $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r < \infty$, da identidade id_Ω, tal que os autovalores $\lambda(g)$ próximos a λ são todos simples.*

Demonstração: Observemos primeiro que, uma vez que a multiplicidade dos autovalores não muda com a família de difeomorfismos, a existência das curvas diferenciáveis de autofunções e autovalores é garantida. Note-se também que neste caso a Proposição 2.3 ainda é válida sem a suposição da analiticidade. Seja λ um autovalor de multiplicidade $m > 1$. Suponha que, para toda perturbação de Ω por difeomorfismos, a multiplicidade de λ não pode ser reduzida para chegarmos a uma contradição. De fato, sejam ϕ_i e ϕ_j duas autofunções distintas associadas ao autovalor λ. Segue então da fórmula obtida na Proposição 2.3 que $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = 0$ em $\partial\Omega$. A generalidade da perturbação $-$ e portanto a generalidade de V na citada fórmula $-$ nos permite concluir que $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = 0$ em $\partial\Omega$. Desta forma, teremos $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} = 0$ ou $\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = 0$ em algum conjunto aberto U de $\partial\Omega$. De fato, se por exemplo $p \in \partial M$ é tal que $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} \neq 0$ em p então existirá uma vizinhança de p em ∂M na qual $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} \neq 0$. Como $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = 0$ em $\partial\Omega$, então nessa vizinhança teremos $\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = 0$. Se por exemplo $\frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} = 0$ em U, como $\phi_i = 0$ em $\partial\Omega$, segue do princípio da continuação única [17] que $\phi_i = 0$ em Ω.

Além disso, é conhecido que o conjunto $\mathrm{Diff}^r(\Omega)$ dos $\mathcal{C}^r$-diffeomorfismos de Ω é uma variedade afim de um espaço de Banach (veja [11]). Então, argumentos similares àqueles acima nos permitem enunciar o Corolário 3.2.

Corolário 3.2 *Dado um domínio limitado Ω em uma variedade riemanniana (M,g), o subconjunto dos difeomorfismos $\mathfrak{D} \subset \mathrm{Diff}^r(\Omega)$ tais que todos os autovalores do operador η-laplaciano são simples, é residual.*

3.2 Variação do autovalor pelo fluxo de Ricci

Usando uma fórmula variacional para os autovalores do laplaciano, Luca Fabrizio [12] estudou o espectro desse operador, quando a deformação da métrica se dá mediante o fluxo de Ricci. Nesta seção vamos aproveitar as ferramentas aqui desenvolvidas para estudar o espectro do $\eta-$laplaciano quando deformamos a métrica inicial pelo fluxo de Ricci, além de obtermos mais algumas estimativas e alguns resultados em sólitons de Ricci.

Consideremos uma família a 1-parâmetro de métricas $g(t)$ em uma variedade riemanniana M^n, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de modo que

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)}, \tag{3.6}$$

onde $Ric_{g(t)}$ denota o tensor de Ricci na métrica $g(t)$. Em [16] Hamilton provou que para qualquer métrica diferenciável g_0 em uma variedade Riemanniana compacta sem bordo M^n, existe uma única solução $g(t)$ para a equação (3.6) definida em algum intervalo $[0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, com $g(0) = g_0$.

Um sóliton de Ricci é um fluxo de Ricci $(M^n, g(t))$, $0 \leq t < T \leq +\infty$, com a propriedade que, para cada $t \in [0,T)$, existe um difeomorfismo $f_t : M^n \to M^n$ e uma constante $\sigma(t) > 0$ tal que $\sigma(t)f_t^* g(0) = g(t)$. Uma maneira para gerar sólitons de Ricci é a seguinte: consideremos uma variedade riemanniana (M^n, g_0), com um campo de vetores X e uma constante α satisfazendo

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g_0 = \alpha g_0. \tag{3.7}$$

Em seguida, vamos definir a constante $\sigma(t) = -2\alpha t + 1$, para cada $t \in [0,T)$, com $T := +\infty$, se $\alpha \leq 0$, e $T := \frac{1}{2\alpha}$, se $\alpha > 0$. Finalmente, basta considerarmos f_t como a família a 1-parâmetro de difeomorfismos gerados pelo campo $Y_t(x) = \frac{X(x)}{\sigma(t)}$, para todo $x \in M^n$. Para maiores detalhes sobre o fluxo de Ricci, duas boas referências são [9] e [10].

Consideremos agora que $g(t)(x) = \tau(x,t)f_t^* g_0(x)$ seja uma solução de (3.6), para todo $x \in M^n$, onde $\tau(x,t)$ é uma função real diferenciável e positiva em $M^n \times [0,\varepsilon)$, de modo que $\tau(x,0) = 1$ (por exemplo $\tau(x,t) = -2\alpha(x)t + 1$ para alguma função $\alpha \in C^\infty(M)$). Então,

$$\frac{d}{dt}g(t)(x) = \frac{d}{dt}\tau(x,t)f_t^* g_0(x) + \tau(x,t)\frac{d}{dt}f_t^* g_0(x),$$

que em $t = 0$, fica

$$-2Ric_{g_0} = -2\alpha(x)g_0 + \mathcal{L}_X g_0, \tag{3.8}$$

onde $\alpha(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\tau(x,t)$ e $X(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t(x)$.

Definição 3.1 *Um quase sóliton de Ricci é uma variedade diferenciável M^n munida com uma métrica riemanniana g_0, um campo de vetores X e uma função sóliton $\alpha : M \to \mathbb{R}$ satisfazendo à equação* (3.8).

Exemplo 3.1 *Para cada vetor unitário $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, considere a família de métricas dada por $g(t)(x) = \tau(x,t)f_t^* g_0(x)$, onde $\tau(x,t) = 2(l_a(x)+1-n)t+1$, $l_a(x) = \langle x, a\rangle$, $x = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o vetor posição, g_0 é a métrica canônica de $\mathbb{S}^n$ (isto é $g_0 = \langle,\rangle|_{\mathbb{S}^n}$ onde $\langle,\rangle$ é a métrica canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$), f_t é o fluxo de ∇l_a em $\mathbb{S}^n$ e t é escolhido de modo que $\tau(x,t) > 0$. Como $Ric_{g_0} = (n-1)g_0$ e $\nabla^2 l_a = -l_a g_0$, é imediato que a equação* (3.8) *é satisfeita para $\alpha(x) = -l_a(x) + n - 1$ e $X = \nabla l_a$.*

Um caso não compacto e análogo ao exemplo anterior é quando consideramos o mergulho canônico $\mathbb{H}^n(-1)$ no espaço de Lorentz $\mathbb{R}_1^{n+1}$, onde novamente consideramos a função $l_a(x) = \langle x, a\rangle$, mas agora $a \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ é um vetor tipo tempo. Para maiores detalhes sobre a geometria dos quase sólions de Ricci recomendamos [3, 4, 13, 22].

Motivados pela discussão acima, vamos provar nosso próximo resultado. Primeiramente vamos observar que estaremos considerando o intervalo maximal $[0,T)$, no qual existe o fluxo de Ricci numa variedade compacta sem bordo, bem como a existência das curvas de autofunções e autovalores do η-laplaciano. Além disso, iremos supor que, ao longo do fluxo de Ricci, o autovalor $\lambda(t)$ e sua respectiva autofunção $u(t)$ variam diferenciavelmente com o parâmetro t.

Proposição 3.1 *Consideremos (M,g) uma variedade riemanniana compacta sem bordo, f_t uma família de difeomorfismos de M, $\tau(x,t)$ uma função real diferenciável e positiva em $M\times[0,T)$ com $\tau(x,0)=1$ e $g(t)(x)=\tau(x,t)f_t^*g(x)$. Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo $g(t)$ com autofunção associada $u(t)=u\circ f_t$. Se $X=\frac{d}{dt}\big|_{t=0}f_t$ e $\tau(x,t)=\mathrm{e}^{2\varphi(t)}$, com $\varphi\in C^\infty(M\times[0,T))$, então*

1. $\lambda'(0)=\int_M\varphi'(0)\left(-n\lambda u^2+(n-2)|\nabla u|^2\right)\mathrm{dm}$.
2. $\int_M(-\lambda u^2+|\nabla u|^2)\mathrm{div}X\mathrm{dm}-2\int_M g\left(\nabla_{\nabla u}X,\nabla u\right)\mathrm{dm}=0$.

Em particular, se X é conforme, isto é, $\mathcal{L}_Xg=2\rho g$, teremos

$$\int_M\big(-\lambda u^2+\frac{n-2}{n}|\nabla u|^2\big)\mathrm{div}X\mathrm{dm}=0.$$

Demonstração: Sendo $g(t)(x)=\tau(x,t)f_t^*g(x)=\mathrm{e}^{2\varphi(t)}f_t^*g(x)$, segue das equações (1.32), (1.33) e (1.34) que

$$L_{g(t)}(u\circ f_t)=\mathrm{e}^{-2\varphi(t)}\big(L_gu+(n-2)g(\nabla\varphi(t),\nabla u)\big).$$

Então,

$$-\lambda(t)u(t)=L_{g(t)}(u(t))=\mathrm{e}^{-2\varphi(t)}\big(L_gu+(n-2)g(\nabla\varphi(t),\nabla u)\big)$$

e portanto

$$-\lambda u=L_gu=-\lambda(t)e^{2\varphi(t)}u(t)-(n-2)g(\nabla\varphi(t),\nabla u).$$

Derivando em $t=0$,

$$\begin{aligned}0&=\left(-\lambda'(0)e^{2\varphi(0)}-2\varphi'(0)\lambda(0)e^{2\varphi(0)}\right)u(0)-\lambda(0)e^{2\varphi(0)}u'(0)\\&\quad-(n-2)g(\nabla\varphi'(0),\nabla u)\\&=\left(-\lambda'(0)-2\varphi'(0)\lambda\right)u-\lambda u'(0)-(n-2)g(\nabla\varphi'(0),\nabla u),\end{aligned}$$

o que implica

$$0=\left(-\lambda'(0)-2\varphi'(0)\lambda\right)u^2-\lambda u'(0)u-\frac{(n-2)}{2}g(\nabla\varphi'(0),\nabla u^2).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\lambda'(0) &= \int_M -2\lambda\varphi'(0)u^2 \mathrm{dm} - \frac{(n-2)}{2}\int_M g(\nabla\varphi'(0),\nabla u^2)\mathrm{dm}\\
&= \int_M -2\lambda\varphi'(0)u^2 \mathrm{dm} + \frac{(n-2)}{2}\int_M \varphi'(0)L(u^2)\mathrm{dm}\\
&= \int_M -2\lambda\varphi'(0)u^2 \mathrm{dm} + (n-2)\int_M \varphi'(0)(-\lambda u^2 + |\nabla u|^2)\mathrm{dm}\\
&= \int_M \varphi'(0)\left(-n\lambda u^2 + (n-2)|\nabla u|^2\right)\mathrm{dm},
\end{aligned}
$$

o que prova o primeiro item. Para o segundo item, vamos derivar em $t=0$ a expressão $g(t)(x) = \tau(x,t)f_t^*g(x)$ para obter $H = 2\varphi'(0)g + \mathcal{L}_X g$. Assim, pelas equações (2.15) e (1.15), teremos

$$
\begin{aligned}
\lambda'(0) &= \int_M \langle \frac{1}{4}L(u^2)g - du\otimes du\ ,\ \varphi g + \mathcal{L}_X g\rangle \mathrm{dm}\\
&= \int_M \left[2\varphi'(0)\left(\frac{n}{4}L(u^2) - |\nabla u|^2\right) + \left(\frac{1}{2}L(u^2)\mathrm{div}X - \mathcal{L}_X g(\nabla u,\nabla u)\right)\right]\mathrm{dm}\\
&= \int_M \varphi'(0)\left(-n\lambda u^2 + (n-2)|\nabla u|^2\right)\mathrm{dm} + \int_M \left(-\lambda u^2 + |\nabla u|^2\right)\mathrm{div}X\mathrm{dm}\\
&\quad -2\int_M g(\nabla_{\nabla u}X,\nabla u)\mathrm{dm}.
\end{aligned}
$$

O que nos permite concluir o segundo item imediatamente. Para o caso em que X é conforme basta lembrar que $\rho = \frac{\mathrm{div}X}{n}$. □

Para o caso em que $g(t)$ é uma solução do fluxo de Ricci será mais fácil analisarmos essa conta de outro ponto de vista. Contudo, para fins mais gerais, vamos considerar que $g(t)$ é o *fluxo de Ricci normalizado* em uma variedade riemanniana compacta sem bordo (M,g), isto é,

$$
\frac{d}{dt}g(t) = \frac{2r}{n}g(t) - 2Ric_{g(t)}, \tag{3.9}
$$

onde $g(0)=g$ e $r = r(t) = \frac{\int_M R(t)\mathrm{dm}_t}{\int_M \mathrm{dm}_t}$, de modo que se tenha preservação de volume com peso. De fato, neste caso

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M \mathrm{dm}_t &= \int_M \frac{d}{dt}\mathrm{dm}_t = \int_M \langle H_t, g(t)\rangle \mathrm{dm}_t\\
&= \int_M \Big\langle \frac{2r}{n}g(t) - 2Ric_{g(t)}, g(t)\Big\rangle \mathrm{dm}_t = 2\int_M (r(t) - R(t))\mathrm{dm}_t = 0,
\end{aligned}
$$

logo o volume com peso de M é preservado ao longo do fluxo de Ricci normalizado.

Antes de prosseguirmos convém considerar, para a autofunção u, sua respectiva *autofunção normalizada*, isto é, a função

$$\tilde{u} := \frac{u}{\sqrt{\int_M u^2 \mathrm{dm}}}.$$

Neste caso é claro que $\tilde{u}$ ainda é autofunção de L relativa ao mesmo autovalor λ, e ainda teremos $\int_M \tilde{u}\mathrm{dm} = 0$ e $\int_M (\tilde{u})^2 \mathrm{dm} = 1$. Essa última relação é o motivo de fazermos a normalização. No que segue, já estaremos considerando a autofunção normalizada. Além disso, para não carregar demais a notação estaremos também omitindo t nas fórmulas, embora as relações obtidas expressem as quantidades em um instante t arbitrário.

Proposição 3.2 *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo o fluxo de Ricci normalizado numa variedade riemanniana compacta sem bordo (M^n, g), então*

$$\lambda' = -\frac{2}{n} r\lambda + \lambda \int_M u^2 R \mathrm{dm} - \int_M R|\nabla u|^2 \mathrm{dm} + 2\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}, \tag{3.10}$$

onde $u = u(t,p)$, $p \in M$, denota uma autofunção associada ao autovalor $\lambda = \lambda(t)$ e $R = R(t,p)$ é a curvatura escalar.

Demonstração: Trabalhando com o integrando na relação (2.15), e observando que $H = \frac{2r}{n} g - 2Ric$ (e portanto $h = 2(r - R)$), obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{h}{4} L(u^2) - H(\nabla u, \nabla u) &= (-\lambda u^2 + |\nabla u|^2)(r - R) - \frac{2r}{n}|\nabla u|^2 + 2Ric(\nabla u, \nabla u) \\
&= \frac{1}{2} L(u^2) r - R(\lambda u + |\nabla u|^2) - \frac{2r}{n}(\frac{1}{2} L(u^2) + \lambda u^2) \\
&\quad +2Ric(\nabla u, \nabla u) \\
&= \frac{r(n-2)}{2n} L(u^2) - \frac{2\lambda r}{n} u^2 + \lambda u^2 R - R|\nabla u|^2 \\
&\quad +2Ric(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.3 *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo o fluxo de Ricci normalizado numa superfície riemanniana compacta sem bordo (M^2, g), então*

$$\lambda' = \lambda \left(-r + \int_M u^2 R \mathrm{dm} \right). \tag{3.11}$$

Demonstração: Basta lembrar que para o caso bidimensional iremos ter $Ric = \frac{R}{2}g$ e portanto $2Ric(\nabla u, \nabla u) = R|\nabla u|^2$. Agora é só aplicar esse resultado na equação (3.10). $\square$

Uma conclusão imediata se pode tomar a partir da equação (3.10) quando se impõe que M seja homogênea na métrica g_0. Do fato de que o fluxo de Ricci preserva as isometrias da variedade inicial [16], e que, portanto, a métrica permanece homogênea ao longo do fluxo (ou seja, para cada t a curvatura escalar R será constante em M), verificamos que

$$r = \frac{\int_M Rdm}{\int_M dm} = R$$

e então teremos o seguinte resultado para variedades homogêneas:

Corolário 3.4 *Se $\lambda(t)$ denota a evolução de um autovalor do η-laplaciano segundo o fluxo de Ricci normalizado numa variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^n, g), então*

$$\lambda' = -\frac{2R}{n}\lambda + 2\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}.$$

Observação 3.1 *Sob as hipóteses do Corolário 3.4 podemos observar que, ao derivarmos a função $t \mapsto e^{\frac{2R}{n}t}\lambda(t)$, obteremos*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{2R}{n}t}\lambda(t)\right) = 2e^{\frac{2R}{n}t}\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}$$

e uma hipótese sobre o sinal da curvatura de Ricci nos fornecerá então o tipo de monotonicidade da função $t \mapsto e^{\frac{2R}{n}t}\lambda(t)$.

Observação 3.2 *Para o caso de variedades homogêneas, ao considerarmos o primeiro autovalor não nulo λ_1 do laplaciano, se u é uma autofunção normalizada associada a λ_1 e $Ric(\nabla u, \nabla u) \geq \kappa|\nabla u|^2$ para alguma constante $\kappa > 0$, então pelo teorema de Lichnerowicz [19], $\lambda_1 \geq \frac{n\kappa}{n-1}$. Assim,*

$$\lambda_1' = 2\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dM} \geq 2\kappa\int_M |\nabla u|^2\mathrm{dM} \geq 2\kappa^2\frac{n}{n-1}.$$

Observação 3.3 *No caso do fluxo de Ricci (não normalizado), para obtermos λ' na Proposição 3.2 e no Corolário 3.3 bastará fazermos $r = 0$ (quanto ao Corolário 3.4, isso será evidentemente o mesmo que se tomar $R = 0$).*

Outro fato digno de nota é que podemos "reescalonar" a métrica inicial fazendo por exemplo $\tilde{g} = \alpha g$, onde $\alpha = \left(\int_M \mathrm{dm}\right)^{-\frac{2}{n}}$ e dm é o elemento de volume com peso na métrica g original. Isso nos permite então encontrar que o elemento de volume $d\tilde{M}$, na nova métrica, será $\alpha^{\frac{n}{2}} dM$ (onde dM era o elemento de volume na métrica original) e, portanto, na nova métrica o elemento de volume com peso $d\tilde{m}$ será dado por $d\tilde{m} = \alpha^{\frac{n}{2}}\mathrm{dm}$. Desta forma temos $\int_M d\tilde{m} = 1$ e então $r = \int_M R d\tilde{m}$. Neste caso, se supusermos por exemplo que no Corolário 3.3 a métrica já está escalonada, poderemos reescrever a relação (3.11) *como*

$$\lambda'(0) = \lambda \int_M R(u^2 - 1) dm.$$

Precisaremos agora do seguinte fato provado por Hamilton em [16]: se $R \geq 0$ e $Ric \geq \varepsilon R g$ para algum $\varepsilon > 0$ em $t = 0$, então ambas as condições continuam valendo ao longo do fluxo de Ricci para $0 \leq t < T$.

Proposição 3.3 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^3, g) com curvatura de Ricci não negativa. Então o autovalor do η-laplaciano é não decrescente ao longo do fluxo de Ricci. Em particular, se a curvatura de Ricci é positiva e $\lambda_1(t)$ denota a evolução do primeiro autovalor não nulo do laplaciano ao longo do fluxo de Ricci, então $\lambda_1' \geq \frac{2n\varepsilon^2 R^2}{n-1}$, para algum $\varepsilon > 0$.*

Demonstração: Em dimensão três o fluxo de Ricci preserva a não negatividade do tensor de Ricci (ver [15]). Por outro lado, pelo Corolário 3.4 temos $\lambda' = 2\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm}$, o que nos fornece imediatamente a monotonicidade. Em particluar, em dimensão três $Ric \geq \varepsilon R g$ ao longo do fluxo, para algum $\varepsilon > 0$, o que implica $Ric(\nabla u, \nabla u) \geq \varepsilon R |\nabla u|^2$, onde u é uma autofução normalizada do primeiro autovalor não nulo λ_1 do laplaciano em (M, g). O resultado segue então da Observação 3.2. □

Proposição 3.4 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana compacta sem bordo (M^3, g) com curvatura de Ricci positiva. Então existe $t_0 \in [0, T)$ tal que o autovalor $\lambda(t)$ do η-laplaciano é crescente para $t \in [t_0, T)$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ tal que $Ric \geq \varepsilon Rg$. Então necessariamente $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$, o que nos fornece $2\varepsilon - 1 \leq -\frac{1}{3}$. A existência de um tal ε, bem como a necessidade da desigualdade, estão garantidas em [16], onde também se prova que $Ric \geq \varepsilon Rg$ ao longo de todo o fluxo de Ricci.

Por outro lado, $\int_M R|\nabla u|^2 \mathrm{dm} \leq (R_{max})_t \int_M |\nabla u|^2 \mathrm{dm}$ e assim

$$(2\varepsilon - 1)\int_M R|\nabla u|^2\mathrm{dm} \geq \frac{-(R_{max})_t}{3}\int_M |\nabla u|^2\mathrm{dm} = \frac{-\lambda(R_{max})_t}{3}. \tag{3.12}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lambda'(t) &\overset{(3.10)}{=} \lambda\int_M u^2 R\mathrm{dm} - \int_M R|\nabla u|^2\mathrm{dm} + 2\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dm} \\
&\geq \lambda\int_M u^2 R\mathrm{dm} - \int_M R|\nabla u|^2\mathrm{dm} + 2\varepsilon\int_M R|\nabla u|^2\mathrm{dm} \\
&= \lambda\int_M u^2 R\mathrm{dm} + (2\varepsilon - 1)\int_M R|\nabla u|^2\mathrm{dm} \\
&\overset{(3.12)}{\geq} \lambda\int_M u^2 R\mathrm{dm} - \frac{\lambda(R_{max})_t}{3} \\
&\geq \lambda(R_{min})_t - \lambda\frac{(R_{max})_t}{3} = \lambda\left((R_{min})_t - \frac{(R_{max})_t}{3}\right).
\end{aligned}$$

Agora, de $t \to T \Rightarrow \frac{(R_{max})_t}{(R_{min})_t} \to 1$ (ver [16]), o resultado segue. □

Em [14], Hamilton provou que em qualquer dimensão a não negatividade do operador curvatura é preservada ao longo do fluxo de Ricci. Como a não negatividade desse operador implica na não negatividade do tensor de Ricci, é imediato o resultado seguinte.

Proposição 3.5 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^n, g) com operador curvatura não negativo. Então o autovalor do η-laplaciano é não decrescente ao longo do fluxo de Ricci.*

O resultado obtido na próxima proposição fornece uma estimativa para a primeira variação de um autovalor do η-laplaciano em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^n, g).

Proposição 3.6 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^n, g). Então o autovalor do η-*

laplaciano satisfaz

$$\begin{aligned}\lambda' &\leq \frac{2(n-1)}{n}\lambda^2+\frac{2}{n}\lambda\int_M g(\nabla\eta,\nabla u^2)\mathrm{dm}-\frac{2}{n}\int_M g(\nabla\eta,\nabla u)^2\mathrm{dm}\\ &\quad -2\int_M \nabla^2\eta(\nabla u,\nabla u)\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Demonstração: Integrando a fórmula de Bochner para o η-laplaciano, teremos

$$\int_M |\nabla^2 u|^2\mathrm{dm}+\int_M Ric_\eta(\nabla u,\nabla u)\mathrm{dm}=\int_M (L(u))^2\mathrm{dm}.$$

Por outro lado $|\nabla^2 u|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta u)^2=\frac{1}{n}(L(u)+g(\nabla\eta,\nabla u))^2$ e portanto

$$\begin{aligned}\int_M Ric_\eta(\nabla u,\nabla u)\mathrm{dm} &\leq \int_M (L(u))^2\mathrm{dm}-\frac{1}{n}\int_M (L(u))^2\mathrm{dm}\\ &\quad -\frac{2}{n}\int_M L(u)g(\nabla\eta,\nabla u)\mathrm{dm}-\frac{1}{n}\int_M g(\nabla\eta,\nabla u)^2\mathrm{dm}\\ &= \frac{n-1}{n}\int_M (L(u))^2\mathrm{dm}-\frac{2}{n}\int_M L(u)g(\nabla\eta,\nabla u)\mathrm{dm}\\ &\quad -\frac{1}{n}\int_M g(\nabla\eta,\nabla u)^2\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Agora, de $Ric_\eta=Ric+\nabla^2\eta$ e da equação do Corolário 3.4 obtemos

$$\int_M Ric_\eta(\nabla u,\nabla u)\mathrm{dm}=\frac{1}{2}\lambda'+\int_M \nabla^2\eta(\nabla u,\nabla u)\mathrm{dm}.$$

Usando que $L(u)=-\lambda u$, obtemos a relação mencionada. □

Corolário 3.5 *Seja $g(t)$ a solução do fluxo de Ricci em uma variedade riemanniana homogênea compacta sem bordo (M^3,g) com curvatura escalar R não negativa. Se $\lambda=\lambda(t)$ é um autovalor do laplaciano e $R_{min}(t)$ é o menor valor assumido pela curvatura escalar em M no instante t, então*

$$R_{min}(t)\leq \frac{(n-1)}{n\varepsilon}\lambda,$$

onde $\varepsilon>0$ é tal que $Ric\geq \varepsilon Rg$ ao longo do fluxo de Ricci.

Demonstração: Pelo Corolário 3.4 e pela Proposição 3.6 deduzimos que

$$\int_M Ric(\nabla u,\nabla u)\mathrm{dM}\leq \frac{(n-1)}{n}\lambda^2.$$

Por outro lado, já observamos que Hamilton provou a existência de um $\varepsilon>0$ satisfazendo

$$Ric_{g(t)}\geq \varepsilon R(t)g(t)\geq \varepsilon R_{min}(t)g(t)$$

e, portanto,

$$\varepsilon R_{min}(t)\lambda = \varepsilon R_{min}(t)\int_M g(t)(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dM} \leq \frac{(n-1)}{n}\lambda^2,$$

o que nos fornece a tese. $\square$

Finalizaremos este trabalho calculando a segunda derivada da curva de autovalores para o caso de variação conforme da métrica.

Proposição 3.7 *Seja (M,g) uma variedade riemanniana compacta. Considere, para cada parâmetro t, o número real $\sigma(t)$ de modo que $g_t = \sigma(t)g$ é uma variação diferenciável da métrica g. Sejam $\{\phi_i(t)\} \subset C^\infty(M)$ uma família diferenciável de funções e $\lambda_i(t)$ uma família diferenciável de números reais tais que $\lambda_i(0) = \lambda$ para cada $i = 1, \ldots, m$ e, para todo t,*

$$\begin{cases} -L_{g(t)}\phi_i(t) &= \lambda_i(t)\phi_i(t) \quad \text{em } M \\ \phi_i(t) &= 0 \quad \text{em } \partial M, \end{cases}$$

onde $\langle\phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(M,\mathrm{dm}_t)} = \delta_i^j$. Se $\varphi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sigma(t)$ então:

$$\lambda_i'' = -2\varphi\int_M g(\nabla\phi_i', \nabla\phi_i)\mathrm{dm} + (2\varphi^2 - \varphi')\lambda_i - \lambda_i'\int_M (\phi_i^2)'\mathrm{dm}.$$

Demonstração: Derivando a expressão $g(t) = \sigma(t)g$ concluímos imediatamente que $H = \varphi g$ e, portanto, $h = n\varphi$ e $H' = \varphi' g$. Vamos avaliar algumas parcelas da relação (2.40). Como $dh = nd\varphi = 0$, $dh' = nd\varphi' = 0$ e $\nabla h = n\nabla\varphi = 0$, essa relação se reduzirá a

$$\lambda_i'' = -2\varphi\int_M g(\nabla\phi_i', \nabla\phi_i)\mathrm{dm} + \int_M (2H^2 - H')(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i)\mathrm{dm} - \lambda_i'\int_M (\phi_i^2)'\mathrm{dm}.$$

Mas

$$\begin{aligned} (2H^2 - H')(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i) &= 2g(H^2(\nabla\phi_i), \nabla\phi_i) - H'(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i) \\ &= 2H(H(\nabla\phi_i), \nabla\phi_i) - H'(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i) \\ &= 2\varphi g(\varphi\nabla\phi_i, \nabla\phi_i) - \varphi' g(\nabla\phi_i, \nabla\phi_i) \\ &= (2\varphi^2 - \varphi')|\nabla\phi_i|^2. \end{aligned}$$

Observando agora que $\int_M |\nabla\phi_i|^2\mathrm{dm} = \lambda_i$, obtemos a relação mencionada. $\square$

Bibliografia

[1] Bando, S.; Urakawa, H. *Generic properties of the eigenvalue of the laplacian for compact Riemannian manifolds.* Tôhoku Math. J. 35 (1983) 155-172.

[2] Barros, A.; Gomes, J.N. *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature.* J. Math. Anal. Appl. 401 (2013) 702-705.

[3] Barros, A.; Gomes, J.N.; Ribeiro, E. *A note on rigidity of the almost Ricci soliton.* Arch. der Math. 100 (2013) 481-490.

[4] Barros, A.; Ribeiro Jr, E. *Some characterizations for compact almost Ricci solitons.* Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012) 1033-1040.

[5] Besse, A. *Einstein manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2008.

[6] Berger, M. *Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes.* Compositio Math. 26 (1973) 129-149.

[7] Case, J. ; Shu, Y. ; Wei, G. *Rigity of quasi-Einstein metrics.* Diff. Geom. Appl. 29 (2011) 93-100.

[8] Cao, X.; Hou, S.; Ling, J. *Estimate and monotonicity of the first eigenvalue under the Ricci flow.* Math. Ann. 354 (2012) 451-463.

[9] Chow, B. ; Lu, P. ; Ni, L. *Hamilton's Ricci flow.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 77)

[10] Chow, B. ; Knopf, D. *The Ricci flow: an introduction.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004 (Mathematical surveys and monographs, v. 110)

[11] Delfour, M. C.; Zolesio, J.-P. *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[12] Di Cerbo, L.F. *Eigenvalues of the Laplacian under the Ricci flow.* Rendiconti di Matematica, Serie VII, 27 (2007) 183-195.

[13] Gomes, J. *Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Munidas de um campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial.* Tese de Doutorado. Fortaleza, 2012.

[14] Hamilton, R.S. *Four-manifolds with positive curvature operator.* J. Diff. Geom. 24 (1986) 153-179.

[15] Hamilton, R.S. *The Ricci flow in dimension three.* J. Diff. Geom. 17 (1982) 255-306.

[16] Hamilton, R.S. *Three-manifolds with positive Ricci curvature.* J. Diff. Geom. 17 (1982) 255-306.

[17] Hormander, L. *Linear partial differential operators.* Springer, New York 1969.

[18] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, 1980.

[19] Lichnerowicz, A. Geométrie des Groupes de Transformations. Dunod, 1958.

[20] Ma, Li ; Liu, Baiyu. *Convexity of the first eigenfuncion of the drifting laplaciand operator and its applications.* New York J. Math. 14 (2008) 393-401.

[21] Perelman, G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* arXiv:math. DG/0211159.

[22] Pigola, S., Rigoli, M., Rimoldi, M., Setti, A. *Ricci Almost Solitons*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10 (2011) 757-799.

[23] Rellich, F. *Störungstheorie der Spektralzerlegung.* Math. Ann. 118 (1940) 462-484.

[24] Soulf, A.; Ilias, S. *Domain deformations and eigenvalues of the dirichilet laplacian in a Riemannian manifold.* Illinois Journal of Mathematics, 51 (2007) 645-666.

[25] Uhlenbeck, K. *Generic Properties of Eigenfunctions.* Amer. J. of Math. 98 (1976) 1059-1078.