UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM TEOREMA DE SOBREJETIVIDADE PARA OPERADORES MONÓTONOS MAXIMAIS

Ezequiel dos Santos Brasil

MANAUS - 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ezequiel dos Santos Brasil

UM TEOREMA DE SOBREJETIVIDADE PARA OPERADORES MONÓTONOS MAXIMAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Profa. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

MANAUS - 2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Brasil, Ezequiel dos Santos
B823u Um Teorema de Sobrejetividade para Operadores Monótonos Maximais / Ezequiel dos Santos Brasil. 2016
67 f.: il. color; 31 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
Dissertação (Mestrado em Matemática - Otimização) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Operador Monótono Maximal. 2. Função Conjugada. 3. Função Fitzpatrick. 4. Teorema de Sobrejetividade. I. Jacinto, Profa. Dra. Flávia Morgana de Oliveira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

EZEQUIEL DOS SANTOS BRASIL

UM TEOREMA DE SOBREJETIVIDADE PARA OPERADORES MONÓTONOS MAXIMAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Matemática Aplicada.

Aprovado por:

BANCA EXAMINADORA

....

Profª Draª Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
Universidade Federal do Amazonas – UFAM
Orientadora

....

Prof. Dr. Roberto Cristovão Mesquita Silva
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

....

Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos
Universidade Federal do Piauí – UFPI

Agradecimentos

Acima de tudo, agradeço a Deus pela oportunidade de ter participado deste programa de pós-graduação.

Agradeço a minha esposa pelo apoio e incentivo constantes durante essa jornada de estudos.

Agradeço a meus familiares por todo apoio recebido.

Agradeço, em especial, a minha orientadora, Profa. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto, pela dedicação e profissionalismo dispensados a minha formação, sobretudo, pelo apoio e compreensão constantes.

Agradeço aos Professores Roberto Cristóvão e Sandro Bitar por todo conhecimento e apoio recebidos.

Finalmente, agradeço a todos os colegas do mestrado pela relação de respeito mútuo e companheirismo, em especial, aos da Otimização, Osenildo e Daniele, e ao grande amigo Abraão.

A minha amada esposa Keila Brasil e aos meus queridos filhos Isabele Brasil e Tiago Brasil.

Resumo

Neste trabalho, foi desenvolvido um Teorema de Sobrejetividade para operadores monótonos maximais baseado nas propriedades da função Fitzpatrick, bem como as aplicações decorrentes do respectivo Teorema. Também foi abordada a definição da função Fitzpatrick, cujas propriedades foram evidenciadas, especialmente, por meio de exemplos. Continuando, foi provado um teorema que garante a maximalidade do subdiferencial de uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente. Sobretudo, foram abordados alguns elementos da análise convexa e, principalmente, da teoria de conjugação na análise convexa que fundamentaram os resultados apresentados neste trabalho.

Palavras-Chave: Operador monótono maximal, função conjugada, função Fitzpatrick e Teorema de Sobrejetividade.

Abstract

In this work, was developed a Surjectivity theorem for maximal monotone operators based on the properties of Fitzpatrick function, as well as the applications arising due to this Theorem. Was also discussed the definition of the function Fitzpatrick, whose properties have been evidenced, specially, through examples. Continuing, was proved a theorem which guarantees the maximality of the subdiferencial of a lower semi-continuous proper convex function. Above all, were discussed some elements of convex analysis and mainly of the conjugacy theory in convex analysis that supported the results presented in this work.

Key Words: Maximal monotone operator, conjugate function, Fitzpatrick function and Surjectivity Theorem.

Sumário

Notações

$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto de dualidade no $\mathbb{R}^n$.
S^{-1}	Esfera unitária.
δ_C	Função indicadora do conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$.
δ_C^*	Função suporte do conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$.
C_∞	Cone recessão do conjunto C.
$L_{f,D}(r)$	Conjunto de nível da função f no conjunto D no nível r.
$\mathcal{N}_D(u)$	Cone normal do conjunto D no ponto u.
$\operatorname{dom} f$	Domínio efetivo da função f.
E_f	Epígrafo da função f.
$\nabla f(u)$	Gradiente da função f no ponto u.
$\partial f(u)$	Subdiferencial da função f em u.
f^*	Função conjugada da função f.
f^{**}	Função biconjugada da função f.
$f_\infty^{'}$	Função recessão da função f.
$\Gamma(u)$	Supremo de uma coleção de funções afins no ponto $u \in \mathbb{R}^n$.
$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	Operador ponto-conjunto do $\mathbb{R}^n$ no conjunto das partes do $\mathbb{R}^n$.
φ_T	Função Fitzpatrick do Operador T.

Introdução

Esta dissertação teve por finalidade apresentar um Teorema de Sobrejetividade relativo à soma de operadores monótonos maximais e suas aplicações que foram obtidos por Martínez-Legaz em [12] para um espaço de Banach reflexivo qualquer. Destaca-se que o objetivo principal foi abordar os resultados acima citados em um espaço de dimensão finita, mais especificamente o $\mathbb{R}^n$, desta forma, em alguns casos, foram produzidas novas provas com ideias mais simples, contudo interessantes.

Salienta-se que a demonstração do Teorema de Sobrejetividade foi embasada nas propriedades da função Fitzpatrick que foi introduzida por Simon Fitzpatrick no ano de 1988, em [7], com o intuito de representar convexamente o subdiferencial de uma função convexa e própria.

A abordagem acerca da sobrejetividade de operadores foi introduzida por Minty em [15] para espaços de Hilbert, no ano 1962, o qual provou que se $T : H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ é um operador monótono maximal, então $(I + T)$ é sobrejetivo. Em 1970, Rockafellar estendeu esse resultado para espaços de Banach reflexivos em [18], onde substituiu o operador identidade I pela aplicação de dualidade J. Em 2004, Simons e Zalinescu forneceram em [19] uma nova prova baseada na função Fitzpatrick para a extensão de Rockafellar. Finalmente, em 2008, Martínez-Legaz generalizou a nova prova para a extensão de Rockafellar substituindo J por um operador monótono maximal qualquer cuja função Fitzpatrick possui seus valores finitos.

No Capítulo 1, serão abordados alguns elementos de Topologia no Espaço Euclidiano e de Análise Convexa e, em seguida, serão apresentadas algumas definições e propriedades referentes à classe de operadores monótonos maximais.

No Capítulo 2, será introduzida a noção de função estendida e a teoria de conjugação na análise convexa. Destaca-se que a familiaridade com os conceitos e exemplos apresentados neste capítulo tornará a compreensão dos demais capítulos mais eficiente.

O Capítulo 3 será iniciado com a prova que o subdiferencial de uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente é, de fato, um operador monótono maximal; posteriormente, será abordada a definição e propriedades da função Fitzpatrick, sobretudo, dando ênfase a exemplos onde a ideia principal é apresentar a função Fitzpatrick como mais um exemplo de função convexa estendida associada a operadores monótonos maximais.

No Capítulo 4, será feita a prova do Teorema de Sobrejetividade com uma versão ajustada para o $\mathbb{R}^n$. Esse Teorema evidencia como a função Fitzpatrick funciona como ferramenta para caracterizar operadores monótonos maximais. Em seguida, serão abordadas e provadas as aplicações decorrentes do respectivo Teorema, especialmente, utilizando-se das propriedades que são válidas para o $\mathbb{R}^n$.

No capítulo 5, serão feitas as considerações finais e a indicação de trabalhos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é provido de definições e propriedades gerais que fundamentarão as afirmações utilizadas neste trabalho. Sempre que oportuno, as propriedades essenciais serão bastante exemplificadas.

1.1 Topologia no espaço Euclidiano

Esta seção tratará de elementos de Topologia no espaço Euclidiano. O objetivo é abordar os conceitos primordiais à compreensão das provas que serão apresentadas nos próximos capítulos. A maioria dos conceitos podem ser encontrados em [11, Cap. 1].

Visando desenvolver as teorias abordadas de uma forma simples e exemplificável, o ambiente de trabalho será o $\mathbb{R}^n$. Por definição, todo espaço de Banach de dimensão finita n é reflexivo e a dimensão do dual e do bidual é também n, portanto, $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^{**}$.

Seja $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação de dualidade definida em [3, Cap. 1, pág. 4] por

$$J(x) := \{x^* \in \mathbb{R}^n; \langle x, x^* \rangle = \|x\|\|x^*\|, \|x\| = \|x^*\|\}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Observação 1.1. *Afirma-se que a aplicação J é o operador identidade I no $\mathbb{R}^n$* (ver [4, pág. 133])*. De fato, seja $y \in \mathbb{R}^n$ fixo, porém arbitrário. Se $y = 0$, então de* (1.1) *segue-se que $J(0) = 0 = I(0)$. Agora, suponha $y \neq 0$. Assim, das definições de J e de* *produto interno, obtém-se*

$$\frac{\langle y, J(y)\rangle}{\|y\| \cdot \|J(y)\|} = \frac{\|y\| \cdot \|y^*\|}{\|y\| \cdot \|y^*\|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = 1,$$

onde θ é o ângulo entre y e $J(y)$. Logo, $\theta = 0^o$, ou seja, y e y^* tem o mesmo sentido, direção e norma. Desta forma, segue-se que $y = y^*$ o que implica $J(y) = y^* = y$. Com efeito, $J(y) = y = I(y)$ e, visto que y foi fixado arbitrariamente, tem-se que $J(y) = I(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O valor que essa aplicação assume no número k é indicado por x^k e chama-se o *k-ésimo termo* da sequência.

Uma subsequência $\{x^{k_j}\}$ de $\{x^k\}$ é a restrição da sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}' = \{k_1, k_2, ..., k_i, ...;\ k_i < k_{i+1}\ \forall i\}$.

Diz-se que a sequência $\{x^k\}$ é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado em $\mathbb{R}^n$, ou seja, quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x^k\| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\epsilon > 0$, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $\|x^k - a\| < \epsilon$, o que representa-se por

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x^k = a.$$

Quando existe o limite acima, diz-se que a sequência $\{x^k\}$ é convergente.

Teorema 1.1 ([11, Cap. 1, pág. 17] **Bolzano-Weierstrass**). *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Seja um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ é ponto interior de X se, e somente se, é centro de uma bola aberta contida em X. Ou seja, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a;\epsilon) \subset X$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto quando todos os seus pontos são interiores; ou seja, para todo $x \in X$, existe um $\epsilon_x > 0$ tal que $B(a;\epsilon_x) \subset X$.

Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto dos pontos interiores de X, int$X$, é um conjunto aberto. Logo, um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, $Y = $ int$Y$.

Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ chama-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando o mesmo é limite de uma sequência $\{x^k\} \subset X$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se fechado quando contém todos os seus pontos aderentes, ou seja, para toda sequência $\{x^k\} \subset X$ tal que $\{x^k\} \longrightarrow a$ quando $(k \longrightarrow \infty)$, tem-se que $a \in X$.

Diz-se que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando ele for limitado e fechado. Assim, por exemplo, são compactas todas as esferas e bolas fechadas do espaço Euclidiano, enquanto que o espaço $\mathbb{R}^n$ inteiro não é compacto.

Em virtude do Teorema de Bolzano-Weierstrass, um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência $\{x^k\} \subset K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

A seguir, serão abordadas algumas propriedades de semicontinuidade de uma função que serão úteis ao desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.1 ([10, Cap. 3, pág. 14] **Função semicontínua inferiormente**). *Diz-se que a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente no ponto $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ quando para qualquer sequência $\{x^k\} \subset X$ tal que $\{x^k\} \longrightarrow x$ quando $(k \longrightarrow \infty)$, tem-se que*

$$f(x) \leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} f(x^k).$$

Definição 1.2 ([10, Cap. 3, pág. 14] **Função semicontínua superiormente**). *Diz-se que a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente no ponto $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ quando para qualquer sequência $\{x^k\} \subset X$ tal que $\{x^k\} \longrightarrow x$ quando $(k \longrightarrow \infty)$, tem-se que*

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} f(x^k) \leq f(x).$$

Daqui em diante, será usada a forma curta f é s.c.i. no lugar de f é semicontínua inferiormente.

Proposição 1.2 ([8, Cap. A, pág. 75]). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *f é s.c.i.;*

(2) *O epígrafo da função $E_f := \{(x, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ f(x) \leq c\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, para todo $c \in \mathbb{R}^n$;*

(3) *Os conjuntos de níveis da função $L_{f,\mathbb{R}^n}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq r\}$ são fechados para todo $r \in \mathbb{R}$.*

A seguir, serão abordadas as propriedades de coercividade e supercoercividade de uma função. Destaca-se que as hipóteses de coercividade e semicontinuidade inferior atribuídas à função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ garantem a existência de um minimizador global para um problema de minimização sob condições menos restritivas.

Definição 1.3 ([8, Cap. E, pág. 219] **Função coerciva**). *Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita coerciva quando*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Definição 1.4 ([8, Cap. E, pág. 219] **Função supercoerciva**). *Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita supercoerciva quando*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Exemplo 1.1. *Um exemplo de uma função que é claramente coerciva, mas não é supercoerciva é a função norma $\|\cdot\|$. Com efeito,*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \frac{\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Exemplo 1.2. *Um exemplo de uma função supercoerciva que é claramente coerciva é a função $f(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2$. De fato,*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}\|x\|^2}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2}\|x\| = +\infty.$$

É imediato verificar que supercoercividade implica em coercividade de uma função, entretanto os Exemplos 1.1 e 1.2 mostram que a recíproca não é verdadeira.

O Teorema seguinte relaciona a coercividade com a compacidade dos conjuntos de nível de uma função s.c.i..

Teorema 1.3. *Seja a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s.c.i.. Então todos os conjuntos de nível da f são compactos no $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, f é coerciva.*

Prova. Suponha que todos os conjuntos de nível da f são compactos. Agora, suponha f não coerciva, isto é, existem uma sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$ tais que $\|x^k\| \longrightarrow +\infty$ e

$$\lim_{\|x^k\| \longrightarrow +\infty} f(x^k) \leq r.$$

Tomando o conjunto de nível da f no $\mathbb{R}^n$ em r, obtém-se que $\{x^k\} \subset L_{f,\ \mathbb{R}^n}(r)$. Como $\{x^k\}$ é uma sequência ilimitada, segue-se que o conjunto $L_{f,\ \mathbb{R}^n}(r)$ é ilimitado. Logo, o conjunto $L_{f,\ \mathbb{R}^n}(r)$ não é compacto. Contradição, portanto f é coerciva quando todos os conjuntos de nível são compactos no $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, suponha f coerciva. Agora, suponha que para algum $\bar{r}$ o conjunto de nível $L_{f,\ \mathbb{R}^n}(\bar{r})$ é ilimitado, isto é, existe uma sequência $\{x^k\} \subset L_{f,\ \mathbb{R}^n}(\bar{r})$ tal que $\|x^k\| \longrightarrow +\infty$ quando $(k \longrightarrow +\infty)$. Assim,

$$f(x^k) \leq \bar{r}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que implica,

$$\lim_{\|x^k\| \longrightarrow +\infty} f(x^k) \leq \bar{r}.$$

Ou seja, f é não coerciva, contradição. Portanto, todos os conjuntos de nível da f são compactos quando f é coerciva. ■

1.2 Elementos da Análise Convexa

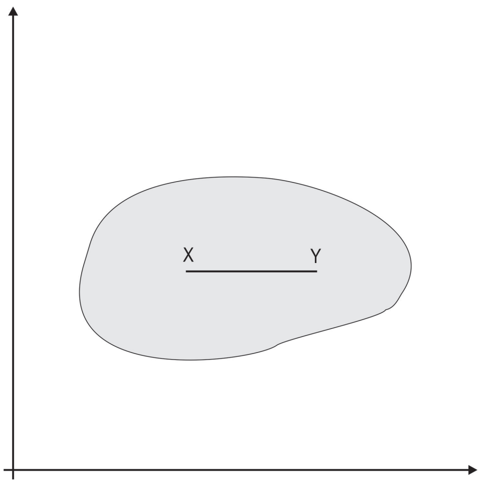
Nesta seção, serão introduzidos alguns elementos da Teoria de Análise Convexa que servirão como ferramentas para a prova de resultados.

Por definição, um conjunto convexo caracteriza-se por conter quaisquer segmentos de reta de extremos pertencentes a esse conjunto.

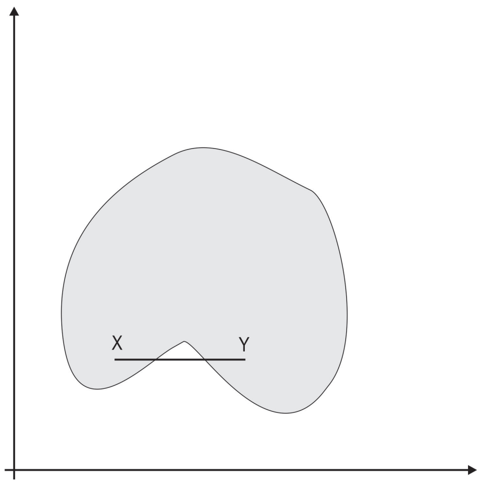
Definição 1.5 ([10, Cap. 3, pág. 69] **Conjunto convexo**). *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto convexo se para quaisquer $x, y \in D$ e $\beta \in [0,1]$, tem-se que $\beta x + (1-\beta)y \in D$.*

O ponto $\beta x + (1-\beta)y$ no qual $\beta \in [0,1]$ se chama combinação convexa de x e y (com parâmetro β).

O Conjunto vazio, o espaço $\mathbb{R}^n$ e o conjunto unitário são trivialmente convexos.



(a) Conjunto convexo



(b) Conjunto não-convexo

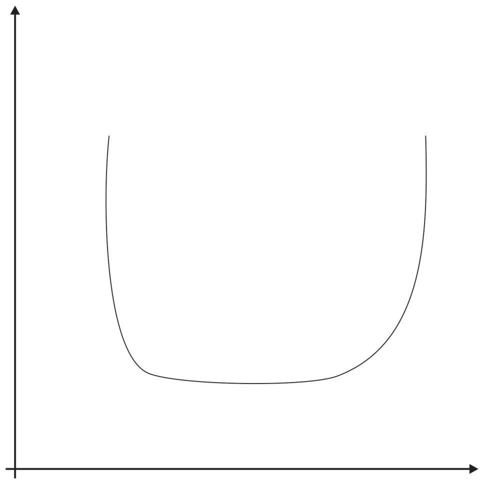
Exemplo 1.3. *Toda bola é convexa no $\mathbb{R}^n$. Para ilustrar, será mostrado que a bola fechada $B[0;c] := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq c\}$ é convexa. De fato, sejam $x, y \in B[0;c]$, então $\|x\| \leq c$ e $\|y\| \leq c$. Assim, para todo $\beta \in [0,1]$, tem-se $\|\beta x + (1-\beta)y\| \leq \|\beta x\| + \|(1-\beta)y\| = \beta\|x\| + (1-\beta)\|y\| \leq \beta c + (1-\beta)c = c$. Logo, $\beta x + (1-\beta)y \in B[0;c]$, para todo $\beta \in [0,1]$.*

Uma função convexa f no $\mathbb{R}^n$ é caracterizada por conter todos os seus hiperplanos suportes abaixo do gráfico da f.

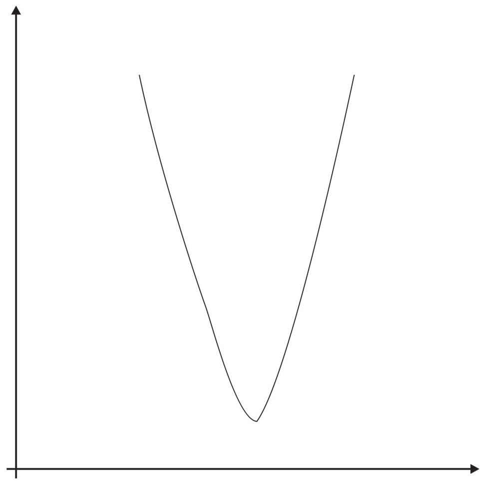
Definição 1.6 ([10, Cap. 3, pág. 77] **Função convexa**). *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, diz-se que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa em D quando para quaisquer $x, y \in D$ e $\beta \in [0,1]$, tem-se que*

$$f(\beta x + (1-\beta)y) \leq \beta f(x) + (1-\beta)f(y).$$

A função f diz-se estritamente convexa quando a desigualdade anterior é estrita para todos os $x \neq y$ e $\beta \in (0,1)$.



(c) Função convexa



(d) Função estritamente convexa

O próximo Teorema aborda a relevância do problema de minimização convexa.

Teorema 1.4 ([10, Cap. 3, Pág. 79] **Teorema de minimização convexa**). *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa em X.*

Então todo minimizador local do problema convexo é global. Além disso, o conjunto de minimizadores é convexo.

Se f é estritamente convexa, não pode haver mais de um minimizador.

Definição 1.7 ([10, Cap. 3, Pág. 80] **Função Côncava**). *Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, dizemos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função côncava em X, quando a função $(-f)$ é convexa em X.*

A seguir, serão abordadas algumas propriedades do cone recessão de um conjunto convexo e fechado e da função recessão de uma função convexa e s.c.i..

Definição 1.8 ([8, Cap. A, pág. 39] **Cone Recessão**). *Seja C um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ não vazio. O cone recessão (ou cone assintótico) do conjunto C é dado por*

$$C_\infty := \{d \in \mathbb{R}^n;\ x + td \in C,\ \forall x \in C,\ \forall t > 0\}.$$

Quando o conjunto C for convexo e fechado então o cone recessão C_∞ será convexo e fechado.

Proposição 1.5 ([8, Cap. A, pág. 39]). *Um conjunto convexo e fechado C é compacto se, e somente se, o cone recessão $C_\infty = \{0\}$.*

Proposição 1.6 ([8, Cap. A, pág. 40]). *Se $\{C_j\}_{j\in J}$ é uma família de conjuntos convexos e fechados contendo um ponto em comum, então*

$$\left(\bigcap_{j\in J} C_j\right)_\infty = \bigcap_{j\in J} (C_j)_\infty .$$

Proposição 1.7 ([8, Cap. B, pág. 106] **Função recessão**). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e s.c.i.. Então, o cone recessão $(E_f)_\infty = \{(d,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; (x_0, r_0) + t(d,p) \in E_f,\ \forall\ t > 0\}$ é o epígrafo da função recessão f'_∞ que é convexa e s.c.i., definida por*

$$f'_\infty(d) := \sup_{t>0} \frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t}, \tag{1.2}$$

para quaisquer $d, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.8 ([8, Cap. B, pág. 107]). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e s.c.i.. Então, todos os conjuntos de nível não-vazios da f tem o mesmo cone recessão o qual é o conjunto de nível da f'_∞ no nível 0, isto é, para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $L_{f,\mathbb{R}^n}(r) \neq \emptyset$,*

$$[L_{f,\mathbb{R}^n}(r)]_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n;\ f'_\infty(d) \leq 0\}.$$

Em particular, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *Existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $L_{f,\mathbb{R}^n}(r)$ é não-vazio e compacto;*

(2) *Todos os conjuntos de nível da f são compactos;*

(3) *$f'_\infty(d) > 0$ para todo $d \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.*

Outra noção bastante aplicada na Análise Convexa é a de cone normal.

Definição 1.9 ([10, Cap. 3, pág. 75] **Cone normal**). *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $\bar{x} \in D$. O cone normal (cone de direções normais) no ponto $\bar{x}$ em relação ao conjunto D é dado por*

$$\mathcal{N}_D(\bar{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n; \langle d, x - \bar{x}\rangle \leq 0 \ \forall x \in D\}.$$

O próximo teorema garante que uma função convexa é localmente Lipschitziana e contínua no interior do seu domínio, destaca-se que essas propriedades são essenciais para problemas de otimização.

Teorema 1.9 ([10, Cap. 3, pág. 147] **Continuidade de funções convexas**). *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa em D. Então f é localmente Lipschitz-contínua em D. Em particular, f é contínua em D.*

Os seguintes conceitos de subgradiente e subdiferencial são fundamentais para a análise convexa.

Definição 1.10 ([10, Cap. 3, pág. 175] **O subgradiente de função convexa**). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Diz-se que $y \in \mathbb{R}^n$ é um subgradiente de f no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ se*

$$f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x\rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto de todos os subgradientes de uma função f em x chama-se **subdiferencial de f em x** e denota-se por

$$\partial f(x) := \{y \in \mathbb{R}^n; f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x\rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.3}$$

O próximo teorema versa sobre algumas caracterizações do subdiferencial de uma função convexa no $\mathbb{R}^n$, onde será apresentada uma demonstração diferente da feita por Izmailov e Solodov.

Teorema 1.10 ([10, Cap. 3, pág. 176] **Propriedades do subdiferencial**). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, o conjunto $\partial f(x)$ é convexo e compacto para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Prova. Inicialmente, será mostrado que $\partial f(x)$ é convexo. Sejam $y^1, y^2 \in \partial f(x)$. De fato, para todo $\beta \in [0,1]$,

$$\beta f(z) \geq \beta(f(x) + \langle y^1, z - y\rangle), \ \forall z \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

$$(1-\beta)f(z) \geq (1-\beta)(f(x) + \langle y^2, z - y\rangle), \ \forall z \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

Fazendo a soma de (1.4) com (1.5), resulta-se

$$f(z) \geq f(x) + \langle \beta y^1 + (1-\beta)y^2, z - y\rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, $\beta y^1 + (1-\beta)y^2 \in \partial f(x)$ para todo $\beta \in [0,1]$. Portanto, o conjunto $\partial f(x)$ é convexo.

Agora, será mostrado que $\partial f(x)$ é fechado. Seja uma sequência $\{y^k\} \subset \partial f(x)$ convergente, tal que $\{y^k\} \longrightarrow \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Com efeito,

$$f(z) \geq f(x) + \langle y^k, z - x\rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Tomando o limite em (1.6) com $(k \longrightarrow +\infty)$, obtém-se

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} f(z) \geq \lim_{k \longrightarrow +\infty} (f(x) + \left\langle y^k, z - x\right\rangle), \ \forall z \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

O que implica,

$$f(z) \geq f(x) + \left\langle \lim_{k \longrightarrow +\infty} y^k, z - x\right\rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese, $\lim_{k \longrightarrow +\infty} y^k = \bar{y}$. Logo,

$$f(z) \geq f(x) + \langle \bar{y}, z - x\rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, $\bar{y} \in \partial f(x)$. Portanto, $\partial f(x)$ é fechado no $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, será mostrado que o conjunto $\partial f(x)$ é limitado para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha que para algum $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ o conjunto $\partial f(\bar{x})$ é ilimitado, isto é, existe uma sequência $\{x^k\} \subset \partial f(\bar{x})$ tal que $\|x^k\| \longrightarrow +\infty$ quando $(k \longrightarrow +\infty)$. Por definição de subdiferencial, tem-se que

$$f(z) \geq f(\bar{x}) + \langle x^k, z - \bar{x} \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Fazendo $\dfrac{x^k}{\|x^k\|} = y^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, implica que $\{y^k\} \subset S^{-1}$. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 1.1) e, passando a uma subsequência, se necessário, $\{y^k\} \longrightarrow \bar{y} \in S^{-1}$ quando $(k \longrightarrow +\infty)$. Assim, de (1.7) obtém-se que

$$f(z) \geq f(\bar{x}) + \|x^k\| \langle y^k, z - \bar{x} \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Agora, fazendo $z = \bar{x} + \bar{y}$ e tomando o limite em (1.8) quando $(k \longrightarrow +\infty)$, obtém-se

$$f(\bar{x} + \bar{y}) - f(\bar{x}) \geq \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left\| x^k \right\| .$$

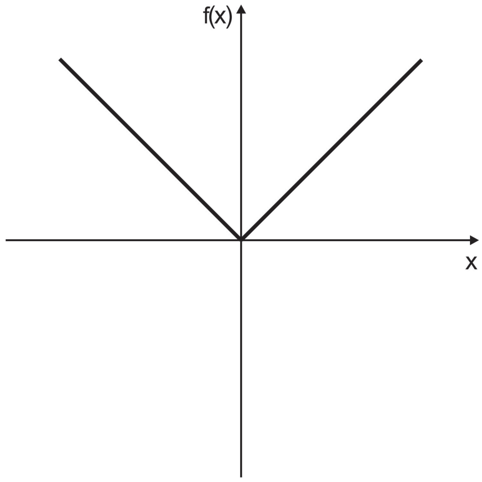
Ou seja, $f(\bar{x} + \bar{y}) - f(\bar{x}) \geq +\infty$, absurdo. Logo, o subdiferencial $\partial f(x)$ é limitado para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, o subdiferencial de uma função convexa é um conjunto convexo e compacto no $\mathbb{R}^n$. ■

A proposição seguinte assegura que o subdiferencial de uma função convexa em um ponto onde ela é diferenciável contém apenas o gradiente da função nesse ponto.

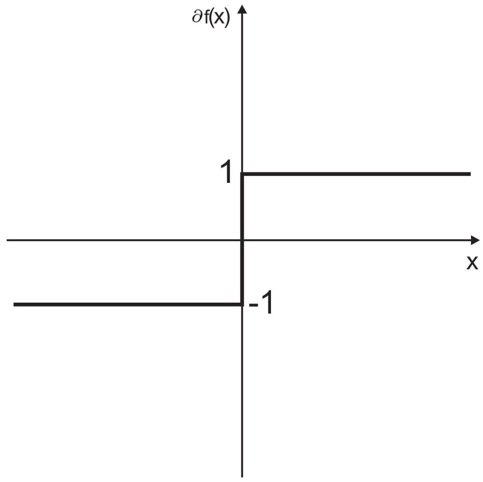
Proposição 1.11 ([10, Cap. 3, pág. 179])**.** *Uma função convexa $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.*

Abaixo é ilustrada a função valor absoluto e o seu subdiferencial.

Exemplo 1.4. *Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, será obtido o subdiferencial da f. Pela* Proposição 1.11*, tem-se que para $x > 0$, $\partial f(x) = \{1\}$ e para $x < 0$,*



(e) Gráfico da função valor absoluto



(f) Gráfico do subdiferencial da função valor absoluto

$\partial f(x) = \{-1\}$. *Agora, para* $x = 0$, *da definição de subgradiente dada em* (1.3)

$$|z| \geq y \cdot z, \ \ \forall z \in \mathbb{R}.$$

Assim, se $z \geq 0$, *então* $y \leq 1$ *e se* $z < 0$, *então* $y \geq -1$. *Isto é,* $\partial f(0) = [-1, 1]$. *Portanto, o subdiferencial da função valor absoluto é dado por*

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, \text{ se } x > 0 \\ [-1, 1], \text{ se } x = 0 \\ \{-1\}, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

Por conseguinte, o subdiferencial da função valor absoluto é um dos principais motivadores para o estudo dos operadores ponto-conjunto, cuja definição e algumas propriedades serão abordadas na próxima seção.

1.3 Operadores Monótonos Maximais

Nesta seção, serão apresentadas algumas propriedades básicas da classe de operadores monótonos maximais.

Uma aplicação T é denominada um operador ponto-conjunto quando associa a cada ponto do $\mathbb{R}^n$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, ou seja, $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, no qual $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é definido como o conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$.

Um exemplo de um operador ponto-conjunto que será bastante utilizado neste trabalho é o subdiferencial de uma função convexa não diferenciável.

A seguir, serão elencadas algumas definições referentes a um operador ponto-conjunto T que podem ser encontradas em [2, pág. 184]:

O domínio do operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$\mathrm{Dom}(T) := \{x \in \mathbb{R}^n ; T(x) \neq \emptyset\}.$$

A imagem do operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\mathrm{Im}(T) := \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(T)} T(x).$$

O gráfico do operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$\mathrm{Gr}(T) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; y \in T(x)\}.$$

Um operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é sobrejetivo se para todo $y \in \mathbb{R}^n$ existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \in T(x)$.

Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ chama-se zero do operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ quando

$$0 \in T(x).$$

Observação 1.2. *O problema de encontrar zeros de operadores generaliza o problema clássico de minimização convexa, ou seja, um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ é o minimizador de uma função convexa f no $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $0 \in \partial f(y)$. De fato, $y \in \mathbb{R}^n$ é o minimizador global da f no $\mathbb{R}^n \iff f(z) \geq f(y)$ para todo $z \in \mathbb{R}^n \iff f(z) \geq f(y) + \langle 0, z - y\rangle$ para todo $z \in \mathbb{R}^n \iff 0 \in \partial f(y)$.*

Definição 1.11 ([5, pág. 299] **Monotonicidade de Operadores**)**.** *Um operador*

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é monótono quando para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in T(x)$ e $v \in T(y)$, tem-se

$$\langle x - y, u - v \rangle \geq 0.$$

A seguir, serão apresentados dois exemplos de operadores monótonos.

Exemplo 1.5. *Considere o operador identidade $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*
Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tais que $x \in I(x)$ e $y \in I(y)$. Assim,

$$\langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 \geq 0.$$

Portanto, o operador I é monótono.

Exemplo 1.6. *Considere o operador $\bar{B} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Definido por*

$$\bar{B}(x) := \begin{cases} \{x^2\}, \text{ se } x \geq 0 \\ \{-x^2\}, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

Sejam $x, y \geq 0$, então para $x^2 \in \bar{B}(x)$ e $y^2 \in \bar{B}(y)$ vale,

$$(x - y) \cdot (x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (x - y) \cdot (x + y) = (x - y)^2 \cdot (x + y) \geq 0.$$

Sejam $x, y < 0$, e para $-x^2 \in \bar{B}(x)$ e $-y^2 \in \bar{B}(y)$, tem-se

$$(x - y) \cdot (y^2 - x^2) = (x - y) \cdot (y - x) \cdot (y + x) = -(x - y)^2 \cdot (x + y) \geq 0.$$

Agora, sejam $x \geq 0$ e $y < 0$, então para $x^2 \in \bar{B}(x)$ e $-y^2 \in \bar{B}(y)$. Note que:

i) Se $(x - y) \cdot (x^2 + y^2)$, então $(x - y) > 0$ e $(x^2 + y^2) > 0$, o que implica

$$(x - y) \cdot (x^2 + y^2) > 0.$$

ii) Se $(y-x)\cdot(-y^2-x^2)$*, então* $(y-x)<0$ *e* $(-y^2-x^2)<0$*, resultando em*

$$(y-x)\cdot(-y^2-x^2)>0.$$

Portanto, o operador $\bar{B}$ *é monótono.*

Definição 1.12. *Um operador* $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *é estritamente monótono quando para* $x,y\in\mathbb{R}^n$ *e para* $u\in T(x), v\in T(y)$*, com* $x\neq y$*, tem-se*

$$\langle x-y, u-v\rangle > 0.$$

A seguir, será abordada a maximalidade de operadores que é uma propriedade de extrema relevância no campo de operadores monótonos.

Definição 1.13 ([5, pág. 299] **Maximalidade de Operadores**). *Um operador monótono* $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *é maximal quando não existe um outro operador monótono* $T^{'}$ *tal que o* $\mathrm{Gr}(T)$ *esteja propriamente contido no* $\mathrm{Gr}(T^{'})$*.*

Exemplo 1.7. *Seja o operador identidade* $I:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *que é monótono (ver* Exemplo 1.5)*. A seguir, será verificado que este operador também é maximal. Para tanto, seja o operador* V *definido por*

$$V(x) := \begin{cases} \{\bar{x}, a\}, & \text{se } x=\bar{x} \\ \{x\}, & \text{se } x\neq\bar{x} \end{cases}$$

onde $a\in\mathbb{R}^n$ *é qualquer e fixo. Nota-se que* $\mathrm{Gr}(I)\subset\mathrm{Gr}(V)$*, entretanto, será mostrado que* V *é não monótono.*

Sejam $x,\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ *tais que* $x\in V(x)$*,* $a\in V(\bar{x})$ *e o cosseno do ângulo* θ *entre os vetores* $(x-\bar{x})$ *e* $(x-a)$ *é* $\cos\theta<0$*. Assim, obtém-se*

$$\langle x-\bar{x}, x-a\rangle < 0.$$

Logo, V *é não monótono. Portanto,* I *é um operador monótono maximal.*

Exemplo 1.8. *Seja o operador* $\bar{B} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *monótono definido no* Exemplo 1.6. *Em seguida, será verificado que* $\bar{B}$ *é maximal. Para tal, seja o operador* $\tilde{B}$ *definido por*

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} \{\bar{x}^2, 0\}, \text{ se } x = \bar{x} > 0 \\ \bar{B}(x), \text{ se } x \neq \bar{x} \end{cases}$$

Observa-se que $\mathrm{Gr}(\bar{B}) \subset \mathrm{Gr}(\tilde{B})$, *porém, será mostrado que* $\tilde{B}$ *é não monótono. Sejam* $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *tais que* $\bar{x} > x > 0$, $x^2 \in \tilde{B}(x)$ *e* $0 \in \tilde{B}(\bar{x})$. *Assim, tem-se*

$$(x - \bar{x}) \cdot (x^2 - 0) = (x - \bar{x}) \cdot x^2 < 0.$$

Logo, o operador $\tilde{B}$ *é não monótono. Portanto, o operador* $\bar{B}$ *é monótono maximal.*

As proposições abaixo abordam propriedades importantes a respeito da teoria de operadores monótonos maximais. A primeira será apenas enunciada e a segunda será enunciada e desenvolvida a sua prova, face a sua relevância para o desenvolvimento deste trabalho.

Proposição 1.12 ([4, Cap. 4, pág. 126] **Convexidade de Operadores Monótonos Maximais).** *Se* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *é monótono maximal, então* $T(x)$ *é convexo para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.13. [9, Cap. 4, pág. 9] *Se* $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} y^k = \bar{y}$, $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} z^k = \bar{z}$, T *é monótono maximal e* $\{y^k\} \in T(z^n)$, *então* $\bar{y} \in T(\bar{z})$.

Prova. Defina o operador $T^{'} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ por

$$T'(z) = \begin{cases} T(z), \text{ se } z \neq \bar{z} \\ T(\bar{z}) \cup \{\bar{y}\}, \text{ se } z = \bar{z} \end{cases}$$

Inicialmente, será mostrado que o operador $T^{'}$ é monótono, isto é, para quaisquer $z, z^{'} \in \mathbb{R}^n$, $y \in T^{'}(z)$ e $y^{'} \in T^{'}(z^{'})$ vale

$$\langle z - z^{'}, y - y^{'} \rangle \geq 0.$$

Suponha $\bar{z} = z'$. De fato, se $z \neq \bar{z}$ então a monotonicidade de T' segue da monotonicidade de T. Agora, se $z = \bar{z}$, então há dois casos a considerar. Primeiro, para pontos em $T(\bar{z})$, a monotonicidade de T' segue da monotonicidade de T. Segundo, considerando $\{\bar{y}\}$, tem-se que

$$\langle z - \bar{z}, y - \bar{y}\rangle = 0, \text{ pois } z = \bar{z}.$$

Logo, segue-se que T' é monótono. Agora, da monotonicidade de T, tem-se

$$\langle z - z^k, y - y^k\rangle \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in T(z), \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Tomando o limite em (1.9) quando ($k \longrightarrow +\infty$),

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} (\langle z - z^k, y - y^k\rangle) \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in T(z).$$

Pela continuidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, segue-se

$$\left\langle z - \lim_{k \longrightarrow +\infty} z^k, y - \lim_{k \longrightarrow +\infty} y^k \right\rangle \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in T(z).$$

Assim, por hipótese,

$$\langle z - \bar{z}, y - \bar{y}\rangle \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in T(z).$$

Considerando que o operador T' é monótono e que, por definição, $T(x) \subset T'(x)$ para todo x, segue-se que $T = T'$, pela Definição 3.3. Em particular, $T(\bar{z}) = T'(\bar{z}) = T(\bar{z}) \cup \{\bar{y}\}$, isto é, $\bar{y} \in T(\bar{z})$. Portanto, todo operador monótono maximal T é uma aplicação fechada. ∎

Capítulo 2

Conjugação em Análise Convexa

Neste capítulo, serão abordadas algumas noções de Conjugação de funções em Análise Convexa que serão de extrema importância teórica e prática para o desenvolvimento dos principais resultados apresentados neste trabalho. Inicialmente, será introduzida a definição de função estendida com um exemplo significativo.

2.1 Função Estendida

Uma função convexa f diz-se estendida quando a mesma pode atingir valores $+\infty$, ou seja, para algum $x \in \mathbb{R}^n$ pode-se ter $f(x) = +\infty$. Tais funções serão representadas por $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Como consequência, tem-se que o domínio efetivo de uma função estendida é definido em [17, pág. 23] por

$$\text{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < +\infty\}.$$

Definição 2.1 ([17, Cap. 1, pág. 24])**.** *Uma função convexa estendida* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *é própria quando o* $\text{dom} f \neq \emptyset$*. Quando a função convexa estendida* f *não é própria diz-se que é imprópria.*

A seguir, serão abordadas algumas propriedades da função indicadora de um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ que é um exemplo significativo de função estendida.

Definição 2.2 ([20, Cap. 5, pág. 64] **Função indicadora**). *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$, então a função indicadora de C é a função*

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0, \text{ se } x \in C \\ +\infty, \text{ se } x \notin C \end{cases}$$

Abaixo, será apresentada uma caracterização importante da função indicadora.

Proposição 2.1 ([20, Cap. 5, pág. 64]). *Seja $\delta_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, onde $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, a função indicadora δ_C é convexa se, e somente se, C é um conjunto convexo.*

Prova. Suponha que δ_C seja uma função convexa, mas C não convexo, isto é, existem $x, y \in C$ e $\bar{\beta} \in [0,1]$, tais que $\bar{\beta}x + (1-\bar{\beta})y \notin C$. Por definição, $\delta_C(x) = 0$, $\delta_C(y) = 0$ e $\delta_C(\bar{\beta}x + (1-\bar{\beta})y) = +\infty$. Assim,

$$\delta_C(\bar{\beta}x + (1-\bar{\beta})y) = +\infty > 0 = \bar{\beta}\delta_C(x) + (1-\bar{\beta})\delta_C(y).$$

Contradição, pois δ_C não seria convexa. Portanto, C é um conjunto convexo.

Reciprocamente, suponha C um conjunto convexo. Pela convexidade de C e para quaisquer $x, y \in C$ e $\beta \in [0,1]$, tem-se que $\beta x + (1-\beta)y \in C$. Assim,

$$\delta_C(\beta x + (1-\beta)y) = 0 = \beta\delta_C(x) + (1-\beta)\delta_C(y) = 0.$$

Suponha que $x \in C$, $y \in \mathbb{R}^n \backslash C$ e $\beta x + (1-\beta)y \in C$. Desta forma, para todo $\beta \in [0,1]$,

$$\delta_C(\beta x + (1-\beta)y) = 0 < +\infty = \beta\delta_C(x) + (1-\beta)\delta_C(y).$$

Agora, suponha que $x \in C$, $y \in \mathbb{R}^n \backslash C$ e $\beta x + (1-\beta)y \in \mathbb{R}^n \backslash C$. Assim, para todo $\beta \in [0,1]$,

$$\delta_C(\beta x + (1-\beta)y) = +\infty = \beta\delta_C(x) + (1-\beta)\delta_C(y) = +\infty.$$

Portando, δ_C é uma função convexa.

■

Continuando, destaca-se que a definição de semicontinuidade inferior de uma função estendida é equivalente à dada na Definição 1.1 para uma função real (ver [4, pág. 60]).

O próximo resultado apresenta uma caracterização relevante da função indicadora.

Proposição 2.2 ([20, Cap. 5, pág. 64])**.** *Seja $\delta_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, onde $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, a função indicadora δ_C é s.c.i. se, e somente se, C é um conjunto fechado.*

O próximo resultado abordará uma caracterização do subdiferencial da função indicadora de um conjunto não vazio, convexo e fechado.

Proposição 2.3 ([4, Cap. 3, pág. 77] **Subdiferencial da função indicadora**)**.** *Seja $\delta_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ a função indicadora do conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se C é um conjunto não vazio, convexo e fechado, então*

$$\partial\delta_C(x) = \begin{cases} \{x^* \in \mathbb{R}^n; \langle y - x, x^* \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C\}, \text{ se } x \in C \\ \emptyset, \text{ se } x \notin C \end{cases}$$

Isto é, $\partial\delta_C(x) = \mathcal{N}_C(x)$.

Prova. Como δ_C é uma função convexa, segue-se que

$$\partial\delta_C(x) := \{x^* \in \mathbb{R}^n;\ \delta_C(y) \geq \delta_C(x) + \langle x^*, y - x\rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2.1}$$

Note que para $x \notin C$, tem-se que

$$\delta_C(y) \geq +\infty + \langle x^*, y - x\rangle.$$

Logo, se $y \in C$ tem-se um absurdo e, neste caso, implica $\partial\delta_C(x) = \emptyset$.

Agora, para $x \in C$, obtém-se que

$$\delta_C(y) \geq \langle x^*, y - x\rangle.$$

Observe que para $y \notin C$ a desigualdade em (2.1) é satisfeita e, particularmente, para $y \in C$ segue-se que

$$0 \geq \langle x^*, y - x \rangle.$$

Portanto, da análise acima e da definição de Cone Normal, tem-se $\partial \delta_C(x) = \mathcal{N}_C(x)$.

■

Considerando que serão utilizadas as propriedades de soma e de supremo de funções convexas e s.c.i.s estendidas, em seguida, serão apresentados os demais resultados.

Proposição 2.4 ([4, Cap. 3, páginas 62 e 68]). *Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funções convexas e s.c.i.s para todo $i \in I$, onde I é um conjunto de índices arbitrário. Então, vale:*

(1) *$f_i + f_j$ é uma função convexa e s.c.i., para quaisquer $i, j \in I$;*

(2) *$\sup\limits_{i \in I} f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é uma função é, convexa e s.c.i..*

A definição abaixo aborda uma representação convexa e s.c.i. de uma função genérica g, a qual denota-se por $\overline{\text{conv}}g$. Onde, $\overline{\text{conv}}g$ é o fecho da envoltória convexa da função g, representando a maior função convexa e s.c.i. que minora a função g.

Definição 2.3 ([20, Cap. 5, pág. 64]). *Sejam uma função $g : W \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ e um conjunto não vazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\overline{\text{conv}}g := \sup_{\substack{h : W \longrightarrow \bar{R},\, h \leq g \\ h \text{ é convexa e s.c.i.}}} h$$

Observação 2.1. *Destaca-se que se g é uma função convexa e s.c.i., então $g = \overline{\text{conv}}g$.*

2.2 Função Conjugada

Nesta, serão abordados os conceitos da função conjugada (ou função dual) necessários ao desenvolvimento dos demais capítulos. Considerando que esta função, em contextos mais gerais, é definida em espaços duais de espaços de Banach, será adotada a notação x^* para pontos onde a função conjugada estiver definida.

Definição 2.4 ([20, Cap. 6, pág. 84] **Função Conjugada**). *A conjugada da função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é a função $f^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dada por*

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}, \ \forall x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 2.1. *Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. A seguir, será obtida a conjugada f^* da função f. De fato, $f^*(x^*) = \sup_{x \in R}\{x \cdot x^* - |x|\}$ para todo $x^* \in \mathbb{R}$. Observe que para $x \geq 0$, segue-se que $x \cdot x^* - |x| = (x^* - 1)x$. Assim, se $x^* \leq 1$, então $\sup_{x \in R}(x^* - 1)x = 0$ e se $x^* > 1$, então $\sup_{x \in R}(x^* - 1)x = +\infty$. Agora, note que para $x < 0$, tem-se que $x \cdot x^* - |x| = (x^* + 1)x$. Desta forma, se $x^* \geq -1$, então $\sup_{x \in R}(x^* + 1)x = 0$ e se $x^* < -1$, então $\sup_{x \in R}(x^* + 1)x = +\infty$. Portanto, a função conjugada de $f(x) = |x|$ é dada por*

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 0, \text{ se } |x^*| \leq 1 \\ +\infty, \text{ se } |x^*| > 1. \end{cases}$$

Continuando, será mostrada uma particularidade da função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ na Teoria de Conjugação em Análise Convexa (ver [20, pág. 86]). Antes, serão introduzidas a norma definida para espaços duais em [3, pág. 3] e algumas considerações.

$$\|x^*\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| = 1.}} |\langle x, x^* \rangle| \tag{2.2}$$

Por definição, todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado por um vetor unitário, isto é, a cada x pode ser associado um vetor $\bar{x}$ tal que $\|\bar{x}\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|$. Assim, vale que $x = \beta\bar{x}$ e $\|\bar{x}\| = 1$, onde $\beta \geq 0$. Desta forma, pela Definição 2.4 e para todo $x^* \in \mathbb{R}^n$, segue-se que a conjugada da f é

$$
\begin{aligned}
f^*(x^*) &= \sup_{\beta\geq 0}\sup_{\|x\|=\beta}\left\{\langle x, x^*\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2\right\}\\
&= \sup_{\beta\geq 0}\left\{\sup_{\|x\|=\beta}\langle x, x^*\rangle - \frac{1}{2}\beta^2\right\}\\
&= \sup_{\beta\geq 0}\left\{\sup_{\|\beta\bar{x}\|=\beta}\langle \beta\bar{x}, x^*\rangle - \frac{1}{2}\beta^2\right\}\\
&= \sup_{\beta\geq 0}\left\{\beta\sup_{\|\bar{x}\|=1}\langle \bar{x}, x^*\rangle - \frac{1}{2}\beta^2\right\}
\end{aligned}
$$

Agora, de (2.2), obtém-se

$$
\begin{aligned}
f^*(x^*) &= \sup_{\beta\geq 0}\left\{\beta\|x^*\| - \frac{1}{2}\beta^2\right\}\\
&= \|x^*\|\cdot\|x^*\| - \frac{1}{2}\|x^*\|^2\\
&= \|x^*\|^2 - \frac{1}{2}\|x^*\|^2\\
&= \frac{1}{2}\|x^*\|^2
\end{aligned}
$$

Logo, pela Observação 1.1, tem-se que

$$
f^*(x^*) = \frac{1}{2}\|x^*\|^2 = \frac{1}{2}\|J(x)\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 = f(x). \tag{2.3}
$$

A seguir, será apresentado um teorema que caracteriza as funções conjugadas.

Teorema 2.5 ([3, Cap. 1, pág. 11])**.** *Seja a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, com* $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$*. Então, a função f^* é convexa, própria e s.c.i..*

Uma consequência imediata da definição de conjugada (Definição 2.4) é:

$$
f^*(x^*) \geq \langle x, x^*\rangle - f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall x^* \in \mathbb{R}^n.
$$

O que é equivalente a

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall x^* \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

que é conhecida como ***Desigualdade de Fenchel*** (ver [20, pág. 87]).

O próximo teorema estabelece critérios para que ocorra a igualdade em (2.4) que será denominada, de agora em diante, por ***Igualdade de Fenchel***, onde as funções f e f^* são finitas.

Teorema 2.6 ([20, Cap. 6, pág. 87]). *Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa e $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto onde $f(x) < +\infty$. Então $x^* \in \partial f(x)$ se, e somente se, $f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - f(x)$.*

Prova. Suponha $x^* \in \partial f(x)$, por definição de subdiferencial,

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

E usando que $f(x) < +\infty$, pode-se reescrever a desigualdade acima do seguinte modo

$$\langle z, x^* \rangle - f(z) \leq \langle x, x^* \rangle - f(x), \ \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Tomando o supremo na desigualdade (2.5), obtém-se

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{\langle z, x^* \rangle - f(z)\} \leq \langle x, x^* \rangle - f(x). \tag{2.6}$$

Assim, usando a definição de conjugada (Definição 2.4) em (2.6), segue-se que

$$f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle. \tag{2.7}$$

Logo, de (2.4) e de (2.7), tem-se que $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$, sempre que $x^* \in \partial f(x)$.

Reciprocamente, suponha $f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - f(x)$. De (2.4), segue-se que $f^*(x^*) \geq$

$\langle z, x^* \rangle - f(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$, o que implica, por hipótese,

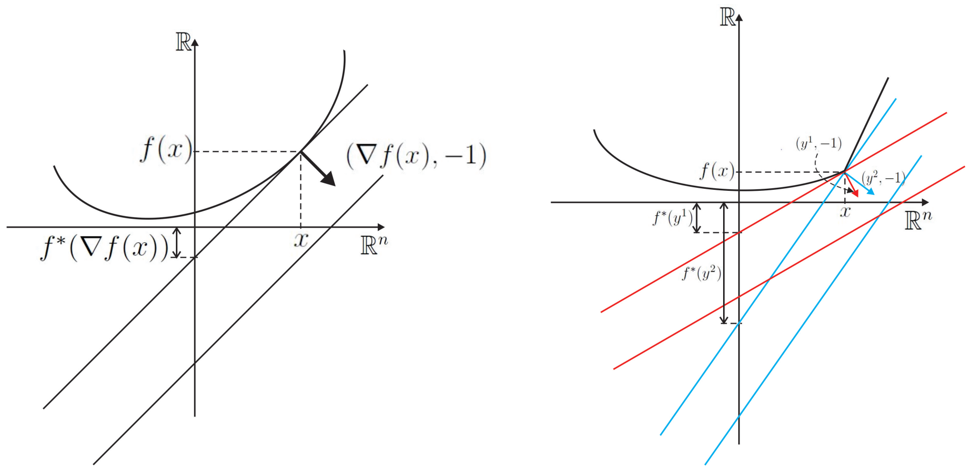
$$\langle x, x^* \rangle - f(x) \geq \langle z, x^* \rangle - f(z), \ \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

O que é equivalente a

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $x^* \in \partial f(x)$. ■

As figuras abaixo apresentam uma ilustração do Teorema 2.6, referentes à conjugada de uma função convexa diferenciável e de uma não diferenciável.



(a) Função conjugada de uma função f convexa diferenciável.

(b) Função conjugada de uma função f convexa não diferenciável.

A definição seguinte contempla uma caracterização bastante útil na relação entre a função f e a sua conjugada f^*.

Definição 2.5 ([17, Cap. III, pág. 116]). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa e s.c.i.. Então, f é cofinita se, e somente se, f^* é de valor finito.*

A seguir, será verificado que a função conjugada da função indicadora (ver Definição 2.2) de um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é a função suporte desse conjunto. De fato, sabe-se que

$$\delta_C^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle - \delta_C(x)\}, \ \forall x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, para $x \in C$, tem-se que $\delta_C(x) = 0$ e para $x \notin C$, tem-se $\delta_C(x) = +\infty$. Logo, segue-se que a conjugada de δ_C é a **função suporte do conjunto** C, isto é,

$$\delta_C^*(x^*) = \sup_{x \in C}\{\langle x, x^* \rangle\}, \ \forall x^* \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Abaixo, será apresentado um resultado que relaciona a finitude da função suporte com a limitação do conjunto de atuação, e vice-versa.

Proposição 2.7 ([8, Cap. C, pág. 134]). *Seja* $\delta_C^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *a função suporte do conjunto* $C \subseteq \mathbb{R}^n$*. Então,* δ_C^* *é de valor finito se, e somente se,* C *é um conjunto limitado.*

Prova. Suponha δ_C^* de valor finito, o que implica $\mathrm{dom}\delta_C^* = \mathbb{R}^n$. Pela definição de função conjugada (Teorema 2.5), tem-se que δ_C^* é uma função convexa, assim, pelo Teorema 1.9 segue-se que δ_C^* é contínua no $\mathbb{R}^n$. Desta forma, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 1.1), segue que existe um valor máximo $L > 0$ para a função δ_C^* restrita a uma bola compacta no $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\delta_C^*(w^*) \leq L, \ \forall w^* \in B[0; 1]. \tag{2.9}$$

Agora, fazendo $w^* = \dfrac{w}{\|w\|}$ para $w^* \neq 0$ e substituindo em (2.9) e usando (2.8), tem-se que

$$\left\langle w, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leq \bar{L}. \tag{2.10}$$

O que implica de (2.10) que $\|w\| < \bar{L}$, para todo $w \in C$. Portanto, C é um conjunto limitado se a função δ_C^* é de valor finito.

Reciprocamente, suponha o conjunto C limitado, isto é, existe um número real $r > 0$ tal que $\|w\| \leq r$, para todo $w \in C$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se que

$$\langle w, w^* \rangle \leq \|w\| \cdot \|w^*\|, \ \forall w \in C \text{ e } \forall w^* \in \mathbb{R}^n.$$

O que implica

$$\langle w, w^* \rangle \leq r \cdot \|w^*\|, \ \forall w \in C \text{ e } \forall w^* \in \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

Fixando arbitrariamente $w^* \in \mathbb{R}^n$ e tomando o supremo no conjunto C na desigualdade (2.11), obtém-se

$$\sup_{w \in C}\{\langle w, w^* \rangle\} \leq r \cdot \|w^*\|. \tag{2.12}$$

Da arbitrariedade de w^*, de (2.8) e de (2.12), segue-se que

$$\delta_C^*(w^*) \leq r \cdot \|w^*\|, \ \forall\ w \in C \text{ e } \forall w^* \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Portanto, a função suporte δ_C^* é de valor finito se C é limitado. ∎

A seguir, será enunciada uma caracterização da função suporte que será necessária para resultados posteriores.

Teorema 2.8 ([8, Cap. C, pág. 138]). *Seja C um conjunto não-vazio, convexo e fechado do $\mathbb{R}^n$. Então, $x \in \text{int}C$ se, e somente se,*

$$\delta_C^*(x^*) > \langle x, x^* \rangle, \ \forall x^* \neq 0.$$

Prosseguindo, será abordado o conceito da conjugada da função f^* definida por **Função Biconjugada** de f (ver [8, pág. 218]): Seja a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, então

$$f^{**}(x) := (f^*)^*(x) = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n}\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

Teorema 2.9 ([20, Cap. 6, pág. 88]). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa e própria. Então, f^{**} é o supremo de todas as funções afins que são majoradas por f.*

Prova. Defina $\Delta :=$ {Conjunto de todas as funções afins que são majoradas por$f$} e $\Gamma(x) := \sup\{\gamma(x); \gamma \in \Delta\}$. Considere $f^*(x^*) < +\infty$, para algum $x^* \in \mathbb{R}^n$. De (2.4),

$f(x) \geq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)$, o que implica $\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \in \Delta$ e, consequentemente,

$$\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \leq \Gamma(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Fixando arbitrariamente $x \in \mathbb{R}^n$ e tomando o supremo na desigualdade (2.15), obtém-se que $\sup\limits_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} \leq \Gamma(x)$. De (2.14), tem-se que $f^{**}(x) \leq \Gamma(x)$. Da arbitrariedade de x, segue-se

$$f^{**}(x) \leq \Gamma(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.16}$$

Agora, considere $h \in \Delta$, por definição, $h(x) = \langle x, x^* \rangle - \beta$, onde $\beta \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\langle x, x^* \rangle - \beta \leq f(x), \ \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f^*(x^*) < +\infty.$$

O que é equivalente a

$$\langle x, x^* \rangle - f(x) \leq \beta, \ \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f^*(x^*) < +\infty. \tag{2.17}$$

Fixando arbitrariamente $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^*(x^*) < +\infty$ e tomando o supremo na desigualdade (2.17), obtém-se $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} \leq \beta$. Pela Definição de conjugada dada em (2.4), $f^*(x^*) \leq \beta$ o que implica $-\beta \leq -f^*(x^*)$. Assim,

$$h(x) = \langle x, x^* \rangle - \beta \leq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)$$

Isto é,

$$h(x) \leq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*). \tag{2.18}$$

Fixando arbitrariamente $x \in \mathbb{R}^n$ e tomando o supremo na desigualdade (2.18), obtém-se

$$\sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} h(x) \leq \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\}.$$

Considerando que $h \in \Delta$ é qualquer e por (2.14), tem-se que $\Gamma(x) \leq f^{**}(x)$. Da arbitrariedade de x, segue-se que

$$\Gamma(x) \leq f^{**}(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.19}$$

Portanto, de (2.16) e de (2.19), tem-se que f^{**} é o supremo de todas as funções afins que são majoradas por f. ■

Teorema 2.10 ([3, Cap. 1, pág. 13] **Fenchel-Moreau).** *Seja* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *uma função convexa, própria e s.c.i.. Então,* $f = f^{**}$.

Capítulo 3

Operadores Monótonos Maximais e uma Representação Convexa

Este capítulo será iniciado com um exemplo importante de operadores monótonos maximais que é o subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i.. Em seguida, serão abordadas as propriedades da função de Fitzpatrick que está associada a operadores monótonos maximais.

3.1 Operadores monótonos maximais

Considerando que o subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. é o operador ponto-conjunto com maior aplicação dos resultados principais abordados no presente trabalho, nesta seção será provada a sua maximalidade.

Inicialmente, será mostrado que o subdiferencial de uma função convexa e própria é um operador monótono.

Proposição 3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ convexa e própria. Então, o subdiferencial da função f é um operador monótono.*

Prova. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $x^* \in \partial f(x), y^* \in \partial f(y)$. Pela definição de subdiferencial,

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x\rangle,\ \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ e } f(w) \geq f(y) + \langle y^*, w - y\rangle,\ \forall w \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Fixando $y = z$ e $x = w$ e substituindo em (3.1), respectivamente, obtém-se

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \text{ e } f(x) \geq f(y) + \langle y^*, x - y \rangle. \tag{3.2}$$

Da soma das desigualdades em (3.2) resulta $\langle x - y, x^* \rangle + \langle x - y, -y^* \rangle \geq 0$. Isto é,

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0.$$

Portanto, ∂f é um operador monótono. ■

Em seguida, será apresentado um teorema fundamental para a prova da maximalidade do subdiferencial. Considerando uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ convexa, própria e s.c.i. e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, segue-se que a regularização de Moreau-Yosida de f (ver [8, pág. 92]) é dada por

$$F(x) := f(x) + \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

De fato, a função F é estritamente (fortemente) convexa no $\mathbb{R}^n$ o que implica, pelo Teorema da Minimização Convexa, que F possui um único minimizador global. Para tanto, define-se

$$\text{prox}_f(x_0) := \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 \right\}$$

onde prox_f é chamada a aplicação de proximidade com respeito a f, devido a Moreau em [16]. De forma análoga, define-se

$$\text{prox}_{f^*}(x_0) := \arg\min_{x^* \in \mathbb{R}^n} \left\{ f^*(x^*) + \frac{1}{2}\|x^* - x_0\|^2 \right\}$$

onde prox_{f^*} é chamada a aplicação de proximidade com respeito a f^*, devido a Moreau em [16].

Teorema 3.2 ([20, Cap. 7, pág. 108])**.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa, própria e s.c.i. e sejam $z, x, x^* \in \mathbb{R}^n$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $z = x + x^*$ *e* $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$*;*

(2) $x = \text{prox}_f(z)$ *e* $x^* = \text{prox}_{f^*}(z)$*.*

Finalmente, será desenvolvida a prova da maximalidade do subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i..

Teorema 3.3 ([20, Cap. 7, pág. 110] **Maximalidade do Subdiferencial da** f**).** *Seja* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *uma função convexa, própria e s.c.i.. Então,* ∂f *é um operador monótono maximal.*

Prova. Seja $(x_0, x_0^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $\langle x - x_0, x^* - x_0^* \rangle \geq 0$, para todo $(x, x^*) \in \text{Gr}(\partial f)$. Defina $x_1 = \text{prox}_f(x_0 + x_0^*)$ e $x_1^* = \text{prox}_{f^*}(x_0 + x_0^*)$. Assim, usando os Teoremas 3.2 e 2.6, segue-se que

$$x_0 + x_0^* = x_1 + x_1^* \text{ e } (x_1, x_1^*) \in \text{Gr}(\partial f). \tag{3.4}$$

Pela monotonicidade de ∂f (Proposição 3.1),

$$\langle x_1 - x_0, x_1^* - x_0^* \rangle \geq 0. \tag{3.5}$$

Desta forma, de (3.4) e de (3.5), tem-se que $0 \leq \langle x_1 - x_0, x_0 - x_1 \rangle = -\|x_0 - x_1\|^2$. Ou seja, $x_0 - x_1 = 0$, o que implica $x_0 = x_1$ e, por (3.4), $x_0^* = x_1^*$. Logo, $(x_0, x_0^*) = (x_1, x_1^*) \in \text{Gr}(\partial f)$. Portanto, o subdiferencial ∂f de uma função convexa, própria e s.c.i. é um operador monótono maximal. ■

3.2 Função Fitzpatrick

A função Fitzpatrick foi introduzida por Simon Fitzpatrick em [7], no ano de 1988, com o objetivo de representar convexamente o subdiferencial de uma função convexa e própria. Em 2001, esta bifunção foi utilizada por Martínez-Legaz e Théra em [14] com o fim de identificar e classificar um operador monótono maximal. Também, em 2002, Burachik e Svaiter debruçaram-se sobre o tema em [5]. Finalmente, essas redescobertas motivaram diversos pesquisadores da área a buscar novos resultados envolvendo convexidade na teoria de operadores monótonos maximais.

Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador, com $Dom(T) \neq \emptyset$. A função Fitzpatrick do operador T denotada por $\varphi_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é definida por

$$\varphi_T(x, x^*) := \langle x, x^* \rangle - \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle. \tag{3.6}$$

Desenvolvendo (3.6), será obtida outra expressão equivalente, também muito presente na literatura,

$$\begin{aligned}
\varphi_T(x, x^*) &= \langle x, x^* \rangle - \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \{\langle x - y, x^* - y^* \rangle\} \\
&= - \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \{-\langle x, x^* \rangle + \langle x - y, x^* - y^* \rangle\} \\
&= \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \{\langle x, x^* \rangle + \langle y - x, x^* - y^* \rangle\} \\
&= \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \{\langle x, x^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle - \langle x, x^* \rangle + \langle x, y^* \rangle\} \\
&= \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \{\langle y, x^* \rangle + \langle x, y^* \rangle - \langle y, y^* \rangle\})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi_T(x, x^*) := \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \{\langle x, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle\}. \tag{3.7}$$

A seguir, será apresentado um Teorema que caracteriza a função Fitzpatrick de um operador monótono maximal.

Teorema 3.4 ([7, pág. 62]). *Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono maximal. Então, as seguintes afirmações são satisfeitas:*

(1) $\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle$ *se, e somente se,* $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(T)$*;*

(2) $\varphi_T(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$*, para todo* $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*.*

Prova. (1). Suponha $\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle$. Assim, de (3.6), implica que

$$\inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle = 0.$$

Da definição de ínfimo,

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle = 0. \tag{3.8}$$

Pela maximalidade de T, segue-se de (3.8) que $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(T)$.

Reciprocamente, supondo $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(T)$ e usando a monotonicidade de T implica que $\inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle = 0$. Portanto, de (3.6) segue que $\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle$.

(2). Suponha que $(x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathrm{Gr}(T)$. Da maximalidade de T, segue-se que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle < 0$ para todo $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(T)$, o que implica $\inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle < 0$. Desta forma,

$$-\inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0.$$

Logo, $\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle - \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq \langle x, x^* \rangle$. Isto é,

$$\varphi_T(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle \text{ para todo } (x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathrm{Gr}(T). \tag{3.9}$$

Portanto, da afirmação (1) e de (3.9), segue-se que $\varphi_T(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$, para todo $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. ■

O próximo resultado apresenta propriedades imediatas da função Fitzpatrick.

Proposição 3.5 ([7, pág. 61])**.** *Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono. Se $\mathrm{Dom}(T) \neq \emptyset$, então φ_T é uma função convexa, própria e s.c.i..*

Prova. Considerando a definição da função Fitzpatrick dada em (3.7), segue que o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é convexo, pois é uma aplicação bilinear no $\mathbb{R}^n$. Assim, pela Proposição 2.4, segue-se que φ_T é uma função convexa. Continuando, para $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(T)$ qualquer e fixo, a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínua no $\mathbb{R}^n$ o que implica que é s.c.i.. Desta forma, pela Proposição 2.4, tem-se que φ_T é uma função s.c.i.. Como o $\mathrm{Dom}(T) \neq \emptyset$, segue-se da afirmação (1) do Teorema 3.4 que a função φ_T é própria. ■

A seguir, será estudada a função Fitzpatrick de alguns operadores monótonos maximais.

Exemplo 3.1. *Seja a função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = |x|$. *Em seguida, será estudada a função Fitzpatrick do subdiferencial da função* f *obtido no* Exemplo 1.4. *De fato,*

$$\varphi_{\partial f}(x, x^*) = x \cdot x^* - \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} (x - y) \cdot (x^* - y^*).$$

Assim, para $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)$, *segue-se da afirmação* (1) *do* Teorema 3.4 *que* $\varphi_{\partial f}(x, x^*) = x \cdot x^* < +\infty$.

Agora, para $(x, x^*) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \backslash \mathrm{Gr}(\partial f)$ *implica que* x *é qualquer e fixo com* $|x^*| > 1$. *Desta forma, para a relação abaixo, há dois casos a serem analisados separadamente:*

$$- \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} (x - y) \cdot (x^* - y^*) = \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} (y - x) \cdot (x^* - y^*).$$

i) Se $x^* > 1$, *então* $(x^* - y^*) > 0$. *Logo, quando*

$$(y \longrightarrow +\infty) \implies (y - x) \cdot (x^* - y^*) \longrightarrow +\infty \implies \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} (y - x) \cdot (x^* - y^*) = +\infty$$

E, quando

$$(y \longrightarrow -\infty) \implies (y - x) \cdot (x^* - y^*) \longrightarrow -\infty \implies \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} (y - x) \cdot (x^* - y^*) = 0$$

ii) Se $x^* < 1$, *então* $(x^* - y^*) < 0$. *Logo, quando*

$$(y \longrightarrow +\infty) \implies (y - x) \cdot (x^* - y^*) \longrightarrow -\infty \implies \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} (y - x) \cdot (x^* - y^*) = 0$$

E, quando

$$(y \longrightarrow -\infty) \implies (y - x) \cdot (x^* - y^*) \longrightarrow +\infty \implies \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} (y - x) \cdot (x^* - y^*) = +\infty.$$

Portanto, a função Fitzpatrick do subdiferencial da função $f(x) = |x|$ *é dada por*

$$\varphi_{\partial f}(x, x^*) = \begin{cases} x \cdot x^*, \text{ se } (x, x^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f) \\ +\infty, \text{ se } (x, x^*) \notin \mathrm{Gr}(\partial f). \end{cases}$$

O que é equivalente a

$$\varphi_{\partial f}(x, x^*) = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0 \text{ e } x^* = 1 \\ 0, \text{ se } x = 0 \text{ e } |x^*| \leq 1 \\ -x, \text{ se } x < 0 \text{ e } x^* = -1 \\ +\infty, \text{ caso contrário }. \end{cases}$$

Exemplo 3.2. *Seja* $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *o operador identidade. A seguir, será estudada a função Fitzpatrick deste operador. Para* $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(I)$ *tem-se que* $\varphi_I(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle < +\infty$*, em virtude da* afirmação (1) *do* Teorema 3.4.
Agora, seja $(x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathrm{Gr}(I)$. *Usando a definição da* φ_I *apresentada em* (3.7), *a função Fitzpatrick de* I *é dada por*

$$\varphi_I(x, x^*) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle x + x^*, y \rangle - \|y\|^2\}.$$

Considerando que $\langle x + x^*, y \rangle$ *é uma função linear e* $-\|y\|^2$ *é uma função quadrática côncava, segue-se que o* $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle x + x^*, y \rangle - \|y\|^2\}$ *é atingido no máximo dessa função e, por conseguinte, é finito. Portanto, a função Fitzpatrick do operado* I *é de valor finito, ou seja,* $\varphi_I < +\infty$. *Assim, obtém-se*

$$\varphi_I(x, x^*) = \begin{cases} \langle x, x^* \rangle, \text{ se } (x, x^*) \in \mathrm{Gr}(I) \\ \max_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle x + x^*, y \rangle - \|y\|^2\}, \text{ se } (x, x^*) \notin \mathrm{Gr}(I). \end{cases}$$

Agora, será abordada outra representação convexa de operadores monótonos maximais que foi estabelecida por Burachik e Svaiter em [5]. Essa função será denotada por $\sigma_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ e definida por

$$\sigma_T(x, x^*) := \overline{\text{conv}}(\pi + \delta_{\text{Gr}(T)})(x, x^*). \tag{3.10}$$

onde a função $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\pi(x, x^*) := \langle x, x^* \rangle$ e $\delta_{\text{Gr}(T)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é a função indicadora do $\text{Gr}(T) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (ver Definição 2.2). Desta forma, tem-se:

$$(\pi + \delta_{\text{Gr}(T)})(x, x^*) := \begin{cases} \langle x, x^* \rangle, \text{ se } (x, x^*) \in \text{Gr}(T) \\ +\infty, \text{ se } (x, x^*) \notin \text{Gr}(T). \end{cases}$$

Proposição 3.6. *Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador com* $\text{Dom}(T) \neq \emptyset$. *Então, a função σ_T é convexa, própria e s.c.i..*

Prova. Segue-se imediatamente da definição da função σ_T, dada em (3.10), e da Definição 2.3. ∎

O exemplo, a seguir, evidencia as características da função sigma de um operador quando o mesmo for monótono maximal.

Exemplo 3.3. *Seja $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o operador identidade. A seguir, será estudada a função σ_I.*

Nos Exemplos *1.5 e 1.7, foi provado que I é um operador monótono maximal, assim, pelas* Proposições *1.12 e 1.13, segue-se que* $\text{Gr}(I)$ *é um conjunto convexo e fechado. Logo, pelas* Proposições *2.1 e 2.2, tem-se que a função indicadora $\delta_{\text{Gr}(I)}(x, x^*)$ é convexa e s.c.i., para todo $(x, x^*) \in \text{Gr}(I)$. Por conseguinte, da* Observação *2.1, obtém-se que $\sigma_I = \overline{\text{conv}}(\pi + \delta_{\text{Gr}(I)}) = \pi + \delta_{\text{Gr}(I)}$. Desta forma,*

$$\sigma_I(x, x^*) = \begin{cases} \langle x, x^* \rangle, \text{ se } (x, x^*) \in \text{Gr}(I) \\ +\infty, \text{ se } (x, x^*) \notin \text{Gr}(I). \end{cases}$$

O que é equivalente a

$$\sigma_I(x, x^*) = \begin{cases} \|x\|^2, \text{ se } (x, x^*) \in \mathrm{Gr}(I) \\ +\infty, \text{ se } (x, x^*) \notin \mathrm{Gr}(I). \end{cases}$$

No próximo exemplo, será analisada a função sigma de um operador que é não-monótono, não-convexo e não é fechado.

Exemplo 3.4. *Seja o operador* $\bar{H} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *definido por*

$$\bar{H}(x) = \begin{cases} \{4\}, \text{ se } x \neq 1 \\ [0, 1) \cup (1, 4], \text{ se } x = 1. \end{cases}$$

É observado que $\bar{H}$ *é um operador não-monótono, pois para* -1 *e* $1 \in \mathbb{R}$ *com* $4 \in \bar{H}(-1)$ *e* $0 \in \bar{H}(1)$*, obtém-se:*

$$(-1 - 1) \cdot (4 - 0) = (-2) \cdot 4 = -8 < 0.$$

Continuando, nota-se que $\bar{H}(1)$ *é um conjunto não-convexo, pois para* 0 *e* $3 \in \bar{H}(1)$ *e* $\bar{\beta} = \dfrac{2}{3}$*, tem-se:*

$$\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \notin \bar{H}(1).$$

Observa-se, ainda, que $\bar{H}(1)$ *não é fechado, uma vez que considerando a sequência* $x^k = \dfrac{k-1}{k}$*, segue-se que* $\{x^k\} \subset \bar{H}(1)$ *e* $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} x^k = 1$*, porém* $1 \notin \bar{H}(1)$*.*

Desta forma, o $\mathrm{Gr}(\bar{H})$ *é um conjunto não-convexo e não fechado, o que implica que a função indicadora* $\delta_{\mathrm{Gr}(\bar{H})}$ *não é convexa e nem s.c.i. (ver* Proposições *2.1 e 2.2). Logo, tem-se que* $\sigma_{\bar{H}} \neq \pi + \delta_{\mathrm{Gr}(\bar{H})}$*. Assim, segue-se que*

$$(\pi + \delta_{\mathrm{Gr}(\bar{H})})(x, x^*) = \begin{cases} 4x, \text{ se } x \neq 1 \text{ e } x^* = 4 \\ x^*, \text{ se } x = 1 \text{ e } x^* \in [0, 1) \text{ ou } x^* \in (1, 4] \\ +\infty, \text{ se } (x, x^*) \notin \mathrm{Gr}(\bar{H}). \end{cases}$$

Todavia, pela definição de $\sigma_{\bar{H}}$*, dada em 3.10,* $\sigma_{\bar{H}} = \overline{\mathrm{conv}}(\pi + \delta_{\mathrm{Gr}(\bar{H})})$*, isto é,*

$$\sigma_{\bar{H}}(x, x^*) = \begin{cases} 4x, \text{ se } x \neq 1 \text{ e } x^* = 4 \\ x^*, \text{ se } x = 1 \text{ e } x^* \in [0,4] \\ +\infty, \text{ se } (x,x^*) \notin \mathrm{Gr}(\bar{H}). \end{cases}$$

A proposição abaixo apresenta uma caracterização das funções φ_T e σ_T de um operador monótono maximal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.7. *Sejam* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *um operador monótono maximal e as funções* φ_T *e* σ_T*. Então,* $\varphi_T(x,x^*) = \sigma_T(x,x^*) = \langle x, x^*\rangle$ *se, e somente se,* $(x,x^*) \in \mathrm{Gr}(T)$.

Prova. A prova desta proposição segue imediatamente da afirmação (1) do Teorema 3.4 e da definição da função σ_T. ■

A seguir, será mostrado que a função φ_T é a conjugada da função σ_T (ver [13, pág. 24]). Assim, para todo $(x,x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tem-se que

$$\begin{aligned} \varphi_T(x,x^*) &= \sup_{(z,z^*)\in \mathrm{Gr}(T)} \{\langle z, x^*\rangle + \langle x, z^*\rangle - \langle z, z^*\rangle\} \\ &= \sup_{(z,z^*)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{\langle (z,z^*), (x^*,x)\rangle - (\pi + \delta_{\mathrm{Gr}(T)})(z,z^*)\} \\ &= (\pi + \delta_{\mathrm{Gr}(T)})^*(x^*,x) \\ &= \sigma_T^*(x^*,x) \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi_T(x,x^*) = \sigma_T^*(x^*,x) \text{ para todo } (x,x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Além disso, pela definição de σ_T e pelo Teorema 2.10 (Teorema de Fenchel-Moreau), segue-se que

$$\varphi_T^*(x^*,x) = \sigma_T^{**}(x,x^*) = \sigma_T(x,x^*) \text{ para todo } (x,x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{3.12}$$

Capítulo 4

Um Teorema de sobrejetividade e Aplicações

Neste capítulo será abordado um teorema de sobrejetividade da soma de operadores monótonos maximais baseado nas propriedades da função Fitzpatrick. Também serão realizadas algumas aplicações para operadores monótonos maximais especiais.

4.1 Teorema de sobrejetividade

Nesta seção, será desenvolvido um Teorema de Sobrejetividade que foi demonstrado por Martínez-Legaz em [12] que garante a sobrejetividade da soma de operadores monótonos maximais. A essência do Teorema é a seguinte: dado um operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ monótono maximal e ao perturbá-lo com um outro operador $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ monótono maximal, cuja a função Fitzpatrick φ_B é de valor finito, a sobrejetividade da soma desses operadores é satisfeita.

Inicialmente, será introduzida uma versão, em dimensão infinita, do Teorema de Dualidade de Fenchel-Rockafellar que será utilizado como ferramenta para a prova do Teorema de Sobrejetividade.

Teorema 4.1 ([3, cap. 1, pág. 15] **Fenchel-Rockafellar**). *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funções convexas, próprias e s.c.i.s.. Se o domínio de uma dessas funções contém um* *ponto interior do domínio da outra, então:*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x)+g(x)\} = \max_{x^*\in\mathbb{R}^n}\{-f^*(x^*)-g^*(-x^*)\}.$$

Adiante, será enunciado uma versão do Teorema de Sobrejetividade obtido por Martínez-Legaz em [12], e em seguida será apresentada a sua prova no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.2. *Seja $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *A é monótono maximal;*

(2) $\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, *para todo operador $B:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ monótono maximal, tal que φ_B é de valor finito;*

(3) *Existem um operador monótono maximal $B:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e um ponto $(p,p^*)\in \mathrm{Gr}(B)$, tais que φ_B é de valor finito com $\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ e $\langle p-y, p^*-y^*\rangle > 0$, para todo $(y,y^*)\in \mathrm{Gr}(B)\backslash\{(p,p^*)\}$.*

Prova. (1) $\Longrightarrow$ (2). Será provado que $\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Sempre vale que $\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Assim, é suficiente provar que $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\subset\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)$.

Seja $(x_0,x_0^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Considere o operador $A^{'}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\mathrm{Gr}(A^{'}) := \mathrm{Gr}(A)-\{(x_0,x_0^*)\}$. Defina $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\bar{R}$ tal que

$$h(x,x^*) := \varphi_B(-x,x^*)$$

Por definição, $A^{'}$ é monótono, pois, A é monótono. Da definição de $\sigma_{A'}$ dada em (3.10), tem-se que $\sigma_{A'}(x,x^*)\geq\langle x,x^*\rangle$ para todo $(x,x^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Da monotonicidade maximal de B e do Teorema 3.4, segue-se que $\varphi_B(x,x^*)\geq\langle x,x^*\rangle$ para todo $(x,x^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Assim,

$$\sigma_{A'}(x,x^*)+h(x,x^*)=\sigma_{A'}(x,x^*)+\varphi_B(-x,x^*)\geq\langle x,x^*\rangle+\langle -x,x^*\rangle = 0$$

Ou seja,

$$\sigma_{A'}(x,x^*)+h(x,x^*)\geq 0 \tag{4.1}$$

Por hipótese, $\mathrm{Dom}(A^{'}) \neq \emptyset$, logo $\mathrm{dom}\sigma_{A'} \neq \emptyset$. Como $\varphi_B < +\infty$, segue-se que $\mathrm{dom}\varphi_B = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Logo, $\mathrm{dom}h = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\sigma_{A'} \cap \mathrm{int}(\mathrm{dom}h) &= \mathrm{dom}\sigma_{A'} \cap \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \\ &= \mathrm{dom}\sigma_{A'} \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ &= \mathrm{dom}\sigma_{A'} \\ &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Isto é, $\mathrm{dom}\sigma_{A'} \cap \mathrm{int}(\mathrm{dom}h) \neq \emptyset$. Considerando que é satisfeita a Condição de Qualificação do Teorema de Fenchel-Rockafellar, segue-se do Teorema 4.1, que existe $(y^*, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$\inf_{(x,x^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{\sigma_{A'}(x,x^*) + h(x,x^*)\} = -\varphi_{A'}(y,y^*) - h^*(-y^*,-y). \tag{4.2}$$

Assim, usando (4.1) em (4.2), obtém-se $-\varphi_{A'}(y,y^*) - h^*(-y^*,-y) \geq 0$. O que implica

$$\varphi_{A'}(y,y^*) + h^*(-y^*,-y) \leq 0. \tag{4.3}$$

Note que da conjugada da função h, tem-se que

$$\begin{aligned} h^*(-y^*,-y) &= \sup_{(z,z^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{\langle (z,z^*),(-y^*,-y)\rangle - h(z,z^*)\} \\ &= \sup_{(z,z^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{\langle z,-y^*\rangle + \langle -y,z^*\rangle - \varphi_B(-z,z^*)\} \end{aligned}$$

Fazendo $u = -z$, obtém-se,

$$\begin{aligned} h^*(-y^*,-y) &= \sup_{(-u,z^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{\langle u,y^*\rangle + \langle -y,z^*\rangle - \varphi_B(u,z^*) \\ &= \sup_{(u,z^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{\langle (u,z^*),(y^*,-y)\rangle - \varphi_B(u,z^*)\}. \end{aligned}$$

Novamente, usando a definição de função conjugada,

$$\sup_{(u,z^*)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\{\langle(u,z^*),(y^*,-y)\rangle-\varphi_B(u,z^*)\}=\varphi_B^*(y^*,-y).$$

Logo, $h^*(-y^*,-y)=\varphi_B^*(y^*,-y)$. De (3.12), segue-se que $\varphi_B^*(y^*,-y)=\sigma_B(-y,y^*)$. Ou seja, $h^*(-y^*,-y)=\sigma_B(-y,y^*)$. Desta forma,

$$\varphi_{A'}(y,y^*)+h^*(-y^*,-y)=\varphi_{A'}(y,y^*)+\sigma_B(-y,y^*)\geq\langle y,y^*\rangle+\langle -y,y^*\rangle=0. \quad (4.4)$$

Assim, de (4.3) e de (4.4),

$$0=\varphi_{A'}(y,y^*)+h^*(-y^*,-y)=\varphi_{A'}(y,y^*)+\sigma_B(-y,y^*)=\langle y,y^*\rangle+\langle -y,y^*\rangle.$$

O que implica, $\varphi_{A'}(y,y^*)=\langle y,y^*\rangle$ e $\sigma_B(-y,y^*)=\langle -y,y^*\rangle$. Assim, pela afirmação (1) do Teorema 3.4 e pela definição de σ_B, tem-se que

$$(y,y^*)\in\mathrm{Gr}(A^{'})\ e\ (-y,y^*)\in\mathrm{Gr}(B). \quad (4.5)$$

Observe que de (4.5), $y^*\in B(-y)$ o que implica $-y^*\in -B(-y)$, isto é,

$$(-y,-y^*)\in\mathrm{Gr}(-B). \quad (4.6)$$

Assim, de (4.5) e (4.6), $(x_0,x_0^*)=(x_0,x_0^*)+(y,y^*)+(-y,-y^*)\in\{(x_0,x_0^*)\}+\mathrm{Gr}(A^{'})+\mathrm{Gr}(-B)=\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)$. Ou seja, $(x_0,x_0^*)\in\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)$. Logo, $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\subset\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)$. Portanto, $\mathrm{Gr}(A)+\mathrm{Gr}(-B)=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Nesta implicação, serão exibidos um operador monótono maximal $B:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e um ponto $(p,p^*)\in\mathrm{Gr}(B)$ tais que φ_B é de valor finito e

$$\langle p-y,p^*-y^*\rangle>0, \text{para todo}(y,y^*)\in\mathrm{Gr}(B)\backslash\{(p,p^*)\}.$$

Sabe-se que o operador identidade I é o subdiferencial da função $f(x)=\dfrac{1}{2}\|x\|^2$ que é uma função real e convexa no $\mathbb{R}^n$, o que implica pela Proposição 3.1 e Teorema 3.3 que I é um operador monótono maximal. Também, do Exemplo 3.2 segue que φ_I é de valor finito. Portanto, considera-se $B = I$.

Continuando, observa-se que $(0,0) \in \mathrm{Gr}(I)$ e fazendo $(p, p^*) = (0,0)$ segue que para qualquer $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(I) \backslash \{(0,0)\}$, tem-se

$$\langle 0 - y, 0 - y^* \rangle = \langle y, y^* \rangle.$$

Pela Igualdade de Fenchel e por (2.3), obtém-se que

$$\langle y, y^* \rangle = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y^*\|^2 = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 = \|y\|^2.$$

Como $y \neq 0$, implica que

$$\langle 0 - y, 0 - y^* \rangle = \langle y, y^* \rangle = \|y\|^2 > 0.$$

Isto é, $\langle 0-y, 0-y^* \rangle > 0$. Portanto, $(p, p^*) = (0,0)$ está relacionado de forma monótona estrita com todos os outros pontos do $\mathrm{Gr}(I)$. O que finaliza a prova desta implicação.

(3) $\implies$ (1). Admitindo que a afirmação em (3) é verificada, agora será mostrado que o operador A é monótono maximal. Seja $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$, para todo $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A)$. Considere $(p, p^*) \in \mathrm{Gr}(B)$ como na afirmação (3). Desta forma, $(x+p, x^* - p^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathrm{Gr}(A) + \mathrm{Gr}(-B)$. Ou seja, existem $(\bar{y}, \bar{y}^*) \in \mathrm{Gr}(A)$ e $(z, z^*) \in \mathrm{Gr}(-B)$ tais que,

$$(x + p, x^* - p^*) = (\bar{y}, \bar{y}^*) + (z, z^*) \tag{4.7}$$

Note que de (4.7), obtém-se

$$x + p = \bar{y} + z \implies x - \bar{y} = z - p. \tag{4.8}$$

$$x^* - p^* = \bar{y}^* + z^* \implies x^* - \bar{y}^* = z^* + p^*. \tag{4.9}$$

Observe que $z^* \in -B(z)$ implica $-z^* \in B(z)$, ou seja, $(z, -z^*) \in \mathrm{Gr}(B)$. Da relação monótona de (x, x^*) com os pontos do $\mathrm{Gr}(A)$, de (4.8), de (4.9) e da monotonicidade de B, segue-se que

$$0 \leq \langle x - \bar{y}, x^* - \bar{y}^* \rangle = \langle z - p, z^* + p^* \rangle = -\langle z - p, -z^* - p^* \rangle \leq 0,$$

Ou seja, $\langle z - p, -z^* - p^* \rangle = 0$, mas isso implica, pela afirmação (3) que

$$z = p \ \text{ e } \ -z^* = p^*. \tag{4.10}$$

Agora, substituindo (4.10) em (4.7), obtém-se $(x + z, x^* + z^*) = (\bar{y}, \bar{y}^*) + (z, z^*)$. Logo, $(x, x^*) = (\bar{y}, \bar{y}^*) \in \mathrm{Gr}(A)$. Portanto, A é um operador monótono maximal. ■

Destaca-se que Martínez-Legaz em [12] obteve a prova do Teorema acima em um espaço de Banach reflexivo qualquer.

4.2 Aplicações no $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, serão abordadas algumas aplicações decorrentes do Teorema 4.2, todas apresentadas por Martínez-Legaz em [12] em um espaço reflexivo de Banach qualquer.

Inicialmente, será apresentada uma aplicação do Teorema 4.2 ao Problema de Desigualdade Variacional sobre um conjunto não-vazio, convexo e fechado o qual consiste em um problema de existência. A aplicação mencionada garante que para todo operador monótono maximal $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que a função Fitzpatrick φ_A é de valor finito, e para todo conjunto não-vazio, convexo e fechado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pode-se encontrar um ponto $x \in X$ tal que existe $x^* \in A(x)$ satisfazendo

$$\langle y - x, x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in X. \tag{4.11}$$

Corolário 4.3. *Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono maximal. Se a função φ_T é de valor finito, então para todo conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, convexo e fechado, existem $x \in X$ e $x^* \in T(x)$ tais que,*

$$\langle y - x, x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in X.$$

Prova. Considere a função indicadora do conjunto X, conforme Definição 2.2. Pela Proposição 2.3, tem-se que $\partial \delta_X(x) = \mathcal{N}_X(x)$, para todo $x \in X$. Agora, em virtude das Proposições 2.1 e 2.2 e do Teorema 3.3, segue-se que $\mathcal{N}_X(x)$ é um operador monótono maximal.

$$N_X(x) = \begin{cases} \{x^* \in \mathbb{R}^n ; \langle y - x, x^* \rangle \leq 0, \ \forall y \in X\}, \text{ se } x \in X \\ \emptyset, \text{ se } x \notin X \end{cases}$$

Definindo $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $B(x) = -T(-x)$, implica que B é um operador monótono maximal tal que a função $\varphi_B < +\infty$. Pela implicação (1) $\Longrightarrow$ (2) do Teorema 4.2, tem-se que $(0, 0) \in \mathrm{Gr}(N_X) + \mathrm{Gr}(-B)$, isto é, existe $(x, y^*) \in \mathrm{Gr}(N_X)$ tal que $(-x, -y^*) \in \mathrm{Gr}(-B)$. Fazendo $x^* = -y^*$, obtém-se que $(x, -x^*) = (x, y^*) \in \mathrm{Gr}(N_X)$. Ou seja, $(x, -x^*) \in \mathrm{Gr}(N_X)$ e, por definição de N_X,

$$\langle y - x, -x^* \rangle \leq 0, \ \forall y \in X.$$

O que é equivalente a,

$$\langle y - x, x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in X.$$

Como $-y^* \in -B(-x)$, segue-se que

$$x^* = -y^* \in -B(-x) = T(x) \implies x^* \in T(x).$$

■

O próximo corolário afirma que todo operador $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ monótono maximal cuja função Fitzpatrick φ_B é de valor finito é sobrejetivo e o seu domínio é o $\mathbb{R}^n$. Um exemplo de um operador que satisfaz as respectivas propriedades é o operador identidade cujos $\mathrm{Dom}(I) = \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{Im}(I) = \mathbb{R}^n$ (ver Exemplos 1.5, 1.7 e 3.2). Um exemplo de um operador que não satisfaz as referidas propriedades é o subdiferencial da função valor absoluto (ver Exemplos 1.4 e 3.1).

Corolário 4.4. *Seja* $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *um operador monótono maximal. Se* φ_B *é de valor finito, então* $\mathrm{Dom}(B) = \mathbb{R}^n$ *e* $\mathrm{Im}(B) = \mathbb{R}^n$.

Prova. Considerando A^0 o operador nulo, isto é, $A^0(x) := \{0;\ x \in \mathbb{R}^n\}$ o qual tem o gráfico $\mathrm{Gr}(A^0) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Em seguida, será mostrado que A^0 é monótono. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $0 \in A^0(x)$ e $0 \in A^0(y)$. Assim, vale

$$\langle x - y, 0 - 0\rangle = 0.$$

Agora, será provado que A^0 é maximal. Para tanto, seja o operador $\bar{A}$ definido por

$$\bar{A}(x) := \begin{cases} \{0, a\}, \text{ se } x = \bar{x} \\ \{0\}, \text{ se } x \neq \bar{x} \end{cases}$$

onde $a \in \mathbb{R}^n$ é qualquer e fixo. Nota-se que $\mathrm{Gr}(A^0) \subset \mathrm{Gr}(\bar{A})$, entretanto, será mostrado que $\bar{A}$ é não monótono. Sejam $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que $0 \in \bar{A}(x)$, $a \in \bar{A}(\bar{x})$ e o cosseno do ângulo θ entre os vetores $(\bar{x} - x)$ e a é $\cos\theta < 0$. Assim, obtém-se

$$\langle x - \bar{x}, 0 - a\rangle = \langle \bar{x} - x, a\rangle < 0.$$

Logo, $\bar{A}$ é não monótono. Portanto, A^0 é um operador monótono maximal, assim, pela implicação (1) $\Longrightarrow$ (2) do Teorema 4.2, tem-se que

$$\mathrm{Gr}(A^0) + \mathrm{Gr}(-B) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

Considerando que $\mathrm{Im}(A^0) := \{0\}$, segue-se de (4.12) que $\mathrm{Im}(B) = \mathbb{R}^n$. De forma análoga, pode-se definir um operador monótono maximal $\tilde{A}$ tal que $\mathrm{Dom}(\tilde{A}) := \{0\}$ e $\mathrm{Im}(\tilde{A}) := \mathbb{R}^n$, o que pela implicação (1) $\Longrightarrow$ (2) do Teorema 4.2 obtém-se que

$$\mathrm{Gr}(\tilde{A}) + \mathrm{Gr}(-B) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Isto é, $\mathrm{Dom}(B) = \mathbb{R}^n$. Logo, para todo operador monótono maximal $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_B < +\infty$ tem-se que $\mathrm{Dom}(B) = \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{Im}(B) = \mathbb{R}^n$. ■

A Proposição seguinte visa relacionar a finitude dentre as funções $\varphi_{\partial f}$, *f e* f^*. Ressalta-se que f cofinita é equivalente à f^* de valor finito (ver Definição 2.5).

Proposição 4.5. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *uma função convexa, própria e s.c.i.. Então,* $\varphi_{\partial f}$ *é de valor finito se, e somente se,* f *é de valor finito e cofinita.*

Prova. Suponha que a função $\varphi_{\partial f}$ seja de valor finito. Por definição, $\mathrm{Dom}(\partial f) \subseteq \mathrm{dom} f$ o que implica, pelo Corolário 4.4, que $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n$, isto é, f é de valor finito. Pelo Corolário 4.4, segue-se que $\mathrm{Im}(\partial f) = \mathbb{R}^n$, assim, para $x^* \in \mathbb{R}^n$ fixo e arbitrário, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x^* \in \partial f(x)$, o que implica que $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)$. Assim, pelo Teorema (2.6) vale a Igualdade de Fenchel

$$f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - f(x).$$

Da arbitrariedade de x^*, obtém-se que $f^*(x^*) < +\infty$ para todo $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, suponha f de valor finito e cofinita. Agora, sejam $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fixo, porém arbitrário, e $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)$. Da Igualdade de Fenchel,

$$\langle x, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - (f(y) + f^*(y^*)). \tag{4.13}$$

Agora, pela Desigualdade de Fenchel,

$$(\langle y^*, x \rangle - f^*(y^*)) + (\langle y, x^* \rangle - f(y)) \leq f(x) + f^*(x^*). \tag{4.14}$$

Tomando o supremo no $\mathrm{Gr}(\partial f)$ na desigualdade (4.14), tem-se

$$\sup_{(y,y^*)\in \mathrm{Gr}(\partial f)} \{\langle x, y^*\rangle + \langle y, x^*\rangle - \langle y, y^*\rangle\} \leq f(x) + f^*(x^*).$$

Da arbitrariedade de $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, da definição de $\varphi_{\partial f}$ dada em (3.7) e da hipótese de finitude das funções f e f^*, segue-se que

$$\varphi_{\partial f}(x, x^*) \leq f(x) + f^*(x^*) < +\infty, \ \forall (x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Portanto, $\varphi_{\partial f} < +\infty$. ■

O próximo Corolário consiste em uma caracterização do Teorema 4.2 para o subdiferencial de uma função real convexa e cofinita tal que a função Fitzpatrick é de valor finito.

Corolário 4.6. *Sejam $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, s.c.i. e confinita. Então, A é monótono maximal se, e somente se,* $\mathrm{Gr}(A) + \mathrm{Gr}(-\partial f) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Prova. Suponha que o operador A seja monótono maximal. Com efeito, pelo Teorema 3.3, o operador ∂f é monótono maximal e, pela Proposição 4.5, a função $\varphi_{\partial f} < +\infty$. Logo, da implicação (1) $\Longrightarrow$ (2) do Teorema 4.2, tem-se que

$$\mathrm{Gr}(A) + \mathrm{Gr}(-\partial f) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Reciprocamente, suponha que $\mathrm{Gr}(A) + \mathrm{Gr}(-\partial f) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Como a função f é convexa no $\mathbb{R}^n$, pelo Teorema 1.9, segue-se que f é localmente Lipschitziana o que implica pelo Teorema de Rademacher (ver [6, pág. 216]) que f é diferenciável em quase todo ponto. Desta forma, suponha f diferenciável em $p \in \mathbb{R}^n$, assim, pela Proposição 1.11, obtém-se que $\partial f(p) = \{\nabla f(p)\}$ é um conjunto unitário.

Em [17, pág. 254], é dito que a função f^* é estritamente convexa se, e somente se, $\partial f^*(\nabla f(p)) \cap \partial f^*(y^*) = \emptyset$, sempre $\nabla f(p) \neq y^*$. Para provar esta afirmação, suponha que $y^* \neq \nabla f(p)$, porém $\partial f^*(\nabla f(p)) \cap \partial f^*(y^*) \neq \emptyset$, isto é, $p \in \partial f^*(y^*)$. Pelos Teoremas 2.6 e 2.10, segue-se que $\partial f(p) = \{y^*\}$ o que implica $\nabla f(p) = y^*$. Contradição, pois, por hipótese, $\nabla f(p) \neq y^*$. Logo, da convexidade estrita da f^* no $\nabla f(p)$, tem-se que

$$f^*(y^*) > f^*(\nabla f(p)) + \langle p, y^* - \nabla f(p)\rangle, \ \forall y^* \in \mathbb{R}^n \backslash \{\nabla f(p)\}.$$

Assim, da Igualdade de Fenchel e considerando que $\nabla f(p) \in \partial f(p)$, tem-se que

$$f^*(y^*) > -f(p) + \langle p, \nabla f(p)\rangle + \langle p, y^* - \nabla f(p)\rangle, \ \forall y^* \in \mathbb{R}^n \backslash \{\nabla f(p)\}.$$

Novamente, da Igualdade de Fenchel e de $y^* \in \partial f(y)$, obtém-se que

$$f(p) - f(y) > \langle p - y, y^*\rangle, \ \forall (y, y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f) \backslash \{(p, \nabla f(p))\}. \tag{4.15}$$

Agora, aplicando a definição de subgradiente em (4.15), segue-se que

$$\langle \nabla f(p), p - y\rangle > \langle p - y, y^*\rangle, \ \forall (y, y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f) \backslash \{(p, \nabla f(p))\}.$$

Logo,

$$\langle p - y, \nabla f(p) - y^*\rangle > 0, \ \forall (y, y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f) \backslash \{(p, \nabla f(p))\}.$$

Portanto, da implicação (3) $\Longrightarrow$ (1) do Teorema 4.2, segue-se que A é um operador monótono maximal. ■

A seguir, será apresentado um teorema que visa relacionar a finitude das funções f, f^* e $\varphi_{\partial f}$ com a propriedade de supercoercividade da f. É importante destacar que o respectivo teorema é um resultado inspirado na combinação da Proposição 4.5 com o Teorema 3.4, devido a Bauschke e Borwein, dado em [1, pág. 624].

Teorema 4.7. *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa, própria e s.c.i.. Se f é uma função de valor finito, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *A função f é supercoerciva;*

(2) *A função* $f - \langle \cdot, x^* \rangle$ *é coerciva para todo* $x^* \in \mathbb{R}^n$*;*

(3) *A função* f^* *é de valor finito;*

(4) *A função* $\varphi_{\partial f}$ *é de valor finito.*

Prova. (4) $\Longrightarrow$ (3). A prova desta implicação está feita na Proposição 4.5.

(3) $\Longrightarrow$ (2). O Teorema 2.9 estabelece que f^{**} é o supremo da coleção das funções afins que são majoradas por f, definidas por

$$h(x) = \langle x, x^* \rangle - \beta, \text{ onde } (x^*, \beta) \in E_{f^*}.$$

O Teorema 2.5 garante que $f^{**} = (f^*)^*$ é uma função convexa e s.c.i., assim, por definição, obtém-se que $E_{f^{**}}$ é a interseção de todos os semi-espaços fechados formados pelos hiperplanos das funções h que contém $E_{f^{**}}$. Com efeito, pela Proposição 1.6, $(E_{f^{**}})_\infty = \cap E_{h'_\infty}$, o que implica que $(f^{**})'_\infty$ é o supremo da coleção das funções h'_∞. Calculando h'_∞, conforme Proposição 1.7, obtém-se

$$\begin{aligned}
h'_\infty(x) &= \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{h(x^* + tx) - h(x^*)}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\langle x^* + tx, x^* \rangle - f^*(x^*) - (\|x^*\|^2 - f^*(x^*))}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\|x^*\|^2 + t\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) - \|x^*\|^2 + f^*(x^*)}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow +\infty} \langle x, x^* \rangle \\
&= \langle x, x^* \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $(f^{**})'_\infty(x) = \sup_{x^* \in \mathrm{dom}\mho^*} \{\langle x, x^* \rangle\}$, ou seja, é a função suporte do domf^*. Pelo Teorema 2.10 e pela finitude da f^*, tem-se

$$f'_\infty(x) = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle\}.$$

Em virtude do Teorema 2.8, segue-se que $f'_\infty(x) > \langle x, x^* \rangle$, para quaisquer $x \neq 0$ e $x^* \in \mathbb{R}^n$. Agora, pela Proposição 1.8, se $f'_{+\infty}(x) - \langle x, x^* \rangle > 0$ para todo $x \neq 0$, então todos os conjuntos de nível de $f - \langle \cdot, x^* \rangle$ são compactos. Finalmente, pelo Teorema

1.3, $f - \langle \cdot, x^* \rangle$ é coerciva para todo $x^* \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Convém frisar que esta implicação é verdadeira devido à função f estar definida no $\mathbb{R}^n$, onde a topologia fraca coincide com a forte e, desta forma, pode-se considerar, por exemplo, a convergência de uma sequência ao seu limite ou a compacidade da esfera. A prova apresentada, a seguir, pode ser encontrada em [1, pág. 624].

Suponha que f não é supercoerciva, isto é, existem uma sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\eta > 0$ tais que $0 < \|x^k\| \longrightarrow +\infty$ e $\dfrac{f(x^k)}{\|x^k\|} \leq \eta$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $\dfrac{x^k}{\|x^k\|} = y^k$, segue-se que $\{y^k\} \subset S^{-1}$. Como S^{-1} é compacta no $\mathbb{R}^n$, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 1.1) e, passando a uma subsequência, se necessário, tem-se que $\{y^k\}$ converge a ponto $y \in S^{-1}$. Seja $x^* = ry$, onde $r = 2\eta$. Da coercividade de $f - \langle \cdot, x^* \rangle$ implica que

$$f(x^k) - \langle x^k, x^* \rangle = f(x^k) - r\langle x^k, y \rangle \longrightarrow +\infty,$$

quando $(k \longrightarrow \infty)$. Por outro lado, $\langle y^k, y \rangle \longrightarrow \langle y, y \rangle = \|y\|^2 = 1$, quando $(k \longrightarrow +\infty)$. Desta forma, $\langle y^k, y \rangle \geq \dfrac{1}{2}$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Assim,

$$\begin{aligned} +\infty \longleftarrow f(x^k) - r\langle x^k, y^* \rangle &= \|x^k\| \left(\frac{f(x^k)}{\|x^k\|} - r \left\langle \frac{x^k}{\|x^k\|}, y \right\rangle \right) \\ &= \|x^k\| \left(\frac{f(x^k)}{\|x^k\|} - r \left\langle y^k, y \right\rangle \right) \\ &\leq \|x^k\| \left(\eta - r\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

O que implica $0 < \left(\eta - r\dfrac{1}{2} \right)$, isto é, $r < 2\eta$, absurdo. Portanto, se $f - \langle \cdot, x^* \rangle$ é coerciva para todo $x^* \in \mathbb{R}^n$, então a função f é supercoerciva.

(1) $\Longrightarrow$ (4). Seja $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)$, segue-se da afirmação (1) do Teorema 3.4 que

$$\varphi_{\partial f}(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle < +\infty. \tag{4.16}$$

Agora, sejam $(x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathrm{Gr}(\partial f)$ e $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)$ fixo, porém arbitrário.

Como f é supercoerciva implica que f é coerciva. Assim, existe $r > 0$ tal que $f(x) > \|y^* - x^*\| \cdot \|x - y\|$, sempre que $\|x - y\| > r$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x - y, y^* - x^* \rangle \leq \|x - y\| \cdot \|y^* - x^*\|.$$

Assim, por transitividade,

$$\langle x - y, y^* - x^* \rangle < f(x). \tag{4.17}$$

Tomando o supremo no $\mathrm{Gr}(\partial f)$ na desigualdade (4.17), tem-se que

$$\sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} \langle x - y, y^* - x^* \rangle \leq f(x).$$

O que é equivalente a

$$- \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle \leq f(x).$$

Da finitude de f, tem-se que

$$- \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle \leq f(x) < +\infty, \ \forall (x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathrm{Gr}(\partial f).$$

Assim, pela definição da função Fitzpatrick dada em (3.6), obtém-se que para todo $(x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \mathrm{Gr}(\partial f)$,

$$\varphi_{\partial f}(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle - \inf_{(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(\partial f)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle < +\infty. \tag{4.18}$$

Portanto, de (4.16) e (4.18), seque-se que

$$\varphi_{\partial f}(x, x^*) < +\infty, \ \forall (x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

■

Capítulo 5

Considerações finais

Destaca-se que a extensão feita por Martínez-Legaz e Théra em [14] para representar convexamente toda a classe de operadores monótonos maximais pela função Fitzpatrick associada foi fundamental para o desenvolvimento da prova do Teorema de Sobrejetividade apresentado neste trabalho no espaço euclidiano.

Ter optado pelo $\mathbb{R}^n$, para o ambiente de trabalho, foi primordial para a elaboração de exemplos e de provas mais simplificadas. Além disso, tal escolha foi essencial para a proposta do Teorema 4.7, que é uma contribuição teórica deste trabalho, onde associa a propriedade de supercoercividade da f convexa e s.c.i. com a finitude das funções conjugada e Fitzpatrick do subdiferencial da f.

Também foi realizado um esforço em determinar a função Fitzpatrick de alguns operadores monótonos maximais especiais, bem como foram apresentadas algumas provas de resultados importantes que não são comumente presentes na literatura.

Observou-se que a função Fitzpatrick, além de embasar a prova do Teorema principal, funcionando como um meio para caracterizar operadores monótonos maximais, também garante a sobrejetividade de operadores monótonos maximais cuja função Fitzpatrick é de valor finito. Em particular, as aplicações do Teorema de Sobrejetividade caracterizaram substancialmente o subdiferencial de uma função f convexa, própria e s.c.i.. Finalmente, as possíveis linhas de trabalhos futuros são:

1. O estudo e aplicação dos conceitos utilizados nesta dissertação em espaços de

Banach reflexivos quaisquer;

2. Obter novos resultados baseados nas propriedades da função Fitzpatrick.

Referências Bibliográficas

[1] Bauschke, H. H., Borwein, J. M. - *Combettes, Essential smoothness, essencial strict convexity, and Legendre Funtions in Banach Spaces*, Commum. Contemp. Math. 3 (2001), 615-547.

[2] Beer, G. - *Topologies on closed and closed convex sets, series mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1993.

[3] Brezis, H. - *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2010.

[4] Burachik, R. S., Iusem, A. N. - *Set-valued mappings and enlargements of monotone operators*, Springer, 2008.

[5] Burachik, R. S., Svaiter, B.-F. - *Maximal monotone operators, convex functions and a special family of enlargements*, Set-Valued Anal. 10 (2002), 297-316.

[6] Federer, H. - *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.

[7] Fitzpatrick, S. - *Representing Monotone Operators by Convex Functions*, Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. 3 (1988), 59-65.

[8] Hiriart-Urruty, J.-B., Lemaréchal, C. - *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer, 2004.

[9] Iusem, A. N. - *Métodos de ponto proximal em Otimização*, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1995.

[10] Izmailov, A., Solodov, M. - *Otimização*, Vol. 1, IMPA, 2014.

[11] Lima, E. L. - *Curso de Análise*, Vol. 2, IMPA, 2014.

[12] Martínez-Legaz, J.-E. - *Some Generalizations of Rockafellar's Surjectivity Theorem*, Pacific Journal of Otimization 4 (2008), 527-535.

[13] Martínez-Legaz, J.-E., Svaiter, B.-F. - *Monotone operators representable by l.s.c. convex functions*, Set-Valued Anal. 13 (2005), 21-46.

[14] Martínez-Legaz, J.-E., Théra, M. - *A convex representation of maximal monotone operators*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 4 (2001), 243-247.

[15] Minty, G. J. - *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert Space*, Duke Math. Journal 29 (1962) 341-346.

[16] Moreau, J. J. - *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien*, Bulletin de la Soc. Math. France, 93 (1965) 273-299.

[17] Rockafellar, R. T - *Convex Analysis*, Princeton Univercity Press, 1972.

[18] Rockafellar, R. T - *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Transactions of the American Mathematical Society 149 (1970), 75-88.

[19] Simons, S., Zalinescu, C. - *A new proof for Rockafellar's characterization of maximal monotone operators*, Proceedings of the American Mathematical Society 132 (2004), 2969-2972.

[20] Van Tiel, J. - *Convex Analysis*, British Library, 1984.