UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

NIXON DA SILVA MOÇAMBITE

SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Manaus – AM
2016

NIXON DA SILVA MOÇAMBITE

SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas - UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa 01: Processo de Ensino e Aprendizagem

ORIENTADOR: Prof. Dr. LUIZ CARLOS CERQUINHO DE BRITO

Manaus-AM
2016

Ficha Catalográfica

M687s

Mocambite, Nixon da Silva

Situações didáticas na aprendizagem matemática na perspectiva de construção do conhecimento / Nixon da Silva Mocambite. 2016

216 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Luiz Carlos Cerquinho de Brito

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Situação didática. 2. Diálogo. 3. Tomada de consciência. 4. Conhecimento matemático. I. Brito, Luiz Carlos Cerquinho de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

NIXON DA SILVA MOÇAMBITE

SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas - UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Carlos Cerquinho De Brito (Orientador e Presidente)
PPGECIM – UFAM

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira (Membro interno)
PPGECIM – UFAM

Prof. José Luiz de Souza Pio (Membro interno)
PPGECIM – UFAM

Prof. Dr. Ana Oliveira Castro dos Santos (membro externo)
FACED – UFAM

Manaus, 19 de Dezembro de 2016

DEDICATÒRIA

À memória de meu falecido pai que quando em vida me ensinou, por meio de seu testemunho, a trilhar o caminho da verdade e da justiça. E mesmo depois de morto ainda é meu maior exemplo de vida.

À minha mãe, escolhida por Deus pra me gerar em seu ventre e me dar a vida. E, que independente das circunstâncias, jamais deixou de me amar.

À minha família, meu maior patrimônio nesta vida, especialmente às minhas filhas Nicolly e Rayla NIckelly que são minha herança da parte de Deus.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, por me dar a oportunidade e os recursos necessários para concluir um mestrado. Sem Ele, nada disso seria realidade, a sua graça e a sua misericórdia me sustentaram do início até o fim dessa jornada.

À minha família que sempre esteve ao meu lado, orando por mim, mesmo quando estive ausente, não abriram mão de mim, mas entenderam que esse momento era necessário e que a vitória seria de toda a família.

À minha filha Nicolly, especialmente, que tanto me ajudou em todas as fases do trabalho. Que Deus a abençoe cada vez mais e, que ela possa ir mais além do que eu e conquistar muito mais.

À minha esposa Renata que sempre acreditou em mim, mesmo não entendendo muito a questão epistemológica, sempre me deu apoio moral, principalmente, nos momentos de grande dificuldade.

Á minha filha Down Rayla Nickelly, milagre de Deus, que eu amo tanto; que nos momentos de angustia e ansiedade me alegrava com seu amor e carisma tão sinceros e especiais.

Ao professor Cerquinho meu orientador que me acompanhou ao longo do curso sempre muito prestativo e paciente comigo. O qual nos momentos de angustia e apreensão, sempre teve uma palavra de ânimo e motivação.

À minha igreja que sempre orou por mim, pedindo a Deus que me ajudasse a concluir o trabalho.

Aos estudantes sujeitos da pesquisa e aos seus responsáveis que confiaram no trabalho e os autorizaram a participar, cientes de que a grande contribuição do projeto estava na aprendizagem matemática de seus filhos.

À Dona Mariete, diretora da escola Lucila Freitas onde apliquei o projeto, a qual sempre se mostrou muito gentil ao ceder os espaços da biblioteca, do telecentro e do refeitório da escola para a realização das atividades.

À todos os colegas de curso com os quais eu convivi e, por meio das experiências compartilhadas me ajudaram nessa construção.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”.

Freire (1997, p. 25)

RESUMO

O estudo teve por finalidade investigar “Como a configuração didático-pedagógica pautada nas situações didáticas pode favorecer a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático no ensino fundamental?”, tendo em vista que o modelo de ensino de matemática vigente, em geral, tem como abordagem predominante a exposição sumária de conteúdos, os exercícios e a avaliação que geralmente se resume em provas escritas. Com base na questão de pesquisa, o trabalho teve por objetivo “estudar o processo de aprendizagem matemática no 7º ano do ensino fundamental a partir de situações didáticas na perspectiva da construção do conhecimento”. De forma específica, o estudo buscou caracterizar e analisar a mobilização dos estudantes no desenvolvimento de sequências didáticas com conteúdos de matemática; discutir a importância das manifestações orais dos estudantes diante de situações didáticas como condição para a aprendizagem e construção do conhecimento matemático; evidenciar os mecanismos de tomada de consciência dos estudantes por meio da interpretação e da explicação de suas ações frente à situações didáticas com material concreto e; analisar e refletir sobre as implicações das situações didáticas em relação ao processo de ensino e aprendizagem de matemática. Dessa forma, para responder a questão de pesquisa e alcançar os objetivos propostos, optou-se pela abordagem qualitativa, na modalidade experimental, onde por meio do planejamento, concepção, aplicação e avaliação de uma sequência didática, conforme orientação de Zabala, fizemos uma intervenção pedagógica, pautada, principalmente, nas bases teóricas da epistemologia genética de Jean Piaget, na educação dialógica de Paulo Freire e, nos pressupostos metodológicos das situações didáticas de Guy Brousseau. Na primeira fase da pesquisa, referente a análise dos dados da observação de sala de aula, das entrevistas e do teste diagnóstico, os achados indicam que o ensino de matemática fundamenta-se numa concepção predominantemente empirista, com exposição de conteúdos e repetição de exercícios, um modelo de ensino antidialógico e unilateral, ou seja, sem interação dialógica entre professor e estudantes como condição necessária à aprendizagem e a construção do conhecimento matemático, donde resulta uma aprendizagem baseada na memorização mecânica de regras, fórmulas e algoritmos, sem tomada de consciência e, portanto, sem compreensão. Consequentemente, a análise do teste diagnóstico, revela defasagem na aprendizagem dos sujeitos em relação a conceitos elementares da matemática. Do ponto de vista epistemológico, os sujeitos apresentam dificuldades de abstração e raciocínio lógico, o que mostra a limitação da concepção empirista enquanto base epistemológica para o ensino e aprendizagem de matemática. Em contra partida, o estudo com as situações didáticas trouxe a perspectiva de uma nova dinâmica e organização didático-pedagógica da sala de aula de matemática, apoiada na educação dialógica de Freire, donde o diálogo como práxis do conhecimento construído a partir da ação e da reflexão do sujeito. Nessa perspectiva, a análise das atividades desenvolvidas pela estratégia das sequências didáticas, com mediação do professor-pesquisador, indicam condições favoráveis e necessárias à aprendizagem e construção do conhecimento matemático ao estimular a mobilização, a manifestação oral, especialmente o diálogo em sala de aula, e a tomada de consciência dos estudantes, enquanto executam e explicam suas produções.

Palavras – chave: Situação Didática, Diálogo, Tomada de consciência, Conhecimento Matemático.

ABSTRACT

The aim of this study was to delve about "How can the configuration didactic-pedagogical based on didactic situations, to further the learning and formation about the knowledge mathematical in elementary education?", taking into consideration that the teaching form in the actual math, at large, there is predominant approach the summary exposure of contents, exercises and valuations that usually resume in writing valuations. Established on research, the aim this study “It was study about the process around of learning mathematic in the 7th year elementary established on didactic situations in the perspective construction knowledge". Specifically, this study looked for characterize and analyse about the mobilization students in the development of continuations didactics with subjects mathematic; to discuss about the importance students oral manifestations opposite didactic situations as conditions for learning and formation about knowledge mathematical; to evidence the mechanism taking conscience in the students through interpretation and explanation of their actions in relation to didactic situations with realize material; analyze and reflect about the implications in the didactic situations in relation to method teaching and learning mathematical. There for, to answer about the research and to reach the proposed objectives, It was choose by qualitative approach, in the experimental modality, where through the planning, conception, application and evaluation of a didactic sequence according orientation of Zabala, we made a pedagogical intervention, based mainly on the theoretical bases of the genetic epistemology by Jean Piaget, on the dialogical educations Paulo Freire and on the methodological assumptions of the didactic situations by Guy Brousseau. In the first phase of the research, referring to analysis of data from classroom observation, interviews and diagnostic tests, the findings indicate that teaching mathematics is based on a predominantly empiricist conception, with contents exposition and repetition of exercises, a example antidialogical and unilateral teaching, in other words, without dialogical interaction between teacher and students as a necessary condition for learning and the construction about mathematical knowledge, resulting in a learning based on the mechanical memorization of rules, formulas and algorithms, without taking conscience, therefore, without understanding. Consequently, analysis of the diagnostic test reveals a gap in the subjects learning in relation to simple concepts of mathematics. From the epistemological point of view, the subjects show difficulties of abstraction and logical reasoning, which show the limitation of the empiricist conception as epistemological base for the teaching and learning mathematics. On the hand, the study about didactic situations brought the perspective to a new dynamic and didactic-pedagogical organization in the classroom of mathematic, incumbent in the dialogical educations Freire, where dialogue as praxis knowledge constructed since a action and reflection of the subject. In this perspective, the analysis about the activities developed by strategy of the didactic sequences, with intercession by teacher-researcher, indicate favourable and necessary conditions for learning and construction about the mathematical knowledge when stimulate the mobilization, oral expression, especially the dialogue in the classroom, and the taking conscience in the students, while they implementing and explaining their productions.

Keywords: Didactic Situation, Dialogue, Taking Conscience, Mathematical Knowledge.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação é resultado da inquietação de como ensinar matemática para que o estudante aprenda mais e melhor, ou, como fazer da sala de aula um ambiente onde os estudantes tenham a possibilidade de desenvolver de forma autônoma suas capacidades e habilidades cognitivas, de tal forma que supere a técnica memorística de regras e fórmulas, que predomina no ensino de matemática vigente, e alcance o nível da conceituação, visto que em todas as avaliações de rendimentos escolares, destacam-se sérias limitações na aprendizagem desta disciplina, resultando em altos índices de reprovação e comprometendo a formação de estruturas lógicas matemáticas dos estudantes da educação básica.

A situação constituiu o que se convencionou chamar de “crise no ensino da matemática”, produzida por diversos fatores, especialmente quanto à abordagem curricular, pedagógica, didática e metodológica dos processos de ensino e aprendizagem do conteúdo matemático. Em geral, a matemática trabalhada em sala de aula é, muitas vezes, puramente teórica e sem sentido na vida dos estudantes e tem como abordagem predominante a exposição sumária de conteúdos, os exercícios e a avaliação, que pra muitos professores se resume à aplicação de provas escritas.

Esse modelo de educação baseado num ensino mecânico não favorece o diálogo entre os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Dessa forma, as capacidades de investigação, criação e argumentação não são desenvolvidas; sendo esse o principal motivo, pelo qual, muitos estudantes têm dificuldades de manifestar-se oralmente nas aulas de matemática, pois têm medo de errar e serem vítimas de constrangimentos. E, quando se manifestam dão respostas prontas, memorizadas e repetidas, sem a devida compreensão e, portanto, sem justificativa.

Para Freire (1988), esta concepção de ensino caracteriza-se em um modelo de educação bancária, onde o poder de criatividade dos educandos é anulado ou é minimizado, estimulando-se sua ingenuidade e não sua criticidade, satisfazendo os interesses dos opressores. Onde o professor monologa, falando e escrevendo várias vezes a mesma coisa, quase sempre de um mesmo jeito e o estudante, assisti, ouve, decora e repete as informações. Nesta concepção, estudar é memorizar conteúdos, sem significados.

Nesse contexto, as pesquisas em Educação Matemática, ao mesmo tempo em que trazem grandes contribuições para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, denunciam falhas nesse processo, revelando-nos a necessidade de mudanças na configuração de sala de aula no que se refere à organização didático-pedagógica, porém, esta nova configuração depende, ou só será possível, se antes de tudo, houver uma mudança de concepção dos docentes em relação à aquisição do conhecimento matemático e à importância desse conhecimento não só para o sucesso escolar, mas, principalmente para a formação do indivíduo enquanto cidadão.

Sobre a concepção epistemológica do professor, alguns acreditam que o conhecimento matemático resulta de uma predisposição genética (talento, dom), para outros é transmitido por pressão do meio sobre uma *tabula rasa* (aprende-se porque o meio ensina no sentido amplo), para outros provém de uma construção (BECKER, 2012, p. 19). Sendo esta última também a nossa visão epistemológica, de que o conhecimento matemático não pode ser transferido, mas é construído a partir da constante interação entre o estudante e o ambiente de aprendizagem onde está inserido, nele incluídos o professor e os recursos didáticos utilizados.

No entanto, é fato, que tradicionalmente no ensino de matemática, há a predominância de uma concepção empirista baseada na transmissão de conteúdos, donde se acredita que a aprendizagem matemática seja possível apenas e tão somente através da percepção e da repetição. Onde o estudante é como um ser passivo, que vê, ouve e reproduz o que o professor ensina, sem participação ativa no processo, um simples receptor de informações, incapaz de pensar por si só e construir o próprio conhecimento.

Nesse sentido, as atividades de matemática propostas em sala de aula são cada vez mais questionadas em sua relevância para o desenvolvimento dos estudantes da Educação Básica; o que se ensina e se aprende em Matemática, é pouco utilizado ou aplicado pelos estudantes no seu cotidiano. Insistamos que em geral, no ensino da matemática, constata-se, ainda, a predominância do esquema de uma pedagogia tradicional, configurada em três passos: 1) conteúdo e exemplos; 2) exercícios; e 3) avaliação.

Essa sequência não contempla o diálogo entre os sujeitos, nem para identificar os passos, os erros, os acertos, nem para fazer avançar a aprendizagem dos conteúdos de matemática. Isto exige o desenvolvimento de alternativas metodológicas no âmbito dos processos de ensino e aprendizagem em matemática, tanto em relação à perspectiva de construção do conhecimento, como no processo de diálogo entre os sujeitos acerca da aquisição do conhecimento matemático.

Para tanto, precisamos, antes de tudo, repensar nossa prática docente e, partir em busca de desenvolver novas formas de ensinar matemática que favoreça e valorize a relação dialógica entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática e, por conseguinte, que atenda as necessidades reais do estudante. Isto é, elaborar estratégias didáticas de ensino que estimulem no estudante o raciocínio lógico, a criatividade, a oralidade e a capacidade de manejar conceitos em situações reais.

Em outros termos, conforme Brousseau (2008, p. 21) é preciso criar situações didáticas, um contexto que cerca o estudante, nele incluídos o professor e o sistema educacional, que façam funcionar a produção de conhecimentos e que estes sejam úteis para resolver diferentes tipos de problemas dentro e fora da escola. Nessa perspectiva, de necessidade de mudança no ensino de matemática, esta pesquisa tem por finalidade investigar "Como a organização didático-pedagógica pautada nas situações didáticas pode favorecer a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático no ensino fundamental?".

Para tanto, buscamos responder as seguintes questões norteadoras: Quais os mecanismos cognitivos envolvidos na aprendizagem do conteúdo matemático? Qual a tomada de consciência dos estudantes diante de situações didáticas envolvendo problemas de matemática? Como o estudante manifesta oralmente a sua aprendizagem ou dificuldade de aprendizagem em Matemática? E, por fim, Quais os limites e possibilidades das situações didáticas em relação à construção do conhecimento matemático.

Portanto, no trabalho de sala de aula um dos pressupostos fundamentais é que o professor elabore e aplique sequências de atividades, de modo que o próprio estudante se insira numa dinâmica interativa e autônoma para conquistar e promover a própria aprendizagem e construção do conhecimento matemático. Pois, como afirma Piaget (1996) "o começo do conhecimento é a ação do sujeito sobre o objeto, ou seja, o conhecimento humano se constrói na interação homem-meio, sujeito-objeto".

Nesse contexto, vemos as sequências didáticas como estratégias viáveis de ensino para a aprendizagem matemática, pois, permitem a simulação de situações-problema presentes no cotidiano do estudante as quais exigem soluções reais e imediatas, e isso estimula o planejamento das ações e a tomada de consciência. Além disso, possibilita a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural pelo estudante.

Enfim, busca-se por meio da concepção, desenvolvimento e avaliação de sequências didáticas, propiciar ambientes de interação entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática com o objetivo de "estudar o processo de aprendizagem matemática no 7º ano do ensino fundamental a partir de situações didáticas na perspectiva da construção do conhecimento". Situações que possibilitem os estudantes agir, refletir, falar e evoluir por iniciativa própria. Pois, entendemos que o conhecimento parte da ação de uma pessoa sobre o meio em que vive, e, a partir daí coisas e fatos são inseridos em sua estrutura cognitiva de forma organizada por meio do processo de assimilação e adquirem significado.

Especificamente, buscamos caracterizar e analisar a mobilização e a aprendizagem dos estudantes no desenvolvimento de sequências didáticas com conteúdos de matemática; discutir a importância da manifestação oral dos estudantes diante das situações didáticas como condição para a aprendizagem matemática; explicitar os mecanismos de tomada de consciência dos estudantes por meio da interpretação e da explicação de suas ações frente às situações didáticas; e, analisar e refletir sobre as implicações das situações didáticas no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos, que serão apresentados a seguir, possibilitando uma visão geral da pesquisa como um todo. No capítulo um, descrevemos o "Percurso Metodológico" da pesquisa, o qual está dividido nos seguintes itens: "contexto e sujeitos da pesquisa", os "fundamentos da metodologia", a "dinâmica metodológica da pesquisa" e "método de análise dos dados", a fim de proporcionar uma visão geral dos caminhos percorridos durante todo o processo de investigação.

O segundo capítulo, sob o título "Educação e Construção do Conhecimento Matemático", contém o estado da arte a respeito do tema apresentado, na intenção de oferecer o aporte teórico que embasará o desenvolvimento da dissertação, dando sustentação científica a presente pesquisa e respaldo teórico às demais etapas do trabalho. Neste capítulo tratamos da Educação matemática como área do conhecimento das ciências sociais e humanas, a construção do conhecimento segundo Piaget, a didática da matemática e a teoria das situações didáticas e, as concepções pedagógicas de Paulo Feire, em especial, a Educação dialógica.

No capítulo três, tratamos da análise e discussão dos resultados da observação de sala de aula, das entrevistas e do teste diagnóstico, sob o título maior "Dinâmica e representação das aulas de matemática", desdobrando-se nos seguintes itens: "A sala de aula de matemática: Organização e ação dos sujeitos no trabalho pedagógico", "As vozes dos sujeitos: Concepções, perspectivas e paradigmas do ensino e da aprendizagem da matemática" e "A mobilização cognitiva dos sujeitos na aprendizagem matemática", os quais sustentaram cientificamente as recomendações e conclusões a que nos propomos nesse estudo.

No capítulo quatro, descrevemos a "Intervenção Pedagógica com Sequências Didáticas para a Aprendizagem Matemática", comtemplando, as fases de concepção, aplicação e avaliação de uma sequência didática, planejada com base nos resultados do capítulo três. Por fim, as análises e discussões sobre as implicações da sequência didática para a aprendizagem matemática na perspectiva de construção do conhecimento deram suporte às "Considerações finais" da pesquisa. Apresentando, dessa forma, possíveis encaminhamentos e recomendações a partir das análises feitas, para uma nova configuração didático-pedagógica de sala de aula no ensino de matemática.

1. PERCURSO METODOLÓGICO

1. 1. Contexto e sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi realizada na escola pública municipal Lucila Freitas, tendo como sujeitos da pesquisa 19 estudantes de duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental do turno vespertino com idade entre 12 e 14 anos. A escolha e a participação dos sujeitos no projeto se deram mediante documentos de autorização assinados por seus responsáveis em duas vias, bem como "termo de assentimento do menor" assinado pelos próprios estudantes, conforme recomendação do comitê de ética.

A escolha do 7º ano não ocorreu de forma aleatória, justificando-se por uma questão conceitual relacionada aos objetivos desta pesquisa, quando se propõe a estudar e compreender os processos lógicos necessários à construção do conhecimento matemático, de acordo com o nível de desenvolvimento cognitivo dos sujeitos desta fase, os quais, segundo Piaget, já alcançaram o nível das operações formais, onde o raciocínio, antes concreto, torna-se abstrato, ou seja, o adolescente passa a ter o domínio do pensamento lógico e dedutivo, o que o habilita à experimentação mental. Isso implica, entre outras coisas, relacionar conceitos abstratos e raciocinar sobre hipóteses.

De outra forma,

> surge a capacidade de desvincular, ao menos parcialmente, o pensamento do mundo material, isto é, conseguir raciocínios sobre eventos que nunca aconteceram ou até são impossíveis de acontecer. O pensar, então, conquista o universo das noções abstratas, das ideias, das leis da natureza e das normas morais. Neste nível, o universo do discurso é um universo de possibilidades dentro do qual a realidade material esta contido apenas como uma parte bem limitada (KESSELRING, 1990, p. 5).

Nessa perspectiva, durante a intervenção didática os sujeitos da pesquisa, foram submetidos a situações didáticas, onde por meio das produções escritas e da manifestação oral dos sujeitos, resultantes das interações entre professor, estudante e o conhecimento matemático, buscou-se estudar e compreender os mecanismos cognitivos acionados para uma tomada de consciência, quando submetidos a uma sequência de atividades (planejada e com objetivos específicos bem definidos) com conteúdos de matemática, ou seja, o processo de aprendizagem matemática na perspectiva da construção do conhecimento, pontuando as dificuldades, as dúvidas, os acertos e os erros dos estudantes.

Os instrumentos utilizados para coleta de dados durante a aplicação do projeto foram observação participante, entrevista semiestruturada e teste diagnóstico na fase exploratória da pesquisa; e, roda de conversas, pequenas entrevistas individuais ou em grupo, testes avaliativos, além dos registros da mobilização física e das manifestações orais dos estudantes por meio de filmagem, fotos, gravação de voz e produções escritas, por meio dos quais buscamos analisar, interpretar e refletir sobre as atividades cognitivas dos sujeitos durante o desenvolvimento da sequência didática.

1. 2. Fundamentos da metodologia

Esta pesquisa está pautada numa abordagem qualitativa, tendo em vista o objeto de estudo e as características do fenômeno a serem investigados, os quais se referem a interação com sujeitos no espaço escolar, a sala de aula, buscando apreender o movimento do ensino e da aprendizagem na construção do conhecimento, por estudantes do Ensino Fundamental. Nesse contexto, adotamos como modalidade de pesquisa a experimentação, contemplando as fases de planejamento, concepção, aplicação, análise e avaliação de uma sequência didática, definida por Zabala (1998, p. 18), como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim, conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Esta referência está centralizada na perspectiva da epistemologia genética de Jean Piaget quanto aos processos cognitivos do sujeito, com ênfase na abstração, reflexão e tomada de consciência. De outro lado, a orientação metodológica tem por referência o conceito de Diálogo em Paulo Freire, pautado em duas dimensões: ação e reflexão. Ambas as referências teóricas estão implicadas na dinâmica metodológica adotada, a saber: os processos didáticos de Gui Brousseau, quais sejam: situação de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, definidas como modelos de interação de um sujeito com um meio determinado, onde se relacionam estudante, professor e conhecimento, as quais são interligadas e podem alternar-se em grau de importância e domínio ao longo do processo.

Ao tomarmos como objeto de estudo as circunstâncias que regem a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático, as situações didáticas apresentam-se viáveis como metodologia de investigação, pois têm como objetivo modelar situações de ensino e aprendizagem de matemática, que favoreçam a interação entre os estudantes e entre estes e o professor para que a ação física, cognitiva e verbal do sujeito viabilize a tomada de consciência em busca de adaptar-se ao meio criado por estas situações.

Nesse sentido, durante a aplicação do projeto, sobretudo no momento da intervenção didática, analisamos a relação entre estudantes, professor e conhecimento por meio de um conjunto de situações, criadas com o objetivo de favorecer a mediação entre o sujeito e o conhecimento matemático específico – sistema de numeração decimal e às operações aritméticas de adição, subtração e multiplicação – abstraído da própria proposta curricular do Ensino Fundamental.

1. 3. Dinâmica metodológica da pesquisa

1. 3. 1. O contexto didático-pedagógico de sala de aula

Na fase exploratória de coleta de dados fizemos entrevistas, observação de sala de aula e teste diagnóstico, buscando compreender o contexto de realização da pesquisa nas dimensões epistemológica, associada as características do saber; didática, associada às características do funcionamento do ensino; e cognitiva, associada às características dos sujeitos para os quais o ensino é direcionado, as quais permeiam e definem a configuração didático-pedagógica de sala de aula, ou seja, definem a relação ensino e aprendizagem de matemática.

Em caráter *strictu sensu*, buscamos verificar e analisar as concepções, as crenças, os valores e as expectativas dos estudantes acerca da matemática, do seu ensino e de suas implicações para vida, para então, definirmos conforme as necessidades dos sujeitos a melhor proposta didática a ser trabalhada, quanto as atividades a serem desenvolvidas, os materiais didáticos utilizados, e, principalmente, os objetivos a serem alcançados com cada atividade proposta no momento da intervenção didática.

O trabalho de pesquisa de campo começou com a observação de sala de aula, compreendendo dez aulas de matemática, ministradas no 7º ano do ensino fundamental, sendo 5 aulas na turma A, e 5 aulas na turma B. Os registros das observações foram feitos, em menor parte, por meio de gravação de voz, fotografias e filmagens, mas, em grande parte estes registros foram feitos num diário de campo conforme roteiro de observação previamente elaborado (Ver apêndice B). O período de observação nos proporcionou uma síntese sobre a configuração didático-pedagógica da sala de aula das turmas investigadas, de maneira a compor e complementar o repertório da pesquisa.

Os aspectos que observamos em todas as aulas, em relação à intervenção pedagógica do professor foram: planejamento e sequência da aula; contrato didático e objetivo da aula; apresentação do conteúdo: desdobramentos e conceitos; procedimentos pedagógicos: exercícios, orientação oral, leitura (individual e em grupo), trabalho em grupo; interação com os estudantes; recursos didáticos; e avaliação da aprendizagem. Em relação a ação dos estudantes em sala de aula, observamos: envolvimento e participação; motivação e interesse; trabalho em equipe e interação; manifestação oral e relação com o professor.

De modo geral, buscamos entender a relação triangular professor-estudante-conhecimento (BROUSSEAU 2008), observando-se de forma específica os seguintes aspectos: interação didático-padagógica entre professor e estudante; elaboração de conteúdos e metodologias entre professor e conhecimento e; estratégias de aprendizagem entre estudante e conhecimento.

Nesse sentido, todos os acontecimentos, fatos ou fenômenos ocorridos durante a dinâmica das aulas, referentes à mobilização e manifestação oral do professor e dos estudantes, bem como o relacionamento entre estes (por mais simples que pudessem parecer), eram registrados no diário de campo. Por exemplo, a professora escrevendo no quadro os exercícios; o contrato didático estabelecido pela professora; a falta de explicação do conteúdo e dos conceitos envolvidos; as conversas paralelas constantes; os estudantes mais interessados consultando outros exercícios do caderno já corrigidos pela professora para fazerem comparações.

Mais, um estudante que ajudava o colega ao lado a fazer seus exercícios; as estudantes que se maquiavam no fundo da sala; a professora pedindo silêncio ou avisando que o tempo estava passando; a preocupação dos estudantes em fazer as tarefas e apresentar à professora para ganhar o visto no caderno; a falta de interesse de alguns estudantes que próximo do final da aula apenas copiavam do colega e apresentavam à professora.

Também, a postura complacente da professora que permaneceu sentada em sua carteira durante toda a aula atualizando diários e corrigindo provas, enquanto aguardava os estudantes com seus cadernos; a quebra de contrato didático, quando não houve a correção dos exercícios no quadro etc, são exemplos de situações observadas, registradas e posteriormente analisadas na busca de elementos pertinentes aos propósitos do objeto de estudo de nossa pesquisa.

Após cada aula observada, fazia-se a leitura de todos os registros a fim de ajustar ou registrar alguma de nossas percepções que porventura não tenha sido feito e que se achava importante de ser analisado, utilizando-nos, nesse caso de palavras chaves que nos reportassem ao contexto do fato ocorrido. Essa leitura preliminar, embora flutuante, já configurava-se, como uma breve análise do que fora observado e registrado, pois nos permitiu verificar alguns "achados", compará-los com os resultados esperados e ter uma primeira impressão de sua relevância em relação aos objetivos da pesquisa.

Na continuação da pesquisa de campo, seguimos com a coleta de dados por meio das entrevistas com os 19 estudantes, conforme roteiro previamente elaborado (Ver apêndice A), as quais foram realizadas paralelas às observações de sala de aula, utilizando-se os espaços do telecentro, da biblioteca e do refeitório da escola. Com as entrevistas buscamos compreender como a dinâmica didático-pedagógica relacionada ao processo de ensino e aprendizagem de matemática se configura na série em questão, e, também, evidenciar as concepções e as perspectivas epistemológicas suscitadas no discurso dos sujeitos, acerca deste processo e de suas implicações para sua formação dentro e fora do contexto escolar.

Figura1: Entrevista com o estudante Ne.

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Todas as entrevistas foram realizadas mediante gravação de áudio previamente autorizada via documentos assinados pelos estudantes e por seus responsáveis (Ver apêndices C e D).

Por último, na fase de coleta de dados, aplicamos um teste diagnóstico (Ver anexo A) composto de dezesseis questões com conteúdos matemáticos do 6º ano do ensino fundamental envolvendo ordem e classe, noção de razão, proporção e probabilidade, operações com números naturais – até a divisão, noção de distância e medida de comprimento, noção de fração e porcentagem, figuras geométricas planas e sólidos geométricos. O teste foi aplicado nas duas turmas de 7º ano do ensino fundamental; precisamente, 77 estudantes que estiveram presentes naquela oportunidade.

Com a aplicação do teste diagnóstico não tivemos a intenção apenas de contabilizar o número de erros e acertos, mas, principalmente, a partir dos registros escritos dos estudantes, buscamos analisar e categorizar as causas das dificuldades e das limitações apresentadas; os mecanismos cognitivos acionados para uma tomada de consciência ao operar com a matemática; o quanto os estudantes compreendem o que fazem por meio de abstrações e do raciocínio lógico usado para resolver as questões; especificamente, como e em que grau os estudantes estabelecem relações lógicas de correspondência, comparação, classificação, sequenciação, seriação, conservação e inclusão consideradas por Piaget como base para a construção das operações lógico-matemáticas.

Figura 2: Aplicação do teste diagnóstico

Fonte: Dados da pesquisa empírica

A fase de coleta e análise de dados nos deram a possibilidade de refletirmos sobre o perfil dos sujeitos, suas concepções e seu conhecimento prévio, sobre a sala de aula e o ensino que está sendo desenvolvido, sobre o conteúdo e as razões para ensiná-lo e aprendê-lo e, sobre como se aprende para fazermos a melhor escolha didática, com potencial latente de atender as expectativas de nossa pesquisa quanto ao estudo do processo de aprendizagem e de construção do conhecimento matemático na educação básica.

1. 3. 2. Experimentação didática

Tomando a atividade ou tarefa, como unidade fundamental de análise processual da prática docente (ZABALA, 1998, p. 17) e, levando em conta o valor que estas atividades adquirem quando as colocamos numa série ou sequência significativa, ampliamos esta unidade elementar para uma nova unidade de análise, qual sejam as sequências de atividades ou sequências didáticas, considerada por Zabala (1998, p.18), "como unidade preferencial para análise da prática, que permitirá o estudo e a avaliação sob uma perspectiva processual, que inclua as fases de planejamento, aplicação e avaliação".

Dessa forma, com base nas análises e discussões feitas na primeira fase da pesquisa, principalmente quanto ao teste diagnóstico (com conteúdos de 6º ano) que nos revelou sérias limitações na aprendizagem dos sujeitos em relação a conteúdos básicos de matemática, os quais são pré-requisitos para o 7º ano, planejamos, elaboramos e aplicamos uma sequência didática (Ver anexo D), composta por 7 atividades práticas e dinâmicas; com problemas, situações-problema, desafios, jogos etc., envolvendo materiais concreto como material dourado, ábaco.

A elaboração da sequência didática demandou tempo de planejamento e análise das atividades, de escolha dos materiais didáticos e de definição dos objetivos ou resultados esperados, os quais se referem à compreensão da atividade cognitiva dos sujeitos, envolvendo os mecanismos lógicos do conhecimento matemático. As escolhas e definições foram feitas de acordo com as necessidades dos estudantes, pautando-se nos conceitos propostos por Piaget e Freire, visando favorecer a ação do sujeito, ambos mediados pelas situações didáticas de Brousseau; exigindo, portanto, toda uma preparação. Pais (2002, p.112) explica que:

> Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa

> didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter específico para pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula, Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso está atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório.

No desenvolvimento das atividades envolvendo as quatro operações básicas com número naturais, usamos o material dourado e o ábaco, a fim construir o algoritmo dessas operações; especificamente, construir o conceito de ordem e classe; além dos materiais concreto, usamos o recurso áudio visual, sempre com a intenção de promover a mobilização e a manifestação oral dos alunos, e, favorecer a tomada de consciência, frente a situações didáticas com conteúdo matemático.

Nesse sentido, o objetivo das atividades foi antes de tudo, promover um ambiente pedagógico de aprendizagem que permitisse ao estudante agir e fazer inferências sobre o objeto do conhecimento a fim de contribuir para o desenvolvimento de sua capacidade de investigação e argumentação. E, a partir dessa interação com o meio formado pelos próprios estudantes, o professor e os recursos ou materiais didáticos, fosse possível estabelecer e aperfeiçoar as operações lógico-matemáticas de correspondência, comparação, classificação, sequenciação, seriação, inclusão e conservação, as quais são condicionantes para a construção do conhecimento matemático.

No quadro a seguir apresentamos os conteúdos e os objetivos das atividades desenvolvidas pela estratégia da sequência didática.

Quadro 1: Conteúdos e objetivos da Sequência didática

Sequência didática	
Atividades	**Objetivos**
1. Conceito de unidade, dezena e centena	Construir o conceito de unidade, dezena e centena
2. Trabalhando ordem e classe	Construir o conceito de ordem e classe
3. Ampliando o conceito de ordem e classe	Construção do conceito de ordem e classe e de valor posicional
4. Adição com números naturais	Construção do algoritmo da adição
5. Subtração com números naturais	Construção do algoritmo da subtração
6. Multiplicação com números naturais	Construção do algoritmo da multiplicação

1. 4. Método de análise dos dados

Para análise e organização dos dados, utilizamos a Análise de conteúdo (AC), descrita nos pressupostos teóricos de Bardin (2011). A AC é um método de análise empregado na pesquisa qualitativa, que se presta a analisar diferentes fontes de conteúdos verbais ou não-verbais, ou seja, é uma técnica de análise das comunicações. Nesta pesquisa, fizemos a análise do conteúdo coletado nas entrevistas, nas rodas de conversa, nas produções escritas dos alunos e do que fora observado e registrado pelo professor pesquisador dentro e fora da sala de aula em seu diário de campo. O material coletado foi classificado por temas, categorias e organizado em tabelas e quadros que auxiliaram na compreensão e na discussão dos resultados.

Os dados foram coletados em dois momentos, na fase exploratória de coleta de dados e na experimentação da sequência didática. Consequentemente, foram feitas duas análises distintas – análise *a priori* e análise *a posteriori* – sobre o conjunto de textos produzido pela pesquisa, as quais seguiram as etapas inerentes à análise de conteúdo proposta por Bardin (2011), organizadas em três fases: 1) pré-análise, 2) exploração do material e 3) tratamento dos resultados, inferência e interpretação. No final, comparamos os resultados das duas análises a fim de avaliarmos as implicações da sequência didática aplicada para a aprendizagem e construção do conhecimento matemático.

Na primeira fase do processo de análise, tivemos o primeiro contato com os documentos de coleta de dados, quais sejam: diário de campo com registros da observação de sala de aula, entrevistas e testes diagnósticos, onde a partir de uma “leitura flutuante”, foi definido o *corpus* de análise, ou seja, escolhemos os documentos que de fato seriam analisados, e, a partir destes, formulamos hipóteses e objetivos. Em seguida, na segunda fase, foi feita a exploração do material, que consiste na construção das operações de codificação, considerando-se os recortes dos textos em unidades de registros, a definição de regras de contagem e a classificação e agregação das informações em categorias simbólicas ou temáticas.

Na terceira fase fizemos o tratamento dos resultados, inferência e interpretação, a fim de captar os conteúdos manifestos e latentes contidos em todo o material coletado (entrevistas, rodas de conversa, testes diagnósticos e avaliativos, e observação participante etc.). Por fim, foi feita uma análise comparativa, realizada através da justaposição das diversas categorias existentes em cada análise, ressaltando os aspectos considerados semelhantes e os que foram concebidos como diferentes. Os resultados foram confrontados com o referencial teórico adotado, dando assim subsídios científicos à pesquisa para que possa ser utilizada por outros estudos na área.

2. EDUCAÇÃO E CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Apresentamos neste capítulo um panorama da revisão de literatura realizado sobre o tema em questão, e que foi utilizado como aporte teórico para a fundamentação desta pesquisa, a fim de propor uma reflexão a cerca do processo de ensino e aprendizagem de matemática. Nesse sentido, discutimos propostas pedagógicas ou situações didáticas que favoreçam a interação entre os atores envolvidos no processo educacional como estratégia de ensino visando a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático por alunos do ensino fundamental. Assim, dividimos este capítulo em 4 seções.

Na primeira seção, baseando-se, principalmente, nos estudos de Fiorentini (1994), busca-se caracterizar a Educação Matemática enquanto campo profissional e científico, destacando sua atuação não só no âmbito da pesquisa, mas na área de atuação prática envolvendo as múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático em um contexto sociocultural específico (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 9). Essas relações são o foco principal desta pesquisa.

Na segunda seção, tem-se por finalidade explicar o processo de construção do conhecimento, embasando-se, principalmente, nas ideias de Jean Piaget, o qual por meio de seus estudos buscou compreender e explicar o processo de aprendizagem e construção do conhecimento como resultado da interação entre o organismo e o meio (Ramozzi-Chiarottino, 1988, p. 3). Em particular, destacamos os processos mentais específicos como condição necessária para a construção das operações lógico-matemáticas, a partir das quais é possível chegar ao conhecimento matemático.

Entre os principais conceitos de Piaget destacamos o meio, o sujeito epistêmico, a interação, a assimilação, a acomodação, a equilibração, adaptação, o déficit, a tomada de consciência, a abstração e a reflexão.

Na terceira seção, abordamos conceitos referentes à didática da matemática, em especial as ideias construtivistas de Guy Brosseau com a Teoria das Situações Didáticas, a qual nos fornece conceitos práticos relacionados diretamente à organização didático-pedagógica de sala de aula, ou seja, a relação entre professor, aluno e conhecimento. Nesse contexto, destacamos a situação didática, a situação a-didática e o contrato didático, conceitos importantes propostos por Guy Brousseau que inspiram e fundamentam esta pesquisa.

Na quarta e última seção, em oposição ao modelo tradicional de ensino baseado na “transmissão de conhecimento” por meio de um mecanismo de repetição, onde o aluno é um mero espectador, abordamos as concepções pedagógicas de Paulo Freire com a proposta de uma educação dialógica, humanista e libertadora que concebe o aluno como um ser autônomo em busca da liberdade, do direito de falar, de perguntar, de questionar, enfim de desvelar o mundo e comprometer-se com sua transformação.

2. 1. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

> A Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais e humanas, que estuda o processo de ensino e aprendizagem de matemática, caracterizando-se por uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico de Matemática e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar. Entretanto, sendo a prática educativa determinada pela prática social mais ampla, ela atende a determinadas finalidades humanas e a aspirações sociais concretas (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 5).

De acordo com o estudo de Kilpatrick (1992), pelo menos três fatos foram determinantes para o surgimento da Educação Matemática como campo profissional e científico. O primeiro fato é atribuído à preocupação dos próprios matemáticos e de professores de matemática sobre a qualidade das aulas quanto à reformulação do currículo escolar de matemática (início do século XX na Alemanha, sob a liderança de Félix Klein). O segundo fato é atribuído à iniciativa das universidades europeias, no final do século XIX, em promover institucionalmente professores secundários, o que contribuiu para o surgimento de especialistas universitários em ensino de matemática. O terceiro fato diz respeito aos estudos experimentais realizados por psicólogos americanos e europeus, desde o início do século XX, sobre o modo como as crianças aprendiam a matemática.

Quanto aos objetivos da investigação em Educação Matemática Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 10), afirmam serem difíceis de serem categorizados, pois variam de acordo com o problema a ser investigado. Entretanto, os autores apresentam dois objetivos básicos: “um, de natureza pragmática, que tem em vista a melhoria da qualidade de ensino e da aprendizagem da matemática e outro, de cunho científico, que tem em vista o desenvolvimento da EM como campo de investigação e de produção de conhecimentos”.

2. 1. 1. O MATEMÁTICO X PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Como vimos, um dos fatores fundamentais que contribuiu para o surgimento da Educação Matemática foi o consenso de matemáticos e professores de matemática em relação à necessidade de melhoria do ensino da matemática. No entanto, é importante fazermos uma distinção entre essas duas categorias de profissionais. Embora ambos tenham em comum a Matemática, suas concepções epistemológicas, e, consequentemente, suas práticas profissionais, especialmente na sala de aula, podem ser bem diferentes, mesmo quando ambos pensam no ensino dessa matéria.

O *matemático*, por exemplo, concebe a matemática como um fim em si mesma, priorizando os conteúdos formais, promovendo uma educação *para* a matemática, isto é, sem a necessária preocupação com a aplicabilidade desses conteúdos e de sua contribuição para a formação integral do aluno. Em contrapartida, o *educador matemático* tende a conceber a matemática como um meio importante à formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos e também do professor de matemática da educação básica, promovendo uma educação *pela* matemática (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 3).

Quanto à produção de conhecimento, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 4), enquanto os matemáticos geralmente se preocupam em produzir conhecimentos por meio de processos hipotético-dedutivos voltados à matemática pura e aplicada, os educadores matemáticos, por sua vez, realizam seus estudos utilizando métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas, tendo como perspectiva o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para a formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor.

Por conta disso, o que se vê com frequência, em muitas instituições de ensino superior, são dois grupos profissionais disjuntos separados por expectativas, concepções e interpretações diferentes a cerca do ensino de matemática (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 5). A falta de consenso entre matemáticos e educadores matemáticos em relação aos fins do ensino de matemática, tem sido um obstáculo à inserção da matemática como prática educativa que atenda a determinadas finalidades humanas e a aspirações sociais concretas e relevantes à formação integral do aluno.

2. 1. 2. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

As pesquisas em Educação Matemática no Brasil, enquanto campo profissional e científico começou no século XX, no início dos anos 60, com estudos focados na investigação de problemas ou indagações relativas ao ensino e à aprendizagem da matemática, à formação de professores, aos estudos histórico-filosóficos do ensino da matemática ou da própria matemática, desde que relacionados ao ensino, aos materiais ou recursos didático-curriculares etc. (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 16).

A perspectiva que se tinha do ensino de matemática estava voltado diretamente às tarefas e aos procedimentos de sala de aula e aos manuais ou subsídios didáticos, principalmente relacionados às series iniciais (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 17). Os poucos trabalhos realizados nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio, eram em sua maioria de testagem ou experimental, de técnicas ou métodos de ensino ou propostas metodológicas. De qualquer forma, nesse período já se percebia alguns movimentos, que com muito esforço preparariam terreno para o surgimento da EM como campo profissional não só de ação, mas também de produção de conhecimento em outros níveis de ensino.

No final da década de 1960 com a valorização da Educação pelo regime militar, visando pessoal qualificado que atendesse às exigências de desenvolvimento e modernização de nosso país, o cenário começa a mudar. Ocorre uma ampliação significativa no sistema educacional brasileiro, contribuindo para a multiplicação das licenciaturas em ciências e matemática e para o surgimento de vários programas de pós-graduação em educação, matemática e psicologia (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 21 e 22).

A grande diferença em relação ao período anterior é que os trabalhos realizados a partir desse período começam a dar ênfase às séries finais do ensino fundamental, ao ensino médio e até mesmo ao ensino superior, sendo estes trabalhos, em sua maioria, produzidos por programas ligados à faculdades de educação seguindo três focos temáticos:

- Estudo, desenvolvimento e testagem, via método experimental, de técnicas/ métodos de ensino ou de propostas metodológicas (treze trabalhos);
- Estudos exploratórios/ descritivos, do circulo escolar e/ou do processo ensino-aprendizagem da matemática (sete trabalhos);
- Estudos de natureza psicológica e/ ou cognitiva (oito trabalhos) (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 22).

É nesse período que surgem os primeiros estudos do mestrado em psicologia, visando investigar aspectos cognitivos relativos á formação de conceitos matemáticos. Com a abertura política e a redemocratização do Brasil na década de 1980, a Educação Matemática tem sua concepção aumentada em sua região de inquérito, ou seja, novos problemas e novas perguntas surgem e com eles novas formas de investigação. Precisamente em 1984, nasce o primeiro programa brasileiro de mestrado (na Unesp – Rio Claro), com três linhas de pesquisa: tendências atuais, fundamentos matemáticos e ensino e aprendizagem de matemática (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 26).

Os trabalhos produzidos entre 1983 e 1990 evidenciam que todas as áreas da educação matemática foram tomadas como objeto de estudo, podendo ser divididos em quatro grupos temáticos: o primeiro grupo diz respeito à produção desenvolvimento e experimentação de propostas metodológicas ou de projetos curriculares; o segundo grupo compreende investigações analíticas e históricas do ensino de matemática e/ou de sua produção científica e pedagógica.

O terceiro compreende estudos psicológicos e/ou cognitivos como, por exemplo, atitudes diante da matemática e do seu processo ensino-aprendizagem sobre o desenvolvimento cognitivo diante de atividades de ensino. O quarto grupo envolve pesquisas de natureza histórico-filosófica e epistemológica como, por exemplo, a relação entre matemática e sociedade e as concepções de matemática do professor (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 28).

.

2. 2. A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO SEGUNDO PIAGET

Jean Piaget (1896 a 1980) nasceu em Neuchâtel na Suíça. Enquanto biólogo começa seus estudos científicos investigando o processo natural de desenvolvimento de animais e plantas. Alguns anos mais tarde, observando a interação entre organismos e o meio, interessa-se por estudar a natureza humana (comportamento humano), considerando-a tão natural como qualquer outra estrutura orgânica, embora a reconheça como mais dependente do meio que a circunda do que as outras.

Como epistemólogo, o objetivo maior de Piaget era solucionar a questão do conhecimento, ou seja, "como é possível alcançar conhecimento?” ou “como consegue, o ser humano, organizar, estruturar e explicar o mundo em que vive?” Isso o conduziu ao estudo das ações das crianças, surgindo daí sua teoria a respeito do nascimento da Inteligência (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 2). Nos últimos anos de sua vida centrou seus estudos no pensamento lógico-matemático.

Particularmente, podemos afirmar que Piaget empenhou-se em estudar o processo de funcionamento e de evolução da inteligência e das estruturas cerebrais de aquisição do conhecimento até à adolescência, procurando entender os mecanismos mentais que o indivíduo utiliza para captar o mundo a sua volta, pois para ele a capacidade de conhecer depende do próprio meio para sua construção, graças às *trocas* entre o organismo e o meio, que se dão através da ação (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 6).

2. 2. 1. O CONCEITO DE CONHECIMENTO

A origem do conhecimento expressa uma preocupação propriamente humana, na busca de melhor compreensão e domínio do mundo e de sua própria ação, no domínio de si e do mundo. Na busca do conhecimento o sujeito pode adquirir informações empiricamente, ou seja, um conhecimento por experiência, aprendendo a fazer sem compreender a relação causal que dá origem ao fenômeno.

Por exemplo, o sujeito que dirigi um automóvel sem que tenha a compreensão do processo mecânico que sua ação desencadeia ou aquele que toma uma cápsula de remédio, acreditando curar a sua doença com tal procedimento, sem ter, na maioria das vezes, nenhum conhecimento da relação da substância contida na pílula com o seu mal-estar. Não se pode, nesses casos, falar em conhecimento propriamente dito ou, pelo menos, em conhecimento científico (WERNECK, 2006, p.177).

Que significa, porém, “conhecimento”? Na concepção de Piaget, a palavra não tem o significado que o senso comum lhe empresta, onde o conhecimento se resume apenas a certa quantidade de dados ou informações adquiridos empiricamente através da experiência, muitas vezes sem significado, mas, leva em consideração os mecanismos cognitivos acionados pelo sujeito em sua estrutura mental quando este executa uma tarefa.

Para o autor, o termo "conhecer" tem sentido claro: organizar, estruturar e explicar, porém, a partir do vivido, do experienciado; significa dizer que conhecer não é apenas explicar e nem somente viver, mas, é algo que se dá a partir da vivência, ou seja, da ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento, para que este objeto seja imerso em um sistema de relações (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 3).

Na opinião de Piaget, a ideia básica de que conhecer significa inserir o objeto do conhecimento em um sistema de relações, partindo de uma ação executada sobre esse objeto, é válida tanto para a criança que organiza seu mundo quanto para o cientista que descobre e explica o campo magnético, as diferenças entre um tipo de conhecimento e outro expressariam níveis diferentes da capacidade humana de conhecer (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 5).

Portanto, podemos concluir que, em seu aspecto mais pragmático, o conhecimento resulta de uma ação determinada do homem em busca de resolver problemas da vida concreta; uma busca que, historicamente, evolui de situações de necessidade à situações de criação de estratégias, objetos e produtos cada vez mais sofisticados.

2. 2. 2. O CONHECIMENTO COMO RESULTADO DA INTERAÇÃO ENTRE O SUJEITO E O MEIO

Antes de discorrermos sobre este tema, precisamos compreender os conceitos de sujeito, meio e interação à luz da Epistemologia Genética de Piaget. Segundo o autor, em sua teoria do conhecimento, o "meio", é o *objeto do conhecimento* e este não se limita apenas a objetos (animados e inanimados), mas num sentido mais amplo compreende a natureza, os objetos construídos pelo homem, ideias, valores e relações humanas – em suma História e Cultura.

Se o objeto do conhecimento (o meio) abrange aspectos físicos e culturais, o sujeito desse conhecimento não pode ser o indivíduo, nem o "eu" psicológico como afirma Piaget, mas o sujeito epistêmico – um sujeito ideal, universal que não corresponde a ninguém em particular, embora sintetize as possibilidades de cada uma das pessoas e de todas as pessoas ao mesmo tempo (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 3).

A interação, por sua vez, caracteriza-se pelas *trocas* entre o organismo (sujeito epistêmico) e o meio, as quais são responsáveis por construir estruturas mentais específicas para o ato de conhecer, ou seja, a capacidade de conhecer é fruto de trocas entre o sujeito e o meio. Essas trocas são responsáveis pela construção da própria capacidade de conhecer; sem elas, essa capacidade não se constrói (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 6).

Dessa forma, conforme Piaget o conhecimento não está no sujeito – organismo, tampouco no objeto – meio, mas é decorrente das contínuas interações entre os dois, contrariando as concepções empirista e inatista, pois para ele o sujeito não é passivo nem pré-formado, mas interage com o meio e nesta interação constrói o conhecimento através de descobertas e invenções. Nessa perspectiva, a criança ao iniciar seu processo de aprendizagem matemática na escola precisa envolver-se com atividades concretas que a auxilie, onde ao manipulá-las seja construído o conhecimento de forma significativa.

Para o autor a inteligência está relacionada com a aquisição de conhecimento à medida que sua função é estruturar as interações sujeito – objeto. Logo, todo pensamento se origina na ação, e para se conhecer a gênese das operações intelectuais é imprescindível observar a experiência do sujeito com o objeto. Enfim, o ato de conhecer começa a partir da relação do sujeito, que por meio dos sentidos e percepções desvela um fato ou um fenômeno, com a realidade (objeto) a ser conhecida ou explorada em suas características fundamentais. Piaget (1976) acrescenta que:

> A relação cognitiva sujeito/objeto é uma relação dialética porque se trata de processos de assimilação (por meio de esquemas de ação, conceitualizações ou teorizações, segundo os níveis) que procedem por aproximações sucessivas e através dos quais o objeto apresenta novos aspectos, características, propriedades, etc. que um sujeito também e modificação vai reconhecendo. Tal relação dialética é um produto da interação, através da ação, dos processos antagônicos (mas indissociáveis) de assimilação e acomodação.

Essa interação, segundo Piaget acontece através dos processos de assimilação e acomodação e, consequentemente, pela equilibração entre esses dois mecanismos, resultando na organização interna do sujeito e na adaptação ao meio em que vive. Isso significa que a estruturação e o desenvolvimento cognitivo do sujeito dependem das trocas constantes com o meio em que este está inserido e das oportunidades que este meio lhe oferece.

A esse respeito, Piaget argumenta que as possibilidades genéticas do ser humano, com respeito às estruturas mentais específicas para o ato de conhecer já estão determinadas, porém sua atualização e/ou sua concretização vai depender da solicitação do meio (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 9). Portanto, quanto mais sofisticado ou complexo for o meio, mais possibilidades tem o sujeito de aprender e se desenvolver.

2. 2. 3. O PROCESSO DE ADAPTAÇÃO: AS NOÇÕES DE ASSIMILAÇÃO, ACOMODAÇÃO E EQUILIBRAÇÃO

A adaptação do sujeito ao meio, segundo Piaget, se realiza por meio da ação. Sendo a ação um elemento fundamental da teoria piagetiana, já que responsável pela interação meio x organismo – que se realiza através da adaptação (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 10). Nesse processo, dois mecanismos cognitivos são acionados na estrutura mental do sujeito a assimilação e a acomodação, os quais são essenciais para a construção do conhecimento, e, consequentemente, pelo desenvolvimento intelectual do sujeito epistêmico.

A assimilação está relacionada à incorporação de um objeto, num esquema anteriormente já constituído ou ainda em construção. É esta incorporação nas ações do sujeito que garantirá a significação do objeto, isto é, de coisas e fatos. Nesse sentido, a assimilação confere significações caracterizando o conhecimento. Isso significa que o conhecimento implica esquemas de significação (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 4). Assim, baseada em Piaget, Ramozzi-Chiariottino (1988, p. 25) conclui:

> Ora, todo conhecimento, em qualquer nível, desde o mais elementar, como nos primeiros dias e meses de vida, até o nível da Física, consiste em assimilar o objeto do conhecimento, qualquer que seja ele, a uma estrutura, conferindo-lhe então significado. Isto significa que atribuir significado, para Piaget, é inserir algo numa estrutura, é poder encaixar alguma coisa num todo organizado.

Por outro lado, “quando não há possibilidade de assimilação, o esquema se modifica transformando-se num esquema mais adequado e capaz de realizar a assimilação da nova informação. Essa mudança no esquema de assimilação caracteriza o processo de acomodação” (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 25). Portanto, a acomodação é o processo de modificação que a estrutura sofre, devido à incorporação de elementos novos à ela, ou seja, é a transformação que os esquemas de assimilação sofrem para que a estrutura cognitiva se ajuste ao objeto.

O processo de acomodação, segundo o autor, comporta dois aspectos solidários: 1º) Designa uma atividade. Ainda que a modificação do esquema seja imposta pela resistência do objeto, ela é fruto da reação do sujeito, no sentido de compensar esta resistência; 2º) Se a acomodação é também uma atividade, consistindo em diferenciar um esquema de assimilação, ela é apenas derivada da assimilação (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 25).

Dos processos de assimilação e acomodação surgem outros conceitos. Quando o objeto do conhecimento impõe resistência à estrutura cognitiva, isso gera um conflito cognitivo causando o desequilíbrio na estrutura do sujeito. Para dar conta de assimilar esse objeto, essa estrutura precisa modificar-se ou acomodar-se, em busca da condição de equilíbrio. E, é a esse processo de busca do equilíbrio dessas modificações que Piaget denominou equilibração. “Um processo dinâmico de múltiplos desequilíbrios e reequilibrações” (1975, p. 9), e que permite a passagem contínua de um estado de menor equilíbrio a um estado de equilíbrio superior (1976, p.123). Esse processo contínuo e dinâmico denominado por Piaget de equilibração progressiva implica o desenvolvimento da inteligência.

2. 2. 4. A LÓGICA MATEMÁTICA – RAZÃO, ABSTRAÇÃO E REFLEXÃO

A construção das operações lógico-matemáticas é resultado de um longo e complexo processo de cognição que começa a partir das relações espaço temporais e causais as quais se constituem na condição da organização da experiência vivida pelo indivíduo.

A criança ao inserir-se e organizar-se com objetos e acontecimentos no espaço e no tempo, constrói relações espaciais como: ao lado de, em frente de, embaixo de, em cima de, longe, perto etc. e sequências temporais, como: ontem, hoje, amanhã, antes, depois etc. Já a relação causal corresponde a uma verdade comprovada que envolve dois elementos: um antecedente e um consequente, ou seja, quando a criança descobre a causa de um fenômeno ou quando acredita tê-la descoberto, ainda que não seja verdade (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 37).

Nesse processo, afirma Ramozzi-Chiarottino, embasada em Piaget, há dois aspectos a serem considerados na ação da criança:

> A ação exercida sobre os objetos como empurrar, puxar, levar, e trazer, que são a fonte da causalidade, do conhecimento do mundo físico; e a coordenação entre ações tais como a ordem, o encaixe, a correspondência, que são a fonte das futuras operações lógico-matemáticas. A estes dois aspectos passíveis de serem detectados na ação da criança Piaget chamou de experiência física e experiência lógico-matemática (1988. p. 38)

A primeira corresponde à concepção clássica de experiência; consiste em agir sobre os objetos. A criança apreende, por meio desse tipo de experiência, as propriedades dos objetos e, portanto, os limites que esses objetos impõem às ações de quem atua sobre eles. A experiência logico-matemática, ao contrario da física, diz respeito às ações da criança sobre os objetos, fazendo abstração dos conhecimentos adquiridos através dessa ação.

A ação, nesse caso, começa por conferir aos objetos “propriedades’’ que eles não possuíam; a experiência, aqui, diz respeito à relação entre os objetos, estabelecida pela coordenação das ações. Aqui o conhecimento é abstraído da ação como tal e não das propriedades físicas dos objetos. Nesse momento, a experiência é autenticamente lógico-matemática e diz respeito às próprias ações do sujeito e não ao objeto como tal. É por esse fato, diz Ramozzi-Chiarottino (1988, p. 39), que as ações lógico-matemáticas do sujeito podem, num dado momento, dispensar aplicação aos objetos físicos, interiorizando-se em operações simbolicamente manipuláveis.

A partir de um certo nível, existe uma lógica e uma matemática puras às quais a experiência é inútil, porque a capacidade de estabelecer relações devidas ao funcionamento das estruturas mentais inicialmente se aplica a objetos para depois aplicar-se às representações dos objetos e dos acontecimentos (que se situam no espaço e no tempo) e finalmente as relações entre relações.

Uma outra contribuição que dá continuidade ao processo de construção do conhecimento matemático é a teoria da abstração reflexionante que se refere especialmente aos estudos epistemológicos orientados pela lógica-matemática, através da qual Piaget busca mostrar a constituição do processo de abstração e de reflexão no desenvolvimento do pensamento. Becker (2012, p. 15) destaca essa teoria como pertinente "por condicionar o processo de aprendizagem ao processo de desenvolvimento cognitivo; é desvendado seu mecanismo que compreendemos como se forma o conhecimento matemático".

O conceito de reflexão em Piaget remete ao trabalho do complexo cognitivo. Em síntese é o ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior, daquilo que foi transferido do patamar inferior. A abstração reflexionante, explica Becker (2012) dá-se por um processo que se compõe de dois momentos, entre si complementares. O primeiro é o reflexionamento que consiste na projeção, sobre um patamar superior, daquilo que foi retirado de um patamar inferior. O segundo, a reflexão, "entendida [...] como ato mental da reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior" (PIAGET, 1995, p. 6).

Da abstração reflexionante tem-se o desdobramento entre: abstração pseudo-empírica, quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito, ou seja, quando o sujeito descobre, nos objetos, propriedades introduzidas nele por sua atividade. Ao agir sobre o objeto e seus observáveis, as constatações atingem os produtos das coordenações do sujeito, e abstração refletida que se transformou por tomada de consciência. E, "é essa tomada de consciência de uma abstração reflexionante que faz surgir os conceitos, sem os quais não poderemos pensar; eles são a condição de possibilidade do nosso pensar" (BECKER 2012, p. 36).

2. 2. 5. A TOMADA DE CONSCIÊNCIA

A tomada de consciência, segundo Piaget (1978), não consiste numa iluminação sobre algo já conhecido (ou pré-formado na mente do sujeito), mas não manifesto; não se trata de um processo de iluminação de algo que, por alguma razão, estava obscuro em nosso pensamento. Ao contrário, trata-se de trazer para o plano do pensamento as ações executadas pelo sujeito; um processo que se inicia nos primeiros meses de vida de uma criança (por meio de reflexos) e progride, à medida que se constrói em direção à compreensão.

Em resumo, conforme Piaget (1978, p.126), “a tomada de consciência é uma reconstituição conceitual do que tem feito a ação”. Em outros termos, o autor esclarece:

> A ação, ela só tende para um alvo e ela está satisfeita quando o alvo é atingido. Ela é dominada por aquilo que eu chamaria de êxito. Enquanto que a tomada de consciência comporta mais a compreensão: trata-se de saber como se tem êxito [...] é a interpretação e a explicação da ação. Na própria ação, a compreensão está centralizada sobre o objeto e não sobre os mecanismos que permitiram atingi-lo (PIAGET, 1978, p. 127).

No comportamento da criança há, inicialmente, uma indiferenciação entre os aspectos causais e os pré-operatórios do pensamento, fazendo com que sujeito e objeto permaneçam igualmente indiferenciados. E é exatamente em busca da conquista da diferenciação entre as relações causais e as relações lógicas que a criança desenvolve a capacidade de interpretação e explicação da ação, chegando, em seguida, à tomada de consciência. A esse respeito, Piaget (1977, p. 197) defende que,

> quando acontece a tomada de consciência no sujeito, este realiza o reconhecimento e a compreensão de sua ação, em que, a constatação (conscientização) de um êxito ou fracasso o fará conhecedor de sua ação, mesmo que esta ação já esteja automatizada.

Esse processo é gradativo e acontece desde o período sensório-motor (consciência ainda em atos), passando por três estágios: Estágio I – (até seis anos) a indiferenciação é total com deformações mútuas entre os aspectos causais (relacionado à assimilação) e pré-operatórios (relacionados à acomodação) do pensamento. Estágio II (7 a 11 anos) – princípio de diferenciação entre causalidade e operação, com progresso limitado pelo fato de que, nesse período – lógico-concreto – as operações permanecem vinculadas ao conteúdo. Estágio III (11 a 12 anos) – o sujeito chega finalmente à diferenciação e coordenação em progresso crescente.

À medida que acontece a assimilação do objeto, há a transformação do sujeito que modifica suas estruturas ou esquemas de ação, ou seja, acomoda-se ao objeto. Desse modo, objeto e sujeito vão sendo construídos correlativamente, graças à tomada de consciência. Este processo é, assim, uma reconstrução, no plano conceitual, do que tem sido feito na ação, ou seja, a tomada de consciência é uma ação realizada pelo sujeito que foi interiorizada em forma de pensamento. Nesse sentido, Ramozzi-Chiarottino fala de uma ação bem sucedida, como sendo:

> Compreender, em ação, uma situação dada, em um grau suficiente para alcançar os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, através do pensamento, as mesmas situações, até poder resolver os problemas que estas colocam quanto ao por que e ao como das ligações (relações práticas) constatadas e utilizadas na ação (1988. p. 41).

A partir do estágio II, e, principalmente, no estágio III, a consciência da criança caracteriza-se por fazer distinção entre os esquemas meios e fins, passando da análise dos resultados da sua ação para os meios que possibilitaram o êxito.

> Há, então, mobilidade interna ao esquema e na coordenação entre os esquemas, que podem dissociar-se para reagruparem-se de forma diferente. Há um enriquecimento dos esquemas que permitirá ao sujeito experimentar, para tentar solucionar os desafios, novos esquemas meios. Isto confere um refinamento maior das coordenações: o sujeito já é capaz de evocar novos meios por combinação mental. Temos, então, um sujeito mais poderoso diante do mundo, pois agora o pensamento antecede a sua ação (SALADINI, 2006, p. 31).

Esse é o processo necessário para a construção do conhecimento matemático que nasce do mergulho que o ser humano faz no mundo que o rodeia e, em seguida, em si mesmo para desvendar o mundo complexo de suas ações – para apropriar-se delas ou, o que da no mesmo, para delas tomar consciência (BECKER, 2012, p. 29)

2. 3. A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nascido em 1933, o francês Guy Brousseau, desde muito cedo mostrou interesse pela Matemática, em particular, por estudar a maneira como as crianças adquiriam os conhecimentos matemáticos. Tão logo completa 20 anos, assumi o ofício de professor de matemática e desde então começa a elaborar fichas, lições, textos e cadernos de matemática com propostas de ensino inovadoras, destinados aos professores da época.

Vale ressaltar que no momento histórico da proposta de Brousseau, a visão dominante no campo da Educação Matemática era essencialmente cognitiva, devido a Piaget e colaboradores, que evidenciou o papel central da ação no desenvolvimento, a originalidade do pensamento matemático e as etapas de seu desenvolvimento nas crianças, mas ao considerar a estrutura formal e a função da lógica como fundamentais não observou a particularidade da aprendizagem de cada conhecimento matemático. Talvez por conta dessa concepção,

> Comenuis entendia a didática como sendo a arte de ensinar, segundo a qual existe um único método para o ensino de todas as ciências, a saber, o método natural válido tanto nas artes quando nas línguas. As variações que poderiam existir seriam tão insignificantes que não exigiram um método especializado (BROUSSEAU, 2008, p. 7).

Diante dessa realidade, eram grandes os descompassos que ocorriam no processo de aprendizagem de matemática, o que muito preocupava Brousseau. Por isso promoveu uma pesquisa cientifica objetivando analisar, e eventualmente criticar, modelos das situações usadas no ensino da Matemática sugerindo a construção de outras mais adequadas.

Em 1970, licenciado em matemática e com o cargo de assistente de matemática na Universidade de Bordeaux, Brousseau apresenta numa conferência do Congresso da Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público, os primeiros elementos da *teoria das situações,* os quais, ao longo de 20 anos, seriam aperfeiçoados dando origem à Teoria das Situações Didáticas, trazendo grandes contribuições para o desenvolvimento da Didática da Matemática enquanto campo científico, "cujo objeto é a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações" (BROUSSEAU, 2008, p. 16).

2. 3. 1. SITUAÇÃO DIDÁTICA: UMA PROPOSTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Comumente o ensino configura-se pelas relações entre o sistema educacional, o aluno e um determinado conhecimento a ser ensinado. Nesse contexto, o professor tem sua maneira própria de ensinar, e com base em suas concepções prepara suas aulas, organiza o conteúdo e por meio de uma série de mensagens ou informações transmiti ao aluno, que por sua vez toma para si o que deve adquirir ou o que lhe interessa naquele momento. "Dessa forma, interpreta-se a relação didática como uma comunicação de informações" (BROUSSEAU, 2008, p. 16).

Surge então a pergunta: "Que informação, que sansão pertinente deve o sujeito receber do meio para orientar suas escolhas e comprometer tal conhecimento em vez de outro?” Essa pergunta leva Brousseau (2008, p. 19) a considerar o *meio* como subsistema autônomo, antagônico ao sujeito, e criar um modelo autômato de meio. Surgindo, assim o conceito de *situação* como sendo “o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável” (BROUSSEAU, 2008, p. 19).

Nessa perspectiva, Brousseau conclui que:

> Os comportamentos dos alunos revelam o funcionamento do meio, considerando como um sistema. Portanto, é o meio que deve ser modelado. Assim, um problema ou exercício não pode ser considerado mera reformulação de um conhecimento, mas um dispositivo, um meio que *responde ao sujeito*, segundo algumas regras (2008, p.19).

Algumas dessas situações exigem conhecimentos anteriores e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo. Cabe ressaltar que “a palavra *situação* serve, em sua acepção comum para descrever tanto o conjunto de condições que delimitam uma ação como um dos modelos usados para estudá-las” (Brousseau 2008, p. 20).

Nessa perspectiva, o professor de matemática ao criar uma situação que ofereça aos alunos a possibilidade de construir um conhecimento leva a existência de momentos de aprendizagem, ou seja, com características específicas, onde de acordo com as respostas dos alunos o professor pode variar a proposta didática, quer seja problemas, situação-problema, desafios ou jogo, de modo a alterar a resolução e as possíveis estratégias de construção do conhecimento. Como salienta Collares (2001, p.153):

> A riqueza ou valor pedagógico dessas situações está nas ações do professor, que devem ser intencionalmente atentas, organizadoras, investigativas. Não basta determinar um tempo cronometrável para que os mesmos aconteçam. É necessário cuidar para sua real efetivação e isso só será possível se for estabelecido um vínculo de confiança e cumplicidade com a turma, e se as intervenções do professor evidenciarem seriedade e interesse de compreensão em relação aos acontecimentos.

As situações didáticas são modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno. Em outras palavras, a situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional (BROUSSEAU, 2008, p. 21). O seu objetivo é modelar situações de ensino e aprendizagem de matemática adequadas, para que a ação do aluno viabilize a construção do conhecimento. Nesse sentido, analisa a relação entre aluno-professor-conhecimento por meio de um conjunto de situações que fazem a mediação entre o sujeito e o conhecimento, e essa interação se dá de forma contínua.

Assim, no processo de ensino e aprendizagem de matemática, ao tomarmos como objeto de estudo as circunstâncias que regem a difusão e a aquisição dos conhecimentos, as "situações didáticas" de Guy Brousseau são interessantes e viáveis como proposta didático-pedagógica, pois nos permitem criar ou simular situações, com recursos didáticos que favorecem a interação entre os alunos e entre estes e o professor, e levam o aluno a tomar decisões, fazer escolhas por este ou aquele conhecimento matemático em busca de adaptar-se ao meio criado por essa situação e avançar em sua aprendizagem.

No processo de ensino e aprendizagem de matemática Brousseau (2008, p. 27 – 32), destaca quatro tipos de situações, as quais são interligadas e podem-se alternar, em grau de importância e domínio, ao longo do processo. Interpretamos abaixo os quatro tipos de situações didáticas, em convergência com o processo metodológico desenvolvido nesta pesquisa.

Situação de ação – caracterizadas pelo aspecto experimental do conhecimento, pelas tentativas e, frequentemente, pela ausência de argumentação. Quando o aluno tem em mente uma estratégia para resolver uma situação, mas não é capaz de verbalizá-la, a situação vivenciada é de ação. Na situação de ação prevalece a intuição, o raciocínio implícito.

Situação de formulação – o aludo já faz afirmações sobre a sua resolução, mas sem questionar ou justificar a sua validade. É quando num jogo, por exemplo, a equipe percebe e comunica estratégias de sucesso, mas sem compreender o porquê delas.

Situação de validação – já aparecem mecanismos de prova, a necessidade de validar aquilo que se afirma, mas sem o rigor matemático. Nessa etapa, procura-se convencer o outro sobre a validade de uma regra ou estratégia e os próprios critérios de validação, por vezes, são questionados.

Situação de institucionalização – nesta etapa o conhecimento se torna objetivo e universal. Enquanto as três primeiras etapas podem caracterizar situações adidáticas, esta quarta etapa é de natureza didática, pois cabe ao professor reforçar e generalizar o conhecimento adquirido. Brousseau inseriu essa quarta etapa das situações posteriormente, pois percebeu que existe a necessidade de o professor conferir um status aos eventos vistos, até a terceira etapa, como resultados locais da sala de aula. Vale ressaltar que essas situações só poderão ser observadas se o aluno se sentir motivado a participar da atividade.

Nessa perspectiva, a mudança de configuração de sala de aula no processo de ensino e aprendizagem da matemática, que supere o modelo tradicional, no que se refere ao aspecto didático- pedagógico, depende da (ou começa com a) criação de um ambiente propício à atividade matemática, que estimule a curiosidade, a criatividade, o diálogo e, principalmente, a tomada de consciência a partir da efetiva ação dos alunos sobre os objetos matemáticos. Um ambiente onde professores e alunos estejam em permanente interação e com um fim comum: a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático.

2. 3. 2. O CONTRATO DIDÁTICO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Na busca por compreender as causas do problema e ao mesmo tempo propor soluções, surge a noção de contrato didático como um dos principais elementos da teoria das situações didáticas, pois desempenha papel importante na análise e na construção de situações para o ensino e a aprendizagem de matemática. O contrato didático constitui-se pelos "hábitos específicos do professor, esperados pelos alunos, e os comportamentos destes esperados pelo professor" (BROUSSEAU, 2008, p. 9).

De acordo com Gálvez (1996), o contrato didático estabelece-se através de uma negociação implícita entre professor e alunos, onde se define as regras de funcionamento da relação, dentro da situação didática como, por exemplo, o direito de falar e de ouvir de cada uma das partes, a forma de relacionamento entre os alunos e desses com o professor dentro da sala de aula, a distribuição das tarefas ou responsabilidades, a determinação de prazos, a proibição ou permissão do uso de determinados recursos, etc.

Nesse sentido, a relação entre professor e alunos depende de regras preestabelecidas, sendo que nem todas as regras relacionam-se diretamente com o terceiro elemento desta relação didática - o conhecimento. De qualquer forma, a aquisição de conhecimentos é a motivação principal do contrato didático, o qual, a cada nova etapa de conhecimento, pode ser renovado e renegociado. Porém, na maioria das vezes, essa negociação é implícita e passa desapercebida pelas partes envolvidas.

Convém ressaltar que por volta de duas décadas atrás as interações entre alunos, principalmente, crianças e adolescentes eram vistas como um fator indesejável e inconveniente, com prováveis influências negativas para o rendimento escolar dos alunos, sendo, portanto, evitadas ou até mesmo eliminadas. Hoje graças a estudos em educação e psicologia, sabemos da importância da construção do conhecimento pelos alunos em interação, e do compartilhamento de significados entre eles, ou seja, da influência educativa que um colega pode exercer sobre o outro.

O papel do professor nesse processo é de fundamental importância, para realizar um trabalho mais interativo em sala de aula, na condução e favorecimento da comunicação produtiva entre as crianças, no planejamento e na execução de situações que promovam o desenvolvimento do grupo.

Estas interações são explicadas pela Didática da Matemática como a relação didática responsável pela epistemologia da aprendizagem através de conexões dinâmicas e assimétricas que sucedem a transposição de um determinado *conhecimento matemático entre o sistema educacional e o aluno*. Entre as interações que ocorrem na *situação de ensino,* Brousseau (2008, p. 77 – 85) identifica quatro *efeitos* do contrato didático que podem se tornar *obstáculos* inibindo ou interrompendo a construção do conhecimento matemático. Essencialmente, os *efeitos* apontados por Brousseau, são atitudes que geram resultados negativos no processo de ensino aprendizagem. São eles:

1. Efeito Topázio ou tendência do professor em ajudar – onde o professor assume a resolução de uma situação-problema, apresentando e induzindo, progressivamente, soluções intermediarias que deveriam ser descobertas e/ou apresentadas pelos alunos;

2. Efeito Jourdain ou incompreensão fundamental – onde o professor, para evitar a discussão de conhecimentos com os alunos, eventualmente, elogia respostas banais com o intuito de estimular sem uma compreensão do conceito representado, levando o aluno há uma apropriação do uso das regras de cálculo, mas não ao significado conceitual;

3. Uso abusivo da Analogia – Sabemos que é importante usar a analogia na resolução de problemas, mas não funciona substituir o estudo de uma noção complexa por um caso semelhante. Não podemos ficar com problemas semelhantes, esquecendo o problema original, cometendo o abuso da analogia;

4. Deslizamento metacognitivo – Consiste de uma abordagem heurística para resolver um problema e assumi-lo como objeto de estudo. Não se trata de um erro didático propriamente dito, desde que a situação seja temporária e não volte a acontecer, caso contrário, o processo não permite o controle esperado e provoca dificuldades no ensino, ou seja, quanto mais comentários e convenções o ensino produz, menos os alunos podem controlar as situações que lhes são propostas.

2. 4. AS CONCEPÇÕES PEDAGÓGIGAS DE PAULO FREIRE: EDUCAÇÃO DIALÓGICA NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Paulo Freire, educador pernambucano, nascido na cidade do Recife em 19/09/1921, apresentou uma síntese inovadora das mais importantes correntes do pensamento filosófico. Defendia a ideia de que o indivíduo para desenvolver-se precisa ser livre da opressão dos opressores – pessoas egoístas e prepotentes que movidas pela ganância por poder e reconhecimento, menosprezam, destratam ou manipulam os menos favorecidos do ponto de vista intelectual, cultural, social e econômico. E, a única forma de se fazer isso seria por meio da concepção e da prática de uma educação humanista e libertadora, que considera as pessoas indistintamente capazes de aprender, crescer e avançar, e, portanto, expressar suas ideias e opiniões de forma crítica e consciente, participando e influenciando ativamente nas mudanças da sociedade.

É essa a abordagem que se espera ver no contexto da escola, em especial na sala de aula, porém, o que se vê geralmente é um professor que expõe conteúdos, passa exercícios e avalia com provas, e, um aluno que observa, ouve e copia o que o professor escreve ou fala e no final é avaliado em sua suposta aprendizagem. Essa concepção do professor no que se refere ao próprio processo de ensino e aprendizagem de matemática e ao modo como veem os alunos, seu lugar e papel na ação pedagógica, não contempla o diálogo, não favorece a aprendizagem, e, portanto, não subsidia a construção do conhecimento matemático.

Nesse modelo tradicional de educação, ou como diria Paulo Freire educação bancária, o aluno não se manifesta oralmente ou apenas o faz, quando solicitado pelo professor. Uma educação que anula o poder criador dos educandos ou o minimiza, estimulando sua ingenuidade e não sua criticidade, satisfazendo os interesses dos opressores. É aquela da qual se servem os opressores para, dentro de uma falsa generosidade, “assistindo” os oprimidos, mantê-los na situação que os oprime (FREIRE, apud MOREIRA 2014, p. 150)

Nessa perspectiva, acreditamos que as concepções pedagógicas de Paulo Freire sejam de grande contribuição para a educação básica, em especial a proposta de uma educação dialógica, onde o aluno tem a oportunidade de manifestar-se oralmente sem nenhum constrangimento, e avançar em sua aprendizagem. Ao contrário da concepção bancária, onde “a educação é o ato de depositar, de transferir, transmitir valores e conhecimentos. Nessa concepção, o saber é uma doação dos que se julgam sábios aos que julgam nada saber” (FREIRE, 1988, p. 58).

O diálogo, em Paulo Freire é visto como condição para formação de um ser autônomo, capaz de agir e interagir de forma consciente e responsável com o meio onde está inserido, e por meio dessa interação construir o próprio conhecimento. Porém, conforme Freire (1988) o diálogo só é possível se houver amor às pessoas, à vida e ao mundo, de modo que haja uma relação harmoniosa entre as pessoas, livre de qualquer tipo de dominação, opressão, injustiça e de manipulação.

> Na realidade, a educação constitui um todo indissociável, e não se pode formar personalidades autônomas no domínio moral se [...] o individuo é submetido a um constrangimento intelectual de tal ordem que tenha de se limitar a aprender por imposição sem descobrir por si mesmo a verdade: se é passivo intelectualmente, não conseguiria ser livre moralmente. Reciprocamente, porém, se a sua moral consiste exclusivamente em uma submissão á autoridade adulta, e se os únicos relacionamentos sociais que constituem a vida da classe são os que ligam cada aluno individualmente a um mestre que detém todos os poderes, *ele também não conseguiria ser ativo intelectualmente.* (PIAGET, apud BECKER 2012, p. 5)

Com frequência os alunos resolvem listas de exercícios onde o professor apresenta muito cedo noções e operações matemáticas em uma estrutura muito formal e abstrata. Parece-nos, nesse caso, que o procedimento que pareceria indispensável seria colocar como ponto de partida o nível concreto qualitativo, ou seja, situações no mínimo contextualizadas à realidade do aluno, que possam suscitar o debate ou a discussão em sala de aula e favorecer a construção de conceitos. A formalização deve ser guardada para um momento posterior como um tipo de sistematização das noções já adquiridas.

Percebe-se, então que não basta ter um plano de aula bem estruturado, organizado e fundamentado. O plano do ensinar e do aprender supõe a construção de relações de proximidade, empatia e significado que vão além dos conteúdos estabelecidos pelo professor e de suas estratégias didático-pedagógicas, onde seja possível a manifestação oral do aluno. O que se almeja é uma educação dialógica onde o educando é quem pergunta ou questiona, e nesse processo, afirma Gadotti (2001, p. 46) o ato de perguntar está ligado ao ato de existir, de ser, de estudar, de pesquisar, de conhecer.

Nessa perspectiva, afirma Becker (2012, p.152), "a educação autêntica não se faz do educador para o educando ou do educador sobre o educando, mas do educador com o educando. Decorre daí que o conteúdo programático deve ser de ambos, um conteúdo que deve ser buscado. Essa busca é que inaugura o diálogo da educação como prática da liberdade".

Segundo Freire (1988, p. 87), trata-se de uma metodologia que não pode contradizer a dialogicidade da educação libertadora, sendo, portanto, igualmente dialógica, conscientizadora, proporcionando ao mesmo tempo a apreensão dos conteúdos e a tomada de consciência em torno dos mesmos. Nesse sentido, as manifestações orais do aluno ou o diálogo entre eles e entre estes e o professor de matemática suscita possibilidades de detectar erros, acertos e dúvidas e fazer as devidas intervenções, visando a garantir a excelência do ensinar e do aprender e o alcance dos objetivos da ação pedagógica.

Sobre esta concepção, Moreira conclui:

> Na educação dialógica, estudar requer apropriação da significação dos conteúdos, a busca de relações entre os conteúdos e entre eles e aspectos históricos, sociais e culturais do conhecimento. Requer também que o educando se assuma como o sujeito do ato de estudar e adote uma postura critica e sistemática. No entanto, a dimensão individual do sujeito que se assume como educando não é suficiente para explicar o processo de conhecimento dos conteúdos. Para conhecer é preciso o outro (2014, p. 153).

3. DINÂMICA E REPRESENTAÇÃO DAS AULAS DE MATEMÁTICA

Nesse capítulo discutimos sobre a ação e organização dos sujeitos no trabalho pedagógico, observando-se aspectos relacionados tanto ao professor quanto ao estudante os quais implicam na configuração e dinâmica das aulas de matemática, e, consequentemente, na construção do conhecimento matemático.

3. 1. A SALA DE AULA DE MATEMÁTICA: ORGANIZAÇÃO E AÇÃO DOS SUJEITOS NO TRABALHO PEDAGÓGICO

Para a análise da observação de sala de aula optamos por seguir o roteiro de observação previamente elaborado por meio do qual, buscou-se proporcionar uma abordagem estruturada envolvendo tanto a intervenção pedagógica do professor quanto as ações dos estudantes em sala de aula, a fim de apreendermos a dinâmica didático-pedagógica das aulas de matemática. Para tanto, procurou-se embasar a apreciação utilizando-se trechos do período de observação para fundamentação empírica de cada questão.

3. 1. 1. A INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA DO PROFESSOR

Planejamento da aula – sequencia da aula

Durante o período de observação e de convivência com a professora de matemática, notou-se que uma de suas preocupações, quanto ao planejamento das aulas, consistia em selecionar e resolver antecipadamente os exercícios que seriam propostos aos estudantes. A sequência das aulas, de modo geral, consta de três etapas: exposição de conteúdos ou de exemplos e exercícios-padrão, exercícios de treinamento feitos pelos estudantes no caderno e, correção dos exercícios no caderno ou no quadro, feitos pela professora.

Numa das aulas sobre equação de 1º grau, por exemplo:

> [...] a professora entrou na sala de aula cumprimentou os estudantes, e, logo, sem perder tempo, passou os exercícios no quadro branco, tirados de uma folha de papel. Em seguida, (sem nenhuma explicação do conteúdo) sentou-se à mesa e fez a chamada bem devagar [...] ao terminar de copiar, os estudantes começam a resolver os exercícios sem qualquer intervenção ou acompanhamento por parte da professora, seja no quadro ou nas carteiras dos estudantes (aula 1);

Subentende-se que a primeira etapa do modelo tradicional de ensino de matemática referente à exposição do conteúdo, já foi cumprida em aulas anteriores, ou seja, este assunto já fora ensinado o suficiente para que os estudantes sejam capazes de fazer sozinhos, sem que haja, a princípio, a necessidade de qualquer ajuda por parte da professora. Esse comportamento da docente acaba caracterizando, conforme Brousseau, um contrato se emissão, no qual o professor “manda uma mensagem sem se preocupar com as condições efetivas de recepção” (BROUSSEAU, 2008, p. 60), ou seja, “o professor monologa, sem levar em consideração a presença do aluno” (BROUSSEAU, 2008, p. 61).

Essa abordagem puramente expositiva e unilateral, comum no ensino de matemática, com exercícios de puro treinamento e sem mediação docente, sem debate, discussão, troca de opiniões, enfim, sem diálogo entre estudantes e professor, como práxis, como ação e reflexão, como condição para o pensar certo, acaba minimizando ou eliminando as capacidades criativas e argumentativas dos estudantes, ao não oferecer-lhes a oportunidade de perguntar, de questionar, de dar sua opinião, etc., de dizer sua palavra.

Nesse sentido, Freire (1997, p. 52) adverte que o professor ao entrar em uma sala de aula deve está sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos estudantes, a suas inibições; um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tem – *a de ensinar e não a de transferir conhecimento.*

Epistemologicamente, esse modelo pedagógico, não favorece a formação de estruturas lógicas, responsáveis pelo ato de conhecer, isto é, pela capacidade de estabelecer relações lógicas (como as descritas nas p. 93 e 94), visto que estas dependem das oportunidades oferecidas pelo meio com o qual o sujeito interage, ou seja, da sala de aula e das possibilidades que emergem da relação professor-estudante-conhecimento. Por isso, concordamos com Freire (1997, p. 52), quando diz que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”.

Objetivo da aula – contrato didático

O objetivo da aula, ou seja, o contrato didático feito pela professora foi que os estudantes resolvessem os exercícios no caderno e apresentassem a ela; depois, alguns seriam convidados a fazer no quadro; o que me causou expectativa, pois vislumbrava um momento de correção dialogada entre estudantes e professora. No entanto, durante o desenvolvimento (e até o final) das aulas, enquanto os estudantes resolviam os exercícios.

> [...] a professora permaneceu sentada em sua cadeira durante toda a aula, corrigindo provas, atualizando diário etc [...] paralelamente, em sua mesa, faz os atendimentos aos estudantes que ainda apresentam dúvidas quanto ao algoritmo de resolução de uma equação de primeiro grau (aula 1).

De modo geral, Brousseau (2008) recomenda que para se alcançar os objetivos da aula é essencial que seja feito um acordo entre professor e estudantes, mesmo que implicitamente, de maneira que sejam atribuídas responsabilidades a ambas as partes envolvidas, e que se cumpra o que fora combinado no que chamou de contrato didático. O autor explica que:

> Numa situação de ensino preparada e realizada pelo professor, o aluno em geral tem a tarefa de resolver o problema que lhe é apresentado, por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências impostas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo aluno, e os comportamentos destes, esperados pelo professor, constituem o contrato didático (BROUSSEAU, 2008, p. 9).

Para Brousseau (2008, p. 61), quando acontece este tipo de contrato – contrato de emissão – espera-se, a princípio, que a mensagem seja compreensível e que seu enunciado seja corretamente formulado para que o estudante possa avançar em sua aprendizagem. No entanto, o autor adverte que é possível em contratos extremos que o professor produza uma mensagem que nem ele mesmo compreende. Daí, ser mais cômodo para o professor o atendimento à mesa, pois evita expor-se e a questionamentos.

Nesse caso particular, percebemos que o contrato didático e o rigor metódico por parte do professor na dinâmica de sala de aula, mediante o contrato didático escolhido, são necessários para o bom andamento do processo educativo e, para o alcance do objetivo da aula. Em nosso exemplo, o descumprimento da parte do contrato didático que consistia na correção dos exercícios no quadro (comum nas aulas observadas) acabou gerando desinteresse e dispersão por parte dos estudantes.

> [...] os estudantes ficam agitados e conversam durante a aula (aula 2). [...] um grupo de meninas aparentemente em defasagem na relação idade-série,

> conversam no fundo da sala e mexem no celular (aula 1). [...] um grupo de meninas usa maquiagem (aula 3).

Nesse sentido, Freire (1997, p. 72), comenta que algumas qualidades ou virtudes são indispensáveis à prática educativa. E, estas qualidades ou virtudes são construídas por nós no esforço que nos impomos para diminuir a distância entre o que dizemos e o que fazemos. Este esforço, diz o autor, “o de diminuir a distância entre o discurso e a prática, é já uma dessas virtudes indispensáveis – a da coerência” (FREIRE, 1997, p. 72).

Mesmo sem o acompanhamento da professora, muitos estudantes concentram-se em fazer as atividades, pois, há uma preocupação em apresentar as tarefas e receber o visto no caderno (ou ganhar nota), porém, sem a necessidade de justificativa ou apresentação de estratégias de resolução o que é comum num ensino baseado na repetição e memorização de algoritmos.

Essa situação configura o que Brousseau (2008, p. 28) considera como situação de ação onde o sujeito após receber a informação, age sobre o meio antagonista e faz suas escolhas em função de suas próprias motivações, sem o compromisso de explicar o que foi feito ou de justificar tais escolhas; daí a famosa frase dita por muitos estudantes ao apresentarem a tarefa ao professor: “eu fiz, mas, não sei se está certo!”.

Por outro lado, afirma o autor: “se o meio reage com alguma regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (feedback), antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões” (BROUSSEAU, 2008, p. 28); os conhecimentos advindos desse tipo de situação podem ser representado por meio de procedimentos que o sujeito da aprendizagem parece seguir ou pelas declarações daquilo que parece levar em consideração; sendo este o aspecto positivo de uma situação de ação.

Conteúdo: apresentação, desdobramentos e conceitos

O conteúdo é anunciado aos estudantes, mas não é apresentado em sua relevância, com objetivos claros de aprendizagem como convém num legítimo contrato didático: quer seja para o desenvolvimento de habilidades cognitivas concernentes a aprendizagem matemática, quer seja para a formação do educando enquanto cidadão. Notou-se não haver a preocupação com a abordagem conceitual do conteúdo, visto que a ênfase estava no aspecto técnico deste, onde o importante é memorizar as fórmulas, regras e algoritmos por meio da repetição de exercícios e aplicar corretamente a mesma técnica com exercícios parecidos.

Epistemologicamente, a exposição sumária do conteúdo sem interação entre os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática, seguida da repetição de exercícios visando à memorização e a aplicação mecânica de regras e fórmulas, sem justificativa ou explicação do porque e do como se chegou ao resultado, portanto, sem compreensão do que fora feito, não favorece a formação de conceitos, isto é, não oferece subsídios ou elementos concretos que acionem e desenvolvam a inteligência conceitual dos estudantes constituída como pensamento lógico ao nível das operações formais.

Ao contrário, acaba enfatizando o que Ramozzi-Chiarottino, interpretando Piaget, chama de inteligência sensório-motora que consiste num juízo prático – característico das fases anteriores do desenvolvimento cognitivo até as operações concretas –, onde as conexões “ligam apenas percepções e movimentos sucessivos, sem uma representação de conjunto que domine os estados distintos no tempo e que organize as ações, refletindo-as simultaneamente, num quadro total” (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 73).

Em consequência disso, a autora explica que:

> A inteligência sensório-motora tende ao sucesso e não à verdade: ela encontra sua satisfação na conquista do fim prático perseguido e não na construção ou na explicação. É uma inteligência puramente vivida e não pensada ou representada da forma organizada. Sendo seu domínio delimitado pelo emprego de instrumentos perceptivos e motores, ela só trabalha sobre as realidades, índices perceptivos e sinais motores e não sobre os signos, os símbolos e os esquemas representativos ou conceitos verdadeiros que implicam inclusão de classes e relações (RAMOZZI-CHIAROTTINO, p. 73).

De outra forma, os exercícios puramente formais ou abstratos aos quais os estudantes são submetidos, sem nenhuma relação com a realidade e, portanto, sem sentido para a vida, não favorecem o desenvolvimento de sua capacidade de reflexão crítica, nem sua curiosidade. Então, “por que não discutir com os alunos a realidade concreta a que se deva associar a disciplina cujo conteúdo se ensina [...] por que não estabelecer uma necessária “intimidade” entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos”, questiona Freire (1996, p. 33).

O autor que “ensinar não se esgota no tratamento do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível (FREIRE, 1996, p. 29)”. Pois, a tarefa do docente não é apenas ensinar os conteúdos, mas também ensinar a pensar certo, e, “pensar certo demanda profundidade e não superficialidade na compreensão e na interpretação dos fatos”. (FREIRE, 1996, p. 37).

Nessa perspectiva, faz-se necessário a contextualização dos conteúdos relacionando-os sempre que possível com situações do dia a dia que desafiem os estudantes e agucem a sua curiosidade levando-os a pensar, a refletir e tirar suas próprias conclusões, a fim de favorecer a descoberta de significados e, consequentemente, a construção de conceitos a partir dessas descobertas; desenvolvendo, assim, mediante tomadas de consciência, suas habilidades cognitivas, donde seja possível, compreender e explicar suas produções. Afinal,

> nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo. Só assim podemos falar realmente de saber ensinado, em que o objeto ensinado é apreendido em sua razão de ser e, portanto, aprendido pelos educandos (FREIRE 1996, p. 29).

Procedimentos: exercícios; orientação oral; leitura; trabalho em grupo

Observou-se que os procedimentos adotados durante a aula são apenas os exercícios escritos no quadro para os estudantes copiarem e resolverem individualmente ou em dupla, seguindo o modelo ensinado anteriormente, sem explicação ou leitura comentada sobre o conteúdo trabalhado; sendo, que durante as aulas, as únicas orientações dadas pela docente são em relação ao tempo que está passando e, que a tarefa deve ser feita e apresentada a ela para receber o visto, que ela chama, equivocadamente, de correção. Eis os registros

> [...] os estudantes copiam e resolvem os exercícios, a partir de conhecimentos que se espera já tenham adquirido, para em seguida apresentar a professora e receber o visto no caderno (Aula 2). [...] os mais interessados tão logo recebem a orientação da professora concentram-se em fazer suas tarefas e apresentá-las [...] (Aula 2). Já próximo do final da aula a professora alerta: ***“vamos gente falta pouco tempo”***. Nesse momento, alguns estudantes retardatários, se preocupam

> apenas em copiar, de outros colegas, os exercícios resolvidos, afinal o mais importante é mostrar a tarefa à professora e ganhar o visto (Aula 2).

Dessa forma, menosprezando ou reduzindo, segundo Freire (1997, p. 77), a capacidade de aprender e apreender dos estudantes; negligenciando, pois, a aventura criadora que é aprender, algo, por isso mesmo, muito mais rico do que meramente repetir a *lição dada*. “Aprender para nós é construir, reconstruir, constatar para mudar” (FREIRE, 1997, p. 77), o que não é possível ao nível da conceituação, apenas com repetição de exercícios ou memorização de regras, fórmulas e algoritmos matemáticos.

Para Brousseau (2008, p. 19), esse procedimento, comum no ensino da matemática, independentemente do conteúdo abordado, tem poucas chances de oferecer informações necessárias à aquisição de conhecimentos gerais, ou seja, para cada noção matemática existe todo um conjunto de problemas e exercícios específicos. Portanto, o autor adverte que é trabalho do professor de matemática, “estudar os problemas e exercícios que fazem com que uma noção matemática seja usada, [...] tal como apresentar os conhecimentos tidos como necessários à aquisição” ou construção de cada conhecimento matemático em particular.

Quanto à proposta de correção coletiva no quadro, feita pela docente – conforme já comentamos anteriormente –, que não aconteceu em nenhuma das aulas observadas, esperava-se que este fosse um momento de diálogo, de discussão, de debate, entre professor e estudantes; um momento de questionamentos, onde os estudantes perguntam, dão sugestões. Mas, o que se verificou, na verdade, foi:

> [...] o excesso de conversas paralelas que não envolviam a aula; e a professora sentada em sua carteira, tentando silenciar a turma, a fim de que todos se concentrassem no que estavam fazendo, pois para ela, ao que nos pareceu, o importante é que os estudantes não errassem no procedimento, ou seja, na repetição do algoritmo outrora exercitado (Aula 2).

A dispersão ou desinteresse dos estudantes em relação às tarefas se deve à postura complacente adotada pela docente durante toda a aula, não acompanhando a mobilização dos estudantes enquanto resolviam os exercícios, comprometendo, assim, o trabalho pedagógico de sala de aula. Segundo Freire (1997, p. 68) é preciso bom senso ao professor para exercer sua autoridade em sala de aula “tomando decisões, orientando atividades, estabelecendo tarefas, cobrando a produção individual e coletiva do grupo não é sinal de autoritarismo de minha parte. É a minha autoridade cumprindo o seu dever" (FREIRE, 1997, p. 68).

Interação com os estudantes

A falta de interação com os estudantes por parte da professora seja por meio do diálogo com a turma ou do acompanhamento individual na carteira do aluno, foi um fato que a mim causou estranheza. Talvez minha presença tenha de alguma forma inibido a professora levando-a a assumir uma postura passiva e complacente desde o inicio do período de observação de modo que a interação entre professor e estudantes resumiu-se aos atendimentos feitos à mesa.

> [...] a professora permaneceu sentada em sua cadeira, e os estudantes dirigiam-se até ela várias vezes para mostrar as suas tarefas [...] para fazer perguntas ou tirar dúvidas (Aula 9).

A aula segue nos moldes do contrato de emissão, ou seja, sem diálogo entre os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática. A professora raramente manifesta-se oralmente. E, quando o faz pergunta: "quem terminou a tarefa?".

> [...] nesse momento alguns alunos mobilizam-se e apresentam a tarefa feita à professora recebendo o visto no caderno; outros apressam-se em concluir a tarefa [...] (Aula 9).
> Nos últimos minutos da aula a correção de cadernos é mais intensa; a professora chama por dupla para a correção; não há a correção coletiva e dialogada das atividades propostas (Aula 9).

Como expresso acima, a correção dos exercícios se torna algo mecânico, sem adentrar pelo próprio significado pedagógico e formativo pautado em relação dialógico dos sujeitos, Professores com os Estudantes, e nem entre os estudos. Este processo dificulta a própria tomada de consciência dos sujeitos, sobre seus erros, acertos, e sobre os possíveis acertos para caminhar no processo didático. Como salienta Freire:

> Uma das tarefas mais importantes da prática educativo-crítica é propiciar as condições em que os educandos em suas relações uns com os outros e todos com o professor ou com a professora ensaiam a experiência profunda de assumir-se. Assumir-se como ser social e histórico, como ser pensante, comunicante, transformador, criador, realizador de sonhos (1997, p. 46).

Recursos didáticos

Os recursos utilizados pela professora são restritos apenas ao quadro branco e o pincel e às vezes ao uso do livro didático, tanto para exposição de conteúdo como para resolução dos exercícios.

> [...] sem perder tempo, a professora passou os exercícios no quadro branco, tirados de uma folha de papel. (Aula 1 e 2). [...] a proposta é que os estudantes resolvam os exercícios no quadro (Aula 1 e 2)

A carência de materiais didáticos, bem como a falta de conhecimento sobre os próprios materiais e mediações didáticas, fazem com que a prática pedagógica siga utilizando os mesmos recursos da aula tradicional: o livro didático, o quadro branco, o pincel e as explicações do Professor.

Nas observações da escola, constatamos que existem materiais concretos, materiais tecnológicos de simulação, jogos e computadores, dispostos numa sala do Telecentro. Mas, em nenhum momento foi cogitado o uso desta sala e dos materiais disponíveis, pela Professora.

Avaliação da aprendizagem

A avaliação da aprendizagem parece continua, mas bastante fragmentada em pontos de conteúdos e, ainda, na forma de tratamento das atividades dos estudantes, começando com a resolução de exercícios individualmente, os quais servem de preparação para um momento de culminância que consiste numa atividade avaliativa feita por duplas de estudantes.

A indicação da avaliação em dupla é bem recebida pelos estudantes, apesar do controle do professor quanto às conversas e diálogo, o que contradiz o caráter inerente a avaliação realizada em dupla, em grupo ou no coletivo. O momento da avaliação parece ser de silêncio, concluindo que a aprendizagem poderá prescindir do diálogo. Vejamos no exemplo abaixo:

> A professora entra na sala de aula e informa que a atividade é em dupla; a turma se agita em busca da sua melhor dupla [...] A professora avisa que quem não der conta de fazer ou ficar conversando durante a tarefa vai “perder ponto” (Aula 10).

Numa abordagem construtivista e dialógica do processo de aprendizagem, a avaliação implica múltiplas condições e possibilidades, inclusive a de assimilar o erro como base da construção do conhecimento e do desenvolvimento do estudante.

Zabala se refere à avaliação ressaltando que,

> habitualmente, quando se fala de avaliação se pensa, de forma prioritária ou mesmo exclusiva, nos resultados obtidos pelos alunos. Hoje em dia, este continua sendo o principal alvo de qualquer aproximação ao fato avaliador. Os Professores, as administrações, os pais e os próprios alunos, se referem a avaliação como o instrumento ou processo para avaliar o grau de alcance, de cada menino e menina, em relação a determinados objetivos previstos nos diversos níveis escolares. Basicamente, a avaliação é considerada como um instrumento sancionador e qualificador, em que o sujeito da avaliação é o aluno e somente o aluno, e o objeto da avaliação são as aprendizagens realizadas segundo certos objetivos mínimos para todos (ZABALA,1998, p. 195)

3. 1. 2. A AÇÃO DOS ESTUDANTES EM SALA DE AULA

Envolvimento/participação

De modo geral, a maneira como as aulas foram desenvolvidas pouco contribuiu para a mobilização efetiva dos estudantes nos seus aspectos físico, cognitivo ou verbal. As atividades propostas visavam apenas o treinamento ou a repetição de algoritmos, não favorecendo, por exemplo, a discussão entre os estudantes e nem entre estes e o professor. Nesse sentido, o envolvimento e a participação por parte dos estudantes resumem-se no fazer exercícios.

> [...] os exercícios são ditados pela professora [...] os estudantes interagem entre eles, enquanto resolvem as equações (Aula 3). [...] a turma se mostra interessada em fazer os exercícios e apresentar a professora que aguarda à mesa (Aula 3). Alguns estudantes procuram os exercícios anteriores para fazer comparações e seguir o modelo (Aula 3).

Motivação/interesse

Apesar das conversas paralelas constantes promovidas por alguns estudantes, todos, a princípio, mostram-se interessados em fazer as tarefas; motivados pela proposta da professora do visto no caderno o que costuma ser comum nas aulas de matemática.

> [...] muitos estudantes, mesmo com a proposta de aula já estabelecida, permanecem conversando, enquanto tentam resolver os exercícios. De modo geral, os estudantes mobilizam-se (fisicamente, cognitivamente, verbalmente) e interagem constantemente na busca do resultado dos exercícios, e, apresentam a professora (Aula 9). [...] ao se aproximar o final da aula, para alguns não há outra opção a não ser o caminho mais fácil, de simplesmente copiar do colega que já fez (Aula 2).

Ficou claro na mobilização dos estudantes que a o mais importante era “ganhar o visto da professora”, sendo esta para alguns a única e, para outros a grande motivação que os levaram a interessar-se por fazer a tarefa; sem, necessariamente, a preocupação em compreender o que fora feito; o que me parece ser fruto de um modelo tradicional de ensino restrito apenas às aulas expositivas no quadro branco, onde o que mais conta é a quantidade e não a qualidade. Como na famosa pergunta feita pela estudante Al: “Vale nota professora?”.

Trabalho em equipe/interação

Durante o período de observação, as tarefas, quase sempre, eram feitas individualmente a fim de verificar, segundo a professora: “quem sabe e quem não sabe”.

> A maioria dos estudantes permanece em silêncio fazendo suas tarefas; outros, mesmo com o cuidado da professora em manter a ordem e até o silêncio, conversam entre si em busca de solução para as equações propostas (Aula 1 e 2). Várias vezes os estudantes vão até a mesa da professora mostrar as suas produções ou fazer perguntas, ou tirar dúvidas (Aula 2). Ao meu lado uma estudante auxilia o colega na resolução da equação (Aula 3).

A interação maior entre os estudantes, do ponto de vista qualitativo da troca de opiniões, ajuda mútua etc., foi observada principalmente nas atividades em dupla (consideradas pela professora como atividades avaliativas), uma delas sobre equação de 1º grau com uma incógnita e a outra sobre grandezas diretamente proporcionais.

> A professora entra na sala de aula e informa que a atividade é em dupla; a turma se agita em busca da sua melhor dupla (Aula 10). Durante a execução das atividades os estudantes mobilizam-se (fisicamente, cognitivamente) [...] dialogam entre si, trocam ideias, mostram-se envolvidos na resolução das atividades [...] Quando a “campa” toca, os estudantes se agitam; começam a andar na sala de aula (Aula 9).

Relação com o professor e Manifestação oral

O contrato didático proposto pela professora não favoreceu a discussão, o debate, o diálogo entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Os estudantes não se manifestaram oralmente durante as aulas; não fizeram perguntas ou questionamentos, nem chamaram a professora para atendê-los em sua carteira. A dinâmica da aula, como já mencionado antes, consistiu na execução e apresentação das tarefas à professora que aguardava sentada em sua carteira, enquanto atualizava seus diários.

Do ponto de vista afetivo, a relação dos estudantes com a professora (embora ainda muito jovem) nos pareceu ser de respeito e carinho; fato observado quando a professora adentra a sala de aula e, também, nas dependências da escola onde os estudantes têm a satisfação em cumprimenta-la e abraçá-la. Pedagogicamente, a relação interpessoal saudável entre estudante e professor é um ponto extremamente positivo para o bom andamento dos processos educativos; porém, em se tratando do ensino de matemática em si, me pareceu pouco explorado, visto que a organização didático-pedagógica de sala de aula não favorecia uma maior interação entre os sujeitos envolvidos neste processo, o que certamente tornaria a aula mais dinâmica e produtiva.

3. 2. AS VOZES DOS SUJEITOS: CONCEPÇÕES, PERSPECTIVAS E PARADIGMAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

As entrevistas foram analisadas e organizadas em categorias, conforme proposta de Bardin (2011), observando-se as seguintes etapas: pré-análise; a exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. No primeiro contato com os materiais coletados, foi realizada a leitura flutuante, que segundo a autora, consiste no momento de levantar intuições e organizações, buscando direcionar o olhar para o objeto da pesquisa. A exploração do material foi a etapa que demandou tempo e esforço contínuo, para que por meio da sistematização adequada das entrevistas, fosse possível oferecer um quadro empírico organizado que propicie informações relevantes para desenvolver uma interpretação pertinente a cerca do objeto pesquisado.

Para melhor compreensão dos “achados”, agrupamos todas as entrevistas em categorias, sendo visualizados os relatos de todos os estudantes por questão; por meio deste recurso, foi possível realizar a organização da codificação, que segundo Bardin (2011), compreende as etapas de escolha das unidades, a enumeração e a escolha das categorias. Para identificar os sujeitos que participaram da entrevista utilizamos as duas primeiras letras do seu nome (em caso de repetição, tomamos a primeira e a terceira letras do nome, e assim por diante) de modo que os mesmos são identificados pelos códigos: Al, Am, Br, De, Fe, Fr, Ga, Ha, Jo, Ka, Ke, Kr, Ma, Ne, Ra, Ro, St, Th, Vi.

Os quadros abaixo dispõem das categorias levantadas por meio da análise e interpretação dos dados empíricos, apresentando os relatos que construíram cada categoria, organizados por questão e pelo número de ocorrências entre os sujeitos da pesquisa.

Categoria 1: A matemática ensinada em sala de aula é para o futuro

A categoria “A matemática ensinada em sala de aula é para o futuro” compreende duas questões: “Você gosta de matemática? Por quê?” e “Pra que serve a matemática ensinada em sala de aula?” que você acha interessante na aula de matemática? A categoria 1, apresenta-se como essencial no processo de interpretação dos resultados da pesquisa, pois está relacionada com a concepção e às perspectivas dos estudantes acerca das implicações do conhecimento matemático para sua formação enquanto cidadão.

Quadro 2: Categoria 1 – A matemática ensinada em sala de aula é para o futuro

Pergunta	Frequência
Você gosta de matemática? Por quê?	3 estudantes Ke, Ka, Ga
Ke – *Sim [...] hoje em dia o que mais precisa é a educação de matemática, que esses trabalhos que precisam de contas assim essas coisas.* Ka – *Gosto [...] porque se a gente não souber matemática, a gente não aprende quase nada do mundo.* Ga – *Sim. Por que vai ser importante pro futuro [...] tipo se eu for engenheiro [...].*	
Para que serve a matemática ensinada na sala de aula?	3 estudantes Th, Ra, Ha
Th – *Pra a vida [...]* Ra – *Para o nosso desempenho no futuro [...] É quando eu crescer e tiver na faculdade e já saber alguma coisa.* Ha – *[...] por que pode ter engenheiro [...] ser professor alguma coisa.*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

A concepção dos estudantes de que a matemática ensinada em sala de aula é para o futuro ou *“**Pra a vida [...]**”* como propõe a estudante Th, e, que os ajudaria profissionalmente, como declara a estudante Ha – ***[...] por que pode ter engenheiro [...] ser professor alguma coisa***, na faculdade ou nas outras matérias que exigem cálculos, é surpreendente por ser fundamental, porém, dentro do contexto desta pesquisa, a metodologia de ensino observada, restrita à exposição de conteúdos no quadro e a resolução de exercícios descontextualizados da realidade, que mal prepara o estudante pra fazer testes e provas, conforme relatos de experiências dos próprios sujeitos da pesquisa, tanto em relação à série atual, como em relação às séries anteriores, não condiz com as expectativas dos estudantes.

Nesse caso, não por culpa dos estudantes, mas do que pregam os pais, a sociedade e a própria escola, percebemos a assimilação e a reprodução inconsciente e ingênua, de uma informação vaga e sem compreensão, ensinada ao nível do senso comum: “estuda pra ser alguém na vida”, ***[...] porque se a gente não souber matemática, a gente não aprende quase nada do mundo*** (Ka); [portanto] sem a necessária capacidade crítica para questionar o porquê das coisas, que geralmente não é comunicado pelo professor. Freire (1996, p. 28) adverte que é dever do professor “reforçar a capacidade crítica do estudante, sua curiosidade, sua insubmissão”, pois faz parte de sua tarefa docente ensinar a pensar certo, o que em termos críticos,

> é uma exigência que os momentos do ciclo gnosiológico vão pondo à curiosidade que, tornando-se mais e mais metodicamente rigorosa, transita da ingenuidade para o que venho chamando “curiosidade epistemológica”. A curiosidade ingênua, de que resulta indiscutivelmente um certo saber, não importa que metodicamente desrigoroso, é a que caracteriza o senso comum. O saber de pura experiência feito. Pensar certo, do ponto de vista do professor, tanto implica o respeito ao senso comum no processo de sua necessária superação quanto o respeito e o estímulo à capacidade criadora do educando. Implica o compromisso do educador com a consciência crítica do educando cuja “promoção” da ingenuidade não se faz automaticamente (FREIRE 1996, p. 32).

Na perspectiva de construção do conhecimento e, portanto, de uma aprendizagem matemática para o futuro, essa concepção de ensino é superficial e incoerente com o discurso “estuda pra ser alguém na vida”, o que acaba distanciando e minimizando o potencial da matemática no que se refere ao desenvolvimento das habilidades cognitivas do estudante, tornando-a sem utilidade prática e imediata para a vida do estudante e, consequentemente, com pouca ou nenhuma implicação para a formação social, política e histórica dos estudantes. Nesse sentido, Freire afirma que:

> Uma das tarefas mais importantes da prática educativo-crítica é propiciar as condições em que os educandos em suas relações uns com os outros e todos com o professor ou a professora ensaiam a experiência profunda de assumir-se. Assumir-se como ser social e histórico, como ser pensante, comunicante, transformador, criador, realizador de sonhos (1996, p. 46).

Não podemos, portanto, enquanto professor negar-nos o papel fundamental de contribuir positivamente para que o estudante vá sendo o artífice se sua formação, com a ajuda necessária que possamos dar a eles (FREIRE, 1996, p. 78). Pois, a matemática ensinada em sala de aula só será útil no futuro, se esse conhecimento for construído hoje a partir de experiências que atendam as reais necessidades dos estudantes; que favoreça de um lado, a superação da curiosidade ingênua e, de outro – como consequência do primeiro – o desenvolvimento da capacidade crítica dos estudantes; “a capacidade de aprender, não apenas para adaptar-se, mas, sobretudo, para transformar a realidade, para nela intervir, recriando-a” (FREIRE, 1996, p. 76), “é a posição de quem luta para não ser apenas objeto, mas sujeito também da História” (FREIRE, 1996, p. 60).

É, nessa perspectiva, que fazemos nossa crítica, aproveitando a categoria “a matemática é para o futuro”, pois acreditamos que é plenamente possível ir além das concepções de senso comum e ultrapassar as barreiras impostas por “situações limites”, que paralisam as pessoas – no caso de nossa pesquisa, estudantes e professores – fazendo-as acreditar que são incapazes de avançar, de conquistar, de construir sua própria história ou de outra forma, o seu futuro.

O que queremos dizer, corroborando com Freire (1996, p. 60), é que mesmo sabendo que as condições materiais, econômicas, sociais e politicas, culturais e ideológicas em que nos achamos geram quase sempre barreiras de difícil superação para o cumprimento de nossa tarefa histórica de mudar o mundo, sabemos também que os obstáculos não se eternizam, ou seja, a nossa passagem e a de nossos estudantes pelo mundo não é predeterminada, preestabelecida; o “destino” não é um dado, mas, algo que precisa ser feito e de cuja responsabilidade não podemos enquanto educadores, nos eximir (FREIRE, 1996, p. 59).

Em outras palavras, quando houver a conscientização do verdadeiro papel da escola enquanto instituição educacional, como formadora de cidadãos por meio do conhecimento, e, os próprios estudantes superando a curiosidade ingênua e assumindo a curiosidade epistemológica, compreendem a importância dos estudos para sua própria formação pessoal, profissional, intelectual, social, política e histórica, enquanto cidadãos do mundo, ou seja, quando ambos, professor e estudantes, se percebem "no mundo, com o mundo e com os outros, põem-se numa posição em face do mundo que não é de quem nada tem a ver com ele ou a de quem a ele se adapta, mas, a de quem nele se insere" (FREIRE, 1996, p. 60), aí sim, podemos conceber a matemática como uma construção de conhecimento útil e aplicável tanto no momento em que se estuda, como também para o futuro.

Categoria 2: A matemática no comércio: o valor da compra e o troco

A categoria "A matemática no comércio: valor da compra e o troco" compreende duas questões: "Pra que serve a matemática ensinada em sala de aula?" e "Você usa a matemática em seu cotidiano? em que situação?" Na categoria 2, buscamos trazer para discussão elementos que indicam a pouca abrangência da matemática quanto à sua aplicação e utilidade em situações reais do cotidiano que exigem do estudante esse conhecimento. Nesse caso, limitando-se apenas ao comércio, especificamente ao valor da compra de um produto e o troco.

Quadro 3: Categoria 2 – A matemática no comércio: o valor da compra e o troco

Pergunta	Frequência
Para que serve a matemática ensinada na sala de aula?	3 estudantes Ro, Ke, Fe
Ro – *[...] ela também pode ser utilizada no dia-a-dia também* Ke – *[...] serve para várias outras coisas [...] quando for comprar alguma coisa [...].* Fe – *[...] tipo se nossos pais mandarem a gente ir no mercadinho comprar alguma coisa.*	
Você usa a matemática em seu cotidiano? Em que situação?	11 estudantes St, Ro, Ra, Ke, Ne, Ka, Ha, Fe, Fr, De, Ga
St – *[...] Na hora de ir comprar as coisas no mercado [...] pra ver quanto é que vai dar as coisas [...] o arroz é R$ 2,00, aí vai ver se vai dá certo ou não com o dinheiro que eu tenho.* Ro – *[...] como eu vou no mercado [...] minha mãe me dá R$5,00 pra comprar R$3,00 de pão, aí ela pergunta " quanto sobrou de troco" aí eu falo R$2,00.* Ra – *Quando eu vou ao comércio, na padaria, em casa também [...] vou somando quanto que dá o quilo do arroz R$ 2,50 e do açúcar R$ 2,50 aí eu somo dá R$ 5,00.* Ke – *Quando eu vou comprar alguma coisa pra mim [...] já pagando pra*	

ver se vai ter troco, pra ver se não vai sobrar, ver se não vai ficar dívida [...] Ne – *[...] minha mãe compra 1 caderno pra mim [...] o caderno é R$ 10,00 ai ela tem R$12,00 [...] ai a mamãe dá o dinheiro e sobra de troco R$5,00.* Ka – *[...] por causa que eles só vão vender as coisas com dinheiro né, no comércio só vende com dinheiro [...] na hora que eu for pagar, na hora que vem o troco, a gente tem sempre que vê né [...]* Ha – *[...] tipo pra dar o troco [...]* Fe – *Uso. No mercadinho [...] aí eles dão dinheiro, aí a gente vai lá compra, aí né a matemática.* Fr – *Eu uso quando eu vou comprar alguma coisa pra mamãe [...]* De – *Quando eu vou comprar alguma coisa [...] quando sobra troco.* Ga – *Se eu for comprar alguma coisa no mercadinho [...] aí eu vou ter que levar o dinheiro certo, se eu tiver, aí se eu não tiver vou ter que ficar devendo.*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

No âmbito da educação, esses saberes socialmente construídos na prática comunitária, devem ser respeitados e aproveitados como base de introdução para novos conceitos. Freire (1996, p. 33) sustenta que é dever do professor ou, mais amplamente da escola, não só respeitar os saberes, sobretudo os das classes populares, mas também [...] discutir com os estudantes a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino dos conteúdos; onde por meio das experiências vividas pelos estudantes, seja possível construir conceitos e dar significado a matemática ensinada em sala de aula e, consequentemente, ampliar a percepção e a utilidade desse conhecimento no cotidiano.

No entanto, observa-se que as atividades de matemática propostas em sala de aula são cada vez mais irrelevantes quanto à sua aplicação no cotidiano, causando sérias limitações na relação da matemática teórica (ensinada em sala de aula) com as situações práticas do dia a dia que exigem esses conhecimentos; sendo este um dos fatores que contribui para que o estudante permaneça no estado da consciência ingênua, a qual tende a interpretar os problemas ou os desafios de forma simplista, pois não possui recursos cognitivos para distanciar-se suficientemente da realidade, para objetiva-la e criticá-la; suas conclusões são, por isso, apressadas, superficiais (BECKER, 2010, p. 133).

Dessa forma, alguns estudantes mesmo dando o exemplo do comércio não conseguiram relacionar o cálculo do troco com a operação de subtração. E, quando indagados sobre exemplos no comércio envolvendo multiplicação e divisão a dificuldade foi ainda maior; apenas dois estudantes conseguiram exemplificar.

Em termos epistemológico, as influências do meio acontecem na mesma proporção em que houver maturação suficiente das estruturas cerebrais construídas mediante ação e coordenação das ações, para que o sujeito individual possa assimilar as contribuições do meio (BECKER, 2010, p. 251). Por isso, mesmo na fase das operações formais, ao viverem experiências que envolvem a matemática, os estudantes não conseguem percebê-la, muito menos relacioná-la com a matemática ensinada em sala de aula.

Na opinião de Brousseau:

> Os conhecimentos ensinados e os saberes comunicados devem permitir que o aluno entre em todas as situações e práticas sociais não didáticas como sujeito maior, e não na qualidade de aluno. Isso implica, de uma parte, que o professor apresente progressivamente as situações que propõe ao aluno, envolvendo uma noção e os pressupostos didáticos, e, de outra parte, que ele reconheça esse entorno adidático como território de referência cultural e de funcionamento dos saberes que ensina (2008, p. 9).

Nesse sentido, compreende-se a relação da matemática teórica ensinada em sala de aula com a prática do dia a dia, como vinculada ao processo de ensino-aprendizagem, sendo, portanto, estrutura básica, primeiro para o desenvolvimento cognitivo, segundo para o desenvolvimento social e cultural do sujeito. Isso sugere um trabalho pedagógico pautado em situações didáticas que favoreçam a interação contínua e consciente entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática, com ênfase na dialogicidade e na ação dos estudantes enquanto realizam suas produções.

Categoria 3: Matemática é cálculo: regras, fórmulas e algoritmos

A categoria “Matemática é cálculo: regras, fórmulas e algoritmos” compreende quatro questões: “Você gosta de matemática? Por quê?”, “O que você acha das aulas de matemática? Por quê?”, “Para que serve a matemática ensinada em sala de aula?” e “Você usa a matemática em seu cotidiano? Em que situação?”. A categoria evidencia, segundo relatos dos estudantes, elementos de uma aprendizagem mecânica, ou seja, uma aprendizagem por meio da repetição de cálculos ou contas, donde a memorização de regras, fórmulas e algoritmos matemáticos que o professor solicita e que para os estudantes parece ser a grande motivação pela matemática.

Quadro 4: Categoria 3 – Matemática é cálculo: regras, fórmulas e algoritmos

Pergunta	Frequência
Você gosta de matemática? Por quê?	3 estudantes Ra, Ha, Ga
Ra – *[...] Eu gosto só quando tem as contas [...]* Ha – *[...] Gosto porque é legal calcular [...]* Ga – *[...] eu vou ter que fazer os cálculos.*	
O que você acha das aulas de matemática? Por quê?	2 estudantes Ke, Ga
Ke – *Gosto de cálculos [...]* Ga – *[...] Eu gosto de fazer cálculos.*	
Para que serve a matemática ensinada na sala de aula?	3 estudantes Ra, Ha, Ne,
Ra – *[...] resolver e calcular*. Ha – *[...]* ***calcular*** *fazer alguma coisa [...]* Ne – *Fazer conta [...]*	
Você usa a matemática em seu cotidiano? Em que situação?	3 estudantes Ha, Fr, Ga
Ha – *[...] eu calculo assim, para ver se tá certo.* Fr – *[...] na hora de fazer os cálculos [...]*. *Ga – [...] vou tipo calcular [...] vou falar pra ela o cálculo [...].*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Nessa categoria, a matemática ensinada na sala de aula é vista como sinônimo de cálculo, revelando mais uma vez a pouca abrangência alcançada por esta área tão ampla do conhecimento (e que se apresenta de várias formas no mundo) na aprendizagem dos estudantes, visto que a ênfase está na memorização mecânica de conteúdos formais sem significado, como é o caso dos algoritmos das operações básicas da matemática. Freire adverte que "a memorização mecânica do perfil do objeto não é aprendizado verdadeiro do objeto ou do conteúdo" (1996, p. 77) e, segundo Becker, "só apreendendo a significação profunda do objeto, o que só acontece pela atividade do sujeito, o estudante será capaz da verdadeira memorização" (2010, p. 204).

Para Becker (2010, p. 203) o problema do ensino de matemática no nível em que se encontram sujeitos, como os desta pesquisa – operações formais – começa na fase anterior do desenvolvimento cognitivo e está relacionado com o nível de formalização do conteúdo matemático. Nesse sentido, questiona que, "a mera adição lógica (A + A' = B) ou matemática (3 + 4 = 7), num plano puramente formal, carece de significação para uma criança de nível operatório concreto". O autor explica que a saída generalizada encontrada pelo "senso comum" dos professores, para contornar o evidente fracasso no ensino de um conteúdo formalizado, inacessível às crianças desse nível foi,

> decorar! repetir! reproduzir! Isto é usar a memória no seu sentido tradicional, estático, de faculdade psíquica ou de mecanismos de pura retenção, de reativação, de depósito; como se a memória, essa faculdade psíquica

> fundamental e essencial, desde o inicio organizada e determinada, em seus detalhes, pelo próprio desenvolvimento da vida, fosse o único recurso intelectual do sujeito: como se a memoria não fizesse parte da inteligência, e ambas não fossem dependentes da ação do sujeito (BECKER 2010, p. 204).

Quando a estudante Ra, por exemplo, afirma que a matemática serve pra ***"[...] resolver e calcular"*** ou quando o estudante Ne diz que serve pra ***"Fazer conta [...]"***, temos o reflexo de um ensino tradicional baseado no exercício repetitivo de algoritmos, ou seja, os estudantes concebem a matemática tal qual lhes é apresentada pelo professor como uma disciplina puramente teórica resumindo-se apenas a contas. "Neste caso, o aprendiz funciona muito mais como paciente da transferência do objeto ou do conteúdo do que como sujeito crítico, epistemologicamente curioso, que constrói o conhecimento do objeto ou participa de sua construção" (FREIRE, 1996, p. 77).

Nas falas dos estudantes fica claro que o importante é aprender a fazer os cálculos, o que acaba implicando como a principal razão do gosto pela disciplina, como, por exemplo, na fala da estudante Ha ao afirmar: ***"[...] Gosto porque é legal calcular [...]"*** ou na resposta do estudante Ga: ***"[...] Eu gosto de fazer cálculos".*** Como se não existisse – nem para o professor e muito menos para o estudante – outra forma de abordagem didático-metodológica no ensino de matemática, que não seja a que se utiliza de contas, e, o que é pior, o que for diferente desse padrão não é matemática.

Nessa perspectiva, a preocupação do professor é que os estudantes decorem os algoritmos das operações básicas da matemática por meio da repetição de exercícios, geralmente sem nenhuma relação com a vida real. É por isso, questiona Freire (1996, p. 37), que "transformar a experiência educativa em puro treinamento técnico é amesquinhar o que há de fundamentalmente humano no exercício educativo: o seu caráter formador [...] Educar é substantivamente formar". Essa forma de ensinar matemática na escola é em grande parte, uma das principais causas de dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem matemática.

Sob o ponto de vista da prática educacional, argumenta Becker (2010, p. 202), "cabe ao educador buscar, com seus educandos, "o rigor lógico" e, ao mesmo tempo, "a compreensão de um formalismo suficiente" através dos caminhos indicados pela psicologia: os caminhos da ação e da operação", pois, "as operações derivam de ações que se interiorizam coordenando-se em estruturas” (BECKER 2010, p. 202), ou seja, o conhecimento matemático não pode ser transferido, como sugere a concepção empirista, onde o professor ensina e o estudante aprende passivamente tal qual o professor ensinou, mas, é construído a partir da ação do sujeito; por meio da interação do estudante com o ambiente de aprendizagem.

Categoria 4: Sequência padrão da aula de matemática

A categoria “Sequência padrão da aula de matemática” compreende uma questão: “Como você descreve ou interpreta a sequência da aula de matemática?”. A categoria traz para discussão a sequência da aula de matemática, configurada basicamente, segundo os discursos dos estudantes, em três etapas: exposição de conteúdos com exemplos, resolução de exercícios e correção das tarefas.

Quadro 5: Categoria 4 – Sequência padrão da aula de matemática

Pergunta	**Frequência**
Como você descreve ou interpreta a sequência da aula de matemática?	12 estudantes Th, St, Ro, Ra, Ne, Ke, Ka, Fe, Ha, Fr, De, Ga
Th **–** *[...] Passa atividade, faz a chamada e corrige [...]* St **–** *[...] ela passa o assunto, ai explica, ai depois passa atividade, ai a gente tem que responder as atividades [...]* Ro **–** *[...] vai dando a atividade [...] ele vai explicando o assunto [...] aí vai passando a atividade pra saber se a gente mesmo entendeu.* Ra – *[...] A professora explica [...] aí depois ela vai e passa os exercícios [...] ela dá um tempo pra gente fazer, aí a gente amostra pra ela.* Ne – *[...] agora eu vou escrever aqui no quadro alguns exemplos e depois eu vou fazer as perguntas* Ke – *[...] explica o que ele vai passar. aí ele vai passando [...] as atividades pra entregar depois pra ele.* Ka – *Primeiro ela bota uma questão ai ela explica [...].* Fe – *[...] ele passa o assunto [...] aí ele explica, aí depois no final ele passa atividade [...].* Ha – *[...] às vezes ela dita, às vezes ela escreve no quadro [...] aí depois ela vai lá e explica e depois ela manda a gente responder.* Fr – *Ela pega, ela dá o assunto, escreve tudinho lá e passa uma atividade [...] Ela explica outro assunto e vai fazendo outras tarefas.* De **–** *Primeiro começa passando o assunto, depois o exercício e depois corrige.* Ga **–** *[...] O professor começa o assunto, aí depois ele vai ensinando pouco a pouco, aí depois ele passa as tarefas [...].*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

A categoria revela que a aula de matemática segue uma sequência padrão, organizada nas seguintes etapas: exposição e explicação do conteúdo por meio de exemplos ou exercícios padrão; os exercícios ou tarefas para o estudante treinar, donde se espera que haja aprendizagem, nesse caso aprendizagem mecânica; e por último, quando há tempo, a correção das tarefas ou o que muitas das vezes acontece, o visto da professora. Essa sequência não favorece o diálogo, nem a formação de estruturas lógicas, necessárias à construção do conhecimento matemático. Ao contrário, “produz muito pouca mudança no pensamento lógico ou então uma extraordinária mudança momentânea, sem compreensão real” (PIAGET, 1977, p. 88).

Esse modelo de ensino tradicional, onde predomina a exposição sumária de conteúdos formais compostos de regras, fórmulas e algoritmos que devem ser memorizados por meio da repetição exaustiva de exercícios, como descreve o estudante Ro ***– [...] vai dando a atividade [...] ele vai explicando o assunto [...] aí vai passando a atividade pra saber se a gente mesmo entendeu**,* segundo explica Becker (2010, p. 34) é próprio das teorias empiristas da aprendizagem, que reduzem o conhecimento a mera cópia passiva da realidade, ao passo que a verdadeira explicação do desenvolvimento cognitivo deve centrar-se nas inovações ou invenções.

Nessa perspectiva, quando os estudantes não conseguem aprender, a falha não está no método tradicional de ensino, mas na falta de atenção ou na falta de interesse dos estudantes; afinal na concepção empirista a aprendizagem depende da percepção como fonte ou sinônimo de experiências. No entanto, segundo Becker a experiência não é recepção, mas ação e construção progressivas, donde a assimilação dos dados da experiência à atividade do sujeito resulta em acomodação (2010, p. 30), isto é, aprendizagem com construção de conhecimento.

Nesse sentido, para o estudante aprender de fato, não basta apenas está atento à explicação do professor, copiar o conteúdo exposto e reproduzir a técnica ensinada, como na descrição da estudante Ra – ***[...] A professora explica [...] aí depois ela vai e passa os exercícios [...] ela dá um tempo pra gente fazer, aí a gente amostra pra ela***, pois seria reduzir a aprendizagem das estruturas lógicas a um esquema único de natureza associacionista, ou seja, de estímulo e resposta, como declara a estudante St – ***[...] ela passa o assunto, ai explica, ai depois passa atividade, ai a gente tem que responder as atividades [...]***; seria “suprimir o papel do sujeito do conhecimento com tudo o que isto significa de eliminação da atividade construtiva e inventiva que lhe é própria” (BECKER, 2010, p. 33).

Numa aprendizagem matemática com perspectiva de construção de conhecimento, é necessário sim, criar situações onde os estudantes sintam-se desafiados a agirem por conta própria, favorecendo, dessa forma, suas atividades física, cognitiva e oral, para que por meio do processo dialético de assimilação e acomodação atribuam significação aos objetos e faça da experiência algo mais que um simples contato do sujeito com uma realidade diferente dele (BECKER, 2010, p. 30), ou seja, uma conquista da atividade intelectual do sujeito e não um dado primordial que se lhe impõe de fora (BECKER, 2010, p. 31).

Categoria 5: O uso do livro didático no ensino de matemática

A categoria "O uso do livro didático no ensino de matemática" compreende duas questões: "Que materiais didáticos são utilizados? Somente o livro didático?" e "Como utilizam o livro didático? Ou as aulas são apenas no quadro". A categoria traz para discussão a limitação do uso do livro didático como único material curricular para o ensino de matemática, sobretudo por ser usado como fonte de exposição e transmissão de conteúdos.

Quadro 6: Categoria 5 – O uso do livro didático no ensino de matemática

Pergunta	Frequência
Que materiais didáticos são utilizados? Somente o livro didático?	9 estudantes St, Ra, Ne, Ke, Ka, Ha, Fr, De, Ga
St – *[...] Só esse, só o livro.* Ne – *[...] o livro dele, ai se ele não quiser passa do livro dele, ele passa do nosso livro [...].* Ke – *Usa outros recursos, alguns outros livros [...].* Ka – *Ela usa o livro dela mesmo que ela tem.* Ha – *[...] a gente usa mais é o caderno e o livro [...]* Fr – *Ela trás outros... Livros. Ela não usa o nosso, usa outros livros.* De **–** *Só o livro didático [...].* Ga **–** *Às vezes ele usa outros livros, mas da mesma matéria.*	
Como utilizam o livro didático? Ou as aulas são apenas no quadro?	7 estudantes Ro, Ne, Ke, Ka, Fe, Ha, Fr
Ro – *[...] ele vai passando as paginas pra gente fazer [...] a gente faz perguntas e respostas.* Ne – *Ele explica lá pra poder fazer a tarefa, ai depois, ele escreve no quadro as páginas, ai o aluno faz [...].* Ke – *O professor dá a página, a gente procura, aí lê como é que tem que se fazer a atividade [...] escreve no caderno tudinho, aí responde.* Ka – *[...] ela pega alguns textos, é explicando sobre o assunto [...].* Fe - *Ele coloca no quadro [...] copia do livro pro quadro*. Ha – *Ela segura na mão [...] alguns têm leitura [...] ela lê e depois fala pra gente e explica.* Fr – *Abre nas tarefas, escreve os conteúdos [...].*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Conforme relatos dos sujeitos, o livro [didático] além de ser o único material didático utilizado nas aulas de matemática, como destaca a estudante De: ***– Só o livro didático [...]***, é, concebido como fonte de pura copia e repetição tanto pelo professor ao transcrever o conteúdo para o quadro branco, como explica o estudante Fe: ***– Ele coloca no quadro [...] copia do livro pro quadro***; quanto para os estudantes ao copiarem no caderno, como explica o estudante Ke: ***– O professor dá a página, a gente procura, aí lê como é que tem que se fazer a atividade [...] escreve no caderno tudinho, aí responde***.

Essa abordagem baseada na exposição de conteúdos tal qual consta no livro didático não favorece o diálogo entre professor e estudante – como condição necessária para a aprendizagem matemática – pois, trata os conteúdos de forma unidirecional, onde “com frequência, as opções postuladas são transmitidas de forma dogmática, apresentadas como conhecimentos acabados e sem possibilidades de questionamento. Desta maneira se silencia o conflito, fonte de progresso e de criação cultural e científica” (ZABALA, 1998, p. 174).

A metodologia apresentada nos livros didáticos que se situam num modelo de aula transmissor e dogmático,

> fomentam a atitude passiva de meninos e meninas, já que impedem que participem tanto no processo de aprendizagem como na determinação dos conteúdos. Desta maneira a iniciativa dos alunos é freada, se limita sua curiosidade, eles são obrigados a adotar algumas estratégias de aprendizagem válidas apenas para uma educação baseada nestes materiais escolares (ZABALA 1998, p. 175).

Por exemplo, quando o estudante Ga destaca: ***– às vezes ele usa outros livros, mas da mesma matéria***, entendemos que tanto para os estudantes, quanto para o professor o livro didático é adotado como um recurso indispensável no ensino de matemática. Na opinião de Zabala, em qualquer sequência didática é necessária ou conveniente a utilização de algum tipo de material estruturado – como os livros, cadernos de exercícios, blocos ou fichas com atividades organizadas ordenadamente por grau de dificuldade etc. – porém, admite ser desfavorável ao uso do livro didático como manual único de ensino, “referindo-se a um tipo concreto de livro, elaborado conforme um modelo estritamente transmissor” (ZABALA, 1998, p. 174).

Na fala dos sujeitos, percebe-se há uma certa insatisfação quando indagados sobre os materiais didáticos utilizados na aula de matemática, como enfatiza a estudante St: ***– [...] Só esse, só o livro***. Ás vezes, na tentativa de diversificar, como afirma o estudante Ke, o professor ***[...] usa outros recursos, alguns outros livros [...]***, causando nos estudantes a impressão de mudanças, porém, a abordagem é a mesma como explica o estudante Ne: ***– Ele explica lá pra poder fazer a tarefa, ai depois, ele escreve no quadro as páginas, ai o aluno faz [...]***. Isso nos revela um paradigma no ensino de matemática, onde o livro didático é tido como a única fonte de consulta e exposição de conteúdos, sem o qual, muitos professores, não conseguem “dar aula”.

Se o nosso objetivo enquanto educadores é a aprendizagem matemática com a promoção de conceitos, e não apenas a memorização de informações sem significado, não podemos nos limitar apenas à copia do livro didático, mas, usá-lo como fonte para a discussão de temas relevantes, sendo que o ideal é buscar outros recursos que nos ajudem em nossa prática docente, complementando a abordagem do livro didático. Nesse sentido, Zabala argumenta que:

> A complexidade da tarefa educativa nos exige dispor de instrumentos e recursos que favoreçam a tarefa de ensinar. Em todo caso, são necessários materiais que estejam a serviço de nossas propostas didáticas e não o contrário; que não suplantem a dimensão estratégica e criativa dos professores, mas que incentivem [...] se nossa proposição vai além da concepção seletiva e propedêutica, os materiais a que aludimos não podem se limitar ao formato do livro (1998, p. 175).

Ou seja, não podemos desprezar ou desmerecer a importância do livro didático, muitas vezes indispensável no ensino de matemática, porém, numa visão construtivista, em muitos casos, são necessários outros recursos didáticos que o complemente, dando-lhe consistência e significado aos conceitos abordados, sob pena de tornar o ensino de matemática uma mera e cansativa exposição de conteúdos vagos e sem sentido, comprometendo, assim, o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, ocasionando defasagens na aprendizagem matemática.

Essa abordagem, não favorece a participação crítica e consciente do estudante, já que a principal preocupação seria a memorização de fórmulas e algoritmos por meio da repetição de exercícios. Epistemologicamente, não favorece a dialogicidade pautada na ação e reflexão, nem a formação de estruturas lógicas responsáveis pelos processos de abstração reflexionante e tomada de consciência conceituada, os quais implicam diretamente na construção do conhecimento matemático.

Categoria 6: Materiais didáticos diversos ajudam na aprendizagem

A categoria "Materiais didáticos diversos ajudam na aprendizagem" compreende duas questões: "Em sua opinião as aulas de matemática poderiam ser melhores? Como?" e "Como ensinava o melhor professor de matemática que você teve?". A categoria evidencia a concepção dos estudantes acerca da importância de recursos didáticos variados no ensino de matemática para tornar as aulas mais interessantes e significativas, o que por outro lado, sugere a limitação do ensino de matemática pautado na exposição de conteúdos no quadro branco, quase sempre copiados do livro didático.

Quadro 7: Categoria 6 – Materiais didáticos diversos ajudam na aprendizagem matemática

Pergunta	Frequência
Em sua opinião, as aulas de matemática poderiam ser melhores? Como?	7 estudantes Th, St, Ro, Ka, Fe, Ha, Fr
Th – *[...] Jogos de matemática.* St – *[...] fazer aula prática, com data show.* Ro – *[...] o professor levar instrumento pra gente aprender né.* Ka – *[...] eles poderiam usar o data show, ou então fazer alguns jogos de matemática.* Fe – *[...] ela poderia colocar slide [...].* Ha – *[...] passar um vídeo de data show, ensinando, pode ela fazer jogos matemáticos, dá pra fazer um monte de coisas, mas ela só faz tarefa na lousa.* Fr – *[...] ele amostrava vídeos, sobre os assuntos que ele estava dando [...].*	
Como ensinava o melhor professor de matemática que você teve?	8 estudantes Th, St, Ro, Ra, Ka, Fe, Ha, fr
Th – *Era jogos [...].* St – *Ele passava no data show, ele fazia as brincadeiras práticas, fazia isso.* Ro – *[...] ele levava material que contava [...] ele falava o número ai a gente colocava lá.* Ra – *Ele levava o data show, o computador [...] folha de papel ofício [...] triângulos com 4 peças.* Ka – *[...] ele fazia jogos [...].* Fe – *Ele trazia slides, trazia materiais concreto [...].* Ha – *[...] tinha vezes que ele fazia jogos, ele falava "hoje a aula vai ser tipo prática", só jogos [...] fazia no data show [...].* Fr – *[...] ele ensinava com brinquedos assim.*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Nos relatos dos estudantes, como na fala da estudante Ka, quando diz: ***– [...] eles poderiam usar o data show, ou então fazer alguns jogos de matemática***, percebe-se o anseio por aulas de matemática diferenciadas que fujam do modelo convencional das aulas expositivas (e muitas vezes sem diálogo) e utilize outros recursos didáticos (além do livro e do quadro branco) como jogos, material concreto e o próprio recurso áudio visual com computador e data show.

Os estudantes relatam com entusiasmo as experiências vividas nas aulas de matemática e, são unânimes em afirmar que as aulas seriam mais interessantes e os ajudaria a entender melhor a matemática, se o professor utilizasse outros recursos didáticos além do livro didático e do quadro branco. Para a estudante Ha, por exemplo, o ideal seria ***[...] passar um vídeo de data show, ensinando, pode ela fazer jogos matemáticos, dá pra fazer um monte de coisas, mas ela só faz tarefa na lousa.***

Com certeza, não podemos negar a necessidade e a importância de materiais didáticos diferenciados, concretos ou não, no ensino de matemática, que possam favorecer a compreensão dos estudantes dando significado aos conceitos matemáticos abordados em sala de aula. “[...] Se nossa proposição vai além da concepção seletiva e propedêutica, os materiais a que aludimos não podem se limitar ao formato do livro” (ZABALA, 1998, p. 175) e do quadro branco. É indispensável realizar observações diretas e de imagens, manipulações ou atividades de laboratório, diálogos e debates que favoreçam a compreensão (ZABALA, 1998, p. 177).

No entanto, precisamos ter muito claro quais são os objetivos que queremos alcançar com este ou aquele material ou recurso didático, considerando o conteúdo abordado e as necessidades dos estudantes.

> No caso dos conteúdos referentes a conceitos e princípios, as atividades adequadas são de uma complexidade superior e são qualitativamente diferentes da simples repetição verbal de algumas ideias, definições ou enunciados. A aprendizagem destes conteúdos exigem atividades que situem os meninos e meninas frente a experiências que permitam a compreensão, o estabelecimento de relações e a utilização do que foi aprendido em situações diversificadas (ZABALA, 1998, p. 177).

Numa abordagem onde seja possível promover a ação cognitiva e o diálogo em sala de aula, para que mediante sucessivas e progressivas tomadas de consciência, o estudante construa o conhecimento necessário para seu desenvolvimento intelectual, o uso do computador e do Datashow com apresentação em slides, como sugere, por exemplo, o estudante Fe: ***– [...] ela poderia colocar slide [...]*** ou como relembra a estudante Ra: ***– Ele levava o data show, o***

computador [...], apresenta-se, concordando com Zabala, como um suporte útil não só para exposição do professor mas, também,

> como complemento esclarecedor de muitas ideias que se querem comunicar, tanto através de esquemas como de imagens ou ilustrações que ajudem na elaboração e na construção de conceitos, assim como para a exposição das fases de determinados conteúdos procedimentais. São instrumentos que facilitam o diálogo em classe e ajudam a centrar a atenção do grupo com relação a um objeto de estudo comum. Também são instrumentos para a criação de formas expressivas e comunicativas, que os alunos podem usar em suas exposições de aula (ZABALA, 1988, p. 183).

O ideal seria ter na escola materiais didáticos variados e disponíveis que pudessem auxiliar o professor em sua prática educativa de sala de aula, de acordo com o planejamento da aula e o conteúdo proposto. De outra forma, tomando como ponto de vista a formação interdisciplinar do estudante, o que queremos dizer é que “a aprendizagem do conceito rio, da soma, da estrutura molecular ou do princípio de Arquimedes, sobretudo nos níveis básicos da escolaridade, não pode se limitar a uma leitura e a uma posterior repetição verbal das definições” (ZABALA, 1998, p. 176).

A analogia feita por Zabala é perfeita, quando compara a escola a uma farmácia provida de medicamentos muito variados, isto é, materiais didáticos diversos, que nos permitam ir elaborando o tratamento, ou seja, a estratégia ou abordagem de ensino, conforme as necessidades dos estudantes. No entanto,

> o problema surge quando esta farmácia só nos oferece um único tipo de “tratamento completo”, solidamente engarrafado em forma de livro para todos, negando-nos a possibilidade de construir, através da combinação de diferentes produtos, propostas adequadas às necessidades do grupo em geral e de cada aluno em particular. Portanto, a questão não tem que ser colocada em termos de “livro sim, livros não”, mas em termos de “que materiais e como utilizá-los” (ZABALA, 1998, p. 176).

Categoria 7: Organização social da sala de aula da matemática

A categoria “Organização social da sala de aula de matemática” está dividida em três subcategorias: “Poucos trabalhos em grupo”, “A importância da ajuda mútua na execução das tarefas” e “Aspectos negativos do trabalho em grupo”. Nessa categoria tratamos das implicações da organização social da sala de aula na aprendizagem matemática, considerando dois modelos de agrupamento: o grande grupo e grupos menores com equipes flexíveis.

Subcategoria 7.1: Poucos trabalhos em grupo

A subcategoria “Poucos trabalhos em grupo” compreende apenas a questão “São feitos trabalhos em grupos? Quando? Em que situação?”. Nesse caso, nossa discussão fica pautada na limitação da organização em grande grupo para a aprendizagem matemática, especialmente, quanto à construção de conceitos.

Quadro 8: Subcategoria 7.1 – Poucos trabalhos em grupo

Pergunta	Frequência
São feitos trabalhos em grupos? Quando? Em que situação?	7 estudantes St, Ra, Ne, Ke, Ka, Ha, Fr,
St – *São [...] poucos [...]* Ra – *São... É assim, mais ou menos [...].* Ne – *Só às vezes [...] poucas vezes [...].* Ke – *São [...] Poucas [...] Tem, às vezes [...]* Ka – *Ás vezes é... Dupla [...] Raramente [...] é mais individual mesmo.* Ha – *[...] De vez em quando [...].* Fr – *São [...] Poucos [...].*	

Fonte: Dados empíricos da pesquisa

De acordo com os discursos dos sujeitos, quando respondem, por exemplo: (Ra) ***– São... É assim, mais ou menos [...]*** ou (Ha) ***– [...] De vez em quando [...]***, em relação à frequência com os trabalhos em grupo acontecem na aula de matemática, verificamos que na organização das atividades de sala de aula prevalece o modelo habitual padrão do grande grupo, onde os professores se dirigem à turma, através de exposições, demonstrações, modelos, regras, fórmulas, etc., e todos os estudantes fazem a mesma coisa ao mesmo tempo, seja escutar, copiar o conteúdo, fazer exercícios, realizar provas.

Esse modelo simples e inflexível de configuração social da sala de aula tem sido tradicionalmente a forma exclusiva de agrupamentos nas aulas de matemática, o que é questionável, pois considera todos os estudantes como iguais e, ignora as diferenças trazidas pela heterogeneidade da turma, sendo, nesse sentido, desfavorável à construção do conhecimento matemático, pois segundo Piaget, os relacionamentos interpessoais, a cultura, as concepções, as perspectivas, os princípios e valores, as crenças, e, portanto, as opiniões e os pontos de vista das pessoas são elementos constitutivos do meio enquanto objeto do conhecimento, com o qual o sujeito interage.

O problema aumenta quando se considera que esta é a única organização possível, de maneira que, independentemente do conteúdo matemático a ser trabalhado, a forma de agrupamento dos estudantes sempre é a mesma (ZABALA, 1998, p. 120), ou seja, nessa concepção epistemológica de ensino os conteúdos matemáticos e, fundamentalmente, os conceitos são ensinados como se se aceitasse que são aprendidos através da memorização mecânica.

Do ponto de vista didátido-pedagógico, Zabala (1998) detecta em sala de aula dois grandes obstáculos que causam limitações à organização em grande grupo, quando o objetivo dos conteúdos matemáticos a serem ensinados visa à formação de conceitos.

> Em primeiro lugar, devido ao número de alunos, já que se o grupo é muito numeroso dificilmente poderemos estabelecer as inter-relações necessárias para conhecer o processo de aprendizagem que cada aluno segue. Em segundo lugar, realmente teremos poucas oportunidades de conhecer o processo de elaboração e compreensão de cada aluno se todo grupo tem que estar sujeito aos diálogos individuais entre professor e aluno (ZABALA, 1998, p. 121).

Certamente para uma aprendizagem matemática com perspectiva de construção de conhecimento, este trabalho será mais viável e produtivo se dividirmos o grande grupo em pequenos grupos, cada um deles com trabalhos específicos, a fim de promover a interação, o diálogo, a socialização e a cooperação entre os estudantes, e, ao professor, enquanto mediador da aprendizagem seja possível circular pelos diferentes núcleos e oferecer a ajuda necessária a cada estudante.

Subcategoria 7.2: Ajuda mutua na execução das tarefas

A subcategoria “Ajuda mutua na execução das tarefas” compreende três questões: “Você acha importante o trabalho em grupo? Por quê?”, “Você prefere fazer os trabalhos de sala de aula individualmente ou em grupo? Por quê?” e “O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?”. A categoria traz para discussão a importância do trabalho em grupo nas aulas de matemática, como organização social favorável a promoção da aprendizagem matemática por meio de uma educação dialógica e problematizadora, com debates, trocam de opiniões e cooperação ou ajuda mútua entre os estudantes, enquanto interagem e realizam suas produções.

Quadro 9: Subcategoria 7.2 – Ajuda mutua na execução das tarefas

Pergunta	**Frequência**
Você acha importante o trabalho em grupo? Por quê?	11estudantes Th, St, Ro, Ra, Ke, Ka, Fe, Ha, Fr, De, Ga
Th – *Sim... Por dividir as tarefas e as dúvidas.* St – *Acho... Porque tipo eu não sei aquilo que estão ensinado, ai a outra pessoa vai e sabe e ele vai me ensinar o quê que pede [...].* Ro – *Acho... Quanto mais pessoas pensarem em um assunto só, fica até mais fácil de resolver.* Ra – *É... Por que ajuda, se um não souber o outro sabe, então os dois tem a cabeça de saber de tudo [...].* Ke – *Acho... Porque um vai ajudando o outro, por que... por exemplo, um tá fazendo uma coisa, o outro não sabe, então o que sabe vai lá e ajuda.* Ka – *[...] duas pessoas são melhor do que uma, fazendo os trabalhos [...] porque uma pessoa vai ajudando a outra.* Fe – *Acho... Porque um tira a dúvida do outro [...] Já ajudei e fui ajudado*. Ha – *Acho... Porque pode o colega não saber [...] aí tipo ele pergunta da gente, a gente também não sabe, aí nos todos vai se ajudando.* Fr – *Sim... Eu vou falando com meu colega do outro lado... Sim, por que a gente vai falando as nossas opiniões da tarefa.* De – *Sim... Pra quando uma pessoa não souber, uma ajuda à outra*. Ga – *É importante... Porque tipo assim, se o seu colega do lado faz uma resposta errada, aí se tu souber, aí tu pode ensinar ele.*	
Você prefere fazer os trabalhos de sala de aula individualmente ou em grupo? Por quê?	3 estudantes Ro, Ke, Ka,
Ro – *Em grupo mesmo... Porque assim vai ser mais fácil de fazer as respostas e cada um pode dar sua opinião pra resposta.* Ke – *Em grupo [...] Aí quando faz em grupo um vai ajudando o outro.* Ka – *[...] Em dupla mesmo... Por que em dupla, é um ajuda o outro e é mais rápido, quando a gente tem alguma dificuldade, ai o outro pode ajudar.*	
O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?	2 estudantes Ra, Ke
Ra – *[...] Eu pergunto do meu colega [...]* Ke – *Eu pergunto do meu colega, pra ele me ajudar [...]*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

De acordo com os discursos dos sujeitos quando afirmam, por exemplo: (Ke) ***"– ...Porque um vai ajudando o outro, por que... por exemplo, um tá fazendo uma coisa, o outro não sabe, então o que sabe vai lá e ajuda o outro"*** ou (Th) ***"– Sim... Por dividir as tarefas e as dúvidas"***, o trabalho em grupo promove a interação, a socialização e a cooperação entre os sujeitos, favorecendo, nos diferentes níveis e ritmos de aprendizagem, o desenvolvimento da capacidade cognitiva de abstração e tomada de consciência, a qual, do ponto de vista epistemológico, depende ou "é construída pela interação entre organismo e meio, indivíduo e sociedade, sujeito e objeto" (BECKER, 2010, p. 267). Sendo este processo, condição necessária à construção do conhecimento matemático.

Zabala reforça que os trabalhos em grupo,

> oferecem numerosas oportunidades para trabalhar importantes conteúdos atitudinais. Sua estrutura também é apropriada para a criação de situações que promovam o debate e os correspondentes conflitos cognitivos e pela possibilidade de receber e dar ajuda o que facilita a compreensão dos conceitos e procedimentos complexos. Comprometem os alunos na gestão e no controle da aula e constituem um bom instrumento para promover a cooperação e a solidariedade, valores que, embora sempre tenham sido fundamentais para a formação das pessoas, agora, numa escola cada vez mais aberta à diversidade (de culturas, de competências...), se erigem em instrumentos básicos de convivência e progresso (1998, p. 124).

Nesse contexto, percebemos que a influência educativa na interação entre os estudantes quando trabalham em grupo nas aulas de matemática, favorece a comunicação produtiva. No discurso dos estudantes Ro e Fr, por exemplo, quando afirmam: ***"– Em grupo mesmo... Porque assim vai ser mais fácil de fazer as respostas e cada um pode dar sua opinião pra resposta"*** ou ***"– Sim... Eu vou falando com meu colega do outro lado... Sim, por que a gente vai falando as nossas opiniões da tarefa"***, respectivamente, o diálogo, aparece como fator essencial para a promoção dos debates e das troca de opiniões entre os estudantes, quando esclarecem dúvidas e se ajudam mutuamente na execução de tarefas.

A categoria traz, portanto, a seguinte questão: se a intenção do ensino e da aprendizagem matemática for a construção de conhecimentos que contribua para a formação integral dos estudantes, faz-se necessário uma organização social de sala de aula que atenda suas necessidades reais, centrada tanto nas capacidades cognitivas como nas capacidades de equilíbrio pessoal, de relação interpessoal e de inserção social, considerando a diversidade ou a heterogeneidade da turma, o que só é possível mediante a adoção de uma educação crítica e problematizadora a qual realiza-se somente no diálogo; se não há diálogo, não há educação libertadora (BECKER, 2010, p. 263).

Portanto, na organização social da sala de aula de matemática, o trabalho em grupo parece viável como prática de liberdade, pois promove a interação entre os estudantes, e, o diálogo aparece não apenas como mera troca de informações, mas, apoiado na ação e na reflexão, torna-se um ato de criação e recriação, uma condição própria da existência autêntica do homem (BECKER, 2010, p. 263), favorecendo o debate, a troca de opiniões, o levantamento de hipóteses, etc. Na educação crítica libertadora, o estudante, na relação com o professor, tem liberdade para dar sua opinião, fazer sua crítica, perguntar, questionar, etc.

Desta maneira, conclui Freire:

> O educador já não é o que apenas educa, mas o que enquanto educa, é educado, em diálogo com o educando que, ao ser educado, também educa. Ambos, assim, se tornam sujeitos do processo em que crescem juntos e em que os “argumentos de autoridade” já não valem (1980, p. 78).

Subcategoria 7.3: Aspectos negativos do trabalho em grupo

A subcategoria “Aspectos negativos do trabalho em grupo” compreende duas questões: “Você acha importante o trabalho em grupo? Por quê?” e “Você prefere fazer os trabalhos de sala de aula individualmente ou em grupo? Por quê?”. A categoria traz para uma breve discussão, a preferência por trabalhos individuais e os motivos da escolha.

Quadro 10: Subcategoria 7.3 – Aspectos negativos do trabalho em grupo

Pergunta	Frequência
Você acha importante o trabalho em grupo? Por quê?	4 estudantes Ka, Fe
Ra – *Todo mundo conversa na hora que a professora passa a tarefa, a prova, o trabalho [...] outros ficam sentados, parados, esperando as notas sobre as nossas costas [...] Quando a gente faz em grupo, pelo menos dois faz a tarefa e um não [...].* Ne – *Não... Porque a colega que tá fazendo com o outro não pode ajudar, aí os dois pegam ponto [...] ai da 10 pros dois.* Fe – *[...] só um fazer a atividade e os outros ficarem pedindo sua opinião, ficar pegando a resposta do outro colega.* De – *[...] a pessoa não saber nada [...].*	
Você prefere fazer os trabalhos de sala de aula individualmente ou em grupo? Por quê?	9 estudantes St, Ro, Ra, Ne, Ke, Ka, Fe, Fr, Ga
Th – *Individualmente* [...] *As conversas.* St – *Às vezes individual [...] não ajudar o outro [...] é ruim, porque ele não vai aprender.* Ne – *Individual, porque se a gente errar, assim se a gente acertar o professor dá ponto só pra um aluno não pro outro, aí o outro não pode ajudar, aí só eu pego ponto.* Fe – *Individual, porque quando faz em dupla às vezes vem, não são uma pessoa boa assim pra fazer trabalho, que presta atenção, ficam aqueles bagunceiros, aí a gente vai fazer a tarefa, aí eles ficam bagunçando, aí não dá pra gente fazer.* Ha – *Individualmente, por que assim eu consigo mais, porque com o meu colega ele fica tipo olhando pro meu caderno, aí não dá, aí ele quer coisar o meu cálculo, aí desconcentra a gente... Tem alguns que ficam querendo conversar.* Fr – *Em alguns momentos é melhor individual [...] no trabalho em grupo, tipo assim as pessoas que não querem aprender e só querem pegar a resposta.* De – *Individualmente, porque talvez alguém não possa querer fazer*. Ga – *Individual [...] eu acho melhor pra mim de responder, porque eu gosto de responder sozinho, as perguntas [...] podem me atrapalhar.*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Os discursos dos sujeitos revelam que muitos estudantes preferem fazer seus trabalhos sozinhos, sem influencia ou contribuição de outros. Alguns acham que sozinhos produzem melhor, como é o caso do estudante Ga que diz: ***"– Individual [...] eu acho melhor pra mim de responder, porque eu gosto de responder sozinho, as perguntas [...] podem me atrapalhar"***. Mas, a maioria admite que, em dupla ou em grupo há muitas conversas paralelas e colegas que se aproveitam para conseguir promoção à custa dos outros, por isso preferem individual, como explica a estudante Ha: ***"– Individualmente, por que assim eu consigo mais, porque com o meu colega ele fica tipo olhando pro meu caderno, aí não dá, aí ele quer coisar o meu cálculo, aí desconcentra a gente... Tem alguns que ficam querendo conversar".***

Nas vozes dos estudantes, as atividades em grupo aparecem contraditórias. E a negatividade tem por base as experiências de espontaneidade e da falta de orientação pedagógica para os trabalhos de grupo, o que parece uma "armadilha" para que alguns estudantes não se comprometam individualmente com seu trabalho individual, e se "escorem nos grupos".

De modo geral, o trabalho individual consiste nas atividades que cada estudante realiza por si só e é a forma de trabalho que a maioria de sequência de ensino e aprendizagem num ou noutro momento. Seja qual for a corrente pedagógica, nas propostas educativas sempre esteve presente o trabalho individual. E é lógico que seja assim, porque,

> a aprendizagem, por mais que se apoie num processo interpessoal e compartilhado, é sempre, em última instância, uma apropriação pessoal, uma questão individual. As diferenças são encontradas no papel que se atribui a este trabalho, no momento em que ele é realizado, nos tipos de conteúdos que se trabalham e em seu grau de adaptação às características pessoais de cada estudante (ZABALA 1998, p. 127).

No entanto, a opção pelo trabalho individual, por mais que justificada pelo estudante, deve-se mais ao modelo tradicional de organização do trabalho pedagógico da sala de aula de matemática, que por ser unilateral em sua concepção de ensino, não favorece a interação dialógica entre professor e estudantes, implicando numa aprendizagem voltada ao treinamento e reprodução do que é ensinado, portanto, é compreensível que o estudante prefira fazer sozinho o seu trabalho, pra que não seja atrapalhado em seu treinamento ou pra não perder a concentração e errar, pois o objetivo é apresentar suas produções ao professor e "ganhar a nota" como prêmio pelo seu trabalho.

Zabala adverte que:

> Para poder adaptar o processo de ensino às características singulares da aprendizagem da cada um dos estudantes, será necessário introduzir mudanças qualitativas na forma de realizar este trabalho individual. Neste caso, não podemos deixar o estudante sozinho na fase de estudo, já que se não entendeu o conceito – durante a exposição, com os diálogos e as perguntas que se introduziram, nos debates ou nos trabalhos em grupo reduzidos -, dificilmente poderá resolver as dificuldades de compreensão por si só. De outro lado, o trabalho individual será eficaz quando, uma vez compreendido o conceito, realize as atividades e exercícios que lhe permitirão ampliar, detalhar, recordar e eventualmente reforçar o que já tinha compreendido (1998, p. 128 e 129).

Assim, chegamos à conclusão de que num trabalho pedagógico de sala de aula, uma organização em grande grupo coloca muitos problemas para o ensino dos conceitos se não introduzem medidas que permitam conhecer o grau e o tipo de processo que está seguindo cada estudante na construção do significado, a fim de que se possa prestar a ajuda que cada um precisa para avançar em sua aprendizagem. Quanto mais complexos forem os conteúdos a serem ensinados e aprendidos e mais jovens forem os estudantes, mais dificuldades teremos para atender à diversidade numa estrutura de grande grupo, onde cada um faz o que pode, de acordo com suas próprias concepções.

No caso de salas de aula superlotadas, o que é comum em nosso sistema público de ensino, o trabalho pedagógico com mediação ou acompanhamento individual, torna-se inviável devido a grande quantidade de estudantes.

Categoria 8: Cultura do silêncio: A falta de diálogo nas aulas de matemática

A categoria "Cultura do silêncio: A falta de diálogo nas aulas de matemática" compreende duas questões: "Você manifesta-se oralmente nas aulas de matemática? Por quê? Em que situação?", "O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?". A categoria traz para discussão uma das grandes questões levantadas por nossa pesquisa, a "cultura do silêncio" nas aulas de matemática gerada pela falta do diálogo entre os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Quadro 11: Categoria 8 – Cultura do silêncio: Falta de diálogo nas aulas de matemática

Pergunta	**Frequência**
Você manifesta-se oralmente nas aulas de matemática? Por quê? Em que situação?	8 estudantes Th, St, Ro, Ra, Ne, Fr, De, Ga
Th – *Só quando o professor pergunta.* St – *Só às vezes [...] Quando eu não sei.* Ro – *Não muito [...] Não gosto de falar muito não; sou daquelas pessoas que fica quieto.* Ra – *É difícil [...] É vergonha [...]* Ne – *Não.* Fr – *Não [...] Raramente.* De – *Não [...] Porque eu tenho vergonha de falar.* Ga – *Eu fico quieto.*	
O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?	2 estudantes Th, De
Th – *[...] Eu não consigo falar em público.* De – *Fico Quieta*.	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Quando a estudante Th, afirma: ***– [...] Eu não consigo falar em público*** ou quando a estudante De, mesmo com dúvidas diz: ***– Fico Quieta***, e não pergunta ao professor, evidencia-se um dos grandes paradigmas, do processo de ensino e aprendizagem de matemática – a cultura do silêncio. Uma concepção antidialógica, que como prática educativa, contraria a própria existência humana, ao negar ou, de acordo com a afirmação da estudante Th ***"– Só quando o professor pergunta"***, minimizar o direito do estudante de falar, de manifestar-se oralmente e dizer sua palavra, não uma palavra pronta, decorada e repetida, como é comum no ensino de matemática, mas, construída a partir da ação e da reflexão do sujeito.

Nessa perspectiva, Freire (1980, p. 92) é enfático em afirmar que "a existência por que humana não pode ser muda, silenciosa, nem tampouco pode nutrir-se de falsas palavras, mas de palavras verdadeiras com que os homens transformam o mundo". "Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão", conclui o autor.

De modo geral, a maneira como se configura as aulas de matemática, com a exposição sumária de conteúdos puramente formais, aceitos passivamente pelos estudantes como verdade absoluta, como um conhecimento pronto e acabado, e, [geralmente] sem compreensão, não permitindo, portanto, questionamentos, perguntas ou o debate em sala de aula acaba de certa forma, potencializando – por mais que inconscientemente – a postura autoritária do professor como detentor do saber e, consequentemente, oprimindo a consciência e inibindo as capacidades cognitiva, criativa e argumentativa dos estudantes, como no caso do estudante Ro, quando afirma: ***– [...] Não gosto de falar muito não; sou daquelas pessoas que fica quieto.*** Causando-lhes, medo, insegurança e vergonha de falar nas aulas de matemática, como afirma a estudante Ra ***– É difícil [...] É vergonha [...]***, pois não sabem ou não tem o que dizer, nem o que perguntar.

Nessa concepção de ensino denominada por Freire como educação bancária, “o educador é o que sabe; o educando, o que não sabe; o educador é o que fala; o educando o que escuta; o educador é o sujeito; o educando o objeto” (1988, p. 58 – 59). O autor esclarece que:

> Para o “educador-bancário” na sua antidialogicidade, a pergunta, obviamente, não é a propósito do conteúdo do diálogo, que para ele não existe, mas a respeito do programa sobre o qual dissertara a seus alunos. E a esta pergunta respondera ele mesmo, organizando seu programa (FREIRE, 1980, p. 98).

Nota-se que a falta de diálogo entre professor e estudantes na sala de aula de matemática como prática pedagógica e, portanto, necessária ao processo educativo, é um dos fatores que vêm comprometendo o ensino desta disciplina. Em termos mais abrangentes, a comunicação deficitária de professores, de outros profissionais da instituição escolar e da comunidade educacional (pais, sociedade etc.) que adjazem a instituição educativa formal tem dificultado uma aprendizagem eficiente no que se refere ao desenvolvimento crítico de uma reflexão-ação.

Por isso, concordamos com Freire quando afirma que:

> O diálogo é uma exigência existencial. E, se ele é o encontro onde se solidariza o refletir e o agir de seus sujeitos endereçados ao mundo a ser transformado e humanizado, não pode reduzir-se a um ato de depositar ideias de um sujeito no outro, nem tampouco tornar-se simples troca de ideias a serem consumidas pelos permutantes (1980, p. 92).

Para Becker (2010, p. 189), o exercício pleno, sem barreiras – da linguagem, especificamente da linguagem verbal, é necessário à realização do desenvolvimento da inteligência nos seus estádios mais avançados, como nas fases das operações concretas e formais e, daí por diante, isto é, na interação sujeito-objeto (ou sujeito-sujeito) no nível das trocas simbólicas. O autor adverte que:

> Obstruir o livre exercício da linguagem (aqui incluídas todas as formas de pensamento), mesmo que seja pela redução do desenvolvimento a apenas determinados condicionamentos, equivale obstruir o desenvolvimento nos seus momentos críticos; momentos de superação de egocentrismo e do heterocentrismo para a construção da autonomia cognitiva, de superação do homem centrado no próprio eu, individualista,

> para a construção do homem social, cultural, político. A linguagem, á medida que se desliga da ação ou da operação, perde sua consistência, o seu poder construtivo (BECKER 2010, p. 189, 190)

Nessa perspectiva, vemos na educação dialógica a possibilidade de superação da consciência ingênua em que os estudantes se encontram para a consciência crítica e problematizadora, onde o diálogo, enquanto ação e reflexão, apresenta-se como condição necessária à construção do conhecimento matemático, por meio de um processo continuo de sucessivas abstrações e progressivas tomadas de consciência frente ao objeto do conhecimento, quais sejam as situações didáticas e a didáticas de aprendizagem que se configuram nas mais variadas formas e abordagens, dentro e fora do ambiente de sala de aula ou até mesmo do contexto escolar.

Categoria 9: O erro na aprendizagem matemática

A categoria “O erro na aprendizagem matemática” compreende três questões: “Você manifesta-se oralmente nas aulas de matemática? Por quê? Em que situação?”, “O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?”, “Como você se sente quando o professor lhe faz uma pergunta sobre matemática? E quando solicitado (a) pra ir ao quadro resolver um exercício? Por quê?” e “Como você se sente durante as avaliações de matemática?**”.** A categoria traz para discussão o problema do erro na aprendizagem matemática, ou seja, a dificuldade apresentada pelos estudantes quando solicitados a manifestarem-se oralmente ou por escrito sobre matemática, causada pelo medo de errar.

Quadro 12: Categoria 9 – O erro na aprendizagem matemática

Pergunta	Frequência
Você manifesta-se oralmente nas aulas de matemática? Por quê? Em que situação?	2 estudantes St, Ra
St **–** *[...] às vezes vergonha [...] Porque se errar os outros colegas vão querer rir.* Ra – *[...] É vergonha... Vergonha de errar.*	
O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?	1 estudante Ne
Ne – *[...] porque eu posso errar a pergunta do professor*, *aí os alunos podem rir de mim.*	
Como você se sente quando o professor lhe faz uma pergunta sobre matemática? E quando solicitado (a) pra ir ao quadro resolver	10 estudantes Th, St, Ra, Ne,

um exercício? Por quê?	Ke, Ka, Fe, Ha, Fr, Ga
Th – *Agoniada [...] Não sei [...] É a vergonha de errar.* St – *Fico nervosa [...] Não sei [...] Medo de errar assim.* Ra - *Fico nervosa, eu começo a gelar [...] Eu tenho medo de errar porque, por causa que eu erro, aí depois eles nem agem e depois ficam falando "A Rafaela vive errando, escreve a resposta tudo errado".* Ne – *Eu fico tremendo [...] aí eu fico com muita vergonha [...] Porque eu posso errar a pergunta do professor.* Ke – *Um pouco nervoso [...] que eu erre alguma coisa assim [...].* Ka – *[...] um pouco mal [...] às vezes eu fico nervosa, quando eu não sei.* Fe – *Fico nervoso [...] com medo de errar [...].* Ha – *Eu me sinto constrangida, tipo se eu errar..., sei lá, dá vergonha [...] por que eles podem querer rir, aí vou me sentir com vergonha.* Fr – *Nervoso [...] Medo de errar e rirem.* Ga – *Fico agitado, tipo quando ele me chama [...] dá um medo [...] dá medo de responder e errar.*	
Como você se sente durante as avaliações de matemática?	5 estudantes Ra, Ne, Ka, Ha, Ga
Ra **–** *Eu fico nervosa [...] de errar na prova [...] os meus colegas ficarem rindo, de eu ter tirado um quatro ou um três.* Ne – *Me sinto nervoso [...] de errar as perguntas tudinho, aí eu pegar zero [...].* Ka – *Fico nervoso [...] Por que a gente pode errar, e tirar nota baixa.* Ha – *Fico nervosa [...] Eu me sinto tipo, que eu vou errar tudo [...].* Ga – *Me sinto com medo de errar de novo, tipo se eu errar tudo, eu vou tirar nota baixa.*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

É surpreendente o estado emocional dos estudantes causado pelo medo de errar, quando precisam responder, seja ao manifestar-se oralmente ou por escrito, sobre matemática. ***– Eu fico tremendo [...] aí eu fico com muita vergonha [...] Porque eu posso errar a pergunta do professor***, afirma o estudante Ne. Considerando a aprendizagem no sentido amplo, Becker (2010, p. 65), entende que "errando também se aprende", ou seja, o erro ou fracasso, não é condição necessária para haver aprendizagem, no entanto, acha exagerada nesse contexto teórico,

> a preocupação "Skinneriana" de evitar todo fracasso (princípios de instrução programada) levando o aluno a produzir somente respostas corretas, pois o fracasso torna-se eventualmente necessário para que o sujeito tome consciência da inadaptação dos seus esquemas e da consequente necessidade de construir novos esquemas, ou seja, de reconstruir os já existentes (BECKER, 2010, p. 65).

Nesse sentido, para explicarmos o problema do erro na aprendizagem matemática devemos entendê-lo como uma herança cultural que perdura ao longo do tempo, deixada por uma concepção empirista de ensino, que na sua essência, trabalha o reforço e o condicionamento por meio de estímulos e respostas, adotando como critérios de avaliação da suposta aprendizagem que resulta daí, apenas o certo e o errado, sem levar em consideração os meios empregados na elaboração da resposta – do qual o erro também faz parte – o que significa ignorar a atividade cognitiva dos estudantes no processo de aprendizagem. Becker explica que:

> A corrente empirista explica o funcionamento da inteligência pela pressão que o meio exterior – físico ou social – exerce sobre o organismo e que, paulatinamente, é gravada na mente ou no espírito do sujeito, independente de sua atividade. Ou, pelo menos, alheio à atividade espontânea do sujeito; quando existe atividade, ela é comandada de fora. A hipótese associacionista compreende que o meio externo exerce primazia em detrimento da ação do sujeito (2010, p. 32).

Nessa perspectiva, são várias as propostas teóricas de aprendizagem que surgiram amparadas no empirismo associacionista, de estímulo-resposta (E-R), ou conexionista com ênfase no treinamento e condicionamento de indivíduos, por meio de exercícios repetitivos na busca incansável por respostas corretas. É o caso do conexionismo de Thorndike, do condicionamento contíguo de Guthrie, do condicionamento operante de Skinner, da teoria sistemática do comportamento de Hull, ou, a “aprendizagem como resposta condicionada”, segundo Pavlov e Guthrie, a “aprendizagem por ensaio – erro e acerto” de Thorndike, Hull e Skinner, ou o “behaviorismo [como] a forma extrema do conexionismo” de J.B. Watson, etc. (BECKER, 2010, p. 24).

De modo geral, a concepção de ensino baseada em estímulo e resposta que treina os estudantes pra dar respostas prontas e acabadas, sem compreensão conceituada, acaba (talvez de forma inconsciente), de um lado, impedindo o desenvolvimento de suas capacidades de criação e de argumentação, e, de outro, inibindo muitos estudantes que não alcançam êxito em suas produções, ou seja, não conseguem responder ao estímulo do meio como se espera, gerando como consequência a insegurança e o medo de errar, afinal nessa proposta os bons são aqueles que conseguem memorizar e reproduzir o máximo de informações ensinadas pelo professor.

O que se assemelha ao processo de condicionamento operante de Skinner, no qual espera-se que o indivíduo “emita uma resposta, o mais próximo possível da desejada, para, em seguida, por “aproximações sucessivas”, reforçá-lo positivamente, ou negativamente cada comportamento parcial que esteja na direção do comportamento desejado” (BECKER, 2010, p. 25).

Não é diferente no ensino atual de matemática, onde para aprender os estudantes são submetidos ao exaustivo trabalho de repetição de exercícios até que consigam fazer ou reproduzir corretamente o conteúdo matemático tal qual lhes foi ensinado. Em outros termos, alcançar um objetivo ou um resultado por meio da mera aplicação de fórmulas e algoritmos, sem compreender a razão do que fez; por isso a insegurança (e o medo de errar) na hora da prova, por exemplo, como afirma a estudante Ha ***– Fico nervosa [...] Eu me sinto tipo, que eu vou errar tudo [...]***, ou seja, o medo de errar tudo é, na verdade o medo de esquecer tudo que outrora fora memorizado sem a devida compreensão conceitual. Pois, segundo Piaget,

> fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação (1978, p. 176).

Portanto, insistamos, a falta de compreensão ao nível da conceituação, faz com que os estudantes sintam-se nervosos e inseguros ao responderem sobre matemática, pois têm medo de errar e sofrerem constrangimentos, ***[...] Porque se errar os outros colegas vão querer rir***, afirma a estudante St. Por outro lado, se acertassem, não saberiam justificar a resposta, pois é uma resposta decorada, por isso muitos estudantes optam por não responder; nesse caso, ou outro colega de classe responde ou o próprio professor dá a resposta, geralmente, sem reflexão e discussão do resultado ou, quando muito, reforça-se a aplicação da fórmula ou a técnica de resolução.

O problema do ensino da matemática onde a ênfase está no treinamento e condicionamento de indivíduos, por meio de um processo mecânico de repetição de exercícios sem significados, é não considerar a aprendizagem como um processo contínuo, do qual o erro é parte integrante, podendo ser positivo, se entendido como elemento constitutivo do processo de construção do conhecimento, ao permitir intervenções de acordo com as dificuldades apresentadas pelos estudantes. O que só é possível a partir de uma educação dialógica apoiada na ação e na reflexão, que favoreça a compreensão conceituada dos conteúdos matemáticos, por meio da formulação de perguntas e repostas, não prontas e decoradas, mas construídas de forma crítica e consciente pelos estudantes.

Categoria 10: A importância da pergunta na aprendizagem matemática

A categoria “A importância da pergunta na aprendizagem matemática” compreende três questões: “Você manifesta-se oralmente nas aulas de matemática? Por quê? Em que situação?”, “O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?” e “Você acha importante a participação da turma na resolução de problemas via oral ou no quadro? Por quê?”. A categoria traz para discussão a importância da manifestação oral dos estudantes nas aulas de matemática, como condição necessária para a aprendizagem desta disciplina.

Quadro 13: Categoria 10 – A importância da pergunta na aprendizagem matemática

Pergunta	Frequência
Você manifesta-se oralmente nas aulas de matemática? Por quê? Em que situação?	2 estudantes Ka, Fe
Ka – *Faço pergunta, quando eu tenho dúvida eu faço pergunta.* Fe – *[...] aí tem as vezes que eu não entendo, aí eu pergunto dela, aí ela explica novamente.*	
O que você faz quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática ou quando não entende a explicação do professor?	8 estudantes St, Ro, Ra, Ne, Ke, Ka, Fr, Ga
St – *Falo que eu não entendi [...] Eu vou lá com ele perguntar.* Ro – *[...] falo que não entendi a pergunta, aí ele me auxilia.* Ra – *[...] eu crio coragem e vou lá perguntar [...] Sempre perguntei.* Ne – *Eu não entendi a explicação do professor, aí eu fico em dúvida [...] aí eu pergunto assim “professor repete sua pergunta”, aí ele repete [...].* Ke – *[...] Eu pergunto do professor.* Ka – *[...] se eu não entender mesmo eu vou lá perguntar da professora.* Fr – *[...] eu vou lá com ela e pergunto como é pra fazer, ai eu começo a entender.* Ga – *Eu pergunto do professor [...] Eu vou ate a carteira do professor.*	
Você acha importante a participação da turma na resolução de problemas via oral ou no quadro? Por quê?	3 estudantes Ka, Fe, Há
Ka – *[...] Por que às vezes a pessoa tem dúvida [...] aí ele vai perguntar da professora, aí a professora vai tirar a dúvida dele.* Fe – *[...] aí no que a gente tem dúvida a gente pergunta dele e ele explica.* Ha – *[...] tem que perguntar da professora [...] Se ele errou [...] tipo ela explica [...] ai ele acerta, pode acertar.*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Ao ter a oportunidade e a curiosidade de perguntar nas aulas de matemática, o estudante tem a possibilidade de esclarecer suas dúvidas, entender melhor o conteúdo e se apropriar do conhecimento matemático. “A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere alerta faz parte integrante do fenômeno vital". (FREIRE, 1996, p. 35).

Nessa relação dialógica, o professor, na condição de mediador do processo de ensino e aprendizagem de matemática, assume um papel fundamental, estimular e apoiar a manifestação oral dos estudantes em sala de aula, dando-lhe liberdade para dizer a sua palavra, e, por outro lado aproveitar a oportunidade para corrigir as falhas e os erros, ou enfatizar os acertos e incentivar os avanços e o progresso apresentados pelos estudantes; de certa forma avaliar a prática docente e ajustar o processo educativo, visando o desenvolvimento intelectual dos estudantes.

Freire é enfático ao afirmar que o papel do professor é,

> estimular a pergunta, a reflexão crítica sobre a própria pergunta, o que se pretende com esta ou com aquela pergunta em lugar da passividade em face das explicações discursivas do professor, espécies de resposta a perguntas que não foram feitas (1996, p. 96).

Dizer a sua palavra como expressão dessa conscientização, pressupõe um longo processo de aprendizagem que só pode ser entendido como práxis: a unidade dialética da ação e da reflexão – o que pressupõe a operação, a ação tornada reversível, no sentido piagetiano, com todas as consequências que isso acarreta no plano educacional (BECKER, 2010, p. 194).

A construção ou a produção do conhecimento do objeto implica o exercício da curiosidade, sua capacidade crítica de "tomar distância" do objeto, de observá-lo, e delimitá-lo, de cindi-lo, de "cercar" o objeto ou fazer sua aproximação metódica, sua capacidade de comparar, de perguntar (FREIRE, 1996, p. 95).

Nesse sentido, a inquietação em torno do conteúdo do diálogo deve ser a mesma em torno do conteúdo programático da educação, ou seja, na concepção dialógica como prática da liberdade, o conteúdo do diálogo deve começar, não quando o educador se encontra com os educandos em uma situação pedagógica, mas antes, quando aquele se pergunta em torno do que vai dialogar com estes.

Nessa perspectiva, qual então o papel do educador nessa educação?

> Antes de tudo, ele ou ela deve sair da posição de detentor de todo o saber e considerar o educando como também portador de saberes. Mas isso não significa que seja igual ao educando. Educador e educando são diferentes, mas essa diferença não pode ser antagônica. O educador deve dirigir o estudar do educando, porém sem autoritarismo e sem licenciosidade dos alunos. O processo educativo é sempre diretivo, mesmo

> em uma educação libertadora, mas essa diretividade não deve ser confundida com comando, com domesticação. O educador freireano dirige os trabalhos do educando para, com ele, ultrapassar sua ingenuidade inicial. É um educador diretivo libertador, não manipulador, opressor, domesticador. (MOREIRA, 2014, p.153).

Categoria 11: Prova escrita: único instrumento de avaliação

A categoria "Prova escrita: único instrumento de avaliação" compreende apenas a questão: "Como é feita a avaliação de matemática? Que instrumentos são usados?". A categoria traz para discussão, a aplicação de provas escritas como único instrumento do processo de avaliação da matemática.

Quadro 14: Categoria 11 – Prova escrita: único instrumento de avaliação

Pergunta	Frequência
Como é feita a avaliação de matemática? Que instrumentos são usados?	12 estudantes Th, St, Ro, Ra, Ne, Ke, Ka, Fe, Ha, Fr, De, Ga
Th – *[...] provas, avaliações [...] são escritas.* Ro **–** *Ele faz algumas questões no quadro e pede pra gente resolver [...] é a prova [...] é só a prova mesmo.* Ra – *[...] a avaliação [...] prova [...].* Ne – *[...] É feito muitas perguntas [...] na prova [...] são apenas as provas.* Ke – *[...] explica o que ele vai passar. aí ele vai passando [...] as atividades pra entregar depois pra ele.* Ka – *Prova [...] ela faz mais é no quadro pra gente copiar no caderno e arrancar a folha [...] às vezes atividades no caderno* Fe – *Ele copia do quadro, ele entrega uma folha [...] tem exercícios avaliativos.* Ha – *Ela usa tipo um papel com coisas assim, aí ela vai copiando no quadro, pra gente escrever ou então ela dá o papel pra gente responder no papel.* Fr – *É a prova.* De **–** *Uma prova.* Ga **–** *Ele faz um resumo pequeno pra gente lembrar um pouco, aí passa algumas tarefas, aí a gente faz, aí ela responde, aí ela corrige, aí a gente se lembra tipo... Tarefas.*	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Os discursos dos sujeitos sobre a maneira ou os instrumentos utilizados pelo professor para a avaliação da aprendizagem, evidenciam um outro aspecto comum no ensino de matemática, a aplicação de provas escritas como único instrumento de avaliação, como enfatiza o estudante Ro: ***"– é a prova [...] é só a prova mesmo"***. Às vezes, como na fala da estudante Ka: ***"– [...] ela faz mais é no quadro pra gente copiar no caderno e arrancar a folha [...] às vezes atividades no***

caderno", a prova vem sob o título de "exercícios avaliativos" copiados do quadro, o que na prática é a mesma coisa.

De todas as formas, a adoção de provas escritas ou exercícios avaliativos, como único instrumento de avaliação da aprendizagem, é compatível com o ensino de matemática vigente, baseado na exposição de conteúdos formais e, consequentemente, da aprendizagem mecânica resultante da repetição e da memorização, onde tradicionalmente, o que se prioriza são os resultados obtidos pelos estudantes, isto é, quem melhor consegue aplicar as fórmulas e algoritmos ensinados, donde resulta a tão esperada "nota" que aprova os "bons" e reprova os "ruins" ou "os que têm dificuldades", causando medo e ansiedade nos estudantes.

Com raras exceções, quando se fala em avaliação, professores, estudantes e a própria família entendem-na como,

> um instrumento ou processo para avaliar o grau de alcance, de cada menino e menina, em relação a determinados objetivos previstos nos diversos níveis escolares. Basicamente, a avaliação é considerada como um instrumento sancionador e qualificador, em que o sujeito da avaliação é o aluno e somente o aluno, e o objeto da avaliação são as aprendizagens realizadas segundo certos objetivos mínimos para todos. (ZABALA, 1998, p. 195).

O que falta aos professores de matemática é entender que avaliação não é sinônimo de prova, mas um processo contínuo e complexo que envolve não só os estudantes com suas competências e habilidades, mas, também as práticas educativas do professor. Em outros termos, considerando que o processo de ensino e aprendizagem não é unilateral, mas, bilateral e recíproco, podemos distinguir claramente dois processos avaliáveis: como o estudante aprende e como o professor ou a professora ensina.

"Portanto, temos dois sujeitos da avaliação, o que caracteriza uma dupla dimensão" (ZABALA, 1998, p. 196), que não pode ser "medida" ou aferida por meio de um único instrumento de avaliação, muito menos por provas ou exercícios escritos a não ser, ressaltamos, que o objetivo da avaliação seja apenas verificar o quanto os estudantes estão treinados e, consequentemente, se há necessidade de reforço ou continuação do treinamento.

3. 3. A MOBILIZAÇÃO COGNITIVA DOS SUJEITOS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Antes que se trate da análise e discussão do teste diagnóstico, com foco nos objetivos a que se propõe esta pesquisa, convém destacar que quando se trabalha com matemática, independente da fase em que se encontra o sujeito, trabalha-se fundamentalmente com estruturas lógicas e cognitivas as quais constituem a "lógica" do conhecimento matemático. Nesse sentido é fundamental identificarmos do que estamos tratando, em termos de relações lógicas ou processos mentais considerados por Piaget, como base para a construção das operações lógico-matemáticas ao longo do processo de desenvolvimento cognitivo da criança. São eles:

1 – Correspondência: é o ato de estabelecer a relação, por exemplo, de "um a um". Exemplos: um prato para cada pessoa; cada pé com seu sapato; a cada aluno, uma carteira. Mais tarde, a correspondência será exigida em situações do tipo: a cada quantidade, um número (cardinal); a cada posição numa sequência ordenada, um número ordinal; a cada ordem, um algarismo; e a cada algarismo um valor posicional. Pode haver, também, a correspondência "um para muitos"; por exemplo, Maria é um nome que se refere a várias pessoas; polígonos se referem à todas as figuras planas formadas apenas por linhas retas; quadrilátero se refere a todas as figuras planas que possuem exatamente quatro lados.

2 – Comparação: é o ato de reconhecer diferenças ou semelhanças. Exemplos: esta bola é maior que aquela; moro mais longe que ela; somos do mesmo tamanho? Mais tarde, virão: Quais destas figuras são retangulares? Indique as frações equivalentes. Quais destes polígonos são convexos? Quais destes sólidos geométricos são poliedros e quais são corpos redondos?

3 – Classificação: é o ato de separar em categorias, de acordo com semelhanças ou diferenças; para tanto, escolhe-se uma qualidade que servirá para estabelecer a classificação. Exemplos: na escola, a distribuição dos alunos por séries; arrumação de mochila ou gaveta; dadas várias peças triangulares e quadriláteras, separá-las conforme o total de lados que possuem; dados vários sólidos geométricos separá-los conforme apresentem alguma face arredondada ou somente faces planas; dadas várias frações separá-las conforme apresentem numerador maior que o denominador ou numerador menor que o denominador.

4 – Sequenciação: é o ato de fazer suceder a cada elemento um outro, sem considerar a ordem entre eles; portanto, é ordenação sem critério preexistente. Exemplos: chegada dos alunos à escola; entrada de jogadores de futebol em campo; compras em supermercado; escolha ou apresentação dos números nos jogos loto, sena e bingo;

5 – Seriação: é o ato de ordenar uma sequência segundo um critério. Exemplos: fila de alunos, do mais baixo ao mais alto; lista de chamada de alunos em ordem alfabética; numeração das casas nas ruas; calendário; a ordem dos números sorteados para o primeiro ou quinto prêmio da loteria federal influi nos valores a serem pagos; a ordem e o valor posicional de cada algarismo na composição dos números, por exemplo, 123 significa uma centena simples que vale cem unidades, mais duas dezenas simples que vale vinte unidades e mais três unidades simples, bem diferente de 231 com duas centenas simples que vale duzentos, mais três dezenas simples que vale vinte e mais uma unidade simples.

6 – Inclusão: é o ato de fazer abranger um conjunto por outro, ou seja, considerar que um conjunto de coisas distintas pode ter uma qualidade que as inclua num conjunto maior. Exemplos: incluir as ideias de laranjas e de bananas, em frutas; meninos e meninas, em crianças; varredor, professor e porteiro, em trabalhadores na escola; losangos, retângulos e trapézios, em quadriláteros; cubo, paralelepípedo, e pirâmide em sólidos geométricos; números naturais e inteiros, em números racionais; unidades simples, dezenas simples e centenas simples, classe das unidades simples.

7 – Conservação: é o ato de perceber que a quantidade não depende da arrumação, da forma ou da posição. Exemplos: uma roda grande e outra pequena, ambas formadas com a mesma quantidade de crianças; um copo largo e outro estreito, ambos com a mesma quantidade de água; uma caixa com todas as faces retangulares, ora apoiada sobre a face menor, ora sobre outra face, conserva a quantidade de lados ou de cantos, as medidas e, portanto, seu perímetro, sua área e seu volume; um meio e dois quartos de uma barra de chocolate; uma pizza inteira e uma pizza dividida em oito fatias ambas do mesmo tamanho.

É importante destacar que o fato de crianças terem uma mesma idade não garante que apresentem a mesma maturidade cognitiva em alguns desses processos. Pois, conforme Ramozzi-Chiarottino, as estruturas mentais específicas para o ato de conhecer e responsáveis por estabelecer relações lógicas têm uma gênese. Ou seja,

> a possibilidade de estabelecer relações não é dado *a priori* no sentido cronológico; ao contrário surge em função da construção das estruturas que ocorrem na interação do organismo com o meio e é, portanto, uma conquista do ser humano (1988, p. 14).

Portanto, na falta de possibilidades oferecidas pelo meio escolar (e mesmo familiar), esses processos lógicos não são bem desenvolvidos na estrutura mental das crianças, por isso muitas apresentam dificuldades para aprender número e contagem o que, consequentemente, comprometerá as etapas futuras de sua aprendizagem matemática, já que a aquisição do conhecimento se dá num processo contínuo de assimilação e acomodação, partindo sempre de conhecimentos simples para conhecimentos mais complexos.

Sem o domínio desses processos a criança e até mesmo o adolescente podem até dar respostas corretas, segundo a expectativa e a lógica esperada pelos adultos, mas, provavelmente, sem significado ou compreensão para elas. Convém destacar que estes processos lógicos não estão restritos ao campo do conhecimento matemático, mas, na verdade, são abrangentes, estão presentes em situações do cotidiano e constituem um alicerce que será utilizado para sempre pelo raciocínio humano, independentemente de idade, profissão, assunto ou tipo de problema a ser enfrentado.

Sobre esse aspecto, Becker (2010, p. 197) explica que no processo de desenvolvimento cognitivo da criança, as relações lógicas são imprescindíveis, para a formação da estrutura de agrupamento – no período das operações concretas (7-8 e 10-11 anos) – como primeira forma de equilíbrio estável atingido pelo sistema de regulações, equilíbrio tornado possível pela consecução da reversibilidade completa. Nesse período, segundo o autor,

> realiza-se uma coordenação geral das ações precedentes – agora reversíveis, portanto, transformadas em operações – em estruturas definidas como classificações, seriações, correspondências etc. que se farão presentes não nesse estádio das operações concretas, mas em toda a vida do indivíduo (BECKER, 2010, p. 197).

Essas estruturas tenderão progressivamente a formar sistemas mais complexos, como o operatório formal (11-12 anos), por exemplo, mas continuando ativas no plano limitado da organização dos dados imediatos, conclui Becker. Nesse sentido, os exemplos que constam de cada relação lógica ou processo mental podem se referir a objetos, situações ou ideias; alguns ligados diretamente a conteúdos da Matemática, outros a situações do cotidiano, mas subjacentes a um contexto matemático que favorece de forma simples a análise e a compreensão das relações lógicas em questão.

Importa agora, verificar por meio do teste diagnóstico, a relação entre esses processos mentais e o desenvolvimento do senso numérico, do senso de medida e do senso espacial os quais, do ponto de vista didático-metodológico, são a base fundamental para a aprendizagem da Matemática. Em termos epistemológicos, buscamos, com base nos registros das produções dos sujeitos no teste diagnóstico, verificar e analisar os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem matemática, e, como, e em que grau de desenvolvimento, os estudantes fazem abstrações e estabelecem relações lógicas quando trabalham com a matemática.

Primeiramente, apresentamos uma visão geral do desempenho dos sujeitos, em termos quantitativos (erros e acertos), nas questões de múltipla escolha (quadro 15), a fim de que se tenha uma ideia do nível de aprendizagem dos estudantes que participaram do teste diagnóstico em relação aos conceitos trabalhados, para em seguida, fazermos uma análise qualitativa, com ênfase nas atividades cognitivas dos sujeitos. No caso das questões 1 e, de 11 a 16, que não são de múltipla escolha, os resultados serão apresentados mais adiante, em categorias específicas, definidas de acordo com os conceitos matemáticos abordados nas questões.

Quadro 15: Desempenho dos estudantes nas questões de múltipla escolha

Questão e conteúdo	**Turmas A e B**			**19 sujeitos da pesquisa**		
	Nº de acertos	**Nº de erros**	**Não fez**	**Nº de acertos**	**Nº de erros**	**Não fez**
2. Ordem e classe	60	17		17	2	
3. Noção de probabilidade	26	51		5	14	
4. Operações aritméticas	51	26		13	6	
5. Operações aritméticas	30	46	1	7	12	
6. Operações aritméticas	57	19	1	15	2	2
7. Sequência numérica	36	41		6	13	
8. Operações aritméticas	13	63	1	3	16	
9. Medida de comprimento	51	25	1	14	4	1
10. Noção de Porcentagem	48	29		14	5	

Fonte: Dados da pesquisa empírica

No quadro acima, apresentamos tanto o desempenho dos 77 estudantes das turmas A e B nas questões de múltipla escolha, como também e, separadamente, os resultados dos 19 estudantes que participaram da sequência didática.

Passamos agora a uma abordagem qualitativa dos resultados considerando aspectos conceituais e lógicos envolvidos na aprendizagem matemática dos estudantes, sendo que para conseguirmos o máximo de aproveitamento em nossas análises e discussões – pois implicaram diretamente no planejamento e na concepção da sequência didática – focamos nossa reflexão nas ações cognitivas dos 19 sujeitos da pesquisa - propriamente ditos – pois são estes, e apenas estes, que participaram das atividades propostas pela estratégia da sequência didática.

Nesse sentido, para melhor compreensão do exposto, separamos o conteúdo do teste em categorias de acordo com os conceitos ou noções matemáticas abordados.

1. Noção de ordem e classe

Nessa categoria, constam para análise e discussão as questões 1 e 2. No quadro a seguir mostramos, a princípio, o aspecto quantitativo da questão 1, em número de acertos e erros, referentes ao número **32.017.865** (trinta e dois milhões, dezessete mil, oitocentos e sessenta e cinco), envolvendo os conceitos de ordem e classe, onde, constam separadamente, para fins de comparação, os resultados dos 19 estudantes (sujeitos da pesquisa) que participaram da sequência didática, e, do geral, os 77 estudantes das turmas A e B que responderam ao teste diagnóstico.

Quadro 16: Desempenho dos estudantes na questão 1

Perguntas sobre o número 32.017.865	**19 Sujeitos da pesquisa**		**Turmas A e B**	
	Nº de acertos	**Nº de erros**	**Nº de acertos**	**Nº de erros**
a) Quantas classes?	11	8	48	29
b) Quantas ordens?	10	9	38	39
c) Qual o algarismo da 5ª ordem?	9	10	30	47
d) Qual o algarismo da unidade de milhar?	7	12	15	62
e) Qual o algarismo da dezena de milhão?	4	15	8	69
f) Como se ler este número?	7	12	30	47

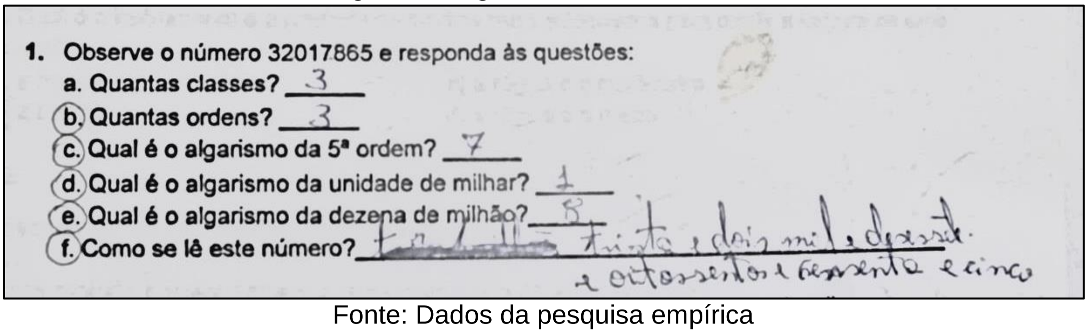
Fonte: Dados da pesquisa empírica

Dos 77 estudantes que fizeram o teste diagnóstico, apenas dois responderam corretamente todos os itens. Logo, 75 erraram em pelo menos 1 item, dentre os quais, 18 são sujeitos da pesquisa que participaram da sequência didática. Numa visão pragmática e imediata, constata-se uma defasagem na aprendizagem dos sujeitos no que se refere à relação conteúdo-série, ou seja, os estudantes estão no 7º ano, mas não dominam os conceitos de ordem e classe, estudados de forma sistemática desde o 4º ano, acarretando, dessa forma, problemas mais sérios que vão desde a escrita e leitura de números até a armação e resolução das operações fundamentais da matemática.

Considerando o grau de importância dos conceitos de ordem e classe, para a formação e compreensão do sistema de numeração decimal e posicional, e, consequentemente, dos algoritmos das operações matemáticas, procuramos fazer uma análise detalhada das questões, a fim de verificar e analisar as relações lógicas de correspondência, comparação, e inclusão na formação e representação dos números, especificamente, a tomada de consciência da seriação dos algarismos, a qual implica na construção dos conceitos de ordem e classe.

Dessa forma, para melhor discussão dos resultados, separamos nossa análise e interpretação em 4 subcategorias, quais sejam: Definição de ordem e classe; Seriação de ordens e classes; Nomenclatura de ordens e classes; e Escrita e leitura de números. A seguir apresentamos alguns resultados para análise, escolhidos de acordo com os erros mais comuns. Eis os registros do estudante Ne:

Figura 3: Registros do estudante Ne


1. Observe o número 32017865 e responda às questões:
a. Quantas classes? 3
b. Quantas ordens? 3
c. Qual é o algarismo da 5ª ordem? 7
d. Qual é o algarismo da unidade de milhar? 1
e. Qual é o algarismo da dezena de milhão? 8
f. Como se lê este número? trinta e dois mil e dezesset. e ottossentos e sesenta e cinco

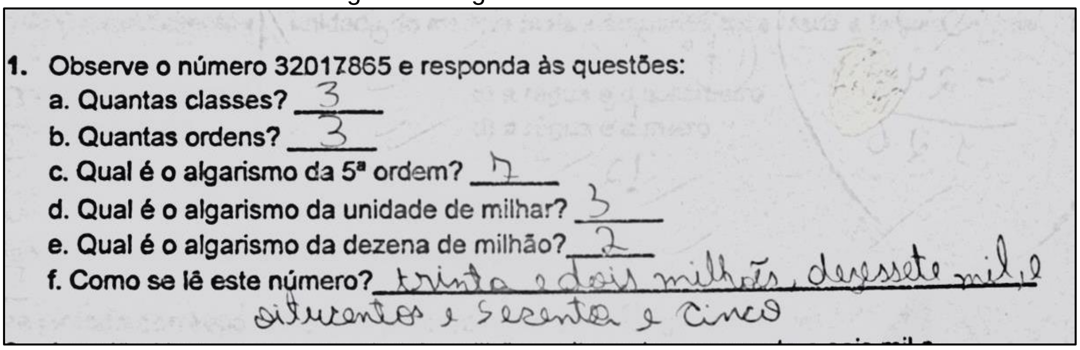
Fonte: Dados da pesquisa empírica

Na **definição de ordem e classe** - Itens ***a*** e ***b*** – 12 estudantes não entendem a definição de ordem na representação do número, como sendo a posição ocupada por cada algarismo, e, de classe, como sendo o conjunto de três ordens, quais sejam sempre unidade dezena e centena, como é o caso do estudante Ne, por exemplo. De acordo com os registros, para o estudante ordem e classe é a mesma coisa, de modo que não podemos afirmar se há ou não compreensão. Quanto a **seriação das ordens e classes** – item ***c*** - o estudante ao responder 7, acaba contando as ordens de forma invertida, ou seja, da esquerda pra direita, mostrando que não tomou consciência da seriação correta dos algarismos, o que acaba comprometendo, de alguma forma, os outros itens.

Em relação à nomenclatura de ordens e classes – Itens ***d*** e ***e*** – estudante Ne, apresenta dúvidas quanto aos nomes das ordens e das classes, sendo que ao responder “1” no item ***d***, como sendo unidade de milhar, o estudante acaba confirmando a seriação invertida das ordens, ao contar da direita pra esquerda. Quanto à leitura do número – item ***f*** – ao escrever “trinta e dois mil e dezessete”, o estudante Ne, confirma as dúvidas em relação ao nome das classes, quando identifica a classe de milhão como sendo classe de milhar, comprometendo, assim, a leitura do número.

No próximo caso, da estudante Ka, discutiremos apenas os itens ***d***, ***e*** e ***f***, visto que as respostas dadas nos itens ***a***, ***b*** e ***c*** são as mesmas do estudante Ne. Eis os registros da estudante Ka:

Figura 4: Registros da estudante Ka



1. Observe o número 32017865 e responda às questões:
a. Quantas classes? 3
b. Quantas ordens? 3
c. Qual é o algarismo da 5ª ordem? 7
d. Qual é o algarismo da unidade de milhar? 3
e. Qual é o algarismo da dezena de milhão? 2
f. Como se lê este número? trinta e dois milhões, dezessete mil e oitocentos e sesenta e cinco

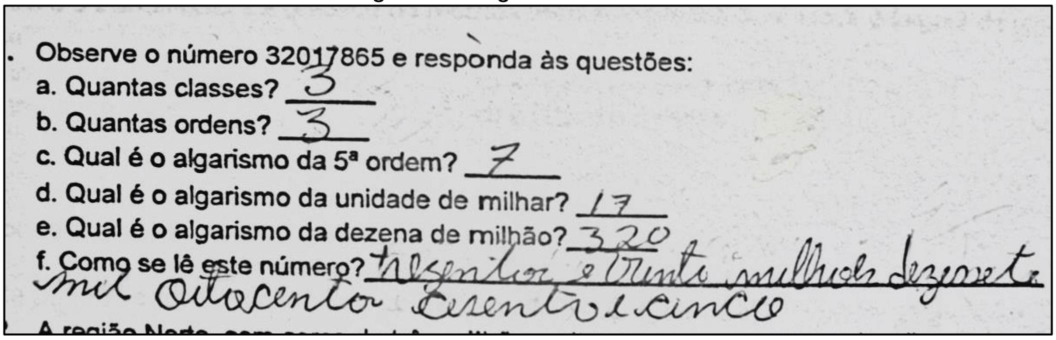
Fonte: Dados da pesquisa empírica

Em nossa interpretação, ao responder “3” como unidade de milhar e “2” como dezena de milhão, a estudante Ka comete erro de seriação, ao contar as ordens da esquerda pra direita (assim como o estudante Ne), implicando, consequentemente, tanto na definição como no nome das ordens e das classes, sendo, portanto, indiferente para a estudante os termos “milhar” ou “milhão”, como identificação da classe que o algarismo pertence, ou seja, para a estudante na seriação invertida – da esquerda pra direita – a primeira ordem é unidade e a segunda ordem é dezena.

Quanto a leitura do número, a estudante Ka responde corretamente, no entanto, ao responder corretamente, acaba gerando uma outra questão. Como a estudante consegue ler corretamente o número, identificando cada uma das classes e, não identifica as ordens solicitadas nos itens ***d*** e ***e***? Nossa sugestão é que para a estudante o sentido de seriação das ordens e de orientação de leitura do número é o mesmo, isto é, da esquerda pra direita. Nesse caso, concluímos de acordo com os resultados, que o grande problema não só dos estudantes Ne e Ka, mas de outros sujeitos que também deram respostas iguais ou parecidas, está na falta de tomada de consciência da seriação e dos conceitos de ordem e classe.

No exemplo a seguir, apresentamos os registros do estudante Fr, sendo que o foco de nossa análise e discussão está nos itens ***d*** e ***e***, onde aparecem respostas diferentes dos casos anteriores.

Figura 5: Registros do estudante Fr


Observe o número 32017865 e responda às questões:
a. Quantas classes? 3
b. Quantas ordens? 3
c. Qual é o algarismo da 5ª ordem? 7
d. Qual é o algarismo da unidade de milhar? 17
e. Qual é o algarismo da dezena de milhão? 320
f. Como se lê este número? trezentos e trinta milhões dezessete mil oitocento desento e cinco

Fonte: Dados da pesquisa empírica

No caso do estudante Fr (e outros três sujeitos), também há dúvidas quanto ao sentido da seriação dos algarismos na formação e representação simbólica dos números. Além disso, ou por conta disso, o estudante apresenta dificuldades de leitura e interpretação, pois, cognitivamente, não consegue, enquanto sujeito das operações formais, abstrair ou deduzir que "o algarismo" refere-se à apenas uma ordem, e não duas ou três como o estudante respondeu. Do ponto de vista lógico, ao responder "17" e "320" nos itens ***d*** e ***e***, o estudante faz a relação de correspondência correta com os termos milhar e milhão, respectivamente, porém, indicando a classe e não a ordem; deixando claro, mais uma vez que a noção de ordem e classe não está definida, pois ainda se confundem entre si.

Quanto a questão 2, diferente dos resultados obtidos no item "f" da questão 1 – onde se trabalhou os mesmos conceitos de escrita e leitura em linguagem corrente da representação simbólica do número, e 12 estudantes não tiveram êxito – dos 19 sujeitos apenas um errou, marcando a opção "c" e 8 marcaram corretamente a opção "b". Para explicar esse fato, devemos considerar as relações lógicas de comparação e correspondência processadas na estrutura cognitiva dos estudantes ao resolver esse tipo de questão, e, que esta capacidade cognitiva é favorecida de acordo com o que o meio oferece, nesse caso, os elementos explícitos e implícitos propostos no enunciado de cada questão.

Assim, a diferença entre a questão 1 e 2, é que na segunda os estudantes dispunham de quatro opções de resposta em linguagem simbólica o que lhes favoreceu a comparação com a linguagem corrente do número, dada no enunciado da questão e, em seguida, a correspondência. No item “f” da questão 1 os estudantes não dispunham das opções para fazerem a comparação, mas tinham que construir a partir da representação simbólica do número, a representação em linguagem corrente, sendo que para isso, precisariam antes ter construído em sua estrutura cognitiva os esquemas mentais referentes aos conceitos de ordem e de classe, o que só é possível por meio de experiências concretas.

De modo geral, as dificuldades apresentadas pelos sujeitos, principalmente na questão 1, dizem respeito à seriação dos algarismos na representação simbólica dos números. Apesar de estarem no nível das operações formais, onde se espera uma coordenação geral das ações, a maioria dos estudantes não tomou consciência ainda de que em nosso sistema de numeração decimal e posicional, a seriação dos algarismos começa com a ordem das unidades simples, portanto da direita pra esquerda, seguindo a relação... $C > B > A$, compreendendo os processos de reversibilidade (operação inversa) e transitividade ($A < C$, se $A < B$ e $B < C$), próprios desta fase (PIAGET, 1978, p. 179).

Os processos de reversibilidade e transitividade implicam diretamente na construção dos conceitos de ordem e classe, visto que a cada três ordens contando a partir das unidades simples têm-se uma classe na composição simbólica do número, composta sempre por Unidade, Dezena e Centena, diferenciando-se, exatamente, pela classe que pertencem. Dessa forma, definimos duas seriações, ambas infinitas: uma das classes (unidades simples, milhar, milhão, bilhão etc.) e, outra das ordens que formam as classes, a qual pode ser simplificada na relação constante $U < D < C$, considerando cada uma das classes em particular.

Quanto aos sujeitos que dão respostas corretas, acreditamos que não se trata de uma tomada de consciência da seriação em termos de conceituações, pois em linhas gerais esses processos dependem da interação do sujeito com o objeto do conhecimento, e, a partir dessa interação, mediante abstrações (reflexionantes), é que o sujeito chega ao nível da coordenação geral das ações, a qual precede a tomada de consciência conceituada do objeto estudado (PIAGET, 1978, p. 179), nesse caso, a seriação e os conceitos de ordem e classe.

De outra forma, significa dizer que não é possível chegar à tomada de consciência com formação de conceitos por meio de um ensino concebido apenas e tão somente como exposição de conteúdos formais de matemática, onde os estudantes aprendem por repetição, preocupando-se inconscientemente apenas com resultados superficiais, sem um momento de reflexão e discussão do exposto.

O processo de tomada de consciência, parte da periferia, isto é, dos objetivos e resultados e, orienta-se para as regiões centrais da ação quando procura alcançar o mecanismo interno desta, ou seja, o reconhecimento dos meios empregados, motivos de sua escolha ou de sua modificação durante a execução da tarefa (PIAGET, 1978, p. 198).

2. Noção de probabilidade

Na questão 3 de enunciado "Numa caixa, existem 10 bolas brancas, 15 pretas e 20 vermelhas, todas com o mesmo peso e tamanho. A chance de uma pessoa retirar, ao acaso, uma bola vermelha dessa caixa é de: a) 20 em 10 b) 20 em 15 c) 20 em 25 d) 20 em 45", abordamos a noção de probabilidade como uma relação lógico-matemática de comparação, correspondência e inclusão entre grandezas.

Nessa questão, cabe destacar que 51 sujeitos dos 77 que responderam, apresentaram dificuldades de entender que ao juntar ou separar partes de um todo, mesmo que estas partes apresentem uma característica física diferente (como por exemplo, a cor) o todo referência é o mesmo, afinal as bolas estão na mesma caixa, ou seja, há "mais bolas" (ao todo) do que bolas brancas, do que bolas pretas e do que bolas vermelhas e todas as bolas juntas, independentemente da cor, formam o todo da questão. Se representarmos as bolas brancas por A, as pretas por B e as vermelhas por C, temos a seguinte relação: $A + B + C = D$, onde D representa o conjunto de todas as bolas e $D > C > B > A$.

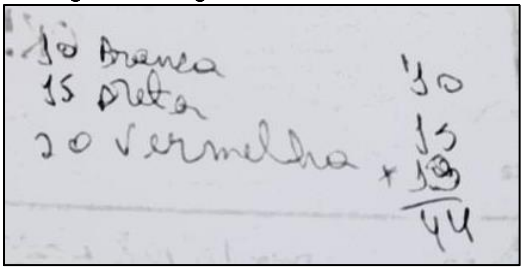
Considerando apenas os sujeitos da pesquisa (19 estudantes), 8 estudantes que marcaram a opção "c", excluindo as bolas vermelhas do espaço amostral, não conseguindo por abstração representar em pensamento uma caixa contendo todas as bolas, inclusive as vermelhas. Ao compararem o conjunto das bolas vermelhas com o conjunto formado apenas por bolas pretas e brancas ou quando consideram que o primeiro está contido no último, em desacordo com a proposta da questão, revelam limitações nas relações lógicas de comparação e inclusão, as quais, provavelmente, por falta de experiências concretas não foram bem desenvolvidas nas fases anteriores do desenvolvimento cognitivo.

No caso dos 3 estudantes que marcaram a opção “b”, estes consideram como espaço amostral apenas as 15 bolas pretas, consequentemente, comparam equivocadamente o conjunto das bolas vermelhas com o conjunto das bolas pretas e, ao fazerem isso acabam afirmando, inconscientemente, que o conjunto das bolas vermelhas composto por 20 elementos está contido no conjunto das bolas pretas formado por 15 elementos, o que matematicamente é impossível, pois para um conjunto A está contido em B, é necessário que A seja menor ou igual a B, nunca maior. Caso semelhante ao dos 3 estudantes que marcaram opção “a”, comparando o conjunto das bolas vermelhas com o conjunto das bolas brancas.

Baseado em Piaget (1995, p. 79), explicamos que a característica comum dos erros apresentados está na dificuldade de construir as classes secundárias de tipo A (bolas brancas) e B (bolas pretas), quando reunidas a C (bolas vermelhas) em uma classe total D (todas as bolas) e simultaneamente opostas a A, por uma negação parcial D.não-C (= todas as bolas D, menos as bolas vermelhas C). De onde a dupla tendência de substituir a relação de inclusão por uma simples relação entre classes disjuntas caracterizadas por suas únicas diferenças e de identificar o todo D a uma de suas subclasses, ou seja, o que resta de D, uma vez dissociados de A.

Nessa questão, apenas 5 estudantes marcaram corretamente opção “d”, mostrando capacidade de abstração – nesse caso abstração refletida – quando, mesmo na ausência do objeto concreto, conseguem construir em pensamento o espaço amostral em questão como sendo o conjunto maior, formado pela reunião de todas as bolas que estavam dentro da caixa (inclusive as vermelhas) e, o conjunto menor formado apenas pelas bolas vermelhas. É o caso da estudante Ka (ver figura 6), que mostrou também, após definir os conjuntos, a capacidade em fazer relações lógicas de comparação entre o conjunto das bolas vermelhas e o conjunto de todas as bolas e, de inclusão ao considerar que o conjunto menor formado pelas bolas vermelhas está contido no conjunto maior formado por todas as bolas.

Figura 6: Registros da estudante Ka



Fonte: Dados da pesquisa empírica

De modo geral, os resultados revelam grandes dificuldades em resolver problemas de inclusão, que exigem abstrações refletidas ou pensamento reflexivo, por meio do qual se faz representações mentais a partir de elementos matemáticos citados no enunciado do problema, como a construção do todo D, por exemplo. No entanto, em termos de abstração, Piaget (1995, p. 80) considera que é mais fácil construir um todo D que permanece resistente e conserva sua propriedade de todo D > C e D > A + B, quando o todo é definido por uma propriedade perceptiva simples, o que não acontece no caso das bolas, pois ao retirar as vermelhas, têm-se a impressão de que o “todo” não é mais todas as bolas, e sim D – C ou D.não-C.

O autor conclui que “o equilíbrio das reuniões e das negações relativas depende do grau de construção inferencial exigido pelo sujeito” (PIAGET, 1995, p. 80), isto é,

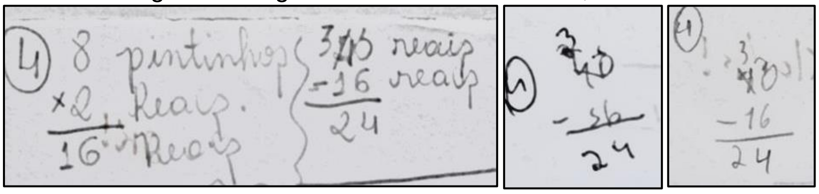
> as reuniões são facilitadas pelo fato de que os objetos ou as propriedades a reunir são positivos e (na nossa escala de observação) dados a titulo de observáveis a partir da percepção, enquanto que as negações devem ser construídas pelo sujeito, e isto por meio do estabelecimento de relações ou mesmo de interferências. Ora, toda reunião, pra dar lugar a composições validas, deve ser coordenada às negações correspondentes: A’ para A, de onde B.A e B.A’, ou os caracteres a’ para o caráter a, etc (PIAGET, 1995, p. 80).

3. Operações aritméticas: Adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais

As questões 4, 5, 6 e 8, apresentam situações-problema envolvendo as quatro operações fundamentais da matemática com números naturais (adição, subtração, multiplicação e divisão), por meio das quais pretendemos verificar, analisar e avaliar, de um lado a capacidade de leitura e interpretação; de outro, da qual depende a primeira, a capacidade de abstração e raciocínio lógico-matemático dos sujeitos ao resolverem problemas de aritmética, especialmente quanto às relações lógicas de comparação, correspondência, seriação e inclusão, as quais implicam na construção dos algoritmos, destas operações.

Na questão 4, de enunciado “Isabel foi à uma feira de animais e comprou 8 pintinhos. Cada um custou 2 reais. Isabel tinha duas notas de 20 reais. Com quanto Isabel ficou?” e opções de resposta: “a) 14 reais b) 24 reais c) 34 reais d) 40 reais”, a maioria dos sujeitos, num total de 13, marcou a opção “b”, mostrando capacidade de leitura e interpretação e de raciocínio lógico. Como, por exemplo, os estudantes Ke e Ga. Eis os registros:

Figura 7: Registros dos estudantes Ke, Ga e Jo

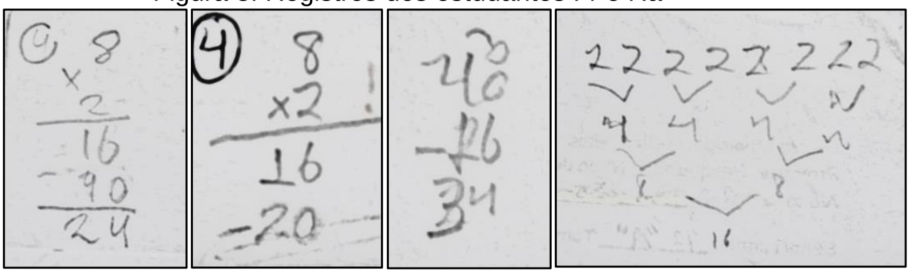


Fonte: Dados empíricos da pesquisa

Ao resolver corretamente a questão 4, os 13 estudantes demonstram capacidade de abstração e raciocínio lógico ao interpretarem o problema e usarem corretamente os algoritmos da adição, subtração e multiplicação – embora, de acordo com o modelo de ensino constatado, sejam frutos de uma aprendizagem por repetição, a qual nem sempre funciona.

Os 6 estudantes que erraram, revelam dificuldades de leitura e interpretação, ou seja, de abstração e raciocínio lógico. Destes, 5 têm dificuldades em efetuar a subtração de números naturais com empréstimo, 3 marcaram a opção “a” e 2 a opção “c”; e 1 marcou a opção “d”, apenas somando as duas notas de vinte reais. Eis os registros dos estudantes Fr e Ra:

Figura 8: Registros dos estudantes Fr e Ra



Fonte: Dados da pesquisa empírica

De acordo com os registros, os estudantes Fr e Ra, por exemplo, compreendem a sequência das operações para chegar ao resultado final – primeiro multiplicar e depois subtrair – no entanto, não tomaram consciência que no caso da subtração os elementos minuendo e subtraendo não são comutativos, mas, conservam uma ordem, na qual o minuendo que corresponde ao número maior vem sempre primeiro ou em cima, na armação da conta, enquanto que o subtraendo que corresponde ao valor menor vem depois, isto é, embaixo do minuendo, do qual será subtraído ou retirado.

É surpreendente constatar que estudantes na fase das operações formais não consigam por abstração e dedução compreender a inversão das operações, ou seja, se 24 + 16 = 40 então, 40 – 16 = 24 e não o contrário (16 – 40 ou 16 – 20 como faz equivocadamente a estudante Ra, em sua primeira tentativa) como nos registros acima. Surpreende-nos, por que, segundo estudos de Piaget (1995, p. 50) essa inversão torna-se clara para os sujeitos ou começa a ser compreendida a partir dos 7-8 anos, constatada relativamente à descoberta da reversibilidade.

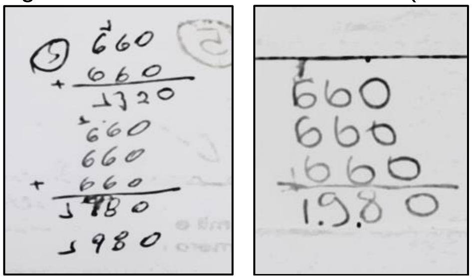
Significa, então que mesmo alcançando a capacidade de reversibilidade, a falta de estimulo da atividade cognitiva dos sujeitos, deixa lacunas, no que concerne à ordem necessária das operações inversas. Talvez, concordando com Piaget (1995, p. 50), o problema da reversibilidade, "diz respeito à conhecimentos escolares: tendo aprendido as adições, assim como as subtrações, esses sujeitos seriam, pois, instruídos pelo ensino, pelo simples fato de que os segundos são "o contrário" dos primeiros", o que do ponto de vista da abstração, não é suficiente.

Na questão 5, de enunciado "Tenho 1320 figurinhas. Meu primo tem a metade do que tenho. Minha irmã tem o triplo das figurinhas do meu primo. Quantas figurinhas minha irmã tem?" e opções: "a) 1900 b) 1930 c) 1940 d) 1980", 12 sujeitos tiveram dificuldades de leitura e interpretação, principalmente, em relação à linguagem matemática utilizada, quando desconhecem o significado do termo "metade" como uma divisão por dois, como por exemplo, cada uma das partes de uma fruta dividida em duas partes iguais ou as duas metades de uma folha de caderno quando a dobramos ao meio.

Da mesma forma não entendem o "triplo" como sendo a multiplicação por três ou a reunião (soma) de três objetos ou quantidades iguais – por exemplo, o triplo de um lápis, corresponde à uma coleção de três lápis etc. E, aqueles que conseguem interpretar os termos em destaque, acabam errando nos algoritmos da multiplicação ou da divisão, o que evidencia ainda mais a grave situação em que se encontram muitos estudantes da educação básica em relação à aprendizagem matemática.

Dos estudantes que marcaram corretamente a letra “D” (7 no total), o que nos chamou a atenção como foco de reflexão foi o processo de resolução utilizado pelos sujeitos das operações formais, evitando as operações superiores de multiplicação e divisão (como de certa forma se esperava, por serem as mais indicadas para resolver o problema), e, optando pelo caminho mais simples, o da adição de parcelas iguais (provavelmente por tentativas) já compreendida como operação de classificação, “que como tal não apresenta problemas, uma vez que se trata da mais elementar das ações construtivas” afirma Piaget (1995, p. 41). Eis alguns registros:

Figura 9: Registros dos estudantes Ga e Am (nessa ordem)

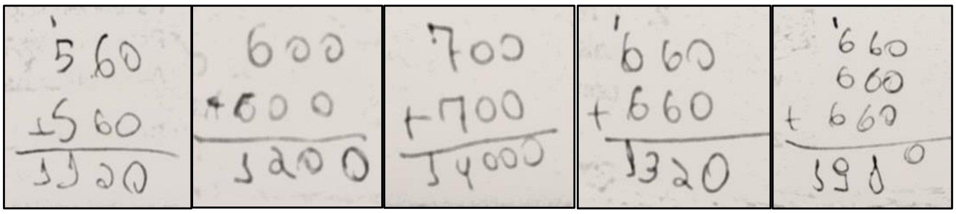


Fonte: Dados da pesquisa empírica

Na estratégia usada pelos estudantes, podemos perceber que há compreensão da relação entre adição e multiplicação, no entanto, é importante esclarecer que em termos de abstração “a multiplicação é uma composição operatória mais difícil de se apropriar, sendo já uma operação de patamar superior, efetuada sobre as operações aditivas elementares”. (PIAGET 1995, p. 51), sendo, portanto, mais cômodo e seguro, mesmo que por tentativas, somar parcelas iguais. Além disso, sendo uma duplicação ou triplicação, as únicas multiplicações invocadas no problema em questão, os sujeitos têm a sensação de não sair do domínio das adições, pois, $2x = x + x$ e $3x = x + x + x$ (PIAGET 1995, p. 51).

Embora possa haver dúvidas nos algoritmos de multiplicação e divisão, é interessante mostrar a capacidade de abstração e de raciocínio lógico da estudante Ka ao resolver o problema por meio de um processo onde a inversão das operações e as tentativas de adições não são aleatórias, mas seguem uma sequência lógica. Em “meu primo tem a metade do que tenho”, por exemplo, a estudante em sua atividade cognitiva, primeiro abstrai a multiplicação como operação inversa da divisão; segundo abstrai a multiplicação como consequência da adição de parcelas iguais; terceiro começa as tentativa de adição, tomando como valor de referência o número 1320. Eis os registros:

Figura 10: Registros da estudante Ka

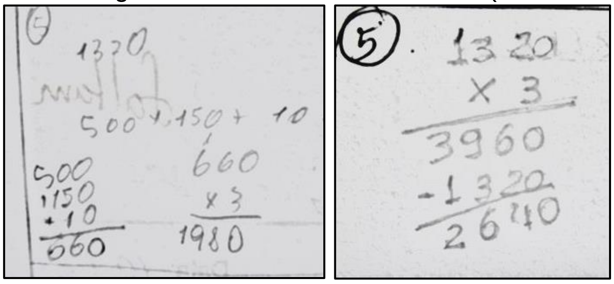


Fonte: Dados da pesquisa empírica

Na primeira e segunda tentativas ao escolher como parcela os números 560 e 600, respectivamente, a estudante obtém resultados menores que o valor de referência, porém, da primeira pra segunda tentativa, a estudante Ka observa que se aproximou mais do número 1320; na terceira tentativa ao escolher como parcela o número 700, obtém um resultado maior que o esperado, mas que serve de parâmetro para a quarta e última tentativa, quando finalmente escolhe como parcela o número 660, compreendido entre 600 e 700, obtendo como resultado o número 1320. Na segunda parte do problema “minha irmã tem o triplo das figurinhas do meu primo”, mais uma vez a estudante optou por somar parcelas iguais, evitando a multiplicação.

Tomamos como próximos exemplos os estudantes Jo e Ra. Eis os registros:

Figura 11: Registros dos estudantes Jo e Ra (nessa ordem)



Fonte: Dados da pesquisa empírica

O estudante Jo se destaca por usar corretamente os algoritmos da multiplicação e da divisão. Conforme os registros, o estudante mostrou uma capacidade de abstração e raciocínio lógico incrível, ao ler e interpretar corretamente o problema, conseguindo em pensamento decompor o número 1320 em 1000 + 300 + 20, e, em seguida dividir cada parcela por dois, encontrando, dessa forma, 500 + 150 + 10, que somando, resultou em 660 que é a metade de 1320. Concluindo, com a interpretação do “triplo”, como multiplicação por três, demonstrando domínio do algoritmo da multiplicação.

No caso particular da estudante Ra: ao fazer: 3 x 1320 = 3960, a estudante conseguiu por meio da abstração refletida, entender a multiplicação por 3 implícita em “Minha irmã tem o triplo das figurinhas do meu primo”, porém, ao fazer 3960 – 1320 = 2640, a estudante ou não conseguiu abstrair “metade” como a divisão por dois em “Meu primo tem a metade do que tenho”; ou não sabendo efetuar a divisão achou que, nesse caso específico, subtrair seria a mesma coisa.

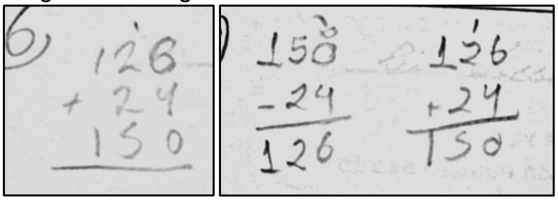
Outra observação interessante, nos registros da estudante Ra, é que de forma inconsciente, ou seja, sem tomada de consciência da ordem das operações, a estudante começou pela multiplicação e não pela divisão como sugere o problema, fato que não mudaria o resultado correto, se ao invés de subtrair tivesse dividido por dois no final, visto que entre as operações propostas não há preferência de uma sobre a outra, isto é, a ordem de resolução é arbitrária.

Na questão 6, “Luiz tem uma coleção de bolinhas de gude. Ontem ele ganhou 24 bolinhas novas de seu primo e ficou com 150 bolinhas. Desse modo, podemos afirmar que, antes de ganhar esse presente de seu primo, Luiz tinha: a) 124 bolinha b) 125 bolinhas c) 126 bolinhas d) 174 bolinhas”, a maioria dos sujeitos, num total de 15, mostrou, em primeiro lugar, capacidade de leitura e interpretação, quando por meio do pensamento reflexivo consegue abstrair a subtração implícita no enunciado da questão, como operação inversa da adição, ou seja, conseguem relacionar a situação-problema apresentada com a matemática.

Especificando, os sujeitos mostraram capacidade de abstração e raciocínio lógico, quando interpretam “ontem ele ganhou 24 bolinhas novas de seu primo e ficou com 150 bolinhas” como “quanto devo somar a um valor ***x*** para obter um valor ***y***?”, como faz o estudante Fr; e, também quando compreendem, por meio da operação inversa da adição, que o valor que devo somar é igual a diferença entre ***y*** e ***x***, isto é, 150 – 24, a qual corresponde a quantidade de bolinhas que Luiz tinha no início. A estudante Ra, por exemplo, apresenta em seus registros, os dois momentos do processo de abstração com as operações inversas (ver figura 12).

Segundo pesquisas de Piaget (1995), essa capacidade de abstração da inversão das operações apresentada pelos estudantes, só é possível graças primeiro à capacidade de reversibilidade completa alcançada por estes sujeitos na fase das operações formais (11-12 anos), a qual iniciou-se na fase das operações concretas (7-8 anos) quando o autor percebeu, por meio de experiências, que tratavam da inversão das operações, que nessa faixa etária “cada um desses sujeitos considera necessário conhecer o número terminal n’ para encontrar n e depois das hesitações iniciais, cada um reconhece que se pode reconstruir dedutivamente este número inicial n” (p. 50); sendo, em nosso caso, n’ = 150 e n = 126.

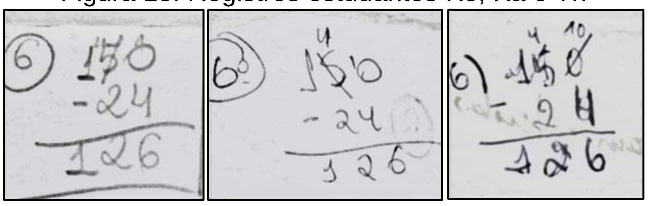
Figura 12: Registros dos estudantes Fr e Ra



Fonte: Dados da pesquisa empírica

Sobre os algoritmos das operações, os sujeitos mostraram domínio, começando pela armação da conta, quando mesmo com a quantidade de algarismos diferentes nos elementos da adição (parcelas) e da subtração (minuendo e subtraendo), ou seja, 3 e 2 algarismos, fazem a relação de correspondência correta entre as ordens, estabelecendo a seriação da esquerda pra direita, ou seja, unidade simples com unidade simples, dezena simples com dezena simples, ficando a centena simples sozinha, tanto na parcela de três algarismos da adição, quanto no minuendo da subtração, como mostram os registros abaixo.

Figura 13: Registros estudantes Ke, Ka e Th



Fonte: Dados da pesquisa empírica

Na resolução das contas propriamente dita, os estudantes também seguiram corretamente a seriação das ordens, começando a resolver pelas unidades simples. No caso da subtração, em particular, podemos perceber por meio dos registros que estes estudantes aprenderam a fazer – ainda que de forma mecânica – o processo algorítmico desta operação; os estudantes entendem que quando o algarismo do minuendo é menor que o algarismo correspondente do subtraendo, é necessário emprestar da ordem imediatamente superior, como no caso do zero das unidades simples que precisou “emprestar um” do cinco da dezena simples.

No entanto, do ponto de vista epistemológico, o que falta aos estudantes, e que não é favorecido pela concepção empirista de ensino, isto é, pela exposição de conteúdos, é a compreensão das etapas do algoritmo da subtração, ou seja, a razão delas, sem a qual, os sucessos apresentam apenas fatos sem significado, principalmente, quanto ao significado do "emprestar um", que geralmente o estudante aprende a fazer, mas não compreende. Resumindo, Piaget (1977, p. 179) explica que "compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso, o que é certamente uma condição preliminar da compreensão, mas que esta ultrapassa, visto que atinge um saber que precede a ação e pode abster-se dela".

4. Sequência numérica

Na Questão 7, de enunciado "Em qual dessas sequências o 10º termo é 54?", cujas opções de resposta são: "a) 1, 3, 5, 7, 9, ...   b) 0, 2, 4, 6, 8, ...   c) 0, 6, 12, 18, 24, ...   d) 0, 10, 20, 30, 40, ...", abordamos o conceito de sequência numérica, donde buscamos verificar e analisar como os estudantes comparam e seriam os números em ordem crescente numa sequência numérica segundo um critério específico.

De modo geral, numa sequência de números em ordem crescente, a relação de comparação consiste em verificar a lógica $a < b$, $b < c$, $c < d$ etc. donde se estabelece uma regra ou um critério, enquanto que a relação de seriação consiste em colocar esses elementos numa sequência lógica, obedecendo a esse critério estabelecido, nesse caso do menor para o maior, isto é, $a < b < c < d < e < f$ etc. Sendo possível, determinar qualquer número ou qualquer posição de número numa sequência numérica, desde que seja obedecido o critério estabelecido na relação lógica de comparação.

De acordo com os resultados obtidos, apenas 6 estudantes conseguem definir corretamente o critério de seriação da sequência numérica onde cada número a partir do zero, é maior que o seu antecessor seis unidades, confirmando o número 54 na 10ª posição da sequência numérica da opção "c". 13 estudantes mostram dificuldades na seriação de números numa sequência numérica, 2 não conseguem definir a regra de seriação dos números ao compará-los.

Os 11 sujeitos que marcaram a opção “b”, conseguem fazer a relação de comparação: 0 < 2, 2 < 4, 4 < 6..., e entender a sequência de números pares, da qual faz parte o número 54, mas não percebem ou não conseguem seguir o critério de seriação que vai definir sua posição; o estudante que marcou a opção “d”, provavelmente seguiu o critério de seriação proposto nesse item, encontrando o número 50 que fica próximo do número 54; o estudante que marcou a opção “d” mostra sérias dificuldades nas relações lógicas de comparação e seriação, visto que a sequencia escolhida é de números ímpares.

Considerações parciais acerca da organização e representações da sala de aula de matemática

Numa visão geral, a análise dos resultados apresentada indica uma forte influencia da concepção empírica no ensino de matemática, a qual define o espaço da sala de aula num contexto didático-pedagógico sem interação entre professor e estudantes, e, particularmente, sem diálogo, condição necessária à aprendizagem matemática. O estudo revela que o processo de ensino e aprendizagem é unilateral, configurando-se em três etapas: exposição sumária de conteúdos formais, sem sentido na vida dos estudantes, exemplos e exercícios de treinamento do que foi ensinado e, avaliação, sendo a prova escrita o único instrumento aplicado.

Dessa forma, predomina a “cultura do silêncio”, tendo em vista que o objetivo do ensino, nessa concepção, é a aprendizagem por meio da repetição de regras, fórmulas e algoritmos, o que não favorece a formação de estruturas lógicas responsáveis pela capacidade de conhecer. Por isso, os estudantes apresentam dificuldades em matemática, pois têm que se conformar apenas em copiar e reproduzir o que o professor ensina, sem compreensão conceituada do que fez, sem diálogo, o que implica no comportamento dos estudantes, quando sentem-se nervosos e inseguros ao manifestar-se oralmente, por medo de errar e ser reprovado.

Para tentar explicar as dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação a conteúdos básicos de matemática, os quais se esperava que já o dominassem, devemos de início considerar que “existem estruturas específicas para o ato de conhecer – as estruturas mentais – que sendo orgânicas, não estão programadas no genoma; sua “construção” vai depender das solicitações do meio”

(RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 9) – e, portanto, das *trocas* com este meio, as quais acontecem através do processo de adaptação “[...] um processo dialético através do qual o ser humano cresce, se socializa, conhece e se autodetermina” (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 9).

Isso nos leva a crer que durante o processo educacional desses sujeitos a falta de situações de aprendizagem oferecidas pelo meio escolar – físico e social – com atividades e recursos ou materiais didáticos adequados, que influenciassem em seu comportamento e os desafiassem a agir com autonomia, comprometem o desenvolvimento de habilidades cognitivas, deixando lacunas em sua aprendizagem matemática. A falta de diálogo em sala de aula – condição necessária à aprendizagem matemática – compromete o desenvolvimento da capacidade de argumentação dos estudantes, dificultando, assim, o processo de abstração e a tomada de consciência conceituada das ações, mecanismos cognitivos essenciais à construção do conhecimento matemático.

A falta de exemplos voltados ao cotidiano dos sujeitos tem sido um dos fatores que contribui para os resultados negativos em matemática. O modelo tradicional de ensino de matemática baseado na exposição sumária de conteúdos formais, donde resulta a memorização de fórmulas, propriedades e algoritmos, não oferece aos estudantes a possibilidade de criar estratégias de resolução, visto que os conteúdos são descontextualizados e sem nenhuma relação com a vida real, comprometendo, assim a construção de conceitos.

Portanto, devemos está atentos ao comportamento dos estudantes, bem como tudo que acontece no âmbito da sala de aula, para então intervirmos e prepararmos nossas aulas conforme a necessidade. Pois, conforme Brousseau,

> os comportamentos dos estudantes revelam o funcionamento do meio, considerado como sistema. Portanto, é o meio que deve ser modelado. Assim, um problema ou exercício não pode ser considerado mera reformulação de um conhecimento, mas um dispositivo, um meio que *responde ao sujeito*, segundo algumas regras (2008, p. 19).

Logo, reiteramos que é na adaptação a esse meio modelado pelo professor, segundo regras específicas, que o estudante por meio da ação, se apropria do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, buscamos agora analisar as implicações das situações didáticas (Brosseau), como contexto de interação entre professor, estudante e conhecimento, para a aprendizagem matemática na perspectiva de construção do conhecimento, a partir de uma intervenção pedagógica com sequências didáticas (Zabala), contemplando as fases de planejamento, concepção, aplicação e avaliação.

4. A INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA COM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Este capítulo versa sobre a intervenção pedagógica com sequências didáticas, planejadas com base na análise e interpretação dos dados coletados, por meio da observação de sala de aula, entrevista semiestruturada e teste diagnóstico, os quais nos permitiram compreender o contexto da pesquisa, o que implica nos fatores que intervêm no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Para entender a intervenção pedagógica, e, as variáveis que configuram a prática educativa, é necessário,

> situar-se num modelo em que a aula se configura como um microssistema definido por determinados espaços, uma organização social, certas relações interativas, uma forma de distribuir o tempo, um determinado uso dos recursos didáticos, etc., onde os processos educativos se explicam como elementos estreitamente integrados neste sistema. Assim, pois, o que acontece na aula só pode ser examinado na própria, interação de todos os elementos que nela intervêm (ZABALA 1998, p. 17).

Nesse sentido, a proposta didática aqui apresentada, pautada principalmente nas contribuições da Epistemologia Genética de Piaget, nas concepções pedagógicas de Paulo Freire e na organização didático-pedagógica proposta por Gui Brousseau em sua Teoria das Situações Didáticas, tem a intenção de favorecer a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático, a partir da interação dos sujeitos da pesquisa com o meio, nele inseridos o professor pesquisador e os materiais didáticos – material dourado e ábaco –, com ênfase particular no diálogo constante entre os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

No entanto, conforme Zabala, o mais importante numa intervenção pedagógica é levar em consideração a avaliação dos resultados, sob pena de se ter invalidada a atuação docente. O autor explica que:

> A intervenção pedagógica tem um antes e um depois que constituem as peças substanciais em toda prática educacional. O planejamento e a avaliação dos processos educacionais são uma parte inseparável da atuação docente, já que o que acontece nas aulas, a própria intervenção pedagógica, nunca pode ser entendida, sem uma analise que leve em conta as intenções, as previsões, as expectativas e a avaliação dos resultados. Por pouco explícitos que sejam os processos de planejamento prévio ou os de avaliação da intervenção pedagógica, esta não pode ser analisada sem ser observada dinamicamente desde um modelo de percepção da realidade da aula, onde estão estreitamente vinculados o planejamento, a aplicação e a avaliação. (ZABALA, 1998, p. 17)

Dessa forma, durante a intervenção pedagógica, tratamos não só da aplicação, mas, também, da avaliação das unidades didáticas propostas, especialmente, quanto às implicações – limites e possibilidades – na aprendizagem matemática. Antes das atividades propriamente ditas, fizemos com o auxílio do recurso áudio visual a apresentação oficial do projeto e dos materiais que seriam utilizados nas atividades. Na oportunidade mostramos aos estudantes as propostas pedagógicas que pretendíamos realizar, e, principalmente, os objetivos e as contribuições potenciais latentes destas propostas para a aprendizagem matemática.

Em outro momento, fizemos uma reunião específica, apenas com os responsáveis dos 19 sujeitos que foram autorizados mediante documentação a participarem desta pesquisa, onde além da apresentação do projeto e de suas contribuições, tratamos de alguns aspectos atitudinais que precisariam ser observados por parte dos estudantes e de seus responsáveis, como assiduidade e pontualidade nos encontros, visando o bom andamento do projeto, especificamente, quanto ao alcance dos objetivos propostos.

4. 1. SEQUÊNCIA DIDÁTICA: O SISTEMA DE NUMERAÇÃO E A CONSTRUÇÃO DOS ALGORITMOS

Na abordagem metodológica da sequencia didática foram trabalhados conteúdos específicos da matemática, visando mobilizar e apreender as estruturas cognitivas, o processo de abstração, a tomada de consciência, a dialogicidade, entendendo-os como inerentes ao processo pedagógico, envolvendo as ações e coordenações de professores e estudantes no ensino e aprendizagem da matemática.

Como recursos enriquecedores do meio didático, contamos com o uso do material dourado, ábaco, computador e data show, no sentido de oportunizar aos estudantes melhores condições de estudo e, consequentemente, de aprendizagem na perspectiva de construção do conhecimento matemático.

Na primeira sequência didática abordamos como conteúdo principal “o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com números naturais”. O objetivo geral da sequência didática foi favorecer a construção dos algoritmos da adição, da subtração e da multiplicação com números naturais. Abaixo apresentamos o quadro das atividades com seus respectivos objetivos e os conteúdos definidores da sequencia didática:

Quadro 17: Sequência didática – Conteúdos e objetivos

SEQUÊNCIA DIDÁTICA		
Atividades	**Objetivos**	**Nº aulas**
1. Conceito de unidade, dezena e centena	Construir o conceito de unidade, dezena e centena	01
2. Trabalhando o conceito de ordem e classe	Construir o conceito de ordem e classe	02
3. Ampliando o conceito de ordem e classe	Construir do conceito de ordem e classe e de valor posicional	02
4. Adição com números naturais	Construir o algoritmo da adição	02
5. Subtração com números naturais	Construir o algoritmo da subtração	03
6. Multiplicação com números naturais	Construir o algoritmo da multiplicação	03

4.1.1. Conceito de unidade, dezena e centena

Na primeira atividade proposta pela estratégia da sequência didática, fizemos a apresentação e o reconhecimento do material dourado, abordando como conteúdo específico a noção de unidade, dezena e centena. O objetivo específico pra essa atividade foi exatamente favorecer a construção dos conceitos de unidade, dezena e centena a partir da comparação, correspondência e equivalência entre as peças do material dourado – cubinhos, barras e placas, respectivamente.

De início, o professor pesquisador propôs à turma que formassem equipes de quatro estudantes, e apresentou-lhes o material dourado, a metodologia e os objetivos da aula a serem alcançados. Em seguida, os estudantes em grupos, mediados pelo professor, começaram a manipular livremente o material, e, por algum tempo fizeram comparações entre as peças, a princípio, sem nenhuma pretensão, e alguns, até mesmo sem muito interesse.

O objetivo, nesse primeiro momento, foi verificar como os estudantes, por meio da experiência com o objeto concreto, estabeleciam relações lógicas de comparação correspondência, seriação e inclusão entre as peças (cubinhos, barras, placas e cubo grande), para em seguida serem capazes de efetuar as trocas corretamente, e, por fim, a partir desta interação, construírem o conceito de unidade, dezena e centena.

Esse contexto caracteriza o que Brousseau (2008, p. 20), denominou, a princípio e de forma simplificada, de “situação”, definida pelo autor como “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado”. Nesse caso especifico, configura-se uma situação de ação, na qual os estudantes buscam alcançar e conservar um estado favorável ao meio, sendo que para isso dependem de suas decisões e dos conhecimentos empregados quando manipulam, comparam e fazem correspondências com as peças do material dourado em busca de equivalências como, por exemplo, dez barras, e não oito ou doze, é igual a uma placa.

Com pouco tempo de contato com as peças, alguns estudantes, embora um pouco tímidos, já conseguiam perceber algumas equivalências, e consequentemente, efetuar as trocas corretamente. Nesse momento, os estudantes acertam nas decisões e alcançam um “estado favorável”; é que “algumas situações requerem aquisição “anterior” de todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir por si mesmo um novo conhecimento” (BROUSSEAU, 2008, p. 20). Esse fato, conforme explica Piaget, é resultado da experiência, ou seja, da ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento para que este objeto, aqui representado pelo material dourado, seja imerso em um sistema de relações (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 3).

Figura 14: Manipulação livre com as peças do material dourado

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Diante do êxito inicial dos estudantes, o professor pesquisador aproveitou o momento para fazer algumas perguntas (inclusive àqueles estudantes que por algum motivo não se manifestaram), acerca das relações que eles começavam a efetuar, a fim de reforçar e consolidar suas descobertas. Por exemplo: Quantos cubinhos formam uma barra? Ou quantas barras formam uma placa? Ou ainda quantas placas formam um cubo grande? A cada pergunta feita pelo professor, e respondida corretamente, os estudantes ficavam mais motivados e interessados pela aula, o que não era tão evidente no início. E, quando erravam, ou, por timidez, vergonha, insegurança ou medo de errar, não respondiam, recebiam o incentivo do professor pra que não desistissem e continuassem tentando; esse incentivo por parte do professor passava segurança aos estudantes.

Esse momento caracteriza-se, conforme Brousseau (2008, p. 63), como um contrato de informação dialética, no qual não se exige que os interlocutores, professor e estudantes, tenham as mesmas referências (culturais, intelectuais etc.) apenas que encontrem aquelas que mantenham o propósito do momento, levando a uma construção dialética da convicção do estudante receptor sob seu próprio controle, ou seja, o que o estudante produzir, motivado pelo diálogo com o professor, o faz com segurança dentro de suas limitações culturais e intelectuais, frente à situação estabelecida.

Freire reforça que esse diálogo, entre professor e estudantes, deve ser uma relação horizontal na qual, ambas as partes têm igual importância e como tal “exige uma linguagem comum que só é possível se a realidade concreta que mediatiza a relação dialógica dos sujeitos, for a mesma (BECKER, 2010, p. 136); nesse caso, a realidade concreta é o sistema educacional com suas implicações no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

No entanto, destacamos que esse diálogo no contexto escolar, especificamente, na sala de aula, depende do quanto nos importamos com os estudantes, com sua vida, com sua formação, com seu futuro. Se não amo o mundo, se não amo a vida, se não amo as pessoas, é impossível o diálogo, pois não há diálogo entre opressores, que não amam e, portanto, não se importam com as pessoas e, oprimidos que precisam se libertar da opressão desses opressores, afirma Freire (1979, p. 94).

Nessa perspectiva, a relação dialógica, que começa aqui e acompanha toda a pesquisa, é adotada como condição necessária para a aprendizagem matemática, enquanto elemento ativo, e, portanto, crítico do meio. Nesse sentido, após exercitarem um pouco mais suas novas descobertas com o material dourado, os estudantes foram submetidos a novas perguntas, dessa vez com base nas noções já apreendidas foram questionados pelo professor, no intuito de verificar os conceitos já construídos e ampliá-los.

Por exemplo: Se uma barra é formada por dez cubinhos, quantos cubinhos são necessários para formar duas barras? Ou se uma barra é formada por dez cubinhos e uma placa por dez barras, quantos cubinhos formam uma placa? E, quantos correspondem a um cubo grande? Ou ainda, se dez barras equivalem a uma placa e dez placas equivalem a um cubo grande, quantas placas correspondem a um cubo grande?

Alguns estudantes responderam mais rápido outros demoraram um pouco, porém, todos usaram o material dourado para realizar suas tarefas. Nesse processo, de trocas e equivalências entre as peças do material dourado os estudantes demonstraram capacidade de estabelecer relações lógicas de comparação, classificação e inclusão. Com isso, constatamos que “em qualquer tipo de comportamento – seja no que visa a um fim imediato, seja no puramente lúdico – as ações das crianças não se organizam aleatoriamente, mas, ao contrario, supõem sempre uma ordenação, uma seriação e uma classificação” (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 14).

Na continuação da aula, introduzimos o ábaco como elemento enriquecedor do meio (figura 15), a fim de mobilizar ainda mais a atividade cognitiva dos sujeitos e ajudar na construção dos conceitos de unidade, dezena e centena, e, a partir destes, chegar à noção correta da seriação dos algarismos na representação de um número, ou seja, a posição que cada algarismo ocupa, de acordo com sua ordem, desde a unidade simples até a unidade de milhar.

Figura 15: Representação de números no ábaco

Fonte: Dados da pesquisa empírica

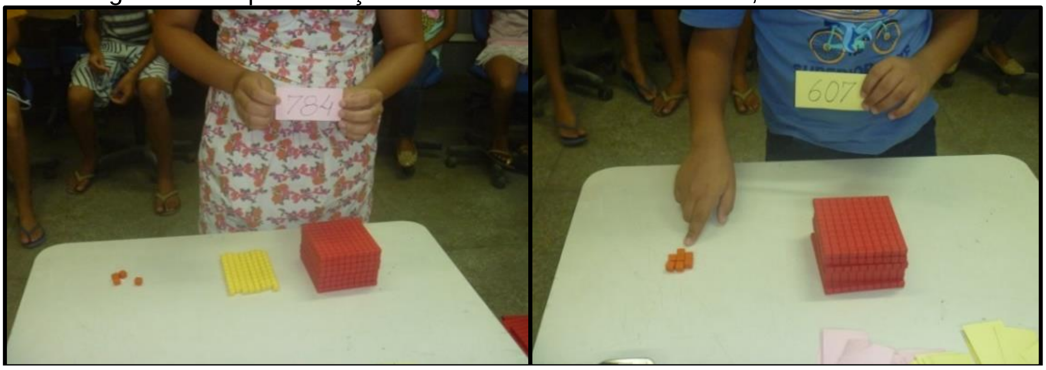
Por outro lado, com o auxílio do ábaco, buscou-se aumentar as possibilidades dos estudantes de, ao executarem as mesmas tarefas de formas diferentes, ampliarem os conceitos já aprendidos e construírem outros novos. Pois, como afirma Ramozzi-Chiarottino (1988, p. 9), baseando-se em Piaget, as possibilidades dos seres humanos são teoricamente as mesmas; sua concretização é que dependerá das solicitações do meio. Significa dizer, que no âmbito educacional, quanto mais oportunidades forem oferecidas, maiores e melhores são as perspectivas para o estudante aprender.

No decorrer do desenvolvimento das atividades, observamos que a cada intervenção do professor, e conforme iam interagindo e se familiarizando com os materiais, com o conhecimento matemático, enfim com as situações que se apresentavam, os estudantes mudavam seu comportamento; pareciam mais motivados, curiosos e seguros de si mesmos. Nesse momento, sob orientação do professor pesquisador, os estudantes não só manipulavam e construíam, mas, também, registram suas produções para mais tarde ou no final da aula socializar com a turma.

4.1.2. Trabalhando os conceitos de ordem e classe

Na segunda atividade abordamos a noção de ordem e classe com a representação de números com três ou quatro algarismos escritos em fichas de papel usando o material dourado. Num primeiro momento, cada estudante, na sua vez, escolheu uma ficha contendo um número formado por três algarismos correspondente à classe das unidades simples e, representou-o sobre a mesa com as peças do material dourado (figura 16). Mais adiante, ampliamos o conceito para números maiores, com quatro ou cinco ordens e duas classes; destacando que cada três ordens forma uma classe, sendo a primeira, a classe das unidades simples.

Figura 16: Representação de números escritos em ficha, com três ordens



Fonte: Dados da pesquisa empírica

O objetivo da atividade foi favorecer a construção do conceito de ordem e classe a partir da ação dos estudantes sobre o objeto concreto e das *trocas* com este. Especificamente, focamos na noção correta de seriação das ordens dos algarismos na formação dos números, as quais são ordenadas da direita pra esquerda, a partir da unidade simples (e não o contrário, como feito no teste diagnóstico pela maioria dos sujeitos), bem como na identificação e nomenclatura corretas de ordens e classe, a fim de melhorar a linguagem matemática e a capacidade argumentativa dos sujeitos; consideradas como um fator essencial para a tomada de consciência das ações.

De modo geral, os estudantes não tiveram grandes dificuldades para representar os números com as peças do material dourado. Podemos admitir com base na teoria piagetiana, que a partir da atividade motora do sujeito (na atividade 01), ao manipular e estabelecer relações entre as peças do material concreto, as operações lógicas de comparação, correspondência e seriação que foram efetuadas, resultaram na formação dos esquemas mentais de unidade, dezena e centena em sua estrutura cognitiva, os quais são responsáveis por organizar e dar significado às ações do sujeito. Visto que, “os esquemas motores são a condição da ação do indivíduo no meio; é graças a eles que a criança organiza ou estrutura sua experiência, atribuindo-lhe significado” (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 11).

> De outro lado, os esquemas motores, além de serem responsáveis pela ação exógena, também o são pela construção endógena, ou seja, pela organização interna, a nível neurológico. De acordo com a hipótese piagetiana, a criança age “no mundo”, organizando-o e estruturando-o e, concomitantemente, ocorre a construção (interna) das estruturas mentais – graças, justamente, a essa atividade motora (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 10).

Como vimos, na relação entre as peças do material dourado e os algarismos que compõem os números, ou seja, nas ações automatizadas (sem tomada de consciência), os estudantes obtiveram êxito. Porém, quando indagados ou questionados pelo professor, os estudantes apresentaram grandes dificuldades para explicar e justificar suas produções; às vezes, pareciam inseguros (ou com medo de errar). A linguagem matemática e a capacidade de argumentação dos estudantes são precárias, o que acreditamos ser fruto de uma pedagogia tradicional de ensino preocupada apenas em transmitir conteúdos, sem a devida reflexão e discussão dos mesmos.

Do ponto de vista didático-pedagógico, acreditamos ser possível que os estudantes avancem em sua aprendizagem, pois são capazes; o que falta, muita das vezes, no ensino de matemática, é um trabalho pedagógico de sala de aula que ofereça aos estudantes, dentre outras coisas, oportunidades de manifestarem-se oralmente e sem constrangimentos. Por isso, ressaltamos desde o início, que ao questionarmos os estudantes não tivemos em momento algum a intenção de leva-los ao erro e constrangê-los, mas, pelo contrário, buscamos por meio de uma relação dialógica mediar e favorecer a reflexão e a tomada de consciência de suas ações na busca de compreendê-las. Afinal, conforme Becker:

> A condição básica para esse diálogo, é que se trata de uma relação de sujeitos. Nessa relação ninguém se considera totalmente sábio ou totalmente ignorante, embora se admita a existência de níveis diferentes de conhecimento, de graus diversos de apreensão da realidade (2010, p. 137).

Numa visão mais ampla, acreditamos ser a educação dialógica, condição necessária para o alcance dos objetivos educacionais que se pretende no processo de ensino e aprendizagem de matemática; uma educação para além das quatro paredes da escola que traga contribuições para a formação integral dos estudantes enquanto cidadãos transformadores do mundo. No entanto, ressaltamos, faz-se necessário amar e acreditar nas pessoas. Afinal, numa relação dialógica, “o diálogo caracteriza-se como amoroso, humilde, crítico, esperançoso, confiante, criador, indicando assim as condições prévias do verdadeiro diálogo e a direção que ele deverá seguir” (BECKER, 2010, p. 137).

A propósito, tomando como base a relação dialógica, apresentamos durante todo o processo de experimentação, registros de descrições que nos permitem entender melhor o desenvolvimento das atividades, principalmente, quanto a aspectos cognitivos pertinentes à pesquisa. De início, devido a fatores já comentados anteriormente, os estudantes (uns mais do que outros) têm dificuldades em manifestarem-se oralmente; os diálogos entre o professor pesquisador e os sujeitos da pesquisa apresentaram-se tímido e frágil; percebe-se em vários momentos que os estudantes têm dificuldades em concluir seu raciocínio por isso fazem muitas pausas e deixam lacunas na sua fala. Por vezes precisando da intervenção do professor com perguntas que o ajudam a retomar e concluir a explicação. Eis alguns exemplos:

> Diálogo com o estudante Ma: – *Vamos lá Marcos explica pra nós o que você fez aí?* – ***É... aqui eu vou*** (hesitação). – *Qual é o número que você representou?* **– *Vou representar o número quatro mil trezentos e setenta e cinco*** (número escrito na ficha sorteada). **–** *E aí?* – ***Aqui, aqui tem mil, esse cubo tem mil, eu vou representar mil com esse cubo. Aqui cada barra*** (quer dizer placa) ***dessa vale é, são cem unidades... Aí eu usei essas três barras*** (quer dizer três

> placas) ***pra representar trezentos*** (o estudante avançou lentamente)***. –*** *Isso, muito bem, e agora? –* ***Aqui, é... Cada barrinha dessas, ela tem dez, eu usei... Eu usei sete que é pra formar... Pra formar setenta*** (o estudante fez muitas pausas)***. –*** *Ok. –* ***E aqui eu usei cinco bloquinhos desses pra formar as cinco unidades que iam contar.*** *– Ok. Qual foi o número que ficou formado aí? –* ***Ficou formado mil, trezentos e setenta e cinco***.

As dificuldades apresentadas pelo estudante Ma ao descrever sua produção não é algo tão simples como parece, mas, revelam antes de tudo dificuldades de assimilação e coordenação de ações diversas, como pensar no que vai fazer, representar o que pensou com as peças do material dourado e explicar o que fez (o que será percebido em outros momentos da pesquisa). Particularmente, evidencia-se o comprometimento da capacidade cognitiva do estudante em estabelecer relações lógicas de comparação, correspondência, seriação etc., resultando numa defasagem cognitiva entre raciocínio e ação. Por conta disso, só consegue fazer bem feito uma coisa por vez; não tendo tanto êxito quando precisa executar mais de uma ação ao mesmo tempo.

Mas, apesar do discurso frágil e hesitante dos sujeitos, foi possível observar desde o início das atividades, a importância da ação do sujeito sobre o objeto concreto e da relação dialógica entre professor e estudante para a tomada de consciência. No exemplo a seguir, com o estudante Fe, destaque para a tomada de consciência do erro, como condição necessária para a aprendizagem matemática. Eis os registros:

> Diálogo com o estudante Fe: (O estudante representou o número 1375): – *Qual é o algarismo da terceira ordem Fe? Olha pra o material dourado. –* ***da terceira ordem...*** (o estudante hesitou; olhou pras peças do material dourado e pensou um pouco antes de responder) ***É o sete***. – (o professor questionou) *É o sete? Você começou contar de onde? Olha pra o material dourado. De onde começa contar as ordens? do cubo grande ou dos cubinhos? Qual a primeira ordem? –* ***das unidades*** (o estudante apontou os cubinhos e só depois falou). O professor enfatizou: – *A primeira ordem é as unidades simples, representada pelos cubinhos [...] Agora, qual é o algarismo da terceira ordem? Não olha no papel, olha o que está representado sobre a mesa. –* ***três***. – (O Professor insistiu): – *Qual é o número? –* ***três***. *– Ok. O três, não o sete! Você não vai começar contar das unidades de milhar, mas das unidades simples representada pelos cubinhos. Essa é a primeira ordem.*

Quando indagado sobre o algarismo da terceira ordem no número 1375, o estudante, por alguns segundos, observou as peças do material dourado sobre a mesa e respondeu: ***sete***; ao invés de começar a contar a partir dos cubinhos que representam a primeira ordem, das unidades simples, o estudante começou a contar pelo cubo grande que representa as unidades de milhar; cometendo um erro muito comum de seriação, quando se fala de ordem e classe, o qual se não corrigido em tempo, pode comprometer a escrita e a leitura dos números, e, principalmente, a construção dos algoritmos e das operações matemáticas no plano do pensamento.

Diante do erro do estudante Fe o professor mediador, não ofereceu uma “resposta pronta”, mas, por meio do diálogo com o estudante, conduziu-o a uma solução pensada, raciocinada, refletida e construída. Nesse processo de construção, destacamos o diálogo na sala de aula, não apenas como mais uma forma de se comunicar com os estudantes, mas, o concebemos, concordando com Freire (1979, p. 95), como uma exigência existencial, um ato de criação, um encontro dos homens, mediatizados pelo mundo, para pronunciá-lo, não se esgotando, portanto, na relação eu – tu.

Mas, para que essa relação seja estabelecida, faz-se necessário que o diálogo seja “alimentado por uma fé profunda nos homens. Fé na capacidade de criar e recriar, de fazer e refazer, de superar-se continuamente” (BECKER, 2010, p. 137). A fé nos homens é um dado a *priori* do diálogo (FREIRE, 1979, p. 95). Por isso, acreditamos que por meio da ação do sujeito, mediada por uma educação dialógica, as dificuldades e limitações deixadas na formação intelectual dos estudantes, em especial, no ensino de matemática ao longo de sua vida escolar, podem ser superadas.

No caso citado acima envolvendo o estudante Fe, por exemplo, o diálogo pautado na ação e reflexão, aparece como condição necessária para o êxito do estudante na tomada de consciência do erro. Ao ser questionado várias vezes pelo professor e, observando atentamente as peças do material dourado organizadas sobre a mesa, o estudante concluiu que o algarismo da terceira ordem era o três, e não o sete como dissera antes, evidenciando, assim a tomada de consciência da seriação correta dos algarismos e, consequentemente, a superação do erro cometido inconscientemente.

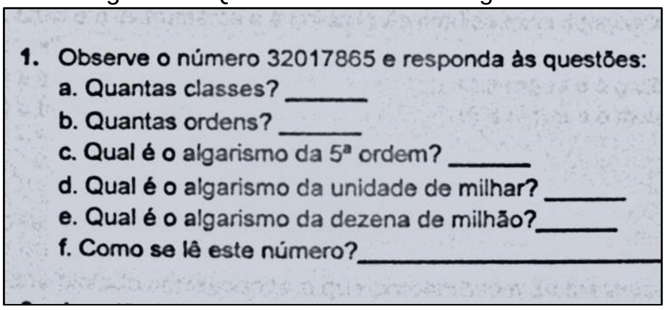
Epistemologicamente, essa passagem do inconsciente à consciência consiste em reconstruções, nesse caso, a reconstrução de um novo esquema conceitual de seriação das ordens na composição dos números, ou seja, “a tomada de consciência de um esquema de ação o transforma num conceito, essa tomada de consciência consistindo, portanto, essencialmente, numa conceituação” (PIAGET, 1978, p. 197).

Destaca-se, assim, a importância da ação do sujeito como um “saber fazer”, ou seja, como constituinte de um saber autônomo e eficiente, como “fonte do conhecimento consciente, isto é, da compreensão conceituada” (BECKER, 2010, p. 182). Becker (2010, p. 182) ressalta que a tomada de consciência surge, quase sempre, depois desse saber inicial que é a ação: somente a ação executada materialmente poderá ser construída em pensamento, mas para isso, faz-se “necessário um amplo exercício da ação pura para construir as substruturas do pensamento ulterior” (BECKER, 2010, p. 182).

Nesse sentido, com o auxilio do computador e do Datashow, concluímos a atividade 2, com a correção dialogada da questão 1 do teste diagnóstico (ver anexo 1) aplicado na fase exploratória da pesquisa, onde discutimos e construímos com os estudantes, caminhos e soluções que favorecessem a aquisição dos conceitos de ordem e classe, tendo em vista que a maioria dos estudantes apresentou dúvidas (apenas oito estudantes, em um universo de 80, responderam todos os itens da Q1, corretamente) quando da aplicação do teste. Durante a correção dialogada da questão 1, já foi possível perceber as implicações das atividades com o material dourado na aprendizagem matemática dos estudantes em relação aos conceitos de ordem e classe.

Nos itens “a” e “b” da questão, enfatizamos o número de ordens e de classes e, a seriação dos algarismos no número 32017865, ou seja, cada ordem ocupada por um algarismo na construção de um número fica sempre à esquerda da anterior, sendo que a primeira é a ordem das unidades simples.

Figura 17: Questão 1 do teste diagnóstico


1. Observe o número 32017865 e responda às questões:
a. Quantas classes? ______
b. Quantas ordens? ______
c. Qual é o algarismo da 5ª ordem? ______
d. Qual é o algarismo da unidade de milhar? ______
e. Qual é o algarismo da dezena de milhão?______
f. Como se lê este número?______________________

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Em seguida, a fim de evidenciar tomadas de consciência em relação ao conteúdo abordado, donde resulta a construção de conceitos matemáticos, desenvolveu-se o diálogo com os estudantes durante a correção dos itens “c” e “d”. Eis os registros:

> Diálogo com os estudantes Th e Fr: – *Qual o algarismo que está na quinta ordem Th?* – ***Um***. – *Você começou a contar do cinco ou do três?* – **Do cinco.** – *A partir do cinco, por que do cinco Th?* **– Porque é a unidade simples.** – *Ok. É a unidade simples, começa na unidade simples [...] Qual o algarismo que está na unidade de milhar... Fr?* – ***sete***.

A segurança e a certeza com que a estudante Th e o estudante Fr respondem ao professor confirma a tomada de consciência da seriação do número, o que implica na compreensão não mais como um “saber fazer” dependente da ação motora e que não vai além da ligação do esquema ao seu objeto – no nosso caso o material dourado –, mas, uma compreensão conceituada resultante de um processo que começa com a ação, passa à coordenação das ações que supera a ação inicial e, por meio de progressivas tomadas de consciência essa ação é interiorizada, ou seja, construída em pensamento e transformada em conceituação (BECKER, 2010, p. 183).

Podemos afirmar, nesse caso, que houve aprendizagem e, principalmente, aquisição do conhecimento matemático, especificamente, os conceitos de ordem e classe. Aproveitamos o momento – após a resposta do estudante Fr – para envolver os estudantes e ao mesmo tempo comprometê-los com o conhecimento matemático em questão, a fim de verificar o quanto a turma estava aceitando a devolução. Quando indagados sobre “***Quem concorda com o Francisco?”*** alguns estudantes responderam ***“eu”***, outros levantaram o braço, confirmando que concordam com o colega e, houve aqueles que não se manifestaram de nenhuma forma.

Desta feita, enfatizamos a importância de conhecer muito bem os nomes das ordens e das classes, por ser fundamental para a leitura correta do número. Em seguida, retomamos o dialogando com a turma e, fizemos a correção do item “e”. Eis os registros:

> Diálogo com a turma: – *Qual o nome da primeira classe?* – ***Unidade simples*** (alguns estudantes responderam, outros ficaram calados). – *Qual o nome da segunda classe?* **– *Unidade de milhar.*** Um ou dois estudantes responderam classe de milhar. O professor explicou: – *Classe de milhares. Não tem o termo “unidade”. É classe de milhares ou de milhar, se preferir.* – *Qual o nome da terceira classe?* – ***Classe de milhão*** (ainda ouvimos “unidade de milhão”). O professor concluiu: – *Unidades simples, classe de milhar e classe de milhão [...]* – *Quem é a dezena de milhão?* ***– é o três.*** – *Quem concorda com a* ***Ha****?* (todos os estudantes levantaram a mão, confirmando que concordaram com a colega) – *Por que, que é o três?* ***Fe****, por que, que é o três?* – ***por que tá na classe de***

> ***milhão.*** *– E você* ***Th****? –* ***por que tá na classe de milhão. –*** *E é o quê* (que ordem)*?* A estudante Th respondeu: – ***é dezena.***

Enfatizamos que as classes são formadas por três ordens, e, que essas ordens são sempre unidade, dezena e centena, as quais se diferenciam de acordo com a classe que as contém. Além disso, a posição de cada algarismo na representação simbólica do número conforme a ordem que ocupam e o nome das classes a que pertencem cada um, ou seja, a correspondência existente entre ordem e classe que precisa ser considerada quando se quer identificar uma ordem específica.

A ênfase dada pelo professor na conclusão das tarefas realizadas pelos estudantes está de acordo com o contrato didático de informação, o qual, segundo Brousseau (2008, p. 65) é o contrato vigente no ensino de matemática para a divulgação de resultados. Nesse caso o professor responde a uma demanda do estudante para um uso que ele desconhece, ou seja, algo novo a ser desvelado. “O controle sobre a competência do emissor é constante o que não ocorre com a do receptor. Se este não se manifesta, o emissor não tem como saber se é realmente compreendido, nem mesmo se é recebido” (BROSSEAU, 2008, p. 65).

Dessa forma, a relação dialógica entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática é condição necessária para que se obtenha êxito com o contrato de comunicação, pois “o professor escreve ou comunica o saber de seu campo nos termos em que lhe é possível expressá-lo e que lhe são fornecidos por sua instituição de origem” (BROUSSEAU, 2008, p. 65) isto é, na linguagem formal da matemática, sendo o estudante responsável pela interpretação e pelo uso dessas informações.

Daí a importância das intervenções do professor mediador durante o desenvolvimento das atividades proposta pela estratégia da sequência didática, especialmente, o diálogo com os estudantes, sejam necessárias no sentido de tornar acessível ao estudante a mensagem ou informação comunicada, sem perder o rigor e a formalidade da linguagem matemática.

Sobre o último item da Q1, referente à leitura do número 32017865, a estudante Kr, quando indagada pelo professor, respondeu corretamente: ***trinta e dois milhões, dezessete mil, oitocentos e sessenta e cinco.*** Os colegas afirmaram que concordavam com a resposta. De qualquer forma, a fim de certificarse do quanto os estudantes conseguiram assimilar os conceitos trabalhados (ordem e classe, e, seriação dos algarismos na construção da representação de um número), mais dois estudantes foram convidados pelo professor a fazer a leitura do número; o estudante Ke leu corretamente, mas o estudante Fe, mesmo com a leitura já feita pelos colegas, apresentou dificuldades para definir as classes e seus respectivos nomes. Ao ler: ***trinta e dois milhões, cento e setenta e oito mil...*** Notou-se que o estudante Fe ignorou o algarismo zero que ocupa a ordem das centenas da classe de milhar, sendo esta a causa do erro.

O professor esclareceu à turma que o zero também é um algarismo, e, assim sendo, ocupa uma ordem (no caso específico da Q1, centena de milhar), portanto deve ser considerado na definição das classes e, consequentemente, na leitura do número. Mais uma vez enfatiza-se que as classes são formadas por três ordens, quais sejam unidade, dezena e centena; portanto, na leitura de um número, não há a possibilidade, por exemplo, de duas ordens da classe de milhar combinar-se com uma ordem da classe das unidades simples e formar uma nova classe com a sequência dezena de milhar, unidade de milhar e centena simples (sequencia seguida na leitura do estudante Fe).

Com a ajuda do professor (explicando, instigando e questionando) e o apoio do recurso visual com o Data show, finalmente o estudante conseguiu ler o número corretamente, o que não significa, necessariamente, que o estudante se apropriou do conhecimento matemático em questão. Na verdade, a dificuldade apresentada nesta situação pelo estudante Fe – e outras identificadas anteriormente – nos levou a seguinte reflexão: Numa turma heterogênea nem todos aprendem com a mesma facilidade ou da mesma forma; num processo educativo há muitos fatores envolvidos e estes devem ser levados em consideração, pois de uma forma ou de outra influenciam na aprendizagem dos estudantes e, portanto, devem implicar nas decisões do professor ao preparar e aplicar suas aulas. Nesse sentido, Zabala argumenta que:

> A concepção que se tenha sobre a maneira de realizar os processos de aprendizagem constitui o ponto de partida para estabelecer os critérios que deverão nos permitir tomar as decisões em aula. No entanto, é preciso sempre ter presente que estas aprendizagens só se dão em situações de ensino mais ou menos explícitas ou intencionais, nas quais é impossível dissociar, na prática, os processos de aprendizagem dos de ensino. Nesta perspectiva integradora, o conhecimento, que provém da fonte psicológica, sobre os níveis de desenvolvimento, os estilos cognitivos, os ritmos de aprendizagem, as estratégias de aprendizagem, etc., é essencial para

> precisar as referências que se devem levar em conta ao tomar as decisões didáticas (1998, p.22).

Assim sendo, para consolidar os conceitos de ordens e classes, e consequentemente, aprimorar a linguagem matemática, a representação, a escrita e a leitura de números, os estudantes, sob orientação do professor, usaram o material dourado para representar números de até quatro ordens, começando pela unidade simples. A fim de esclarecer todas as dúvidas, o professor convidou o estudante Fe, e começou pelo reconhecimento das peças do material dourado, explorando a ideia de unidade, dezena e centena. Como mostram os registros a seguir:

> Diálogo com o estudante Fe: – *Qual é a peça que representa a unidade simples?* O estudante Fe respondeu segurando e mostrando ao professor um cubinho. – *Quem é a dezena? Me mostra quem representa a dezena simples no material dourado?* O estudante olhou para as peças do material dourado, mas não respondeu; parecia tímido, envergonhado, talvez inseguro. O professor não desistiu, instigando-o a responder algo: – *O que significa pra você dezena? Dezena tem haver com que número, tem haver com que quantidade?* O estudante permaneceu calado e não respondeu; parece confirmar-se o que a maioria dos estudantes respondeu na entrevista da fase exploratória – o medo de errar! Mas, o professor persistiu com o estudante Fe, e arriscou mais uma vez: – *A dezena está relacionada com que quantidade? Com cem, com dez ou com mil?* Finalmente o estudante Fe respondeu: ***– Com dez***, mostrando uma barra para o professor.

Didaticamente, destacamos que esse momento do diálogo entre o professor e o estudante Fe, aproximou-se do que Brousseau (2008, p. 80) chama de efeito *Topaze* – um dos efeitos do contrato didático – onde o professor, na tentativa de levar o estudante a responder corretamente, faz perguntas cada vez mais fáceis na esperança de obter o máximo de significação em suas respostas. A resposta que o estudante deve dar é previamente determinada pelo professor que escolhe as perguntas que a podem provocar, sendo que os conhecimentos necessários para a produção dessas respostas mudam de significação.

Porém, o “efeito Topaze” só é concebido se os conhecimentos em questão desaparecem por completo e, consequentemente, o professor acabar dando a resposta ao estudante. O autor acrescenta que é do professor a responsabilidade de manter o sentido nas mudanças de perguntas a fim de evitar este efeito.

Superado o medo inicial, o estudante Fe ficou mais a vontade na continuação do diálogo com o professor:

> Continuação do diálogo com o estudante Fe: – *Qual é a peça Fe que representa o cem, uma centena?* O estudante respondeu mostrando uma placa para o

professor. O professor questionou: – *Por que essa peça é uma centena?* O estudante, um pouco mais a vontade, justificou: – ***Por que tem cem cubinhos***. – *E, quem representa a unidade de milhar?* O estudante Fe respondeu mostrando o cubo grande ao professor. O professor questionou: – *Por que, que essa peça representa a unidade de milhar?* – ***Por que tem mil cubinhos***. O professor reforçou: *Tem mil cubinhos, ou seja, mil unidades simples.*

Após a identificação das peças o estudante Fe foi orientado pelo professor a representar um número formado por quatro ordens com as peças do material dourado, para que todos percebessem e entendessem que nessa construção cada ordem é acrescentada sempre à esquerda da anterior, começando com a unidade simples. Esse procedimento fica mais claro a partir dos registros do diálogo a seguir:

Continuação do diálogo com o estudante Fe: – *Então Fe se eu pedisse pra você representar um número? Como você representaria o número quatro?* O estudante retirou da caixa quatro cubinhos e colocou sobre a mesa. O professor questionou: – *Por que, que aí tem quatro, explica pra nós?* – ***Por que um cubinho desses é uma unidade... unidade simples.*** O professor reforçou: – *Cada cubinho representa uma unidade simples, é isso? Então você precisou de quatro. Agora representa Fe, o número cinquenta e quatro. Como é que você representa o número cinquenta e quatro?* O estudante apanhou na caixa cinco barras e colocou ao lado esquerdo dos cubinhos, sobre a mesa. O professor questionou: – *Explica por que, que aí é cinquenta e quatro Fe?* O estudante respondeu colocando a mão sobre as barrinhas: – ***Por que cada um desses é dez.*** – *E vale quanto as cinco barras?* – ***Cinquenta***. – *Qual o número que você representou?* – ***Cinquenta e quatro***. – *Agora forma pra mim Fe o número trezentos e cinquenta e quatro.* O estudante apanhou na caixa do material dourado, três placas e colocou a esquerda das barras, sobre a mesa. O professor questionou: – *Por que, que tem trezentos e cinquenta e quatro aí, explica aí?* O estudante segurou na mão as placas e respondeu: – ***Por que cada um desses aqui vale cem*** (refere-se às placas) – *Por que você pegou três placas?* – ***Por que cada placa tem cem cubinhos***. – *E você quer representar quanto com as três placas?* – ***Trezentos***. – *Qual é o número que está representado aí, agora?* – ***Trezentos e cinquenta e quatro***.

Nesse momento, a fim de dar ênfase e explicitar a coordenação das ações, o professor orientou o estudante para que ao mesmo tempo em que ler o número, aponte as peças do material dourado que representa cada classe, donde se espera que haja compreensão do que se está fazendo, as etapas de sua ação, ou seja, a relação do objeto com seu significado num processo de construção. Em termos epistemológicos, busca-se assimilar o objeto e acomodá-lo como significante.

Continuação do diálogo com o estudante Fe: – *Agora Fe representa pra nós mil trezentos e cinquenta e quatro.* O estudante rapidamente apanhou o cubo grande e o colocou à esquerda das placas, sobre a mesa. – *Explica pra nós cada um dos valores representados e as ordens correspondentes que formam o número. Primeiro qual o número que você formou?* – ***Mil, trezentos e sessenta e quatro***. – *Agora explica cada parte.* – ***Esse daqui, esse cubo grande tem mil bloquinhos... Aí esse daqui, essa placa tem... cada uma dessas placas tem***

> ***cem cubinhos, aí eu peguei três pra dar trezentos. Esse daqui é a barra, aqui cada barra dessas tem dez, aí eu peguei cinco pra representar o cinquenta. Aí eu peguei quatro desse aqui, cubinho... que é uma unidade, pra representar o quatro.*** – *Que número ficou formado?* – ***Mil, trezentos e cinquenta e quatro***.

No final do diálogo com o estudante Fe o professor fez as devidas considerações e chamou a atenção da turma para a seriação correta das ordens na construção da representação simbólica do número, destacando que a primeira ordem de um número é a unidade simples – representada pelos cubinhos; a segunda ordem é a dezena simples – representada pelas barras – colocada à esquerda da unidade simples; a terceira ordem que é a centena simples – representada pelas placas – é colocada à esquerda da dezena simples e assim por diante.

Percebe-se que em vários momentos do diálogo com o estudante Fe – assim como em toda a intervenção pedagógica deste estudo – que o professor fez considerações no final de cada etapa da produção do estudante, dando ênfase aos conceitos estudados. Freire explica que num processo dialógico mediado, constituído de ação e reflexão,

> a dialogicidade não nega momentos explicativos, narrativos em que o professor expõe ou fala do objeto. O fundamental é que professor e estudantes saibam que a postura deles, do professor e dos estudantes, é *dialógica*, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e estudante se assumam *epistemologicamente curiosos* (1997, p. 96).

Ficou evidente, portanto, nessa e em outras situações, que aparecerão em vários momentos do desenvolvimento deste trabalho, o esforço e a preocupação do professor em comunicar as informações da melhor maneira possível aos estudantes às vezes até de forma insistente ou repetitiva, mas com certeza na intenção didática de direcionar o estudante uma aprendizagem significativa, pautada na perspectiva da construção do conhecimento.

Essa postura do professor ao assumir a responsabilidade por fazer a mensagem chegar ao estudante de forma clara e objetiva assemelha-se, a princípio a um contrato de comunicação no qual, o professor,

> deve assegurar a boa recepção da mensagem (mas não o sentido dado pelo receptor) e, para isso, garantir o bom funcionamento do canal. Deve utilizar os repertórios do receptor (repertórios caligráficos, fonológicos,

> ortográficos, gramaticais e lógico etc.) e, chegado o momento, cotejar (confrontar por meio da reprodução feita pelo destinatário) ou repetir a mensagem (em particular, a pedido do receptor) (BROUSSEAU, 2008, p. 61).

Porém, nesse tipo de contrato o Brousseau afirma que a interpretação da mensagem é de total responsabilidade do estudante, ou seja, o importante é a transmissão de conhecimentos sem intenção didática, não sendo este o nosso objetivo.

Por isso pensamos em um contrato mais exigente; um contrato de habilidade, no qual, segundo Brousseau (2008, p. 61) o professor não só responsabiliza-se por comunicar passo a passo o que pretende ensinar, mas também garante a validade do que é enunciado por meio de exemplos ou demonstrações, afinal o que se espera é que o estudante não só receba uma boa informação, mas, principalmente que essa informação seja entendida, seja útil e contribua de alguma forma para sua aprendizagem. Nesse tipo de contrato, o próprio estudante "pode exigir, eventualmente, que o especialista (professor) determine algum critério de validade do que enuncia [...] Assim, os enunciados se transformariam em assertivas, uma vez que, implicitamente, seriam considerados 'verdadeiros'" BROUSSEAU (2008, p. 61).

Estabelecido o contrato didático partimos para a prática com o desenvolvimento das atividades propostas pela estratégia da sequência didática. Logo nas primeiras atividades observamos que o contato com as peças do material dourado, ajudava na abstração e na compreensão dos estudantes acerca dos conceitos abordados. Esse progresso, conceitual e linguístico, embora ainda tímido, foi percebido, por exemplo, na descrição feita pelo estudante Fe quando questionado pelo professor em três momentos diferentes do diálogo, os quais envolvem diretamente os processos cognitivos da abstração. Vejamos a sequencia do diálogo:

1) No início, o estudante Fe afirmou: ***Por que um cubinho desses é uma unidade... Unidade simples.*** Do ponto de vista da epistemologia genética de Piaget, podemos concluir que no início, a ênfase está na relação causal, focada no objeto concreto e suas características físicas, como se ele próprio, "o cubinho", e somente ele, fosse a própria unidade simples; como se outro objeto diferente, com outras características físicas não pudesse "ser" as unidades simples. Embora, considerar o cubinho como uma unidade simples já seja uma propriedade atribuída

pelo estudante (característica da abstração pseudo-empírica), esse primeiro momento parece ainda muito próximo da abstração empírica, a qual “apoia-se sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação” (PIAGET, 1995, p. 5).

2) Numa outra afirmação o estudante Fe alcança um ponto intermediário de abstração pseudo-empírica. Ao afirmar: ***Esse daqui, esse cubo grande tem mil bloquinhos...***, o estudante consegue “enxergar” o cubo grande como um composto de cubinhos, sendo esta relação fruto das atividades motora do estudante, mas já coordenada e processada em nível endógeno como uma operação lógica de inclusão. Nesse caso, o estudante chega à coordenação das ações, característica de um a abstração pseudo-empírica na qual, segundo Piaget (1995, p. 5) diferente da abstração empírica, as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nos objetos por atividades do sujeito.

3) Mais adiante, em sua explicação, o estudante diz: ***Esse daqui é a barra, aqui cada barra dessas tem dez, aí eu peguei cinco pra representar o cinquenta.*** Essa fala nos parece mais completa, pois o uso do termo “representar” mostra que o estudante já consegue ir além da relação com o objeto e suas propriedades físicas, revelando capacidade de abstração refletida, de inferir sobre o objeto concreto, atribuindo-lhe novas propriedades. De outra forma, revela-se a capacidade de operar ao nível do pensamento ao conceber as peças do material dourado apenas como uma dentre muitas formas ou possibilidades de representar um ente matemático.

Nesse caso, e em vários outros manifestos no trabalho com as situações didáticas, ressaltamos a importância da mediação dialógica no processo de abstração e de tomada de consciência das ações e depois da coordenação das ações, com implicações diretas na aprendizagem matemática. No processo dialógico estabelecido com o estudante Fr, por exemplo, as perguntas não são aleatórias, mas direcionadas, ou seja, têm um objetivo a alcançar, qual seja a tomada de consciência do estudante mediante abstrações; o que só será possível a partir da ação e reflexão, mediadas pelo próprio diálogo com o professor.

Na continuação da aula o professor convidou a estudante Ra pra representar um número composto por quatro algarismos usando o material dourado. Como segue nos registros:

> Diálogo com a estudante Ra: – *Mostra qual é a peça que representa a dezena Ra?* A estudante apanhou uma barra na caixa do material e mostrou ao professor. O professor questionou: – *Por que, que essa peça representa a dezena?* – ***Por que é uma barra que tem dez cubinhos.*** – *E cada cubinho representa uma...?* – ***Uma unidade simples.*** **–** *Me mostra qual é a peça que representa a unidade de milhar Ra?* A estudante apanhou o cubo grande e mostrou ao professor. O professor questionou: – *Por que, que é essa peça ai Ra?* – ***Por que cada cubo desse aqui representa mil...*** – *Mil unidades... é isso?* A estudante confirmou que sim meneando a cabeça. – *Ra agora mostra pra nós qual é a peça que representa a centena simples?* A estudante pegou uma a placa e mostrou ao professor. O professor então perguntou: – *Por que, que essa peça representa a centena?* – ***Por que é uma placa... E tem cem cubinhos.*** O professor complementou: – *Cem cubinhos que correspondem a cem unidades simples [...] E agora qual é a unidade, mostra qual é a peça que representa a unidade simples?* A estudante respondeu mostrando um cubinho para o professor. – *Ok. Agora vamos formar, vamos representar um número...* *Representa pra nós o número sete, por favor, Ra.* A estudante pegou sete cubinhos, na caixa de material dourado, e pôs sobre a mesa. O professor questionou: – *Por que, que aí tem sete, Ra?* – ***Por que aqui tem sete cubinhos e... Cada cubinho é... Uma unidade simples.*** – *Agora se eu pedir pra você representar o trinta e sete, o que você faz Ra?* – ***Pego três barrinhas.*** – *Por que três barrinhas?* – ***Por que cada uma delas vale dez... Dez unidades.*** – *Por que você colocou à esquerda dos cubinhos Ra, e não à direita?* – ***Por que se eu colocar à direita vai ficar estranho.***

Ao afirmar: – ***Por que se eu colocar à direita vai ficar estranho***, a estudante mostrou que compreendeu a seriação correta dos algarismos na representação simbólica dos números. No entanto, parece que não tomou consciência dos meios empregados no processo, os quais justificam a disposição das peças.

O professor aproveitou o momento e pediu à estudante que colocasse as barras à direita dos cubinhos e perguntou que número ficou formado. Com esse exemplo, o professor buscou mostrar aos estudantes que a disposição das peças do material dourado ao representar a posição de cada algarismo de um número, deve obedecer ao rigor matemático de nosso sistema de numeração posicional, concordando com a leitura do número, a qual é feita da classe maior para a classe menor, ou seja, da esquerda pra direita.

Portanto, para representar o número 37, são necessários três barras (uma barra = dez cubinhos = uma dezena simples) à esquerda de sete cubinhos (um cubinho = uma unidade simples) e não o contrário, ou seja, os cubinhos que representam as sete unidades simples não podem assumir a posição das dezenas simples e nem as barras que representam três dezenas simples, assumir a posição das unidades simples. Ficaria estranho, como bem disse a estudante Ra; seria “sete e trinta”, como sugeriu a estudante Kr, composição que contraria o nosso sistema de numeração decimal e posicional, onde a ordem dos algarismos na construção da representação simbólica de um número é levada em consideração e cada algarismo assume um valor posicional de acordo com a ordem que ocupa.

A aula segue com a participação da estudante Ra. Eis os registros

> Continuação do diálogo com a estudante Ra: – *Representa agora Ra o número quatrocentos e trinta e sete. Como é que você faz?* A estudante pegou quatro placas e pôs à esquerda das barras, sobre a mesa e, explicou: – ***Por que cada plaquinha dessas representa cem... Eu peguei quatro pra representar quatrocentos.*** – *Por que, que cada placa vale cem?* – ***Por que... Tem dez barrinhas.*** O professor concluiu: – *Dez barrinhas. Cada uma formada por dez cubinhos*. *E, cada cubinho representa o quê...?* – ***Uma unidade simples***. – *Agora representa o número mil, quatrocentos e trinta e sete.* A estudante Ra pegou o cubo grande e acrescentou à esquerda das placas. O professor questionou: – *Por que, que agora tem mil, quatrocentos e trinta e sete, explica cada uma das partes, por favor*? (A estudante, apontando as peças do material dourado dispostos sobre a mesa, começou explicar pelo cubo grande). – ***Por que esse daqui é o mil, esse aqui é quatrocentos, esse aqui é trinta e esse aqui é sete.*** – *Por que, que aquele é mil* (o professor perguntou apontando para o cubo grande)*?* – **Por que tem mil cubinhos.** – *E cada cubinho vale quanto?* – ***Uma unidade simples***. – *E o nome das ordens Ra você já sabe? Fala pra nós o nome de cada ordem que você representou com o material dourado.* (A estudante respondeu apontando as peças a partir dos cubinhos) – ***Unidade simples, dezena simples, centena simples e milhar.*** – *Unidade de milhar ok! milhar é o nome da classe. E se tivesse uma outra ordem, qual seria Ra?* – ***Dezena de milhar***. – *E se tivesse outra, qual seria?* – ***Centena de milhar.*** **–** *E a próxima qual seria?* (hesitação, a estudante pensou um pouco e não respondeu). O professor então adiantou: – *Seria unidade novamente, só que agora unidade de quê?* – ***de milhão*** (completou a estudante)***.***

O êxito da estudante Ra, no final de sua produção, quando questionada sobre ordens não representadas pelo material dourado, mas subentendidas na seriação, evidencia a capacidade de coordenação das ações em pensamento, mediante abstrações refletidas. De outra forma, revela-se a capacidade cognitiva de pensar sobre hipóteses, mesmo na ausência do objeto concreto (material dourado), próprias dessa faixa etária (13 anos de idade ou mais, segundo Piaget), ou seja, do nível das operações formais. Diferente do nível anterior, das operações concretas, onde de acordo com as fases de desenvolvimento, propostas por Piaget, interpretado por Becker (2010, p. 211) “a coordenação das ações obtidas por experiências lógico-matemática, mediante progressivas abstrações reflexionantes – pseudoempíricas ou refletidas – encontra-se presa ao objeto concreto”. E, somente,

> na continuidade da experiência lógico-matemática, mediante novas abstrações reflexionantes, o pensamento liberta-se das continências do real

> e passa a operar no plano dos possíveis (o real passa a ser uma entre muitas possibilidades). Uma nova forma de coordenação engloba os agrupamentos, antes dispersos, num sistema único (numa totalidade) no qual as compensações adquirem um caráter de necessidade (BECKER, 2010, p. 211).

De modo geral, percebemos que o uso do material dourado (objeto concreto) como recurso didático enriquecedor do meio (sala de aula), trouxe novas perspectivas de aprendizagem que apenas o livro didático e o quadro branco não conseguem promover. Quando manipulavam as peças do material e dialogavam com o professor, os estudantes conseguiram não só abstrair as propriedades físicas do objeto concreto (material dourado), mas, mediante abstrações reflexionantes, resultantes da interação com o meio didático, conseguiram coordenar suas ações e realizarem operações lógicas de comparação, correspondência, ordenação e seriação, resultando na inferência de propriedades aos objetos, considerando-os agora como uma dentre várias possibilidades de representar números.

Isso nos confirmou a possibilidade de ampliarmos o conceito de ordem e classe, com o auxílio do material concreto, para números maiores. Nesse sentido, propomos aos estudantes para a próxima atividade, a construção de números com mais de duas classes, usando dois kits diferentes de material dourado.

4.1.3. Ampliando o conceito de ordem e classe

Na atividade 03 desenvolvida pela estratégia da sequência didática, a proposta metodológica da aula é que os estudantes, em duplas, usando dois kits diferentes de material dourado (um com peças plásticas coloridas e outro com peças de madeira) e fichas de papel contendo números com três algarismos, construam de forma coletiva e dialogada, representações de números com até quatro classes, ou seja, até a classe de milhão a fim de ampliar os conceitos de ordem e classe já estudados e, introduzir o conceito de valor posicional. Além disso, exercitar a leitura de números grandes e aprimorar a linguagem matemática.

Do ponto de vista da pesquisa, tendo como perspectiva a construção do conhecimento, espera-se que a partir das interações com o as situações didáticas propostas, incluindo a relação professor-estudante e suas concepções, seja possível construir esquemas mentais responsáveis pela representação de números formados por quatro classes (ou mais) e o conceito de valor posicional, usando o material dourado como objeto do conhecimento, além de verificar e analisar os mecanismos cognitivos envolvidos no processo de construção e aquisição desses conhecimentos, em especial a tomada de consciência da seriação.

Ramozzi-Chiarottino, interpretando Piaget, entende que:

> As interações caracterizadas pelas trocas entre o organismo (sujeito epistêmico) e o meio, são responsáveis por construir estruturas mentais específicas para o ato de conhecer, ou seja, "a capacidade de conhecer é fruto de *trocas* entre o sujeito e o meio". (1988, p. 6).

Significa dizer que o conhecimento não está no sujeito, nem tampouco no objeto, mas é construído em decorrência das contínuas interações entre os dois, contrariando as concepções empiristas do ser passivo, e, inatista do ser pré-formado. Na concepção construtivista, portanto, o sujeito interage com o meio e nesta interação constrói o conhecimento através de descobertas e invenções.

Nesse sentido, no desenvolvimento da atividade, cada dupla de estudantes escolheu uma ficha contendo um número de três algarismos, (correspondente a cada uma das classes do "número grande" que seria construído) e, em seguida, com o uso do material dourado, uma dupla de cada vez, representou sobre a mesa uma classe, começando pela classe das unidades simples, especificamente pela ordem das unidades simples, acrescentando cada ordem seguinte sempre à esquerda da anterior. Enquanto, representavam o número com o material dourado, os estudantes explicavam, passo a passo, sua produção.

Figura 18: Construção das classes e descrição das produções

Fonte: Dados da pesquisa empírica

As manifestações orais dos estudantes enquanto descrevem ao professor e aos demais colegas suas produções, permitiram-nos categorizar as etapas do desenvolvimento das atividades, revelando-nos elementos importantes para os propósitos desta pesquisa sobre os processos cognitivos envolvidos. Eis os registros no quadro a seguir:

Quadro 18: Categoria “Construção das classes”

Categoria: Construção das classes
Classe das unidades simples – ficha 231 – número representado: 231
Ro – *Eu vou usar um bloquinho, eu cada um deles equivale a uma unidade, ai eu vou usar três barras, uma barrinha delas tem dez [...] essa aqui é a unidade simples e essa que eu coloquei agora é a dezena simples [...] vou usar duas placas pra fazer a centena simples [...] aí eu construí o número duzentos e trinta e um [...] a classe das unidades simples.*
Classe de milhar – ficha 302 – número representado: 231.302
Ka – *Eu vou precisar de duas unidades, dois cubinhos pra representar a unidade... unidade de milhar; aqui tem o zero, mas eu não vou deixar o zero pra traz, ele também é um número, então eu vou deixar um espaço [...] agora eu vou pegar três centenas... três placas pra representar o trezentos [...] da centena de milhar[...] o número que ficou aqui foi trezentos e dois da classe de milhar.* *[...] trezentos e dois mil, duzentos e trinta e um.*
Classe de milhão – ficha 125 – número representado: 231.302.125
Ke – *Pra representar cinco unidades de milhão, vou pegar cinco cubinhos;* **Fr** – *Pra representar a dezena de milhão, eu vou pegar duas barras pra representar o vinte;* **Ke** – *Pra representar a centena de milhão, eu vou pegar... eu vou usar uma “barra”* (quer dizer placa) *pra representar o cem; e o número formado é cento e vinte e cinco.* **Ke** – *[...] cento e vinte e cinco milhões, trezentos e dois mil, duzentos e trinta e um.*
Classe de bilhão – ficha 316 – número representado: 231.302. 125. 316
St – *Pra eu formar é... a... unidade de bilhão, eu vou precisar de seis cubinhos;* **Ha** – *[...] pra formar o número da dezena, eu vou pegar uma barra [...] é a dezena de bilhão;* **St** – *[...] vou pegar três placas pra formar a centena de bilhão; o número que eu formei foi o trezentos e dezesseis bilhões;* **St** – *[...] trezentos e dezesseis bilhões, cento e vinte e cinco milhões, trezentos e dois mil, duzentos e trinta e um.*

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Do ponto de vista didático-pedagógico, ficou evidente em todas as atividades que o material dourado contribuiu para despertar o interesse dos estudantes e motivá-los na execução das tarefas, tornando as aulas mais dinâmicas e interessantes e, favorecendo a aprendizagem matemática. Ao fazer relações entre o objeto concreto e entes matemáticos os estudantes tiveram a oportunidade de perceber que a matemática pode ser concebida de maneira prática e que conceitos matemáticos são abstraídos dessa relação.

Por exemplo, os cubinhos no início, são unidades simples na primeira classe, depois por meio da coordenação das ações, relacionada ao processo de abstração reflexionante, amplia-se o conceito para unidade de milhar, de milhão, de bilhão etc, de acordo com a classe a que pertencem. A mesma coisa acontecendo com as barras e as placas, criando o que Becker chama de modelo matemático, “uma construção (constructo) realizada mediante abstrações feitas a partir das ações e das coordenações das ações do sujeito e não diretamente do fenômeno físico; é claro que isso se faz assimilando características do objeto” (BECKER, 2012, p. 21).

De outra forma, ao agirem sobre as peças do material dourado relacionando-as com as ordens e as classes correspondentes, os estudantes conseguem abstrair propriedades que vão além das características físicas do objeto, modificando-o e adaptando-o conforme a necessidade. Quando os estudantes afirmam, por exemplo: **(St)** “***Pra eu formar é... a... unidade de bilhão, eu vou precisar de seis cubinhos***” ou (**Fr) “*Pra representar a dezena de milhão, eu vou pegar duas barras pra representar o vinte”,*** estão atribuindo ao cubinho e a barra uma nova propriedade, transformando-os em unidade de bilhão e dezena de milhão, respectivamente.

Nesse processo de transformação do objeto, os estudantes vão da abstração empírica à abstração reflexionante, como explica Becker:

> A abstração empírica (empirique) apoia-se sobre observáveis dos objetos e das ações em suas características materiais; portanto, sobre aquilo que pode ser observado ou aquilo que o objeto ou as ações em suas características materiais possuíam antes de o sujeito agir sobre ele. Enquanto a reflexionante apoia-se ela sobre as coordenações das ações do sujeito. Estas acontecem no mundo endógeno, portanto não podem ser observadas, apenas inferidas (2012, p. 36).

Essa capacidade de abstração que os estudantes apresentaram nesta atividade está de acordo com a fase de desenvolvimento cognitivo das operações formais, proposta por Piaget que começa a partir dos 12 anos de idade, onde um dos atributos principais dos indivíduos é a reversibilidade, ou seja, a capacidade de operar ao nível do pensamento lógico, partindo da coordenação das ações causais.

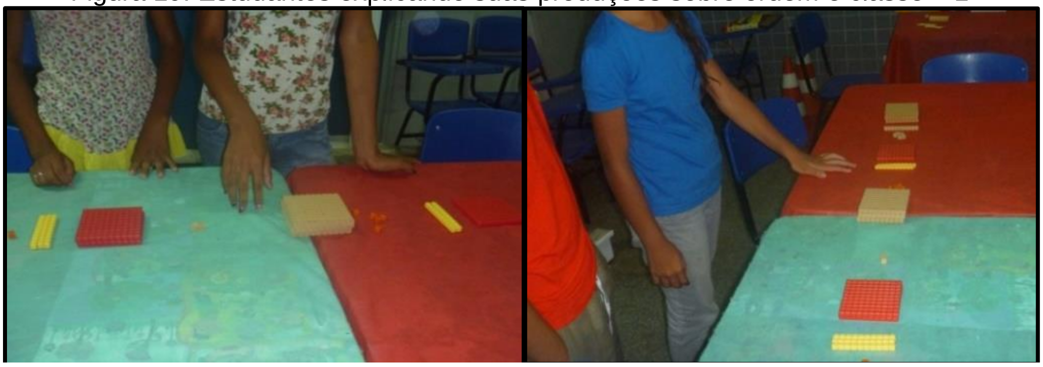
Nesse sentido, reportando-nos ao contexto escolar, acreditamos que a aprendizagem matemática na perspectiva de construção do conhecimento só logrará êxito se puder contar com uma lógica, previamente construída. Essa lógica provém das coordenações das ações do sujeito, mediante processos de reflexionamentos e reflexões, ou de abstração reflexionante. Segundo Becker:

> Para conseguir êxito nessa construção, o sujeito tem que se apropriar de suas ações; primeiramente de seus esquemas, depois, das coordenações de seus esquemas ou coordenações de suas ações; mais adiante, dos subsistemas de esquemas, assimilando-os uns aos outros. È esse o caminho da formação de estruturas logico-matemáticas com as quais poderá apropriar-se dos conhecimentos da ciência da logica e da ciência da matemática e, mais tarde, fazer lógica, matemática ou qualquer outra ciência (2012, p. 37).

Nessa perspectiva podemos afirmar o caráter central do diálogo no processo pedagógico e na construção do conhecimento, ao favorecer a interação, a mobilização e o “focar” os objetos do conhecimento que constituem a aprendizagem escolar, como os conteúdos e conceitos da matemática. Nesse sentido, após a construção das classes e, portanto, da representação do número com o material dourado, iniciou-se um momento de perguntas e questionamentos, buscando evidenciar os mecanismos de tomada de consciência dos estudantes sobre suas ações realizadas com e sobre as peças do material dourado, especialmente, quanto aos conceitos de ordem, classe e valor posicional.

Do ponto de vista didático-metodológico, esse momento caracteriza-se, segundo Brousseau (2008, p. 29), como uma situação de formulação. Nessa situação, segundo o autor, a formulação de um conhecimento corresponde à capacidade do estudante em retomar, reconhecer, identificar, decompor e reconstruir em um sistema linguístico o conhecimento formulado e comunicá-lo a um ou mais sujeitos (efetivo ou fictício) envolvidos no *meio* que lhe exige a formulação. A estrutura correspondente ao diálogo pedagógico – a interação orientada sobre objetos e ações definidas - é o grande motor desse processo.

Figura 19: Estudantes explicando suas produções sobre ordem e classe – 1



Fonte: Dados da pesquisa empírica

Quanto aos mecanismos de tomada de consciência, destacamos, de antemão, que quando se trata de uma coordenação operatória, como a que intervém na seriação, segundo escreve Piaget, esta pode ser interpretada de três maneiras, quanto a suas relações com a conceituação consciente:

> 1) Ou se trata de uma coordenação de ações, mas dirigida pela conceituação, de tal forma que todas as operações em jogo são conscientes, inclusive suas composições coordenadoras, que precederiam então as ações efetivas; 2) ou a coordenação se efetuaria no plano das ações e a conceituação somente depois derivaria dela, na medida em que

> fossem ocorrendo tomadas de consciência que não são de forma alguma imediatas; 3) ou, então, finalmente, a coordenação se efetuaria ao mesmo tempo ao nível da ação e ao da conceituação, as ações em jogo sendo permanentemente acompanhadas de relações conscientes (1978, p. 184).

Por isso, para melhor compreensão separamos os diálogos em categorias observando a natureza do conceito matemático abordado e as respostas iniciais comunicadas pelos estudantes sobre este conceito, seja com tomada de consciência imediata ou com ajustes ulteriores. No primeiro caso, além da seriação propriamente dita, buscamos explicitar a tomada de consciência das ordens onde há um espaço vazio, representadas simbolicamente por zero. Eis os exemplos:

> Diálogo com a estudante Ha: – *Quantas classes tem esse número?* – ***Quatro***. – *E quantas ordens?* – ***doze***. – *Qual o algarismo Ha, que está na dezena de milhar? Me aponta.* – ***Zero***. – *Por que você conclui que é o zero?* – ***por que não tem nenhum aqui***. – *Não tem o quê?* – ***não tem nenhum algarismo***. – *Não tem nenhuma barra, estamos usando o material dourado... Qual é o algarismo que está na centena de milhão?* – ***um*** (a estudante apontou uma placa que estava na ordem da centena de milhão).
>
> Diálogo com os estudantes Ke e Fr: – *Fr me diz, me aponta, qual é a quinta ordem desse número? E, me diz qual é o algarismo que está aí?* (Fr) – ***Trezentos.*** – *Você concorda com ele Ke que aí é a quinta ordem?* (o estudante olhou bem pra disposição das peças, antes de responder) (Ke) – ***Sim***. (o professor fazia perguntas que os conduzissem à tomada de consciência da seriação) – *O quê que tem entre unidade e centena? Depois da unidade já vem a centena?* (Ke) – ***não.*** – *O que tem no meio, entre a unidade e a centena?* (Ke e Fr) – ***Dezena***. – *E quantas tem?* (Ke e Fr) – ***nenhuma***. – *Isso significa o quê?* (Ke e Fr) – ***Zero***. – *Então, eu volto a perguntar. Qual é o algarismo que está na quinta ordem?* (Ke e Fr) – ***é o zero***.
>
> Diálogo com estudante Ka: – *Vamos lá com a Ka. Ka por favor, mostra pra nós, qual o algarismo da sétima ordem?* – ***é a dezena, de milhão***. – *É a dezena de milhão, tem certeza?* – ***é o dois***. – *Não é o dois não. Algarismo da sétima ordem?* – ***Ah é o cinco.*** – *Como você percebeu que é o cinco? O que você fez? O que faltou na primeira oportunidade quando você contou as ordens, que você percebeu agora?* – ***Que eu esqueci de contar com o zero.***

Nos diálogos descritos acima, evidencia-se a tomada de consciência dos sujeitos, quanto à seriação dos algarismos na composição simbólica dos números o que implica na conceituação de ordem e classe. No caso da estudante Ha, a tomada de consciência é imediata, pois mesmo na ausência das barras na classe de milhar (número 302), quando indagada sobre o algarismo da dezena de milhar, afirmou com segurança que é o zero e, justificou: – ***por que não tem nenhum aqui*** *[...]* ***não tem nenhum algarismo***. Ou seja, mediante sucessivas abstrações reflexionantes, a estudante percebeu que o espaço vazio também é uma ordem e que o algarismo que o ocupa é o zero.

A este respeito, conforme Piaget é importante esclarecer que:

> Do ponto de vista da ação, é claro que para ser bem sucedido de imediato numa seriação, sem cometer erros de localização e sem correções posteriores, não basta procurar elementos cada vez maiores (ou menores), mas, é necessário que o novo elemento escolhido seja ao mesmo tempo maior que os precedentes e menor do que cada um dos seguintes. Para que isso ocorra, o sujeito dispõe de dois processos equivalentes: ou compara esses elementos com cada um dos outros ou, antes de colocar um elemento, julga da distância em relação ao precedente para ver se não há lugar para um intermediário que preencha a condição dessa dupla relação (1978, p. 189)

De outra forma, considerando A = unidade de milhar, B = dezena de milhar e C = a centena de milhar, a estudante Ha conseguiu estabelecer a relação $A < B < C$, sendo essa a razão da tomada de consciência, pois mesmo percebendo que na posição B não constava nenhuma placa, não ignorou o espaço vazio citando, por exemplo, a ordem anterior ou a posterior – ocupada por cubinhos ou placas, respectivamente – mas, ao contrário, logo conclui que o algarismo que simboliza essa ordem é o zero.

Já os estudantes Ke, Fr e Ka, precisaram da mediação do professor, pois a princípio, conforme nossa interpretação, o foco dos estudantes estava somente nas ordens onde havia peças do material dourado (objeto concreto), não conseguindo, porém, assimilar ou abstrair o espaço vazio – sem barras, isto é, sem objeto concreto – entre os cubinhos e as placas como a ordem das dezenas de milhar, a qual simbolicamente, poderia ser representada pelo algarismo zero. Ao contrário da estudante Ha não perceberam de imediato a relação $A < B < C$.

Em casos como esse, Becker explica que:

> A ação do sujeito busca um objetivo. Esta busca resulta em êxito ou fracasso, que são constatações conscientes. A busca do motivo do fracasso leva o sujeito a tomar consciência das regiões mais centrais da ação: verificando no objeto um resultado frustrado, o sujeito vai buscar saber em que o esquema não se adaptou ao objeto; verificando a finalidade ou direção da ação, procurará fazer as devidas correções (2010, p. 164).

Assim, por meio da relação dialógica com o professor, questionando e explorando os conceitos preliminares de unidade, dezena e centena (já construídos nas atividades anteriores), os estudantes finalmente conseguiram organizar-se cognitivamente na coordenação de suas ações e, mediante sucessivas abstrações, chegam à tomada de consciência do espaço vazio entre os cubinhos (unidades de milhar) e as placas (centenas de milhar), como sendo a ordem da dezena de milhar, e, que a ausência de barras poderia ser representada pelo zero, como concluiu a estudante Ka ao tomar consciência do erro: ***Ah é o cinco*** *[...]* ***Que eu esqueci de contar com o zero***.

A fala da estudante explicita a tomada de consciência do espaço vazio como uma das ordens da seriação A < B < C, mesmo na ausência de um objeto concreto que a representasse. Becker salienta que “a tomada de consciência tem inicio com objetivos e resultados de uma ação; só aos poucos o sujeito toma consciência de fatores internos, seja do sujeito (coordenação das ações), seja do objeto (causa e efeito)” (2010, p. 164). Significa dizer que o objetivo primeiro dos estudantes foi dar uma resposta à pergunta do professor, sem a necessária reflexão; daí “enxergarem” apenas as ordens ocupadas por peças do material dourado, ou seja, a periferia do sistema exposto.

Nas descrições a seguir organizamos as categorias considerando, principalmente, as evidencias de tomadas de consciência imediatas ou com ajustes posteriores, referentes ao conceito de valor posicional, além dos conceitos de ordem e classe já comentados anteriormente; sendo que, antes de tudo, foi necessário a tomada de consciência da seriação. Eis o primeiro exemplo:

> Diálogo com a estudante St: – *St, me diz qual o valor posicional da unidade de milhão?* – ***é o cinco*** (a estudante apontou os cinco cubinhos). – *Qual o valor posicional desse cinco?* – ***É cinco unidades de milhão***. – *Essa é a ordem. O valor posicional é cinco milhões.* (O professor insistiu com a estudante, instigando-a a responder). – *Agora, qual o valor posicional da centena de milhar?* – ***três.*** – *Esse é o algarismo que está na centena de milhar. Qual é o valor posicional?* – ***três milhões.*** – *Será que é três milhões?* – ***três mil.*** – *Será que é três mil? Ele não é unidade, ele é centena.* (na quarta tentativa a estudante St respondeu corretamente): – ***Trezentos mil.***

No caso da estudante St, quando indagada sobre o valor posicional dos algarismos representados pelos cubinhos e pelas placas que ocupavam, respectivamente, as ordens das unidades de milhão e das centenas de milhar, a dúvida apresentada não estava na seriação dos algarismos (relação do tipo A < B < C), pois a estudante respondeu corretamente cinco e três, na primeira e na segunda oportunidades.

Isso nos levou a considerar, a princípio, que pelo fato de ter sido a primeira a responder ao professor, a possibilidade da causa das dúvidas apresentada pela estudante, estivesse associada à falta de familiaridade com o termo “valor posicional”, visto que os outros sujeitos que responderam depois, aos questionamentos do professor, não cometeram o mesmo erro. Pois, conforme Piaget:

> No caso de ações particulares de natureza causal, seu êxito precede em geral, sua tomada de consciência e a conceituação que constitui esta última (e se inicia a partir dos resultados do ato) não é, primeiramente, só lacunar, mas com frequência também deformante porque sujeitas a ideias preconcebidas que influenciam a leitura dos dados atuais de observação [...] (1978, p. 179).

Do ponto de vista lógico, nas duas oportunidades a dúvida da estudante St está associada às relações de correspondência. No primeiro caso, na correspondência entre o algarismo e o seu valor posicional, pois quando indagada sobre o valor posicional do cinco, representado por cubinhos, a estudante St responde na primeira tentativa, o próprio algarismo: ***é o cinco***; e na segunda tentativa, a ordem: ***É cinco... unidades de milhão***. No segundo caso, na correspondência entre o valor posicional e a ordem, pois quando indagada sobre o valor posicional da centena de milhar, representada por três placas, a estudante errou as três tentativas.

Na terceira tentativa sem sucesso, quando a estudante St respondeu: ***três mil***, o professor questionou: – *Será que é três mil? Ele não é unidade, ele é centena.* Finalmente, a estudante St conseguiu estabelecer a correspondência correta entre a ordem e a classe em questão e, na quarta tentativa conseguiu êxito, ao responder: ***Trezentos mil***. Observamos que a relação dialógica pautada na ação e reflexão favoreceu a tomada de consciência da estudante, por meio da coordenação das ações em busca da resposta correta.

Nesse sentido, Piaget (1879, p. 179) conclui que:

> As coordenações que levam a corrigir a leitura conceituada e a ultrapassá-la no sentido da explicação tiram seus elementos iniciais das coordenações gerais da ação por meio de uma abstração refletidora, cujas fontes podem escapar à consciência, esta intervindo, em contrapartida, nas reorganizações reflexivas a que conduzem essa abstração e essas coordenações (1879, p. 179).

Quanto aos outros casos, a tomada de consciência conceituada da seriação foi quase que totalmente imediata, ou seja, sem correções ulteriores, não houve hesitação por parte dos sujeitos quando responderam sobre o número de ordens e de classes que compõem o número representado pelo material dourado, e nem quanto ao valor posicional de qualquer algarismo representado por cubinhos, barras ou placas, revelando domínio sobre as coordenações da ação interiorizada, o que implica em conceituação.

Figura 20: Estudantes explicando suas produções sobre ordem e classe – 2

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Eis os registros dos diálogos:

> Dialogo com a estudante Th: – *Th me diga quantas classes tem o número representado pelo material dourado?* – ***Quatro***. – *Qual é o algarismo Th que está na dezena de milhão?* – ***dois*** (a estudante respondeu apontando as duas barras que estão naquela posição). – *E qual o valor posicional desse dois?* – ***Vinte milhões. –*** *Tá vendo, basta conhecer as classes.*
>
> Diálogo com o estudante Ro: – *Agora Ro me diz qual o algarismo que está na dezena de bilhão?* – ***um*** (respondeu apontando a barra). – *E qual é o valor posicional dele?* – ***dez bilhões***. – *Dez bilhões. Ok.*
>
> Diálogo com o estudante Ke: – *Qual é o algarismo que está representado na sétima ordem, Ke?* – ***cinco***. – *E qual é o valor posicional desse cinco Ke?* – ***cinco milhões***.
>
> Diálogo com o estudante Fr: – *Vamos ver Fr me diz aí, qual é o algarismo que está na dezena de bilhão?* – ***É o um*** (o estudante respondeu apontando a barra que estava naquela posição). – *Agora me diz, qual é o valor posicional dele?* – ***Dez bilhões***. – *Dez bilhões. Ok.*
>
> Diálogo com a estudante Ka: – *Então, qual é o algarismo da sétima ordem?* ***– é o cinco*** (a estudante respondeu firme, apontando os cubinhos). – *E qual é o valor posicional dele?* – ***Cinco milhões*** (estudante respondeu com segurança). – *Ka qual é o algarismo da décima segunda ordem?* – ***É o trezentos*** (a estudante apontou as três placas que estavam naquela ordem). – *Não, não é trezentos. È nessa posição mesmo que você apontou, mas eu quero saber qual é o algarismo?* – ***três***. – *Ok. Agora eu pergunto a você, qual o valor posicional desse três?* – ***Trezentos bilhões.*** – *Trezentos bilhões. Ok*.
>
> Diálogo com a estudante De: – *Quantas classes tem De?* – ***quatro.*** – *Quais são os nomes das classes De, fala pra nós de forma ordenada a partir da primeira classe?* – ***Unidade simples...*** – *Vai mostrando, vai apontando cada classe* (refere-se às peças do material dourado). – ***Classe das unidades simples, classe de milhar, classe de milhão e classe de bilhão*** (a estudante respondeu apontando as peças do material dourado correspondente a cada classe)***.*** – *Ok.*

> *Assim mesmo, apontando cada classe. É isso aí. É assim que eu quero ver... Agora De me diz uma coisa, qual é o algarismo que está na centena de milhão?* – ***Um*** (a estudante observou bem e, respondeu apontando a placa que estava naquela posição). – *Qual o valor posicional desse um, De?* – ***cem milhão*** (a estudante observou com muito cuidado, antes de responder). – *Isso aí De*.

Em geral, percebemos um avanço conceitual e linguístico dos sujeitos, o que nos pareceu perfeitamente compreensível, por tratarmos com sujeitos do nível das operações formais, os quais, segundo Piaget (1978, p. 179), dispõem de estruturas cognitivas operatórias suficientemente desenvolvidas para intervir por meio de uma coordenação geral reversível e transitiva que reúne num todo as ações particulares. Nos casos citados acima,

> a lição que nos dão esses sujeitos é que a tomada de consciência conceituada, obtida ao nível de ações tão bem coordenadas, apresenta uma dupla natureza conforme se trate da descrição das ações particulares sucessivamente executadas, ou das relações de que se tornaram possuidores em função da coordenação dessas ações (PIAGET, 1978, p. 190).

Para finalizar a atividade 03 aplicamos um teste avaliativo sobre ordem e classe composto de quatro questões, sendo duas contextualizadas a situações reais envolvendo leitura e interpretação (ver anexo B). A intenção foi avaliar o processo recíproco de ensino e aprendizagem de matemática: de um lado, os avanços e limitações dos estudantes em relação aos conceitos abordados; de outro lado, as implicações, possibilidades e limitações da proposta didática, (configurada em aulas expositivas e dialogadas com uso de material concreto – material dourado e ábaco – e recurso áudio visual) para a aprendizagem e construção do conhecimento matemático, especialmente, quanto a tomada de consciência da seriação e, consequentemente, a construção dos conceitos de ordem, classe e valor posicional.

Podemos afirmar que com a realização das atividades 02 e 03, foi possível explicitar por meio das descrições feitas pelos estudantes os mecanismos de tomadas de consciência conceituada da seriação, nele implícitos os conceitos de ordem, classe e valor posicional, os quais foram confirmados com os registros das respostas bem sucedidas do teste diagnóstico. Esses resultados positivos implicam na compreensão das ações, não apenas em grau suficiente para atingir os fins propostos, mas, para além do fazer mecânico ou da ação automatizada, "conseguir dominar em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação ao porque e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação” PIAGET (1974, p. 176).

4.1.4. Construção do algoritmo da adição com números naturais

Na atividade 4 abordamos a adição com números naturais. O objetivo desta atividade foi favorecer a construção do algoritmo da adição com e sem reserva usando a estratégia das situações didáticas com o auxílio do material dourado. É claro que para chegarmos a essa construção, precisamos contar com as relações lógicas descritas nas páginas 91 e 92, pois, “operar com números naturais é uma atividade mental que permite estabelecer certas relações entre os números” (KESSELRING 1990, p.15).

De início, apresentamos para os estudantes, em Power point, o passo a passo do algoritmo da adição, usando o material dourado, conforme constava no planejamento da sequência didática; complementando, em seguida, com um vídeo, onde pausadamente, fizemos a demonstração de uma adição com reserva (quando “vai um”) usando o material dourado e, registrando no papel cada passo do processo, a fim de mostrarmos aos estudantes alguns pontos do algoritmo desta operação que, apenas a prática de resolução de contas no caderno ou no quadro branco não consegue ou não é suficiente para contemplar, por isso muitas vezes não são percebidos, e, consequentemente, não são compreendidos.

Antes de começarem a somar com o material dourado cada equipe de estudantes, mediados pelo professor, confeccionou uma tabela, a qual os ajudaria na organização e identificação dos elementos da adição – parcelas, soma ou total – e, consequentemente, numa melhor compreensão do algoritmo desta operação. A proposta metodológica para o desenvolvimento das atividades consistiu na execução de tarefas paralelas e até mesmo simultâneas, onde cada equipe de estudantes, na sua vez, enquanto efetuava a adição com o material dourado, registrava no papel o resultado de cada movimento executado, ao mesmo tempo em que explicava verbalmente passo a passo suas produções, ou seja, a sequencia de suas ações com o material dourado.

Sob a perspectiva construtivista adotada, a utilização didático-pedagógica das sequencias didáticas visaram tanto favorecer a tomada de consciência das ações, quanto à mobilização dos estudantes para que fizessem a si mesmos “as perguntas que são de domínio do professor – tão importantes quanto as respostas – e, dentro do possível, que os conhecimentos façam sentido" (BROUSSEAU, 2008, p. 92). De outra forma, a partir da coordenação das ações físicas em contato com o material concreto, visamos investigar os mecanismos cognitivos de abstração e de tomada de consciência, por meio dos quais os estudantes chegaram à operação como processo, no plano conceitual do pensamento. Pois,

> as coordenações das ações, por serem materiais, são anteriores e autônomas com relação à conceituação: elas "procedem simultaneamente de um em um, o que garante uma acomodação contínua no presente [...] São também, por isso mesmo, limitadas, pois, a certa altura, o pensamento precisa necessariamente completa-las, dirigi-las e substituí-las; não consegue fazer inferências sobre o futuro, o espaço distante e o possível; numa palavra, não trabalha com hipóteses (BECKER, 2010, p. 158).

Os registros que seguem referentes às manifestações orais dos estudantes, quando descrevem suas produções, permitem-nos categorizar os processos cognitivos envolvidos na realização das atividades, especialmente as relações entre as estruturas lógicas do pensamento cognitivo e as estruturas logicas do conhecimento matemático, como as indicadas na página 91 e 92. No primeiro caso, buscamos explicitar a tomada de consciência da seriação e as relações lógicas de comparação e correspondência entre os algarismos que compõem os números e as peças do material dourado. Eis os exemplos:

> Descrição da estudante St: – ***Bom dia a gente vai falar da adição sem reserva; primeiro a gente... Os números são duzentos e trinta e dois e quatrocentos e vinte e cinco; a gente usou duas placas de cem pra formar duzentos; três placas (barras) de dez para trinta; e dois cubos pra dois... De... Duas unidades. E, a gente usou quatro placas de cem para quatrocentos, duas barras de dez para vinte, e, cinco cubos (cubinhos) para cinco unidades****. – Quais são os números que você representou aí, então?* – ***Representei o duzentos e trinta e dois e o quatrocentos e vinte e cinco. –*** *Ok. Como é que começa a somar?* ***– Agora minha colega Ka vai falar da soma das unidades.***
>
> Descrição da estudante Ka: ***– Aqui na unidade simples tem dois cubinhos que forma o dois, e aqui tem cinco que forma o cinco; você vai juntar aqui esse... Como é uma sem reserva não vai subir nem um número... Deu sete, por que dois mais cinco é sete... Deu sete, sete unidades simples... Agora minha colega St vai somar as dezenas.***

Antes de qualquer análise ou discussão, destacamos que a relação dialógica aqui estabelecida atende um dos objetivos da proposta didática e, portanto, da pesquisa, qual seja discutir a importância da manifestação oral dos estudantes como condição necessária à aprendizagem matemática. Por isso, no momento em que a estudante Ka convida a colega St que já participou para explicar o próximo passo da operação, o professor interviu e propôs que outra colega (duas estudantes não haviam participado) continuasse a explicação, pois era necessário que todos falassem.

Epistemologicamente, buscamos superar a barreira cultural do silêncio imposta nas aulas de matemática pelo modelo tradicional de ensino, onde há pouco ou nenhum diálogo entre o professor e os estudantes; onde ao estudante, quase sempre, é negado o direito de falar, de expressar sua opinião; onde o estudante é mero receptor e, por medo de errar não consegue falar. Para Freire (1980, p.92), "não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão". E, conclui: "a existência, porque humana, não pode ser muda, silenciosa nem tampouco pode nutrir-se de falsas palavras, mas de palavras verdadeiras, com que os homens transformam o mundo".

Enquanto educador, esperamos, concordando com Brousseau (2008, p. 96), que nesse movimento simultâneo entre ação física, mental e verbal cada estudante aprenda – pois precisa e, é necessário aprender – a responder quando tiver certeza de sua resposta ou a perceber que não tem certeza. E, nas sucessivas etapas das produções feitas com o material dourado, aproveitar, inclusive, as ideias apresentadas por outros colegas que julgar boas. Daí ser importante que todos os estudantes sejam envolvidos na situação didática, e, principalmente, que tenham liberdade e autonomia para manifestar-se oralmente.

Assim sendo, as estudantes Kr e Ha seguem com a explicação:

> Descrição da estudante Kr: ***– Bom, aqui nós temos três barras de dez que formam trinta, e duas barras de dez que formam vinte; a gente... A gente vai juntar as cinco barras que vai formar cinco... Que vai dar igual a cinco***.
>
> Descrição da estudante Ha: ***– Bom dia eu vou pegar as placas de... Que tem cem, cada uma tem cem, aí eu vou juntar elas, aí fica seis... Juntando elas fica seiscentos.*** – *E aí, quanto ficou?* (estudantes St, Ka, Kr e Ha) ***– Seiscentos e cinquenta e sete.***

Quando a estudante Ka diz: ***Aqui na unidade simples tem dois cubinhos que forma o dois, e aqui tem cinco que forma o cinco; você vai juntar aqui esse [...] Deu sete, por que dois mais cinco é sete... Deu sete, sete unidades simples...*** ou quando a estudante Kr diz: ***aqui nós temos três barras de dez que formam trinta, e duas barras de dez que formam vinte; a gente... A gente vai***

juntar as cinco barras que vai formar cinco... Que vai dar igual a cinco [...] estabeleceram, quase que simultaneamente, relações lógicas de comparação e correspondência entre as peças do material dourado e o algarismo a ser representado; de seriação, ao somar primeiro as unidades, depois as dezenas e, por último as centenas; e, de classificação e correspondência, ao juntarem peças iguais.

A noção de adição aqui apresentada, só foi possível graças a estrutura de totalidade, constituída ainda na fase das operações concretas dos sujeitos, e que reúne em si propriedades ou operações que caracterizam as ações do sujeito, ao lhe permitirem fazer agrupamentos. A principal delas pra esse momento é a operação direta "constituída por ações (classificação) que, compostas entre si, produzem um mesmo resultado e cuja ação inversa faça parte do mesmo sistema" (BECKER, 2010, p. 195). Exemplificando:

> Trata-se de todas as ações que consistem em reunir (ou dissociar) elementos num todo: se A constitui um elemento e A' um outro, temos A + A' = B; prosseguindo, podemos reunir B + B' = C e assim por diante. A operação pode também ser constituída por ações que buscam dispor elementos segundo uma "ordem de diferenças graduais" (seriação), ou dissociá-los; se à diferença *a* acrescenta-se a diferença *a'*, temos a + a' = b; b + b' = c e assim por diante (BECKER, 2010, p. 195).

Por tratar-se de uma abordagem didática diferente e nova para os sujeitos da pesquisa, no início das atividades envolvendo operações aritméticas com o auxílio do material dourado, o professor mostrou-se muito atento ao comportamento dos estudantes, e, sempre que necessário ajudou-os na conclusão das tarefas. Quando intervia, o professor orientava os estudantes para que atentassem às correções feitas, principalmente, quanto à importância de se fazer as considerações finais ao término de cada produção a fim de que caminhassem da periferia para o centro das coordenações da ação e do objeto concreto até a tomada de consciência do que estavam fazendo; passando, assim, da ação à conceituação.

Para Brousseau (2008, p. 52), as intervenções do professor enquanto mediador do processo de ensino e aprendizagem são importantes e necessárias no processo de construção do conhecimento matemático, e, destaca que modelos amplos de situação didática como este proposto para esta pesquisa, são indispensáveis no ensino de matemática, exatamente por incluírem as ações do professor.

O autor salienta que a intervenção didática do professor é que permite identificar conhecimentos canônicos no que o estudante, ou os estudantes, conceberam em situações autônomas. O *status* de conhecimento institucionalizado não pode advir [apenas] das situações, visto que nelas – para o estudante – a intenção didática está dissimulada (BROUSSEAU, 2008, p. 51); precisando, portanto, da mediação do professor.

Nesse sentido, a expectativa que temos é que a cada tarefa realizada, as dificuldades sejam minimizadas ou superadas e, que haja progresso na aprendizagem matemática dos estudantes. Não uma aprendizagem que se resume apenas a preparar para fazer testes e provas, mas, na perspectiva de construção do conhecimento matemático, ou seja, que incida sobre as estruturas, os esquemas de ação e a vida dos estudantes; o que só é possível a partir da ação dos estudantes sobre o objeto do conhecimento, isto é, na interação com o meio didático no qual está inserido, nele incluídos o professor e os recursos didáticos utilizados.

Nessa perspectiva, continuamos a aula com a produção da equipe formada pelos estudantes Fe, Th, Ma e De. Como nos registros a seguir:

> Descrição do estudante Fe: ***– A gente vai representar uma conta com os números... Trezentos e quarenta e três, mais duzentos e doze; eu vou representar o número trezentos e quarenta e três. Eu precisei pegar três placas cada uma vale cem... Pra representar trezentos; e eu precisei pegar quatro barras cada uma vale dez pra representar o quarenta; e três cubinhos pra representar o três. Agora a Débora vai explicar...***
>
> Descrição da estudante De: – *Qual é a próxima parcela?* ***– Duzentos e doze. Cada uma dessas placas tem cem cubinhos... Que representa duzentos; aqui uma barra que vale dez; e... e dois cubinhos pra representar o dois... duzentos e doze [...] Eu vou juntar... eu vou começar... pelas unidades simples; eu vou juntar aqui três com dois, vai ficar cinco unidades e não sobra nenhum*** (o professor orientou a estudante à registrar no papel o resultado de sua ação); ***agora eu vou representar as dezenas...*** O professor interviu: – *eu vou somar...* A estudante completou: ***– eu vou somar agora as dezenas, eu vou juntar os quarenta com os dez, vai ficar... cinco... então vai ficar cinquenta. Aqui eu vou representar as centenas...*** O professor interviu novamente: – *agora eu vou somar as centenas.*
>
> Descrição da estudante Th: ***– Aqui tem três... três placas, e aqui tem duas, eu vou somar as duas e vai ficar cinco.*** (A estudante registrou no papel o resultado de sua ação ao juntar as placas).

Nos registros das falas dos estudantes como, por exemplo: **(Fe)** ***A gente vai representar uma conta com os números [...]*** ou, **(De)** ***agora eu vou representar as dezenas [...]*** ou ainda, **(Fe)** ***Agora a De vai explicar [...]*** (nesse caso a próxima parcela da adição, como questionou o professor), percebemos a falta de familiaridade com os nomes dos entes matemáticos ou o desconhecimento destes, como os elementos que compõem a adição – parcelas, soma ou total; o que, a princípio, nos pareceu normal pois acreditamos ser também consequência de um ensino tradicional, onde a ênfase está em resolver a conta e obter o resultado (de preferência o resultado correto); sem a preocupação em compreendê-las.

Quando pensamos numa aprendizagem onde mais importante do que fazer é compreender o que se faz, conhecer os nomes de tais elementos torna-se também importante nesse processo. Em vista disso, os estudantes são orientados desde o inicio quanto à necessidade do exercício e aprimoramento da linguagem matemática no sentido de facilitar a leitura e a interpretação de problemas e, melhorar a comunicação escrita e oral, em especial, o diálogo entre os estudantes e entre estes e o professor, pois, como afirma Freire (1980, p. 98): "sem diálogo não há comunicação e sem esta não há verdadeira educação".

Somente o diálogo, que implica num pensar crítico (Freire 1980, p. 98), é capaz de promover as palavras corretas, pensadas criticamente ou como diria Freire (1980, p. 91) a "palavra verdadeira" pautada em duas dimensões: ação e reflexão. O autor salienta que:

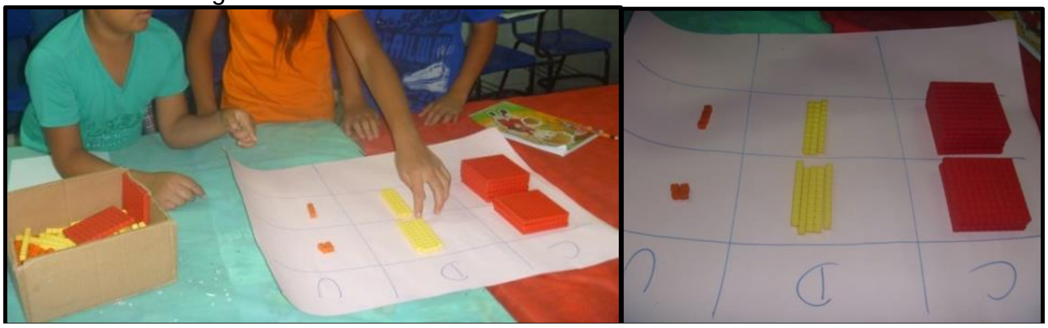
> Quando tentamos um adentramento no diálogo, como fenômeno humano, se nos revela algo que já poderemos dizer ser ele mesmo: *a palavra*. Mas, ao encontrarmos a palavra, na analise do diálogo, como algo mais que um meio para que ele se faça, se nos impõe buscar, também, seus elementos constitutivos. Esta busca nos leva a surpreender, nela, duas dimensões; ação e reflexão, de tal forma solidária, em uma interação tão radical que, sacrificada, ainda que em parte, uma delas, se ressente, imediatamente, a outra. Não há palavra verdadeira que não seja práxis (FREIRE 1980, p. 91).

Nesse sentido, nossa intenção e preocupação ao instigarmos os estudantes a expressar-se oralmente e com os termos corretos, é que estes não ficassem apenas num processo mecânico de repetição do que fora dito ou feito pelo professor no quadro branco ou mesmo com as peças do material dourado – o que, de modo geral, tem sido o padrão no processo de ensino e aprendizagem de matemática – mas, que refletindo sobre sua prática seja capaz de dizer sua *palavra* e explicar oralmente sua produção com segurança e propriedade, superando a palavra copiada, repetida e sem sentido; ou como diria Freire (1980, p. 92) palavra inautêntica resultante da dicotomia existente entre seus elementos constituintes: ação e reflexão, por meio da qual não se pode transformar a realidade.

Nessa perspectiva, o autor explica:

> Esgotada a palavra de sua dimensão de ação, sacrificada automaticamente, a reflexão também, se transforma em palavreria, verbalismo, blá, blá, blá. Por tudo isto, alienada e alienante. É uma palavra ôca, da qual não se pode esperar a denuncia do mundo, pois que não há denuncia verdadeira sem compromisso de transformação, nem este sem ação.
>
> Se, pelo contrário, se enfatiza ou exclusiviza a ação, com o sacrifício da reflexão, a palavra se converte em ativismo. Este, que é ação pela ação, ao minimizar a reflexão, nega também à práxis verdadeira e impossibilita o diálogo (FREIRE, 1980, p. 92).

Figura 21: Estudantes somando com o material dourado



Fonte: Dados da pesquisa empírica

Na decorrer da aula, continuamos enfatizando, dentre outros aspectos, o exercício e o aprimoramento da linguagem matemática. Eis os registros:

> Descrição das estudantes De e Th: – *Qual é a próxima parcela De?* ***– Duzentos e doze. Cada uma dessas placas tem cem cubinhos... Que representa duzentos; aqui uma barra que vale dez; e... e dois cubinhos pra representar o dois... duzentos e doze.*** Em seguida, a estudante Th é indicada para começar a soma. ***– Eu vou juntar... eu vou começar... pelas unidades simples; eu vou juntar aqui três com dois, vai ficar cinco unidades e não sobra nenhum*** (o professor orientou a estudante à registrar no papel o resultado de sua ação); ***agora eu vou representar as dezenas...*** O professor interviu: – *eu vou somar...* A estudante completou: ***– eu vou somar agora as dezenas, eu vou juntar os quarenta com os dez, vai ficar... cinco... então vai ficar cinquenta. Aqui eu vou representar as centenas...*** O professor corrigiu novamente: – *agora eu vou somar as centenas.* A estudante Th continuou: – ***Aqui tem três... três placas, e aqui tem duas, eu vou somar as duas e vai ficar cinco.*** A estudante registrou no papel o resultado de sua ação ao juntar as placas.

Nos exemplos descritos acima, percebemos que os momentos de hesitação das estudantes, e, especificamente, quando afirmam, por exemplo: ***– agora eu vou representar [...]***, ao invés de somar, evidenciam dificuldades cognitivas de diferenciação, em separar o que pertence ao objeto e o que provém de suas ações ou atividades, particularmente, atividades que podem em seguida dissociar-se dos objetos concretos até funcionar simbolicamente no estado de operações puramente dedutivas, como por exemplo, abstrair (por reflexionamento) as peças do material dourado como uma das várias formas de representar quantidades.

Percebe-se, a princípio, uma ênfase maior na experiência física, ou seja, nos “observáveis” do objeto, mas, que sem dúvidas, já é o início de um processo em direção à experiências lógico-matemáticas cada vez mais consistentes, visto que “esses dois componentes do processo de desenvolvimento não devem ser concebidos como estanques, mas como aspectos indissociáveis, e sempre presentes de toda experiência” (BECKER, 2010, p. 217). Nesse sentido, Piaget garante,

> que não existe experiência física, por mais elementar que seja, sem relacionamentos ou correspondências, sem classificação, seriação ou medida etc., portanto sem um quadro concernente à experiência lógico-matemática. Reciprocamente, uma experiência de segundo tipo apoia-se sobre os objetos extraindo da ação o essencial de suas abstrações: ora, na medida em que os objetos se prestam a essas ações ou operações (em que são coordenáveis, classificáveis, enumeráveis etc.), ajunta-se ao componente lógico-matemático, que permanece essencial, um segundo plano de experiência física, uma vez que o sujeito aprende ao menos que os objetos submetem-se a suas manipulações e são, portanto, logicizáveis e matematizáveis (1967, p. 387).

Num último momento da aula, duas equipes escolhidas pelo professor fizeram a demonstração da adição com reserva usando material dourado, conforme descrições a seguir:

> Descrição da estudante St: ***– Boa tarde*** [bom dia] ***a gente vamos falar é... sobre adição com reserva; os números que a gente formou foi quinhentos e oitenta e quatro, mais trezentos e setenta e oito*** (a estudante explicou mostrando as parcelas da adição escritas no papel)***. Pra formar o quinhentos a gente usou cinco placas de cem que dá quinhentos; e o oitenta a gente usou oito barras de dez, juntando tudo dá oitenta; e a gente usou quatro cubinhos que cada um vale uma unidade, juntando eles fica quatro unidades que dá quinhentos e oitenta e quatro. Pra formar o trezentos e setenta e oito, usamos três placas que tem cem, juntando tudo dá trezentos; e sete barras que aqui tem dez, sete dá setenta; e oito cubinhos que cada um vale uma unidade, a gente usou oito, portanto dá oito. Agora a colega Kr vai somar as unidades.***
>
> Descrição da estudante Kr: ***– Boa tarde*** [bom dia] ***meu nome é Kr vou somar as unidades; aqui eu tenho quatro cubinhos, mais oito, eu vou juntar vão ficar doze; então o quê que eu vou fazer... a gente vai substituir dez cubinhos por uma barra...*** O professor questionou: ***– Por que, que vai substitui dez cubinhos por uma barra? – Por que não tem como colocar***

> ***dez cubinhos aqui na*** [ordem das] ***dezena. Aí essa barra que nós substituímos por dez cubinhos vai subir pras dezenas.***

Ao somar as unidades simples, representada por cubinhos, a estudante Kr seguiu em frente sem fazer o registro no papel, mostrando mais uma vez dificuldades em coordenar ações diversas. Nesse momento, os estudantes foram orientados pelo professor a registrarem no papel, de cada ação executada com o material dourado, a fim de que compreendessem o que estavam fazendo – algoritmo da adição – não apenas como uma mera sequencia de passos decorados e sem sentido onde o que mais importa é o “resultado da conta”, mas como um processo que parte das ações físicas e alcança o domínio da operação em pensamento.

Em outros termos, baseando-se nas ideias de Piaget, esperamos que a partir das ações física, mental e oral e, consequentemente, da organização e coordenação destas ações por meio dos mecanismos cognitivos de assimilação e acomodação, que os estudantes se apropriem de cada etapa da sequencia e cheguem à operação mental como um processo lógico-matemático reversível, compreendido pelo estudante tanto em suas partes como no todo; onde cada passo é entendido como sendo importante e indispensável para a construção do processo, nesse caso específico, a construção do algoritmo da adição.

Becker (2010, p. 14) sustenta que “a operação só pode surgir da representação com significado, ou seja, aquela que representa a ação, ou experiência que se estruturou graças a essa ação. A representação com significado é aquela que deriva da ação”. Exemplificando, ao agirem sobre as peças do material dourado usando-as para representar as parcelas da adição, os estudantes dão significado à representação simbólico-matemática registrada no papel, donde resulta uma experiência estruturada que implica em operação.

Quando a estudante Kr concluiu: ***Aí essa barra que nós substituímos dez cubinhos vai subir pras (ordens) dezenas***, os estudantes, sob mediação do professor, constataram que a barra trocada por dez cubinhos e que representava uma dezena simples, é o “vai um” ou o “um que sobe” pra ordem das dezenas simples. Nesse momento (ou a partir dele), na interação do sujeito com o meio, o uso do material dourado, apresentou-se útil como objeto do conhecimento trazido pela estratégia da situação didática, para o desvelamento e a superação de um obstáculo deixado pelo ensino de matemática baseado apenas na resolução de contas no papel; favorecendo, ao mesmo tempo, a construção conceituada do algoritmo da adição.

Figura 22: Construção do algoritmo da adição com reserva

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Na continuação da produção temos a soma das dezenas feita pela estudante Ha conforme registro a seguir:

> Descrição da estudante Ha: ***– Bom dia meu nome é Ha eu vou somar as dezenas; é... dezena com dezena, embaixo de dezena; é, aqui tem oito e aqui tem sete, juntando elas, fica quinze, com mais um que "subiu" fica dezesseis, aí eu não posso colocar o dezesseis aqui... ai eu não posso ficar com as dezesseis*** [barras] ***lá em cima*** (refere-se à ordem das centenas)***, vou trocar por uma placa... cada placa tem cem, aí eu vou pegar dez desses aqui*** (refere-se às barras)***, aí eu vou tirar essas dez*** [barras] ***e vou colocar aqui*** [uma placa]***; aí eu deixo esses*** (as barras) ***daqui aqui... as barras aqui, e subo a placa...***

Na descrição da estudante Ha, novamente evidenciou-se a dificuldade em coordenar ações diversas como representar (primeiro na mente depois com as peças do material dourado), registrar no papel e, explicar a ação executada. O professor interrompeu e orientou a estudante a registrar no papel cada ação executada com o material dourado, sendo que, primeiro registra-se a quantidade de barras que restaram na ordem das dezenas; depois, da troca efetuada; para em seguida, "subir um", ou seja, a placa que foi trocada por dez barras para a ordem das centenas e, por fim, registrar no papel. Pois, entendemos que a construção do conhecimento matemático, como no caso do algoritmo da adição, depende da organização e coordenação das ações, primeiro no plano físico depois no plano do pensamento.

Para concluir a produção, a soma das centenas foi feita pela estudante Ka, observando-se as etapas da orientação metodológica; como segue:

> Descrição da estudante Ka: ***– Bom dia eu vou falar aqui sobre as centenas... o número aqui é... quinhentos, então vai ficar cinco placa, cada uma dessa aqui vai dar cem... vai dar quinhentos; e aqui vai dar, três placas vai dar***

> ***trezentos... juntando elas vai dar oito, com mais uma que "subiu" vai dar nove; aí eu vou botar o nove aqui*** (no papel)**.**

De posse do papel com o registro de toda a operação realizada, a estudante concluiu: ***– Portanto, quinhentos e oitenta e quatro, mais trezentos e setenta e oito, o resultado dá novecentos e setenta e dois****.* No final da produção, o professor orientou os estudantes a enfatizarem o resultado da operação, destacando a correspondência entre o resultado obtido no papel em linguagem simbólico-matemática e a representação feita com o material dourado.

4.1.5. Construção do algoritmo da subtração com números naturais

Na atividade 05, desenvolvida pela estratégia da sequência didática, tratamos da subtração com números naturais. O objetivo das atividades foi favorecer a construção do algoritmo da subtração. Para tanto, contamos com o auxílio do material dourado, fichas de papel com números de três algarismos, quadro branco e o recurso audiovisual como elementos enriquecedores do *meio* criado pela situação didática proposta.

Num primeiro momento da aula, apresentamos, por meio de vídeos, o processo algorítmico da subtração usando o material dourado, a princípio sem desagrupamento, ou seja, quando não há necessidade de "emprestar um" da ordem imediatamente superior. Durante o vídeo, assim como aconteceu com a adição, o professor fez pausas e ressaltou alguns passos importantes da operação, que muitas vezes não ficam claros para os estudantes por isso muitos cometem erros. Como, por exemplo, na armação da conta; ou quando mesmo acertando na resolução, não compreendem o significado do que fazem, especialmente, quando há a necessidade de "emprestar um". E, é esse um dos pontos principais que buscamos esclarecer com a proposta das situações didáticas.

Dessa forma, as atividades com o material dourado começaram com demonstrações do algoritmo da subtração (com e sem desagrupamento), onde de forma dialogada, o professor mostrou aos estudantes a ideia de subtração como o ato de retirar uma quantidade de outra. Ou seja, no processo algorítmico da subtração, representamos com as peças do material dourado apenas o minuendo donde retiramos a quantidade de cubinhos, barras e placas, indicadas pelo subtraendo; o que sobrar é o resto, resultado da operação.

As ações do professor no início de cada atividade são fundamentais, pois, didaticamente, tem a intenção de comunicar e fornecer aos estudantes informações básicas e necessárias como um instrumento de controle e regulação do *meio* determinado pelas situações didáticas, que os ajudem na execução das tarefas (BROUSSEAU, 2008, p. 55); nesse caso específico, das operações com números naturais usando o material dourado. Brousseau enfatiza que:

> A ação de um professor possui um forte componente de regulação dos processos de aquisição do aluno. O próprio aluno aprende pela regulação de suas relações com seu meio. As regulações cognitivas têm a ver com um meio adidático, em que parte da estrutura é determinada pela organização definida pelo professor (2008, p. 56).

Essa capacidade mínima de controle que se espera dos estudantes denomina-se, segundo Brousseau (2008, p. 55) modelo implícito de ação. Ou seja, a capacidade que o estudante tem de agir por conta própria sobre o meio determinado ou interagir com este de forma autônoma e consciente a partir do que lhe é fornecido na interação didática com o professor. Pois,

> à consciência que o sujeito que aprende pode ter da própria capacidade de controlar uma situação ou um meio dá-se o nome de "seu" conhecimento. Tomar consciência de seus conhecimentos pressupõe, por parte de quem aprende, a prática (efetiva ou fictícia) de certos tipos de interação social (formulação, comprovação) e também o uso de um repertório cultural determinado (BROUSSEAU, 2008, p. 55)

Nessa perspectiva, por meio da ação autônoma e consciente sobre o meio determinado pela proposta didática, os estudantes em duplas, sob mediação do professor, começaram suas produções efetuando subtração com desagrupamento, usando o material dourado (Figura 23).

Figura 23: Construção do algoritmo da subtração com desagrupamento - 1

Fonte: Dados da pesquisa empírica

A orientação metodológica foi que a cada ação executada, fosse feito o registro no papel, passo a passo; ao mesmo tempo em que explicavam suas produções. Espera-se, que por meio da coordenação das ações, seja possível, construírem em pensamento, como ação interiorizada e, portanto, conceituada, o algoritmo da subtração.

A seguir, apresentamos para análise e discussão a descrição das produções das duas duplas que participaram no primeiro dia de aula, onde enfatizamos, por meio das evidencias, um caso comum no início das atividades com as operações matemáticas (assim como já aconteceu na adição), a dificuldade dos sujeitos em coordenar ações diversas. Eis os exemplos:

> Descrição dos estudantes Ra e Fr: (Ra) ***– A gente vai representar o número trezentos e oitenta e cinco, e a gente vai subtrair pelo número cento e cinquenta e nove.*** (Fr) ***– A gente vai começar pelas unidades simples; é... não tem como tirar... nove de cinco, então a gente vai emprestar dez unidades simples (uma barra)... Aí vai...*** (Ra) ***– desagrupar.*** (Fr) ***– desagrupar por dez cubinhos...*** O estudante Fr reuniu os cubinhos, pensou um pouco e concluiu: ***– ficou quinze***. A estudante Ra completou, mas de forma incorreta: ***– Quinze tira de nove****.* (houve um momento de silêncio – hesitação). A descrição seguiu com a estudante Ra: ***– A gente tirou nove do quinze, dá pra tirar, então ficou... seis*** (o estudante Fr registrou o resultado da ação no papel); (Ra) ***– agora nós vai tirar oito... vamos tirar cinco de oito... que vai ficar duas*** (refere-se as placas que representam dezenas simples); ***e agora vamos tirar a centena*** (as placas), ***tira um fica duas.*** Nesse momento, os estudantes se atrapalharam um pouco ao perceberem que não haviam registrado no papel o “empréstimo” da barra (dezena simples) para os cubinhos (unidades simples), donde resultaria em sete dezenas simples e não mais oito, como ainda constava nos registros escritos. Os estudantes tentaram corrigir, mas, não conseguiram. A estudante Ra então concluiu: ***– e o resultado deu duzentos e vinte seis.***
>
> Descrição das estudantes St e De: (St) ***– A gente vai fazer uma subtração com reserva; é... o subtraendo foi... o subtraendo foi o número trezentos e vinte e cinco, e o...*** (a estudante confundiu minuendo com subtraendo) ***e o minuendo... foi o trezentos e vinte e cinco, e o subtraendo foi o cento e cinquenta e nove; o trezentos e vinte e cinco a gente pegou três placas, cada uma forma cem que dá trezentos; a gente pegou... pegou duas barras cada um tem dez, duas cabem vinte; e a gente pegou cinco cubinhos, que cada um vale uma unidade, portanto é cinco; agora eu vou... agora eu vou diminuir o cinco... aqui cinco, menos nove*** (refere-se as unidades simples)***... portanto, não dá pra tirar cinco de nove*** (quer dizer “tirar nove de cinco”), ***então eu vou emprestar do dois, da... da dezena... então eu vou emprestar o dois da dezena, vou colocar um...*** Ao preparar-se para resolver primeiro no papel, a estudante foi orientada pelo professor a movimentar primeiro o material dourado, depois registrar o resultado da ação no papel. (St) ***– Eu vou emprestar um pras unidades, eu vou empestar uma barra pra... pras unidades, eu não posso colocar a barra aqui*** (quer dizer deixar a barra e os cubinhos juntos na ordem das unidades simples) ***portanto, eu vou desagrupar... as dez, eu vou colocar dez... eu vou desagrupar por dez cubinhos... A estudante trocou a***

> ***barra por dez cubinhos e concluiu: aqui dez"; "agora eu vou juntar*** (os cubinhos) ***que deu... que deu quinze, agora sim vai dar pra gente tirar de nove, quinze menos nove, vai dar...*** A estudante De advertiu e fez o registro no papel: ***– Não é mais cinco, é quinze*** (refere-se às unidades simples que "emprestou um" das dezenas simples). (St) ***– Quinze menos vai dar... quinze menos nove vai dar seis, aí vai dar seis, e aqui não vai ficar mais dois... aqui não vai ficar mais dois, vai ficar um*** (a estudante esqueceu de registrar no papel o seis como resultado da subtração das unidades simples, e, novamente o professor orientou que o resultado de cada ação ou movimento com o material concreto devia ser registrado no papel***). – Agora a minha colega De vai falar o resto.*** (De) ***– Aqui não dá pra tirar um de cinco*** (quer dizer "tirar cinco de um")***.*** (A estudante De, assim como fez a estudante St, também inverteu a ordem de subtração, e foi advertida pelo professor)***... não vai dá pra tirar cinco de um*** (refere-se às dezenas representadas por placas), ***então eu vou emprestar uma placa pras dezenas, e... e a placa não pode... ficar aqui*** (na ordem das dezenas simples, pois as placas representam centenas simples) ***então eu vou trocar por dez barras. – então eu tenho onze... e onze menos cinco... dá seis; agora a St vai falar as centenas.*** (St) ***– Aqui não é mais três aqui é dois*** (a estudante registrou no papel referindo-se às centenas simples após "emprestar um" para as dezenas simples), ***e você pode ver que aqui nas centenas vai ter dois com o material dourado, portanto, dois menos um é igual a um... portanto é...*** (a estudante mais uma vez fez o procedimento no papel sem antes executar a ação com o material dourado). (St) ***– Então dois menos um vai dar, vai dar um... portanto o número...*** (De) ***– Portanto, é... trezentos e vinte e cinco, menos cento e cinquenta e nove, da o total*** (quer dizer resto ou diferença) ***de cento e sessenta e seis*** (A estudante concluiu mostrando a conta resolvida no papel).

Nesses primeiros exemplos, destacamos as dificuldades apresentadas pelos sujeitos em coordenar suas ações, precisando em vários momentos da intervenção do professor para avançar em suas produções. Os estudantes pareciam confusos e por conta disso cometeram muitos erros, como: a troca dos nomes dos elementos da subtração: (St) ***"– é... o subtraendo foi... o subtraendo foi o número trezentos e vinte e cinco, e o... e o minuendo... foi o trezentos e vinte e cinco, e o subtraendo foi o cento e cinquenta e nove"***; a inversão do algarismo do minuendo com o algarismo do subtraendo: (Ra) ***"– Ficou quinze [...] Quinze tira de nove"*** ou (St) ***"– portanto, não dá pra tirar cinco de nove [...] que deu quinze, agora sim vai dar pra gente tirar de nove"***, ou ainda, (De) ***"– Aqui, não dá pra tirar um de cinco".***

Além disso, como descrito acima, em vários momentos os estudantes ou esqueciam-se de registrar a ação executada no papel como no caso dos estudantes Fr e Ra quando se esqueceram de registrar o "empréstimo" da barra para os cubinhos e, por conta disso se atrapalharam na conclusão do resultado da operação, ou, invertiam a ordem das ações, ao invés de movimentarem primeiro o material dourado e só depois registrarem o resultado da ação no papel, faziam ao contrário. Como no caso da estudante St quando atenta apenas no papel afirmou: ***“então eu vou emprestar do dois, da... da dezena... então eu vou emprestar o dois da dezena, vou colocar um...”***. Em todos os casos descritos, o professor interviu e orientou os sujeitos a seguirem a orientação metodológica por meio da qual espera-se construir os esquemas mentais específicos do algoritmo da subtração.

De modo geral, o que percebemos, de acordo com as descrições dos estudantes, foi uma forte influência da concepção empirista na aprendizagem matemática (fundada no esquema estímulo-resposta) que os condicionar a uma forma mecânica de resolver contas no caderno, sem a necessidade de compreensão do processo de resolução ou do algoritmo das operações. Por conta desse condicionamento, os estudantes apresentam dificuldades, quando submetidos a situações didáticas que exigem a coordenação simultânea e organizada de ações como, por exemplo, operar com as peças do material dourado, registrar no papel o resultado das ações e explicar verbalmente suas produções.

Em vista dessa realidade, Becker questiona:

> Por que tanta ênfase no desenvolvimento de habilidades motoras, por uma experiência física não entendida como processo, e tanto menosprezo – total na teoria, quase total na prática – pela experiência lógico-matemática? Embora válido no seu nível restrito, que condições têm o esquema S-R de explicar a aprendizagem cognitiva ou a formação de conceitos, imagens ou modelos científicos que não têm origem na experiência física (2010, p. 171)?

O autor salienta ainda que:

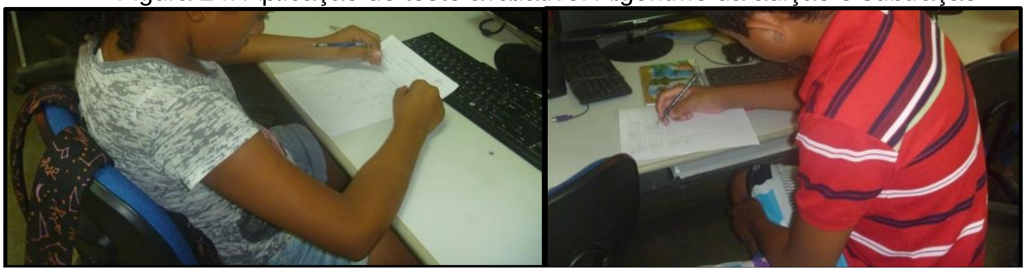
> A ênfase em comportamentos observáveis – objetivos “behavioristas” de aprendizagem – parece coincidir com a ênfase do desenvolvimento de ações motoras que podem permanecer inconscientes por toda a vida. A aprendizagem, segundo Piaget, encontra-se nos antípodas dessa concepção, pois só pode ser entendida como um processo de progressivas tomadas de consciência mediante abstrações reflexionantes (BECKER, 2010, p. 171).

Ou seja, o processo de coordenações da ação que resulta em tomada de consciência, não pode ser mecânico ou automatizado, mas depende de estruturas lógicas que se desenvolvem no domínio do pensamento cognitivo, a partir da ação.

Na aula seguinte, começamos as tarefas com um exercício sob o enunciado “arme e efetue” contendo adição e subtração de números naturais, os quais foram resolvidos primeiro no papel, depois no quadro, pelos estudantes, um de cada vez.

Enquanto os estudantes resolviam as contas no quadro e explicavam, o professor fazia perguntas e questionamentos acerca da armação e do processo de resolução das contas, a fim de verificar as implicações da proposta didática, até então, para a aprendizagem matemática dos estudantes, em relação ao algoritmo das operações, e à linguagem matemática empregada durante a explicação.

Figura 24: Aplicação de teste avaliativo: Algoritmo da adição e subtração



Fonte: Dados da pesquisa empírica

Entretanto, devemos considerar que o êxito ou fracasso dos estudantes na resolução das contas, depende primeiramente, de operações lógicas processadas em sua estrutura cognitiva. Dessa forma, buscamos verificar, por meio da interpretação feita pelos estudantes e, portanto, de suas respostas aos questionamentos do professor, a capacidade cognitiva dos sujeitos de comparar, seriar e fazer correspondência entre as ordens – unidade, dezena e centena – tanto nas parcelas da adição, quanto no minuendo e subtraendo da subtração. O que implica na tomada de consciência conceituada dos algoritmos da adição e da subtração.

Eis os exemplos sobre adição:

> Descrição da estudante Ha: ***– Eu vou somar duzentos e trinta e um; mais trezentos e cinquenta e sete.*** *– Por que você armou dessa forma? Por que o sete não fica embaixo do três, por exemplo... e o cinco embaixo do dois?* ***– Por que ele*** (o sete) ***é unidade; aí fica unidade com unidade, dezena com dezena e centena com centena... Agora eu vou somar pelas unidades, começando pelas unidades; um mais sete é oito, fica debaixo das unidades; três mais cinco é oito de novo, fica debaixo das dezenas; e, dois mais três é cinco, fica debaixo das centenas.*** *– O que você somou primeiro nesse processo?* ***– Eu somei primeiro as unidades.*** *– Unidades o quê...?* ***– Simples.*** *– E depois?* ***– as dezenas simples e as centenas simples.*** *– Qual foi o resultado?* ***– quinhentos e oitenta e oito.***
>
> Descrição da estudante Ra: – ***Eu vou somar quinhentos e oitenta e dois, mais setenta e nove.*** *– Por que, que a armação ficou desse jeito?* ***– Por que eles são unidades simples... o dois é unidade simples, o nove é unidade simples.*** *– E o sete, por que ele está ali* (embaixo do oito)*? –* ***Por que ele é dezena simples... e o oito é dezena simples.*** *– O que ficaria errado se o sete ficasse embaixo do cinco, e, o nove embaixo do oito?* ***– Ia ficar sem sentido.*** –

> *Por quê?* **– *Por que não pode ficar o sete aqui*** (embaixo do cinco)***, nem o nove aqui*** (embaixo do oito)***.*** *– Por que, que não pode...? Por que, que o nove não pode ficar embaixo do oito?* ***– Por que a unidade simples não pode juntar com a dezena simples. –*** *Ok. Agora começa a somar.* ***– Vou somar nove com dois que dá onze... –*** *Por que nove mais dois primeiro e, não oito mais sete?* ***– Por que é pra somar da direita pra esquerda***.

A primeira análise que fazemos é em relação à hesitação dos estudantes em manifestar-se oralmente e explicar suas produções, como no caso da estudante Ra, que em alguns momentos ficou em silêncio quando questionada pelo professor. Inicialmente, ao que nos pareceu, a estudante teve dificuldades de estabelecer em pensamento a comparação e a correspondência entre os conceitos e procedimentos trabalhados com o material dourado e, a representação simbólico-matemática das contas feitas no papel e no quadro; o que é plenamente compreensível visto não ser uma prática comum nas aulas de matemática. Apesar das dificuldades, no final os sujeitos conseguiram êxito em suas respostas.

Por exemplo: quando as estudantes Ha e Ra foram questionadas quanto à armação da conta, e afirmaram: ***"***(Ha) ***Por que ele*** (o sete) ***é unidade; aí fica unidade com unidade, dezena com dezena e centena com centena"***, ou ***"***(Ra) ***Por que eles são unidades simples... o dois é unidade simples, o nove é unidade simples [...] Por que ele é dezena simples... e o oito é dezena simples"***, ou ainda, quando a estudante Ha ao ser questionada sobre a ordem de soma respondeu: ***"Eu somei primeiro as unidades*** (e depois) ***as dezenas simples e as centenas simples"***, evidencia-se, por meio da comparação, correspondência e seriação das ordens dos algarismos – unidade, dezena e centena – a tomada de consciência do processo algorítmico da adição, o que implica em conceituação, ou seja, compreensão da ação, agora interiorizada.

Dessa forma, com base nos resultados obtidos na resolução das contas no papel, e principalmente, pelas respostas dos sujeitos, enquanto resolviam os exercícios no quadro, foi possível perceber evidencias claras de contribuições conceituais trazidas pelas atividades realizadas com o material dourado para a construção do algoritmo da adição com reserva, quando "vai um", (quando comparamos com os resultados do teste diagnóstico aplicado na fase exploratória da pesquisa). Esse fato, do ponto de vista epistemológico, representa um processo, embora não no mesmo ritmo para todos, de passagem da ação física, causal ou material, para a ação significante, isto é, implicativa.

Na continuação, apresentamos para discussão, registros das descrições dos sujeitos no desenvolvimento das produções envolvendo o algoritmo da subtração. Eis os exemplos:

> Descrição do estudante Ro: ***– Eu vou diminuir quatrocentos e oitenta e dois, menos duzentos e cinquenta e sete. Não dá pra tirar sete de dois, então eu vou emprestar um*** (do oito)***... aqui fica sete*** (antes oito), ***e aqui fica doze*** (antes dois)***; aí eu tiro sete de doze, fica cinco; aqui eu tiro cinco de sete, fica dois; e aqui eu tiro dois de quatro fica dois.*** *– Como é o resultado? – Duzentos e vinte cinco.*
>
> Descrição do estudante Ga: ***– É... trezentos e oitenta e três, menos cinquenta e oito.*** *– Por que você armou dessa forma aí Ga?* ***– É por que tem que começar peças unidades, o oito é unidade simples, então tem que está embaixo do três, e o cinco é dezena simples, então tem que ficar embaixo do oito; aí eu vou tirar cinquenta e oito de trezentos e oitenta e três; aí não dá pra tirar*** (refere-se ao três em relação ao oito das unidades simples), ***então eu vou emprestar um*** (do oito das dezenas simples), ***aí fica sete*** (no oito das dezenas) ***e aqui fica treze*** (no três das unidades simples), ***aí eu vou tirar oito de treze... que dá cinco; aqui eu vou tirar cinco de sete, fica dois*** (refere-se às dezenas simples)... ***aqui*** (refere-se ao três das centenas simples), ***como não tem nada pra tirar dele fica, é só baixar o três.***

De acordo com os registros, os sujeitos Ro e Ga, demonstraram certo domínio do algoritmo da subtração ao fazerem as contas corretamente, mas, apesar de serem bem sucedidos, não podemos considerar, ainda, como um conhecimento construído ao nível da conceituação. Mas, como sugere Becker, uma “experiência efetiva”, resultante do ensino de matemática configurado na repetição de regras, fórmulas e algoritmos, sem necessariamente, preocupar-se em explicar ou justificar os meios usados para alcançar os resultados. No entanto, o autor afirma que “a experiência efetiva é condição da aquisição da experiência mental, ou [...] fazer é condição para tomar consciência, para compreender e, finalmente, conceituar. Numa palavra, para operar” (BECKER, 2010, p. 27).

Nesse sentido, esperamos que a estratégia da situação didática com o uso do material dourado, venha favorecer um nível de compreensão mais elevado para os sujeitos da pesquisa acerca do algoritmo da subtração, principalmente, quanto ao desvelamento do “emprestar um”, que assim como o “vai um” da adição, não são explicados durante toda a vida escolar do estudante, configurando-se em obstáculo epistemológico. Dessa forma, acreditamos que, por meio de um processo que começa com a ação do sujeito sobre o objeto, com progressivas tomadas de consciência das ações, esses obstáculos podem ser superados, chegando-se à operação no domínio do pensamento cognitivo, isto é, na construção do conhecimento matemático.

A seguir trazemos para análise e discussão, o caso particular do estudante Ne, que desde o início do desenvolvimento das atividades, veio apresentando dificuldades em operar com a matemática (mais do que os outros sujeitos), ou seja, em estabelecer relações lógicas necessárias para a construção do conhecimento matemático. Eis os registros:

> Descrição do estudante Ne: – ***Vou subtrair mil, quinhentos e trinta e quatro, menos duzentos e oitenta e nove.*** – *Por que você armou a conta desse jeito?* (o estudante aparentemente inseguro, respondeu) – *Por que... unidade de milhar... dezena de milhar...* (hesitação). (O professor interrompeu e explicou que milhar é a próxima classe, não a primeira). – *Qual o nome da primeira classe?* ***– unidade de milhar.*** O professor explicou ao estudante que a primeira classe é das unidades simples. Em seguida, o professor pergunta: – *Qual é a primeira ordem?* (hesitação, insegurança) ***– classe das unidades simples*** (quer dizer unidade simples) – *Por que você colocou o nove embaixo do quatro?* ***– Por que representa unidade simples.*** – *E os demais?* ***– Aí, dezena simples, centena simples e unidade de milhar... Aí eu vou fazer a conta...***

Os registros acima, evidenciam sérias limitações cognitivas na aprendizagem matemática do estudante Ne, especificamente, quanto a capacidade de estabelecer relações lógicas de comparação, correspondência e seriação, as quais implicam na construção de conceitos matemáticos. Além de trocar os nomes das classes, o estudante também confundiu ordem com classe, quando afirmou que a primeira ordem é a classe das unidades simples. Ao ser questionado, e não ter certeza do que ia dizer, o estudante ficou nervoso e inseguro, tanto ao executar a ação, quanto ao descrever sua produção, não conseguindo, mesmo com a ajuda do professor, concluir sua participação no quadro, mostrando que não aprendeu nem mesmo por repetição (aprendizagem mecânica), o algoritmo da subtração.

Com esse caso, constatamos a limitação da concepção empírica de ensino para a aprendizagem matemática com construção do conhecimento. Visto que a exposição de conteúdos formais no quadro branco, geralmente com repetição de técnicas, algoritmos e fórmulas sem significados, visando apenas a memorização passiva por parte dos estudantes, não favorece a formação de estruturas lógico-matemáticas, pois estas para serem construídas, dependem da ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento e não apenas da pura percepção, ou, do "prestar atenção e copiar". Nesse sentido, Becker argumenta que:

> Sob o ponto de vista da prática educacional, cabe ao educador buscar, com seus educandos, o "rigor lógico" e, ao mesmo tempo, a "compreensão de um formalismo suficiente" através dos caminhos indicados pela psicologia: os caminhos da ação e da operação. Porém, nada prova que, colocando o formalismo no começo, encontrá-lo-emos no final, sob suas formas autênticas; e os estragos de um pseudoformalismo ou de um formalismo puramente verbal, demasiadamente precoce, mostram, ao contrário, os perigos de um método que ignora as leis do desenvolvimento mental (2010, p. 202).

No caso específico do estudante Ne, a defasagem na aprendizagem matemática em relação aos demais sujeitos da pesquisa, como foi constatado em vários momentos da sequência didática, pode ser entendida como um déficit cognitivo; resultado da falta de condições necessárias, isto é, de atividades pedagógicas ou de experiências concretas oferecidas pelo meio físico e social, nos níveis anteriores de desenvolvimento cognitivo do sujeito, prejudicando ou retardando a aquisição de conhecimentos possíveis e necessários para a fase atual das operações formais.

Ramozzi-Chiarottino explica, de acordo com Piaget que:

> O "déficit" ou retardo mental é determinado pela falta de *troca* entre o organismo e o meio – fator responsável pela construção da capacidade de conhecer. Assim, qualquer criança cujas trocas com o meio, tenham sido prejudicadas, não importa por que fator, pode apresentar "déficits". O que não quer dizer que este não seja passível de ser superado. Isto significa que a criança não *é* inferior, mas *está* inferior (1988, p. 6).

Logo, entendemos ser plenamente possível que o estudante que se encontre num estado de defasagem em sua aprendizagem aprenda, se for solicitado pelo meio, e passe de um patamar inferior, menos evoluído ou menos complexo, para um patamar superior mais evoluído ou mais complexo, superando o déficit cognitivo.

Nesse processo, a intervenção do professor enquanto mediador e facilitador da aprendizagem é fundamental, no sentido de estimular e ajudar o estudante por maior que pareça a sua dificuldade, oferecendo-lhe recursos e oportunidades, que o façam superar o medo e a insegurança e, consequentemente, o façam avançar em sua aprendizagem. Pois, como afirma Becker:

> A atividade do aluno, estimulada pelo professor, leva à autonomia intelectual. Não é o teorema de Pitágoras, diz Piaget, que garante o exercício livre da inteligência; é, antes, a descoberta de sua existência e de sua demonstração; é adquirindo, através da ação, os instrumentos lógicos ou racionais que o aluno atinge a autonomia intelectual (2010, p. 207).

Esse momento, dentre outros que surgiram durante a aplicação da sequência didática, reforçou-nos ainda mais a certeza da necessidade de mudanças no ensino de matemática. Aumentando, consequentemente, nossa motivação em relação ao trabalho com o material dourado, proposto pela sequência didática, como estratégia didático-metodológica de ensino favorável à construção do conhecimento matemático.

Dessa forma, reunimos os estudantes à roda da mesa, e, de forma dialogada, resolvemos com o auxílio do material dourado as contas outrora feitas no papel e no quadro, reforçando conceitos e esclarecendo dúvidas. Demonstramos, portanto, que os algoritmos da adição e da subtração serão construídos quando conseguirmos relacionar as ações executadas com o material concreto, uma a uma, com a representação simbólico-matemática registrada no papel, passo a passo.

Em seguida, os estudantes em duplas, orientados pelo professor, resolveram subtrações com e sem desagrupamento, usando o material dourado, registrando no papel, passo a passo, cada ação executada, ao mesmo tempo em que explicavam suas produções aos colegas e ao professor. Espera-se que nesse processo, que começa com a coordenação de ações físicas, esquemas mentais específicos para o ato de conhecer sejam construídos na estrutura cognitiva dos estudantes, habilitando-os a coordenar as ações no plano do pensamento, o que implicaria em operações lógico-matemáticas.

Figura 25: Construção do algoritmo da subtração com desagrupamento - 2

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Para melhor análise e discussão dos resultados, as descrições das últimas tarefas realizadas pelos sujeitos da pesquisa sobre o algoritmo da subtração com números naturais, foram organizadas em quadros. Desta feita, por meio dos registros referentes às manifestações orais dos estudantes, enquanto descrevem suas produções aos colegas e ao professor, buscamos categorizar o desenvolvimento das atividades, de acordo com os processos físico e mental que envolvem estruturas lógicas do pensamento cognitivo e ao mesmo tempo do conhecimento matemático, como as indicadas nas páginas 94 e 95.

A primeira categoria que apresentamos refere-se às relações lógicas estabelecidas pelos sujeitos da pesquisa, quando representam o minuendo da subtração; relações estas importantes e necessárias à construção do conhecimento matemático. Eis os registros:

Quadro 19: Categoria “Representando o minuendo”

Categoria: Representando o minuendo
St – *o trezentos e vinte e cinco a gente pegou três placas, cada uma forma cem que dá trezentos, a gente pegou... pegou duas barras cada um tem dez, duas cabem vinte; e a gente pegou cinco cubinhos, que cada um vale uma unidade, portanto é cinco;* **Ka –** *portanto, trezentos e vinte cinco eu vou usar cinco cubinhos pra representar a unidade, que é cinco; duas dezenas que são vinte, cada uma... cada uma barra tem dez são... fica duas representando vinte; e três placas pra representar o três que é o trezentos... das centenas.* **Ke –** *pra representar o trezentos eu vou usar três barras* (placas)*; pra representar as dezenas eu vou usar duas placas... duas barras pra representar o vinte; pra representar unidade eu vou usar cinco cubinhos.* **De –** *para o minuendo eu vou usar é..quatro placas; pra representar o quatrocentos, uma barra porque cada uma corresponde a dez e cinco cubinhos nas unidades simples cada um tem uma unidade.* **Ga –** *pra representar o trezentos eu vou pegar três placas pra representar trezentos; duas barras pra representar as dezenas, cada uma corresponde a dez, portanto é vinte; quatro cubinhos cada um vale uma unidade então, portanto é quatro.*

Fonte: Dados da pesquisa empírica

De acordo com os registros, ao representarem o minuendo com as peças do material dourado os estudantes estabeleceram relações-lógicas de comparação, seriação e correspondência do tipo A = A, B = B e C = C. Ao decidirem, por exemplo, usar os cubinhos pra representar as unidades simples, as barras pra representar as dezenas simples e as placas pra representar as centenas simples, primeiro os estudantes compararam as peças do material com os algarismos do número, em seguida, ou simultaneamente, fizeram a correspondência entre as peças do material dourado – cubinhos, barras e placas – com a posição de cada algarismo que compõe o número, ou seja, de acordo com a seriação do número 325.

Da mesma forma, ao escolherem cinco cubinhos, duas barras e três placas pra representar o 5, o 2 e o 3, respectivamente, os estudantes estabeleceram relação de correspondência entre as peças do material dourado e as quantidades representadas por cada um dos algarismos que formam o minuendo da subtração. Como explica, por exemplo, a estudante Ka: – ***portanto, trezentos e vinte cinco eu vou usar cinco cubinhos pra representar a unidade, que é cinco; duas dezenas que são vinte, cada uma... cada uma barra tem dez são... fica duas representando vinte; e três placas pra representar o três que é o trezentos... das centenas.***

A próxima categoria revelou processos cognitivos acionados quando os sujeitos, ao subtraírem, precisam "emprestar um". Eis os registros:

Quadro 20: Categoria "emprestar um"

Categoria: "Emprestar um"
Subtração das Unidade simples
Fr: *[...] é... não tem como tirar... nove de cinco, então a gente vai emprestar dez unidades simples* (uma barra)*... Aí vai... desagrupar por dez cubinhos... ficou quinze [...] Ra: Quinze tira de nove... A gente tirou nove do quinze, dá pra tirar, então ficou... seis.* **Ka:** *[...] mas só que não dá pra tirar nove de cinco, então eu vou emprestar uma barra pra cá* (pra os cubinhos)*... uma barra, vou... Vou desagrupar essa barra por dez cubinhos... ; agora sim dá pra tirar nove de cinco... ficou quinze... agora eu vou tirar nove... seis; aqui ficou quinze* (nas unidades simples) *e aqui ficou seis* (resto das unidades simples). **Th:** *[...] é pra tirar nove de cinco, mas não dá então, eu vou emprestar um, esse* (refere-se a uma barra) *vai ser o um que vai ser emprestado, mas não pode ficar nas unidades, então eu vou desagrupar por dez cubinhos... ficou quinze, então... eu vou tirar nove [...] ficou seis.* **De:** *[...] Aí não dá pra tirar sete de cinco* (refere-se às unidades simples)*, então eu vou emprestar um... uma... então eu vou emprestar uma barra* (uma dezena) *pras unidades simples [...] essa barra não pode ficar aqui* (junto com os cubinhos, na ordem das unidades simples) *porque ela é uma dezena, vamos ter que desagrupar, eu vou ter que trocar por dez cubinhos [...] eu vou ter que tirar sete desses é... desses quinze* (cubinhos)*, então ficou... ficou oito;* **Ga:** *[...] eu vou tirar seis de quatro, não dá pra tirar seis de quatro, então eu vou emprestar um* (uma barra)*, que vai pra... pras unidades simples, a barra não pode ficar nas unidades simples, então eu vou desagrupar por dez cubinhos [...] e aqui não fica mas quatro fica catorze [...] agora dá pra tirar seis de catorze, vai dar oito;*
Subtração das dezenas simples
De: *[...] não vai dá pra tirar cinco de um, então eu vou emprestar uma placa pras dezenas, e... e a placa não pode... ficar aqui* (na ordem das D. simples, pois as placas representam C. simples) *então eu vou trocar por dez barras; então eu tenho onze... e onze menos cinco... dá seis.* **Ke:** *[...] agora eu tenho que tirar cinco de um, mas não dá porque cinco é maior, então vou ter que emprestar das centenas... vou emprestar uma placa das centenas, só que a placa não pode ficar aqui* (junto com as barras)*, então eu vou desagrupar, trocando por dez barras; fica onze... vamos tirar cinco de onze... fica seis.* **De:** *[...] não dá pra tirar cinco de zero, então vou ter que emprestar uma... uma placa pra é... pras dezenas, então como essa placa não pode ficar aqui* (na ordem das dezenas, pois as placas representam centena simples)*, eu vou ter que desagrupar* (trocar) *por dez barras [...] eu vou tirar cinto desses dez, então ficou cinco.* **Ga:** *[...] aqui tá pedindo pra tirar sete de um, não dá... então eu vou... vou emprestar uma placa* (uma centena)*, a placa não pode ficar nas dezenas, então eu vou trocar por dez barras... dez barras, agora dá pra tirar* (subtrair) *[...] agora dá pra tirar sete de onze, que fica quatro;*

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Nas subtrações com desagrupamento onde há a necessidade de “emprestar um” da ordem imediatamente superior, os estudantes, ao começarem operar pelas unidades simples, estabelecem além da relação de seriação, relações de comparação, classificação, conservação e inclusão. Ao concluírem, por exemplo: **(Fr)** ***[...] é... não tem como tirar... nove de cinco [...]*** ou **(Ke)** ***[...] agora eu tenho que tirar cinco de um, mas não dá porque cinco é maior [...]***, os estudantes estabeleceram relação lógica de comparação do tipo A < B entre as quantidades representadas nas unidades e dezenas simples do minuendo e subtraendo.

Ao concluírem: **(De)** ***então eu vou emprestar uma barra pras unidades simples [...] essa barra não pode ficar aqui porque ela é uma dezena*** ou **(St)** ***[...] eu vou empestar uma barra pra... pras unidades, eu não posso colocar a barra aqui*** – quer dizer deixar a barra e os cubinhos juntos na ordem das unidades simples – as estudantes De e St, compararam as peças e constataram que A ≠ B, ou seja, a barra é diferente dos cubinhos. E, quando concluíram: **(De)** ***vamos ter que desagrupar, eu vou ter que trocar por dez cubinhos*** ou **(St)** ***portanto, eu vou desagrupar [...] eu vou desagrupar por dez cubinhos... aqui dez***, as estudantes estabeleceram relações lógicas de conservação ao constatarem que uma barra e dez cubinhos são quantidades equivalentes, independente da forma que se apresentam.

Consequentemente, ao efetuarem a troca de uma barra por dez cubinhos ou de uma placa por dez barras formando conjuntos de elementos comuns, ou seja, só de cubinhos ou só de barras, os estudantes estabeleceram relação lógica de classificação. Pra finalizar, quando os estudantes concluíram: **(St)** ***agora sim vai dar pra gente tirar de nove [...] quinze menos nove vai dar seis, aí vai dar seis [...]*** ou **(Ga)** ***e aqui não fica mais quatro, fica catorze [...] agora dá pra tirar seis de catorze, vai dar oito***, estabeleceram relação lógica de comparação do tipo A > B, implicando, consequentemente, na relação de inclusão do tipo “B está contido em A” ou, “A contém B”. Nesse caso, A corresponde ao conjunto das unidades simples do minuendo e B ao conjunto das unidades simples do subtraendo ou, A corresponde ao conjunto das dezenas simples do minuendo e B corresponde ao conjunto das dezenas simples do subtraendo.

Na última aula, referente à atividade 5, levantamos uma discussão sobre questões do teste diagnóstico aplicado na fase exploratória da pesquisa, envolvendo as quatro operações fundamentais da matemática, mas sem respondê-las. O objetivo foi instigar os estudantes à reflexão sobre as situações-problema e à busca de soluções coerentes com o que se pede, visto que na primeira oportunidade a maioria marcou opções incorretas e, não registrou os cálculos, o que impossibilitou o professor pesquisador de analisar o raciocínio lógico dos estudantes.

4.1.6. Construção do algoritmo da multiplicação com números naturais

Na atividade 06, desenvolvida pela estratégia da sequência didática, tratamos da multiplicação com números naturais, com o objetivo de favorecer a construção do algoritmo desta operação. Especificamente, construir o conceito de multiplicação como consequência da adição de parcelas iguais; onde o multiplicando representa a parcela da adição e o multiplicador indica o número de parcelas iguais a ser somada. Para tanto, contamos com o auxílio do material dourado, fichas de papel com números de três algarismos, quadro branco, recurso audiovisual e de uma tabela (a mesma usada na adição) como elementos enriquecedores do *meio* criado pela situação didática, a fim de favorecer a compreensão dos estudantes.

Do ponto de vista da abstração reflexionante, é necessário encontrar um viés, de maneira a evitar toda a alusão às designações linguísticas ou simbólicas da multiplicação. Nesse sentido, o trabalho com o material dourado parece preencher essas condições, quando propõe aos sujeitos construir coleções (números com três algarismos) com as peças coloridas do material dourado, onde cada cor representa uma ordem, sendo o número N de coleções, de acordo com o multiplicador (2, 3, etc.) da conta sugerida pelo professor ou pelo estudante.

A proposta metodológica para o desenvolvimento das atividades consistiu num processo dinâmico e dialógico, onde cada equipe de estudantes, na sua vez, enquanto efetuava a multiplicação com o material dourado, registrava no papel o resultado de cada movimento executado, ao mesmo tempo em que explicavam verbalmente passo a passo suas produções, visando, do ponto de vista epistemológico, a tomada de consciência conceituada da coordenação das ações, por meio uma forma superior de abstração: uma abstração refletida, ou seja, um processo de abstração reflexionante, procedendo por reflexão sobre as reflexões particulares, a qual, com efeito, tornará a reunir as adições em uma adição das adições, isto é em uma multiplicação do tipo (a + b) + (a + b) = 2(a + b) etc. (PIAGET 1995, p. 18).

O contrato didático inicial adotado para essa situação, onde se espera autonomia por parte dos estudantes, foi o contrato de iniciação e controle onde o professor determina um campo do conhecimento, nesse caso a aritmética, ou especificamente a multiplicação com números naturais, e organiza sua mensagem conforme o nível intelectual dos estudantes, assumindo certas responsabilidades quanto ao conteúdo da mensagem que comunica, propondo aos estudantes saberes necessários e suficientes ou, inversamente, propondo uma coleção de saberes e fornecendo um conjunto de aplicações “equivalentes” que o justificam (BROUSSEAU, 2008, p. 62), como por exemplo, o algoritmo da multiplicação de números naturais como adição de parcelas iguais usando o material dourado.

De acordo com o contrato estabelecido, começamos as atividades com o material dourado, fazendo demonstrações do processo algorítmico da multiplicação de números naturais, registrando no papel cada passo do processo, ou seja, cada ação executada, a fim de deixarmos clara a ideia de que a construção do algoritmo da multiplicação baseia-se na adição de parcelas iguais. Por meio das demonstrações feitas (assim como nas atividades anteriores), buscamos oferecer aos sujeitos da pesquisa condições mínimas de controle e regulação do meio didático, no sentido de que estes possam agir com autonomia frente à situação didática proposta envolvendo a multiplicação de números naturais.

Após a comunicação didática, os estudantes são convidados a executarem a mesma tarefa, ou seja, resolverem, um de cada vez, uma operação de multiplicação com multiplicando trezentos e setenta e oito e multiplicador dois, usando material dourado. Por meio dos registros a seguir, referentes à manifestação oral dos estudantes, buscamos descrever o desenvolvimento das atividades bem como destacar elementos verbais e cognitivos que nos ajudam a entender o processo de aprendizagem na perspectiva de construção do conhecimento matemático.

Quadro 21: Categoria “Representando o multiplicando – 1ª parcela”

Representando o multiplicando 378: 1ª parcela da adição
St: *[...] pra mim representar o trezentos, eu vou precisar de três placas, cada uma corresponde a cem, portanto é trezentos; vou precisar de sete barras, cada uma corresponde a dez, portanto é setenta; eu vou precisar de oito unidades, cada um corresponde a uma unidade simples, portanto dá oito;* **De:** *[...] pra representar o trezentos eu vou usar [...] três placas, porque cada uma corresponde a cem; sete barras... porque cada uma corresponde a dez, portanto setenta; e oito cubinhos cada um corresponde... a uma unidade, portanto oito;* **Ne:** *[...] eu vou pegar três placas, cada uma... uma placa tem cem cubinhos, representa cem, então três, trezentos; sete... sete barras cada uma tem dez, portanto sete que tem*

setenta; oito cubinhos, uma unidade, podemos... representar o oito; **Fe:** *[...] três placas, cada uma vale cem, portanto trezentos; sete barras cada uma vale dez, então setenta...; oito cubinhos cada um corresponde a uma unidade... a uma unidade simples;* **Ro:** *[...] eu vou pegar três placas, pra representar o trezentos que uma delas equivale a uma centena; sete barras que uma delas é... equivale a uma dezena, aqui tem setenta; e oito cubinhos, que uma delas equivale a uma unidade simples, então, portanto, aqui tem oito;* **Th:** *[...] para representar o trezentos, irei utilizar três placas cada uma corresponde a cem unidades e dez barras, então forma trezentos; para representar o sete eu peguei sete barras, cada uma corresponde a... a uma dezena simples, então dá setenta; pra representar oito que é uma unidade simples, eu peguei... oito cubinhos, cada um é uma unidade simples;*

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Do quadro acima (assim como na adição e na subtração), destacamos na multiplicação a capacidade cognitiva dos estudantes em fazer abstrações e estabelecer relações lógicas. Quando, por exemplo, a estudante Th em sua explicação, diz**: *[...] para representar o trezentos, irei utilizar três placas cada uma corresponde a cem unidades e dez barras, então forma trezentos; para representar o sete eu peguei sete barras, cada uma corresponde a... a uma dezena simples, então dá setenta; pra representar oito que é uma unidade simples, eu peguei... oito cubinhos, cada um é uma unidade simples***, estabelece relação lógica de correspondência entre as peças do material dourado e a representação simbólica dos números e, simultaneamente, relação lógica de seriação ao representar os algarismos conforme as ordens ocupadas por eles.

Essa capacidade de fazer relações lógicas segundo Ramozzi-Chiaritino (1988, p. 15), interpretando Piaget, "vem da própria atividade das estruturas mentais que "funcionam" seriando, ordenando, classificando e estabelecendo implicações" e, é isomorfa à lógica das classes e relações. Ou seja,

> a lógica de classes e relações revela a forma pura do funcionamento das estruturas mentais biológicas específicas para o ato de conhecer, ou seja, a forma de funcionamento da razão humana. Daí o isomorfismo entre a forma pela qual a criança organiza a sua experiência e a lógica de classes e relações (RAMOZZI-CHIAROTINO, 1988, p. 15).

De modo geral, percebe-se nas ações dos estudantes enquanto interagem com o meio didático manipulando o material dourado, que estas não se organizam aleatoriamente, mas, seguem "uma lógica subjacente às suas ações, ou seja, uma lógica subjacente ao seu comportamento" (RAMOZZI-CHIAROTINO, 1988, p. 14), a qual é desenvolvida segundo um processo que começa com "uma "lógica concreta", quando a criança opera sobre objetos até chegar a uma lógica formal a partir dos 12 anos, quando a criança se torna capaz de operar sobre relações" (RAMOZZI-CHIAROTINO, 1988, p. 15), ou seja, operar no plano do pensamento, sem a necessidade do objeto concreto.

Esses diferentes níveis de desenvolvimento lógico da infância à adolescência são expressões ou revelações do funcionamento das estruturas mentais em diferentes momentos de sua construção. Porém, enfatizamos que nem todos chegam de forma satisfatória ao nível de desenvolvimento lógico de operar sobre relações na mesma faixa etária, pois dependem das estruturas mentais específicas para o ato de conhecer e, a construção destas por sua vez depende das trocas entre o sujeito da aprendizagem e o meio físico e social, especialmente, das oportunidades ou das cobranças deste meio ao longo do desenvolvimento cognitivo.

No quadro a seguir destacamos registros de uma das etapas mais importantes no processo de construção do algoritmo da multiplicação. Em outros termos, evidencia-se o momento de tomada de consciência conceituada da multiplicação como adição de parcelas iguais. Eis os registros:

Quadro 22: Categoria "Repetindo o multiplicando – 2ª parcela"

Repetindo o multiplicando: 2ª parcela da adição
St: *[...] aqui tá pedindo pra mim multiplicar por dois, o quê que eu vou fazer, vou repetir o trezentos e setenta e oito mais uma vez;* **De:** *[...] Aqui tá pedindo pra mim fazer duas vezes, então eu vou fazer a mesma coisa... duas placas, sete barras e oito cubinhos;* **Ne:** *[...] eu já formei um, trezentos e setenta e oito, agora eu vou formar duas vezes [...].* **Fe:** *[...] como aqui tá pedindo pra multiplicar duas vezes, então eu vou repetir o trezentos e setenta e oito [...].* **Ro:** *[...] aqui está pedindo pra eu fazer duas vezes, então eu vou repetir o número de novo... três placas, sete barras e oito cubinhos;* **Th:** *[...] aqui esta pedindo pra mim representar esse número duas vezes, então eu vou representar mais uma vez, três placas, sete barras e oito cubinhos.*

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Ao observarem a representação simbólica do número 378 na multiplicação por 2, registrado no papel, e afirmarem: **(St)** ***[...] aqui tá pedindo pra mim multiplicar por dois, o quê que eu vou fazer, vou repetir o trezentos e setenta e oito mais uma vez;*** ou **(Ro)** ***[...] aqui está pedindo pra eu fazer duas vezes, então eu vou repetir o número de novo... três placas, sete barras e oito cubinhos***, os estudantes compararam os registros simbólicos do papel com as peças do material dourado em seguida fizeram a correspondência representando o número 378 mais uma vez (com as peças do material dourado), demonstrando que compreenderam a multiplicação de números naturais como uma adição de parcelas iguais e que o número de parcelas é indicado pelo multiplicador da operação.

Em termos de abstração, o grande progresso atingido por todos esses sujeitos, trazido por esta categoria, e explicado por Piaget, está na descoberta de uma compensação necessária que,

> visa à igualdade entre as duas coleções, procedendo em relação a uma delas com “n vezes x”, e, com relação à outra, “**n’** vezes **x’**”, então, se x > x’ deve-se compensar esta diferença por n < n’, e, reciprocamente, se x < x’. Dito de outra maneira, procedendo ainda de maneira aditiva por adjunções, tentando novos “pacotes” ou “montes”, estes sujeitos começam a compreender um princípio essencial da multiplicação: a relação inversa entre o multiplicador e o multiplicando, no caso de igualdade de produtos (1995, p. 36).

No quadro abaixo destacamos registros das falas dos estudantes que confirmam essa construção ao explicitar o mecanismo de tomada de consciência.

Quadro 23: Categoria “Multiplicação por 2: Adição de duas parcelas iguais”

Multiplicação por 2: Adição de duas parcelas iguais
St: *[...] eu vou é... começar pelas unidades simples; dois vezes oito; uma vez oito, duas vezes oito; o quê que eu vou fazer com isso, eu vou unir os dois, que vai dá dezesseis [...].*   **De:** *[...] eu vou... eu vou multiplicar o oito... duas vezes o oito; uma vez o oito e duas vezes o oito; eu vou unir pra saber quanto é que fica... dezesseis [...] Aqui eu tenho sete, sete cada um... uma vez sete, duas vez sete... então aqui dá quatorze, com o “um que subiu”, quinze;*   **Ne:** *[...] é... duas vezes sete agora, puxa pra cá na casa das dezenas, uma vez sete, duas vez sete, agora a gente vai juntar... deu catorze, com “um que subiu” quinze;*   **Fe:** *[...] primeiro duas vezes o oito; aqui uma vez oito, duas vezes o oito; agora eu vou juntar, vai ficar... vai ficar dezesseis [...] agora... agora duas vezes sete...; uma vez o sete, duas vez o sete, eu vou juntar, ficou catorze, com o “um que subiu”, quinze [...] agora duas vezes três... uma vez o três, duas vez o três [...] agora eu vou juntar, vai dar seis, com mais “um que subiu”... sete;*   **Ro:** *[...] aqui eu tenho sete barras, uma vez sete, duas vezes sete, aí, então juntando aqui dá catorze com mais “um que subiu”, quinze [...] aí aqui eu tenho uma vez três, duas vez três; juntando esse daqui dá seis com mais “um que subiu sete;*   **Th:** *[...] aqui uma vez oito, duas vez oito, eu irei unir [...] deu dezesseis [...] agora é duas vezes sete, aqui temos uma vez sete, duas vez sete, unindo tudo, deu catorze, com mais “um que subiu” quinze [...] por último irei efetuar duas vezes três; aqui temos uma vez três, duas vezes três, unindo tudo deu seis, com mais “um que subiu” sete;*

Fonte: Dados da pesquisa empírica

Os discursos dos estudantes ao combinarem termos comuns às operações de multiplicação e adição de parcelas iguais como, por exemplo: ***Fe: [...] primeiro duas vezes o oito; aqui uma vez oito, duas vezes o oito; agora eu vou juntar, vai ficar... vai ficar dezesseis [...]*** ou **Th:** ***[...] agora é duas vezes sete, aqui temos***

uma vez sete, duas vez sete, unindo tudo, deu catorze, com mais "um que subiu" quinze [...], revelam elementos cognitivos como comparação e correspondência entre a linguagem simbólico-matemática e as peças do material concreto, o que só é possível graças a um processo de abstração, que por sua vez conduz à tomada de consciência conceituada dos estudantes acerca do processo algorítmico da multiplicação como consequência da adição de parcelas iguais.

É importante esclarecer que embora exista a relação de consequência entre as duas operações, trata-se de níveis diferentes de abstração, e, é exatamente nessa passagem da adição para a multiplicação que os estudantes mostram de maneira clara em suas descrições,

> a diferença entre adição – na qual o pensamento está centrado sobre os objetos que se reúnem a outros, sobre o resultado, pois, desta reunião – e a multiplicação, na qual se trata, ademais, de depreender o número de vezes que se reúnem e de desmembrar, então, as operações como tais, e não mais somente seus resultados em quanto números de objetos transferidos (PIAGET, 1995, p. 31).

Especificando, observamos que nessa passagem de um nível inferior para um nível imediatamente superior – da adição para multiplicação - acontece um processo de abstração reflexionante, apoiado nas atividades cognitivas do sujeito em dois sentidos complementares. Primeiro o processo de reflexionamento, onde a ação cognitiva do sujeito transpõe de um plano A inferior e precedente, a um plano B superior, as adições já conhecidas 3 + 3, 7 + 7 e 8 + 8 ou mesmo 378 + 378; segundo, a reflexão, onde a ação cognitiva do sujeito faz uma reconstrução sobre o novo plano B, com as adições trazidas do plano A, ou seja, é feita uma reorganização no plano superior, onde as adições elementares são relacionadas a outros elementos já situados em B, estabelecendo as relações 3 + 3 = 2 . 3; 7 + 7 = 2 . 7; 8 + 8 = 2 . 8; ou 378 + 378 = 2. 378.

Cabe ainda destacar que a abstração reflexionante tratada aqui, apoia-se especificamente na coordenação das ações do sujeito sobre o objeto concreto, portanto, partindo de uma abstração pseudo-empírica. Significa dizer que: por um lado, essa construção só é possível em nível de conceituação a partir da ação do sujeito sobre o objeto concreto; por outro lado, a abstração reflexionante quando realizada na ausência do objeto concreto, o que é esperado no nível das operações formais como obra do pensamento, "faz-se necessário distinguir também seu processo enquanto uma temática retroativa, que se torna, então, uma reflexão sobre reflexão, designada abstração refletida ou pensamento reflexivo” (PIAGET, 1995, p. 6).

Ainda sobre a multiplicação, no quadro a seguir evidencia-se a capacidade dos sujeitos de estabelecer relações lógicas de comparação e correspondência entre a representação simbólico-matemática e a representação com o material concreto. Ao fazerem as relações os estudantes mostram que assimilaram o objeto do conhecimento, representado aqui pelo material dourado, dando, assim, significado ao simbolismo matemático e, ao acomodá-lo em sua estrutura mental, ou seja, ao interiorizá-lo a partir da ação tornam-no significante. Em uma palavra, significa dizer que a ação foi interiorizada, portanto, a partir de agora os estudantes ao realizarem a operação, o farão em pensamento, ou seja, sem a necessidade do objeto concreto, pois já conseguem abstrai-lo como imagem mental e descrevê-lo verbalmente.

Quadro 24: Categoria “Relação do material concreto com a representação simbólica do número”

Relação do material concreto com a representação simbólica
St: *[...] Portanto, trezentos e setenta e oito, vezes dois, é igual a setecentos e cinquenta e seis, e no material dourado vai dar para ver mais, por que eu tenho sete placas, cada uma corresponde a cem, portanto dá setecentos, eu tenho cinco barras cada uma corresponde a dez, portanto é cinquenta, e seis cubinhos, cada um corresponde a uma unidade simples, portanto dá seis; o número foi setecentos e cinquenta e seis;* **De:** *[...] você pode verificar... você pode verificar isso no material dourado, que... sete placas, cada uma corresponde a cem, portanto setecentos; cinco barras, cada uma corresponde a dez, cinquenta; e seis cubinhos, cada um corresponde a uma unidade simples; portanto, setecentos e cinquenta e seis;* **Ne:** *[...] a gente pode... portanto... trezentos e setenta e oito vezes dois, é igual a setecentos e cinquenta e seis; podemos ver isso no material dourado... uma placa corresponde a cem, tá aqui sete, setecentos; e... cinco barras, pra representar o cinquenta; e seis cubinhos pra representar o seis, que ele vale seis unidades;* **Fe:** *[...] portanto, duas vezes trezentos e setenta e oito é igual a setecentos e cinquenta e seis; podemos conferir isso claramente no material dourado, sete placas cada uma vale cem, então setecentos...; cinco barras, cada uma vale dez, então cinquenta...; e seis cubinhos cada um vale uma unidade simples, portanto seis;* **Ro:** *[...] e aí portanto, trezentos e setenta e oito vezes dois, é setecentos e cinquenta e seis; podemos ver isso aqui no material dourado; sete placas, cinco barras e seis cubinhos; aí uma placa que vale cem... cem unidades, aqui tem setecentos; aí uma barra que vale dez unidades, então aqui tem cinquenta; e seis cubinhos que equivale a uma unidade simples, portanto seis;* **Th:** *[...] Portanto, trezentos e setenta e oito vezes dois, ou duas vezes trezentos e setenta e oito é igual... é... setecentos e cinquenta e seis; podemos conferir no material dourado, tem sete placas cada um corresponde a cem, a cem unidades, aqui ficou setecentos; cinco barras, cada uma corresponde a dez unidades, então é cinquenta; e seis unidades simples, cada um corresponde a uma unidade simples, então é seis; portanto ficou o número setecentos e cinquenta e seis;*

Fonte: Dados da pesquisa empírica

A tomada de consciência da relação multiplicativa como adição de parcelas iguais, significa o alcance do nível da conceituação. Essa compreensão do fazer caracteriza a passagem da ação à operação, implicando na construção do algoritmo da multiplicação.

No final das atividades, aplicamos um teste avaliativo com quatro questões envolvendo as quatro operações fundamentais (Ver anexo C), onde por meio dos registros escritos, buscamos analisar e interpretar a atividade cognitiva dos sujeitos, a fim de verificar as implicações da proposta didática para a aprendizagem matemática em relação aos algoritmos das operações em questão, especialmente, quanto a leitura, interpretação e raciocínio lógico dos estudantes na resolução das situações-problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em linhas gerais, esta pesquisa sobre os processos de aprendizagem e construção do conhecimento matemático, voltada para a investigação sobre as situações didáticas, dividiu-se em dois momentos distintos, porém, interligados metodologicamente entre si. O primeiro momento consistiu na fase de exploração e reconhecimento do contexto de pesquisa com a análise e discussão dos dados obtidos por meio da observação de sala de aula, das entrevistas e da aplicação do teste diagnóstico. O segundo momento destinou-se à intervenção pedagógica, com planejamento, concepção, aplicação e avaliação de uma sequência didática, onde desenvolvemos uma série de atividades com os estudantes, envolvendo um processo participativo e dialógico com conteúdos específicos do componente curricular matemática, para o 7º Ano do Ensino Fundamental.

A primeira parte do estudo traz uma visão geral do contexto didático-pedagógico da sala de aula de matemática em sua relação professor-estudante-conhecimento matemático.

A análise indica a predominância da concepção empirista no trabalho didático-pedagógico da sala de aula de matemática, baseada num modelo tradicional de ensino, que se resume, geralmente, à exposição sumária de conteúdos, exemplos e exercícios-padrão e, avaliação ou o que dá no mesmo a aplicação de provas escritas ou exercícios avaliativos; onde acredita-se que a aprendizagem se dá por meio da pura percepção e reprodução do que é ensinado, sem considerar a ação dos sujeitos no processo de aprendizagem e, portanto, na construção do conhecimento matemático.

No período de observação de sala de aula, percebe-se que a abordagem pedagógica não favorece a interação entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática, tendo em vista que as aulas de matemática atendem à uma sequencia padrão, configurada em três momentos: exposição de conteúdos puramente formais ou abstratos, portanto, sem sentido para a vida do estudante; em seguida, exemplos e exercícios-padrão, isto é, parecidos quanto ao algoritmo de resolução, portanto, fáceis de reproduzir, e, por último, os exercícios para treinamento da fórmula, da regra ou do algoritmo ensinado, visando a memorização ou a aprendizagem mecânica por repetição.

Do ponto de vista epistemológico, essa sequência não favorece o diálogo em sala de aula como condição necessária à formação de estruturas lógicas responsáveis pelo ato de conhecer, pois estas dependem da ação do sujeito em interação com o meio didático. Ao contrário, inibi a participação ativa e consciente do estudante na construção de seu próprio conhecimento, visto que nessa configuração didático-padagógica, o objetivo do ensino é que o estudante seja capaz de repetir o que fora ensinado, sem a preocupação ou a necessidade de justificar ou explicar sua produção, ou seja, sem a compreensão conceitual do que fez.

O diálogo, suscitado nesse contexto, é concebido não apenas como mais uma forma de comunicação que se esgota na relação eu-tu, mas, uma relação apoiada em duas dimensões: ação e reflexão, onde a partir do debate, da discussão da troca de opiniões, da pergunta, do questionamento, o estudante, sob mediação do professor, tenha oportunidade e liberdade para dizer e aprimorar sua palavra como práxis, favorecendo, assim, o desenvolvimento de suas capacidades cognitivas, criativas e argumentativas.

O estudo mostra que a falta de diálogo entre os sujeitos da aprendizagem e entre estes e o professor mediador do trabalho pedagógico, obriga os estudantes a permanecerem apenas na situação de ação, ou seja, apenas repetindo ou reproduzindo informações, sem a obrigação de formular e comunicar sua estratégia de resolução, o que caracterizaria uma situação de formulação. Daí, que na concepção dos estudantes a matemática ensinada em sala de aula é definida como “cálculo ou conta”, ou seja, aplicação de regras, fórmulas e algoritmos, conforme constatamos no período de observação.

Nessa perspectiva, configura-se uma proposta pedagógica unilateral e antidialógica, baseada na exposição sumária de conteúdos, sendo o professor o emissor ou instrutor e o estudante o receptor passivo e ingênuo das informações, configurando-se num contrato de informação, o qual, segundo Brousseau (2008) é o mais comum no ensino vigente de matemática.

Nesse modelo de ensino não há a superação da curiosidade ingênua, da reprodução e memorização passivas de conteúdos, à curiosidade epistemológica da ação e da reflexão, da abstração reflexionante e da tomada de consciência, da compreensão a da conceituação, tendo em vista que não se leva em consideração a capacidade e o potencial de criação e recriação do estudante enquanto sujeito, e não objeto, do processo de aprendizagem e de construção do conhecimento matemático.

Por isso, ao mesmo tempo em que consideram a matemática apenas como sinônimo de cálculo ou de contas com aplicação de regras, fórmulas e algoritmos, os estudantes acreditam e afirmam, de forma ingênua e inconsciente, como que decorado, por mais que resultado da influência do meio sociocultural onde estão inseridos, que a matemática ensinada em sala de aula é para o futuro. No entanto, num modelo de ensino com exposição de conteúdos formais, sem relação com a realidade dos estudantes, bem como numa configuração pedagógica de sala de aula sem interação, que não favorece a dialogicidade como condição necessária à formação de estruturas lógicas, não há construção de conhecimento e, se não há conhecimento construído, não faz sentido falar em matemática para o futuro.

Na prática prevalece a “cultura do silêncio”, estabelecida no contexto pedagógico da sala de aula de matemática como resultado da própria concepção que se tem do ensino e aprendizagem desta disciplina, apresentada em sala de aula como uma verdade pronta e acabada, que não permite questionamentos, muito menos por parte dos estudantes. A pedagogia da reprodução tem por objetivo treinar os estudantes de forma exaustiva, até que estes aprendam a reproduzir o conteúdo tal qual lhes foi ensinado, ou seja, aplicar as regras e as fórmulas e repetir os algoritmos corretamente, como na proposta de ensino e aprendizagem de Skinner, baseada na relação Estímulo-Resposta.

Nesse processo antidialógico e unilateral de ensino, o treinamento tem por objetivo eliminar o erro e alcançar o resultado positivo, daí que muitos estudantes, por não conseguirem êxito na primeira, segunda ou até terceira tentativas e, por não terem liberdade para interagir com o professor, mas apenas obedecer aos comandos recebidos, acabam reféns de um sistema de ensino rigoroso que só admite a resposta certa, pronta e acabada, sem espaço para perguntas ou questionamentos, prevalecendo a “cultura do silêncio”.

Por isso, os estudantes não conseguem falar durante as aulas de matemática, ficam nervosos, inseguros, pois têm medo de errar e sofrerem constrangimentos, visto que os estudantes “bons de matemática” são aqueles que dão sempre respostas corretas, mesmo que não compreendam o que dizem ou fazem, afinal o importante é memorizar e reproduzir corretamente o que lhes foi ensinado. Não é a toa, que comumente se ouve falar, tanto por professores quanto por estudantes, inclusive os nossos sujeitos da pesquisa afirmam nas entrevistas, que para aprender matemática, basta prestar atenção na explicação do professor, exercitar e decorar; resultando na memorização momentânea de conteúdos sem significado, sem construção de esquemas conceituais, deixando lacunas na aprendizagem matemática.

A análise do teste diagnóstico, por exemplo, mostra que a dificuldade de leitura e interpretação de problemas apresentada pelos estudantes, tão comum no ensino de matemática, está na verdade, associada à processos cognitivos de abstração e reflexão, donde a tomada de consciência e a compreensão, os quais não foram favorecidos ou exercitados nas etapas anteriores da escolarização e desenvolvimento dos sujeitos, caminhando até a fase atual das operações formais (característica principal do pensamento do adolescente), e, que não é possível desenvolver apenas com resolução de contas ou aplicação de fórmulas matemáticas, sem que haja relação com situações reais que deem sentido ou significado ao enunciado. Ou seja, não é possível abstrair do simbólico, sem antes ter tido experiência ou contato com o objeto concreto.

Exemplificando, quando o estudante decora a relação $A = \frac{b \cdot h}{2}$ da área do triângulo, sem compreender o significado das variáveis, e, nem a divisão por dois como a metade da área de um retângulo; ou quando decora a regra de sinais, tipo “mais” (+) com menos (–) dá “menos” (–) na multiplicação e na divisão, sem compreender a qualidade dos sinais (o negativo como dívida, por exemplo); ou quando nos algoritmos da adição e da subtração não compreende o “vai um” ou o “emprestar um”, respectivamente, como sendo uma quantidade assumida de acordo com a ordem ocupada; ou ainda, quando na adição ou subtração com números decimais apenas decora “virgula em baixo de vírgula”, sem compreender que esse procedimento é consequência da seriação das ordens dos números somados ou subtraídos.

De modo geral, no ensino de matemática as atividades que tem como objetivo apenas a memorização e a reprodução de conteúdos formais (propriedades, fórmulas, regras e algoritmos) não favorece o desenvolvimento da capacidade de abstração reflexionante dos estudantes com tomada de consciência o que implicaria em conceituação e, portanto compreensão. Visto que, a capacidade de abstração reflexionante, apoia-se na atividade cognitiva do sujeito ao nível de coordenação de ações, esquemas, operações, etc., o que não é possível apenas pela percepção, ou seja, pela assimilação passiva de informações.

Quanto à avaliação, geralmente é feita por meio de provas escritas ou como dizem os próprios estudantes, exercícios avaliativos, que em muitos casos se confundem com a própria avaliação, não entendida como um processo contínuo que permite várias intervenções, com instrumentos de avaliação diferentes que possam contemplar outras competências e habilidades do estudante, além da capacidade de memorização e de repetição de regras e fórmulas, por meio de provas escritas. Sendo esta forma de avaliação, um dos fatores responsáveis, especialmente no ensino público, pela a aprovação de muitos estudantes sem a necessária preparação para a série seguinte, atendendo apenas às estatísticas exigidas pelo sistema educacional em vigor.

A pesquisa indica a necessidade de mudanças no ensino de matemática, com atividades que favoreçam a mobilização cognitiva do sujeito para além da memorização mecânica de regras, formulas e algoritmos ou técnicas de resolução. Atividades que estimulem ou aprimore a capacidade dos estudantes de estabelecer relações logicas de comparação, correspondência, seriação, inclusão, classificação e conservação, e, por meio de sucessivas abstrações decorrentes dessas relações, conduza o estudante a tomada de consciência de suas ações, o que implica em compreensão.

Na segunda fase da pesquisa, referente à intervenção pedagógica, as atividades desenvolvidas pela estratégia da sequência didática, com o uso de material concreto, utilizada quando da experimentação didática favoreceram a interação entre os sujeitos, estimulando sua atividade cognitiva. Nessa interação, instaurou-se o diálogo entre os estudantes e entre estes e o professor pesquisador, sendo o diálogo, nesse caso, condição necessária à tomada de consciência dos estudantes por meio da execução e da explicação de suas produções frente a situações didáticas com material concreto.

Um ponto importante a destacar, foi a dificuldade apresentada pelos estudantes no início das atividades em coordenar ações diversas, como pensar a ação a ser executada, manipular e representar com as peças do material dourado, registrar no papel passo a passo cada ação executada e explicar suas produções. Por várias vezes, os estudantes esqueciam-se de registrar no papel a ação executada com o material dourado, ou teimavam em resolver as contas direto no papel, sem antes movimentar as peças.

Este fato indica que as atividades de sala de aula, oferecidas pelo modelo tradicional de ensino de matemática, com conteúdos abstratos, visando apenas a memorização de algoritmos, não mobiliza a atividade cognitiva dos estudantes, no sentido de desenvolver a capacidade de abstração e reflexão por meio da coordenação de ações diversas como as realizadas pela estratégia das sequencias didáticas, ao contrário, acaba limitando o estudante a apenas reproduzir o que foi ensinado, daí ser capaz de realizar apenas uma tarefa por vez; ou bem ele escreve no papel ou bem manipula as peças do material dourado, ou bem explica sua produção. O estudante acostumou a fazer contas no papel ou às vezes no quadro, o que não exige coordenação de ações diversas.

No estudo com as situações didáticas, as atividades desenvolvidas pela estratégia da sequência didática, apresentaram elementos importantes e favoráveis à construção do conhecimento matemático, ao promover a interação entre os sujeitos por meio da ação física, verbal e cognitiva. O trabalho com o material dourado estimulou a atividade cognitiva dos estudantes ao permitir-lhes que agissem sobre os objetos concretos e, por meio de abstrações reflexionantes, modificassem-nos, inferindo-lhes propriedades externas.

Ao perceber a cor e o tamanho das peças do material concreto, por exemplo, o estudante faz abstração empírica; ao atribuir propriedades ao objeto, como por exemplo, ao seria-los segundo uma ordem pré-estabelecida, ou ao nomear os cubinhos, as barras e as placas, como unidade, dezena e centena, respectivamente, modifica-o, por meio de abstrações reflexionantes, primeiro do tipo pseudo-empírica, realizada a partir da coordenação das ações do estudante já em pensamento, porém, ainda com a presença do objeto concreto; segundo, abstrações refletidas, com coordenações de ação apenas em pensamento, ou seja, sem a necessidade do objeto concreto, haja vista que a experiência anterior é a base para esse tipo de reflexão.

O estudo com as situações didáticas trouxe-nos uma perspectiva de uma nova configuração didático-pedagógica da sala de aula de matemática, pautada numa visão construtivista, tendo em vista que muitas das dificuldades conceituais, bem como a falta de interesse e de motivação pela matemática, deve-se ao modelo tradicional de ensino desta disciplina que, em geral, tem como abordagem predominante a exposição sumária de conteúdos, os exercícios e a avaliação que geralmente se resume em provas escritas.

De acordo com as análises feitas, acreditamos que a proposta das situações didáticas seja uma estratégia de ensino viável para promover um ambiente de aprendizagem propício ao desenvolvimento de habilidades cognitivas que favoreçam a construção do conhecimento matemático. Pois, não podemos esquecer que as possibilidades de todo ser humano são as mesmas, no entanto, sua concretização vai depender das solicitações do meio, ou seja, das oportunidades oferecidas para que as trocas necessárias à construção do conhecimento sejam favorecidas. Pois, seja por falta de recursos didáticos, ou, por conta da concepção empirista de ensino antidialógica e unilateral, muitos estudantes, especialmente os de escolas públicas apresentam extremas dificuldades em matemática.

Significa dizer que se o meio escolar não oportunizar situações que favoreçam a mobilização cognitiva dos sujeitos da aprendizagem, desde as séries iniciais, o processo de construção de estruturas mentais específicas e responsáveis pelo conhecimento será mais lento, comprometendo, assim, a capacidade dos estudantes de estabelecerem relações lógicas (como as descritas nas páginas 93 e 94) o que implica em sérias dificuldades e, consequentemente, em defasagem na aprendizagem matemática, especialmente na relação entre a série e os repertórios dos conteúdos dos estudantes.

Nesse sentido, torna-se imprescindível na sala de aula de matemática um trabalho pedagógico que faça funcionar a relação professor-estudante-conhecimento. Onde seja possível criar situações didáticas de aprendizagem que favoreçam a atividade cognitiva dos estudantes para além da mera memorização de conteúdos. Uma educação dialógica e problematizadora, que permite o debate, a discussão e a troca de opiniões; na qual, por meio da interação, especialmente do diálogo com professor, o estudante tenha condições de superar a curiosidade ingênua, da pura percepção e da reprodução passiva, e alcance o nível da curiosidade epistemológica, mediante a ação e a reflexão, a abstração e a tomada de consciência; condições necessárias à construção do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

BROUSSEAU, G. ***Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas***: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BECKER, F. ***O caminho da aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire***: da ação à operação. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

BECKER, F. ***Epistemologia do professor de Matemática***. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BARDIN, L. ***Análise de conteúdo***. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2011.

COLLARES, D. ***Epistemologia genética e pesquisa docente***: estudo das ações no contexto escolar. 2001. 204 p. Tese, Doutorado em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul*,* Porto Alegre, 2001.

FREIRE, P. ***Pedagogia do oprimido***. 18. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1988. 184p.

FREIRE, P. ***Pedagogia da Autonomia***, saberes necessários a prática pedagógica. São Paulo, Editora Paz e Terra, 1996.

FREIRE, P. ***Conscientização*** – Teoria e pratica da libertação: uma introdução ao pensamento de Paulo Freire. São Paulo: Cortez & Moraes, 1979.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. ***Investigação em educação matemática***: percursos teóricos e Metodológicos – (Coleção formação de professores). 3. ed. rev. – Campinas. SP: Autores Associados, 2012.

GADOTTI, M. ***Convite à leitura de Paulo Freire***. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2001.

GÁLVEZ, G. ***A didática da matemática***. In: Parra, C.; Saiz, I (orgs.). ***Didática da Matemática***: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

MOREIRA, M. A. ***Teorias de Aprendizagem***. 2. ed. ampl. – [Reimpr.]. – São Paulo: E.P.U., 2014.

OSTROWER, F. ***Criatividade e processos de criação***. Petrópolis, Vozes, 1987.

PIAGET, J. ***Biologia e Conhecimento***. 2 ed. Vozes: Petrópolis, 1996.

PIAGET, J. ***A tomada de consciência***. Tradução Edson B. de Souza. São Paulo: Edusp, 1977.

PIAGET, J. ***A equilibração das estruturas cognitivas***: problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

PIAGET, J. ***A construção do real na criança***. 3. ed. Tradução Ramon A. Vasques. São Paulo: Ática, 2002.

PIAGET, J. ***Fazer e compreender***. Tradução Christina L. de P. Leite. São Paulo: Melhoramentos /Editora da USP, 1978b.

PIAGET, J. ***Abstração reflexionante***: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Tradução Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. – Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PAIS, L. C. ***Didática da matemática***: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. ***Psicologia e epistemologia genética de Jean Piaget***. São Paulo: EPU, 1988.

SALADINI, A. C. ***A educação física e a tomada de consciência da ação motora da criança***. 2006. 304 p. Tese, Doutorado em Educação. Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2006.

WERNECK, V. R. ***Sobre o processo de construção do conhecimento***: O papel do ensino e da pesquisa. Ensaio: aval. pol. públ. Educ., Rio de Janeiro, v.14, n.51, p. 173-196, abr./jun. 2006.

ZABALA, A. ***A prática educativa***: como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998

OBRAS CONSULTADAS

ANTUNES, C. ***Piaget, Vygotsk, Paulo Freire e Maria Montessori em minha sala de aula***. São Paulo: Ciranda Cultural, 2008.

ARTIGUE, M. ***Ingèniere didactique***. RDM, V9, n3, p231-308,1988.

AZEVEDO, M. C. P. S. ***Situações de ensino-aprendizagem***: Análise de uma sequência didática de física a partir da Teoria das Situações de Brousseau. 2008. 284 p. Dissertação, Mestrado em Educação, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros curriculares nacionais***: Matemática. MEC. Brasília, p. 148. 1998.

BRUN, J. ***Didática das Matemáticas***. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996.

BERENGER, M. I. S. ***A aplicação da engenharia didática no ensino das ciências exatas***. 2010. 36 p. Monografia, Especialização em docência do ensino superior. Instituto a vez do mestre, Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, 2010.

FERRACIOLI, L. ***Aprendizagem, desenvolvimento e conhecimento na obra de Jean Piaget***: uma análise do processo de ensino-aprendizagem em Ciências. **Revista brasileira**, Brasília, v. 80, n. 194, p. 5-18, jan./abr. 1999.

FERREIRA, F. A. ***Demonstrações em geometria euclidiana:*** o uso da sequência didática como recurso metodológico em um curso de licenciatura de matemática. 2008. 186 p. Dissertação, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

GARCÍA, R. ***O conhecimento em construção***: das formulações de Jean Piaget à teoria se sistemas complexos. trad. Valério Campo. Porto Alegre: Artmed, 2002.

GOMES, H. C. M. ***Reflexões sobre uma prática de ensino:*** uma engenharia didática. 2008. 58 p. Monografia, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. ***Pesquisa em educação***: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MONTOYA. A. O. D. (org.) et al. ***Jean Piaget no século XXI***: escritos de epistemologia e psicologia genéticas. São Paulo: Cultura Acadêmica; Marília: Oficina Universitária, 2011. 236 p. il.

PERETTI, L. ***Sequência didática na matemática.*** **Revista de Educação do Ideau**, Estação, v. 8, n. 17, p. 1-14, jan./jun. 2013

SALADINI, A. C. ***Da ação à reflexão***: O processo de tomada de consciência. **Revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genética**, Marília, v. 1, n. 2, p. 31-54, jul./dez. 2008.

SILVA, W. B. ***A pedagogia dialógica de Paulo Freire e as contribuições da programação neurolinguística***: uma reflexão sobre o papel da comunicação na Educação Popular. 2006. 85 p. Dissertação, Mestrado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.

TRIGO, C. E. C. ***Análise de uma experiência de intervenção pedagógica com uso de experimentos matemáticos:*** discutindo a importância da extensão universitária na formação docente. 2011. 99 p. Dissertação, Mestrado profissional em Ensino de Ciências, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia, Nilópolis, 2011.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. ***Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau***, **Zetetiké – FE/Unicamp**, Campinas, v. 21, n. 39, p. 155-168, jan./jun. 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ROTEIRO DE ENTREVISTA

1. Você gosta de estudar matemática? Por quê?
2. O que você acha da aula de matemática? Por quê?
3. Para que serve a matemática ensinada na sala de aula?
4. Você usa a matemática no seu cotidiano? Em que situação?
5. Como você descreve ou interpreta a sequência da aula de matemática?
6. Que materiais didáticos são utilizados? Somente o livro didático?
7. Como utilizam o livro didático? Ou as aulas são apenas no quadro?
8. São feitos trabalhos em grupo? Quando? Em que situação?
9. Você acha importante o trabalho em grupo? Por quê?
10. Você prefere fazer os trabalhos de sala de aula individualmente ou em grupo? Por quê?
11. Você manifesta-se oralmente nas aulas de matemática? Em que situação?
12. O que você faz, quando tem dúvidas na resolução de um problema de matemática? E quando não entende a explicação do professor?
13. Você acha importante a participação da turma na resolução de problemas via oral ou no quadro? Por quê?
14. Como você se sente quando o professor lhe faz uma pergunta sobre matemática? E quando solicitado(a) pra ir ao quadro resolver um exercício? Por quê?
15. Como é feita a avaliação de matemática? Que instrumentos são usados?
16. Como você se sente durante as avaliações de matemática?
17. Em sua opinião, as aulas de matemática poderiam ser melhores? Como?
18. Como ensinava o melhor professor de matemática que você teve?

APÊNDICE B – ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO DE SALA DE AULA

Professor Pesquisador: Nixon da Silva Moçambite

Série/Turma:________Turno: ______________________ Data:_____/_____/_______

Conteúdo matemático: ____

Objetivo da aula: ____

Itens a observar na intervenção pedagógica do Professor

ITENS A OBSERVAR	SIM	NÃO	COMENTÁRIOS	ANÁLISE DOS DADOS
Planejamento da aula				
Objetivo da aula				
Conteúdo: apresentação; desdobramento/conceitos				
Procedimentos: exercícios; orientação oral; leitura; trabalho em grupo				
Interação com os alunos				
Recursos didáticos				
Avaliação da aprendizagem				

Itens a observar na ação dos alunos

ITENS A OBSERVAR	SIM	NÃO	COMENTÁRIOS	ANÁLISE DOS DADOS
Envolvimento/participação				
Motivação/interesse				
Trabalho em equipe/interação				
Manifestação oral				
Relação com o professor				

APÊNDICE C – TCLE

UFAM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPGECIM

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos seu(sua) filho(a), aluno(a) regularmente matriculado(a) na **Escola Municipal Lucila Freitas** no turno vespertino para participar da Pesquisa ***"Situações Didáticas na Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Construção do Conhecimento"***, sob a responsabilidade do pesquisador **Nixon da Silva Moçambite** (professor de matemática da própria escola, no momento afastado para fazer mestrado) e orientação do **Prof. Dr. Luiz Carlos Cerquinho de Brito**, a qual pretende **estudar o processo de aprendizagem matemática no 7º ano do ensino fundamental a partir de situações didáticas na perspectiva da construção do conhecimento.**

Para tanto, **precisamos de sua autorização** como representante legal do(a) menor. A participação do aluno é voluntária e se dará por meio de entrevistas, testes diagnósticos e avaliativos, resolução de problemas de matemática etc. Além disso, com o auxílio de filmadora, gravador de voz, câmera digital, observação e anotações do professor pesquisador, será feito o registro da dinâmica de sala de aula, no que se refere à mobilização (cognitiva, motora e afetiva) dos alunos, suas produções escritas e manifestações orais quando descrevem suas produções ou quando dialogam entre si e com o professor durante o desenvolvimento das atividades pedagógicas, a fim de que seja possível observar e analisar a organização didático-pedagógica de sala de aula no processo de ensino e aprendizagem de matemática; caracterizar e analisar a mobilização e aprendizagem dos estudantes no desenvolvimento de sequências didáticas com conteúdos de matemática; discutir a importância da manifestação oral e a tomada de consciência dos estudantes diante das situações didáticas e a didáticas como condição para a aprendizagem e construção do conhecimento matemático.

Os riscos decorrentes da participação do aluno na pesquisa podem ser advindos do constrangimento devido a não compreensão do objetivo e etapas da pesquisa, ou em trabalhar em equipe (socialização), ou ainda em expor dificuldades conceituais matemáticas durante o desenvolvimento da sequência didática de atividades. Se o(a) senhor(a) aceitar e autorizar o seu filho a participar, estará contribuindo para produzir conhecimentos a cerca de saberes necessários para uma nova organização didático-pedagógica de sala de aula no ensino de matemática que favoreça a interação entre o sujeito e o meio, contemplando a manifestação oral e a tomada de consciência dos estudantes como condição necessária para a aprendizagem e construção do conhecimento matemático, a fim de contribuir não só para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como também, habilidades formativas, indispensáveis, hoje, para a constituição integral do estudante, principalmente, em sua vida pessoal e profissional.

O senhor(a) tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta dos dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo a sua pessoa, e, muito menos ao aluno. O(A) senhor(a) e o aluno não terão nenhuma despesa e também não receberão nenhuma remuneração. Os resultados da pesquisa serão analisados e publicados, mas sua identidade e, principalmente, a do aluno não serão divulgadas, sendo guardada em sigilo. Para qualquer outra informação sobre a pesquisa, o(a) senhor(a) poderá entrar em contato com o pesquisador no endereço a seguir: Av. Max Teixeira, Bloco 14, Apto 106, Conj. Osias Monteiro, Cidade Nova I, fone 994273553; ou no Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho, na Av. Rodrigo Otávio, 6200, Coroado, CEP 69077-000 - Manaus-AM, Setor Norte, Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Bloco 03, Departamento de Física, pelo telefone (92) 3305-2829; ou poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFAM na Rua Teresina, 495, Adrianópolis, Manaus-AM, telefones (92) 3305-1181 / Ramal 2004 / (92) 99171-2496.

Consentimento Pós–Informação

Eu,____, RG Nº _______________ fui informado sobre o que o pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo e como representante legal, autorizo expressamente o aluno ____a participar do projeto, ciente de que não vamos ganhar nada e que podemos sair quando quisermos sem nenhum problema. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

Data: ____/ ____/ ______ ____

Assinatura do responsável pelo aluno

APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO DO MENOR

Você está sendo convidado para participar da pesquisa ***“Situações Didáticas na Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Construção do Conhecimento”*** de responsabilidade do pesquisador **Nixon da Silva Moçambite**, sob a orientação do **Prof. Dr. Luiz Carlos Cerquinho de Brito.** Com este trabalho queremos **estudar o processo de aprendizagem matemática no 7º ano do ensino fundamental a partir de situações didáticas na perspectiva da construção do conhecimento**. As crianças que irão participar dessa pesquisa têm de **11** a **13** anos de idade. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir.

A pesquisa será feita na sua própria escola, a saber, Escola Municipal Lucila Freitas onde as crianças serão convidadas a responder testes diagnósticos e avaliativos, participar de entrevistas, de rodas de conversa e de atividades diferenciadas de matemática, individualmente e em grupo, acompanhadas pelo professor pesquisador**.** Para registro dessas ações ou atividades, serão usados os seguintes recursos: filmadora, câmera digital, gravador de voz, observação e anotações do professor, além de suas produções escritas**.**

As tarefas são simples e seguras, mas é possível que ocorra riscos, como constrangimento devido a não compreensão do objetivo e etapas da pesquisa, ou em trabalhar em equipe (socialização), ou ainda em expor dificuldades conceituais matemáticas durante o desenvolvimento da sequência didática de atividades. Caso aconteça algo errado, você ou seu responsável podem me procurar para conversar ou podem ligar para mim, Professor Pesquisador **Nixon da Silva Moçambite**, no número **994273553.**

Mas há coisas boas que podem acontecer se você participar da pesquisa. Além de aprender matemática, através de atividades dinâmicas e divertidas, você estará contribuindo para a produção de conhecimentos, acerca de saberes necessários para uma nova organização da sala de aula no ensino de matemática, que ajudará não só você, mas, também, seus colegas de classe, alunos de outras turmas e até de outras escolas, a desenvolver habilidades e competências, dentro da matemática, necessárias para a constituição integral do estudante.

Se algumas das atividades acontecerem em outro horário, que não seja o seu horário de aula, e você morar longe da escola, eu (professor pesquisador) darei ao seu pai o valor em dinheiro, suficiente para o seu transporte. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar as crianças que participaram da pesquisa. Quando terminarmos a pesquisa haverá o descarte das imagens feitas com o uso da filmadora e da câmera digital.

Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar pessoalmente ou através do celular número **994273553.**

Eu,____aceito participar da pesquisa ***"Situações Didáticas na Aprendizagem Matemática na Perspectiva de Construção do Conhecimento"***, que tem o objetivo de **Estudar o processo de aprendizagem e a construção do conhecimento matemático no 7º ano do ensino fundamental, através de situações didáticas.** Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas. O pesquisador esclareceu minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis. Entendi que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

Manaus, _____de ______________de _________.

____

Assinatura do menor (aluno sujeito da pesquisa)

____

Assinatura do pesquisador

ANEXOS

ANEXO A – MODELO DE TESTE DIAGNÓSTICO

Escola Municipal Lucila Freitas

Professor Pesquisador: Nixon da Silva Moçambite

Aluno (a):____

Série/Turma : __________ Turno:_________________________ Data:_____/_____/______

1. Observe o número 32017865 e responda às questões:

a. Quantas classes? ______

b. Quantas ordens? ______

c. Qual é o algarismo da 5ª ordem? ______

d. Qual é o algarismo da unidade de milhar? ______

e. Qual é o algarismo da dezena de milhão?______

f. Como se lê este número?____

2. A região Norte, com cerca de três milhões, oitocentos e noventa e seis mil e seiscentos quilômetros quadrados, é a maior região brasileira. Esse número escrito com algarismos é:

a) 3000000000 b) 3896600 c) 3896600000 d) 3986600

3. Numa caixa, existem 10 bolas brancas, 15 pretas e 20 vermelhas, todas com o mesmo peso e tamanho. A chance de uma pessoa retirar, ao acaso, uma bola vermelha dessa caixa é de

a) 20 em 10 b) 20 em 15 c) 20 em 25 d) 20 em 45

4. Isabel foi à uma feira de animais e comprou 8 pintinhos. Cada um custou 2 reais. Isabel tinha duas notas de 20 reais. Com quanto Isabel ficou?

a) 14 reais b) 24 reais c) 34 reais d) 40 reais

5. Tenho 1320 figurinhas. Meu primo tem a metade do que tenho. Minha irmã tem o triplo das figurinhas do meu primo. Quantas figurinhas minha irmã tem?

a) 1900 b) 1930 c) 1940 d) 1980

6. Luiz tem uma coleção de bolinhas de gude. Ontem ele ganhou 24 bolinhas novas de seu primo e ficou com 150 bolinhas. Desse modo, podemos afirmar que, antes de ganhar esse presente de seu primo, Luíz tinha:

a) 124 bolinhas b) 125 bolinhas c) 126 bolinhas d) 174 bolinhas

7. Em qual dessas sequências o 10º termo é 54?

a) 1, 3, 5, 7, 9, ... b) 0, 2, 4, 6, 8, ... c) 0, 6, 12, 18, 24, ...
d) 0, 10, 20, 30, 40, ...

8. Numa fábrica do distrito industrial de Manaus, a cada 100 peças produzidas, 12 são separadas e enviadas ao setor responsável pelo controle de qualidade. No mês de julho foram produzidas 450 peças. O número de peças que devem ser enviadas ao setor de controle de qualidade é

a) 48 b) 50 c) 54 d) 120

9. Qual é o instrumento e a unidade de medida mais adequados para medir a largura de uma praça?

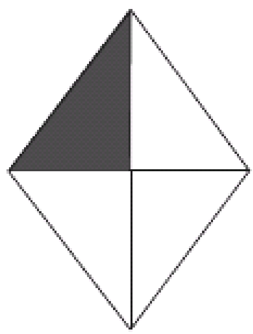
a) a trena e o centímetro
b) a trena e o metro
c) a régua e o quilômetro
d) a régua e o metro

10.

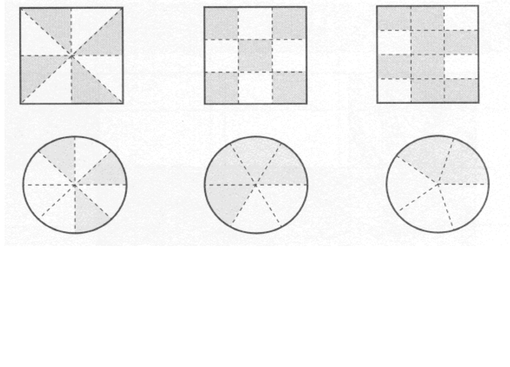
O losango ao lado foi dividido em partes iguais.

A parte pintada corresponde a que porcentagem do losango todo?

(A) 4%
(B) 25%
(C) 40%
(D) 50%



11. Cada uma das figuras está dividida em partes iguais.



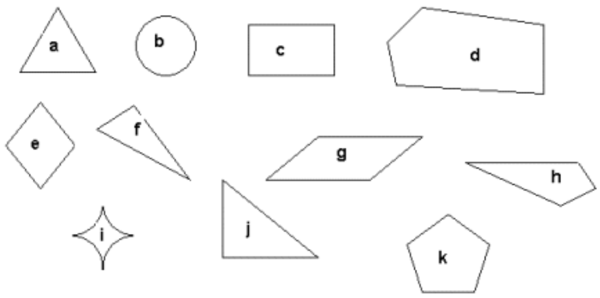
a) Escreva, para cada caso, uma fração correspondente à parte colorida.

b) Faça a leitura das frações do item anterior.

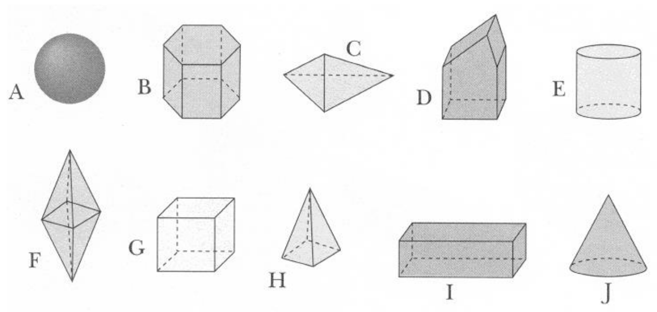
13. Considere as seguintes figuras planas e indique as que são:

a) Polígonos
b) Quadriláteros

c) Pentágonos
d) Trângulos



14. Observe os sólidos geométricos e complete:



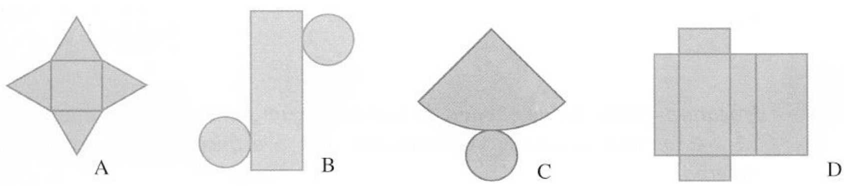
a)_________ são poliedros; b)_________ são prismas;

c)_________ são pirâmides; d)_________ não são poliedros.

e) Indique o número de faces, vértices e arestas dos sólidos B, C e I.

f) Indique o nome dos sólidos A, B e H.

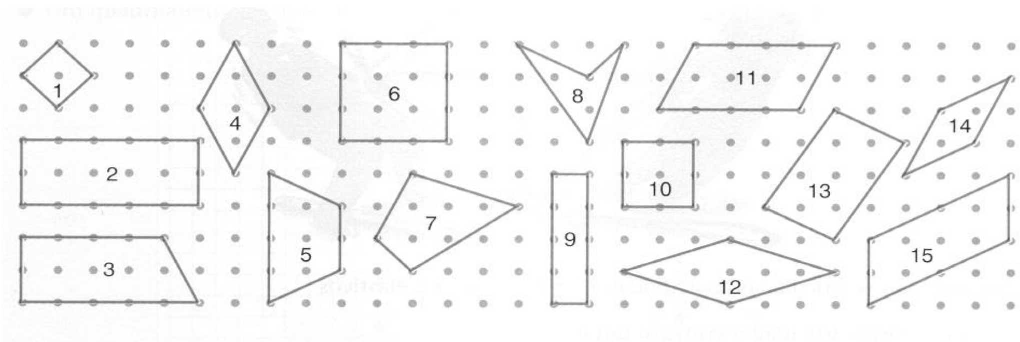
15. Qual o sólido geométrico, do exercício anterior, que corresponde a cada uma das planificações seguintes?

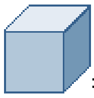


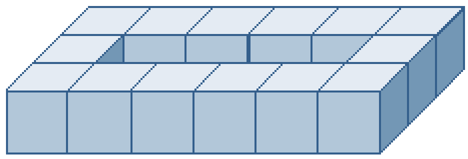
16. Dos quadriláteros abaixo representados, indica os que são:

a) Paralelogramos **c)** Retângulos

b) Losangos **d)** Trapézios **e)** Quadrados



16. Qual é o volume do sólido seguinte, se  = 1 cm^3 ?



ANEXO B – TESTE AVALIATIVO

Escola Municipal Lucila Freitas

Professor Pesquisador: Nixon da Silva Moçambite

Aluno(a):____

Série/Turma: ________Turno:_____________________ Data:_____/_____/_______

1. Observe o número 32017806529 e responda às questões:
   a. Quantas classes? ______
   b. Quantas ordens? ______
   c. Qual é o algarismo da 5ª ordem? ______
   d. Qual é o algarismo da unidade de milhar? _______
   e. Qual é o algarismo da centena de milhão?_______
   f. Qual é o algarismo da unidade de bilhão?_______
   g. Como se lê este número?____
   ____

2. Dados os números abaixo determine: o número de classes e ordens de cada número, em particular, a ordem do algarismo 6. Em seguida, escreva-os por extenso.
   a) 30628
   b) 2069173
   c) 6740915320
   d) 8106237905

3. A distância entre a Terra e a Lua é de 384000 quilômetros (km), aproximadamente. Escreva por extenso o número que expressa essa distância.

4. A Região norte, com cerca de três milhões, oitocentos e noventa e seis mil e seiscentos quilômetros quadrados, é a maior região brasileira. Esse número escrito com algarismos é:

a) 3000000000 b) 3896600 c) 3896600000 d) 3986600

ANEXO C – TESTE AVALIATIVO

Escola Municipal Lucila Freitas

Professor Pesquisador: Nixon da Silva Moçambite

Aluno (a):____

Série/Turma: ________Turno:_____________________ Data:_____/_____/______

1. Arme e efetue:

   a) 308 + 42 + 671
   b) 482 + 1329 + 5
   c) 869 – 324
   d) 2905 – 358

2. Luiz tem uma coleção de bolinhas de gude. Ontem ele ganhou 24 bolinhas novas de seu primo e ficou com 150 bolinhas. Desse modo, podemos afirmar que, antes de ganhar esse presente de seu primo, Luíz tinha:

a) 124 bolinhas b) 125 bolinhas c) 126 bolinhas d) 174 bolinhas

3. Isabel foi à uma feira de animais e comprou 8 pintinhos. Cada um custou 2 reais. Isabel tinha duas notas de 20 reais. Com quanto Isabel ficou?

a) 14 reais b) 24 reais c) 34 reais d) 40 reais

4. Tenho 1320 figurinhas. Meu primo tem a metade do que tenho. Minha irmã tem o triplo das figurinhas do meu primo. Quantas figurinhas minha irmã tem?

a) 1900 b) 1930 c) 1940 d) 1980

ANEXO D – SEQUÊNCIA DIDÁTICA (com adaptações)

Nº DE ATIVIDADES: 06

Objetivos comuns a todas as atividades:

- Favorecer a ação e a coordenação das ações do estudante com autonomia, independência e a autoconfiança, enquanto sujeito do processo de construção do conhecimento;
- Conceber e desenvolver experiências concretas e estruturadas para conduzir, gradualmente, o estudante à abstrações cada vez maiores;
- Fazer o estudante, por ele mesmo, tomar consciência dos acertos e dos erros que comete ou das dúvidas que aparecem ao realizar uma determinada ação com o material;
- Trabalhar os processos lógicos de correspondência, comparação, classificação, sequenciação, seriação e inclusão do estudante ao manipular os materiais;
- Desenvolver o espírito de trabalho em equipe, participativo e responsável, no sentido de cooperação mútua para a solução de problemas.
- Favorecer o diálogo entre os estudante e entre estes e o professor – na troca de opiniões, levantamento de hipóteses, perguntas, questionamentos e conclusões – como condição para a aprendizagem matemática;

MATERIAL DOURADO

Apresentação e objetivo do Material: O Material Dourado foi criado pela médica e educadora italiana Maria Montessori (1870 a 1952), com o intuito de auxiliar, por meio de atividades criativas, o ensino e a aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal-Posicional e os métodos para efetuar as operações fundamentais (ou seja, os algoritmos). Com o Material Dourado as relações numéricas abstratas passam a ter uma imagem concreta, facilitando a compreensão dos algoritmos, além de um notável desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

Figura 26: material dourado

O Material Dourado é constituído por cubinhos, barras, placas e um cubo grande (Figura 26), onde o cubo grande é formado por 10 placas, a placa é formada por 10 barras e a barra é formada por 10 cubinhos. Esse material baseia-se em regras do nosso sistema de numeração.

Conteúdo a ser trabalhado: Sistema de numeração decimal – Operações aritméticas fundamentais com números naturais

Número de aulas: 15 aulas

Tempo de duração da aula: 1,5 horas

Objetivo Geral da atividade: Construir o algoritmo da adição, da subtração, da multiplicação e divisão com números naturais**.**

Descrição da aula/atividades: O trabalho com o material dourado se inicia com a divisão da turma em grupos de quatro ou cinco estudantes e com o reconhecimento do material. Neste momento os estudantes podem manusear as peças de forma livre, fazer suas descobertas e estabelecer as suas relações. Em seguida procedem-se algumas atividades que, devem ser dispostas de forma progressiva a fim de se obter o máximo de resultados favoráveis estimulando a compreensão de conceitos que serão fundamentais para uma aprendizagem matemática com construção de conhecimento, estando aí incluídos não somente as operações e representações com números, mas, principalmente as atividades cognitivas dos sujeitos, com conceitos de comparação, correspondência, seriação, ordenação, inclusão hierárquica, conservação de quantidades, abstração reflexionante e tomada de consciência.

Atividade 1: Conceito de unidade dezena e centena

Nº de aulas: 01

Objetivos:

- Conhecer e identificar as peças do material dourado por meio da comparação relacionando-as com a nomenclatura unidade, dezena, centena e unidade de milhar.
- Estabelecer relações de comparação e correspondência entre as peças e regras de equivalência de agrupamentos e desagrupamentos.

Metodologia: A estratégia principal é deixar com que os estudantes manipulem livremente as peças, em grupos distintos, da forma que quiserem. Em seguida, sugere-se que estabeleçam diálogos e apresentações nos quais eles são levados a dizer os nomes das peças relacionando-os com a quantidade representada por cada uma delas, para que cheguem à conclusão que será importante para o desenvolvimento do trabalho que se conheça e identifique cada peça, usando a nomenclatura formal da matemática.

Em seguida passa-se à fase de agrupar e desagrupar os materiais e estabelecer relações; neste momento, durante algum tempo, os estudantes brincam com o material, fazendo construções livres, onde por meio de sucessivas trocas e destrocas de 10 em 10, possam perceber, por conta própria, as relações entre as peças. Por exemplo, podemos encontrar estudantes que concluem:

– Ah! A barra é formada por 10 cubinhos!

– E a placa é formada por 10 barras!

– Veja, o cubo grande é formado por 10 placas!

Nesse momento, o professor pode intervir fazendo alguns questionamentos a fim de reforçar as conclusões dos estudantes ou tirar possíveis dúvidas de alguns. Por exemplo:

Quantos cubinhos precisam para forma uma barra? E pra três barras?

Quantas barras são necessárias para formar uma placa? E duas?

Com quantas placas forma-se um cubo grande?

O professor estimula os estudantes a obterem conclusões sugerindo as seguintes construções:

– uma placa feita de barras;

– uma placa feita de cubinhos;

– um cubo grande feito de barras;

– um cubo grande feito de placas;

Após os estudantes se familiarizarem com as peças do material dourado e com as relações entre elas partimos para a segunda parte da atividade.

Atividade 2: Trabalhando o conceito de ordem e classe

Nº de aulas: 02

Objetivo: Construir o conceito de ordem e classe por meio da comparação e da correspondência de cada grupo de peças ao seu valor numérico e sua escrita por extenso;

Favorecer a tomada de consciência da seriação das ordens na composição dos números.

Metodologia: o professor pode mostrar cartões com números variados e pedir aos estudantes que representem com peças do material dourado, usando a menor quantidade de peças possível. O professor, pode ainda fazer representações com as peças do material dourado e pedir aos estudantes que escrevam em numerais e por extenso as representações feitas por ele (professor).

Atividade 3: Ampliando o conceito de ordem e classe

Nº de aulas: 02

Objetivos: Ampliar o conceito e ordem e classe com tomada de consciência da seriação dos algarismos na composição dos números;

- Compreender que o sucessor é o que tem ” 1 a mais” na sequencia numérica, e que o antecessor é o que tem “1 a menos” na sequencia numérica;
- Construir o conceito de sucessor e antecessor de números naturais.
- Compreender que cada algarismo, de acordo com a posição do número, assume um valor conforme a ordem estabelecida pela seriação.

Metodologia: O professor combina com os estudantes:

– Vamos fazer um trem. O primeiro vagão é um cubinho. O vagão seguinte terá um cubinho a mais que o anterior e assim por diante. O último vagão será formado por duas barras. Quando os estudantes terminarem de montar o trem, recebem cartões nos quais devem escrever o código (número de cubinhos) de cada vagão. Esta atividade leva à formação da ideia de sucessor. Fica claro para o aluno o “mais um”, na sequencia dos números. Ela contribui também para a melhor compreensão do valor posicional dos algarismos na escrita dos números.

Em seguida, o professor combina com os estudantes:

– Agora vamos fazer um trem especial. O primeiro vagão é formado por duas barras. O vagão seguinte tem um cubinho a menos e assim por diante. O último vagão será um cubinho. Quando os estudantes terminam de montar o trem, recebem cartões nas quais devem escrever o código de cada vagão. Esta atividade trabalha a ideia de antecessor. Fica claro para o estudante o “menos um” na sequencia dos números. Ela contribui também para uma melhor compreensão do valor posicional dos algarismos na escrita dos números.

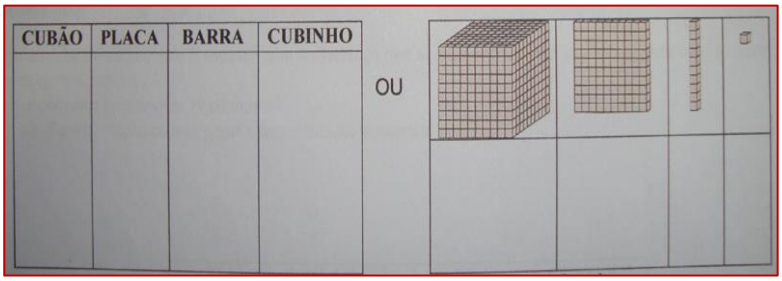
Atividade 4: Construção do algoritmo da adição com números naturais

Nº de aulas: 02

Objetivo: Construir o algoritmo da adição

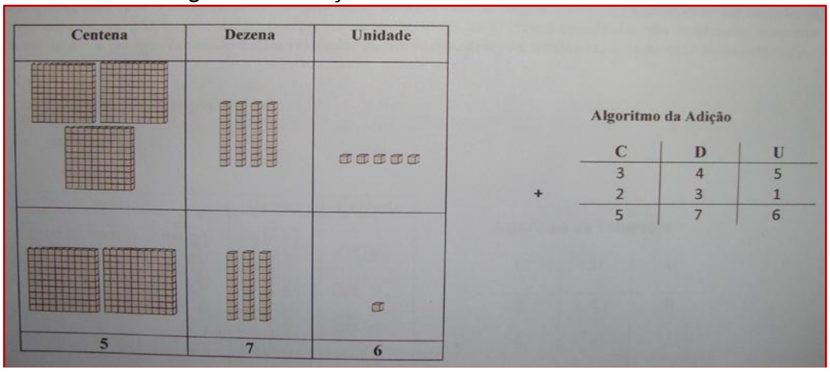
A realização de adições com o Material Dourado deve ser feita com o auxílio do Quadro Valor de Lugar (Figura 27). O ideal é que a evolução do grau de dificuldade ocorra gradativamente, inicialmente com adição sem reserva. O algoritmo da adição poderá ser compreendido facilmente se for introduzido paralelamente à realização das adições feitas com o Material Dourado. Como pré-requisito, os estudantes devem dominar os conceitos e relações envolvendo o Sistema de Numeração Decimal.

Figura 27: Quadro Valor de Lugar (QVL)



a) Adição sem reserva:

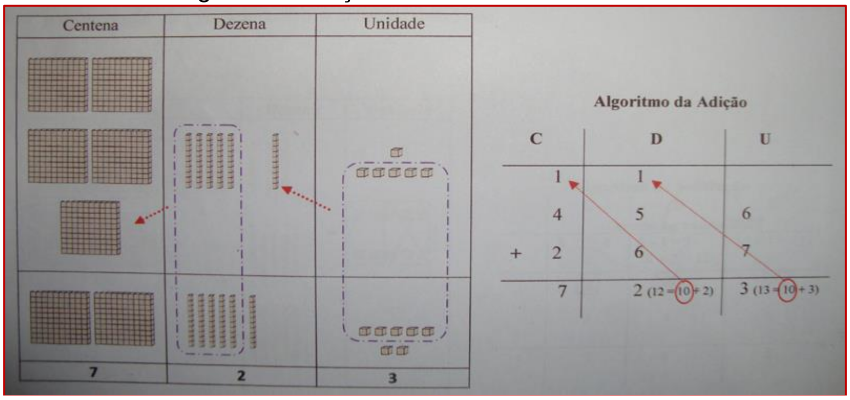
Figura 28: Adição sem reserva: 345 + 231



b) Adição com reserva:

É importante ressaltar que, com o uso do Material Dourado, fica claro para o aluno o processo do “vai um” como o agrupamento de 10 elementos, havendo, portanto, uma mudança no valor relativo do número, fica evidente que ocorre uma “transformação”.

Figura 29: Adição com reserva: 456 + 267



Atividade 5: Construção do algoritmo da subtração com números naturais

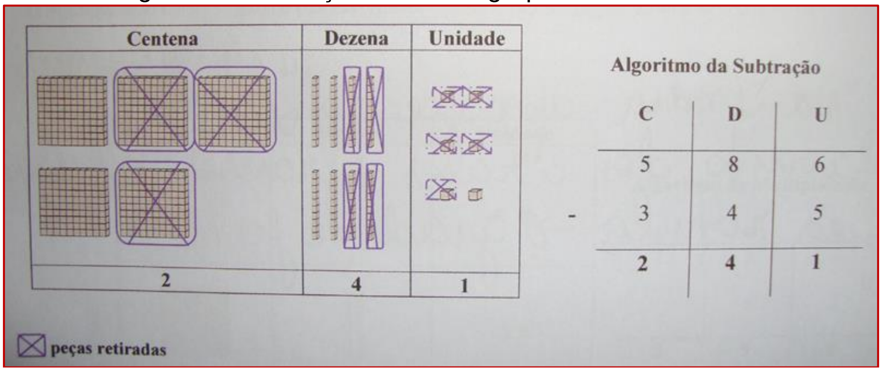
Nº de aula: 03

Objetivo: Construir o algoritmo da subtração

A realização de subtrações com o material dourado também deve ser feita com o auxílio do QVL com o mesmo cuidado no avanço gradativo de conceitos, iniciando com as subtrações sem desagrupamentos podendo ser realizadas em paralelo, mas após o entendimento do conceito e do algoritmo da adição. Cuidado especial deve ser tomado, pois diferentemente da adição que exige a representação de todas as parcelas envolvidas, na subtração somente o minuendo deve ser representado e dele retiradas as unidades, dezenas, centenas, … existentes no subtraendo.

a) Subtração sem desagrupamento:

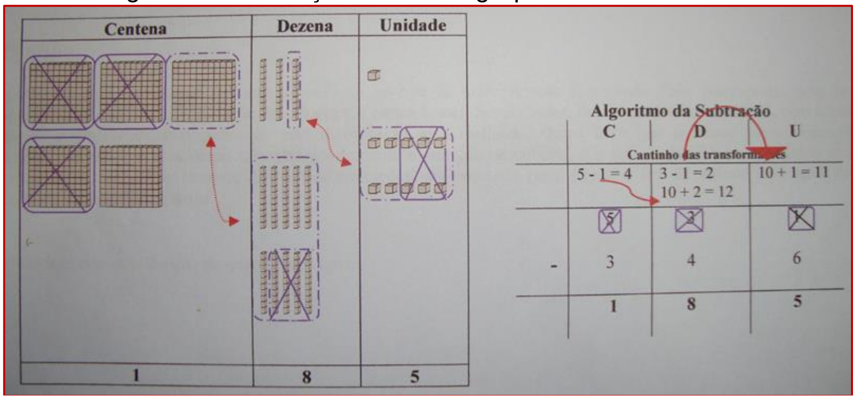
Figura 30: Subtração sem desagrupamento: 586 – 345



b) Subtração com desagrupamento:

Aqui o “pegar emprestado” ganha significado para o estudante (mas mesmo assim, evite usar essa palavra, sugerimos, transformar, trocar, etc.), pois ele passa a entender que há um desagrupamento e uma “transformação” de 1 elemento em 10 de um grupo abaixo dele.

Figura 31: Subtração com desagrupamento: 531 – 346



Atividade 6: Construção do algoritmo da multiplicação de números naturais

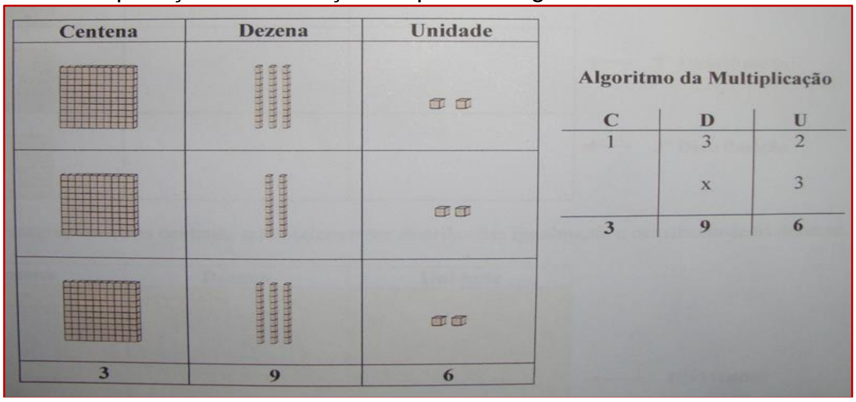
Nº de aulas: 03

Objetivo: Construir o algoritmo da multiplicação

Várias são as atividades que devem ser utilizadas para o entendimento do conceito da multiplicação, entre elas, a possibilidade da realização da multiplicação como adição de parcelas iguais. O algoritmo é a última escala neste processo que precisa ser entendido via conceituação de importantes propriedades: distributiva e comutativa, por exemplo. Tanto a multiplicação por adição de parcelas iguais quanto o entendimento do algoritmo da multiplicação podem ser facilmente aprendidos com o auxílio do Material Dourado.

a) Multiplicação como adição de parcelas iguais

Figura 32: Multiplicação como adição de parcelas iguais: 3 x 132 = 132 + 132 + 132



Atividade 7: Divisão de números naturais

Nº de aulas: 02

Objetivo: Construir o algoritmo da divisão

A divisão deve ser entendida como a operação inversa da multiplicação e, partindo deste pressuposto, deve ser considerada como uma distribuição de valores em partes iguais. Sendo assim, deve ser trabalhada no QVL com tantas partes quanto necessárias para que esta distribuição seja realizada. Outro fator que o aluno, no processo de aprendizagem, deve considerar, não obrigatoriamente e sim por descoberta, é o fato da facilidade conseguida se o processo se der, diferentemente das outras operações, da esquerda para direita a fim de melhor realização dos desagrupamentos necessários.

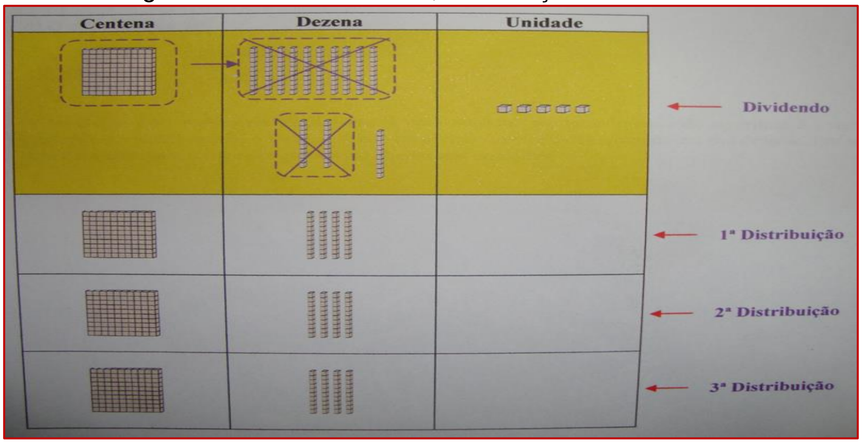
a) Divisão com distribuição de quantidades iguais

Primeiramente distribuem-se as centenas:

Figura 33: Divisão 435 ÷ 3, distribuição das centenas

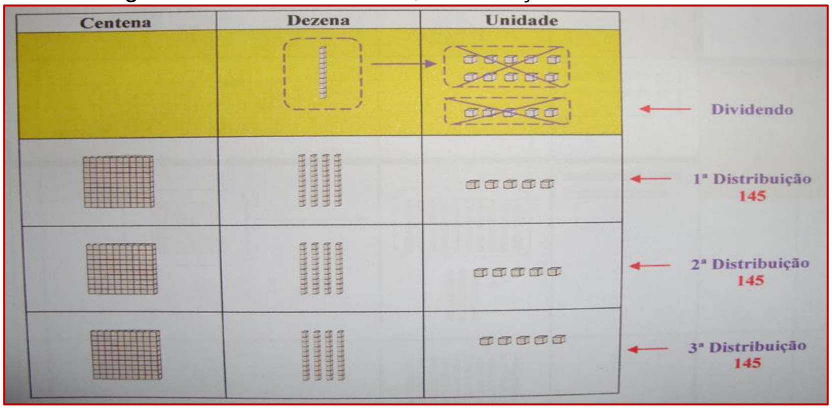
Em seguida, desagrupam-se as centenas que não puderam ser distribuídas igualmente e distribuem-se as dezenas

Figura 34: Divisão 435 ÷ 3, distribuição das dezenas



Por último, desagrupam-se as dezenas que não puderam ser distribuídas igualmente e distribuem-se as unidades

Figura 35: Divisão 435 ÷ 3, distribuição das unidades



ANEXO E – PARECER CONSUBISTANCIADO DO CEP

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DO AMAZONAS - FUA (UFAM)

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Pesquisador: Nixon da Silva Moçambite

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 46953215.0.0000.5020

Instituição Proponente: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 1.290.714

Apresentação do Projeto:

Este trabalho tem por finalidade investigar "Como a configuração didático-pedagógica pautada nas situações didáticas pode favorecer a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático no 7º ano do ensino fundamental". De forma específica, busca-se caracterizar e analisar a mobilização dos estudantes no desenvolvimento de sequências didáticas com conteúdos de matemática; investigar as manifestações orais dos estudantes diante de situações didáticas como condição para a aprendizagem e construção do conhecimento matemático, evidenciar a tomada de consciência dos estudantes por meio da interpretação e da explicação de suas ações frente a situações didáticas com jogos ou problemas de matemática e analisar e refletir sobre as implicações das situações didáticas em relação ao processo de ensino e aprendizagem de matemática. A pesquisa justifica-se pelo fato de que muitas das dificuldades conceituais, bem como a falta de interesse e de motivação pela matemática, deve-se ao modelo tradicional de ensino desta disciplina que, em geral, tem como abordagem predominante a exposição sumária de conteúdos, os exercícios e a avaliação que geralmente se resume em testes e provas. Dessa forma, para responder à questão de pesquisa e alcançar os objetivos propostos, optou-se pela abordagem qualitativa, na modalidade experimental, seguindo os pressupostos metodológicos da engenharia didática, composta por quatro fases: exploratória; análise a priori; experimentação e

Endereço: Rua Teresina, 4950
Bairro: Adrianópolis **CEP:** 69.057-070
UF: AM **Município:** MANAUS
Telefone: (92)3305-5130 **Fax:** (92)3305-5130 **E-mail:** cep@ufam.edu.br

Recomendações:

Evitar choque de informações entre o que é posto no protocolo da Plataforma Brasil e os documentos apensados ao projeto. No projeto ora submetido à apreciação do CEP/UFAM, tal pode ser observado em relação ao cronograma.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Foi solicitada Emenda ao projeto, com a seguinte justificativa:

"Algumas partes do projeto não estavam completas e/ou bem definidas, portanto, houve mudança no título e ajustes nos objetivos e metodologia do projeto de pesquisa, bem como definição e redação da fundamentação teórica e também definição do cronograma. Em relação aos métodos de coleta de dados, foi excluído o questionário e melhorado o roteiro de entrevista e de observação, conforme interesse do objeto de pesquisa."

As modificações feitas não comprometem,do ponto de vista ético, o projeto e, consequentemente, a pesquisa, razão pela qual somos de parecer favorável à sua aprovação.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_599103 E1.pdf	29/09/2015 18:03:06		Aceito
Cronograma	cronograma.pdf	29/09/2015 17:50:37	Nixon da Silva Moçambite	Aceito
Outros	roteirodeobservacao.pdf	29/09/2015 17:47:16	Nixon da Silva Moçambite	Aceito
Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE Nixon.docx	23:32:58		Aceito
Outros	curriculum vitae.pdf	08/07/2015 11:57:40		Aceito
Outros	Term.assentimento.pdf	08/07/2015 11:56:38		Aceito
Outros	Termo de Anuência NIxon.jpg	08/07/2015 11:56:01		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE Nixon.pdf	08/07/2015 11:54:04		Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

MANAUS, 21 de Outubro de 2015

Assinado por:
Eliana Maria Pereira da Fonseca
(Coordenador)