Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Sistemas Afins e Bilineares em Grupos de Lie

Max Ferreira

Manaus-AM
fevereiro/2017

Sistemas Afins e Bilineares em Grupos de Lie

por

Max Ferreira

sob orientação do

Professor Victor Alberto José Ayala Bravo

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-AM

Fevereiro/2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

F383s

Ferreira, Max Ferreira
Sistemas afins e bilineares em grupos de Lie / Max Ferreira Ferreira. 2017
63 f.: 31 cm.

Orientador: Victor Alberto José Ayala Bravo
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Campos Lineares. 2. Campos Afins. 3. Sistemas Afins. 4. Sistemas Bilineares. 5. Controlabilidade. I. Bravo, Victor Alberto José Ayala II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Max Ferreira

Sistemas Afins e Bilineares em Grupos de Lie

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Manaus, 25 de fevereiro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. Victor Alberto José Ayala Bravo (orientador)

Universidad de Tarapacá - UTA

....

Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy (membro)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Profa. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto (membro externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Julio César Rodrígues (membro externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Adriano João da Silva (membro externo)

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Dedico este trabalho aos meus pais Terêncio(in memoriam) e Solange, e à minha filha Luna.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, pela luz e pelos anjos que sempre colocou em meu caminho, e por tornar possível uma realização como esta. Agradeço meus pais por me ensinarem a sonhar, a crer nos sonhos e a buscá-los, por serem minhas muletas, me sustentando sempre nos caminhos que escolhi, e pelo apoio nos momentos de pressão. Agradeço à minha filha pela paciência e espera, por nem sempre entender, mas aceitar minhas ausências de corpo e muitas vezes de alma, e por suportar minha intolerância cotidiana. Agradeço também meus irmãos e irmã que também fizeram parte desse busca. Agradeço aos professores Renato Tribuzy e José Nazareno por me colocarem nos caminhos da geometria e por terem me dado a oportunidade de trabalhar com o professor Victor Ayala. Agradeço ao professor Victor Ayala por ter compartilhado parte de suas pesquisas e por ter sido sempre muito gentil; também devo agradecer a todos os professores e os colegas de doutorado da UCN, principalmente, Fernando Veras, Guillermo Zsigmond e Elvis Valero que me acolheram com muito carinho e foram sempre muito prestativos. Agradeço ao professor e amigo Adriano por muita coisa...por ter me recebido para dar andamento às pesquisas iniciadas, por ter tido paciência em me ouvir, por me ajudar sempre....ele foi peça fundamental para a conclusão desse trabalho. Agradeço ao professor Marcos Marrocos, Michel Rebolças pelas observações valiosas. Agradeço aos parceiros de doutorado da UFAM pelo apoio indispensável, principalmente,Juliana Miranda e Francisco Feitosa, pela descontração e paciência em me ouvir. Agradeço aos amigos que ficaram na torcida, em especial a Inês Padilha, Silvia Dias. Agradeço aos colegas do DM, pelo apoio em todos os sentidos. E finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro no período em que estive no exterior.

Gracias Profesor Victor Ayala por tener compartido comigo parte sus investigaciones y siempre tener estado muy amable; incluso a mi me gustaria agradecer a los amigos de la UCN-Matematicas, principalmente Fernando Veras, Guillermo Zsigmond e Elvis Valero, que me dieron la bienvenida con gran afecto y siempre fueron muy útiles. Gracias por todo.

Uma mágoa não é motivo para outra mágoa.
Uma lágrima não é motivo para outra lágrima.
Uma dor não é motivo para outra dor.
Só o riso, o amor e o prazer merecem revanche.
O resto, mais que perda de tempo...
é perda de vida.

Chico Xavier

Resumo

Esta tese é composta de duas partes. Inicialmente apresentamos, como preliminares, a teoria dos campos afins e lineares em grupos de Lie. Posteriormente, analisamos a relação entre sistemas afins em grupos de Lie e seus sistemas bilineares induzidos. Nesta direção, demonstramos que as soluções de sistemas afins são dadas pela translação à esquerda das soluções do sistema bilinear induzido pela solução sobre a identidade, o que nos permite concluir alguns resultados de controlabilidade usando propriedades geométricas. Além disso, damos exemplo de um Campo Linear no grupo solúvel de dimensão 3. Tal campo mostra que a expressão de um campo linear, que é analítico em um grupo de Lie G, não precisa ser apenas polinomial. Até o presente momento não se conhecia um campo linear com uma expressão que não depende apenas de polinômios.

Palavras-chave: Campos Lineares, Campos Afins, Sistemas Afins, Sistemas Bilineares, Controlabilidade, Solúvel, Nilpotente.

Abstract

This thesis is composed of two parts. Initially we give some preliminary aspects about linear vector fields on Lie Groups. For the second one, we analyze the relationship between affine systems on Lie groups and their induced bilinear systems. We prove that the solutions of affine systems are given by left translation of the solutions of the induced bilinear system by the solution on the identity, which allow us to conclude some controllability results by using geometric properties. Moreover, we present a linear vector field on tree-dimensional sovable Lie group. This vector field is analytic on a Lie group, does not necessarily needs to be polinomial, in the sense that its expression depends on polinomial maps. It was an open problem the existence of a non-polinomial analytic linear vector field.

Keywords: Linear Vector Fields, Affine Vector Fields, Affine Systems, Bilinear Systems, Controllability, Solvable, Nilpotent.

Sumário

Introdução

Na primeira parte desta tese apresentamos aspectos preliminares sobre campos linares em grupos de Lie e sistemas de controle em uma variedade diferenciável M. Campos lineares, no contexto de teoria do controle em grupos de Lie, foram considerados primeiramente, em [26], por Markus em grupos de Lie de Matrizes. Posteriormente num contexto mais geral por Ayala, em [3]. Aos Campos lineares estão associados os sistemas lineares e afins. Sua importância se deve ao fato que sistemas lineares em grupos de Lie são a generalização tanto de sistemas lineares em $\mathbb{R}^n$ como sistemas invariantes em grupos de Lie. Em [29] encontramos uma revisão de mais de 40 anos de pesquisa sobre sistemas invariantes. Devido ao Teorema de Equivalência obtido por P. Jouan em [18], sistemas lineares em grupos de Lie podem ser generalizados a espaços homogêneos e são equivalentes a determinadas classes de sistemas de controle em uma variedade diferenciável M.

A segunda parte da tese trata de sistemas de controle afins e bilineares em grupos de Lie. Além disso, damos um exemplo de um campo linear não polinomial. Tais sistemas ganharam importância a partir do início de 1960, R. Hermann [15] incorporou o uso de métodos da geometria diferencial ao estudo dos problemas de controle. Seu trabalho foi seguido por C. Lobry [25] em 1970, Brockett [8] em 1972, Sussmann-Jurdjevic [48] em 1972, Krener [24] em 1974 e outros. Estes trabalhos deram à luz a Teoria Geométrica do Controle, onde a idéia é tomar como espaço de estado uma variedade diferenciável. Percebeu-se que, devido à estrutura algébrica adicional, alguns problemas de controle geométrico são melhor formulados considerando o espaço de estado como sendo um grupo de Lie. Em seu livro [19], V. Jurdjevic (1997) apresenta várias aplicações e resultados sobre sistemas de controle em grupos de Lie. Nesta mesma direção Markus, [26] em 1980, tratou de sistemas de controle lineares em grupos de Lie de matrizes. Seu artigo foi seguido pelo trabalho de Ayala[3] em 1999. Ayala generalizou os campos afins e lineares, para um grupo de Lie qualquer, de forma intrísenca, no sentido de não ter definido tais campos a partir de subgrupos de Lie de matrizes de $GL(n, \mathbb{R})$ como Markus o fez. A partir daí, percebeu-se a possibilidades de generalizar os sistemas de controle clássicos em $\mathbb{R}^n$ como um grupo de Lie aditivo abeliano para outros grupos de Lie, como os solúveis e semisimples.

De modo geral temos a seguinte definição:

Definição 1. *Sejam M uma variedade diferenciável. Um sistema de controle afim em M é dado por*

$$\dot{x}(t) = f^0 + \sum_{j=1}^{m} \omega_j f^j, \ j = 1, \ldots, m$$

onde $f^0, f^1, \ldots, f^m$ são campos de vetores em M e $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathcal{U}_{cp}$ é uma função constante por partes.

O que caracteriza o sistema afim é a existência do *drift* f^0, que não é controlado, no sentido de não haver função de controle agindo sobre o mesmo. Sistemas afins em $\mathbb{R}^n$, de modo geral foram amplamente estudados, como podemos ver em [12], [37],[38], [39],[40] e [41]. No sentido clássico, há quatro sistemas afins em $\mathbb{R}^n$:

1. Sistemas Invariantes: $f^0, f^1, \ldots, f^m$ são campos constantes

2. Sistemas Lineares: f^0 é linear e $f^1, \ldots, f^m$ constantes

3. Sistemas Bilineares: tanto f^0 como $f^1, \ldots, f^m$ são lineares.

4. Sistemas Afins: todos os campos são afins

Como, em $\mathbb{R}^n$, todo campo afim se decompões como uma soma de um campo linear com um campo constante, o sistema afim pode ser pensado como uma generalização dos sistemas invariantes, lineares e bilineares. Da mesma forma, campos afins em grupo de Lie são decompostos em uma soma de um campo Linear com um campo invariante(campo constante em $\mathbb{R}^n$). Veja [3],[17] e [18]. Tal decomposição tornou possível a generalização dos sistemas clássicos em $\mathbb{R}^n$ aos grupos de Lie. Em [29] é dada uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade dos sistemas invariantes em um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$:

Teorema 1 (Teste do Grupo)**.** *Um sistema $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é controlável em G se, somente se,* *1. G é conexo*

2. $\text{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}$

onde a condição 2 é conhecida como condição do "rank".

Em relação aos sistemas lineares os seguintes resultados foram provados: 1. Em um grupo de Lie compacto e conexo, um sistema linear é controlável se, e somente se ele satisfaz a condição do rank; Isso foi provado em [33]; 2.Um critério de controlabilidade local (a chamada condição ad-rank; foi estabelecida em [3, 11]); 3. Se um sistema linear em um grupo de Lie semisimples com centro finito é controlável a partir da identidade, então um certo sistema invariante, relacionado ao sistema linear, também é controlável. Veja [33]; 4. Seja G um grupo de Lie semisimples, conexo e suponha que vale a condição ad-rank. Então, o sistema linear é controlável se e somente se o sistema invariante associado ao sistema linear é controlável. Foi estabelecido em [17]; 5. Um sistema linear em um grupo de Lie conexo G é controlável se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são abertos e a derivação associada ao campo linear(drift) tem apenas autovalores com parte real nula, onde φ é o fluxo do drift e $\mathcal{A}^*_\tau = \varphi_{-\tau}\big((A_\tau)^{-1}\big)$. Este último resultado foi mostrado por Adriano da Silva em [35].

Por Outro lado, Phillip Jouan em [17] considerou um caso particular de um sistema afim

$$\Sigma_J : \dot{g} \;=\; F_g + \sum_{j=1}^{m} \omega_j Y_g^j \tag{1}$$

onde F é um campo afim e os $Y^j, j = 1, \ldots, m$, são campos invariantes e $\omega_j \in \mathcal{U}_{cp}$. Como todo campo afim se decompõe em uma soma $F = \mathcal{X} + Y^0$, onde $\mathcal{X}$ é um campo linear e Y^0 é um campo invariante, o sistema Σ_J é equivalente ao sistema linear

$$\dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=0}^{m} \omega_j Y_g^j)$$

onde $\omega_0 = 1$.

Em relação ao sistema 1 foi estabelecido o seguinte resultado:

Teorema 2. *O sistema de controle afim Σ_J em um grupo de Lie compacto e conexo é controlável se, e somente se, satisfaz o a condição do Rank.*

Neste trabalho analisamos a relação entre sistemas afins em um grupos de Lie e seus sistemas bilineares induzidos. Nós provamos que as soluções de sistemas afins são completas e dadas por translações à esquerda das soluções do sistemas bilineares induzidos, pela solução do sistema afim na identidade. Isto nos permite concluir resultados de controlabilidade a partir das soluções dos sistemas. Mostramos o importante resultado no qual garantimos a não controlalabilidade dos sistemas bilineares em um grupo de Lie qualquer, quando este não é abeliano conexo e simplesmente conexo. Para isso começamos com a seguinte definiçao:

Definição 2 (Sistema Bilinear em grupo de Lie)**.** *Seja G um grupo de Lie conexo, $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ campos lineares em G. Um Sistema de controle bilinear em G é o sistema afim*

$$\Sigma_B : \dot{g}(t) = \mathcal{X}^0(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j(t)\mathcal{X}^j(g(t)) = \mathcal{X}_{\omega(t)}(g(t)).$$

onde $\omega_j \in \mathcal{U}_{cp}$.

Denotaremos por $\mathcal{D}^j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a derivação associada ao campo linear $\mathcal{X}^j$, $j = 1, \ldots, m$. Além disso, para cada $\omega \in \mathcal{U}$ e $g \in G$ a curva $t \mapsto \varphi^B(t, g, \omega)$ é a única solução de Σ_B associada a ω que satisfaz $\varphi(0, g, \omega) = g$. Para $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}$ fixos denotaremos por $\varphi^B_{t,\omega}$, o difeomorfismo $g \in G \mapsto \varphi^B_{t,\omega}(g) = \varphi(t, g, \omega)$.

O teorema seguinte nos dá uma expressão para as soluções de Σ_B em termos de concatenação de fluxos de campos lineares.

Teorema 3. *Seja $\omega \in \mathcal{U}$ uma função de controle constante por partes. Considere $t_1, t_2, \ldots, t_n > t_0 = 0$ e $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}^m$ tal que $\omega(t) = \omega_i$ quando $t \in \Big[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\Big)$. Então*

$$\varphi^B(t, g, \omega) \;=\; \psi^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\Big(\psi^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\big(\ldots\big(\psi^{\omega_i}_{t_1}(g)\big)\ldots\big)\Big),\; t \in \Big[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\Big).$$

onde para qualquer $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ o campo $X_u := X^0 + \sum_{p=1}^{m} u_j X^j$ é um campo linear e portanto, seu fluxo $\{\psi^u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é completo e pertence a Aut(G).

Além disso, as soluções de Σ_B são completas e $\varphi^B_{t,\omega}$ é um automorfismo de G, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}$.

Analogamente, obtém-se uma expressão similar para a solução φ^B em tempo negativo e uma expressão para a solução em termos de $\exp(X)$.

Corolário 1. *Seja G conexo e simplesmente conexo e Σ_B um sistema bilinear em G. Então a solução de Σ em $\exp X \in G$ é tal que*

$$\varphi^B(t, \exp X, \omega) = \exp\left(e^{(t-c)D\omega_i} e^{t_{i-1}D\omega_{i-1}} \dots e^{t_1 D\omega_1}(X)\right)$$

onde $c = \sum_{j=0}^{i-1} t_j$.

Por outro lado percebemos a relação, em termos de invariância, entre a solução do sistema e os fluxos dos campos lineares concatenados. Isso nos permitiu avaliar a não controlabilidade do sistema em certos grupos de Lie

Proposição 1. *Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie do subgrupo de Lie conexo $H \subset G$. Então H é Σ_B-invariante se, e somente se, H é ψ^j-invariante se, e somente se, $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}^j$-invariante, $j = 1, \dots, m$.*

Passaremos agora à controlabilidade dos sistemas bilineares.

Associado com o sistema de controle bilinear Σ_B temos o sistema bilinear sobre o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ dado por

$$\dot{X}(t) \;=\; \mathcal{D}^0 + \sum_{j=1}^{m} \omega_j \mathcal{D}^j\big(X(t)\big) = \mathcal{D}_{\omega(t)}\big(X(t)\big).$$

Para cada $X \in \mathfrak{g}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ denotaremos a solução de por $\Phi(t, X, \omega)$ e por $\Phi_{t,\omega}$ o difeomorfismo induzido. Podemos observar ainda que, assim como para campos lineares, temos uma expressão para a diferencial da solução de Σ_B em termos de exponencial de matrizes, como mostra a

Proposição 2. *Para quaisquer $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ e $X \in \mathfrak{g}$ temos que*

$$\Phi(t, X, \omega) = \big(d\varphi_{t,\omega}\big)_e(X) = e^{(t-\sum_{j=1}^{i})\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1 \mathcal{D}_{\omega_1}} X.$$

Portanto,

$$\exp \circ \Phi_{t,\omega} = \varphi^B_{t,\omega} \circ \exp$$

Sejam D^j uma derivação interna, Y^j um campo invariante à direita e $\mathcal{I} : G \to G$ dada por $\mathcal{I}(g) = g^{-1}$. Então o campo $\mathcal{X}^j = Y^j + \mathcal{I}_* Y^j$ é um campo linear, veja a proposição 1.5. Portanto o sistema bilinear pode ser decomposto como

$$\mathcal{X}_{\omega(t)}(g(t)) = Y_{\omega(t)}(g(t)) + \mathcal{I}_*\big(Y_{\omega_{(t)}}(g(t))\big)$$

onde

$$\Sigma_I : Y_{\omega(t)}(g(t)) = Y^0(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} \omega_i Y^j(g(t))$$

é um sistema invariante à direita.

A proposição abaixo relaciona as soluções de Σ_B e Σ_I.

Proposição 3. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$, vale*

$$\varphi^B_{t,\omega} = C_{\varphi^I_{t,\omega}(e)}$$

onde $\varphi^I_{t,\omega}(e)$ é a solução de Σ_I a partir de $e \in G$ e $C_g : G \to G$ é a conjugação em G.

De posse dos resultados anteriores, temos que a controlabilidade dos sistemas bilineares pode ocorrer apenas nos grupos abelianos conexos e simplesmente conexos. É o mostra o

Teorema 4. *Seja G um grupo de Lie conexo e Σ_B um sistema bilinear em G. Se G não é um grupo de Lie abeliano simplesmente conexo então Σ não é controlável.*

O teorema anterior mostra-nos que os sistemas bilineares não dão informações relevantes, sobre o grupo de Lie, quando este não é um grupo de Lie abeliano conexo e simplesmente conexo. Isso se deve principalmente às propriedades geométricas induzidas em grupos de Lie pelo colchete em sua álgebra de Lie. Apesar deste fato, veremos que tal sistema desempenha um papel importante na controlabilidade de um sistema afim.

Passaremos agora a nos preocupar com as soluções do sistema afim de modo geral.

O próximo lema técnico é um resultado conhecido em termos de grupo de Lie, que será usado mais à frente em um de nossos resultados. Veja [50].

Lema 1. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e N um subgrupo normal de G com álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. então para cada $X \in \mathfrak{g}$ temos que*

$$\exp(X + \mathfrak{n}) \subset \exp(X)N.$$

Definição 3. *Um sistema de controle afim em um grupo de Lie é um sistema afim dado por*

$$\Sigma_F : \dot{g}(t) = F^0(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j F^j(g(t)) = F_\omega(g(t))$$

onde $F^0, F^1, \ldots, F^m$ são campos afins em G.

Para cada $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ e $g \in G$ a curva $t \mapsto \varphi^F(t, g, \omega)$ é a única solução de Σ_F associado ao controle $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ que satisfaz $\varphi(0, g, \omega) = g$. Para $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ fixos denotaremos $\varphi^F(t, \omega)$ o difeomorfismo $g \in G \mapsto \varphi^F_{t,\omega}(g) = \varphi(t, g, \omega)$.

Passaremos agora às soluções do sistemas afins.

Teorema 5. *Seja ω uma função de controle constante por partes e considere $t_1, \ldots, t_n > t_0 = 0$ e $\omega_1, \ldots, \omega_n$ tal que $\omega(t) = \omega_i$ para $t \in \left[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\right)$. Se $\{\alpha_t^{\omega_i}\}_{t\in\mathbb{R}}$ denota o fluxo do campo afim $F_\omega = F^0 + \sum_{j=1}^m \omega_j F^j$ então*

$$\varphi^F(t, g, \omega) = \alpha^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\left(\alpha^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\left(\ldots(\alpha^{\omega_1}_{t_1}(g))\ldots\right)\right),\ t \in \left[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\right).$$

Além disso, as soluções Σ_F são completas e

$$\varphi^F_{t,\omega} = L_{\varphi^F_{t,\omega}(e)} \circ \varphi^B_{t,\omega}$$

Os próximos resultados são uma generalização dos resultados em [35] para o contexto geral de sistema afins em grupos de Lie. Tais resultados mostram uma intríseca relação entre os sistemas bilineares e afins.

Lema 2. *Seja $g \in \mathcal{A}$ e suponha que $\varphi^B_{t,\omega}(g) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$. então*

$$\mathcal{A} \cdot g \subset \mathcal{A}$$

O lema anterior implica a seguintes proposições:

Proposição 4. *Seja H um subgrupo de Lie conexo Σ_B invariante com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Se $\exp X \in \mathcal{A}$, para todo $X \in \mathfrak{h}$, então $H \subset \mathcal{A}$.*

Proposição 5. *Seja $N \subset H \subset G$ subgrupos de Lie conexos com álgebras de Lie $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}^j \subset \mathfrak{g}$, respectivamente. Se $\mathfrak{n}$ é um ideal de $\mathfrak{h}$ e $\mathcal{D}^j(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{n}$, $j = 1, \ldots, m$, $N \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ aberto, então $H \subset \mathcal{A}$.*

Os dois resultados abaixo garantem condições fortes de controlabilidade em grupos solúveis e nilpotentes.

Corolário 2. *Seja G um grupo de Lie solúvel e suponha que $\mathcal{A}$ é aberto. Se $N \subset G$ é o radical nilpotente de G então $N \subset \mathcal{A}$ implica $G = \mathcal{A}$.*

Teorema 6. *Suponha que $\mathcal{D}^j$, $j = 1, \ldots, m$ são derivações internas e que G é um grupo de Lie nilpotente. Então $\mathcal{A}$ é aberto se, e somente se $\mathcal{A} = G$.*

Finalmente, mostramos que a expressão de um campo linear não precisa depender apenas de funções polinomiais. Para isso damos um exemplo de um campo linear no grupo solúvel de dimensão 3, cuja expressão não depende somente de polinômios. Até então, não se conhecia um exemplo de um campo linear, que é um campo analítico, que não dependesse apenas de polinômios.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sistemas de Controle

Definição 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d. Um sistema de controle no espaço de estado M é uma família*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \omega(t)),\ \omega \in \mathcal{U}_{cp} \tag{1.1}$$

de equações diferenciais, com $f : M \times \mathbb{R}^m \to M$ diferenciável e controles admissíveis em

$$\mathcal{U}_{cp} = \{\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m\}$$

onde ω é constante por partes. A diferenciabilidade de f no primeiro argumento garante que para cada $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ e cada valor inicial $x \in M$ existe uma única solução $\varphi(t, x, \omega)$ definida em um intervalo contendo $t = 0$ satisfazendo a propriedade $\varphi(0, x, \omega) = x$ e a propriedade de cociclo $\varphi(t + s, x, \omega) = \varphi(t, x, \Theta_s(\omega))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$, onde para cada $t \in \mathbb{R}$ a aplicação Θ_t é o shift em $\mathcal{U}_{cp}$ definido como

$$\Theta_t(\omega)(s) := \omega(t + s)$$

Em vez de $\varphi(t, x, \omega)$ escreveremos em geral $\varphi_{t,\omega}(x)$. Note que a diferenciabilidade do lado direito da equação 1.1, que é f, implica a diferenciabilidade de $\varphi_{t,\omega}$.

Além disso, para $\tau \geqslant 0$ denotaremos por

$$\mathcal{A}_\tau(x) = \{\varphi(\tau, x, \omega) :\ \omega \in \mathcal{U}_{pc}\}$$

$$\mathcal{A}_{\leqslant\tau}(x) = \bigcup_{t\in[0,\tau]} \mathcal{A}_t(x), \quad \mathcal{A}(x) = \bigcup_{\tau\geqslant 0} \mathcal{A}_\tau(x)$$

o conjunto dos pontos atingíveis a partir de $x \in M$ em tempo $\tau \geqslant 0$, conjunto dos pontos atingíveis a partir de $x \in M$ em tempo menor ou igual a $\tau > 0$ e a órbita positiva de x, respectivamente. Em particular, denotaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(e)$ a órbita positiva a partir da identidade e quando a variedade M for um grupo de Lie G.

1.2 Sistemas Bilineares em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.2. *Sejam A_0, A_1, ..., A_m matrizes constantes em $\mathbb{R}^{n^2}$, controles $u \in \mathcal{U}$ com $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O sistema de controle dado por*

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i x \tag{1.2}$$

é chamado sistema de controle bilinear em $\mathbb{R}^n$, com $u := col(u_1, u_2, \ldots u_n)$.

O termo A_0x em (1.2) é chamado de *drift*.

O Sistema Bilinear que não possue drift, ou seja, $A_0 = 0$ e com controles restritos e simétricos

$$\dot{x} = \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i\Big)x, \quad \Omega = -\Omega$$

é chamado Sistema de Controle Bilinear Simétrico. Observe que o termo Ax é da foma u_0B_0x com $u_0 = 1$ e $A = B_0$.

Dado o sistema bilinear 1.2 no $\mathbb{R}^n$ temos que,

$$\dot{x} \;=\; Ax + \sum_{j=1}^{m} u_j(t)B_j(x),\ x(0) = \xi,\ u \in \mathcal{U}_{cp} \tag{1.3}$$

e como um sistema de controle, é invariante em relação ao tempo. Contudo, dado $\mathcal{U}_T = \{u(t); 0 \leqslant t \leqslant T\}$, 1.3 pode ser tratado como um sistema linear de equações diferenciais

$$\dot{X} \;=\; AX + \sum_{j=1}^{m} u_j B_j X,\ X(0) = I,\ u \in \mathcal{U}_{cp} \tag{1.4}$$

que varia com o tempo e que possui uma única solução $X(t, u)$ chamada de matriz de transição de 1.3 tal que $x(t) = X(t, u)\xi$ é o fluxo de 1.3 para um tempo t e para a função de controle u a partir de ξ.

Para sistemas bilineares homogêneos do tipo 1.2 a origem em $\mathbb{R}^n$ é um estado de equilíbrio, qualquer que seja o controle u. Por isso a controlabilidade do sistema bilinear deve ser considerada em $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Como as trajetórias controladas são $x(t) = X(t,u)\xi$, o conjunto atingível a partir de ξ é

$$\mathcal{A}(\xi) := \{X(t,u)\xi \mid t \in \mathbb{R}_+, u \in \mathcal{U}_{cp},\ \text{com } u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m\}. \tag{1.5}$$

Quando

$$\mathcal{A}(\xi) = \mathbb{R}^n_*$$

dizemos que o sistema 1.2 é controlável.

Para $n = 1$, $\mathbb{R}^1_*$ não é conexo. Por outro lado para $n = 2$, ou seja, $\mathbb{R}^2_*$ é conexo mas não simplesmente conexo. Para $n \geqslant 3$, $\mathbb{R}^n_*$ é conexo e simplesmente conexo.

Exemplo 1.1. *O sistema simétrico*

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 x_1 \\ u_2 x_2 \end{bmatrix},\ x(0) = \xi$$

cuja solução é

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp(\int_0^t u_1(s)ds)\xi_1 \\ \exp(\int_0^t u_2(s)ds)\xi_2 \end{bmatrix},$$

não é controlável em $\mathbb{R}^2_*$.

De fato, dois estados ξ e ζ podem ser conectados por uma trajetória do sistema se, e somente se,

i) ξ e ζ estão no mesmo quadrante aberto do plano ou

ii) ξ e ζ estão na mesma componente do conjunto $\{x \mid x_1 x_2 = 0\}$.

Exemplo 1.2. *Para o sistema dois-dimensional*

$$\dot{x} \ = \ (I + u(t)J)x,\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

o conjunto atingível em tempo $t > 0$ é o círculo $\mathcal{A}_t(\xi) = \{x;\ \|x\| = \|\xi\|e^t\}$ e portanto o conjunto atingível a partir de ξ é $\mathcal{A}(\xi) = \{x;\ \|x\| > \|\xi\|\} \cup \{\xi\}$. Segue-se que 1.6 não é controlável em $\mathbb{R}^2_*$.

Exemplo 1.3. *Consideremos agora o sistema*

$$\dot{x} \;=\; (J + u(t)I)x, \tag{1.7}$$

onde I *e* J *são como em 1.6. Em coordenadas polares o sitema fica* $\dot{\rho} = u\rho$, $\dot{\theta} = 1$. *Em um tempo* $T > 0$ *o raio* ρ *assume um valor positivo qualquer. Por outro lado* $\theta(T) = 2\pi T + \theta_0$. *Neste caso, o sistema é controlável pois qualquer ângulo pode ser alcançado apenas uma vez por segundo.*

1.3 Campos Lineares e Afins em Grupos de Lie

Salvo mensão em contrário, todos os resultados das próximas duas seções, que tratam de campos lineares e derivações se devem a P. Jouan, [17, 18].

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{X}(G)$ o conjunto dos campos C^∞ em G. O normalizador de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{X}(G)$ é dado por

$$\mathcal{N} = norm_{\mathfrak{X}(G)}\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) : [X, Y] \in \mathfrak{g} \;\; \forall\, Y \in \mathfrak{g}\}$$

Definição 1.3. *Um campo de vetores* F *em grupo de Lie conexo* G *é chamado afim, quando este pertence ao normalizador* $\mathcal{N}$. *Em particular* F *é dito linear se* $F(e) = 0$, *onde* e *é a identidade do grupo.*

Proposição 1.1. *O conjunto* $\mathcal{N}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{X}(G)$.

Prova: É claro que $\mathcal{N}$ é um subespaço de $\mathfrak{X}(G)$. Pela identidade de Jacobi, se $F_1, F_2 \in \mathcal{N}$, temos que para todo $Y \in \mathfrak{g}$,

$$[[F_1, F_2], Y] = -[[F_2, Y], F_1] - [[Y, F_1], F_2] = [F_1, [F_2, Y]] + [[F_2, [Y, F_1]] =$$

$$= [F_1, Z_1] + [F_2, Z_2] \in \mathfrak{g} \text{ com } Z_1 = [F_2, Y] \text{ e } Z_2 = [Y, F_1] \text{ elementos de } \mathfrak{g}. \qquad \square$$

Observação 1.1. *A aplicação adjunta* $ad : \mathcal{N} \to gl(\mathcal{N})$ *da álgebra de Lie* $\mathcal{N}$ *é dada por*

$$\begin{array}{rcllll} ad : \mathcal{N} & \to & gl(\mathcal{N}) & & & \\ F_1 & \mapsto & ad_{F_1} : & \mathcal{N} & \to & \mathcal{N} \\ & & & F_2 & \mapsto & ad_{F_1}(F_2) \;\; = [F_1, F_2] \end{array}$$

Observe que para todo $F \in \mathcal{N}$ a restrição $ad_F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ à subálgebra $\mathfrak{g} \subset \mathcal{N}$ está bem definida. além disso, o conjunto $\partial(\mathfrak{g})$ das derivações de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $gl(\mathfrak{g})$. Portanto, temos que $ad : \mathcal{N} \to \partial(\mathfrak{g})$ é um morfismo de $\mathcal{N}$ em $\partial(\mathfrak{g})$

Denotaremos por $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$ as translações à esquerda e à direita, respectivamente.

Proposição 1.2. *O núcleo* $\ker(ad)$ *da aplicação* $ad : \mathcal{N} \to \partial(\mathfrak{g})$ *é o conjunto dos campos invariantes à esquerda. Além disso, todo campo afim* F *se decompõe de modo único como*

$$F = \mathcal{X} + Y$$

onde $\mathcal{X}$ *é um campo linear e* Y *é um campo invariante à esquerda.*

Prova: De fato, seja Z um campo afim tal que $ad_Z(Y) = [Z, Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Segue-se que os fluxos z_t de Z e $y_s = L_{\exp(sY)}$ de Y comutam. Daí

$$\begin{aligned} z_t\big(\exp(sY)g\big) &= z_t \circ L_{\exp(sY)}(g) \\ L_{\exp(sY)} \circ z_t(g) &= \exp(sY)z_t(g) \end{aligned}$$

para todo $g \in G$, $s \in \mathbb{R}$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Mais à frente mostraremos que todo campo afim é completo.

Como G é conexo, dado $g \in G$ existem $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k \in \mathfrak{g}$ tais que

$$g = \exp(Y_1)\exp(Y_2), \ldots, \exp(Y_k)$$

Com isso

$$\begin{aligned} z_t(g) &= z_t\big(\exp(Y_1)\exp(Y_2)\ldots\exp(Y_k)e\big) \\ &= \exp(Y_1)z_t\big(\exp(Y_2)\ldots\exp(Y_k)e\big) \\ &= \exp(Y_1)\exp(Y_2)\ldots\exp(Y_k)z_t(e) \\ &= gz_t(e) \end{aligned}$$

(1.8)

Assim,

$$
\begin{aligned}
Z_g &= \frac{d}{dt} z_t(g)|_{t=0} \\
&= g z_t(e)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big(L_g \circ z_t(e)\big)|_{t=0} \\
&= (dL_g)_e Z_e
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Portanto Z é um campo invariante à esquerda. Por outro lado, seja Y um campo invariante à esquerda definido por $Y_e = F_e$. Então tomando $\mathcal{X} = F - Y$ temos que

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{X}, X] &= [F - Y, X] \\
&= [F, X] - [Y, X] \in \mathfrak{g}
\end{aligned}
$$

com $\mathcal{X}_e = F_e - Y_e = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Suponha agora que $F = \tilde{\mathcal{X}} + \tilde{Y}$ é uma outra decomposição de F com $\tilde{\mathcal{X}}$ linear e $\tilde{Y}$ invariante à esquerda. Então

$$F_e = \mathcal{X}_e + Y_e = \tilde{\mathcal{X}}_e + \tilde{Y}_e \quad \Rightarrow \quad Y_e = \tilde{Y}_e$$

Segue-se que $Y = \tilde{Y}$ e portanto

$$\tilde{\mathcal{X}} = F - \tilde{Y} = F - Y = \mathcal{X}$$

□

Teorema 1.1. *Seja X um campo em grupo de Lie conexo G. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *X é linear*

2. *O fluxo de X é um grupo a um parâmetro de automorfismos de G*

3. *$X_{gh} = dL_g X_h + dR_h X_g$*

Prova: (1⇒3) Seja X um campo linear em um grupo conexo G. Para todo campo invariante Y em $\mathfrak{g}$, tem-se $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Portanto, para todo $g \in G$:

$$[X, Y] = (R_g)_*[X, Y] = [(R_g)_* X, (R_g)_* Y] = [(R_g)_* X, Y]$$

Isso mostra que $ad_X(Y) = [X, Y] = [(R_g)_* X, Y] = ad_{(R_g)_* X}(Y)$, que acarreta

$$ad(X) = ad\big((R_g)_* X\big) \Rightarrow ad\big((R_g)_* X - X\big) = 0$$

Pela proposição 1.2, $(R_g)_* X - X = Z$, onde Z é um campo invariante a esquerda.

Aplicando $(R_g)_* X = X + Z$ no ponto $g \in G$ fica

$$\big((R_g)_* X\big)_g = (dR_g)_{R_{g^{-1}}(g)} X_{R_{g^{-1}}(g)} = (dR_g)_e X_e = (dR_g)_e 0 = 0 = X_g + Z_g$$

Por outro lado aplicando em gh temos

$$\big((R_g)_* X\big)_{gh} = (dR_g)_{R_{g^{-1}}(gh)} X_{R_{g^{-1}}(gh)} = (dR_g)_h X_h = X_{gh} + Z_{gh}.$$

Como $Z_g = -X_g$, resulta que

$$(dR_g)_h X_h = X_{gh} + Z_{gh} = X_{gh} + (dL_g)_h Z_h = X_{gh} - (dL_g)_h X_h$$

que é equivalente a

$$X_{gh} = (dL_g)_h X_h + (dR_g)_h X_h$$

(3⇒2) Seja $\varphi_t : A \subset \mathbb{R} \times G \to G$ o fluxo local de X. Vamos mostrar que as curvas $t \to \alpha(t) = \varphi_t(g)\varphi_t(h)$ e $t \to \beta(t) = \varphi_t(gh)$ definidas em um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ são iguais. Primeiramente, observemos que $\alpha(0) = \beta(0) = gh$. Além disso, sejam $f \in C^\infty(G \times G)$, $P : G \times G \to G$ o produto do grupo G e $u(t) = (\varphi_t(g), \varphi_t(h))$. Então, se $\pi_1 : G \times G \to G$ e $\pi_2 : G \times G \to G$ são as projeções temos que

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(g)\varphi_t(h)(f) = \frac{d}{dt} P \circ \big(\varphi_t(g), \varphi_t(h)\big)(f)$$

$$= \frac{d}{dt}\big(\varphi_t(g), \varphi_t(h)\big)(f \circ P) = (X_{\varphi_t(g)}, X_{\varphi_t(h)})(f \circ P)$$

$$= d\pi_1\big(X_{\varphi_t(g)}, X_{\varphi_t(h)}\big)\big(f \circ P \circ u(t)\big) + d\pi_2\big(X_{\varphi_t(g)}, X_{\varphi_t(h)}\big)\big(f \circ P \circ u(t)\big)$$

$$= (X_{\varphi_t(g)})(f \circ R_{\varphi_t(h)}) + (X_{\varphi_t(h)})(f \circ L_{\varphi_t(g)})$$

$$= \big(dR_{\varphi_t(h)}\big)(X_{\varphi_t(g)})(f) + dL_{\varphi_t(g)}(X_{\varphi_t(h)})(f)$$

$$= \Big(dR_{\varphi_t(h)}(X_{\varphi_t(g)}) + dR_{\varphi_t(g)}(X_{\varphi_t(h)})\Big)(f)$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(g)\varphi_t(h) = dR_{\varphi_t(h)}(X_{\varphi_t)(g)}) + dL_{\varphi_t(g)}(X_{\varphi_t(h)}) = X_{\varphi_t(g)\varphi_t(h)}$$

A última igualdade se deve à hipótese. Isso mostra que $\alpha = \beta$, pois, satisfazem a mesma equação diferencial com mesma condição inicial.

Para mostrar que X é completo, sejam $g \in G$ e $t \in \mathbb{R}$. Como X se anula na identidade, seu fluxo φ_t está definido em uma vizinhança aberta V_t de e. Devido à conexidade do grupo G, este é gerado por esta vizinhança, de modo que, existem $g_1, \ldots, g_n \in V_t$ tais que $g = g_1 \ldots g_n$. Assim

$$\varphi_t(g) = \varphi_t(g_1 \ldots g_n) = \varphi(g_1) \ldots \varphi_t(g_n)$$

está bem definido.

(2⇒1) Seja $(\varphi_t, t \in \mathbb{R})$ um grupo a um parâmetro de automorfismos de G cujo gerador é o campo X em G. Vamos mostrar que X é um campo linear. De fato, para todo campo invariante à direita Y, temos, pela definição de colchete que

$$[X,Y]_e = \frac{d}{dt}\big(d\varphi_{-t}\big)_{\varphi_t(e)} Y_{\varphi_t(e)} = \frac{d}{dt}\big(d\varphi_{-t}\big)_e Y_e$$

pois, $\varphi_t(e) = \varphi_t(ee) = \varphi_t(e)\varphi_t(e) \Rightarrow \varphi_t(e) = e$.

Por outro lado, devido à hipótese, temos que $\varphi_{-t} \circ R_{\varphi_t(g)} = R_g \circ \varphi_{-t}$ e novamente pela definição de colchete

$$\begin{aligned}
[X,Y]_g &= \frac{d}{dt}\big(d\varphi_{-t}\big)_{\varphi_t(g)} Y_{\varphi_t(g)}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big(d\varphi_{-t}\big)_{\varphi_t(g)} (dR_{\varphi_t(g)})_e Y_e|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big(dR_g\big)_e \big(d\varphi_{-t}\big)_e Y_e|_{t=0} \\
&= \big(dR_g\big)_e [X,Y]_e
\end{aligned}$$

Portanto, X é um campo afim com $X_e = 0$, pois,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(e)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e)|_{t=0} = 0 = X_{\varphi_t(e)} = X_e \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

$\square$

Proposição 1.3. *Todo campo afim em um grupo de Lie conexo é completo.*

Prova: Seja $F = \mathcal{X} + Y$ um campo afim, onde $\mathcal{X}$ é campo linear e Z é invariante à esquerda. Denotaremos por $t \mapsto e(t)$ a trajetória maximal de F, que passa pela identidade e, definida em um intervalo aberto $]a, b[$. Vamos mostrar que $t \mapsto \varphi_t(g)e(t) =$ é a trajetória de F que passa por g definida no mesmo intervalo aberto de $t \mapsto e(t)$, já que $\mathcal{X}$ é um campo completo. De fato

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_t(g)e(t) &= (dR_{e(t)})\mathcal{X}_{\varphi_t(g)} + (dL_{\varphi_t(g)})F_{e(t)} \\
&= (dR_{e(t)})\mathcal{X}_{\varphi_t(g)} + (dL_{\varphi_t(g)})\big(\mathcal{X}_{e(t)} + Z_{e(t)}\big) \\
&= (dR_{e(t)})\mathcal{X}_{\varphi_t(g)} + (dL_{\varphi_t(g)})\mathcal{X}_{e(t)} + (dL_{\varphi_t(g)})Z_{e(t)} \\
&= \mathcal{X}_{\varphi_t(g)e(t)} + Z_{\varphi_t(g)e(t)} \\
&= F_{\varphi_t(g)e(t)}
\end{aligned}$$

Suponhamos que $b < \infty$. Tomando $g = e(b/2)$, a curva

$$t \mapsto \varphi_{t-\frac{b}{2}}\big(e(\frac{b}{2})\big)e\big(t - \frac{b}{2}\big)$$

é a trajetória de F que passa por g em $t = b/2$. Portanto a trajetória $t \mapsto e(t)$ pode ser extendida até $3b/2$ o que é um absurdo. $\square$

1.4 A derivação associada a um campo linear

Definição 1.4. *Dado um campo linear $\mathcal{X}$ podemos associá-lo a uma derivação D de $\mathfrak{g}$ definida por:*

$$\forall\ Y \in \mathfrak{g} \quad DY = -[\mathcal{X}, Y]$$

É claro que $D = -ad_{\mathcal{X}}$. O sinal de menos na definição provém da generalização da fórmula $[Ax, b] = -Ab$ em $\mathbb{R}^n$. É também usado para evitar sinal na igualdade

$$\varphi_t(\exp Y) = \exp(e^{tD}Y)$$

Proposição 1.4. *Para todo* $t \in \mathbb{R}$

$$(d\varphi_t)_e = e^{tD}$$

e consequentemente

$$\forall\ Y \in \mathfrak{g} \quad \forall\ t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_t(\exp Y) = \exp(e^{tD}Y)$$

Prova: É claro que $\varphi_0 = Id$. além disso, pela definição de colchete de campos temos

$$\begin{aligned}
D(d\varphi_0)_e Y_e &= DY_e \\
&= -[\mathcal{X}, Y]_e \\
&= -\frac{d}{dt}(d\varphi_{-t})_{\varphi_t(e)}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(d\varphi_t)_e Y_e|_{t=0}
\end{aligned}$$

De modo geral

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\varphi_t)Y_e &= \frac{d}{ds}(d\varphi_{t+s})_e Y_e|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}(d\varphi_s)_{\varphi_t(e)}(d\varphi_t)_e Y_e|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}(d\varphi_s)_e Z_e|_{s=0} \quad Z_e = (d\varphi_t)_e Y_e \\
&= DZ_e \\
&= D(d\varphi_t)_e Y_e
\end{aligned}$$

Portanto

$$(d\varphi_t)_e = e^{tD}.$$

pois

$$\frac{d}{dt}(d\varphi_t)_e = De^{tD} = D(d\varphi_t)_e$$

Para demonstrar a segunda igualdade usaremos o seguinte

Lema 1.1. *Seja H e G com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Se $\psi : H \to G$ é um homomorfismo então o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} & \psi & \\ H & \to & G \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{g} \\ & d\psi & \end{array}$$

Como φ_t é um homomorfismo de grupos de Lie, segue-se que

$$\varphi_t(\exp(Y)) = \exp((d\varphi_t)_e Y) = \exp(e^{tD}Y).$$

□

A partir de agora vamos mostrar que dada uma derivação interna $D = -ad_X$, existe sempre um campo linear em G associado a D. Em geral, não é verdade tal afirmação para uma derivação qualquer, salvo no caso de G ser simplesmente conexo.

Proposição 1.5. *Sejam $X \in \mathfrak{g}$ um campo invariante à direita e $\mathcal{I} : G \to G$ o difeomorfismo dado por $\mathcal{I}(g) = g^{-1}$. Então o campo $\mathcal{I}_*X$ é invariante à esquerda e igual a $-X_e$ em e.*

Prova: De fato, sabendo que

$$(d\mathcal{I})_g = -(dL_{g^{-1}})_e \circ (dR_{g^{-1}})_g \Rightarrow (d\mathcal{I})_e = -\mathrm{Id}$$

vamos mostrar que

$$(\mathcal{I}_*X)_g = (dL_g)_e(\mathcal{I}_*X)_e.$$

Primeiramente, temos

$$(\mathcal{I}_*X)_e = (d\mathcal{I})_e X_e = -\mathrm{Id}_e X_e = -X_e.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_*X)_g &= (d\mathcal{I})_{\mathcal{I}^{-1}(g)} X_{\mathcal{I}^{-1}(g)} \\
&= (d\mathcal{I})_{g^{-1}} X_{g^{-1}} \\
&= -(dL_g)_e \circ (dR_g)_{g^{-1}} X_{g^{-1}} \\
&= -dL_e \circ d(R_g \circ R_{g^{-1}})_e X_e \\
&= (dL_g)_e(-\mathrm{Id}_e X_e) \\
&= (dL_g)_e(\mathcal{I}_*X)_e
\end{aligned}$$

Segue-se que o campo

$$\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_*X$$

é linear. De fato, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, $[\mathcal{X}, Y] = [X + \mathcal{I}_*X] = [X, Y] \in \mathfrak{g}$ com $\mathcal{X}_e = X_e + (\mathcal{I}_*X)_e = 0$. □

Observe que, neste caso, a derivação é interna, pois $D = -ad_{\mathcal{X}} = -ad_X$.

Além disso o fluxo de $\mathcal{X}$ é dado por

$$\varphi_t(g) = \exp(tX) g \exp(-tX)$$

De fato, seja $\gamma(t) = \varphi_t(g) = \exp(tX) g \exp(-tX)$. Então $\gamma(0) = g$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, qualquer que seja $f \in C^\infty(G)$ fica

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\gamma(t)(f) &= \frac{d}{dt}\big(\exp(tX)g\exp(-tX)\big)(f)\\
&= \frac{d}{dt}P\circ\big(\exp(tX)g,\exp(-tX)\big)(f)\\
&= \big(X_{\exp(tX)},-X_{g\exp(-tX)}\big)(f\circ P)\\
&= X_{\exp(tX)}\big(f\circ P\circ\imath_{g\exp(tX)}\big)-X_{g\exp(-tX)}\big(f\circ P\circ\imath_{\exp(tx)}\big)\\
&= X_{\exp(tX)}\big(f\circ R_{g\exp(-tX)}\big)-X_{g\exp(-tX)}\big(f\circ L_{\exp(tx)}\big)\\
&= (dR_{g\exp(-tX)})X_{\exp(tX)}(f)-(dL_{\exp(tx)})X_{g\exp(-tX)}(f)\\
&= X_{\exp(tX)g\exp(-tX)}(f)-(dL_{\exp(tX)g\exp(-tX)})_e(X_e)(f)\\
&= X_{\exp(tX)g\exp(-tX)}(f)+(dL_{\exp(tX)g\exp(-tX)})_e(-\mathrm{Id}X_e)(f)\\
&= X_{\exp(tX)g\exp(-tX)}(f)+(\mathcal{I}_*X)_{\exp(tX)g\exp(-tX)}(f)\\
&= \big(X_{\gamma(t)}+(\mathcal{I}_*X)_{\gamma(t)}\big)(f)
\end{aligned}
$$

Observação 1.2. *Quando o grupo de Lie G é semi-simples todas as derivações são internas. Portanto todos campos lineares nestes grupos de lie estão associados a apenas derivações internas.*

Teorema 1.2. *Seja G um grupo conexo e simplesmente conexo.Dada uma derivação D da sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe um, e somente um, campo linear $\mathcal{X}$ em G cuja derivação associada é D.*

Prova: Baseia-se no seguinte resultado clássico de grupos de Lie

Lema 1.2 (Veja [49], página 71 teorema 2.7.5)**.** *Sejam G e H grupos de Lie, com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Suponha que G é conexo e simplesmente conexo. Então, para todo homomorfismo $\theta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ existe um único homomorfismo $\phi:G\to H$ tal que $\theta=(d\phi)_e$*

De posse do lema, basta considerar o automorphismo $e^{tD} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ e a aplicação $\psi : \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \times G \to G$ que associa a cada automorfismo de álgebras $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ o único autormorfismo de grupos $\psi_u = \phi(u) : G \to G$ dado por $\psi(u,g) = \phi(u)g$.

De fato $\varphi_t : G \to G$ dada por $\varphi_t(g) = \phi(e^{tD})g$ é um grupo a um parâmetro de automorfismo. Pelo teorema 2.2.5 φ_t é fluxo de um campo linear, que é único. $\square$

Para finalizar, mostraremos a equivalência entre invariância de um subgrupo de Lie conexo em relação ao fluxo de um campo linear e a invariância de sua álgebra de Lie em relação à derivação associada.

Proposição 1.6. *Seja $\mathcal{X}$ um campo linear, $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ o fluxo de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{D}$ a derivação associada a $\mathcal{X}$. Se H é um subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, então H é ψ-invariante se, somente se, $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}$-invariante.*

Prova: De fato, seja $X \in \mathfrak{g}$ e suponhamos que $\psi_t(H) \subset H$. Em particular $\psi_t(\exp X) = \exp(e^{t\mathcal{D}}X) \in H$. Portanto

$$e^{t\mathcal{D}}X = \big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathcal{D}^k\big)X = IX + \mathcal{D}X + \frac{1}{2!}t^2\mathcal{D}^2X + \ldots \in \mathfrak{h}$$

e como $\mathfrak{h}$ é espaço vetorial, segue $\mathcal{D}X \in \mathfrak{h}$. Reciprocamente, seja $h \in H$ e suponhamos que $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}$-invariante. Então, para qualquer $X \in \mathfrak{h}$ tem-se $e^{t\mathcal{D}}X \in \mathfrak{h}$. Dados $X_1, X_2, \ldots, X_r \in \mathfrak{h}$ tais que $h = \exp(X_1)\exp(X_2)\ldots\exp(X_r)$. Temos

$$\begin{aligned} \psi_t(h) &= \psi_t\big(\exp X_1 \exp X_2 \ldots \exp X_r\big) \\ &= \psi_t(\exp X_1)\psi_t(\exp X_2)\ldots\psi_t(\exp X_r) \\ &= \exp(e^{t\mathcal{D}}X_1)\exp(e^{t\mathcal{D}}X_2)\ldots\exp(e^{t\mathcal{D}}X_r) \end{aligned}$$

Como $e^{t\mathcal{D}}X_j \in \mathfrak{h}$, $j = 1, \ldots, r$, temos que $\exp(e^{t\mathcal{D}}X_j) \in H$ e portanto $\psi_t(h) \in H$. $\square$

1.5 Exemplos

A seguir daremos 4 exemplos de Campos Lineares, que são conhecidos. Podemos observar que estes Campos Lineares dependem de funções polinomiais.

Exemplo 1.4 (Campo Linear no grupo abeliano $\mathbb{R}^n$).

Seja $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos campos de vetores no grupo de Lie aditivo abeliano $G = \mathbb{R}^n$ e sua álgebra de Lie, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\big(\mathbb{R}^n\big)$, dos campos constantes. Um campo $\mathcal{F}$ é afim em $\mathbb{R}^n$ se, somente se $\mathcal{F}(x) = Ax + X$, onde A é uma matriz $n \times n$ e $a \in \mathfrak{g}$. É imediato que se $\mathcal{F}(x) = Ax + X$ então

$$[\mathcal{F}(x), Y] = [Ax + X, Y] = [Ax, X] + [X, Y] = [Ax, Y] = -AY \in \mathfrak{g}$$

Suponhamos agora que

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

é um campo afim em $\mathbb{R}^n$.

Então, qualquer que seja $Y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ constante

$$[F, Y]_x = \sum_{i}^{n} c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{g}.$$

Ou seja, $c_i(x) =$ constante.

Da definição de colchete, segue

$$[F, Y]_x(f) =$$

$$= \mathcal{F}_x\big(Yf\big) - Y_x\big(\mathcal{F}f\big) = \sum a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) - \sum b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big).$$

Como cada b_i é constante, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) = \sum_{i} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1.10}$$

Da equação 1.10 segue

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) \\ = &\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Aplicando regra de Leibniz à 1.11 resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}\big) = \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{1.12}$$

Assim, aplicando 1.12 em 1.11 fica

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)\\
= \ &\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i(x) \big(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\big)\\
= \ &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\\
= \ &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

donde temos

$$\mathcal{F}_x(Yf) - Y_x(\mathcal{F}f) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{1.13}$$

e, assim, cada aplicação c_j pode ser escrita expressa como

$$c_j(x) = \sum_{i=1}^{n} -b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}$$

Por outro lado, para que $\mathcal{F}$ pertença ao normalizador de $\mathbb{R}^n$, temos que as aplicações c_j devem ser constantes. Como cada b_i é constante, segue que

$$a_j(x) = (a_{j1}x_1 + b_{j1}, \ldots, a_{jn}x_n + b_{jn}) \tag{1.14}$$

portanto, cada elemento da álgebra dos campos afins pode ser escrito como uma matriz $Ax + B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} b_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} b_{in} \end{pmatrix}.$$

Desta forma os elementos do normalizador de $\mathbb{R}^n$ são da forma $Ax + B$, onde A é uma matriz $n \times n$ e B é um campo constante.

Daí para que $\mathcal{F}$ seja linear devemos ter $\mathcal{F}(0) = 0$, ou seja, o campo linear é dado por

$$\mathcal{X}(x) = Ax = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

on de cada a_j é linear em $\mathbb{R}^n$ e portanto um polinômio.

Exemplo 1.5 (Campo e linear no grupo nilpotente de dimensão 3(Heisenberg)).

Seja $\mathbb{H}$ o subgrupo de $GL(3,\mathbb{R})$ das matrizes reais 3×3 cujos elementos são da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tal grupo, que é conexo e simplesmente conexo, é conhecido como grupo de Heisenberg. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é gerada pelos seguintes campos invariantes à direita

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.15}$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.16}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.17}$$

e cujo único colchete não nulo é

$$\begin{aligned} [X,Y] &= [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + [\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= 0 + x[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}] + \frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial z}(1)\frac{\partial}{\partial x} \\ &= Z \end{aligned}$$

(1.18)

Agora vamos calcular a derivação matriz da derivação $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ associada ao Campo linear $\mathcal{X}$. Ponhamos

$$\begin{pmatrix} a & d & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Então

$$DX = aX + bY + cZ \tag{1.19}$$

$$DY = dX + eY + fZ \tag{1.20}$$

$$DZ = gX + hY + iZ \tag{1.21}$$

e como D é derivação, segue que

$$\begin{aligned} DZ = D[X,Y] &= [DX,Y]+[X,DY] \\ &= [aX+bY+cZ,Y]+[X,dX+eY+fZ] \\ &= aZ+eZ=(a+e)Z. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Por outro lado,

$$D[X,Y] = DZ = gX+hY+iZ \tag{1.23}$$

Das equações 1.22 e 1.26 resulta $g=h=0$ e $i=a+e$. Com A matriz

$$D = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a+e \end{pmatrix}.$$

podemos agora calcular o campo linear.

A cada derivação $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ está associado um único campo linear $\mathcal{X}$ dado por

$$\mathcal{X}(g) = f_1(g)\frac{\partial}{\partial x}+f_2(g)\frac{\partial}{\partial y}+f_3(g)\frac{\partial}{\partial z},$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} DX &= -ad_{\mathcal{X}}X \\ &= -[f_1\frac{\partial}{\partial x}+f_2\frac{\partial}{\partial y}+f_3\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x}] \\ &= -[f_1\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}]-[f_2\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}]-[f_3\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial y}] \\ &\quad +[f_1\frac{\partial}{\partial x}]+[f_2\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial z}]+[] \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} DY &= -ad_{\mathcal{X}}Y \\ &= -[f_1\frac{\partial}{\partial x}+f_2\frac{\partial}{\partial y}+f_3\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= -[f_1\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}]-[f_2\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}]-[f_3\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial y}] \\ &\quad +[f_1\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial z}]+[f_2\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial z}]+[f_3\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \\ &\quad -f_1\frac{\partial}{\partial z}+x\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.25}$$

e

$$\begin{aligned} DZ &= -ad_{\mathcal{X}}Z \\ &= [f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}] \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} DX &= aX + bY + cZ \\ &= a\frac{\partial}{\partial x} + b(\frac{\partial}{\partial} + x\frac{\partial}{\partial z}) + c\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned} DY &= dX + eY + fZ \\ &= d\frac{\partial}{\partial x} + e(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}) + f\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.28}$$

e finalmente

$$DZ = = (a+e)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.29}$$

Igualando as equações 1.24 com 1.27, 1.25 com 1.28 e 1.26 com 1.29 obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + x\frac{\partial f_1}{\partial \partial z} = d \tag{1.31}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = b \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + x\frac{\partial f_2}{\partial z} = e \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = c + bx \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} - f_1 + x\frac{\partial f_3}{\partial z} = f + ex \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = a + e \tag{1.38}$$

Das equações 1.30, 1.31 e 1.32 segue que

$$f_1(x,y,x) = ax + dy + k_1, \tag{1.39}$$

analogamente, das equações 1.33, 1.34 e 1.35 resulta,

$$f_2(x,y,z) = bx + ey + k_2 \tag{1.40}$$

e finalmente das equações 1.36, 1.37 e 1.38 temos

$$f_3(x,y,z) = \frac{b}{2}x^2 + \frac{d}{2}y^2 + cx + (f + k_2)y + (a+e)z + \Big)\frac{\partial}{\partial z} + k_3 \tag{1.41}$$

Como o campo linear $\mathcal{X}$ satisfaz $\mathcal{X}(e) = 0$, fica

$$\mathcal{X}(x,y,z) = (ax + dy)\frac{\partial}{\partial x} + (bx + ey)\frac{\partial}{\partial y} + \Big(\frac{b}{2}x^2 + \frac{d}{2}y^2 + cx + fy + (a+e)z\Big)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Novamente podemos observar que o campo. depende de coeficientes polinomiais.

Exemplo 1.6 (Campo linear no grupo solúvel de dimensão 2)**.**

Seja $Aff(2)^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ o grupo solúvel de dimensão 2 com operação

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1)$$

com elemento neutro $e = (1,0)$ e álgebra de Lie $\mathfrak{aff}(2)^+$ gerada pelos campos

$$X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.42}$$

$$Y(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.43}$$

cujo colchete satisfaz $[X,Y] = Y$.

Como o grupo possui uma parametrização global, podemos calcular a forma geral do campo linear usando a técnica usada no exemplo anterior. Para isso precisamos da matriz da derivação $D : \mathfrak{aff}(2)^+ \to \mathfrak{aff}(2)^+$. Seja

$$D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$DX = aX + bY \tag{1.44}$$

$$DY = cX + dY \tag{1.45}$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
cX + dY &= DY \\
&= D[X, Y] \\
&= [DX, Y] + [X, DY] \\
&= [aX + bY, Y] + [X, cX + dY] \\
&= aY + dY
\end{aligned}
$$

implica que $a = c = 0$. Para facilitar a notação escreveremos

$$
D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}
$$

Fazendo a identificação $x\dfrac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$ e $x\dfrac{\partial}{\partial y} = (0, 1)$ resulta

$$
\begin{aligned}
DX &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = aY
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
DY &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = bY
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se escrevermos o campo linear como

$$
\mathcal{X}(x, y) = f_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y}
$$

teremos,

$$
-[\mathcal{X}, X] = -f_1\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.46}
$$

$$
-[\mathcal{X}, Y] = -f_1\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.47}
$$

Igualando 1.46 com 1.46 e 1.46 com 1.47 obtemos o seguinte sistema

$$f_1 - x\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \tag{1.48}$$

$$x\frac{\partial f_2}{\partial x} = ax \tag{1.49}$$

$$x\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \tag{1.50}$$

$$f_1 - x\frac{\partial f_2}{\partial y} = -bx \tag{1.51}$$

Diferenciando a equação 1.48, em relação a y resulta

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - x\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0 \tag{1.52}$$

Como $x > 0$, da equação 1.50 segue $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ e portanto f_1 não depende de y. Como $x > 0$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - x\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0.$$

Assim, integrando em relação a x, pois a função f_1 não depende de y, vale

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x, y) = k_1 x + k_2.$$

Por outro lado, devido a 1.49 e por integração, chegamos a

$$f_2 = ax + g(y). \tag{1.53}$$

Derivando, em relação à y, a equação 1.53,

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} g(y). \tag{1.54}$$

Da equação 1.51 e 1.54,

$$\begin{aligned} f_1 + bx &= k_1 x + k_2 + bx \\ &= x\frac{\partial f_2}{\partial y} \\ &= x\frac{\partial}{\partial y} g(y). \end{aligned}$$

Assim, derivando, em relação à x,

$$k_1 x + k_2 + bx = x\frac{\partial}{\partial y} g(y) \ \Rightarrow k_1 + b = \frac{\partial}{\partial y} g(y)$$

e $g(y) = (k_1 + b)y + k_3$. Agora podemos escrever

$$f_2(x,y) = ax + (k_1 + b)y + k_3 \tag{1.55}$$

.

Por outro lado, igualando as equações 1.46 e 1.46,

$$\begin{aligned}
-f_1\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} &= -(k_1 x + k_2)\frac{\partial}{\partial x} + k_1 x\frac{\partial}{\partial x} + ax\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -k_2\frac{\partial}{\partial x} + ax\frac{\partial}{\partial y} \\
&= ax\frac{\partial}{\partial x} \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

que implica $k_2 = 0$. Além disso, como $\mathcal{X}(e) = \mathcal{X}(1,0) = 0\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y} = 0$,
segue que $f_1(e) = f_1(1,0) = k_1(1) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0$.
e $f_2(e) = f_1(1,0) = a(1) + b(0) + k_3 = 0 \;\Rightarrow\; k_3 = -a$.

Finalmente,temos que,

$$\mathcal{X}(x,y) = \big(a(x-1) + by\big)\frac{\partial}{\partial y}$$

é um campo linear polinomial o grupo afim(solúvel) de dimensão 2.

Exemplo 1.7 (Campo linear em grupos de Lie semisimples)**.**

Antes de descrever campos lineares em grupos de lie semisimples faremos algumas observações sobre campos lineares associados a derivações internas em grupos de matrizes. Como visto na proposição 1.5, dado um grupo de Lie G e um campo invariante à direita X na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, o campo $\mathcal{I}_*X$ é invariante à esquerda. Além disso $\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_*$ é um campo linear. Os campos invariantes conhecidos dependem de polinômios e portanto a expressão do campo linear $\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_*$ depende apenas de polinômios.

Existe uma forma de calcular campos lineares em grupos de matrizes $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ associados a campos invariantes e portanto à derivações internas, usando apenas multiplicação e diferença entre matrizes. Fixando $M \in GL(n,\mathbb{R})$ as translações à esquerda e à direita $L_M(N) = MN$ e $R_M(N) = NM$ são restrições a $GL(n,\mathbb{R})$ de aplicações lineares de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.O fibrado tangente à $GL(n,\mathbb{R})$ se identifica com $GL(n,\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$. Segue que, um campo de vetores X em $GL(n,\mathbb{R})$ é uma aplicação

$X : GL(n,\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$. Além disso, devido a essa identificação as aplicações lineares L_M e R_M satisfazem $d(L_M)_N = L_M$ e $d(R_M)_N = R_M$, quaisquer que sejam $M, N \in GL(n,\mathbb{R})$. De posse dessa observação é possível descrever os campos invariantes em $GL(n,\mathbb{R})$. Seja $M \in GL(n,\mathbb{R})$. Suponha que $X_R : GL(n,\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ é invariante à direita. Então, para todo $M \in GL(n,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} X_R(M) &= d(R_M)_I X_R(I) \\ &= R_M X \\ &= XM, \end{aligned}$$

onde I é matriz identidade e $X = X_R(I)$. Analogamente, se X_L é um campo invariante à esquerda em $GL(n,\mathbb{R})$ então $X_L(M) = MX$.

É claro que as observações anteriores valem para os campos invariantes à esquerda e à direita em um subgrupo de Lie conexo G de $GL(n,\mathbb{R})$, ou seja, são respectivamente, da forma MX e XM, com $M \in G$. Portanto, se $X \in T_I G$ então o campo

$$\mathcal{X}(M) = XM - MX$$

é linear. Isso decorre de três fatos. Primeiramente devemos lembrar que o colchete de um campo invariante à direita com um campo invariante à esquerda é 0, ou seja, esses campos comutam. Além disso $\mathcal{X}(I) = XI - IX = 0$. Finalmente temos que, dado $Y \in T_I G$ então YM é campo invariante à direita. Daí

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}, YM] &= [XM - MX, YM] \\ &= [XM, YM] - [MX, YM] \\ &= [XM, YM] \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie dos campos invariantes à direta de G. É claro que o campo $\mathcal{X}$, como produto e diferença de matrizes, depende de polinômios sobre as entradas de tais matrizes. Como os grupos de Lie semisimples possuem apenas derivações internas a última forma de determinar um campo linear é a mais conveniente, pois, em geral, tais grupos não possuem uma parametrização global, como ocorre em muitos grupos de Lie solúveis(englobando os nilpotentes e abelianos, claro). Então, seja $SL(2,\mathbb{R})$ o grupo linear especial de todas as matrizes 2×2 com determinante igual a 1. Sua álgebra de

Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das matriz 2×2 com traço nulo. As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

geram $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e portanto se $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ então

$$\begin{aligned} X(M) &= AM \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é um campo invariante à direita em $SL(2,\mathbb{R})$ e da mesma forma,

$$\begin{aligned} Y(M) &= BM \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} Z(M) &= CM \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

são campos invariantes à direita em $SL(2,\mathbb{R})$.

Analogamente os campos

$$\begin{aligned} U(M) &= MA \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(M) &= MB \\
&= \begin{pmatrix} y & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
W(M) &= MC \\
&= \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -t \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

são campos invariantes à esquerda.

De posse dos campos invariantes podemos calcular os campos lineares,

$$\mathcal{X}_1(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} z & t-x \\ 0 & -z \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_2(M) = BM - MB = \begin{pmatrix} -y & 0 \\ x-t & y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_3(M) = CM - MC = 2\begin{pmatrix} 0 & y \\ -z & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Sistemas Afins e Bilineares em Grupos de Lie e Campos Lineares não-polinomiais

2.1 Sistemas Bilineares

O primeiros sistemas de controles afins que foram estudas em grupos de Lie foram os sitemas invariantes, nos quais a família de campos do sitema é formada por um "drift" que é um campo invariante e campos invariantes controlados. Posteriormente, Markus, em [26] estudou os sitemas afins cujo "drift" é um campo linear da forma $XM - MX, X \in T_I G$ e $M \in G$. Mais recentemente Ayla em [3] generalizou a noção de campo linear em grupo Lie qualquer e consequentemente a idéia de sistema afim em grupo de Lie com o campo linear não controlado. Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre sistemas bilineares em grupos de Lie. Tal sistema não é apenas importante em si como uma contribuição para teoria do controle, mas também por ser parte importante no caso geral de sistemas de controle afins, que é o sistema da forma

$$(\mathcal{X} + Y) + \sum_{j=1}^{m} u_j(\mathcal{X}_j + Y_j)$$

onde $\mathcal{X}, \mathcal{X}_j$ são campos lineares e Y, Y_j são campos invariantes, onde $j = 1, \ldots, m$.

Definição 2.1 (Sistema Bilinear em grupos de Lie)**.** *Seja G um grupo de Lie conexo, $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ campos lineares em G. Um Sistema de controle bilinear em G é um* *sistema afim*

$$\Sigma_B : \dot{g}(t) = \mathcal{X}^0(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j(t)\mathcal{X}^j(g(t)) = \mathcal{X}_{\omega(t)}(g(t)). \tag{2.1}$$

Denotaremos por $\mathcal{D}^j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a derivação associada ao campo linear $\mathcal{X}^j$, $j = 0, \ldots, m$. Além disso, para cada $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ e $g \in G$ a curva $t \mapsto \varphi^B(t, g, \omega)$ é a única solução de Σ_B associada a ω que satisfaz $\varphi(0, g, \omega) = g$. Para $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}$ fixos denotaremos por $\varphi^B_{t,\omega}$, o difeomorfismo $g \in G \mapsto \varphi^B_{t,\omega}(g) = \varphi(t, g, \omega)$.

Para cada $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ o campo $\mathcal{X}_u = \mathcal{X}^0 + \sum_{j=1}^m u_j\mathcal{X}^j$ é um campo linear e portanto seu fluxo $\{\psi^u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo a um parâmetro de automorfismo, ou seja, é completo e é um automorfismo. Denotaremos por $\mathcal{D}_u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a derivação associada ao campo $\mathcal{X}_u$, que é dada por $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}^0 + \sum_{j=1}^m u_j\mathcal{D}^j$. Com efeito, se $\mathcal{D}_u$ é a derivação associada ao campo $\mathcal{X}_u$, então para $Y \in \mathfrak{g}$ qualquer,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_u Y &= -[\mathcal{X}_u, Y] \\
&= -[\mathcal{X}^0 + \sum_{j=1}^m u_j\mathcal{X}^j, Y] \\
&= -[\mathcal{X}^0, Y] - \sum_{j=1}^m u_j[\mathcal{X}^j, Y] \\
&= \mathcal{D}^0 Y + \sum_{j=1}^m u_j\mathcal{D}^j Y \\
&= \big(\mathcal{D}^0 + \sum_{j=1}^m u_j\mathcal{D}^j\big)Y
\end{aligned}$$

Antes do próximo resultado, que nos dá uma expressão para as soluções de Σ_B em termos de concatenação de fluxos de campos lineares, faremos algumas observações sobre a relação da função shift com a solução de um sistema de controle. Para mais detalhes veja [9]. O shift satisfaz as propriedades de grupo $\Theta_0 = \mathrm{id}$ e $\Theta_{t+s} = \Theta_t \circ \Theta_s$ de modo que se $u \in \mathcal{U}$,

$$\varphi^B(t + s, g, u) = \varphi^B(t, \varphi^B(s, g, u), \Theta(s, u)),$$

desde que φ^B esteja definida para $t, s, t+s$. Além disso, fazendo $u = \Theta_{-t}(\omega)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi^B_{-t,\omega} \circ \varphi^B_{t,\Theta_{-t}(\omega)}(g) &= \varphi^B\big(-t, \varphi^B(t, g, \Theta_{-t}(\omega)), \omega\big) \\
&= \varphi^B\big(-t, \varphi^B(t, g, \Theta_{-t}(\omega)), \Theta_t(\Theta_{-t}(\omega))\big) \\
&= \varphi^B\big(-t, \varphi^B(t, g, u), \Theta_t(u)\big) \\
&= \varphi^B(-t+t, g, u) = g.
\end{aligned}$$

Portanto $\varphi^B_{-t,\omega} = \big(\varphi^B_{t,\Theta_{-t}(\omega)}(g)\big)^{-1}$

Teorema 2.1. *Seja $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ uma função de controle constante por partes. Considere $t_1, t_2, \ldots, t_n > t_0 = 0$ e $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}^m$ tal que $\omega(t) = \omega_i$ quando $t \in \Big[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\Big)$. Então*

$$\varphi^B(t, g, \omega) = \psi^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\Big(\psi^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\big(\ldots\big(\psi^{\omega_i}_{t_1}(g)\big)\ldots\big)\Big),\ t \in \Big[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\Big). \tag{2.2}$$

Além disso, as soluções de Σ_B são completas e $\varphi^B_{t,\omega}$ é um automorfismo de G, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$.

Prova: Seja $\alpha(t)$ a curva definida pelo lado direito da equação 2.2, ou seja,

$$\alpha(t) = \psi^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\Big(\psi^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\big(\ldots\big(\psi^{\omega_i}_{t_1}(g)\big)\ldots\big)\Big),\ t \in \Big[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\Big)$$

Devido à boa definição α satisfaz $\alpha(0) = g$ e é contínua como concatenação de fluxos de campos lineares. Como

$$\frac{d}{ds}\psi^{\omega_i}_s(h) = \mathcal{X}_{\omega_i}\big(\psi^{\omega_i}_s(h)\big)$$

para todo $h \in G$ e $s \in \mathbb{R}$, considerando

$$h = \psi^{\omega_i}_{-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\Big(\psi^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\big(\ldots\big(\psi^{\omega_i}_{t_1}(g)\big)\ldots\big)\Big),\ t \in \Big[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\Big),$$

temos que

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}\psi^{\omega_i}_t(h) = \mathcal{X}_{\omega_i}\big(\psi^{\omega_i}_t(h)\big) = \mathcal{X}_{\omega_{i}(t)}\big(\alpha(t)\big)$$

e pela unicidade obtemos $\alpha(t) = \varphi^B(t, g, \omega)$. Portanto $\alpha(t)$ é uma solução do sistema Σ_B passando por $g \in G$ associada à ω. A solução é completa devido à relação $\varphi^B_{-t,\omega}(g) = \big(\varphi^B_{t,\Theta_{-t}(\omega)}(g)\big)^{-1}$ e para cada t e ω φ é um automorfismo, pois é a composição de automorfismos. $\square$

Analogamente, obtém-se uma expressão similar para a solução φ^B em tempo negativo. Com efeito, se $s_m, \ldots, s_1 < s_0 = 0$ e $\omega \in \mathcal{U}$ é tal que $t \in \Big[\sum_{j=0}^{i} s_j, \sum_{j=0}^{i-1} s_j\Big)$, onde $\omega(t) = \omega_i \in \mathbb{R}^m$ e $j = 1, \ldots, m$. Então

$$\varphi^B(s, g, \omega) = \psi^{\omega_i}_{s-\sum_{j=1}^{i-1} s_j}\Big(\psi^{\omega_{i-1}}_{s_{i-1}}\big(\ldots(\psi^{\omega_i}_{s_1}(g))\ldots\big)\Big),\ t \in \Big[\sum_{j=0}^{i} s_j, \sum_{j=0}^{i-1} s_j\Big)$$

O próximo corolário sobre a solução do sistema bilinear será usado em um importante resultado sobre controlabilidade.

Corolário 2.1. *Seja G conexo e simplesmente conexo e Σ_B um sistema bilinear em G. Então a solução de Σ_B em $\exp X \in G$ é tal que*

$$\varphi^B(t, \exp X, \omega) = \exp\left(e^{(t-c)D\omega_i} e^{t_{i-1}D\omega_{i-1}} \ldots e^{t_1 D\omega_1}(X)\right)$$

onde $c = \sum_{j=0}^{i-1} t_j$.

Prova: De fato, como G é simplesmente conexo, cada campo linear $\mathcal{X}_{\omega_k}$ está associado a uma derivação $D_{\omega_k},\ k = 1, \ldots, i$. Por outro lado, como $\psi^{\omega_k}_{t_k}$ é um automorfismo, pois é o fluxo de $\mathcal{X}_{\omega_k}$, de 1.4 segue

$$\psi^{\omega^1}_{t_1}(\exp X) = \exp(e^{t_1 D\omega_1} X) = \exp(Y_1)$$

$$\psi^{\omega_2}_{t_2}(\exp Y_1) = \exp(e^{t_2 D\omega_2} Y_1) = \exp(Y_2)$$

$$\vdots$$

$$\psi^{\omega_i}_{t-c}(\exp Y_{i-1}) = \exp(e^{(t-c)D\omega i} Y_{i-1})$$

e portanto por retrosubstuição temos que

$$\varphi(t, \exp X, \omega) = \exp\left(e^{(t-c)D\omega_i} e^{t_{i-1}D\omega_{i-1}} \ldots e^{t_1 D\omega_1} X\right).$$

□

Devido ao morfismo e à conexidade do grupo G segue o

Corolário 2.2. *A solução do sistema Σ_B em $g \in G$ é da forma*

$$\begin{aligned} \varphi^B(t, g, \omega) &= \varphi(t, \exp X_1 \exp X_2, \ldots, \exp X_p, \omega) \\ &= \varphi^B(t, \exp X_1, \omega)\varphi^B(t, \exp X_2, \omega) \ldots \varphi^B(t, \exp X_p, \omega) \end{aligned}$$

Proposição 2.1. *Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie do subgrupo de Lie conexo $H \subset G$. Então H é Σ_B-invariante se, e somente se, H é ψ^j-invariante se, e somente se, $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}^j$-invariante, $j = 0, \ldots, m$.*

Prova: Pela proposição 1.6, H é ψ^j-invariante se, e somente se, $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}^j$ invariante.

Suponhamos agora que $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}^j$-invariante. Como $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}^j$-invariante, segue que $\mathfrak{h}$ é $e^{s\mathcal{D}^j}$-invariante, $s \in \mathbb{R}$. Então pelo corolário 2.1, $\varphi^B_{t,\omega}(\exp(X)) \in H$. Como H é conexo segue que $\varphi^B_{t,\omega}(H) \subset H$ qualquer que seja $t \in \mathbb{R}, \omega \in \mathcal{U}_{cp}$, mostrando que H é Σ_B-invariante.

Reciprocamente, suponhamos que H é Σ_B-invariante. Seja ω_0 a função de controle dada por $\omega^0(t) = (\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_m) = (0, 0, \ldots, 0)$, com $t \in \mathbb{R}$. Então, como

$$\Sigma_B : \mathcal{X}^0 + \sum_{j=1}^{m} \omega_j \mathcal{X}^j = \mathcal{X}^0$$

segue que

$$\psi^0_t(H) = \varphi^B_{t,\omega^0}(H) \subset H, t \in \mathbb{R}$$

e portanto $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}^0$-invariante. Consideremos a função constante $\omega^j = (0, \ldots, \omega_j, \ldots, 0)$, $\omega_j \neq 0$ na j-ésima coordenada, $j = 1, \ldots, m$. Temos que, para cada $t, s \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{g}$,

$$\exp s\big(e^{t(\mathcal{D}^0+\omega_j\mathcal{D}^j)}X\big) = \exp\big(e^{t(\mathcal{D}^0+\omega_j\mathcal{D}^j)}(sX)\big) = \varphi^B_{t,\omega^j}\big(\exp(sX)\big) \in H$$

onde a última igualdade ocorre por hipótese.

Isso implica que $e^{t(\mathcal{D}^0+\omega_j\mathcal{D}^j)}X \in \mathfrak{h}$, que implica $\big(\mathcal{D}^0 + \omega_j\mathcal{D}^j\big)X \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ é $\mathcal{D}^0$-invariante e $\omega_j \neq 0$, resulta que $\mathcal{D}^j X \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{h}$, mostrando que, $\mathfrak{h}$ é D^j-invariante. □

A próxima proposição mostra-nos que só faz sentido investigar a controlabilidade do sistema Σ_B em $G \setminus \{e\}$.

Proposição 2.2. *Seja $F_j = \{g \in G \mid \mathcal{X}^j(g) = 0\}$. Então as singularidades de Σ_B são dadas por $F = \cap_{j=1}^m F_j$.*

Prova: De fato, se $g \in F$ então para todo $i = 1, \ldots m$, $\mathcal{X}_i(g) = 0$. Daí $\mathcal{X}_u(g) = 0$. Por outro lado se $g \in G$ é uma singularidade de Σ então para todo $u = (u_1, \ldots, u_m)$ temos que $\mathcal{X}_u(g) = \big(\mathcal{X}_0 + \sum_{i=1}^n u_i\mathcal{X}_i\big)(g) = 0$. Se $u \equiv 0$, então $\mathcal{X}_u(g) = \mathcal{X}_0(g) = 0$. Daí $g \in F_0$. Suponhamos agora que $u^k = (0, \ldots, u_k, \ldots, 0)$ com $u_k \neq 0$. Então $\big(\mathcal{X}_0 + u_k\mathcal{X}_k\big)(g) = u_k\mathcal{X}_k(g) = 0$. Segue que $g \in F_k$. Daí $g \in F$. □

Passaremos agora à controlabilidade dos sistemas bilineares.

Associado com o sistema de controle bilinear Σ_B temos o sistema bilinear sobre o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ dado por

$$\dot{X}(t) \;=\; \mathcal{D}^0 + \sum_{j=1}^{m} \omega_j \mathcal{D}^j\big(X(t)\big) = \mathcal{D}_{\omega(t)}\big(X(t)\big). \tag{2.3}$$

Para cada $X \in \mathfrak{g}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ denotaremos a solução de 2.3 por $\Phi(t, X, \omega)$ e por $\Phi_{t,\omega}$ o difeomorfismo induzido. Podemos observar ainda que, assim como para campos lineares, temos uma expressão para a diferencial da solução de Σ_B em termos de exponencial de matrizes, como mostra a

Proposição 2.3. *Para quaisquer $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ e $X \in \mathfrak{g}$ temos que*

$$\Phi(t, X, \omega) = \big(d\varphi_{t,\omega}\big)_e(X) = e^{(t-\sum_{j=1}^{i})\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1\mathcal{D}_{\omega_1}} X.$$

Portanto,

$$\exp \circ \Phi_{t,\omega} = \varphi^B_{t,\omega} \circ \exp$$

Prova: Pelo corolário 2.1, temos, para cada $X \in \mathfrak{g}$, que

$$\varphi^B(t, \exp X, \omega) = \exp\big(e^{(t-c)D\omega_i} e^{t_{i-1}D\omega_{i-1}} \dots e^{t_1 D\omega_1}(X)\big),\; t \in \left[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\right)$$

Daí, se $t \in \left[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\right)$, vale

$$\begin{aligned}
\big(d\varphi^B_{t,\omega}\big)_e X &= \frac{d}{ds}\exp\big(e^{(t-\sum_{j=1}^{i} t_j)\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1\mathcal{D}_{\omega_1}} sX\big)\,|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\exp s\big(e^{(t-\sum_{j=1}^{i} t_j)\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1\mathcal{D}_{\omega_1}} X\big)\,|_{s=0} \\
&= (d\exp)_0 \frac{d}{ds}\big(se^{(t-\sum_{j=1}^{i} t_j)\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1\mathcal{D}_{\omega_1}} X\big)\,|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\big(se^{(t-\sum_{j=1}^{i} t_j)\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1\mathcal{D}_{\omega_1}} X\big)\,|_{s=0} \\
&= e^{(t-\sum_{j=1}^{i} t_j)\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1\mathcal{D}_{\omega_1}} X,
\end{aligned}$$

o que mostra a segunda igualdade. Além disso, $\big(d\varphi^B_{0,\omega}\big)_e X = X$ e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(d\varphi^B_{t,\omega}\big)X &= \mathcal{D}_{\omega_i}\big(e^{(t-\sum_{j=1}^{i} t_j)\mathcal{D}_{\omega_i}} e^{t_{i-1}\mathcal{D}_{\omega_{i-1}}} \dots e^{t_1\mathcal{D}_{\omega_1}} X\big) \\
&= \mathcal{D}_{\omega(t)}\big((d\varphi^B_{t,\omega})_e X\big),
\end{aligned}$$

implicam por unicidade que $\Phi(t, X, \omega) = (d\varphi^B_{t,\omega})_e X$. □

Sejam D^j uma derivação interna, Y^j um campo invariante à direita e $\mathcal{I} : G \to G$ dada por $\mathcal{I}(g) = g^{-1}$. Então o campo $\mathcal{X}^j = Y^j + \mathcal{I}_* Y^j$ é um campo linear, veja a proposição 1.5.

Reciprocamente temos a

Proposição 2.4. *Se $\mathcal{X}$ é um campo linear associado a uma derivação interna $D =$ad(Y) então $\mathcal{X} = Y + \mathcal{I}_* Y$.*

Prova: De fato, se $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o fluxo do campo $\mathcal{X}$, temos que

$$\begin{aligned} \psi_t(\exp(X)) &= \exp(e^{tD}X) \\ &= \exp(e^{t\mathrm{ad}(Y)}X) \\ &= \exp(\mathrm{Ad}(\exp(tY)X) \\ &= \exp(tY)\exp(X)\exp(-tY) \\ &= C_{\exp(tY)}(\exp(X)). \end{aligned}$$

Como G é conexo, segue que $\psi_t(g) = C_{\exp(tY)}(g)$ para todo $g \in G$. Assim,

$$\mathcal{X}_g = \frac{d}{dt}|_{t=0}\psi_t(g) = \frac{d}{dt}C_{\exp(tY)}(g) = (Y + \mathcal{I}_* Y)(g)$$

Portanto o sistema bilinear pode ser decomposto como

$$\mathcal{X}_{\omega(t)}(g(t)) = Y_{\omega(t)}(g(t)) + \mathcal{I}_*\big(Y_{\omega_{(t)}}(g(t))\big)$$

onde

$$\Sigma_I : Y_{\omega(t)}(g(t)) = Y^0(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} \omega_i Y^j(g(t))$$

é um sistema invariante à direita. □

O próximo resultado relaciona as soluções de Σ_B e Σ_I.

Proposição 2.5. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$, vale*

$$\varphi^B_{t,\omega} = C_{\varphi^I_{t,\omega}(e)}$$

onde $\varphi^I_{t,\omega}(e)$ é a solução de Σ_I a partir de $e \in G$ e $C_g : G \to G$ é a conjugação em G.

Prova: De fato, como podemos ver em [29] a solução do sistema Σ_I é dada por

$$\varphi^I_{t,\omega}(g) = \exp\big(t - \sum_{j=0}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \exp(t_{i-1}Y_{\omega_{i-1}}) \dots \exp(t_1 Y_{\omega_1})g$$

Por outro lado, se $s \in \Big(\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\Big]$ e $\omega(s) = \omega^i \in \mathbb{R}^m$ fixos, o fluxo do campo linear

$$\mathcal{X}_{\omega^i} = Y + \sum_{j=1}^{m} \omega^i_j Y + \mathcal{I}_*\big(Y + \sum_{j=1}^{m} \omega^i_j Y\big),\ \omega^i_j = (\omega^i_1, \dots \omega^i_m)$$

em $g \in G$ é

$$\psi^{\omega^i}_s(g) = \exp(sY_{\omega_i})g \exp^{-1}(sY_{\omega_i})$$

onde

$$Y_{\omega^i} = Y + \sum_{j=1}^{m} \omega^i_j Y$$

como mostra a proposição 1.5.

Assim, pelo teorema 2.1

$$\begin{aligned}
\varphi^B_{t,\omega} &= \psi^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\Big(\psi^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\big(\dots\big(\psi^{\omega_i}_{t_1}(g)\big)\dots\big)\Big) \\
&= \exp\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \dots \exp(t_1 Y_{\omega_1})g \exp^{-1}(t_1 Y_{\omega_1}) \dots \exp^{-1}\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \\
&= \exp\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \dots \exp(t_1 Y_{\omega_1})g\Big(\exp\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \dots \exp(t_1 Y_{\omega_1})\Big)^{-1} \\
&= \exp\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \dots \exp(t_1 Y_{\omega_1})g \exp^{-1}(t_1 Y_{\omega_1}) \dots \exp^{-1}\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \\
&= \exp\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \dots \exp(t_1 Y_{\omega_1})eg\Big(\exp\big((t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)Y_{\omega_i}\big) \dots \exp(t_1 Y_{\omega_1})e\Big)^{-1} \\
&= \varphi^I_{t,\omega}(e)g\big(\varphi^I_{t,\omega}(e)\big)^{-1} \\
&= C_{\varphi^I_{t,\omega}(e)}(g)
\end{aligned}$$

$\square$

O próximo resultado mostra-nos que a controlabilidade dos sistemas bilineares pode ocorrer apenas nos grupos abelianos conexos e simplesmente conexos.

Teorema 2.2. *Seja G um grupo de Lie conexo e Σ_B um sistema bilinear em G. Se G não é um grupo de Lie abeliano simplesmente conexo então Σ_B não é controlável.*

Prova: Será dividida em quatro partes:

1. *G é um grupo de Lie abeliano compacto.* Como por hipótese G é conexo, segue que G é um toro. Veja teorema 5.2 em [34]. Contudo o grupo de automorfismos do toro é discreto. Veja exemplo 2.3. Por outro lado, devido à continuidade $\varphi_{t,\omega} = id$, onde $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$. Portanto Σ_B não pode ser controlado.

2. *G é um grupo de Lie solúvel.* Como a álgebra de Lie de G é solúvel, sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel. Além disso, por hipótese, o subgrupo derivado G' é um subgrupo de Lie não-trivial e próprio de G. Como G' é invariante por automorfismos, temos em particular que $\psi^j(G') \subset G'$, $j = 1, \ldots, m$. Pela proposição 2.1 segue G' é Σ_B invariante. Portanto Σ_B não é controlável.

3. *G é um grupo de Lie semisimples.* Se G é semisimples, qualquer derivação é interna e pela proposição 2.5 temos que

$$\varphi^B_{t,\omega} = C_{\varphi^I_{t,\omega}(e)}, \ \forall\ t \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathcal{U}_{cp}$$

Portanto Σ_B não será controlável se provarmos que a conjungação C não age transitivamente em G. Temos então duas possibilidades:

3.1. *G é um grupo de Lie semisimples compacto.* Neste caso, G admite uma métrica bi-ivariante e portanto qualquer esfera centrada em e é invariante por conjugação. De fato, seja $S = \{x \in g|\ d(x, e) = r\}$. Então

$$d(gxg^{-1}, e) = d(gxg^{-1}, gg^{-1}) = d(xg^{-1}, g^{-1}) = d(xg^{-1}, eg^{-1}) = d(x, e) = r$$

Isso mostra que Σ_B não é controlável.

3.2. *G é um grupo de Lie semisimples não-compacto.* Como G é um grupo de Lie não-compacto, existem $x, y \in G$ tais que $Ad(x)$ é ortogonal e $Ad(y)$ é simétrica em relação a algum produto interno em $\mathfrak{g}$, veja [22]. Portanto, $Ad(x)$ e $Ad(y)$ não podem ser conjungadas e isso implica que a conjugação não pode ser transitiva. De fato, seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ a decomposição de Cartan em termos de álgebra. Tal decomposição determina uma involução θ tal que $\theta = 1$ em $\mathfrak{k}$ é $\theta = -1$ em $\mathfrak{s}$.

Além disso, $(\mathrm{ad}X)^* = -\mathrm{ad}(\theta X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, onde a adjunta está definida em relação ao produto interno $B_\theta(X, Y) = B(\theta X, Y)$ e B é a forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Segue-se que, se $X \in \mathfrak{k}$ então

$$(\mathrm{ad}X)^* = -\mathrm{ad}(\theta X) = -\mathrm{ad}(X)$$

e resulta que $\mathrm{ad}(X)$ é anti-simétrica. Seja $x = \exp(X) \in G$. Então

$$(\mathrm{Ad}(x))^* = e^{(\mathrm{ad}(X))^*} = e^{-\mathrm{ad}X} = (\mathrm{Ad}(x))^{-1}.$$

Portanto $\mathrm{Ad}(x)$ é ortogonal.

Por outro lado, se $Y \in \mathfrak{s}$ então

$$(\mathrm{ad}Y)^* = -\mathrm{ad}(\theta Y) = -\mathrm{ad}(-Y) = \mathrm{ad}(Y)$$

é simétrica e se, $y = \exp(Y)$ vale

$$(\mathrm{Ad}(y))^* = e^{(\mathrm{ad}(Y))^*} = e^{\mathrm{ad}Y} = \mathrm{Ad}(y).$$

Como $\mathrm{Ad}(y)$ é simétrica, seus autovalores são reais. Suponhamos que o sistema Σ_B seja controlável. Então existem $t \in \mathbb{R}, \omega \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $C_{\varphi^I_{t,\omega}(e)}(y) = x = lyl^{-1}$ com $l = \varphi^I_{t,\omega}(e)$. Daí $\mathrm{Ad}(x) = \mathrm{Ad}(l)\mathrm{Ad}(y)(\mathrm{Ad}(l))^{-1}$. Assim $\mathrm{Ad}(x)$ possui autovalores reais (por ser conjugada a uma simétrica) e de módulo 1, por ser ortogonal. Então, necessariamente $Ad(x)$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são ± 1. Portanto $Ad(K)$ é um conjunto discreto. Analogamente $Ad(S)$ é um conjunto discreto. além disso, como $G = KS$, resulta que $Ad(G) = Ad(K)Ad(S)$ é um conjunto discreto, o que é um absurdo.

4. *G é um grupo de Lie arbitrário.* Segue do fato que o radical solúvel de G é invariante por automorfismo, pois se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é o radical solúvel e $\mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$ é o radical nilpontente de $\mathfrak{g}$, então para uma derivação qualquer D, vale $D(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Veja corolário 2 do teorema 13 da seção 7 do capítulo 2 de [16] e proposição 2.18 de [32]. □

O teorema anterior mostra-nos que os sistemas bilineares não dão informações relevantes, sobre o grupo de Lie, quando este não é um grupo de Lie abeliano conexo e simplesmente conexo. Isso se deve principalmente às propriedades geométricas induzidas em grupos de Lie pelo colchete em sua álgebra de Lie. Apesar deste fato, na próxima seção veremos que tal sistema desempenha um papel importante na controlabilidade de um sistema afim.

2.2 Sistemas Afins

Seja $\mathcal{X}$ um campo linear e Y um campo invariante à direita. Dado um afim, cuja decomposição é $F = \mathcal{X} + Y$ seu fluxo é completo(veja [17]) e se $\alpha_t(e)$ é a trajetória de

F a partir da identidade então a trajetória de F passando por $g \in G$ é

$$\alpha_t(g) \quad = \quad L_{\alpha_t(e)}\psi_t(g) \tag{2.4}$$

onde $\psi_t(g)$ denota a trajetória de $\mathcal{X}$ através de $g \in G$.

Passaremos agora a nos preocupar com as soluções do sistema afim de modo geral. Precisaremos do seguinte

Lema 2.1. *Seja $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma família de campos afins $F_i = \mathcal{X}_i + Y_i$ tal que $\mathcal{X}_i$ campo linear e Y_i campo invariante à direita. Para cada $i_1, \ldots i_n \in \mathbb{N}$ e $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Então,*

$$\alpha^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \alpha^{i_1}_{\tau_1} = L_{\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots)} \circ \psi^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \psi^{i_1}_{\tau_1}$$

onde, para $j = 1, \ldots, n$, $\{\alpha^i_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ e $\{\psi^i_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ são os fluxos dos campos F_i e $\mathcal{X}_i$, respectivamente.

Prova: Provaremos a equação usando indução. Para $n = 1$ tal equação coincide com a equação 2.4.

Consideremos agora $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$, $\tau_{1,\ldots,\tau_{n+1}}$ e suponhamos que

$$\alpha^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \alpha^{i_1}_{\tau_1} = L_{\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots)} \circ \psi^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \psi^{i_1}_{\tau_1}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \circ \alpha^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \alpha^{i_1}_{\tau_1} &= \alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \circ L_{\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots)} \circ \psi^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \psi^{i_1}_{\tau_1} \\
&= L_{\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(e)} \circ \psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \circ L_{\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots)} \circ \psi^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \psi^{i_1}_{\tau_1}
\end{aligned}$$

e como $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ para todo automorfismo $f : G \to G$, como $g \in G$, resulta

$$\begin{aligned}
L_{\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(e)} \circ \psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \circ L_{\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots)} &= L_{\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(e)} \circ L_{\psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots))} \circ \psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \\
&= L_{\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(e)\psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots))} \circ \psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \\
&= L_{\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots))} \circ \psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}
\end{aligned}$$

que implica

$$\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \circ \alpha^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \alpha^{i_1}_{\tau_1} = L_{\alpha^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}}(\alpha^{i_n}_{\tau_n}(\ldots(\alpha^{i_1}_{\tau_1}(e))\ldots))} \circ \psi^{i_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \circ \psi^{i_n}_{\tau_n} \circ \ldots \circ \psi^{i_1}_{\tau_1}$$

o que conclui a prova. $\square$

O próximo lema é conhecido em termos de grupo de Lie. Este, será usado mais à frente em um de nossos resultados. Veja [50].

Lema 2.2. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e N um subgrupo normal de G com álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. então para cada $X \in \mathfrak{g}$ temos que*

$$\exp(X + \mathfrak{n}) \subset \exp(X)N.$$

Definição 2.2. *Um sistema de controle afim em um grupo de Lie é um sistema afim dado por*

$$\Sigma_F : \dot{g}(t) = F^0(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j F^j(g(t)) = F_\omega(g(t))$$

onde $F^0, F^1, \ldots, F^m$ são campos afins em G.

Para cada $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ e $g \in G$ a curva $t \mapsto \varphi^F(t, g, \omega)$ é a única solução de Σ_F associada ao controle $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ que satisfaz $\varphi(0, g, \omega) = g$. Para $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$ fixos denotaremos $\varphi^F(t, \omega)$ o difeomorfismo $g \in G \mapsto \varphi^F_{t,\omega}(g) = \varphi(t, g, \omega)$.

Passaremos agora às soluções do sistemas afins.

Teorema 2.3. *Seja ω uma função de controle constante por partes e considere $t_1, \ldots, t_n > t_0 = 0$ e $\omega_1, \ldots, \omega_n$ tal que $\omega(t) = \omega_i$ para $t \in \left[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\right)$. Se $\{\alpha_t^{\omega_i}\}_{t\in\mathbb{R}}$ denota o fluxo do campo afim $F_\omega = F^0 + \sum_{j=1}^{m} \omega_j F^j$ então*

$$\varphi^F(t, g, \omega) = \alpha^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\left(\alpha^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\left(\ldots(\alpha^{\omega_1}_{t_1}(g))\ldots\right)\right),\ t \in \left[\sum_{j=0}^{i-1} t_j, \sum_{j=0}^{i} t_j\right). \tag{2.5}$$

Além disso, as soluções de Σ_F são completas e

$$\varphi^F_{t,\omega} = L_{\varphi^F_{t,\omega}(e)} \circ \varphi^B_{t,\omega} \tag{2.6}$$

Prova: A fórmula 2.5 e a completude são provadas analogamente ao teorema 2.1. Vamos provar a equação 2.6. Devido a 2.5,

$$\varphi^F_{t,\omega} = \alpha^{\omega_i}_{t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j} \circ \alpha^{\omega i}_{t_{i-1}} \circ \ldots \circ \alpha^{\omega_1}_{t_1}.$$

Por outro lado, o lema 2.1 garante que

$$\alpha^{\omega_i}_{t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j} \circ \alpha^{\omega i}_{t_{i-1}} \circ \ldots \circ \alpha^{\omega_1}_{t_1} =$$

$$= L_{\alpha^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\left(\alpha^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\left(\ldots(\alpha^{\omega_1}_{t_1}(e))\ldots\right)\right)} \circ \psi^{\omega_i}_{t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j} \circ \psi^{\omega i}_{t_{i-1}} \circ \ldots \circ \psi^{\omega_1}_{t_1}$$

e pelo teorema 2.1
$$\varphi^B_{t,\omega} = \psi^{\omega_i}_{t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j} \circ \psi^{\omega i}_{t_{i-1}} \circ \ldots \circ \psi^{\omega_1}_{t_1}.$$

Portanto,

$$\varphi^F_{t,\omega} = \alpha^{\omega_i}_{t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j} \circ \alpha^{\omega i}_{t_{i-1}} \circ \ldots \circ \alpha^{\omega_1}_{t_1} =$$
$$= L_{\alpha^{\omega_i}_{t-\sum_{j=1}^{i-1} t_j}\left(\alpha^{\omega_{i-1}}_{t_{i-1}}\left(\ldots(\alpha^{\omega_1}_{t_1}(e))\ldots\right)\right)} \circ \psi^{\omega_i}_{t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j} \circ \psi^{\omega i}_{t_{i-1}} \circ \ldots \circ \psi^{\omega_1}_{t_1}$$
$$= \varphi^F_{t,\omega} = L_{\varphi^F_{t,\omega}(e)} \circ \varphi^B_{t,\omega}.$$

□

Analogamente ao caso bilinear obtém-se uma fórmula similar para tempo negativo.

Os próximos resultados são uma generalização dos resultados de [35] para o contexto geral de sistemas afins em grupos de Lie. Tais resultados mostram uma intríseca relação entre os sistemas bilineares e afins.

Lema 2.3. *Seja $g \in \mathcal{A}$ e suponha que $\varphi^B_{t,\omega}(g) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$. então*

$$\mathcal{A} \cdot g \subset \mathcal{A}$$

Prova: Seja $\varphi^F_{\tau,\omega}(e) \in \mathcal{A}$. então, como por hipótese

$$\varphi^B_{-\tau,\Theta_\tau(\omega)}(g) \in \mathcal{A}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi^F_{\tau,\omega}(e)g &= \varphi^F_{\tau,\omega}(e)\varphi^B_{0,\Theta_\tau(\omega)}(g) \\
&= \varphi^F_{\tau,\omega}(e)\varphi^B_{\tau-\tau,\Theta_\tau(\omega)}(g) \\
&= \varphi^F_{\tau,\omega}(e)\varphi^B_{\tau,\Theta_{-\tau}(\Theta_\tau(\omega))}(\varphi^B_{-\tau,\Theta_\tau(\omega)}(g)) \\
&= \varphi^F_{\tau,\omega}(e)\varphi^B_{\tau,\omega}(\varphi^B_{-\tau,\Theta_\tau(\omega)}(g)) \\
&= \varphi^F_{\tau,\omega}(\varphi^B_{-\tau,\Theta_\tau(\omega)}(g)) \in \varphi^F_{\tau,\omega}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

□

O lema 2.3 implica a seguinte proposição:

Proposição 2.6. *Seja H um subgrupo de Lie conexo Σ_B invariante com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Se $\exp X \in \mathcal{A}$, para todo $X \in \mathfrak{h}$, então $H \subset \mathcal{A}$.*

Prova: Pelo corolário 2.1, para cada $X \in \mathfrak{h}$, $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{pc}$ temos

$$\varphi^B_{t,\omega}(\exp X) = \exp\left(e^{(t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j)D\omega_i} e^{t_{i-1}D\omega_{i-1}} \dots e^{t_1 D\omega_1}(X)\right)$$

Como H é Σ_B-invariante temos que $e^{(t-\sum_{j=0}^{i-1} t_j)D\omega_i} e^{t_{i-1}D\omega_{i-1}} \dots e^{t_1 D\omega_1}(X) \in \mathfrak{h}$ que por hipótese implica $\varphi^B_{t,\omega}(\exp X) \in \mathcal{A}$, para cada $X \in \mathfrak{h}$, $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$.

Seja então $g \in H$ e considere $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{h}$ tais que $g = \exp X_1 \exp X_2 \dots \exp X_n$. Pelo lema 2.3 e cálculos anteriores segue que

$$\begin{aligned} g &\in \mathcal{A} \exp X_2 \exp X_3 \dots \exp X_n \subset \\ &\subset \mathcal{A} \exp X_3 \exp X_4 \dots \exp X_n \subset \dots \subset \\ &\subset \mathcal{A} \exp X_n \subset \mathcal{A} \end{aligned}$$

que implica $H \subset \mathcal{A}$. □

Proposição 2.7. *Seja $N \subset H \subset G$ subgrupos de Lie conexos com álgebras de Lie $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, respectivamente. Se $\mathfrak{n}$ é um ideal de $\mathfrak{h}$ e $\mathcal{D}^j(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{n}$, $j = 0, \dots, m$, $N \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ aberto, então $H \subset \mathcal{A}$.*

Prova: Para cada $X \in \mathfrak{h}, t \in \mathbb{R}$ e $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, temos que

$$e^{t\mathcal{D}_u} X = X + \sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n!} \mathcal{D}^n_u(X), \text{ onde } \mathcal{D}_u = \mathcal{D}^0 + \sum_{j=1}^m u_j \mathcal{D}^j.$$

Devido à hipótese sobre $\mathcal{D}^j$, $j = 0, \dots m$, obtemos

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n!} \mathcal{D}^n_u(X) \in \mathfrak{n}$$

e então $e^{t\mathcal{D}_u} X \in X + \mathfrak{n}$. Indutivamente, podemos facilmente mostrar que para $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ e $X \in \mathfrak{h}$ temos

$$e^{\tau_n \mathcal{D}_{u_n}} e^{\tau_{n-1} \mathcal{D}_{u_{n-1}}} \dots e^{\tau_1 \mathcal{D}_{u_1}} X \in X + \mathfrak{n}.$$

Pelo corolário 2.1 e lema 2.2 segue que

$$\varphi^B_{t,\omega}(\exp X) \subset \exp(X + \mathfrak{n}) \subset \exp(X)N$$

para cada $t \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $X \in \mathfrak{h}$.

Seja $W = \exp(U)$ uma vizinhança conexa da identidade $e \in H$ tal que $W \subset \mathcal{A} \cap H$. Sendo H um subgrupo conexo é suficiente mostrar que $W^n \subset \mathcal{A}$, o que faremos por indução. Para $n = 1$ temos que $W \subset \mathcal{A}$ por construção.

Seja $g = \exp(X) \in W$ e $h \in W^{n-1}$. Então $gh \in W^n$. Pela hipótese de indução, temos que $W^{n-1} \subset \mathcal{A}$ e portanto $h = \varphi^F_{\tau,\omega}(e)$ para $\tau > 0$ e $\omega \in \mathcal{U}_{cp}$. Além disso, pelo que vimos acima $\varphi^B_{\tau,\omega}(g) = g \cdot g'$ com $g' \in N$. Portanto,

$$hg = L_{\varphi^F_{\tau,\omega}(e)}\big(\varphi^B_{\tau,\omega}(g)\big)(g')^{-1} = \varphi^F_{\tau,\omega}(g)(g')^{-1}.$$

Como por construção $g = \varphi^F_{\tau',\omega'}(e)$ para algum $\tau' > 0$ e $\omega' \in \mathcal{U}_{cp}$, segue que

$$\varphi^F_{\tau,\omega}(g) = \varphi^F_{\tau,\omega}(\varphi^F_{\tau',\omega'}(e)) = \varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(e),$$

onde $\omega'' \in \mathcal{U}_{cp}$ é concatenação de ω e ω'. Da Σ_B-invariância de N(hipótese) e do fato que $N \subset \mathcal{A}$ temos que

$$\varphi^B_{-\tau-\tau',\Theta_{\tau+\tau'}(\omega'')}(g'^{-1}) \in \mathcal{A}$$

que nos dá

$$\begin{aligned}
hg &= L_{\varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(e)}(g'^{-1}) \\
&= L_{\varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(e)}\varphi^B(0, g'^{-1}, \Theta_{\tau+\tau'(\omega'')}) \\
&= L_{\varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(e)}\varphi^B(\tau+\tau'-\tau-\tau', g'^{-1}, \Theta_{\tau+\tau'(\omega'')}) \\
&= L_{\varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(e)}\varphi^B\Big(\tau+\tau', \varphi^B\big(-\tau-\tau', g'^{-1}, \Theta_{\tau+\tau'}(\omega'')\big), \Theta_{-\tau-\tau'}(\Theta_{\tau+\tau'}(\omega''))\Big) \\
&= L_{\varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(e)}\varphi^B\Big(\tau+\tau', \varphi^B\big(-\tau-\tau', g'^{-1}, \Theta_{\tau+\tau'}(\omega'')\big), \omega''\Big) \\
&= L_{\varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(e)} \circ \varphi^B_{\tau+\tau',\omega''}\Big(\varphi^B_{-\tau-\tau',\Theta_{\tau+\tau'}(\omega'')}\big(g'^{-1}\big)\Big) \\
&= \varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(\varphi^B_{-\tau-\tau',\Theta_{\tau+\tau'}(\omega'')}\big(g'^{-1}\big)) \\
&\in \varphi^F_{\tau+\tau',\omega''}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.3. *Seja G um grupo de Lie solúvel e suponha que $\mathcal{A}$ é aberto. Se $N \subset G$ é o radical nilpotente de G então $N \subset \mathcal{A}$ implica $G = \mathcal{A}$.*

Prova: De fato, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie solúvel e $\mathfrak{n}$ seu radical nilpotente então $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$ para cada derivação $\mathcal{D} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. O resultado segue da proposição 2.7. □

Teorema 2.4. *Suponha que $\mathcal{D}^j$, $j = 0, \ldots, m$ são derivações internas e que G é um grupo de Lie nilpotente. Então $\mathcal{A}$ é aberto se, e somente se $\mathcal{A} = G$.*

Prova: Seja

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}_{n+1} = \{0\}$$

a série central descendente de $\mathfrak{g}$, onde para $i = 2, \ldots, n$ temos que $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}]$ são ideais de $\mathfrak{g}$. Como $\mathcal{D}^j$ é uma derivação interna para $j = 0, \ldots, m$ temos que $\mathcal{D}^j(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n$.

De fato, se $\mathcal{D}^j$ é uma derivação interna, então existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathcal{D}^j X = [Y, X]$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Em particular, se $X \in \mathfrak{g}_i$ então $D^j X = [Y, X] \in \mathfrak{g}_{i+1}$. Portanto, se

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} = \{e\}$$

é a série central descendente em termos de grupo, onde G_i é grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, n$ então, o fato de $\mathcal{A}$ ser aberto implica que $G_{n+1} \subset \mathcal{A}$ e pela proposição 2.7 obtemos $G_n \subset \mathcal{A}$. Novamente, aplicando a proposição 2.7 vale $G_{n-1} \subset \mathcal{A}$. Repetindo este processo n vezes resulta que $G = G_1 \subset \mathcal{A}$. Portanto temos que o sistema é atingível a partir da identidade. $\square$

Seja $\mathcal{A}^*$ o conjunto acessível em tempo não positivo a partir da identidade.

Corolário 2.4. *Suponha que $\mathcal{D}^j$, $j = 0, \ldots, m$ são derivações internas e que G é um grupo de Lie nilpotente. Então $\mathcal{A}^*$ é aberto se, e somente se $\mathcal{A}^* = G$.*

Assim temos o seguinte teorema que garante a controlabilidade no grupo nilpotente quando as derivações associadas ao campos lineares são derivações internas.

Teorema 2.5. *Suponha que $\mathcal{D}^j$, $j = 0, \ldots, m$ são derivações internas e que G é um grupo de Lie nilpotente. Então $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{A}$ são abertos se, e somente se o sistema afim é controlável.*

2.3 Exemplos

Como vimos, a controlabilidade dos sistemas bilineares pode ocorrer apenas nos grupos abelianos conexos e simplesmente conexos. No capítulo preliminar, na seção sobre sistemas bilineares em $\mathbb{R}^n_*$ damos alguns exemplos sobre controlabilidade de tais sistemas.

Exemplo 2.1 (Grupo de Lie Solúvel). *Seja* $Aff(2)^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ *o grupo solúvel de dimensão 2 com operação*

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1)$$

com elemento neutro $e = (1,0)$ *e álgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(2)^+$ *gerada pelos campos*

$$\begin{aligned} X(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial x} \\ Y(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

cujo colchete satisfaz $[X,Y] = Y$.

A derivação do grupo é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

e a álgebra derivada é $\mathfrak{g}' = \text{span}\{Y\}$. Fazendo a identificação na álgebra, $X(e) = X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Y(e) = Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ resulta

$$D(\alpha Y) = \alpha DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \alpha bY \in \mathfrak{g}'$$

.

Portanto $\mathfrak{g}'$ é invariante pela derivação e da mesma forma é invariante por

$$e^{sD} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{s^n}{n!} D^n.$$

Assim, temos a invariância pela solução do sistema bilinear do subgrupo G' com álgebra Lie $\mathfrak{g}'$. Segue que o sistema não é controlável no grupo afim(solúvel) de dimensão 2.

Além disso,

$$D(\mathbb{R}X + \mathbb{R}Y) = \mathbb{R}Y$$

e portanto

$$\mathcal{D}(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{g}) = span\{Y\} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$$

Este exemplo ilustra a parte 2 e 4 do teorema 2.2.

Exemplo 2.2 (Grupo de Lie Nilpotente)**.** *Seja* $\mathbb{H}$ *o subgrupo de* $GL(3,\mathbb{R})$ *das matrizes reais* 3×3 *cujos elementos são da forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tal grupo, que é conexo e simplesmente conexo, é conhecido como grupo de Heisenberg. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ *é gerada pelos seguintes campos invariantes à direita*

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

e cujo único colchete não nulo é $[X,Y] = Z$ *com derivação*

$$D = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a+e \end{pmatrix}.$$

Faremos as identificações

$$X = X(0,0,0) = \frac{\partial}{\partial x} = (1,0,0)$$

$$Y = Y(0,0,0) = \frac{\partial}{\partial y} = (0,1,0)$$

$$Z = Z(0,0,0) = \frac{\partial}{\partial z} = (0,0,1).$$

Temos que $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = span\{Z\}$. Além disso,

$$DX = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a+e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \notin \mathfrak{h}',$$

$$DY = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a+e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \notin \mathfrak{h}'.$$

Por outro lado

$$DZ = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a+e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a+e \end{pmatrix} = (a+e) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}',$$

garante a invariância de $\mathfrak{h}'$e portanto a não controlabilidade do sistema bilinear. Podemos observar ainda que

$$\mathcal{D}(\mathfrak{r}(\mathfrak{h})) = \mathcal{D}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{rn}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$$

não garante a não controlabilidade do sistema bilinear em $\mathbb{H}$. Observemos ainda que, se $G = \mathbb{H} \times H$ onde H é um grupo de Lie conexo então a última igualdade garante a não controlabilidade do sitema bilinear em G. Esta observação ilustra, uma das possibilidades, em termos de não controlabilidade do sistema bilinear em um grupo de Lie arbitrário.

Exemplo 2.3 (Grupo de Lie Abeliano e Compacto)**.** *O grupo de automorfismo do toro T^n é*

$$Aut_{\mathbb{Z}^n}\mathbb{R}^n = \{g \in GL(n,\mathbb{R});\ g(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n\}$$

que é isomorfo a $SL(n,\mathbb{Z}) = \{g = (x_{ij}) \in GL(,\mathbb{R}) :\ det(g) = 1, x_{ij} \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado, o fluxo dos campos lineares são grupos a um parâmetro de automorfismos $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset SL(n,\mathbb{Z})$.Isso mostra que $\phi_t = id$ e portanto $\mathcal{X} = 0$. Segue que o sistema não é controlável.

2.4 Campo Linear Não-polinomial

Agora classificaremos todos os campos lineares no grupo afim solúvel de dimensão 3, ou seja, daremos a expressão geral do campo linear em termos de todas as derivações, internas e não-internas. Vericamos que tal campo linear, que é analítico, possui coeficientes que não dependem apenas de polinômios. Embora em [3], Ayala tenha mostrado que Campos Lineares são analíticos não se conhecia um exemplo de um Campo Linear não polinomial. Seja

$$G = A^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} -y & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; y < 0, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

o grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ gerada pelos campos $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y = -y\dfrac{\partial}{\partial y}$ and $Z = \dfrac{\partial}{\partial z}$.

A operação do grupo é definida por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x - yx', -yy', z + z')$$

com identidade $u = (0, -1, 0)$ tal que o único colchete não trivial é dado por $[X, Y] = X$. De fato,

$$[X, Y] = [-y\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}] = y^2[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + y\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} = -y\frac{\partial}{\partial x}$$

Agora vamos calcular a derivação.

Seja $D : \mathfrak{a}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \to \mathfrak{a}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ a derivação da álgebra de Lie dado por

$$D = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

na base $\{X, Y, Z\}$
Neste caso temos,

$$\begin{aligned} DX &= aX + bY + cZ \\ DY &= dX + eY + fZ \\ DZ &= gX + hY + iZ \end{aligned}$$

Como D é uma derivação
$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] = [aX + bY + cZ, Y] + [X, dX + eY + fZ] =$
$= a[X, Y] + e[X, Y] = aX + eX = DX = aX + bY + cZ.$

Portanto $b = c = e = 0$.

Por outro lado $0 = D[X, Z] = [DX, Z] + [X, DZ] = [aX + bY + cZ, Z] + [X, gX + hY + iZ] = h[X, Y]$.
que implica $h = 0$.

Finalmente
$0 = D[Y, Z] = [DY, Z] + [Y, DZ] = [dX + eY + fZ, Z] + [Y, gX + hY + iZ] = g[Y, X]$

Segue-que $g = 0$ e

$$D = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & i \end{pmatrix}$$

O próximo passo é calcular o campo afim
$\mathcal{F}$ em $A^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$, dado por

$$\mathcal{F} = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \lambda\frac{\partial}{\partial z},$$

que satisfaz $DV = -[\mathcal{F}, V]$, onde V é um campo invariante.

A primeira coisa a fazer é calcular DX, DY e DZ.

$$\begin{aligned} DX &= aX + bY + cZ = aX + 0Y + 0Z \\ &= -ay\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y} + 0\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DY &= dX + eY + fZ = dX + 0Y + fZ \\ &= -yd\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DZ &= gX + hY + iZ \\ &= 0X + 0Y + iZ = 0\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Como, $DV = -[\mathcal{F}, V]$, o segundo passo é calcular $-[\mathcal{F}, X]$, $-[\mathcal{F}, Y]$ e $-[\mathcal{F}, Z]$. Então

$$\begin{aligned} -ad_{\mathcal{F}}X &= -[\mathcal{F}, X] \\ &= -\big[\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \lambda\frac{\partial}{\partial z}, X\big] \\ &= -\Big([\alpha\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial x}] + [\beta\frac{\partial}{\partial y}, -y\frac{\partial}{\partial x}] + [\lambda\frac{\partial}{\partial z}, -y\frac{\partial}{\partial x}]\Big) \\ &= \big[\alpha\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial x}] + [\beta\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}] + [\lambda\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial x}] \end{aligned}$$

Como, em um sistema de coordenadas qualquer $[\frac{\partial}{\partial_i}, \frac{\partial}{\partial_j}] = 0$, segue que

$$-ad_{\mathcal{F}}X = \big(\beta - y\frac{\partial\alpha}{\partial x}\big)\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-ad_{\mathcal{F}}Y \;=\; -y\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\big(\beta-y\frac{\partial\beta}{\partial y}\big)\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}$$

e finalmente

$$-ad_{\mathcal{F}}Z \;=\; \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} DX &= -ay\frac{\partial}{\partial x}+0\frac{\partial}{\partial y}+0\frac{\partial}{\partial z}\\ &= \big(\beta-y\frac{\partial\alpha}{\partial x}\big)\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DY &= -yd\frac{\partial}{\partial x}+0\frac{\partial}{\partial y}+f\frac{\partial}{\partial z}\\ &= -y\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\big(\beta-y\frac{\partial\beta}{\partial y}\big)\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

e por último,

$$\begin{aligned} DZ &= 0\frac{\partial}{\partial x}+0\frac{\partial}{\partial y}+i\frac{\partial}{\partial z}\\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

que implicam as seguintes equações

$$\begin{array}{lll} \beta-y\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}=-ay & -dy=-y\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial z}=0\\[2ex] -y\dfrac{\partial\beta}{\partial x}=0 & \beta-y\dfrac{\partial\beta}{\partial y}=0 & \dfrac{\partial\beta}{\partial z}=0\\[2ex] -y\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}=0 & -y\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=f & \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}=i \end{array}$$

Comecemos calculando β.

Como $-y\frac{\partial\beta}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial\beta}{\partial x}=0$ e $\frac{\partial\beta}{\partial z}=0$ isso implica que β não depende de x e z.

Por outro lado se, $\beta\neq 0$, então

$$\beta-y\frac{\partial\beta}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial\beta}{\beta}=\frac{\partial y}{y}\Rightarrow ln|\beta|=ln|y|+k\Rightarrow|\beta|=|y|e^k$$

e por outro lado, $|\beta|=-ye^k\Rightarrow\beta=k_2y$, $k_2\neq 0$. Se $\beta=0$ então $\beta=k_2y$ com $k_2=0$ é a solução para $\beta-y\frac{\partial\beta}{\partial y}=0$

Calculando λ:
$-y\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} = 0$ implica que λ não depende de x.

$$-y\frac{\partial\lambda}{\partial y} = f \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\lambda = -\frac{f}{y} \Rightarrow \lambda = -fln|y| + M(z) + k_3,$$

onde M é uma função em $A^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ que depende apenas z.

Mas,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = i \Rightarrow \lambda = iz - fln(-y) + k_3.$$

Calculando α,
$\dfrac{\partial\alpha}{\partial z} = 0 \Rightarrow \alpha$ não depende de z e

$$-dy = -y\frac{\partial\alpha}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial y} = d \Rightarrow \alpha = dy + N(x) + k'$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \beta - y\frac{\partial\alpha}{\partial x} &= -ay \Rightarrow k_2 y - y\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \\ &= -ay \Rightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial x} = a + k_2 \Rightarrow \alpha = (a+k_2)x + dy + k_1. \end{aligned}$$

Então

$$\mathcal{F} = \big((a+k_2)x + dy + k_1\big)\frac{\partial}{\partial x} + k_2 y\frac{\partial}{\partial y} + (iz - fln(-y) + k_3)\frac{\partial}{\partial z}$$

e
$\mathcal{F}(e) = \mathcal{F}(0,-1,0) = (-d+k_1)\dfrac{\partial}{\partial x} - k_2\dfrac{\partial}{\partial y} + k_3\dfrac{\partial}{\partial z} = 0 \Rightarrow k_1 = d$ and $k_2 = k_3 = 0$.

Portanto o campo linear é dado por

$$\mathcal{X} = \big(ax + dy + d\big)\frac{\partial}{\partial x} + \big(iz - fln(-y)\big)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Podemos observar que, no grupo solúvel afim de dimensão 3, a expressão do campo linear não depende apenas de polinômios sobre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0\}$.

Capítulo 3

Conclusões Finais

Em termos de sistemas bilineares, devido ao teorema 2.2, não se tem controlabilidade fora do grupo abeliano conexo e simplesmente conexo. Dentre os sistemas invariantes, lineares, bilineares e afins em grupos de Lie, o sistema bilinear é o único que possui a questão da controlabidade resolvida de forma global, fazendo sentido, nos grupos não abelianos, a investigação de conjuntos de controle em tais sistemas. Por outro lado, em termos de sistema afim fica em aberto a controlabilidade de tais sistemas quando as derivações não são necessariamente internas. Um outra linha de investigação pode ser a controlabilidade nos grupos de Lie semissimples. Finalmente, não podemos deixar de ressaltar que todos os resultados sobre sistemas afins valem para os sistemas invariantes e lineares, mostrando o quanto tal sistema é importante.

Referências Bibliográficas

[1] A. A. Agrachev an Yu. Sachkov, Control Theory from the Geometric Viewpoint, 2004.

[2] V. Ayala and L.A.B. San Martin. Controllability properties of a class of control systems on Lie groups. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 258, pp.:83-92, 2001.

[3] V. Ayala and J. Tirao. Linear Control Systems on Lie Groups and Controllability. Eds. G. Ferreyra et al., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[4] C. J. B. Barros, J. R. Gonçalves Filho, O. G. do Rocio, and L. A. B. San Martin, Controllability of two-dimensional bilinear systems, Proyecciones Revista de Matematica, vol. 15, 1996.

[5] W. M. Boothby, Some comments on positive orthant controllability of bilinear systems, SIAM J. Control Optim., vol. 20, pp.: 634-644, 1982.

[6] W. M. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2nd ed. New York: Academic Press, 2003.

[7] W. M. Boothby and E. N. Wilson. Determination of the transitivity of bilinear systems, SIAM J. Control Optim., vol. 17, pp.: 212-221, 1979.

[8] R. W. Brockett. System theory on group manifolds and coset spaces, SIAM J. Control 10, 265?284, 1972.

[9] F. Colonius and W. Kliemann. The Dynamics of Control. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[10] F. Cardetti, On Properties of linear Control Systems on Lie Groups, Ph. D Thesis, Louisiana State University, 2002

[11] F. Cadetti and D. Mittenhuber. Local Controllabilility for Linear Systems on Lie Groups, Journal of Dynamical Control Systems, vol 11, pp.: 353-373, 2005.

[12] D. L. Elliott. Bilinear Control Systems: matrices in action, Vol. 169, Springer Science and Business Media, 2009.

[13] S. Helgason. Differential Geometry, Lie Groups and Simmetric Spaces. Academic Press, Inc., London, 1978.

[14] R. Hermann, The formal linearization of a semisimple Lie algebra of vector fields about a singular point, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 130, pp.: 105-109, 1968.

[15] R. Hermann. On the accessibility problem in control theory, Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics (New York), Academic Press, pp. 325?332, New York, 1963.

[16] N. Jacobson. Lie algebras. No. 10. Courier Corporation, 1979.

[17] P. Jouan. Controllability of Linear Systems on Lie Groups, Journal of Dynamical and Control System, Vol. 17, pp.: 591-616, 2011.

[18] P. Jouan, Equivalence of Control Systems with Linear Systems on Lie Groups and Homogeneous Space, ESAIM: Control Optimization and Calculus of Variation, Vol. 16, pp.: 956-973, 2010.

[19] V. Jurdjevic. Geometric Control Theory, Cambridge University Press, 1997.

[20] V. Jurdjevic and H. Sussman, Control Systems on Lie Groups, Differential Equations, Vol. 12, pp.: 313-329, 1972.

[21] R. Kalman. Y. Ho and K. Narendra, Controllability of Linear Dynamical Systems, Contribuitions to Differential Equations, Vol. 1, pp.:189-213, 1962.

[22] A. W. Knapp. Lie Groups Beyond an Introduction (2nd Edition). Birkhäuser, Berlin, 2004.

[23] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. InterScience Publishers, London, 1963.

[24] A. J. Krener. A generalization of Chow?s theorem and the bangbang theorem to non-linear control problems, SIAM J. Control 12, 43?52, 1974.

[25] Claude Lobry. Contrôlabilité des systèmes non linéaires, SIAM J. Control 8, pp.: 573?605, 1970.

[26] L. Markus,Controllability of Multi-trajetories on Lie Groups, Proceedings of Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics Vol. 898, pp.: 250-265, 1980.

[27] R. R. Mohler, Nonlinear systems, Vol. 2, Applications to Bilinear Control, 1991.

[28] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, Non Linear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag, 1990.

[29] Y. Sachkov. Control theory on Lie groups. Journal of Mathematical Sciences, Vol 156, n°3, pp.: 381-439, 2009.

[30] Y. Sachkov. Controllability of Invariant Systems on Lie Groups and Homogeneous Space, Progress in Science and Technology, Series on Contemporary Mathematics and Aplications, Thematical Surveis, Vol. 59, 1998.

[31] Y. Sachkov. Controllability of Affine right-invariant Systems on Solvable Lie Groups, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 1, pp.: 239-246, 1997.

[32] L. San Martin. Ágebra de Lie, Editora Unicamp, 2ª edição, 2011.

[33] L. San Martin and V. Ayala. Controllability properties of a class of control systems on Lie groups. Nonlinear control in 2000, 1 (Paris), pp. 83?92; Lect. Notes Control Inform. Sci. 258, Springer-Verlag, London 2001.

[34] M. R. Sepanski. Compact lie groups. Springer Science & Business Media, Vol. 235, 2007.

[35] A. Da Silva. Controllability of linear systems on solvable Lie groups. SIAM Journal on Control and Optimization 54.1 : 372-390, 2016.

[36] E. D. Sontag. Mathematical Control Theory. Deterministic finitedimensional systems. Springer-Verlag, New York, 1998.

[37] E. D. Sontag. Polynomial Response Maps. Berlin: Springer-Verlag: Lecture Notes in Control and Information Science 13, 1979.

[38] E. D. Sontag. On the observability of polynomial systems, I: Finite time problems. SIAM J. Control Optim., vol. 17, pp. 139-151, 1979.

[39] E. D. Sontag. A Chow property for sampled bilinear systems, in Analysis and Control of Nonlinear Systems. C. Byrnes, C. Martin, and R. Saeks, Eds. Amsterdam: North Holland, 1988, pp. 205-211.

[40] E. D. Sontag. Mathematical Control Theory. Deterministic finitedimensional systems. Springer-Verlag, New York, 1998.

[41] E. D. Sontag, Y. Wang, and A. Megretski. Input classes for identification of bilinear systems. IEEE Trans. Automat. Control, to appear.

[42] S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall,1964.

[43] H. K. Struemper. Motion control for nonholonomic systems on matrix lie groups. Sc.D. Dissertation, University of Maryland, College Park, Maryland, 1997.

[44] H. J. Sussmann, The control problem $x' = (A(1-u) + Bu)x$: a comment on an article by J. Kucera. Czech. Math. J., vol. 22, pp. 423-426, 1972.

[45] H. J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 180, pp. 171-188, 1973.

[46] H. J. Sussmann. An extension of a theorem of Nagano on transitive Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 45, pp. 349-356, 1974.

[47] H. J. Sussmann. Semigroup representations, bilinear approximation of input-output maps, and generalized inputs. In Mathematical Systems Theory, G. Marchesini and S. K. Mitter, Eds. Berlin: Springer-Verlag, 1975, pp. 172-191.

[48] H. J. Sussmann and V. Jurdjevic. Controllability of nonlinear systems. Journal of Differential Equations, vol. 12, pp.: 95-116, 1972.

[49] V. S. Varadarajan. Lie groups, Lie algebras, and their representations. Vol. 102. Springer Science & Business Media, 2013.

[50] Wüstner, M. On the surjectivity of the exponential function on solvable Lie groups. Math. Nachr., 192, (1998), pp. 255-266.