Universidade Federal do Amazonas
Programa de Mestrado em Matemática

Autovalores estáveis de uma família de operadores Autoadjuntos

por

Raphael da Costa Silva

Manaus-Am
Dezembro/2015

Universidade Federal do Amazonas

Programa de Mestrado em Matemática

por

Raphael da Costa Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Área de concentração: Analise.

Manaus-Am

Dezembro/2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Raphael da Costa
S586c Conjuntos de Codimensão Finita em Espaços de Banach / Raphael da Costa Silva. 2015
37 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Marcus Antonio Mendonça Marrocos
Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Autovalores estavéis. 2. Família de Operadores Auto-adjunto. 3. Variedades de Banach. 4. Estabilidade. I. Marrocos, Marcus Antonio Mendonça II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Raphael da Costa Silva

Autovalores estáveis

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Área de concentração: Analise.

Manaus, 15 de Dezembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (orientador)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Michel Pinho Rebouças (membro)

Universidade Federal do Pará - UFPA

....

Prof. Dr. João Rodrigues dos S. Júnior (membro externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Dedico este trabalho a Deus que esteve comigo durante toda esta caminhada e minha esposa que sempre me apoiou.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo privilégio de chegar ate aqui, tudo que passei durante minha vida acadêmica dedico a ele pois não conseguiria aprender assuntos tão complexos se não fosse ele me dando capacidade de raciocinar.

Em segundo lugar, agradeço a minha querida esposa e física Scarlat Silva que esteve presente na minha vida ainda na graduação e foi por causa da matemática que pude conhece-la e hoje estamos casados. Agradeço minha esposa também pela paciência em vários momentos pois houve dias que passei quase 20 horas seguidas com dedicação total a esta dissertação e ela não poupou esforços para me deixar totalmente concentrado.

Agradeço também meus pais que me fizeram sempre ir a escola e ainda quando menino me deram toda assistência para poder completar ensino fundamental e médio, pois sem o ensino básico não poderia ter chegado até aqui.

Não posso deixar de mencionar meu orientador Marcus Marrocos que foi realmente um amigo, pois se disponibilizou totalmente para me apoiar e me ajudar. O que ele fez por mim talvez nenhum outro professor faria.

Agradeço todos os professores do departamento de matemática, pois eles que realmente me fizeram aprender matemática. Mas quero mencionar o professor Nilomar Oliveira que foi o primeiro professor que me motivou a fazer o mestrado e também me motivou escolher análise. Também a professora Flávia Morgana que foi a professora que me ensinou análise.

Resumo

Sendo A(q) uma família de operadores diferenciáveis auto-adjuntos e $M(q_0)$ o auto-espaço associado a um certo autovalor λ_0 de $A(q)$, com multiplicidade n. Dissertaremos neste trabalho quais resultados podemos obter sobre o conjunto dos parâmetros de autovalores que estão próximos de λ_0 e mantém a multiplicidade fixa.
Para alcançarmos o objetivo principal deste trabalho iremos definir e usar a ideia de transversalidade, onde não deixa de ser uma extensão, para dimensões maiores, em que a imagem inversa de um valor regular forma uma superfície. Com o conceito de transversalidade podemos então definir quando um autovalor é estável.
Incluindo assim a ideia de estabilidade, será suficiente para encontrarmos um resultado muito importante e até "elegante" para o conjunto dos parâmetros que mantém autovalores próximos de λ_0 com multiplicidade fixa, onde será o teorema principal deste trabalho.

Palavras-chave: Autovalores estáveis - Família de operadores auto-adjuntos - Variedade de Banach

Abstract

Considering that $A(q)$ is a differentiable family of self-adjoint operators and that $M(q_0)$ is the eigenspace associated with a certain λ_0 eigenvalue of $A(q)$, with multiplicity n. We will discuss in the following project about which results we can obtain about the space of parameters the eigenvalue that are close to λ_0 and keep the fixed multiplicity.
In order to achieve the main objective of this project, we will define and use the transversality idea. It is an extension for higher dimensions, in which the inverse image of a regular value forms a surface. So, with the transversality idea, we can define when an eigenvalue is stable.
Including the idea of stability, we can find a very important and "elegant" result for the space of parameters that maintain eigenvalues close to λ_0 with fixed multiplicity, where it will be the main theorem of this project.

Keywords: Eigenvalues stable - Differentiable family of self-adjoint operators - Banach manifold.

Conteúdo

Introdução

Para um operador A qualquer, todos os vetores u que satisfazem $Au = \lambda u$, são chamados de autovetores de A e λ é chamado autovalor associado a u.
A importância dos estudos de autovalores e autovetores surgiu, historicamente, com o estudo das formas quadráticas, equações diferenciais e na física. Obtendo uma infinidade de aplicações, não somente na matemática e na física, mas também na economia, engenharia mecânica, finanças, entre outros. Na matemática, uma aplicação muito importante dos autovalores é a diagonalização de uma matriz.
Decorrente da definição, podemos encontrar os autovalores de um operador resolvendo a equação $det(A - \lambda I) = 0$. Logo, se tomarmos uma matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

temos que os autovalores λ da transformação associada a matriz serão as raízes da equação $(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$, onde esta equação tem como descriminante $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) \Rightarrow \Delta = (a-c)^2 + 4b^2$.
Veja que se supormos que o operador tem um autovalor com multiplicidade 2, então o descriminante teria que ser igual a zero, isto é, $(a - c)^2 + 4b^2 = 0 \Rightarrow a - c = 0$ e $4b^2 = 0 \Rightarrow a = c$ e $b = 0$.
Logo,

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Portanto, temos que o conjuntos das matriz simétrica de ordem 2 que possuem o autovalor com multiplicidade 2 forma uma subvariedade de codimensão 2 do espaço das matrizes simétrica de ordem 2.

Logo, vem algumas perguntas: que tipo de resultado vale para caso geral de matrizes de ordem n. Que tipo de estrutura podemos esperar do conjunto dos parâmetros ao qual matem os autovalores com multiplicidade fixa de operadores definidos em espaços de Hilbert. Quais hipóteses seriam imposta sobre a família dos parâmetros para obter tal resultado?

Mostraremos então que é possível que este conjuntos de parâmetros formam uma subvariedade sim, desde que mantenha uma multiplicidade fixa. No caso particular apresentado acima é uma pequena amostra de como realmente funciona e mais interessante que independe da multiplicidade. Poderia tomar de multiplicidade 1 ou qualquer outra multiplicidade desde que seja fixa.

Para nosso objetivo principal do trabalho mostraremos as condições necessárias imposta a uma família de operadores sobre um espaço de Hilbert de forma que o conjunto dos parâmetros que mantem a multiplicidade de um determinado autovalor fixado. Para isto utilizaremos a teoria de transversalidade de aplicações entre espaços de Banach.

Os principais resultados deste trabalho foram publicado originalmente em [6].

No primeiro capítulo consta as preliminares onde abordamos alguns conceitos, resultados e definições uteis para melhor compreensão do tema principal.

No capítulo 2 temos o teorema principal desta dissertação, assim como um critério que usaremos para obtermos a hipótese do teorema principal.

No terceiro e último capítulo consta uma aplicação do teorema principal a família de operadores Schrödinger.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas definições e conceitos que serão inclusos durante nosso trabalho e serão necessários para podemos alcançar o objetivo principal ao qual será a demonstração do teorema 2.2.

1.1 Análise Funcional

Definição 1.1 *Seja X um espaço métrico e sua métrica d:* $X \times X \to [0,\infty)$*, então dizemos que uma sequência* $(x_n) \subset X$ *é de Cauchy se:* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in N$*;* $n,m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n,x_m) < \epsilon$.

Definição 1.2 *Um espaço vetorial V é normado quando existe uma função* $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}^+$ *tal que:*
i) $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Assim, pode-se dizer que uma sequência $(x_n) \subset X$ *é de Cauchy quando* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in N$*;* $n,m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon$.

Definição 1.3 *Um espaço vetorial X é chamado de espaço de Banach quando:*
i) X é normado.

ii) X é completo, isto é, todas suas sequências de Cauchy convergem para algum elemento de X.

Definição 1.4 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Para todos os vetores $u, v, w \in V$ e todos os escalares $\lambda \in K$, uma função*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K} \tag{1.1}$$

com as seguintes propriedades:
Simetria:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \tag{1.2}$$

Distributividade:

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \tag{1.3}$$

Associatividade:

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \tag{1.4}$$

Positividade:

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \text{ e igual a zero se, e somente se } v = 0. \tag{1.5}$$

é chamada um produto interno.

Definição 1.5 *Um espaço vetorial X é chamado espaço de Hilbert quando for completo em relação a métrica d definida por $d(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ $\forall x, y \in X$.*

Definição 1.6 *Uma transformação linear de um espaço de Hilbert H é uma função T que associa o elemento u de um certo subespaço linear D_T de H em um elemento Tu de H da seguinte forma:*

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

2. $T(cu) = cTu$

Necessitaremos do conceito de variedade de Banach. Se um espaço topológico possui a propriedade de que todos os seus pontos são homeomorfos a um conjunto aberto de um espaço de Banach, então este espaço é uma variedade de Banach. Abaixo definiremos formalmente as condições para um conjunto ser espaço de Banach.

Definição 1.7 *Seja um conjunto χ e um atlas C^r, $r > 0$ sobre χ. Sendo U é uma coleção de pares (U_i),φ_i), $i \in I$, onde:*
i) $\bigcup U_i = \chi$ para todo $U_i \subset \chi$
ii) Cada φ_i é uma bijeção em U_i sobre um subconjunto de $\varphi_i(U_i)$ de algum espaço de Banach E_i, onde para todo i,j tem-se que $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ é um aberto de E_i.
iii) A função $\varphi_j \circ \varphi_i : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é continuamente diferenciável para todo i,j.
Neste caso χ é chamado de variedade de Banach.

Definição 1.8 *Seja V, W dois espaços vetoriais. Um operador $T : V \to W$ é ilimitado se para cada $M > 0$ $\exists$ $u \in V$ com $\|u\|_V = 1$ tem-se que $\|Tu\|_W > M\|u\|_V$.*

Definição 1.9 *Sejam H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Considere um operador linear $A : H \to H$. Podemos obter um operador A^*:$H \to H$ chamado de operador adjunto de A onde $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$*

Um operador é chamado de auto-adjunto quando $A = A^*$.

1.2 Teoria espectral de Operadores Auto-adjuntos Ilimitados

Nesta seção apresentaremos as propriedades gerais espectrais de operadores auto-adjuntos ilimitados e a referência geral utilizada para esta seção é [2].

Definição 1.10 *(Transformação adjunta) Seja T uma transformação linear definida no domínio D_T que é denso em H. Sendo v um elemento de H, de* *modo que o elemento v^* em H, satisfaz:*

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, v^* \rangle \tag{1.6}$$

para todo elemento u de H, tal que v^* depende unicamente de v, e

$$v^* = T^* v. \tag{1.7}$$

Assim dizemos que T^* é a transformação adjunta de T.

É importante observar que a adjunta de uma transformação linear é um operador fechado, ou seja, se $\{v_n\}$ é uma sequência de elemento de D_{T^*} tal que

$$v_n \to v \text{ e } T^* v_n \to u \tag{1.8}$$

o elemento v também pertence a D_{T^*}, e temos $T^* v = u$.

Definição 1.11 *(Definição de transformação simétrica) Uma transformação T é simétrica se T for linear com domínio denso em H e satisfaz*

$$T \subset T^*. \tag{1.9}$$

isto é, T^* é uma extensão da transformação T. Quando uma transformação linear que é igual a sua adjunta é chamada de auto-adjunta.

Lema 1.1 *Se*

$$L_1, L_2, L_3, ..., L_i \tag{1.10}$$

é uma sequência de subespaços do espaço de Hilbert H, onde são dois a dois ortogonais e a soma direta dos subespaços geram o espaço H todo. Se u é um elemento arbitrário de H, denotaremos a projeção de u em L_i por u_i. Seja

$$A_1, A_2, ..., A_i, ... \tag{1.11}$$

uma sequência de transformações lineares que tem a propriedade de que A_i se reduz em L_i a uma transformação auto-adjunta limitada de L_i nele mesmo. Então existe uma transformação linear A de H, geralmente não limitada, de *tal modo que se reduz em cada L_i a $A_i (i = 1, 2, ...)$. Seu domínio consiste de elementos u tal que a serie*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i u_i\|^2 \tag{1.12}$$

converge, e para este u tem-se

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} A_i u_i \tag{1.13}$$

A demonstração deste lemma pode ser encontrado em [2].

O caso de nosso interesse será quando δ contem apenas um único ponto λ_0 do espectro de A com multiplicidade finita m, pois pelo Lema isto é possivel. Assim podemos isolar uma parte do espectro em relação ao restante.

Teorema 1.1 *Seja $\{A_n\}$ uma sequência das transformações auto-adjuntas contidas em um domínio D, tal que, A_n tenda relativamente uniformemente, em D, para a transformação auto-adjunta A, de tal forma que*

$$sup \frac{\|(A_n - A)v\|}{\|v\| + \|Av\|} \to 0, quando, n \to \infty$$

(isto ocorre, em particular, se as transformações A_n são limitadas e tendem relativamente a transformação A). Então nós temos que

$$E_n(\delta) \to E(\delta) \text{ e } A_n En(\delta) \to AE(\delta) \tag{1.14}$$

converge uniformemente.

Omiteremos a demonstração mas pode ser encontrado na integra em [2].

Teorema 1.2 *Se as projeções P e Q dos subespaços U e V satisfazem a condição $\|P - Q\| < 1$. Então U pode ser mapeado linearmente e isometricamente em V. Mas precisamente a isometria é dada por*

$$\mathcal{I} = Q(I + P(Q - P)P)^{-\frac{1}{2}} P \tag{1.15}$$

A demonstração deste teorema também pode ser encontrado em [2].

1.3 Funções diferenciáveis em espaços de Banach

Definição 1.12 *Sejam X e Y espaços de Banach e $f : D \to Y$ uma função definida e $D \subseteq X$ onde x_0 é um ponto interior do domínio D. Diz-se que f é diferenciável em x_0 sempre que existe um operador linear limitado $A : X \to Y$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} \to 0$$

Chamamos a transformação A de derivada de Fréchet.

Teorema 1.3 *(Teorema da função implícita em espaços de Banach).*
Sejam X, Y, Z espaços vetoriais normados e suponha que Y é um espaço de Banach. Considere $A \subset X \times Y$ um aberto e $f : A \to Z$ uma aplicação de classe C^1, satisfazendo as seguintes condições:
i)$f(x_0, y_0) = 0$ para algum $(x_0, y_0) \in A$;
ii)$[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)]^{-1} : Z \to Y$ existe e é continua.
Então, existe uma única aplicação continua $y = \phi(x) : U \subset X \to V \subset Y$ tal que

$$f(x, \phi(x)) = 0, \ \forall x \in U \text{ e } \phi(x_0) = y_0$$

onde U e V sao vizinhanças de x_0 e y_0, respectivamente. Alem disso, ϕ é diferenciável em x_0 e

$$D\phi(x_0) = -[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \phi(x_0)). \tag{1.16}$$

A demonstração seguirá como feita em [5].

Demonstração Por simplicidade denotaremos T:=$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$
Por hipótese T é invertível, logo, podemos definir a aplicação h:A $\to$ Y por

$$h(x, y) = y - T^{-1} f(x, y)$$

Assim

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = I - T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Segue que,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = I - T^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = I - T^{-1}T = 0$$

e

$$h(x_0, y_0) = y_0 - T^{-1}.0 = y_0$$

Como $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ é continua em (x_0, y_0) segue-se que existem vizinhanças U_1 de x_0 e V de y_0 tais que se (x,y) $\in U_1 \times V$, então
$\|\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\| \leq \frac{1}{2}$
Podemos considerar, sem perda de generalidade, que V = $B_r[y_0]$, logo como $\|\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\| \leq \frac{1}{2}$ e que $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \Longrightarrow$

$$\|\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\| \leq \frac{1}{2} \ \textit{para todo}\ (x,y) \in\ U_1 \times B_r[y_0]$$

Uma vez que h é continua, existe uma vizinhança U $\subset$ U_1 de x_0 tal que para x $\in$ U, tem-se

$$\|h(x, y_0) - h(x_0, y_0)\| \leq \frac{r}{2}$$

ou ainda

$$\|h(x, y_0) - y_0\| \leq \frac{r}{2} \forall\ x \in\ U.$$

Usando a desigualdade do valor médio temos que se $y_1, y_2 \in\ V$

$$(1.17) \qquad \|h(x, y_1) - h(x, y_2)\| \leq sup\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|,$$

para todo $x \in U_1$. Fixemos agora um ponto x $\in$ U e definimos $h_x : V \to V$ por

$$h_x(y) = h(x, y)$$

Mostraremos inicialmente que a aplicação h_x está bem definida. De fato, pois
$\|h_x(y) - y_0\| = \|h_x(y) - h(x, y_0) + h(x, y_0) - y_0\|$
$\leq \|h(x,y) - h(x, y_0)\| + \|h(x, y_0) - y_0\|$
$\frac{1}{2}\|y - y_0\| + \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

Portanto, $h_x(V) \subset V$.
assim: $\|h_x(y_1) - h_x(y_2)\| = \|h(x, y_1) - h(x, y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$ para todo y_1, y_2 $\in$ V.
Portanto, h_x é uma contração e sendo o conjunto V um espaço métrico completo, concluímos pelo teorema do ponto fixo de Banach que h_x possui um único ponto fixo y = y(x).
Podemos então definir a seguinte função

$$\phi : U \to V$$

$$x \to \phi(x) = y$$

onde y é o único ponto fixo da função h_x.
Note que $h_{x_0}(y_0) = h(x_0, y_0) = y_0$ e, assim, $\phi(x_0) = y_0$, ou seja

$$f(x_0, \phi(x_0)) = f(x_0, y_0) = 0 \tag{1.18}$$

Mas geralmente, se $x \in U$

$$\phi(x) = h_x(\phi(x)) = h(x, \phi(x)) = \phi(x) - T^{-1} f(x, \phi(x)), \tag{1.19}$$

de onde segue que

$$T^{-1} f(x, \phi(x)) = 0, \tag{1.20}$$

ou ainda,

$$f(x, \phi(x)) = 0, \ \textit{para todo } x \in \ U \tag{1.21}$$

Na verdade, todas as soluções de $f(x, y) = 0$ são da forma $(x, \phi(x))$, $\forall x \in U$. Pois se $f(x, y) = 0$, então $h_x(y) = h(x, y) = y - T - 1 f(x, y) = y$, dai, $y = \phi(x)$.
Vejamos agora que ϕ é uma aplicação contínua em U. De fato, seja $x \in U$ e $\epsilon > 0$. Sendo h continua, temos que, fixado $y \in V$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in U, \|z - x\| < \delta \Rightarrow \|h(x, y) - h(x, y)\| < \epsilon/2$$

Em particular, para $y = \phi(x)$ temos

$$z \in U, \|z - x\| < \delta \Rightarrow \|h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))\| < \epsilon/2 \tag{1.22}$$

Note que usando a desigualdade triangular e 1.17, obtemos
$\|\phi(z)-\phi(x)\| = \|h_z(\phi(z)) - h_x(\phi(x))\| = \|h(z,\phi(z)) - h(x,\phi(x))\| \Rightarrow$
$\|\phi(z)-\phi(x)\| \leq \|h(z,\phi(z)) - h(z,\phi(x))\| + \|h(z,\phi(z)) - h(x,\phi(x))\| \Rightarrow$
$\|\phi(z)-\phi(x)\| \leq 1/2\|\phi(z)-\phi(x)\| + \|h(z,\phi(x)) - h(x,\phi(x))\|$.
Logo

$$1/2\|\phi(z)-\phi(x)\| \leq \|\phi(z)-\phi(x) - h(x,\phi(x))\|. \tag{1.23}$$

Portanto segue de 1.22 e 1.23 que, se $z \in U, \|z-x\| < \delta$ então

$$\|\phi(z)-\phi(x)\| \leq 2\|h(z,\phi(x)) - h(x,\phi(x))\| \leq \epsilon, \tag{1.24}$$

provando a continuidade de ϕ.

Finalmente, provaremos que ϕ é diferenciável em x_0 e vale 1.16.

Pela diferenciabilidade de f em (x_0,y_0) temos

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k = \phi(h,k),$$

onde $\frac{\|\phi(h,k)\|}{\|(h,k)\|} \to 0$ quando $\|h\| \to$ e $\|k\| \to 0$.
Seja $k = \phi(x_0+h) - \phi(x_0)$ e sendo $y_0 = \phi(x_0)$, temos

$$f(x_0+h,\phi(x_0+h)) - f(x_0,\phi(x_0)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k = \phi(h,k)$$

Mas, $f(x,\phi(x)) = 0$, dai

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k = \phi(h,k)$$

Aplicando T^{-1}, onde $T := \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, obtemos

$$-T^{-1}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)]h - k = T^{-1}\phi(h,k).$$

ou seja

$$k + T^{-1}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)]h = -T^{-1}\phi(h,k),$$

ou ainda,

$$\phi(x_0+h) - \phi(x_0) - [\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)]^{-1}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)]h = -T^{-1}\phi(h,k)$$

Portanto para prova 1.16, basta justificar que $\frac{\|T^{-1}\phi(h,k)\|}{\|h\|} \to 0$, quando $\|h\| \to 0$. Para isto, note que

$$\frac{\|T^{-1}\phi(h,k)\|}{\|h\|} = \frac{\|k\|\|T^{-1}\phi(h,k)\|}{\|k\|\|h\|} \leq \|k\|\|T^{-1}\|\|\frac{\phi(h,k)}{\|k\|\|h\|}\|.$$

Observe que se $\|h\| \to 0$, então $\|k\| \to 0$ e, consequentemente, $\frac{\|\phi(h,k)\|}{\|k\|\|h\|} \to 0$, logo,

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|T^{-1}\phi(h,k)\|}{\|h\|} = 0,$$

isto justifica a diferenciabilidade e conclui a prova do teorema.

Definição 1.13 *Seja uma aplicação $f : U \subset R^n \to R^m$, dizemos que $c \in R^m$ é um valor regular de f se a diferencial $df(q)$ é sobrejetiva para todo o $p \in f^{-1}(c)$*

Seja N^n uma variedade diferenciável de classe C^k. Dizemos que um subconjunto $M \subset N$ é uma subvariedade de classe C^k de dimensão m de N, com $0 \leq m \leq n$, se para todo $p \in U$, tem-se que $\varphi\ (U \cap M) = \varphi(U) \cap R^m$.

Corolário 1.1 *Sejam $f : M^m \to N^n$ uma aplicação C^k e $c \in N$ um valor regular de f. Então $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de classe C^k de M, com dimensão $m - n$.*

Introduziremos o conceito de transversalidade onde usamos como referência [1].

Definição 1.14 *Seja f: $M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável. Fixemos uma subvariedade $S^s \subset N^n$. Diremos que f é transversal a S num ponto $p \in f^{-1}(S)$ se:*

$$f_*(M_p) + S_q = N_q$$

Ou seja, transversalidade ocorre quando a imagem $f_*(M_p) \subset N_q$ mais o subespaço $S_q \subset N_q$ gerarem o espaço N_q.

Diremos que f é transversal a S, simplesmente, quando, para todo ponto $p \in f^{-1}(S)$, f for transversal a S no ponto p.

Teorema 1.4 *A aplicação $f : M^m \to N^n$ é transversal a S em todos os pontos de $U \cap f^{-1}(S)$ se,e somente se,0 R^{n-s} é um valor regular da aplicação:*

$$\pi.y.f : U \to R^{n-s}$$

Demonstração: Seja $p \in U\cap\ f^{-1}(S)$, onde $q = f(p)$.
Por definição, a aplicação f será transversal a S no ponto p se, e somente se, $f_*(M_p) + S_q = N_q$.
Sendo $y_* : N_q \to R_n$ um isomorfismo e $y_*(s_q) = R^s_0$ equivalentemente $(y \circ f)_*(M_p)$ $+\ R^s_0 = R^n$.
Ora, dado um subespaço vetorial $E \subset R^n$, sabemos que $\pi = R^{n-s}$, se e somente se, $E+\ R^s_0 = R^n$.
Logo, f é transversal a S no ponto p se, e somente se, $(\pi \circ y \circ f)_*(M_p) = R^{n+s}$.
Como $U\cap\ f^{-1}(S) = (\pi \circ y \circ f)^{-1}(0)$, concluímos que f é transversal a S em todos os pontos de $p \in U\cap\ f^{-1}(S)$ se, e somente se, 0 é valor regular de $(\pi \circ y \circ f)$.

Corolário 1.2 *Se $f : M^m \to N^n$ é transversal a subvariedade $S^s \subset N^n$, então $f^{-1}(S^s)$ é uma subvariedade de M^m de dimensão $m + s - n$.*

Demonstração:
De fato, pois para cada $p \in f^{-1}(S)$, onde $q = f(p)$, tomemos um sistema de coordenadas $y : V \to \mathbb{R}^n$ em $N com q \in$ V.
Escolhamos agora um aberto onde $p \in U$ tal que $f(U) \subset V$.Então $U \cap f^{-1}(S)$ $= (\pi \circ y \circ f)^{-1}(0)$, onde $0 \in R^{n-s}$ é um valor regular de $(\pi \circ y \circ f)$.
Logo tem-se que $U \cap f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de U, de dimensão $m - (n - s) = m + s - n$.
Assim, todo ponto p $\in f^{-1}(S)$ tem uma vizinhança U de M, tal que, a parte de $f^{-1}(S)$ em U é uma subvariedade de U. Lofo, $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de M.

Capítulo 2

Teorema Principal

Neste capitulo consideraremos uma família $A(q)$ de operadores auto-adjuntos definidos em um espaço de Hilbert H, em que o conjunto de parâmetros considerados será uma variedade de Banach. Estudaremos a persistência da multiplicidade dos autovalores dos operadores na família considerada. Mais precisamente, provaremos que o conjunto dos parâmetros aos quais um dado autovalor tem multiplicidade fixa possui estrutura diferenciável. Segue abaixo apenas o enunciado do teorema principal deste trabalho, logo veremos todas as definições e por fim a demonstração.

Teorema 2.1 *(Teorema Principal) Se um autovalor λ de $A(q_0)$ de multiplicidade n é estável, então o conjunto dos valores q, tais que $A(q)$ possui um autovalor próximo de λ de multiplicidade n, formam uma subvariedade em χ de codimensão $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.*

Existem na literatura algumas definições de diferenciabilidade de família de operadores lineares. Uma referência geral do assunto é o famoso livro de T. Kato, Perturbation theory for linear operators, [3]. Contudo seguiremos a abordagem conforme Teytel [6].

Definição 2.1 *Seja χ uma variedade de Banach modelada em uma espaço de Banach B. Diremos que uma família $A(q)$ é diferenciável em q_0 quando para todo $p \in B$ existe um operador linear simétrico $A^{(1)}(q_0, p)$ definido no mesmo domínio que $A(q_0)$, linear em p, tal que:*

$$A(q_0 + \epsilon p) = A(q_0) + \epsilon A^{(1)}(q_0, p) + o(\epsilon)$$

em que

$$\|A^{(1)}(q_0, p)v\|_H \leq M(\|v\|_H + \|A(q_0)v\|_H)$$

Note que $A^{(1)}(q_0, p)v$ é a derivada de Fréchet para $A(q)v$ em q_0 na direção de p. Além disso, a desigualdade acima nos diz que o operador $A(q_0, p)$ é contínuo com relação a norma do gráfico, que é definida como:

$$\|A\| = sup\frac{\|Av\|_H}{\|v\|_H + \|A(q_0)v\|_H}$$

Afim de definir estabilidade de um autovalor para um elemento da família de operadores $A(q)$ utilizaremos autoprojeções para isolar uma determinada parte finita do espectro do restante.

Seja λ_0 um autovalor de multiplicidade m para o operador $A(q_0)$. Considere o intervalo (μ_1, μ_2) de forma que λ_0 é o único autovalor de $A(q_0)$ e $M(q)$ a soma direta dos auto-espaços associados aos autovalores de $A(q)$ que pertencem a (μ_1, μ_2) conforme o teorema 1.1. Denotamos $E = E(q_0)$ e $M = M(q_0)$. Considere a aplicação $S : M \to M(q)$ definida por $S(q) = E(q)(I + E(E(q) - E)E)^{-\frac{1}{2}}E$. A proposição abaixo reune algumas propriedades importantes da aplicação $S(q)$.

Proposição 2.1 *Sejam $E = E(q_0)$ a projeção ortogonal sobre o auto-espaço $M = M(q_0)$ associado ao autovalor λ_0 do operador $A(q_0)$ e $E(q)$ a projeção ortogonal sobre $M(q)$ que é a soma dos auto-espaços associado aos autovalores de $A(q)$ no intervalo (μ_1, μ_2). Então a aplicação $S : M \to M(q)$ definida por*

$S(q) = E(q)(I + E(E(q) - E)E)^{-\frac{1}{2}}E$ *é uma isometria diferenciável em uma vizinhança de* q_0.

Demonstração: Para mostrar que S é uma isometria basta provar que a adjunta de S é a sua inversa, ou seja,

$$S^{-1} = S^*$$

Pois, com efeito,
$\langle S(q)u, S(q)v\rangle = \langle S^* S(q)u, v\rangle = \langle S^{-1}S(q)u, v\rangle = \langle I(q)u, v\rangle = \langle u, v\rangle$.

A demonstração desta proposição pode ser encontrado na integra em [2]

Conjugando o operador $A(q)$ com a isometria $S(q)$ teremos um operador $S^{-1}(q)A(q)S(q) : M \to M$ tal que seu espectro coincide com os autovalores de $A(q)$ que pertence ao intervalo (μ_1, μ_2). De fato, λ é um autovalor do operador $A(q)$ pertencente a (μ_1, μ_2) e u uma autofunção associada se, somente se existe $v \in M$ tal que $S(q)v = u$ e portanto $A(q)s(q)v = s(q)v$.

Baseado na discussão acima podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} &f : \mathcal{V}_{\lambda_0} \to L_S(M, M) \\ &q \to f(q) = S^{-1}(q)A(q)S(q) \end{aligned}$$

em que $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ é uma vizinhança de q_0 e $L_S(M, M)$ é o espaço dos operadores simétricos definidos em M.

Definição 2.2 *O autovalor* λ_0 *é estável ou satisfaz a hipótese de Arnold relativo a família* $A(q)$ *em* q_0, *quando f(q) é transversal a subvariedade* $N = \{\alpha I : \alpha \in \mathbb{R}\}$ *de* $L_S(M, M)$ *em* q_0.

Uma aplicação do teorema da transversalidade fornecerá nosso resultado principal do capítulo.

Teorema 2.2 *(Teorema Principal) Se um autovalor λ de $A(q_0)$ de multiplicidade n é estável, então o conjunto dos valores q, tais que $A(q)$ possui um autovalor próximo de λ de multiplicidade n, formam uma subvariedade em χ de codimensão $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.*

Demonstração: Por hipótese, λ é autovalor estável de $A(q_0)$. Logo, $f(q)$ é transversal a subvariedade N das aplicações múltiplas da identidade.
Como λ é autovalor de $A(q)$, então λ é autovalor de $f(q) = S^{-1}A(q)S(q)$.
Agora definamos o conjunto $U = \{\mathrm{q} \in \mathrm{M};\ f(q) = S^{-1}A(q)S(q) \in N\}$. Note que este é o conjunto de todos os parâmetros q em $\mathcal{V}_\lambda$ tais que existe apenas um autovalor com multiplicidade m do operador $A(q)$ no intervalor (μ_1, μ_2). Temos assim que $\mathrm{U} = f^{-1}(N)$. Sabemos que f é diferenciável em relação ao parâmetro q e é transversal a subvariedade N, então o resultado segue do corolário 1.2. Seguindo assim que $U = f^{-1}(N) \subset \mathcal{V}_\lambda$ é uma subvariedade de M.

2.0.1 Critério de transversalidade

Nesta seção estabeleceremos uma condição suficiente para a estabilidade de um autovalor para $A(q)$. Em verdade, teremos um critério prático para verificar a estabilidade de um autovalor.

Sejam λ_0 um autovalor de multiplicidade $m > 1$ do operador $A(q_0)$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ conjunto ortonormal de autofunções associadas. Definimos as seguintes aplicações

$$f_{kl}(q) = \langle v_k, f(q)v_l \rangle.$$

Podemos ver claramente que tais funções são diferenciáveis. Além disso, para $p \in T_{q_0}\chi$,

$$\frac{d}{dq} f_{kl}(q_0)p = \langle v_k, A^{(1)}(q_0, p)v_l \rangle.$$

De fato, primeiramente note que

$$\frac{d}{dq} S^{-1}(q_0, p) = -\frac{d}{dq} S(q_0, p)$$

então, para qualquer autofunção v associada a λ_0 temos

$$\frac{d}{dq}(S^{-1}(q)A(q)S(q)v) =$$
$$\frac{d}{dq}S^{-1}(q_0,p)A(q)v + EA(q_0)\frac{d}{dq}S(q_0,p)v + EA^{(1)}(q_0,p)v$$

observando que $\frac{d}{dq}S(q_0,p)v$ segue

$$\frac{d}{dq}(S^{-1}(q)A(q)S(q)v) = EA^{(1)}(q_0,p)v.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq}f_{kl}(q_0)p &= \langle v_k, \frac{d}{dq}f(q)v_l\rangle \\ &= \langle v_k, EA^{(1)}(q_0,p)v_l\rangle \\ &= \langle v_k, A^{(1)}(q_0,p)v_l\rangle \end{aligned}$$

Proposição 2.2 *Um autovalor* λ_0 *é um autovalor estável para o operador* $A(q_0)$ *se os funcionais* $f'_{lk}(p) = \langle A^{(1)}(q_0,p)v_l, v_k\rangle$ *são linearmente independentes em* $T_{q_0}\chi$.

Demonstração: Pela definição 2.2, iremos mostrar que f é tranversal a N em q_0, ou seja:

$$Im[A^{(1)}(q_0,.)] + N = L_S(M,M)$$

Sabemos que A' e αI são operadores simétricos, logo temos que $A'(q_0,p) + \alpha I$ é simetrico, resultando que $A'(q_0,p) + \alpha I \in L(M,M)$.
Lembre: $A^{(1)}(q_0,p)$ é uma transformação linear com q_0 fixo e p variando com $p \in T_{q_0}\chi$ com $A^{(1)}(q_0,p) : M \to M$

Fixemos então uma base ortogonal $\{v_j\}$ para M.
Veja que $\langle A^{(1)}(q_0,p)v_l, v_k\rangle$ são os componentes da matriz simétrica:

$$EA^{(1)}(q_0,p)E = \begin{bmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \dots & f'_{1n} \\ f'_{12} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{1n} & f'_{2n} & \dots & f'_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Veja que a matriz é simétrica e são $\frac{n(n+1)}{2}$ funções linearmente independentes, logo tais funcionais geram um espaço vetorial de dimensão $(n+1)/2$, como a dimensão de $L_S(M, M)$ é a mesma segue do teorema do isomorfismo entre espaços vetorias que $Im[A^{(1)}(q_0, .)] = L_S(M, M)$.

Oberseve que o argumento acima demonstra um resultado ligeiramente mais forte. De fato, se os funciobnais $f'_{lk}(q_0)$ saõ linearmente independentes, então, pelo Teorema da Função Implícita, o conjunto dos parâmetros q em $\mathcal{V}_\lambda$ tais que o número λ_0 é autovalor formam uma subvariedade em χ. Em particular isso mostra que é possível perturbar o operador $A(q)$ mantendo um autovalor $fixo$.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Operador de Schrödinger com potencial simétrico

Nesta seção analisaremos a persistência dos autovalores do operador de Schordinger com relação a perturbações suaves do potêncial. Para isso utilizaremos o teorema 2.2 demonstrado no capítulo anterior.

Considere o operador Laplaciano bidimensional definido por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Estaremos interessados aqui no problema de autovalor dado por

$$(3.1) \qquad \begin{cases} (-\Delta + q)u = \lambda u, \text{em}\, B \\ u = 0, \text{ em}\, \partial B. \end{cases}$$

onde B = $\{$(x,y) $\in R^2; x^2 + y^2 \leq 1$ $\}$ e $q = q(x,y) \in C^1(B)$.

Para estudar a persistência dos autovalores consideraremos a seguinte família de operadores auto-adjuntos

$$A(q)u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + q(x,y)u$$

tendo como domínio o espaço $H^2 \cap H_0^1(B) \subset L^2(B)$, ou seja

$$A(q) : H^2 \cap H_0^1(B) \to L^2(B)$$

definida no espaço de Hilbert $L^2(B)$.

As propriedades espectrais do operador $A(q)$ estão resumidas no teorema a seguir que será demonstrado na próxima seção deste capítulo.

Teorema 3.1 *Os autovalores do problema 3.1 são todos reais e formam uma sequência $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ em que os números se repetem de acordo com as multiplicidades e $lim \lambda_k = \infty$. Além disso, existe uma base $\{u_k\}$ ortonormal de $L^2(B)$ formadas por autofunções para o problema 3.1 associadas ao autovalor λ_k; $u_k \in H^2 \cap H_0^1(B)$.*

O conjunto de parâmetros $C^1(B)$ é um espaço de Banach com a norma do sup:

$$\|q\|_{C^1} = sup|q| + sup|\frac{\partial q}{\partial x}| + sup|\frac{\partial q}{\partial y}|$$

Provaremos o teorema 2.2 para a família de operadores definida acima.

Vamos obter o operador $A^{(1)}(q_0, p)$ calculando a derivada de Gateaux da familia de operadores A(q) ao longo da curva $q(t) = q_0 + pt$.
De fato,

$$A(q(t))u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + (q_0(x, y) + tp(x, y))u$$

logo $A^{(1)}(q_0, p)u = \dfrac{\partial}{\partial t_{t=0}} A(q(t))u = p(x, y)u$.
Para garantirmos a diferenciabilidade da família $A(q)$ basta mostrar que $A^{(1)}(q_0, p)$ satisfaz

$$\|A^{(1)}(q_0, p)u\|_{L^2(B)} \leq M(\|u\|_{L^2(B)} + \|A(q_0)u\|_{L^2(B)})$$

Veja que
$\|A^{(1)}(q_0,p)u\|_{L^2(B)} = \|pu\|_{L^2(B)} = (\int_B |pu|^2dx)^{\frac{1}{2}} \leq sup|p|\|u\|_{L^2(b)} \leq .$
$\leq sup|p|(\|u\|_{L^2(b)} + \|A(q_0)u\|_{L^2(b)})$
Assim sendo $M = sup|p|$. Concluímos que $\|A^{(1)}(q_0,p)u\|_{L^2(B)} \leq M(\|u\|_{L^2(B)} + \|A(q_0)u\|_{L^2(B)})$
Alem disso, temos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\|o(\epsilon)u\|_{L^2(B)}}{(\|u\|_{L^2(B)} + \|A(q_0)u\|_{L^2(B)})} = 0$$

De fato,
$o(\epsilon) = A(q_0 + \epsilon p) - A(q_0) - \epsilon A^{(1)}(q_0,p)$
$o(\epsilon) = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + (q_0 + \epsilon p)(x,y)u + (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - q_0(x,y)u - \epsilon p(x,y)u$
$o(\epsilon) = 0$ Seguido assim a igualdade do limite tendendo a zero.
Portanto, mostramos que a família $A(q)$ é diferenciável.

Agora sejam λ_0 um autovalor de $A(q_0)$ com multiplicidade $m = 2$ e uma base ortonormal $\{u_j\}$ fixada para o auto-espaço associado. Vamos mostrar que os funcionais $f'_{lk} = \langle A^{(1)}(q_0,p)u_l, u_k\rangle$ que são os componentes da matriz simétrica

$$A^{(1)}(q_0,p) = \begin{bmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{12} & f'_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

são linearmente independentes. Para isto veja que

$$\begin{aligned} f'_{11}(p) &= \langle A^{(1)}(q_0,p)u_1, u_1\rangle = \langle pu_1, u_1\rangle = \int_B pu_1^2 d\mu \\ f'_{12}(p) &= \langle A^{(1)}(q_0,p)u_1, u_2\rangle = \langle pu_1, u_2\rangle = \int_B pu_1u_2 d\mu \\ f'_{22}(p) &= \langle A^{(1)}(q_0,p)u_2, u_2\rangle = \langle pu_2, u_2\rangle = \int_B pu_2^2 d\mu \end{aligned}$$

Assim, para

$$\alpha f'_{11}(p) + \beta f'_{12}(p) + \gamma f'_{22}(p) \;=\; 0 \;\forall p \in C^1(B)$$

Substituindo as expressões de $f'_{11}, f'_{12}, f'_{22}$ temos

$$\alpha \int_B p u_1^2 d\mu + \beta \int_B p u_1 u_2 d\mu + \gamma \int_B p u_2^2 d\mu = 0$$
$$\int_B p(\alpha u_1^2 + \beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2) d\mu = 0$$

Logo $\alpha u_1^2 + \beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2 = 0$. Note que a equação acima é uma forma quadrática que denotaremos por $Q(u_1, u_2) = \alpha u_1^2 + \beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2$. Pelo teorema de Sylvester, podemos fazer uma substituição de variáveis onde $Q(u_1, u_2) = c_1 w_1^2 + c_1 w_2^2$ em que c_1 e c_2 assumi os valores ± 1. Note que como u_1 e u_2 são linearmente independentes as autofunções w_1 e w_2 também são.
Como $Q(u_1, u_2) = Q(w_1, w_2)$ e $Q(u_1, u_2) = 0 \Rightarrow c_1 w_1^2 + c_1 w_2^2 = 0$.
Assim, se c_1 e c_2 tiverem o mesmo sinal $\Rightarrow w_1^2 + w_2^2 = 0 \Rightarrow w_1^2 = w_2^2 = 0$, teremos um absurdo pois w_1 e w_2 são combinações lineares de u_1 e u_2, onde u_1 e u_2 são L.I's. Se c_1 e c_2 tiverem sinais opostos $\Rightarrow w_1^2 - w_2^2 = 0 \Rightarrow (w_1 - w_2)(w_1 + w_2) = 0$.
Logo $w_1 - w_2 = 0$ ou $w_1 + w_2 = 0$ em algum aberto de B.
O lema abaixo mostra que se uma autofunção se anula em um aberto do domínio, então deve ser identicamente nula em toda região onde está definida.

Lema 3.1 *Qualquer auto-função não-nula não pode se anular em um aberto da bola B.*

Demonstração: Suponhamos que uma auto função seja seja identicamente nula em um aberto U da bola B. O principio do máximo garante que a auto-função seria identicamente nula em todo o domínio,assim contrariando a hipótese.

Assim, $(w_1 - w_2) = 0$ em B ou $(w_1 + w_2) = 0$ em B o que não pode ocorrer já que as autofunções w_1 e w_2 são linearmente independentes. Como são linearmente independentes as autofunções u_1 e u_2 .

Com isso, os funcionais $\{f'_{11}, f'_{12}, f'_{22}\}$ são L.I's. Logo,pela proposição 2.2, temos que λ_0 é um autovalor estável com multiplicidade $m = 2$.

Temos assim, verificado todas as hipóteses do teorema 2.2 para família

$$A(q) = -\Delta u + q(x, y)$$

logo, o conjunto dos autovalores próximos de λ_0 com multiplicidade 2 formam uma subvariedade de codimensão 2.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Autovalores de um operador Elíptico

Nesta seção apresentaremos, de forma resumida, a teoria espectral para operador Laplaciano. A exposição será feita tal como em [4].
Seja um operador Elíptico L na sua forma divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + qu$$

onde $a^{ij} \in C^{\infty}(\overline{U})$ $(i, j = 1, ..., n)$
Vamos considerar a equação com condição de fronteira de Dirichlet abaixo:

$$\begin{cases} Lu = f \,\text{em}\, U \\ u = 0 \,\text{em}\, \partial U, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $f \in L^2(U)$.

Definição 4.1 *Considere:*

1. *A forma bilinear associada ao operador elíptico acima definida por:*

   $$B[u, v] = \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + quvdx \tag{4.2}$$

2. *Nós dizemos que uma função $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca para a equação 4.1 se*

   $$B[u, v] = (f, v) \tag{4.3}$$

onde $v \in H_0^1(U)$ e $(\cdot,\cdot)$ representa o produto em $L^2(U)$.

Apresentaremos a seguir o Teorema de Lax-Milgran cuja a principal finalidade é garantir a existe da solução fraca para a equação 4.1.

Teorema 4.1 *(Teorema de Lax-Milgran)*
Assuma que

$$B : H \times H \to R$$

é uma forma bilinear, para qual existem as constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que
(i)$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \ \|v\| (u, v \in H)$
(ii)$\beta \|u\|^2 \leq B[u,v] \ (u \in H)$
Finalmente, se $f : H \to R$ é uma funcional linear continuo em H.
Então existe um único elemento $u \in H$ tal que

$$B[u,v] = (f,v) \ \forall \ v \in H \tag{4.4}$$

O próximo resultado mostra que a forma bilinear associada ao operador L satisfaz as hipótese do Teorema de Lax-Milgram.

Teorema 4.2 *Existem as constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tal que*
(i)$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$
e
(ii)$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$
Para todo $u, v \in H_0^1(U)$.

Do teorema 4.2 seguirá o teorema de existência de soluções fracas.

Teorema 4.3 *(Primeiro teorema de existência de soluções fracas)*
Existe $\gamma \geq 0$ tal que para cada $\mu \geq \gamma$ e cada função $f \in L^2(U)$ existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(U)$ para

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f \text{ em } U \\ u = 0 \ \text{ em } \partial U, \end{cases} \tag{4.5}$$

O teorema a seguir é uma aplicação da teoria de Fredholm para operadores compactos ao operador L.

Definição 4.2 *(i)O operador L^*, a forma adjunta de L, é*

$$(4.6) \qquad L^*v := -\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b^i v_{x_i} + (c - \sum_{i=1}^{n} b^i_{x_i})v_j$$

previsto que $b^i \in C^1(\overline{U})$ $(i = 1, ..., n)$.
(ii) A forma bilenar adjunta

$$(4.7) \qquad B^* : H_0^1 \times H_0^1(U) \to R$$

é definida por

$$(4.8) \qquad B^*[v, u] := B[u, v]$$

Para todo $u, v \in H_0^1(U)$.
(ii)Dizemos que $v \in H_0^1(U)$ é solução adjunta fraca do problema

$$(4.9) \qquad \begin{cases} L^*v = f \text{ em } U \\ v = 0 \text{ em } \partial U, \end{cases}$$

munido $B^*[v, u] = (f, u)$ para todo $u \in H_0^1(U)$.

Teorema 4.4 *(Segundo teorema de existência de soluções fracas)*
(i)Precisamente uma das seguintes afirmacões:
ou

$$(4.10) \qquad \begin{cases} \text{para cada } f \in L^2(U) \\ \text{existe uma única solução fraca } u \text{ do problema} \\ (\alpha) \begin{cases} Lu = f \text{ em } U \\ u = 0 \text{ em } \partial U \end{cases} \end{cases}$$

senão

$$(4.11) \qquad \begin{cases} \text{existe uma única solução fraca} u \not\equiv 0 \text{do problema homogêneo} \\ (\beta) \begin{cases} Lu = 0 \text{ em } U \\ u = 0 \text{ em } \partial U \end{cases} \end{cases}$$

(ii)Alem disso, se a afirmação 4.11 é verdadeira, então dimensão do subespaço $N \subset H_0^1(U)$ da solução fraca de (β) é finita e igual a dimensão do subespaço $N^* \subset H_0^1(U)$ da solução fraca de

$$\begin{cases} L^*v = 0 \; em \; U \\ v = 0 \;\; em \;\; \partial U, \end{cases} \tag{4.12}$$

(iii) Finalmente, o problema com condição de bordo do problema (α) tem solução fraca se, e somente se

$$(f, v) = 0 \; para \; todo \; v \in N^*. \tag{4.13}$$

A dicotomia 4.10 e 4.11 é a alternativa de Fredholm.

Como o operador L é simétrico, a forma bilinear associada $B[,]$ também é simétrica, ou seja, $B[u, v] = B[v, u]$. Finalizaremos a seção apresentando as propriedade espectrais do operador L.

Teorema 4.5 *(Autovalores de um operador Elíptico)*
i)Cada autovalor de L é real.
ii)Alem disto, se reparticionarmos cada autovalor de acordo com sua multiplicidade, teremos que

$$\sum \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$$

onde $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ e $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$
iii)Existe uma base ortonormal $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(U)$, onde $w_k \in H_0^1(U)$ é a autofunção associada a λ_k, que satisfaz

$$Lw_k = \lambda_k w_k \; emU$$

$$w_k = 0 \; em \; \partial U$$

para k=1,2,...
Lembre-se que $w_k \in C^\infty(U) e w_k \in C^\infty(\overline{U})$ quando ∂U é suave.

Bibliografia

[1] Elon Lages Lima *Introdução à Topologia Diferencial* Pág. 106 - 109.

[2] Frigyes Riesz, Béla Sz.-Nagy *Functional Analysis*Courier Corporation, 1990. pg. 58 - 350.

[3] Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1980 pg. 142 - 157.

[4] Lawrence C. Evans*Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*, 2010 Volume: 19 pg 333 - 339.

[5] Mendes, A. F.*O teorema da função implícita em espaços de Banach* Campo Grande,2014 pg. 30 - 33.

[6] Teytel, M. *How rare are multiple eigenvalues*. Comm. Pure Appl. Math., Vol. LII, pp. 0917-0934, 1999.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586c Silva, Raphael da Costa
Conjuntos de Codimensão Finita em Espaços de Banach / Raphael da Costa Silva. 2015
37 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Marcus Antonio Mendonça Marrocos
Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Autovalores estavéis. 2. Família de Operadores Auto-adjunto. 3. Variedades de Banach. 4. Estabilidade. I. Marrocos, Marcus Antonio Mendonça II. Universidade Federal do Amazonas III. Título