



MODELO WEIBULL MULTIVARIADO PARA DADOS DEPENDENTES

Regina Aparecida da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Matemática,
da Universidade Federal do Amazonas, como
parte dos requisitos necessários à obtenção do
título de Mestre em Matemática

Orientador: Max Sousa de Lima

Manaus

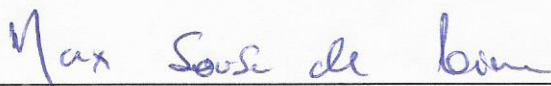
Março de 2017

MODELO WEIBULL MULTIVARIADO PARA DADOS DEPENDENTES

Regina Aparecida da Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE. DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
AMAZONAS, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

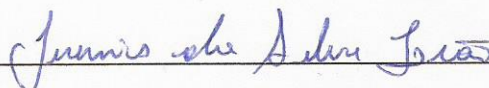
Examinada por:



Prof. Max de Sousa de Lima, D.Sc.



Prof. Luiz Henrique Duczmal, D.Sc



Prof. Jeremias da Silva Leão, D.Sc

MANAUS, AM – BRASIL

MARÇO DE 2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586m Silva, Regina Aparecida da
Modelo Weibull multivariado para dados dependentes / Regina
Aparecida da Silva. 2017
60 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Max Sousa de Lima
Dissertação (Mestrado em Matemática - Estatística) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Weibull multivariado. 2. valores extremos. 3. predição espacial.
4. dependentes. 5. sobrevivência. I. Lima, Max Sousa de II.
Universidade Federal do Amazonas III. Título

*À toda minha família, em especial
ao meu esposo e filho.*

Agradecimentos

A Deus, em tudo e por tudo, sou grata.

Ao meu orientador, Prof. Max Sousa de Lima, pela confiança, paciência e incentivo durante o mestrado.

Aos demais professores e colaboradores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFAM pela oportunidade de realização do mestrado, em especial aos professores Roberto Cristóvão, José Nazareno Vieira Gomes, Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda, Nilo-mar Vieira de Oliveira e Fernando Vera, pelo apoio e incentivo.

A todos os professores do curso de Estatística da Universidade Federal do Amazonas por me proporcionar o conhecimento e aos professores Celso Rômulo Cabral e Amazoneida Sá Peixoto Pinheiro por terem acreditado em mim.

Aos secretários da Pós-Graduação, Ari e Elclimar, pelo interesse em sempre ajudar e esclarecer prontamente qualquer dúvida.

Aos professores Luiz Henrique Duczmal e Jeremias da Silva Leão, membros da banca, por suas contribuições e melhorias dadas a esta pesquisa.

Aos meus professores da Puc-Campinas, Geraldo Pompeu Junior e Maurício Francisco Ceolin (in memorian), que durante toda a minha graduação, incentivaram, apoiaram e contribuíram para a minha formação acadêmica.

Ao meu querido marido George e meu lindo filho Francisco pelo incentivo, paciência e amor incondicional dado todos os dias.

Aos meus queridos pais, Conceição e Lázaro, por mostrarem que a maior herança a ser deixada para um filho é o amor e estudo.

Ao meu irmão Rogério pelo carinho e apoio nesta árdua caminhada.

Agradeço especialmente minha amiga de mestrado, Renata, que desde o início do curso, sempre enfrentamos todas as dificuldades regadas de muitas descontrações e conse-

lhós.

À Alice, Milena, Sarah, Alex e Jhonata pelo companheirismo, amizade e aprendizagem em equipe.

À Márcia, Vanessa, Carla, Camila, Mariana, Leyne e José Mir, pela amizade, generosidade e motivação constante.

À Leda, Alessandra e Eliane que mesmo distantes fisicamente transmitiram palavras de carinho e atenção.

Aos primos Manoel e Daniel pelas orações e carinho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudo concedida.

Enfim a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

*"Alguns homens vêem as coisas como são, e dizem
'Por quê?' Eu sonho com as coisas que nunca foram
e digo 'Por que não?'. " (George Bernard Shaw).*

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. (M.Sc.)

MODELO WEIBULL MULTIVARIADO PARA DADOS DEPENDENTES

Regina Aparecida da Silva

Março/2017

Orientador: Max Sousa de Lima

Área de Concentração : Estatística

Neste trabalho foi proposto um modelo Weibull multivariado para dados que exibem uma certa dependência. O modelo foi construído através da marginalização da distribuição Weibull G -exponencializada condicionada a uma variável (ou campo aleatório) latente formado por uma mistura de distribuições α_m -estáveis. As variáveis latentes foram incorporadas ao modelo para capturar a dependência de interesse. Algumas propriedades desse novo modelo são apresentadas e procedimentos para estimação e inferência são discutidos. Finalmente, o modelo proposto foi ilustrado utilizando dados de evasão no curso de Estatística da UFAM, obtidos no Sistema de Informações para o Ensino da Universidade Federal do Amazonas-SIE/UFAM.

Abstract of Dissertation presented to Postgraduate in Mathematics, of the Federal University of Amazonas, as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Mathematics. (M.Sc.)

MULTIVARIATE WEIBULL MODEL FOR DEPENDENT DATA

Regina Aparecida da Silva

March/2017

Advisor: Max Sousa de Lima

Research area: Statistics

In this work a multivariate model was proposed for the data that exhibit dependence. The model was obtained by marginalizing of Weibull G -exponentialised distribution conditioned to a latent variable and/or random field formed by a mixture of α_m -stable distributions. The latent variables were incorporated into the model to capture the dependency of interest. Some properties of this new model are presented and procedures for estimation and inference are discussed. Finally, the model proposed was illustrated using evasion's data from Statistics course of UFAM, available at Information System for Teaching from Universidade Federal do Amazonas-SIE/UFAM.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
1.1 Aspectos Gerais	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo Geral	2
1.2.2 Objetivos Específicos	2
1.3 Estrutura do Trabalho	3
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 Introdução	4
2.2 Distribuições condicionais G-exponencializada	4
2.3 Distribuições estáveis	6
2.4 Marginais univariadas de distribuições condicionais G-exponencializada	9
2.5 Algoritmo EM e MCEM	10
2.5.1 Algoritmo EM	10
2.5.2 Algoritmo Monte Carlo EM	11
2.6 Distribuição Weibull	12
2.6.1 Propriedades	13
2.6.2 Distribuição Weibull exponencializada	15
3 Modelo Weibull multivariado	16
3.1 Introdução	16
3.2 Construção do modelo	16
3.3 Alguns modelos especiais	18

3.3.1	Modelo Weibull multivariado para tempo de retorno em dados espacialmente dependentes	18
3.3.2	Modelo Weibull multivariado para processos de variação espacial discreta	20
3.3.3	Modelo Weibull multivariado para Séries Temporais com componentes autoregressivos (AR)	20
3.3.4	Modelo de sobrevivência com fragilidade α -estáveis e dependência espacial	21
3.3.5	Modelo marginal de fração de cura com tempos dependentes	22
3.4	Propriedades do modelo Weibull multivariado	22
3.4.1	Distribuição do mínimo	23
3.4.2	Distribuição marginal	24
3.4.3	Dependência positiva	24
3.4.4	Função de densidade conjunta	26
3.4.5	Função de densidade conjunta por grupos	30
3.4.6	Geração dos vetores aleatórios por grupos	32
4	Inferência no modelo Weibull multivariado	39
4.1	Introdução	39
4.2	Estimando os parâmetros via máxima verossimilhança	39
4.3	Algoritmo MCEM para o modelo proposto	42
5	Modelo Weibull multivariado com fragilidade compartilhada para estimação de taxas de evasão escolar	45
5.1	Introdução	45
5.2	Sobre a evasão de cursos	45
5.3	Descrição dos dados	46
5.4	Construção do modelo proposto	47
5.5	Estimação no modelo proposto	49
5.6	Análise dos resultados	51
6	Considerações finais	54
6.1	Conclusões	54

6.2	Propostas de trabalhos futuros	55
	Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função densidade da distribuição Weibull com $\beta = 1$	13
2.2	Taxa de falha da distribuição Weibull com $\beta = 1$	14
3.1	Localização das 14 estações meteorológicas do Estado do Amazonas ($s_1, \dots, s_{14}$) onde são observadas a medida de interesse $y(s_l)$. Pontos com o mesmo símbolo pertence ao mesmo grupo. $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ representa 3 localizações arbitrárias onde são alocados os processos latentes E_{α_m} , $m = 1, 2, 3$. Esses pontos são alocados em cada sub-região a partir dos seus pesos $w_{m,l}$	19
3.2	Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.50$	36
3.3	Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.70$	37
3.4	Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.90$	38
5.1	Ingressos no curso de graduação em estatística-UFAM no período 2010-2013.	47
5.2	QQPlots marginais e permanências marginais estimadas	53

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos Gerais

A distribuição Weibull é muito popular em aplicações práticas pela sua capacidade em modelar muitos tipos de função de risco, tornando-a assim muito flexível no ajuste de diferentes tipos de dados. A principal razão que torna essa distribuição tão versátil é devido a formulação matemática única do modelo. Ela pode ser altamente simétrica ou altamente assimétrica, dependendo dos parâmetros do modelo ajustado, ver Wang (2016). Essa distribuição tem sido amplamente utilizada na análise de sobrevivência, ver Wahed *et al.* (2009), devido à simplicidade da função de risco. Também, tem sido aplicada em outras áreas da ciência tais como: meteorologia, (ver Wang *et al.* (2015), Gryning *et al.* (2013) e Harris & Cook (2014)); agronomia, ver Virto *et al.* (2006) e biologia experimental, ver Hagey *et al.* (2016).

Existem muitos trabalhos envolvendo a distribuição Weibull univariada, porém alguns modelos Weibull bivariado e multivariado podem ser encontrados, ver por exemplo, (Marshall & Olkin (1967); Lee (1979); Marshall & Olkin (1988); Roy & Mukherjee (1989); Crowder (1989), Lu (1989); Lu & Bhattacharyya (1990); Hanagal (1996); Patra & Dey (1999); Lee & Wen (2006); Villanueva *et al.* (2013)), entre outros. A inferência nesses modelos, muitas vezes, é feita numa análise bidimensional. Algumas vezes fazer inferência no modelo multivariado é uma tarefa complexa, pois as densidades e as propriedades são difíceis de serem obtidas.

A distribuição Weibull tem sido usada no contexto de variáveis aleatórias indepen-

dependentes e identicamente distribuídas (i.i.d) ou somente independentes. A extensão da distribuição Weibull univariada para o caso multivariado é desejável em vista do papel crucial que a distribuição desempenha na confiabilidade bem como na construção de modelos para várias falhas ou distribuição de tempo de vida, ver Hanagal (1996).

Sendo assim, neste trabalho é proposto um Modelo Weibull multivariado flexível que incorpora, por exemplo, dados extremos espacialmente dependentes. O modelo é construído através da marginalização de uma distribuição Weibull G -exponencializada condicionada a uma variável (ou campo aleatório) latente formado por uma mistura de distribuições α_m -estáveis. As variáveis latentes são incorporadas ao modelo para capturar a dependência de interesse. Algumas propriedades desse novo modelo são apresentadas e procedimentos para estimação e inferência são discutidos. Finalmente, o modelo proposto é ilustrado utilizando dados de Evasão no curso de Estatística da UFAM, obtidos no Sistema de Informações para o Ensino da Universidade Federal do Amazonas-SIE/UFAM.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O principal objetivo deste trabalho é a construção de um modelo Weibull multivariado para dados dependentes com aplicações em diversas áreas, entre elas, predição espacial de valores extremos e análise de sobrevivência.

1.2.2 Objetivos Específicos

Dentre os objetivos específicos tem-se:

1. Construção do modelo Weibull multivariado;
2. Apresentação das propriedades do modelo;
3. Desenvolvimento do algoritmo para estimação de parâmetros e inferência no modelo;
4. Ilustração do modelo utilizando dados reais.

1.3 Estrutura do Trabalho

A presente dissertação está organizada em seis capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica dos temas abordados nos demais capítulos. No Capítulo 3 é introduzido o modelo Weibull multivariado; alguns modelos especiais e propriedades do modelo proposto. No Capítulo 4 é obtida a inferência. A aplicação do modelo em dados de evasão no contexto de análise de sobrevivência é ilustrada no Capítulo 5. As conclusões são resumidas no Capítulo 6.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Neste capítulo será feito um breve levantamento da teoria utilizada no desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente, será apresentado a definição de distribuições condicionais G -exponencializada aplicado no contexto multivariado usando como base a técnica introduzida por Lehmann (1953). A classe de distribuição de probabilidade chamada estável e suas propriedades mais importantes têm destaque na Seção 2.3. Na Seção 2.4 será apresentado marginais de distribuições condicionais G -exponencializada. Na Seção 2.5 será introduzido o Algoritmo **EM** (Expectation-Maximization), um método iterativo para encontrar o EMV em modelos estatísticos que envolvem variáveis não observáveis (efeitos aleatórios, variáveis latentes ou dados faltantes) cuja a verossimilhança não é analiticamente tratável. A distribuição Weibull univariada e suas propriedades serão abordadas na Seção 2.6.

2.2 Distribuições condicionais G -exponencializada

Várias técnicas para expandir famílias de distribuições de probabilidade e construir novos modelos probabilísticos flexíveis que incorporem alguma propriedade de interesse têm sido proposto na literatura. Uma técnica bastante utilizada é baseada na exponencialização de uma função de distribuição acumulada G , chamada classe de distribuições G -exponencializada. Esta técnica foi introduzida por Lehmann (1953) no contexto de teste de hipótese e recentemente tem recebido bastante atenção.

Existem vários trabalhos abordando algumas famílias de distribuições na classe de distribuições exponencializadas, tais como: ver por exemplo, Mudholkar & Srivastava (1993) que introduziu a distribuição Weibull exponencializada, ver Gupta & Kundu (2001) que introduziu a distribuição Exponencial exponencializada, ver Nadarajah & Kotz (2006) que apresentou resultados e discussões sobre as distribuições Exponencial, Weibull, Gumbel, Gama e Fréchet exponencializadas, ver Ristić & Balakrishnan (2012) que introduziu a distribuição Gama-exponencializada Exponencial; ver Bakouch *et al.* (2012) que propuseram a distribuição Binomial-Exponencial exponencializada; ver Pinho *et al.* (2012) que introduziram a distribuição Gama-exponencializada Weibull, a família exp- G é apresentada em Barreto-Souza *et al.* (2013) e uma generalização de várias destas distribuições é a família de distribuições $T - X$ exponencializada desenvolvida em Alzaghal *et al.* (2013).

Um conceito fundamental a ser abordado é o de distribuições condicionais G -exponencializada caracterizada pela função de distribuição acumulada G de uma variável aleatória elevada a um expoente E . Embora este tipo de distribuição, com E fixo, tenha sido apresentada a mais de meio século por Lehmann (1953) aqui a utilizaremos com o objetivo de introduzir a dependência em distribuições multivariadas.

Definição 1. *Sejam Y e $E > 0$ duas variáveis aleatórias. Dizemos que condicional a E , $Y|E$ tem distribuição G -exponencializada quando a sua Função de Distribuição Acumulada é da forma,*

$$\mathbb{P}(Y \leq y; \boldsymbol{\theta}|E) = F(y; \boldsymbol{\theta}|E) = [G(y; \boldsymbol{\theta})]^E, \quad (2.1)$$

ou se sua função de sobrevivência é dada por,

$$\mathbb{P}(Y > y; \boldsymbol{\theta}|E) = \bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}|E) = [1 - G(y; \boldsymbol{\theta})]^E = \bar{G}(y; \boldsymbol{\theta})^E \quad (2.2)$$

em que $G(\bar{G})$ é chamada de função de distribuição (função de sobrevivência) de base dependendo do vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta}$.

Para o entendimento desta definição, suponha que $W_1, W_2, \dots, W_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição acumulada igual a G e, ainda, $W_i, i = 1, \dots, n$ é independente de E . Então o $Y_{(n)}$ representará a distribuição do Máximo (2.1) ou $Y_{(1)}$ a distribuição do Mínimo (2.2) de E dessas W_i 's variáveis. Portanto,

podemos usar F para modelar valores extremos. O valor de E não precisa necessariamente ser inteiro. No caso do Valor Máximo, notando que

$$\mathbb{P}(W_i < Y; \boldsymbol{\theta}|E) = \frac{E}{E+1}, i = 1, 2, \dots, n,$$

onde o E poderá ser interpretado como um parâmetro de estocasticidade, no sentido que descreve o quanto a variável aleatória Y é, estocasticamente, maior que W_i .

2.3 Distribuições estáveis

As distribuições estáveis são uma rica classe de distribuições de probabilidade que permitem assimetria e caudas pesadas e têm propriedades interessantes tais como estabilidade e independência de escala, ver Nolan (2015). Essa classe foi introduzida pelo matemático Levy (1925) em seu estudo de somas de termos independentes e identicamente distribuídos.

Em geral, as distribuições estáveis não possuem uma forma fechada para sua função densidade de probabilidade, por isso a forma mais concreta para descrever todas as possíveis distribuições estáveis é através da função característica ou transformada de Fourier, exceto para três casos particulares de distribuições: Normal, Cauchy e Lévy com quais é possível escrever suas densidades e verificar diretamente que elas fazem parte da família de distribuições estáveis.

Existem várias parametrizações da função característica para distribuições estáveis. Por esse motivo, é importante escolher a parametrização adequada para diferentes situações. Nesse trabalho a função característica foi parametrizada de acordo com a definição apresentada abaixo.

Definição 2. *Uma variável estável E , denotada por $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, se sua função característica é expressa por*

$$\mathbb{E}[\exp(itE)] = \exp\left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 + i\beta \left(\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) (\sin(t)) (|\gamma t|^{1-\alpha} - 1)\right] + i\delta t\right) \quad \text{se } \alpha \neq 1. \quad (2.3)$$

Esta forma de parametrização para a função característica é muito recomendada.

As distribuições estáveis são descritas por quatro parâmetros: um índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$ também chamado de expoente característico; um parâmetro de assimetria

$\beta \in [-1, 1]$. Se $\beta = 0$, a distribuição é simétrica, se $\beta > 0$ é assimétrica para direita, e se $\beta < 0$ é assimétrica para esquerda. Além desses parâmetros também tem um parâmetro de escala $\gamma > 0$ e um parâmetro de locação $\delta \in \mathbb{R}$.

O índice de estabilidade α é considerado o parâmetro mais importante, pois determina a forma (taxa de variação) da cauda da distribuição. Quanto maior seu valor maior será a frequência e o tamanho de eventos extremos, ver por exemplo Ghahfarokhi & Ghahfarokhi (2009).

Quando a distribuição é padronizada, ou seja, escala $\gamma = 1$ e locação $\delta = 0$, a distribuição estável é representada pela notação $\mathbf{S}(\alpha, \beta, 1, 0)$. Uma propriedade básica das distribuições estáveis é que soma de variáveis aleatórias estáveis resultam em variáveis estáveis, ver Nolan (2015).

Seja $E_m \sim \mathbf{S}(\alpha, 0, 1, 0)$, $m = 1, 2, \dots, M$ e $\beta = 0$, então sua função característica será da forma

$$\phi_E(t) = \mathbb{E}[\exp(itE)] = e^{-t^\alpha}, \quad \alpha \neq 1; \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Considere a mistura $H_l = \sum_{m=1}^M w_{m,l} E_m$. Então, a função característica de H_l será dada por

$$\begin{aligned} \phi_{H_l}(t) &= \phi_{\sum_{m=1}^M w_{m,l} E_m}(t) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-t \sum_{m=1}^M w_{m,l} E_m} \right] \\ &= \prod_{m=1}^M \mathbb{E} [e^{-t w_{m,l} E_m}] \\ &= \prod_{m=1}^M \phi_{E_m}(w_{m,l} t) \\ &= \prod_{m=1}^M e^{-w_{m,l}^\alpha t^\alpha} \quad \text{com } \alpha_m = \alpha, \quad \text{então} \\ \phi_{H_l}(t) &= e^{-t^\alpha \sum_{m=1}^M w_{m,l}^\alpha}, \quad \text{portanto} \end{aligned}$$

$$H_l = \sum_{m=1}^M w_{m,l} E_m \sim \mathbf{S}(\alpha, 0, \gamma_l, 0),$$

com $\gamma_l^\alpha = \sum_{m=1}^M w_{m,l}^\alpha$.

Teorema 1. (Aproximação da densidade de H_l). Seja $H_l \sim \mathbf{S}(\alpha, 0, \sum_{m=1}^M w_{m,l}^\alpha, 0)$ com $0 <$

$\alpha \leq 1$. Se para algum m , $E_m \rightarrow \infty$. Então $h_l \rightarrow \infty$ e pelo Teorema 1.12 Nolan (2015).

$$P(H_l > h_l) \sim \gamma_l^\alpha c_\alpha h_l^{-\alpha},$$

$$f(h_l; \alpha, 0, \gamma_l) \sim \alpha \gamma_l^\alpha c_\alpha h_l^{-(\alpha+1)},$$

em que $c_\alpha = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$.

E a densidade aproximada de h_l é dada por

$$\begin{aligned} f(h_l; \alpha) &= -\frac{\partial}{\partial h_l} P(H_l > h_l; \alpha, \gamma_l) \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial h_l} \gamma_l^\alpha c_\alpha h_l^{-\alpha} \right] \\ &\sim \alpha \gamma_l^\alpha c_\alpha h_l^{-(\alpha+1)} \text{ com } h_l > 0. \end{aligned}$$

Definição 3. Uma variável $E_\alpha \equiv \mathbf{S}(\alpha, 0, 1, 0)$ é chamada α -estável positiva, descrita pela equação (2.4). Então, a sua transformada de Laplace é dada por,

$$\mathbb{E}[\exp(-aE_\alpha)] = e^{-a^\alpha}, \quad a > 0, \quad (2.5)$$

em que necessariamente $\alpha \in (0, 1]$ é o parâmetro de estabilidade da distribuição E_α e quando $\alpha = 1 \rightarrow E_1 = 1$.

A representação da densidade de E_α é dada por

$$p(e^*; \alpha) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{1}{e^*} \right)^{(1-\alpha)^{-1}} \int_0^\pi b(\phi) \exp \left\{ - \left(\frac{1}{e^*} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} b(\phi) \right\} d\phi$$

onde,

$$b(\phi) = \left(\frac{\sin(\alpha\phi)}{\sin(\phi)} \right)^{(1-\alpha)^{-1}} \left(\frac{\sin((1-\alpha)\phi)}{\sin(\alpha\phi)} \right)$$

Corolário 1. Kanter et al. (1975). Sejam V e U variáveis aleatórias independentes onde $V \sim \text{Exp}(1)$ e $U \sim \mathcal{U}[0, \pi]$. Então para $\alpha \in (0, 1)$ tem-se que $p(e^*; \alpha)$ é a densidade de $\left(\frac{a(U)}{V} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}$.

Os valores de E_α podem ser gerados através dos seguintes passos:

1. Gere $U \sim \mathcal{U}(0, \pi)$ e $V \sim \text{Exp}(1)$, independentes.

2. Obtenha $e^* = \left(\frac{a(U)}{V}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$.

Pelo Corolário 1, segue que $e^* \sim E_\alpha$.

2.4 Marginais univariadas de distribuições condicionais G-exponencializada

Suponha que a condicional $Y|E$ tem distribuição G-exponencializada dada pela Definição 1 e que a incerteza sobre E seja descrita através de uma distribuição de probabilidade α -estável positiva dada em 2.5.

Então usando a equação (2.1), a condicional a E_α será dada por

$$F(y; \boldsymbol{\theta}|E_\alpha) = [G(y; \boldsymbol{\theta})]^{E_\alpha} = \exp \left\{ -E_\alpha \log \left[\frac{1}{G(y; \boldsymbol{\theta})} \right] \right\},$$

e marginalmente por (2.5),

$$F(y; \boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E} [F(y; \boldsymbol{\theta}|E_\alpha)] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -E_\alpha \log \left[\frac{1}{G(y; \boldsymbol{\theta})} \right] \right\} \right] = \exp \left\{ -(-\log [G(y; \boldsymbol{\theta})])^\alpha \right\},$$

usando a equação (2.2), a condicional a E_α será dada por

$$\overline{F}(y; \boldsymbol{\theta}|E_\alpha) = [\overline{G}(y; \boldsymbol{\theta})]^{E_\alpha} = \exp \left\{ -E_\alpha \log \left[\frac{1}{\overline{G}(y; \boldsymbol{\theta})} \right] \right\}, \quad (2.6)$$

e marginalmente por (2.5),

$$\overline{F}(y; \boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E} [\overline{F}(y; \boldsymbol{\theta}|E_\alpha)] = \exp \left\{ -(-\log [\overline{G}(y; \boldsymbol{\theta})])^\alpha \right\}. \quad (2.7)$$

Alguns exemplos de marginais univariadas:

- Assuma que $Y|E \sim \text{Gumbel}(\mu + \delta \log(E), \delta)$.

Então, $H(y; \boldsymbol{\theta}|E) = \exp(-E e^{(y-\mu)/\delta})$ e portanto,

$$F(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \mathbb{E}[H(y; \boldsymbol{\theta}|E)] = \exp \left\{ - \left(e^{-\frac{y-\mu}{\delta/\alpha}} \right) \right\} \sim \text{Gumbel}(\mu, \delta/\alpha); \quad y \in \mathfrak{R}.$$

- Agora, assuma que $Y|E \sim \text{Weibull}(\beta/E^{1/\gamma}, \gamma)$.

Então, $\bar{H}(y; \boldsymbol{\theta}|E) = e^{-\left(\frac{y}{\beta/E^{1/\gamma}}\right)^\gamma} = e^{-E\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma}$ e portanto,

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \mathbb{E} [\bar{H}(y; \boldsymbol{\theta}|E)] = \mathbb{E} \left[e^{-E\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma} \right] = e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\gamma\alpha}} \sim W(\beta, \gamma\alpha); \quad y > 0.$$

Logo, as marginais das respectivas distribuições são da mesma família.

Neste trabalho, aplicando a Definição 1 e a equação (2.5) será construído um modelo Weibull multivariado para dados com certa dependência utilizando a distribuição G -exponencializada condicionada a uma mistura de distribuições α -estáveis com $G \sim \text{Weibull}$, similar ao descrito em Fougères *et al.* (2009).

2.5 Algoritmo EM e MCEM

2.5.1 Algoritmo EM

Neste trabalho o estimador de máxima verossimilhança (EMV) será encontrado via algoritmo **EM**, ver Dempster *et al.* (1977), pois a maximização da função verossimilhança do modelo proposto não é analiticamente tratável.

O algoritmo **EM** é uma ferramenta computacional utilizada para o cálculo do EMV de forma iterativa, indicado para problemas que envolvem dados incompletos ou quantidades não observáveis (variáveis latentes). As variáveis latentes podem ser incorporadas ao modelo com o propósito de capturar a característica de interesse (neste caso, a dependência) e facilitar a estimação dos parâmetros de interesse, tendo em vista que com sua inserção no modelo, a log-verossimilhança completa pode ser reescrita como a soma de duas log-verossimilhanças completas.

Para construir o algoritmo, seja $\mathbf{y}$ o vetor de dados observados ou dados incompletos e $\mathbf{E}$ um vetor de quantidades aleatórias não observáveis (chamados de efeitos aleatórios, variáveis latentes ou dados faltantes). O dado completo ou aumentado $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{E})$ é $\mathbf{y}$ aumentado com $\mathbf{E}$ e sua função de densidade é $f(\mathbf{y}_c|\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Denota-se por $\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)$ a função log-verossimilhança dos dados completos e por $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ a função log-verossimilhança dos dados observados.

Na maioria das aplicações estatísticas, a função log-verossimilhança dos dados com-

pletos geralmente tem forma mais simples que a log-verossimilhança dos dados observados.

Cada iteração do algoritmo **EM** tem dois passos, chamado o passo **E** (esperança) e o passo **M** (maximização). Seja $k(\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ a distribuição condicional de **E** com esperança $\mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}}$ e defina $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ como a estimativa do parâmetro na k -ésima iteração. Então os dois passos na $(k+1)$ -ésima iteração são:

1. Passo **E**: Calcule $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}}[\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}]$,
2. Passo **M**: Maximize $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ com respeito a $\boldsymbol{\theta}$. Se o valor $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \arg\max (Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}))$ satisfaz $|e_{(k)} = \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}| < \varepsilon$, em que ε é um valor especificado para o erro na aproximação. Então, o EMV de $\boldsymbol{\theta}$ é $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$. Caso contrário, repita os passos **E** e **M** até que a convergência seja obtida.

Segundo Casella & Berger (2002), a garantia que a verossimilhança irá aumentar em cada iteração pode não ser suficiente para concluir que a sequência $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\}$ converge para um estimador de máxima verossimilhança. Tal garantia exige mais condições, ver por exemplo, Wu (1983).

2.5.2 Algoritmo Monte Carlo EM

Em algumas aplicações do algoritmo **EM**, o passo **E** é complexo e não admite uma solução analítica, isto é, a função $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ não pode ser calculada explicitamente. Uma solução é calcular a função $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ através do método Monte Carlo (**MC**). Note que

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}}[\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}].$$

O algoritmo **MCEM**, ver Wei & Tanner (1990), consiste nos seguintes passos:

1. Passo **E (MC)**: na $(k+1)$ -ésima iteração, seja $\mathbf{E}^{(k,1)}, \dots, \mathbf{E}^{(k,M)}$ amostras geradas da distribuição condicional de $\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}$. Aproxime $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ por,

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ \log[f(\mathbf{y}, \mathbf{E}^{(m,k)}; \boldsymbol{\theta})] | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right\},$$

2. Passo **M**: Maximize essa versão aproximada de $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$.

2.6 Distribuição Weibull

A distribuição Weibull tem sido utilizada para modelar tempos de vida, ver Weibull (1951). Seu campo de aplicação abrange diversas áreas da ciência, ver por exemplo, Rinne (2008). Em geral, a distribuição Weibull é usada em análise de sobrevivência, na teoria de valores extremos, na previsão do tempo, entre outras situações (ver Asimit *et al.* (2010); Pfeifer *et al.* (2010); Zhu *et al.* (2011); Rand & McLinn (2011); Gryning *et al.* (2013); Gualtieri & Secci (2014); Harris & Cook (2014); Tye *et al.* (2014); SenGupta *et al.* (2015); D'Amico *et al.* (2015); Hagey *et al.* (2016)).

Definição 4. Uma variável aleatória tem distribuição Weibull com parâmetros $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ se sua função densidade é dada por

$$g(y) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\gamma}} & \text{se } y \geq 0, \\ 0 & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

O parâmetro β é um parâmetro de escala e γ é um parâmetro de forma da distribuição. Fazendo $\gamma = 1$ a distribuição Weibull reduz a uma distribuição exponencial. Através da escolha de diferentes valores para os parâmetros $(\beta; \gamma)$, podem ser obtidas diferentes formas para a densidade 2.8. A Figura 2.1 apresenta algumas densidades fixando o parâmetro $\beta = 1$ e variando o parâmetro γ .

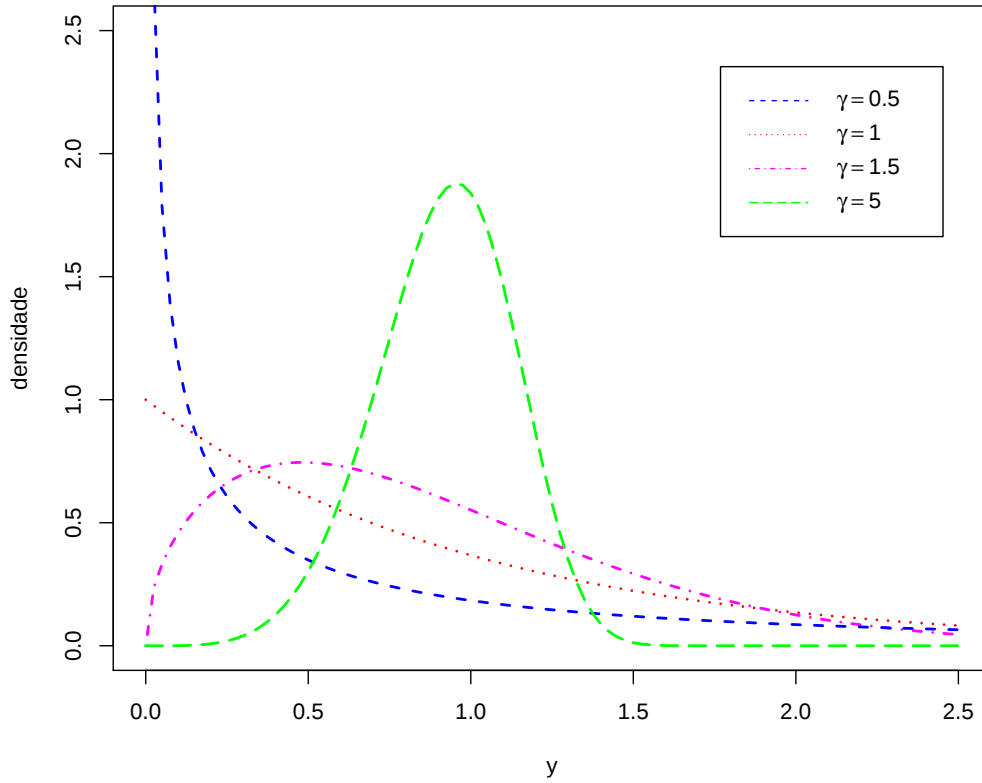


Figura 2.1: Gráfico da função densidade da distribuição Weibull com $\beta = 1$.

2.6.1 Propriedades

A função de distribuição acumulada é dada por:

$$G(y) = 1 - e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma}, \quad y \geq 0 \quad (2.9)$$

e a função de sobrevivência é expressa por

$$\bar{G}(y) = 1 - G(y) = e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma}, \quad y > 0. \quad (2.10)$$

Sua taxa de falha é obtida a partir de $g(y)$ e de $\bar{G}(y)$:

$$h(y) = \frac{g(y)}{\bar{G}(y)} = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\gamma-1}, \quad y > 0. \quad (2.11)$$

A taxa de falha dada em (2.11) é uma função decrescente para $\gamma < 1$; constante se

$\gamma = 1$ (modelo exponencial) e crescente para $\gamma > 1$. Essa taxa tem importante papel em análise de confiabilidade e sobrevivência. A Figura 2.2 mostra algumas formas da taxa de falha para a distribuição Weibull.

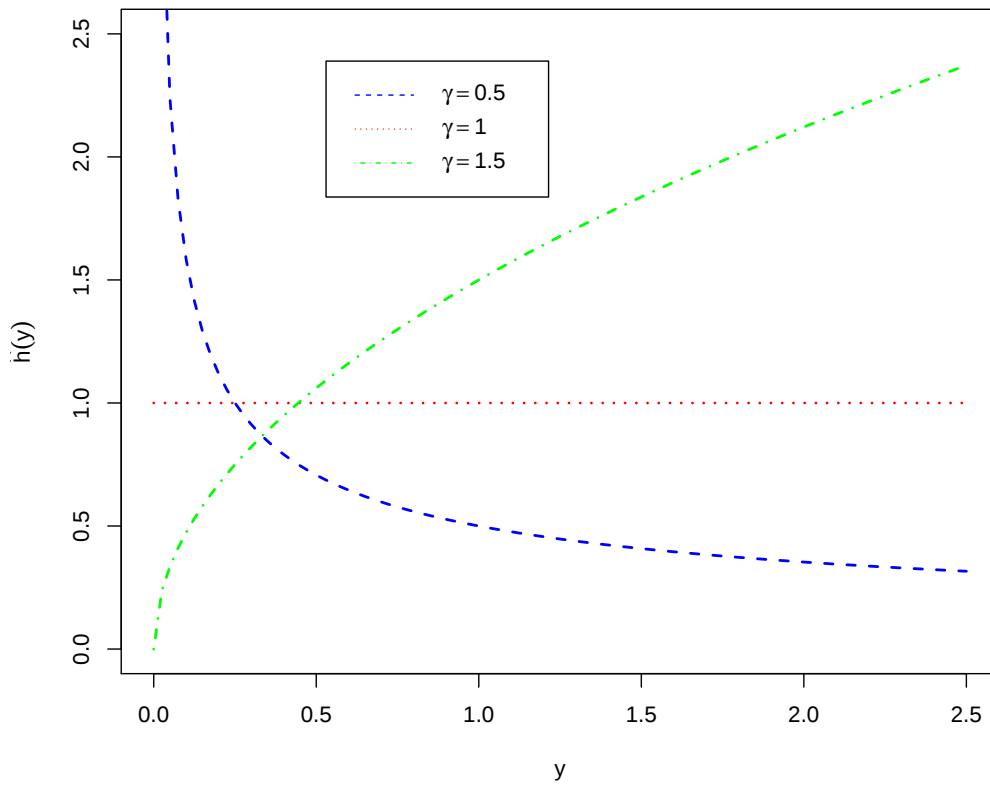


Figura 2.2: Taxa de falha da distribuição Weibull com $\beta = 1$.

A função geradora de momentos é definida por

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t)^n \beta^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\gamma}\right) \quad \text{com } \gamma \geq 0.$$

Logo, o valor esperado e a variância são, respectivamente,

$$\mathbb{E}(Y) = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right); \quad \text{Var}(Y) = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \right)^2 \right].$$

2.6.2 Distribuição Weibull exponencializada

A distribuição Weibull exponencializada, identificada como EW e introduzida em Mudholkar & Srivastava (1993) tem sua função de distribuição acumulada e função densidade expressa, respectivamente, por

$$F(y) = G(y)^\alpha = \left[1 - e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma} \right]^\alpha, \alpha, \gamma, \beta, y > 0,$$
$$f(y) = \alpha \left[1 - e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma} \right]^{\alpha-1} \left[e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma} \right] \gamma \left(\frac{y}{\beta} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{\beta}$$
$$= \frac{\alpha \gamma}{\beta} \left(\frac{y}{\beta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[- \left(\frac{y}{\beta} \right)^\gamma \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\gamma} \right\}^{\alpha-1} \right].$$

A distribuição Weibull tem sido usada no contexto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas ou somente independentes. Na literatura, os trabalhos usando essa distribuição são predominantemente univariados mas alguns Modelos Weibull multivariado podem ser encontrados, por exemplo, em (Marshall & Olkin (1967); Lee (1979); Marshall & Olkin (1988); Crowder (1989); Lu (1989); Lu & Bhattacharyya (1990); Hanagal (1996); Patra & Dey (1999); Lee & Wen (2006); Villanueva *et al.* (2013)), entre outros. A inferência nesses modelos, muitas vezes, é feita em análises bidimensionais.

Algumas vezes fazer inferência no modelo multivariado é uma tarefa complexa, pois as densidades e as propriedades são difíceis de serem obtidas. No entanto, no próximo capítulo será apresentado um novo modelo Weibull multivariado com inferência mais simples de ser realizada.

Capítulo 3

Modelo Weibull multivariado

3.1 Introdução

Neste capítulo um modelo Weibull multivariado para dados que exibem uma certa dependência será construído através da marginalização de uma distribuição Weibull G -exponencializada condicionada a um campo aleatório latente formado por uma mistura de distribuições estáveis. Em seguida, será apresentada algumas propriedades desse modelo.

3.2 Construção do modelo

Considere os conjuntos $\mathbf{S} = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_L\}$ e $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M\}$. Onde $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^d$ e $\mathbf{s}_l \in \mathbb{R}^p$ com d e $p = 1, 2$. Quando $d = p = 1$, dizemos que $\mathbf{S}$ e $\mathbf{U}$ são conjuntos de índices, $\{1, 2, \dots, L\}$ e $\{1, 2, \dots, M\}$, respectivamente. Para d ou $p = 2$, dizemos que $\mathbf{U}$ e/ou $\mathbf{S}$ são conjuntos com L e M localizações espaciais contidas em algum subconjunto finito de $\mathbb{R}^2$ ou, ainda, que são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

Sejam $\{w_{\mathbf{u}_m}(\mathbf{s}_l) = w_{m,l} : m = 1, 2, \dots, M \text{ e } l = 1, 2, \dots, L\}$ constantes não negativas, $\{E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m) : m = 1, 2, \dots, M\}$ um campo aleatório latente (ou não observável) construído por variáveis independentes α_m -estável e defina $H_\alpha(\mathbf{s}_l) = \sum_{m=1}^M w_m(\mathbf{s}_l) E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)$. Note que $\mathcal{H}_\alpha = (H_\alpha(\mathbf{s}_1), \dots, H_\alpha(\mathbf{s}_L))$, com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ é um vetor aleatório formado por marginais que são misturas de distribuições α_m -estáveis. Agora, assumamos que $\overline{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta})$ é uma distribuição para $Y(s_l)$ e $Y(s_1)|H_\alpha(s_1), \dots, Y(s_L)|H_\alpha(s_L)$ são condicionalmente independentes com distribuição G -exponencializada (2.2). Então,

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_\alpha) = \prod_{l=1}^L \bar{F}(Y(s_l); \boldsymbol{\theta} | H_\alpha(s_l)).$$

Usando a expressão (2.6) e $\bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta})$ dada em (2.10), obtem-se

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_\alpha) &= \prod_{l=1}^L \exp \left\{ -H_\alpha(s_l) \log \left[\frac{1}{e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\sum_{l=1}^L H_\alpha(s_l) \log \left(e^{\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Substituindo $H_\alpha(s_l) = \sum_{m=1}^M w_m(s_l) E_{\alpha_m}(u_m)$ e aplicando a esperança em ambos lados, consequentemente

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M w_m(s_l) E_{\alpha_m}(u_m) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{m=1}^M \exp \left\{ -E_{\alpha_m}(u_m) \sum_{l=1}^L w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right\} \right) \\ &= \prod_{m=1}^M \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -E_{\alpha_m}(u_m) \sum_{l=1}^L w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right\} \right). \end{aligned}$$

Como $E_{\alpha_m}(u_m)$ são variáveis com distribuição de probabilidade α_m -estável positiva então por (2.5) a função de distribuição conjunta é dada por

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ -\left(\sum_{l=1}^L w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\} \\ &= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ -\left(\sum_{l=1}^L \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l / w_m^{\frac{1}{\gamma}}(s_l)} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Esta distribuição pertence a família Weibull multivariada para dados com dependência entre eventos, indivíduos ou grupo de indivíduos. Neste caso, $0 < \alpha_m \leq 1$ pode ser interpretado como uma medida de dependência entre as variáveis. No limite quando $\alpha_m \rightarrow 1$ tem-se a completa independência.

3.3 Alguns modelos especiais

Nesta seção serão apresentados alguns casos especiais do modelo Weibull multivariado.

3.3.1 Modelo Weibull multivariado para tempo de retorno em dados espacialmente dependentes

O período ou tempo de retorno (T), também conhecido como tempo de recorrência é representado pelo intervalo de tempo estimado de ocorrência de um determinado evento. A expressão "período de retorno" pode se referir ao tempo de recorrência de precipitação extrema, ventos intensos, dentre outros fenômenos meteorológicos. Assim, o tempo de retorno multivariado para um determinado evento meteorológico $(y_1, y_2, \dots, y_L)$, é expresso por

$$T(y_1, y_2, \dots, y_L) = 1/P(Y_1 > y_1, \dots, Y_L > y_L).$$

onde P é a probabilidade conjunta do evento ser superado pelo menos uma vez e a unidade de T , geralmente em anos.

Para o modelo estatístico proposto, considere $d = p = 2$ e uma região $S \subset \mathbb{R}^2$ na qual, somente para um conjunto de N posições de estações meteorológicas fixas $s_1, s_2, \dots, s_L$ e tempo $t \geq 1$, são conhecidas as medidas de interesses de um processo estocástico espaço-temporal $\mathbf{y}_t = \{y_t(s_1), \dots, y_t(s_L) : t > 1\}$. Suponha que $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M\}$ é um conjunto com M localizações espaciais arbitrárias onde são atribuídas variáveis independentes e identicamente distribuídas com distribuição α -estável, denotada por $E_\alpha(\mathbf{u}_m)$, tal que é um $\{E_\alpha(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$ campo aleatório latente. Para capturar a dependência espacial no processo observado $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_t : t > 1\}$, defina $w_{m,l} = f(d_{m,l})$ como uma função da distância espacial entre a localização s_l e o processo não observado em $\mathbf{u}_m$. Assuma que

$$\overline{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}) = e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma}, \quad y(s_l) > 0,$$

em que $H_\alpha(s_l) = \sum_{m=1}^M w_m(s_l) E_{\alpha_m}(u_m)$. Então, tem-se

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{t>1} \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\sum_{l=1}^L \left(\frac{y_t(s_l)}{\beta_l / w_m^{\frac{1}{\gamma}}(s_l)} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}.$$

e após observar o processo $\mathbf{y}_t$ por um longo tempo $t > 1$, é possível estimar o tempo de retorno de um evento extremo $\mathbf{y} = \{Y(s_1) > y(s_1), \dots, Y(s_L) > y(s_L)\}$ por

$$\hat{T}(\mathbf{y}) = 1/\bar{F}(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}),$$

onde $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}})$ são os estimadores de $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$. A representação desse processo no estado do Amazonas é apresentada na Figura 3.1.

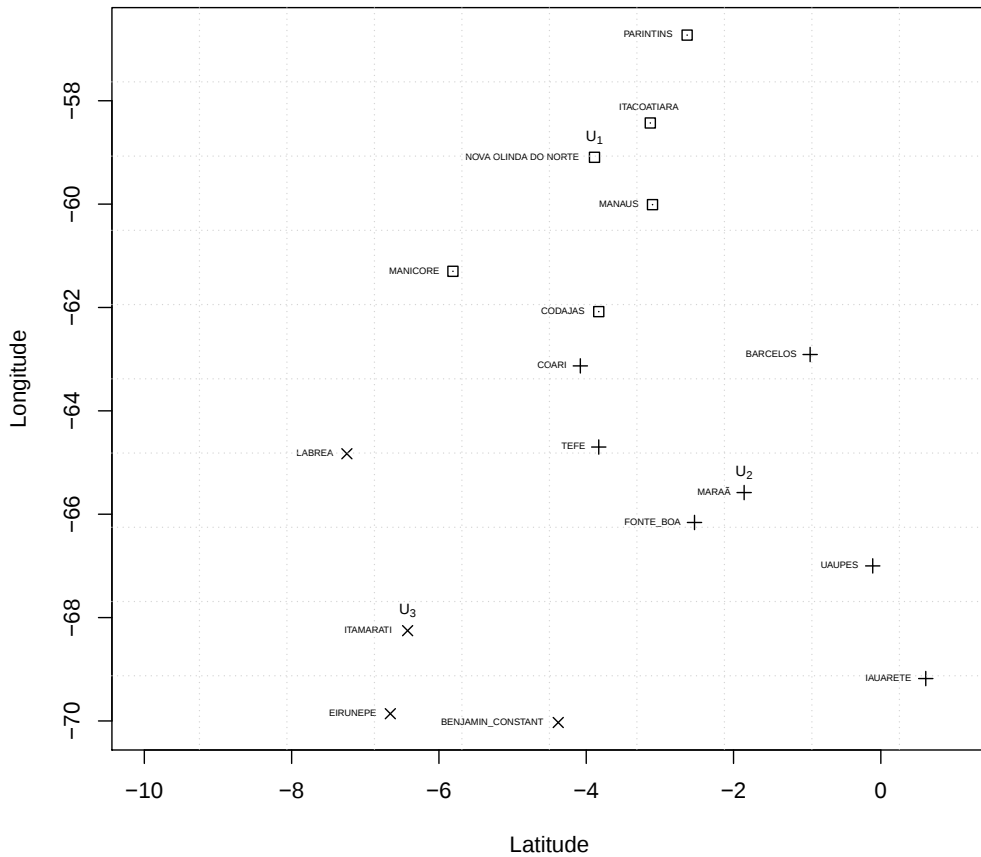
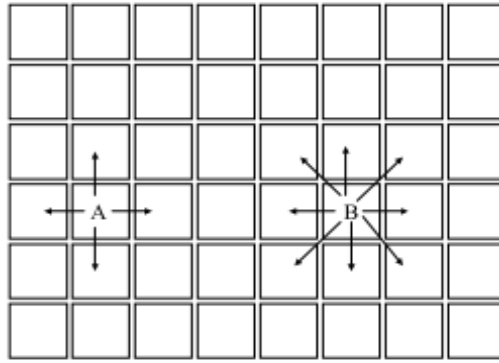


Figura 3.1: Localização das 14 estações meteorológicas do Estado do Amazonas ($s_1, \dots, s_{14}$) onde são observadas a medida de interesse $y(s_l)$. Pontos com o mesmo símbolo pertence ao mesmo grupo. $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ representa 3 localizações arbitrárias onde são alocados os processos latentes E_{α_m} , $m = 1, 2, 3$. Esses pontos são alocados em cada sub-região a partir dos seus pesos $w_{m,l}$.

3.3.2 Modelo Weibull multivariado para processos de variação espacial discreta

Seja $n_{(i,j)}$ um sistema de vizinhança em uma grade regular e considere o caso especial (como mostrado em A),

$$n_{(i,j)} = \{(i,j), (i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1)\}.$$



Considere $\mathbf{U}$ e $\mathbf{S}$ pares de índices com $l = (i,j)$, $m = (k,t)$ tal que $w_{m,l} \equiv w_{(k,t),(i,j)} = \delta$ se $(i,j) \in n_{(k,t)}$ e zero caso contrário, com δ constante e positivo. Defina $H_\alpha(i,j) = \sum_{(k,t) \in n_{(i,j)}} \delta E_\alpha(k,t)$ e $\bar{n}_{(i,j)} \cup \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq n\}$. Então, o processo de variação espacial discreta $\{Y_{(i,j)} : 1 \leq i,j \leq n\}$ possui distribuição conjunta,

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{(k,t)} \exp \left(-\delta^\alpha \left(\sum_{(i,j) \in \bar{n}_{(k,t)}} \left(\frac{y_{(i,j)}}{\beta_{(i,j)}} \right)^\gamma \right)^\alpha \right).$$

Este é modelo que pode ser utilizado em análise de imagens com o par $l = (i,j)$ representando a posição $s_{(i,j)}$ de um pixel.

3.3.3 Modelo Weibull multivariado para Séries Temporais com componentes autoregressivos (AR)

Sejam $d = p = 1$ com $\mathbf{U} = \mathbf{S} = \{1, \dots, t\}$, $w_{t,l} = \rho^{t-l}$, $l = 1, 2, \dots, t$ e 0 caso contrário. Defina $H_\alpha(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_\alpha(-i)$. Considere o processo $\mathbf{AR}$,

$$H_\alpha(n) = \rho^n H_\alpha(0) + \rho^{n-1} E_\alpha(1) + \dots + \rho E_\alpha(n-1) + E_\alpha(n).$$

Então, para a distribuição da série temporal $\{Y_t; t = 1, \dots, n\}$ é,

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \prod_{l=1}^n \exp \left(- \left(- \sum_{t=l}^n \rho^{t-l} \left(\frac{y_t}{\beta_t} \right)^\gamma \right)^\alpha \right).$$

3.3.4 Modelo de sobrevivência com fragilidade α -estáveis e dependência espacial

Considere os conjuntos $\mathbf{S} = \{1, 2, \dots, L\}$ e $\mathbf{U} = \{1, 2, \dots, M\}$, onde $\mathbf{u}_m \in R$ e $\mathbf{s}_l \in R$. Suponha que $Y(s_l)$ é o tempo de vida de um indivíduo localizado em s_l , $\mathbf{U}$ um conjunto de índices onde M representa o número de causas ou riscos de ocorrência de um particular evento de interesse (por exemplo, morte ou cura do indivíduo). Assuma que a fragilidade do indivíduo é expressa através de uma mistura das causas representada por $H_\alpha(\mathbf{s}_l)$ e que apenas uma das M causas pode ocorrer em cada indivíduo. Considere $G(y_l; \boldsymbol{\theta}) \sim \text{Weibull}(\beta_l, \gamma)$ com função de sobrevivência expressa por

$$\bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}) = e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma}, \quad y(s_l) > 0.$$

Então a função de sobrevivência conjunta do modelo é dada por

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\sum_{l=1}^{L_m} \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l / w_{m,l}} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\beta_l, \gamma),$$

em que L_m é o número de vezes que ocorreu a m -ésima causa de morte e α_m é interpretado como um parâmetro de dependência entre os indivíduos acometidos pela m -ésima causa.

Para introduzirmos a correlação espacial aos pares, considere dois indivíduos acometidos pela mesma causa m com tempos de vida $y(s_l), y(s_j)$. Seja $w_m(s_l, s_j)$ uma função de distância f do par (s_l, s_j) satisfazendo $f(s_l - s_j) = f(s_j - s_l)$ e defina $H_{\alpha_m}(s_l, s_j) = f(s_l - s_j)E_{\alpha_m}$. Neste caso, $H_{\alpha_m}(s_l, s_j)$ é interpretado como um efeito aleatório espacialmente compartilhado por s_l e s_j . Assumindo, para todo $(y(s_l), y(s_j))$ pertencente ao m -ésimo grupo e $(\lambda, \beta_l) = (\lambda, \beta_m)$, então a função de sobrevivência bivariada é dada por,

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\sum_{(s_l, s_j) \in \mathbf{u}_m} \left(\frac{y(s_l)}{\beta_m / f(s_l - s_j)} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\beta_m, \gamma).$$

3.3.5 Modelo marginal de fração de cura com tempos dependentes

Em modelos tradicionais de sobrevivência assume-se que em dado momento o evento de interesse irá ocorrer para todos os indivíduos observados após um espaço de tempo razoável, isto é, todos os indivíduos estão em risco durante a realização do estudo. No entanto, em determinados experimentos, alguns indivíduos podem nunca apresentar o evento pois estão curados ou são considerados imunes ao evento. Por exemplo, se o interesse é analisar a recorrência do câncer, após a aplicação de tratamentos, uma parte dos indivíduos em estudo pode não apresentar o retorno da doença (daí o termo "fração de cura"). Em estudos na área de criminologia um possível evento de interesse é o tempo até um ex-detento reincidir no crime, entretanto, alguns deles podem se reabilitarem e não apresentarão o evento de interesse. Na demografia, em estudos sobre o tempo até o divórcio, alguns casais podem nunca experimentar o evento. Em estudos educacionais envolvendo a evasão escolar, o indivíduo imune ao evento é aquele que nunca concluirá o curso, por variados motivos. Neste caso, o termo fração de cura é entendido como taxa de evasão.

Sejam, $y(s_l), l = 1, 2, \dots, L$ o tempo de vida dos indivíduos em estudo. Assuma que $\pi \in (0, 1)$ é a fração de curados na população em estudo e $(1 - \pi)$ é a fração de não curados. Então a função de sobrevivência populacional condicional a $H_\alpha(s_l)$ é expressa por,

$$\bar{F}_{pop}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_\alpha) = \pi + (1 - \pi) \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_\alpha)$$

de modo que a função de sobrevivência marginal conjunta é da forma,

$$\bar{F}_{pop}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \pi + (1 - \pi) \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\sum_{l=1}^L w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}.$$

A correlação espacial neste modelo, pode ser incorporada de forma similar ao modelo modelo de fragilidades com dependência espacial.

3.4 Propriedades do modelo Weibull multivariado

Nesta seção serão apresentadas as características do modelo Weibull multivariado proposto na equação (3.1).

3.4.1 Distribuição do mínimo

A distribuição do mínimo sobre qualquer subconjunto $\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}$ pertence a mesma distribuição. Para esta propriedade basta notar que $Y(s_1)|H_\alpha(s_1), \dots, Y(s_L)|H_\alpha(s_L)$ são condicionalmente independentes com distribuição Weibull multivariada. Então,

$$\begin{aligned}
\bar{F}(c, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{P}(\min_{s_l \in S_0} (Y(s_1), \dots, Y(s_L)) > c; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_\alpha) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{s_l \in S_0} \mathbb{P}(Y(s_l) > c; \boldsymbol{\theta} | H_\alpha(s_l)) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{s_l \in S_0} H_\alpha(s_l) \log \left(e^{\left(\frac{c}{\beta_l}\right)^\gamma} \right) \right\} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{m=1}^M \exp \left\{ -E_{\alpha_m}(u_m) \sum_{s_l \in S_0} w_m(s_l) \left(\frac{c}{\beta_l}\right)^\gamma \right\} \right) \\
&= \prod_{m=1}^M \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -E_{\alpha_m}(u_m) \sum_{s_l \in S_0} w_m(s_l) \left(\frac{c}{\beta_l}\right)^\gamma \right\} \right),
\end{aligned}$$

por (2.5) a distribuição do mínimo será dada por

$$\begin{aligned}
\bar{F}(c; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\sum_{s_l \in S_0} w_m(s_l) \left(\frac{c}{\beta_l}\right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\} \\
&= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\sum_{s_l \in S_0} \left(\frac{c}{\beta_l / w_m^{1/\gamma}(s_l)} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\} \\
&= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(c^\gamma \sum_{s_l \in S_0} \left(\frac{1}{\beta_l / w_m^{1/\gamma}(s_l)} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Fazendo $\beta_m^{-\gamma} = \sum_{s_l \in S_0} \left(\frac{1}{\beta_l / w_m^{1/\gamma}(s_l)} \right)^\gamma$, a expressão (3.2) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\bar{F}(c; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - (c^\gamma \beta_m^{-\gamma})^{\alpha_m} \right\} \\
&= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\frac{c}{\beta_m} \right)^{\gamma \alpha_m} \right\}.
\end{aligned}$$

Note que a distribuição do mínimo pertence a mesma classe.

3.4.2 Distribuição marginal

Seja $\mathbf{S}_0 = \{s_l\}$, pela propriedade (3.4.1), a marginal de $Y(s_l)$ é dada por

$$\begin{aligned}\bar{F}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\} \\ &= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(y(s_l)^\gamma \left(\frac{1}{\beta_l / w_m^{1/\gamma}(s_l)} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Fazendo $\beta_m^{-\gamma} = \left(\frac{1}{\beta_l / w_m^{1/\gamma}(s_l)} \right)^\gamma$, tem-se

$$\bar{F}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - (y^\gamma(s_l) \cdot \beta_m^{-\gamma})^{\alpha_m} \right\} = \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\frac{y(s_l)}{\beta_m} \right)^{\gamma \alpha_m} \right\}.$$

Com este resultado é possível notar que a distribuição G é Weibull, a distribuição condicional de $Y(s)$ dado H é Weibull, a distribuição do mínimo é Weibull e as marginais também são da família Weibull.

3.4.3 Dependência positiva

Para o caso geral, Shaked (1982) define que $Y(s_1), \dots, Y(s_L)$ são positivamente dependentes quando

$$\frac{F(y(s_1), \dots, y(s_L))}{\prod_{l=1}^L F(y(s_l))} > 1.$$

Agora, de forma similar a construção do modelo, tem-se que

$$\begin{aligned}F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_\alpha) &= \prod_{l=1}^L F(Y(s_l) | H_\alpha(s_l)) = \prod_{l=1}^L \exp \left\{ -H_\alpha(s_l) \log \left[\frac{1}{G(y(s_l); \boldsymbol{\theta})} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{l=1}^L H_\alpha(s_l) \log \left[\frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M w_m(s_l) E_{\alpha_m}(u_m) \log \left[\frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{l=1}^L \left(- \sum_{m=1}^M w_m(s_l) E_{\alpha_m}(u_m) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right) \right\}.\end{aligned}$$

Aplicando a esperança em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{l=1}^L \left(- \sum_{m=1}^M w_m(s_l) E_{\alpha_m}(u_m) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right) \right\} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \left(- \sum_{m=1}^M \left(E_{\alpha_m}(u_m) \sum_{l=1}^L w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right) \right) \right\} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(- E_{\alpha_m}(u_m) \sum_{l=1}^L w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right) \right\} \right) \\
&= \prod_{m=1}^M \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \left(- E_{\alpha_m}(u_m) \sum_{l=1}^L w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right) \right\} \right).
\end{aligned}$$

E pela transformada de Laplace (2.5) tem-se que

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(- \sum_{l=1}^L w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right)^{\alpha_m} \right\}.$$

Pela propriedade (3.4.2) e $G(y(s_l); \boldsymbol{\theta})$ dada em (2.9), obtém-se

$$\begin{aligned}
F(y(s_l); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - (-w_m(s_l) \log [G(y(s_l))])^{\alpha_m} \right\} \\
&= \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(-w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right)^{\alpha_m} \right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\prod_{l=1}^L F(y(s_l); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})} = \frac{\prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(- \sum_{l=1}^L w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right)^{\alpha_m} \right\}}{\prod_{l=1}^L \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(-w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] \right)^{\alpha_m} \right\}}.$$

Definindo

$$d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) = -w_m(s_l) \log \left[1 - e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} \right] > 0. \quad (3.4)$$

Assim, a razão será dada da forma,

$$\begin{aligned}
\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\prod_{l=1}^L F(y(s_l); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})} &= \frac{\prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left(\sum_{l=1}^L d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m} \right\}}{\prod_{l=1}^L \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - (d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}))^{\alpha_m} \right\}} \\
&= \frac{\exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{l=1}^L d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m} \right\}}{\exp \left\{ - \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M (d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}))^{\alpha_m} \right\}} \\
&= \exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{l=1}^L d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m} + \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M (d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}))^{\alpha_m} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^L (d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}))^{\alpha_m} - \left(\sum_{l=1}^L d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

E aplicando o logaritmo em ambos lados, tem-se

$$\begin{aligned}
\log \left(\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\prod_{l=1}^L F(y(s_l); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})} \right) &= \log \left(\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^L (d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}))^{\alpha_m} - \left(\sum_{l=1}^L d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m} \right] \right\} \right) \\
&= \sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^L (d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}))^{\alpha_m} - \left(\sum_{l=1}^L d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m} \right].
\end{aligned}$$

Observa-se que

$$\sum_{l=1}^L (d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}))^{\alpha_m} - \left(\sum_{l=1}^L d_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m} > 0 \quad \text{se} \quad 0 < \alpha_m < 1, m = 1, 2, \dots, M.$$

e zero se $\alpha_m = 1, m = 1, 2, \dots, M$. Portanto, a propriedade (3.4.3) é satisfeita, ou seja, o modelo proposto é positivamente dependente e de forma similar é dito que o modelo é negativamente dependente se toda esta formulação algébrica é tratada através da função $\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$.

3.4.4 Função de densidade conjunta

A função de densidade de probabilidade multivariada é expressa como Lee & Wen (2006):

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = (-1)^L \frac{\partial^L \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_L} = \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2,\dots,L}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}).$$

em que,

$$D_{1,2,\dots,L}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = D_{1,2,\dots,(L-1)}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_L(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_L} D_{1,2,\dots,L-1}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$$

e

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{l=1}^L w_{m,l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\},$$

com

$$v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) = w_{m,l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^\gamma. \quad (3.5)$$

prova:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_l} &= \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \left(- \sum_{m=1}^M \alpha_m \left(\sum_{l=1}^L w_{m,l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m-1} \left[w_{m,l} \gamma \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{\beta_l} \right] \right) \\ &= -\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{\gamma}{\beta_l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^{\gamma-1} \sum_{m=1}^M \alpha_m w_{m,l} \left(\sum_{l=1}^L w_{m,l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m-1} \end{aligned}$$

Usando as equações (2.11) e (3.5), obtem-se

$$\begin{aligned} &= -\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) h(y_l; \boldsymbol{\theta}) \sum_{m=1}^M \alpha_m w_{m,l} \left(\sum_{l=1}^L v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m-1} \\ &= -\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) h(y_l; \boldsymbol{\theta}) c(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

Sendo que $c(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{m=1}^M \alpha_m w_{m,l} \left(\sum_{l=1}^L v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\alpha_m-1}$; $D_l(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = h(y_l; \boldsymbol{\theta}) c(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$, para $l = 0, 1, 2, \dots, L$ e $D_0(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = 1$, logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_l} &= -\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_l(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\ &= -\exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{l=1}^L w_{m,l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\} D_l(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

A quantidade $h(y(s_l); \boldsymbol{\theta})$ é chamada taxa de falha de base. Então $D_l(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$ pode ser interpretado como um modelo para taxa de falha proporcional (ver Kundu & Gupta (2010); Kundu *et al.* (2014))

É válido para qualquer l então fazendo para $L = 2$,

$$\bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{l=1}^2 w_{m,l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\},$$

e

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^2 \frac{\partial^2 \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \partial y_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1} \right). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1} &= -\bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) h(y_1; \boldsymbol{\theta}) c(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}), \text{ então} \\ f(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial y_2} \left(-\bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) h(y_1; \boldsymbol{\theta}) c(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right). \end{aligned}$$

Definindo $D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = h(y_1; \boldsymbol{\theta}) c(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$ e aplicando a regra do produto,

logo

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \left[-\frac{\partial}{\partial y_2} \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial}{\partial y_2} D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\ &= - \left(-\bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) h(y_2; \boldsymbol{\theta}) c(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right) D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\ &\quad - \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial}{\partial y_2} D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_2(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial y_2} D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \left[D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_2(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_2} D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] \\ &= \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}), \text{ logo} \\ f(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{l=1}^2 w_{m,l} \left(\frac{y_l}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\} D_{1,2}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}), \text{ em que} \end{aligned}$$

$$D_{1,2}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \left[D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_2(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_2} D_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right].$$

Portanto o resultado é válido para $L = 2$.

Agora fazendo para $L = 3$

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^3 \frac{\partial^3 \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} \\
&= (-1) \frac{\partial}{\partial y_3} \left[(-1)^2 \frac{\partial^2 \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \partial y_2} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial y_3} [\bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})] \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial y_3} \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial y_3} D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\
&= \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_3(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\
&\quad - \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial}{\partial y_3} D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\
&= \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\
&\quad \times \left[D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_3(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_3} D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] \\
&= \bar{F}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2,3}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \text{ logo} \\
f(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{l=1}^3 w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\} D_{1,2,3}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}), \text{ em que}
\end{aligned}$$

$$D_{1,2,3}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \left[D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_3(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_3} D_{1,2}(y_1, y_2, y_3; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right].$$

Logo, o resultado também é válido para $L = 3$.

Suponha agora que o resultado é válido para $L = k$, para algum $k > 2$. Isto é,

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^k \frac{\partial^k \bar{F}(y_1, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \dots \partial y_k} \\
&= \bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2,\dots,k}(y_1, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}), \text{ de modo que} \\
D_{1,2,\dots,k}(y_1, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{g(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{G(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})} \text{ é a taxa de falha multivariada.}
\end{aligned}$$

Agora mostrando que vale para $L = k + 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$. De fato, pois

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^{k+1} \frac{\partial^{k+1} \bar{F}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \dots \partial y_k \partial y_{k+1}} \\
&= (-1) \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \left(\frac{(-1)^k \partial^k \bar{F}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \dots \partial y_k} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} [\bar{F}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2,\dots,k}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \left[-\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \bar{F}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] D_{1,2,\dots,k}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\
&\quad - \bar{F}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} D_{1,2,\dots,k}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \\
&= \bar{F}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \left[D_{1,2,\dots,k}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right. \\
&\quad \left. D_{k+1}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} D_{1,2,\dots,k}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] \\
f(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \bar{F}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) D_{1,2,\dots,k+1}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado é válido para todo $k \geq 2$. Essa forma recursiva da densidade pode ser conveniente para programação computacional.

3.4.5 Função de densidade conjunta por grupos

Suponha que as L_m observações $y(s_l)$, para $l = 1, 2, \dots, L_m$ que ocorrem nos M grupos (pontos e/ou áreas, dependendo de d e p) distintos, são independentes. Então

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^M \bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) \quad \text{onde} \\
\bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) &= \exp \left\{ - \left(- \sum_{l=1}^{L_m} w_m(s_l) \log \left[e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma} \right] \right)^{\alpha_m} \right\} \\
&= \exp \left\{ - \left(\sum_{l=1}^{L_m} w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m} \right\}.
\end{aligned}$$

Sua função de densidade é dada por

$$f(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = \alpha_m^{L_m} \left(\prod_{l=1}^{L_m} w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) \right) \exp \{ -z_m \} z_m^{1 - \frac{L_m}{\alpha_m}} Q_{L_m}(z_m, \alpha_m), \quad (3.6)$$

em que $\mathbf{y}_m$ é o subvetor de observações que ocorrem nos $m = 1, 2, \dots, M$ grupos (pontos e/ou áreas), $\boldsymbol{\theta}_m$ é o subvetor de parâmetros, $z_m = (\sum_{l=1}^{L_m} w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m)) \alpha_m$ e por (3.5) $z_m = \left(w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m}$, $Q_1(z_m, \alpha_m) = 1$ para $L_m = 1$ e

$$Q_{L_m}(z_m, \alpha_m) = \left(\frac{L_m - 1 - \alpha_m}{\alpha_m} + z_m \right) Q_{L_m-1}(z_m, \alpha_m) - z_m \frac{\partial}{\partial z_m} Q_{L_m-1}(z_m, \alpha_m), \quad L_m \geq 2.$$

A expressão dada em (3.6) é obtida através da propriedade (3.4.4) com derivadas recursivas para cada m fixo e a função $Q_{L_m}(z_m, \alpha_m)$ é um polinômio de ordem $(L_m - 1)$ em z_m obtida de forma semelhante em Shi (1995).

Sendo assim,

$$\bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = \exp\{-z_m\} \quad \text{e} \quad f(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = (-1)^{L_m} \frac{\partial^{L_m} \bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_{L_m}}.$$

Note que

$$\frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_l} = \frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial y_l}, \quad \text{tal que}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial y_l} = \frac{\partial z_m}{\partial v_{m,l}} \frac{\partial v_{m,l}}{\partial y_l}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_l} &= -\exp\{-z_m\} \alpha_m \left(\sum_{l=1}^{L_m} w_m(s_l) \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^\gamma \right)^{\alpha_m-1} w_m(s_l) \gamma \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{\beta_l} \\ &= -\exp\{-z_m\} \alpha_m w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}} \end{aligned}$$

Fazendo para $L_m = 2$

$$f(y_{1m}, y_{2m}; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = \alpha_m^2 \left(\prod_{l=1}^2 w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) \right) \bar{F}(\mathbf{y}_m, \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) z_m^{1-\frac{2}{\alpha_m}} Q_2(z_m, \alpha_m).$$

Agora fazendo para $L_m = 3$

$$f(y_{1m}, y_{2m}, y_{3m}; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = \alpha_m^3 \left(\prod_{l=1}^3 w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) \right) \bar{F}(\mathbf{y}_m, \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) z_m^{1-\frac{3}{\alpha_m}} Q_3(z_m, \alpha_m).$$

Vale pra $L_m = k$, então assumindo que vale para $L_m = k + 1$. Logo,

$$\begin{aligned} f(y_{1m}, y_{2m}, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) &= \alpha_m^{k+1} \left(\prod_{l=1}^{k+1} w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) \right) \bar{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}} \\ &\quad \times \left[\left(\frac{k - \alpha_m}{\alpha_m} + z_m \right) Q_k(z_m, \alpha_m) - z_m \frac{\partial}{\partial z_m} Q_k(z_m, \alpha_m) \right]. \end{aligned}$$

Como $Q_{k+1}(z_m, \alpha_m) = \left(\frac{k - \alpha_m}{\alpha_m} + z_m \right) Q_k(z_m, \alpha_m) - z_m \frac{\partial}{\partial z_m} Q_k(z_m, \alpha_m)$, então

$$f(y_{1m}, y_{2m}, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = \alpha_m^{k+1} \prod_{l=1}^{k+1} w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) \bar{F}(\mathbf{y}_m, \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) z_m^{1 - \frac{k+1}{\alpha_m}} Q_{k+1}(z_m, \alpha_m).$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $L_m = k + 1$

3.4.6 Geração dos vetores aleatórios por grupos

Considere que a condição imposta na Subseção 3.4.5 é satisfeita e para todo $y(s_l)$ pertencente ao m -ésimo grupo. Defina a transformação

$$(y_1, y_2, \dots, y_{L_m}) \mapsto (t_1, t_2, \dots, t_{L_m-1}, z_m), \text{ onde}$$

$$t_l = \frac{v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\sum_{l=1}^{L_m} v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)} = \frac{v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\frac{1}{z_m^{\frac{1}{\alpha_m}}}} \Rightarrow v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) = t_l z_m^{1/\alpha_m}; \quad t_l \in (0, 1) \text{ tal que}$$

$$\sum_{l=1}^{L_m} t_l = 1 \Rightarrow t_l = 1 - \sum_{j \neq l}^{L_m-1} t_j; \quad \text{e} \quad z_m^{1/\alpha_m} = \sum_{l=1}^{L_m} v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) \Rightarrow v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) = z_m^{1/\alpha_m} - \sum_{j \neq l}^{L_m-1} v_{m,j}(\boldsymbol{\theta}_m), \text{ logo}$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_{L_m-1}, z_m) = f_{\mathbf{y}} \left(\frac{v_{m,1}(\boldsymbol{\theta}_m)}{z_m^{1/\alpha_m}}, \frac{v_{m,2}(\boldsymbol{\theta}_m)}{z_m^{1/\alpha_m}}, \dots, z_m \right) \times |J|.$$

Note que,

$$\frac{\partial y(s_l)}{\partial t_l} = \begin{cases} \frac{\partial y(s_l)}{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)} \times \frac{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\partial t_l}, & \text{se } j = l, \\ 0 & \text{se } j \neq l. \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial y(s_l)}{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)} \times z_m^{1/\alpha_m} & \text{se } j = l, \\ 0 & \text{se } j \neq l. \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s_l)}{\partial z_m} &= \frac{\partial y(s_l)}{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)} \times \frac{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\partial z_m} \\ &= \frac{\partial y(s_l)}{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)} \frac{1}{\alpha_m} z_m^{\frac{1}{\alpha_m} - 1}. \end{aligned}$$

Assim o jacobiano da transformação é dado por

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_{L_m-1}} & \frac{\partial y_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_{L_m-1}} & \frac{\partial y_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{L_m}}{\partial t_1} & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial t_{L_m-1}} & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial z_m} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial y_1}{\partial z_m} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial y_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial z_m} \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\left| \frac{\partial y(s_l)}{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)} \right| = \left| \frac{\partial v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\partial y(s_l)} \right|^{-1}, \text{ então}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s_l)}{\partial t_l} &= \left(-w_m(s_l) \frac{\gamma}{\beta_l} \left(\frac{y(s_l)}{\beta_l} \right)^{\gamma-1} \right)^{-1} \text{ e por (2.11)} \\ &= (-w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}))^{-1} z_m^{1/\alpha_m}. \end{aligned}$$

$$|J| = \frac{1}{\alpha_m} \left(\prod_{l=1}^{L_m} (-w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}))^{-1} \right) z_m^{\frac{L_m}{\alpha_m} - 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, \dots, t_{L_m-1}, z_m) &= \alpha_m^{L_m} \left(\prod_{l=1}^{L_m} (w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta})) \right) \exp \{-z_m\} z_m^{1 - \frac{L_m}{\alpha_m}} Q_{L_m}(z_m, \alpha_m) |J| \\ &= \alpha_m^{L_m} \left(\prod_{l=1}^{L_m} (w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta})) \right) \exp \{-z_m\} z_m^{1 - \frac{L_m}{\alpha_m}} Q_{L_m}(z_m, \alpha_m) \\ &\quad \times \frac{1}{\alpha_m} \left(\prod_{l=1}^{L_m} (w_m(s_l) h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}))^{-1} \right) z_m^{\frac{L_m}{\alpha_m} - 1} \\ &= \alpha_m^{L_m-1} \exp \{-z_m\} Q_{L_m}(z_m, \alpha_m) \\ &= \alpha_m^{L_m-1} \exp \{-z_m\} \frac{Q_{L_m}(z_m, \alpha_m)}{\Gamma(L_m)} \Gamma(L_m) \\ &= \underbrace{\Gamma(L_m) t_1^{1-1} t_2^{1-1} \dots t_{L_m-1}^{1-1} t_{L_m}^{1-1}}_{\text{Dirichlet}} \underbrace{\frac{\alpha_m^{L_m-1}}{\Gamma(L_m)} \exp \{-z_m\} Q_{L_m}(z_m, \alpha_m)}_{\text{Mistura de Gamas}}. \end{aligned}$$

Então

$$f(t_1, t_2, \dots, t_{L_m-1}, z_m) = \Gamma(L_m) \frac{\alpha_m^{L_m-1}}{\Gamma(L_m)} \exp \{-z_m\} Q_{L_m}(z_m, \alpha_m), \quad z_m > 0.$$

Assim, $(T_1, \dots, T_{L_m-1})$ é independente de Z_m e $(T_1, \dots, T_{L_m-1}) \sim \text{Dir}(1, 1, \dots, 1, 1)$ onde $\sum_i t_i = 1$; $t_i \in (0, 1)$ e Z_m é uma mistura de distribuições Gama, ver Shi (1995) com pesos determinados por $Q_{L_m}(z_m, \alpha_m)$. Por exemplo, se $L_m = 2$, então

$$\begin{aligned} f_{zm}(z_m) &= \alpha_m \exp\{-z_m\} Q_{L_m}(z_m, \alpha_m) \\ &= \alpha_m \exp\{-z_m\} \left(\frac{(1 - \alpha_m)}{\alpha_m} + z_m \right) \\ &= (1 - \alpha_m) \exp\{-z_m\} + \alpha_m z_m \exp\{-z_m\}, \quad z_m > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$Z_m \sim (1 - \alpha_m) \text{Gama}(1, 1) + \alpha_m \text{Gama}(2, 1) \quad e$$

$$f_{T_1} = 1; \quad t_1 \in (0, 1) \rightarrow T_1 \sim \text{Beta}(1, 1) \quad e \quad T_2 \sim 1 - T_1.$$

Como $f(t_2, z_m) = f_{T_1}(t_1) f_{zm}(z_m)$ segue que T_1 e Z_m são independentes.

Agora pela transformação $v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) = t_l z_m^{1/\alpha_m}$ e sendo que $v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) = -w_m(s_l) \log \bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m)$, então

$$\begin{aligned} -w_m(s_l) \log \bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) &= t_l z_m^{1/\alpha_m} \\ \log \bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) &= -\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)} \\ \exp\{\log \bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m)\} &= \exp\left\{-\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)}\right\} \\ \bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) &= \exp\left\{-\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)}\right\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo (2.10) em (3.7) é obtida a expressão

$$\begin{aligned}
e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma} &= \exp\left\{-\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)}\right\} \\
\log\left[e^{-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma}\right] &= \log\left[\exp\left\{-\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)}\right\}\right] \\
-\left(\frac{y(s_l)}{\beta_l}\right)^\gamma &= \left(-\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)}\right) \\
\frac{y(s_l)}{\beta_l} &= \left(\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)}\right)^{1/\gamma} \\
y(s_l) &= \beta_l \left(\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(s_l)}\right)^{1/\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Então, amostre valores das distribuições de $(T_1, \dots, T_{L_m-1})$ e Z_m e obtenha $(y(s_1), \dots, y(s_{L_m}))$ através de (3.8). Nas Figuras 3.2 - 3.4 são apresentados os gráficos de distribuição acumulada bivariada variando o parâmetro α .

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 1.5, \alpha = 0.5$$

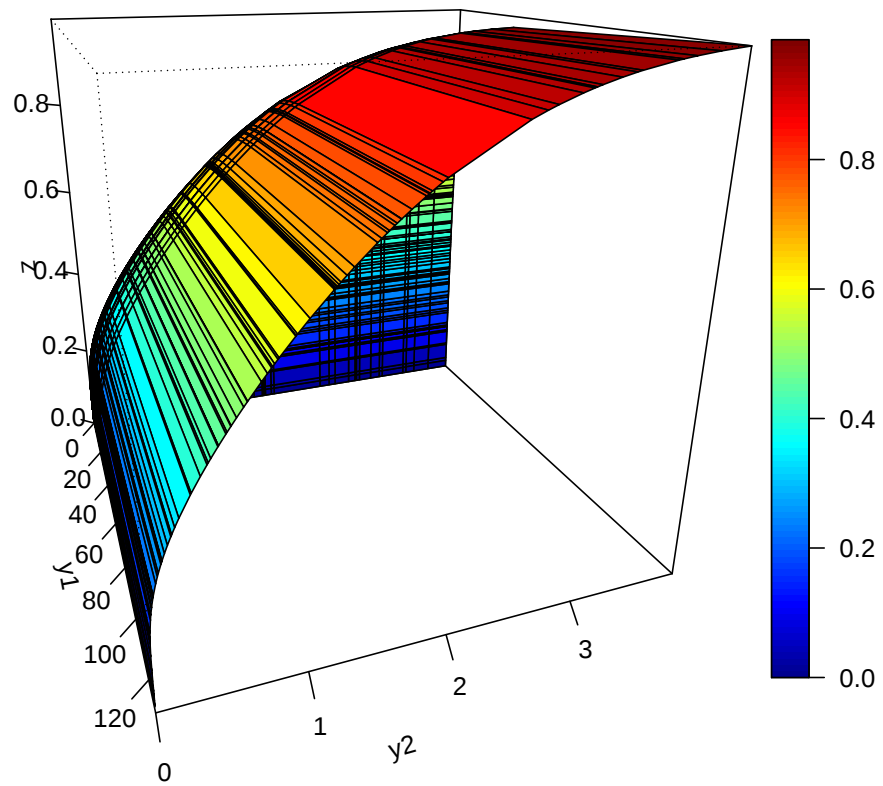


Figura 3.2: Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.50$.

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 1.5, \alpha = 0.7$$

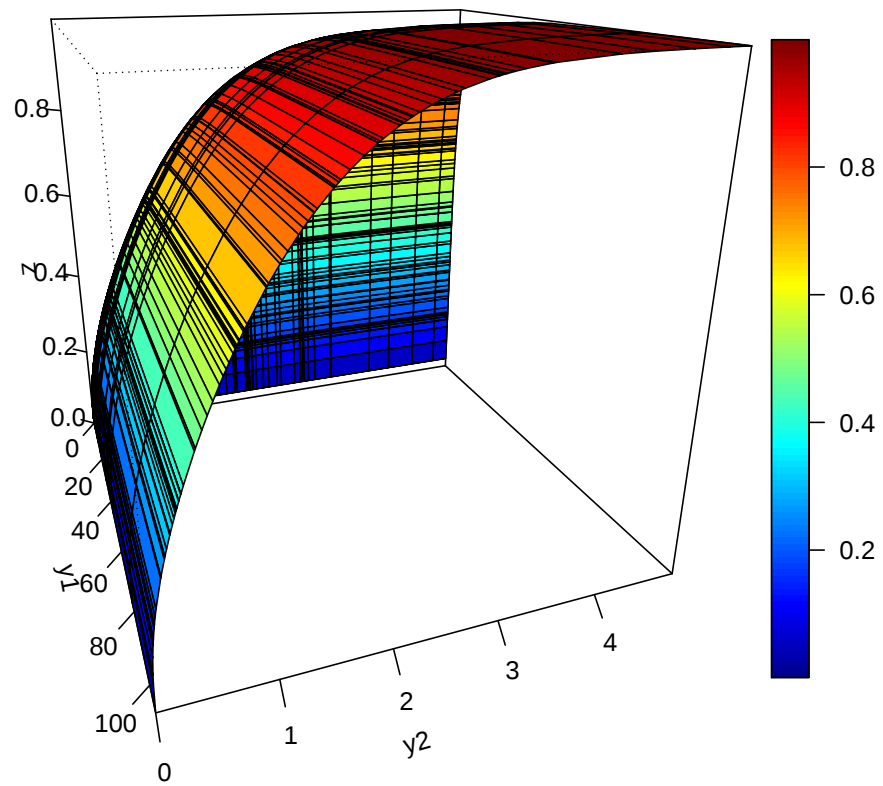


Figura 3.3: Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.70$.

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 1.5, \alpha = 0.9$$

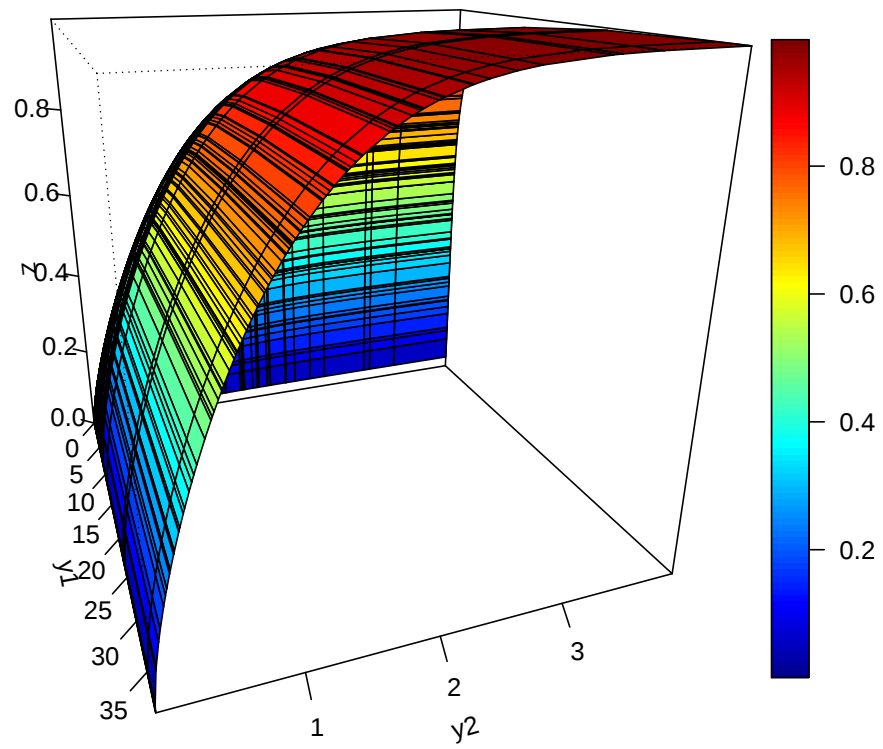


Figura 3.4: Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.90$.

Capítulo 4

Inferência no modelo Weibull multivariado

4.1 Introdução

A inferência no modelo proposto será obtida via algoritmo **MCEM** pelo fato que a maximização direta da verossimilhança é muito complicada, pois suas expressões são intratáveis analiticamente e de difícil solução computacional, fato a ser verificado na próxima seção.

4.2 Estimando os parâmetros via máxima verossimilhança

A estimação de parâmetros do modelo usando a densidade conjunta da Subseção 3.4.4 é complexa em vista da dificuldade da representação analítica da densidade. Uma alternativa é considerar a estimação por grupos através da densidade apresentada na Subseção 3.4.5. Para tanto, defina $\boldsymbol{\theta}_m = (\gamma, \beta_m)$, considere a função de densidade por grupos dada em (3.6) com distribuição de base $\bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) = e^{(-y(s_l)/\beta_m)^\gamma}$, densidade $g(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m)$, $h(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) = g(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m)/\bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m)$ e log-verossimilhança denotada por $\mathcal{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m)$. Então, para cada m fixo a log-verossimilhança é expressa por,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\alpha}_m; \mathbf{y}_m, z_m) &= L_m \log \alpha_m + \sum_{l=1}^{L_m} \log w_m(s_l) + \mathcal{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{l=1}^{L_m} \frac{v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{w_m(s_l)} \\ &- z_m + \log z_m - \frac{L}{\alpha_m} \log z_m + \log Q_{L_m}(z_m, \boldsymbol{\alpha}_m). \end{aligned}$$

em que, $v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) = -w_m(s_l) \log \bar{G}(y(s_l); \boldsymbol{\theta}_m) = t_l z_m^{1/\alpha_m}$. As funções escore para α_m e um particular θ_j , igual a β_m ou γ , em termos de z_m são dadas por,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_m} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m; \mathbf{y}_m, z_m) = \frac{A(z_m, \alpha_m)}{\alpha_m} + S(z_m, \alpha_m).$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m; \mathbf{y}_m, z_m) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \mathcal{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + B(z_m, \alpha_m) \sum_{l=1}^{L_m} \frac{\partial}{\partial \theta_j} v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) - \sum_{l=1}^{L_m} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{w_m(s_l)},$$

em que

$$S(z_m, \alpha_m) = \frac{\partial \log Q_{L_m}(z_m, \alpha_m)}{\partial \alpha_m}, \quad S_1(z_m, \alpha_m) = \frac{\partial \log Q_{L_m}(z_m, \alpha_m)}{\partial z_m},$$

$$A(z_m, \alpha_m) = 1 + \log z_m - z_m \log z_m + z_m \log z_m \times S_1(z_m, \alpha_m).$$

e

$$B(z_m, \alpha_m) = \alpha_m z_m^{-\frac{1}{\alpha_m}} \left(1 - \frac{L_m}{\alpha_m} - z_m + z_m S_1(z_m, \alpha_m) \right).$$

As derivadas parciais de segunda ordem são expressas por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m; \mathbf{y}_m, z_m) &= \alpha_m^{-2} A(z_m, \alpha_m) + \frac{1}{\alpha_m} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} (\alpha_m S(z_m, \alpha_m) + A(z_m, \alpha_m)) \\ &+ \frac{1}{\alpha_m} \left(\alpha_m \frac{\partial}{\partial z_m} S(z_m, \alpha_m) - \frac{\partial}{\partial z_m} A(z_m, \alpha_m) \right) z_m \log z_m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m \partial \theta_j} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m; \mathbf{y}_m, z_m) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_m} A(z_m, \alpha_m) + \alpha_m \frac{\partial}{\partial z_m} S(z_m, \alpha_m) \right) z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}} \\ &\times \sum_{l=1}^{L_m} \frac{\partial}{\partial \theta_j} v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m; \mathbf{y}_m, z_m) &= \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \mathcal{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + B(z_m, \alpha_m) \sum_{l=1}^{L_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) \\ &+ B_1(z_m, \alpha_m) \sum_{l=1}^{L_m} \frac{\partial}{\partial \theta_k} v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) \times \sum_{l=1}^{L_m} \frac{\partial}{\partial \theta_j} v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m) \\ &- \sum_{l=1}^{L_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \frac{v_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{w_m(s_l)}. \end{aligned}$$

com

$$B_1(z_m, \alpha_m) = \alpha_m z_m^{1 - \frac{1}{\alpha_m}} \frac{\partial}{\partial z_m} B(z_m, \alpha_m).$$

Notando que,

$$\frac{\partial v_{m,l}(\theta_l)}{\partial \theta_l} = z_m^{1/\alpha_m} t_l \frac{\partial \log v_{m,l}(\theta_l)}{\partial \theta_l} \quad \text{e} \quad y(\mathbf{s}_l) = G^{-1} \left(\exp \left\{ -\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(\mathbf{s}_l)} \right\}; \boldsymbol{\theta}_m \right).$$

podemos calcular a Informação de Fisher através do valor esperado das derivadas parciais de segunda ordem com respeito a distribuição conjunta de $(T_1, \dots, T_{L_m-1})$ e Z_m que são independentes. Obviamente que esses valores esperados devem ser computados usando alguma rotina padrão de integração numérica ou através da integração de Monte Carlo. Agora, para computarmos o EMV, seja $\boldsymbol{\phi}_m = (\boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)'$, $\mathcal{U}(\boldsymbol{\phi}_m)$ a função escore, $\mathcal{J}(\boldsymbol{\phi}_m)$ a Informação de Fisher e

$$G^{-1}(t_l, z_m, \boldsymbol{\phi}_m) \triangleq G^{-1} \left(\exp \left\{ -\frac{t_l z_m^{1/\alpha_m}}{w_m(\mathbf{s}_l)} \right\}; \boldsymbol{\theta}_m \right).$$

Então, podemos calcular a Informação de Fisher através da expressão

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\phi}_m) = \mathbb{E}_{(T, Z_m)} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\phi}_m \partial \boldsymbol{\phi}_m'} \mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}_m; G^{-1}(\mathbf{t}, z_m, \boldsymbol{\phi}_m), z_m) \right),$$

em que $T = (T_1, \dots, T_{L_m-1})$ e $G^{-1}(\mathbf{t}, z_m, \boldsymbol{\phi}_m) = (G^{-1}(t_1, z_m, \boldsymbol{\phi}_m), \dots, G^{-1}(t_{L_m-1}, z_m, \boldsymbol{\phi}_m))$.

Logo, usando o algoritmo Newton-Raphson Escore de Fisher (**NRSF**), o EMV de $\boldsymbol{\phi}_m$ é solução do processo iterativo,

$$\boldsymbol{\phi}_m^{(i+1)} = \boldsymbol{\phi}_m^{(i)} + \mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}) \times \mathcal{U}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}).$$

Nota-se que o computo de $\mathcal{J}(\boldsymbol{\phi}_m)$ depende da obtenção do valor esperado de quantidades, como por exemplo $A(z_m, \alpha_m)$ e $B_1(z_m, \alpha_m)$, as quais são difíceis de serem obtidas analiticamente. Para superar essa dificuldade, é possível substituir estes valores esperados por uma média via simulação de Monte Carlo. Seja $(\mathbf{t}^{(i,1)}, z_m^{(i,1)}), (\mathbf{t}^{(i,2)}, z_m^{(i,2)}), \dots, (\mathbf{t}^{(i,N)}, z_m^{(i,N)})$ uma amostra da distribuição conjunta de T e Z_m na i -ésima iteração. Então a aproximação de Monte Carlo para $\mathcal{J}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)})$ é dada por,

$$\tilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(-\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\phi}_m \partial \boldsymbol{\phi}_m'} \mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}; G^{-1}(\mathbf{t}^{(i,n)}, z_m^{(i,n)}, \boldsymbol{\phi}_m^{(i)}), z_m^{(i,n)}) \right),$$

de modo que o algoritmo Newton-Raphson Escore de Fisher-Monte Carlo (**NRSF-MC**) utiliza $\tilde{\mathcal{J}}$ no lugar de $\mathcal{J}$,

$$\boldsymbol{\phi}_m^{(i+1)} = \boldsymbol{\phi}_m^{(i)} + \tilde{\mathcal{J}}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}) \times \mathcal{U}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}). \quad (4.1)$$

As amostras da conjunta de T e Z_m são facilmente obtidas. Por exemplo, pela Subseção 3.4.6, se $L_m = 2$ tem-se

$$z_m^{(i,N)} \sim (1 - \alpha_m^{(i)})\text{Gamma}(1,1) + \alpha_m^{(i)}\text{Gamma}(2,1) \quad \text{e} \quad t_1^{(i,N)} \sim \text{Beta}(1,2).$$

4.3 Algoritmo MCEM para o modelo proposto

Observa-se que a obtenção do EMV através do algoritmo dado em (4.1) é complexa e não garante a convergência para o verdadeiro valor do parâmetro. Por isso, uma alternativa mais simples e que quase sempre converge é apresentada a seguir via algoritmo (**MCEM**) discutido na Subseção 2.5.2. Para construção do (**MCEM**), a função de verossimilhança completa é dada por

$$L_c(\mathbf{y}; \mathbf{H}; \phi) = f(\mathbf{y}; \mathbf{H}; \phi) = \prod_{l=1}^L f(y_l; \boldsymbol{\theta} | H_l) \mathbb{P}(H_l, \alpha), \quad (4.2)$$

em que $f(y_l; \boldsymbol{\theta} | H_l) = -\frac{\partial}{\partial y_l} \bar{F}(y_l; \boldsymbol{\theta} | H_l) = H_l \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta})^{H_l} h_l(y_l; \boldsymbol{\theta})$; $h_l(y_l; \boldsymbol{\theta}) = g(y_l; \boldsymbol{\theta}) / \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta})$. E pelo Teorema (1), $\mathbb{P}(H_l, \alpha) \approx B_{\alpha,l} H_l^{-(\alpha+1)}$ com $B_{\alpha,l} = \alpha \gamma_l^\alpha c_\alpha$, $H_l = \sum_{m=1}^M w_{m,l} E_m$. Assim, a função log-verossimilhança completa é da forma

$$\begin{aligned} l_c(\mathbf{y}; \mathbf{H}, \phi) &= \log \left[\prod_{l=1}^L H_l \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta})^{H_l} h_l(y_l; \boldsymbol{\theta}) \mathbb{P}(H_l, \alpha) \right] \\ &= \sum_{l=1}^L (\log H_l + H_l \log \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta}) + \log h_l(y_l; \boldsymbol{\theta}) + \log B_{\alpha,l} - (\alpha + 1) \log H_l) \\ &= \sum_{l=1}^L (H_l \log \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta}) + \log h_l(y_l; \boldsymbol{\theta})) + \sum_{l=1}^L (\log H_l + \log B_{\alpha,l} - (\alpha + 1) \log H_l) \\ l_c(\mathbf{y}; \mathbf{H}, \phi) &= l_c(\boldsymbol{\theta}; y_l, H_l) + l_c(\alpha; H_l). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para a maximização da equação (4.3) via EM é necessário a distribuição condicional $H_l|\mathbf{y}$. Então por definição de probabilidade condicional tem-se

$$\begin{aligned} f(H_l|\mathbf{y}) &= \frac{f(y_l; \boldsymbol{\theta}|H_l)\mathbb{P}(H_l, \alpha)}{\int f(y_l; \boldsymbol{\theta}|H_l)\mathbb{P}(H_l, \alpha)dH_l} \approx \frac{H_l \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta})^{H_l} h_l(y_l; \boldsymbol{\theta}) B_{\alpha, l} H_l^{-(\alpha+1)}}{\int H_l \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta})^{H_l} h_l(y_l; \boldsymbol{\theta}) B_{\alpha, l} H_l^{-(\alpha+1)} dH_l} \\ &= \frac{\varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}) B_{\alpha, l} H_l^{-(\alpha+1)}}{\int \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}) B_{\alpha, l} H_l^{-(\alpha+1)} dH_l}, \end{aligned}$$

com $\varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}) = H_l \bar{G}(y_l; \boldsymbol{\theta})^{H_l}$. Agora defina as funções

$$\begin{aligned} e_1(H) &= \mathbb{E}(H_l|\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \int H_l f(H_l|\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) dH_l \\ &= \frac{\int H_l \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}) \mathbb{P}(H_l, \alpha) dH_l}{\int \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}) \mathbb{P}(H_l, \alpha) dH_l} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{H_l} [H_l \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta})]}{\mathbb{E}_{H_l} [\varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta})]}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_2(H) &= \mathbb{E}(\log H_l|\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{\int \log H_l \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}) \mathbb{P}(H_l, \alpha) dH_l}{\int \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}) \mathbb{P}(H_l, \alpha) dH_l} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{H_l} [\log H_l \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta})]}{\mathbb{E}_{H_l} [\varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta})]}. \end{aligned}$$

Então, $\mathbb{E}_{H|\mathbf{y}}[l_c(\mathbf{y}; \mathbf{H}, \phi)] = \mathbf{l}_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{e}_1(\mathbf{H})) + \mathbf{l}_c(\alpha; \mathbf{e}_2(\mathbf{H}))$. Observe que $e_1(\mathbf{H})$ e $e_2(\mathbf{H})$ não podem ser obtidas analiticamente. Mas, podem ser obtidas via Monte Carlo (2.5.2) através dos seguintes passos:

1. **Passo E (MC):** Na k-ésima iteração faça $\phi^{(k)} = (\boldsymbol{\theta}^{(k)}, \alpha^{(k)})$ e para $j = 1, \dots, J$ gere $E_m^{(j)}(\alpha^{(k)}) \sim \alpha^{(k)}$ -estável, $m=1, \dots, M$ e compute $H_l^{(k,j)} = \sum_{m=1}^M w_{m,l} E_m^{(j)}(\alpha^{(k)})$ e agora aproxime $e_1(H)$ e $e_2(H)$ por

$$\tilde{e}_1(H_l^{(k)}) = \mathbb{E}_{H_l} [H_l \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}^{(k)})] \cong \frac{\sum_{j=1}^J H_l^{(k,j)} \times \varphi_1(H_l^{(k,j)}, y_l; \boldsymbol{\theta}^{(k)})}{\sum_{j=1}^J \varphi_1(H_l^{(k,j)}, y_l; \boldsymbol{\theta}^{(k)})}, \quad (4.4)$$

e

$$\tilde{e}_2(H_l^{(k)}) = \mathbb{E}_{H_l} \left[\log H_l \varphi_1(H_l; y_l; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) \right] \cong \frac{\sum_{j=1}^J [\log H_l^{(k,j)}] \times \varphi_1(H_l^{(k,j)}, y_l; \boldsymbol{\theta}^{(k)})}{\sum_{j=1}^J \varphi_1(H_l^{(k,j)}, y_l; \boldsymbol{\theta}^{(k)})}, \quad (4.5)$$

2. Passo **M**: Maximize

$$l_c(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}^{(k)}) = \mathbf{l}_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{e}}_1(\mathbf{H}^{(k)})) + \mathbf{l}_c(\boldsymbol{\alpha}; \tilde{\mathbf{e}}_2(\mathbf{H}^{(k)})),$$

o resultado desta maximização é o EMV para $\boldsymbol{\phi}$ obtido pelo método MCEM.

Capítulo 5

Modelo Weibull multivariado com fragilidade compartilhada para estimação de taxas de evasão escolar

5.1 Introdução

Neste capítulo será ilustrado a aplicação do modelo proposto em dados de evasão no curso de Estatística da UFAM, obtidos no Sistema de Informações para o Ensino da Universidade Federal do Amazonas-SIE/UFAM no contexto de análise de sobrevivência.

5.2 Sobre a evasão de cursos

A evasão de cursos tem sido um tema bastante atual na literatura educacional e ocorre quando o estudante desliga-se do curso em situações diversas, tais como: abandono (deixa de matricular-se), desistência (oficial), transferência ou reopção (mudança de curso), exclusão por norma institucional. Estas formas de evasão representam uma perda social, de recursos e de tempo de todos os envolvidos no processo de ensino. Perde o aluno, seus professores e a instituição de ensino.

Um estudo realizado por Lima (2015) e apresentado na III Semana de Ciência e Tecnologia do Instituto de Ciências Exatas-ICE/UFAM mostrou que mais de 60% da evasão no ICE/UFAM ocorre no primeiro ano e por diversas causas de natureza: 1) **individual do aluno**

(habilidades de estudo; fatores decorrentes da formação escolar anterior; escolha precoce da profissão; dificuldades pessoais de adaptação à vida universitária; incompatibilidade entre a vida acadêmica e as exigências do mundo do trabalho; desmotivação com os cursos escolhidos em segunda ou terceira opção; dificuldades na relação ensino-aprendizagem, traduzidas em reprovações constantes ou na baixa frequência às aulas; desinformação a respeito da natureza dos cursos); 2) **fatores internos a instituição** (currículos desatualizados, alongados, com rígida cadeia de pré-requisitos,; critérios impróprios de avaliação de desempenho discente, relacionadas à falta de formação pedagógica ou ao desinteresse do docente; pequeno número de programas institucionais para o estudante, insuficiente estrutura de apoio ao ensino de graduação como poucos laboratórios de ensino e equipamentos de informática); 3) **fatores externos a instituição** (Questões relativas ao mercado de trabalho; reconhecimento social da carreira escolhida; desvalorização da profissão, por exemplo, o caso das Licenciaturas; dificuldades financeiras do estudante).

Por isso neste capítulo, é proposto um modelo Weibul multivariado com fragilidade compartilhada para estimar a probabilidade de ocorrer a evasão no curso de Estatística da UFAM. O modelo de fragilidade compartilhada está se tornando popular na modelagem da associação entre os tempos de sobrevivência dos indivíduos dentro de cada grupo Colosimo & Giolo (2006).

5.3 Descrição dos dados

Os dados utilizados neste trabalho para ilustrar o uso do modelo proposto, foram fornecidos pelo SIE/UFAM e consistem de informações sobre estudantes que ingressaram no curso de Estatística por meio do Processo Seletivo Contínuo (PSC) e do Sistema de Seleção Unificada (SISU) no período de 2010 a 2013. Os alunos que iniciaram em 2013, já deveriam ter formados no final do período 2016/02. Este período foi escolhido pela intenção de comparar a taxa de evasão entre os alunos do PSC e SISU. Neste período ingressaram um total de 187 alunos. Sendo 73 pelo PSC, 114 pelo SISU, dos quais 11 formaram, 128 Evadiram-se (43 do PSC e 85 SISU) e os demais encontram-se matriculados pelo curso. Foram analisados 73 pares de alunos que entraram no mesmo ano, tal que a amostra bivariada é representada por $\mathbf{y} = \{(y_{1,l}, y_{2,l}) : l = 1, 2, \dots, 73\}$, onde $y_{i,l}$ representa o tempo entre o ingresso do l -ésimo par de alunos (PSC, SISU) no curso até sua evasão. Nesta análise

específica, quando se afirma que o aluno não experimentou o evento ou que é sobrevivente, significa que ele não evadiu. Ao consultar o SIE, foram encontradas informações sobre estudantes formados, evadidos e com matrícula ativa ou trancada que ainda podem se tornar diplomados ou evadidos. Assim, a informação que se tem sobre os estudantes com matrículas ativas ou trancadas é que eles ainda estão "vivos" no final do estudo e por isso seus tempos são considerados censuras. Consequentemente, a forma geral de representar a amostra é $\{(y_{1,l}, y_{2,l}, \delta_{1,l}, \delta_{2,l}) : l = 1, 2, \dots, 73\}$ onde $\delta_{i,l}$ é o indicador de censura. Neste trabalho, a censura é considerada não informativa e a função de sobrevivência é interpretada como a probabilidade de permanência do indivíduo (Figura 5.1).

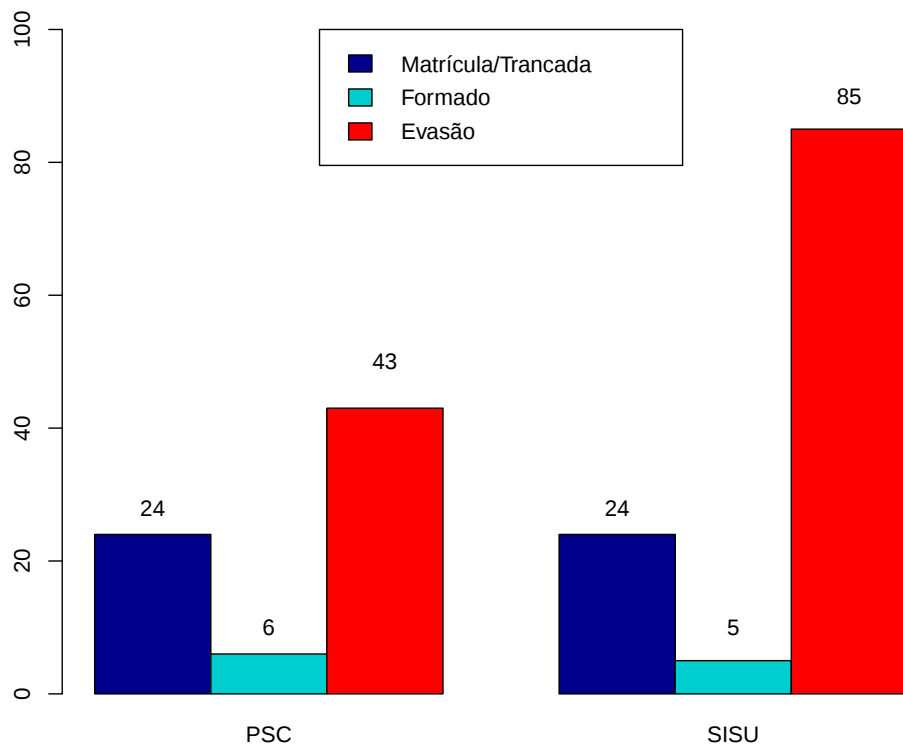


Figura 5.1: Ingressos no curso de graduação em estatística-UFAM no período 2010-2013.

5.4 Construção do modelo proposto

Para construção do modelo, considere os seguintes argumentos:

1. Os alunos do curso de estatística ingressam aos pares (PSC, SISU) pelos menos no

período. Então, inicialmente eles compartilham dos mesmos professores, geralmente são muito desinformados em relação a estrutura do curso, etc... Isto é, compartilham de algumas características de natureza individual, cujo o efeito é medido por $\sim \alpha$ -Estável E_1 ;

2. Os alunos compartilham dos currículos desatualizados, pouca estrutura de apoio ao ensino, etc... Isto é, compartilham de algumas características de natureza interna da instituição, cujo o efeito é medido por $\sim \alpha$ -Estável E_2 ;
3. Como são alunos do mesmo curso, compartilham de algumas características de natureza externa a instituição cujo o efeito é medido por $\sim \alpha$ -Estável E_3 .

Assim, defina um modelo de sobrevivência com fragilidade compartilhada pelo par de alunos $(y_{1,l}, y_{2,l})$ e representada pela mistura $H_l \equiv H_l(\alpha) = \sum_{m=1}^3 E_m(\alpha)$. Observe que, $w_{1,l} = w_{2,l} = w_{3,l} = 1$. Suponha que a distribuição bivariada do par $\mathbf{y}_l = (y_{1,l}, y_{2,l})$ pertence a classe do modelo Weibull multivariado descrito na Seção 3.2 com distribuição $\bar{G} \sim \text{Weibull}(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ com $\theta_i = (\beta_i, \gamma_i)$ e $\delta_l = \sum_{i=1}^2 \delta_{i,l}$. Então, pela independência condicional,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_l; \boldsymbol{\theta} | H_l) &= \prod_{i=1}^2 (H_l h(y_{i,l}; \theta_i))^{\delta_{i,l}} \bar{G}(y_{i,l}; \theta_i)^{H_l} \\ &= H_l^{\delta_l} e^{-H_l v_l(\boldsymbol{\theta})} (h(y_{1,l}; \theta_1))^{\delta_{1,l}} (h(y_{2,l}; \theta_2))^{\delta_{2,l}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que $v_l(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^2 \log \bar{G}(y_{i,l}; \theta_i) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{y_{i,l}}{\beta_i} \right)^{\gamma_i}$. Marginalmente em H_l , tem-se que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_l; \boldsymbol{\theta}, \alpha) &= \mathbb{E}_{H_l}(f(\mathbf{y}_l; \boldsymbol{\theta} | H_l)) \\ &= (h(y_{1,l}; \theta_1))^{\delta_{1,l}} (h(y_{2,l}; \theta_2))^{\delta_{2,l}} \mathbb{E}_{H_l}[H_l^{\delta_l} e^{-H_l v_l}] \\ &= (h(y_{1,l}; \theta_1))^{\delta_{1,l}} (h(y_{2,l}; \theta_2))^{\delta_{2,l}} \frac{d^{\delta_l}}{d\{3(v_l(\boldsymbol{\theta}))\}} \left[e^{-3(v_l(\boldsymbol{\theta}))^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que $\frac{d^{\delta_l}}{d\{3(v_l(\boldsymbol{\theta}))\}}$ é a derivada de ordem δ_l com respeito a $\{3(v_l(\boldsymbol{\theta}))\}$. Se $\delta_l = 0$, defina essa derivada como sendo igual a 1 e o modelo é sem censura e exatamente igual ao definido na Seção 3.2. Considerando o modelo sem censura, é possível usar a medida de associação

Local para este caso definida por; (ver Ravishanker & Dey (2000)),

$$\vartheta(y_{1,l}, y_{2,l}) = \frac{\bar{F}(\mathbf{y}_l, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial^2}{\partial y_{1,l} \partial y_{2,l}} \bar{F}(\mathbf{y}_l, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\frac{\partial}{\partial y_{1,l}} \bar{F}(y_{1,l}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial}{\partial y_{2,l}} \bar{F}(y_{1,l}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}.$$

Usando as informações obtidas na Subseção 3.4.6, tem-se que,

$$\vartheta(y_{1,l}, y_{2,l}) = 1 + \frac{1 - \alpha}{\left(\left[\frac{y_{1,l}}{\beta_1} \right]^{\eta_1} + \left[\frac{y_{2,l}}{\beta_2} \right]^{\eta_2} \right)^\alpha}. \quad (5.3)$$

Essa medida é interpretada como uma função de relação cruzada. Note que, quando o par $(y_{1,l}, y_{2,l})$ cresce, a medida diminui.

5.5 Estimação no modelo proposto

No caso geral de observação sem censuras, um algoritmo **MC**EM para estimação dos parâmetros foi apresentado na Seção 4.3. No entanto, o surgimento de dados censurados leva a uma pequena alteração no algoritmo de modo a acomodar essas censuras.

Primeiro tem-se que a densidade conjunta completa do modelo é dada por

$$f_c(\mathbf{y}, \mathbf{H}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{l=1}^L f(\mathbf{y}_l; \boldsymbol{\theta} | H_l) p(H_l; \boldsymbol{\alpha}),$$

como $w_{1,l} = w_{2,l} = w_{3,l} = 1$, segue do teorema 1, que

$$p(H_l; \boldsymbol{\alpha}) \sim 3\alpha c_\alpha H_l^{-(\alpha+1)},$$

com $c_\alpha = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$. Então, log-verossimilhança completa do modelo é expressa por

$$\begin{aligned} l_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y}, \mathbf{H}) &= \sum_{l=1}^L L \left(-H_l v_l(\boldsymbol{\theta}) + \delta_{1,l} \log(h(y_{1,l}; \boldsymbol{\theta}_1)) + \delta_{2,l} \log(h(y_{2,l}; \boldsymbol{\theta}_2)) \right) \\ &= \sum_{l=1}^L (\delta_l \log H_l + \log 3\alpha c_\alpha - (\alpha + 1) \log H_l) \\ &= l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{H}) + l_c(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

a derivada da log-verossimilhança completa com relação a $\beta_i, i = 1, 2$ é dada por

$$\frac{\partial l_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y}, \mathbf{H})}{\partial \beta_i} = \frac{\gamma_i}{\beta_i^{(\gamma_i+1)}} \sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i} - \frac{\gamma_i}{\beta_i} \sum_{l=1}^L \delta_{i,l},$$

e conclui-se então que o estimador de máxima verossimilhança para β_i é

$$\hat{\beta}_i(\gamma_i, \mathbf{H}_l) = \left(\frac{\sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i}}{\sum_{l=1}^L \delta_{i,l}} \right)^{1/\gamma_i}, i = 1, 2.$$

Para determinar o estimador de γ_i será usado a log-verossimilhança completa perfilada, que consiste em substituir β_i por $\hat{\beta}_i(\gamma_i, \mathbf{H})$ na verossimilhança original. Assim sendo, obtem-se:

$$\mathcal{U}(\gamma_i, \mathbf{H}) = \frac{\partial l_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y}, \mathbf{H})}{\partial \gamma_i} = \frac{\sum_{l=1}^L}{\gamma_i} + \sum_{l=1}^L \delta_{i,l} \log(y_{i,l}) - \frac{L \sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i} \log(y_{i,l})}{\sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i}},$$

e

$$\mathcal{J}(\gamma_i, \mathbf{H}) = -\frac{\sum_{l=1}^L}{\gamma_i^2} + L \left(\frac{\sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i} \log(y_{i,l})}{\sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i}} \right)^2 - L \frac{\sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i} \log^2(y_{i,l})}{\sum_{l=1}^L H_l y_{i,l}^{\gamma_i}},$$

de modo que o estimador de máxima verossimilhança de γ_i , via Newton-Raphson, é o valor

$$\gamma_i^{(k)} = \gamma_i^{(k-1)} - \mathcal{J}^{-1}(\gamma_i^{(k-1)}, \mathbf{H}^{(k-1)}) \mathcal{U}(\gamma_i^{(k-1)}, \mathbf{H}^{(k-1)}),$$

que satisfaz $|\gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k-1)}| < 10^{-3}$. Para o parâmetro α tem-se,

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{H}) = \frac{\partial l_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y}, \mathbf{H})}{\partial \alpha} = \frac{L}{\alpha} + L c'_\alpha - \sum_{l=1}^L \log H_l,$$

e

$$\mathcal{J}(\alpha, \mathbf{H}) = -\frac{L}{\alpha^2} + L c''_\alpha,$$

e portanto, o estimador de máxima verossimilhança α é o valor,

$$\alpha^{(k)} = \alpha^{(k-1)} - \mathcal{J}^{-1}(\alpha^{(k-1)}, \mathbf{H}^{(k-1)}) \mathcal{U}(\alpha^{(k-1)}, \mathbf{H}^{(k-1)})$$

que satisfaz $|\alpha^{(k)} - \alpha^{(k-1)}| < 10^{-3}$.

Note que é necessário os valores de $\mathbf{H}$ para determinar os estimadores de máxima verossimilhança. Estes valores são obtidos no passo-**E** do algoritmo **MC**EM de

forma similar ao descrito na Seção 4.3. Para tanto, é suficiente redefinir $\varphi_1(H_l; y_l; \theta) = H_l^{\delta_l} [\bar{G}(y_{1,l}; \theta_1) \bar{G}(y_{2,l}; \theta_2)]^{H_l}$ e computar $e_1(\mathbf{H}^k)$ e $e_2(\mathbf{H}^k)$, respectivamente, como calculados em 4.4 e 4.5. O seguinte algoritmo foi utilizado para computo dos estimadores de máxima verossimilhança (**EMV**):

1. Inicialize o processo com $k=0$ e $(\beta_i^{(0)}, \gamma_i^{(0)}, \alpha^{(0)})$. Na k -ésima iteração obtenha $(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \alpha^{(k)})$ e para $j = 1, \dots, J$ gere $E_m^{(j)}(\alpha^{(k)}) \sim \alpha^{(k)}$ -estável, $m=1, \dots, 3$ e compute $H_l^{(k,j)} = \sum_{m=1}^3 E_m^{(j)}(\alpha^{(k)})$, $\bar{G}(y_{1,l}; \theta_1^{(k)})$, $\bar{G}(y_{2,l}; \theta_2^{(k)})$. Por fim, obtenha $e_1(\mathbf{H}^k)$ e $e_2(\mathbf{H}^k)$.

2. Obtenha

$$\gamma_i^{(k+1)} = \gamma_i^{(k)} - \mathcal{J}^{-1}(\gamma_i^{(k)}, e_1(\mathbf{H}^{(k)})) \mathcal{U}(\gamma_i^{(k)}, e_2(\mathbf{H}^{(k)}))$$

e

$$\hat{\beta}_i^{(k+1)} = \left(\frac{\sum_{l=1}^L e_1(H_l^k) y_{i,l}^{\gamma_i^{(k+1)}}}{\sum_{l=1}^L \delta_{i,l}} \right)^{1/\gamma_i^{(k+1)}}, i = 1, 2.$$

3. Obtenha,

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \mathcal{J}^{-1}(\alpha^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)}) \mathcal{U}(\alpha^{(k)}, e_1(\mathbf{H}^{(k)})).$$

4. Repita os passos 1, 2 e 3 até que ocorra a convergência simultânea do algoritmo.

5.6 Análise dos resultados

Aplicando o algoritmo proposto na Seção 5.4 aos dados de evasão foram obtidas as seguintes estimativas: $\hat{\theta}_1 = (15, 51; 3, 96)$; $\hat{\theta}_2 = (16, 4; 2, 96)$ e $\hat{\alpha} = 0, 63$. Desta forma pela equação (3.1) a probabilidade de permanência conjunta do par $(y_{1,l}, y_{2,l})$ é expressa por

$$\bar{F}(y_{1,l}, y_{2,l}) = \exp \left\{ -3 \left[\left(\frac{y_{1,l}}{15, 51} \right)^{3, 96} + \left(\frac{y_{2,l}}{16, 4} \right)^{2, 96} \right]^{0, 63} \right\}.$$

Com a associação expressa por (5.3)

$$\vartheta(y_{1,l}, y_{2,l}) = 1 + \frac{0, 37}{\left(\left[\frac{y_{1,l}}{15, 51} \right]^{3, 96} + \left[\frac{y_{2,l}}{16, 4} \right]^{2, 96} \right)^{0, 63}}.$$

Observe que a associação diminui com o aumento do tempo de evasão, isto mostra que o modelo é negativamente.

Marginalmente, pela propriedade (3.4.2), $y_{1,l}$ e $y_{2,l}$ tem respectivamente a distribuição de permanência dada por

$$\bar{F}(y_{1,l}) = \exp \left\{ -3 \left(\frac{y_{1,l}}{15,51} \right)^{3,96 \times 0,63} \right\} \sim \text{Weibull}(10; 2, 5),$$

$$\bar{F}(y_{2,l}) = \exp \left\{ -3 \left(\frac{y_{2,l}}{16,4} \right)^{2,96 \times 0,63} \right\} \sim \text{Weibull}(9, 1; 1, 865).$$

Usando estas distribuições, tem-se que a probabilidade de um aluno do PSC evadir-se até a metade do curso é de 0,163. No caso dos alunos do SISU esta probabilidade é de 0,29. De modo que a chance de um aluno do SISU ser evasor quando comparado com o aluno do PSC é igual $0,29/0,163 = 1,78$, isto é, 78 % a mais. Isto pode estar acontecendo pelo fato que os alunos do SISU utilizam sua nota também para entrar em outras faculdades seja através do PROUNI ou FIES.

O tempo médio de permanência de cada aluno tanto do SISU quanto PSC é de 14 semestres, ou seja, aproximadamente 7 anos (em particular, acredita-se que este valor é devido ao período de greve não ter sido retirado da análise, assim o tempo médio de permanência é estimado em torno de 6,4 anos).

Com este modelo foi estimado que 13,4 % dos alunos se evadiram do curso até o primeiro ano. Obviamente estas probabilidades são subestimadas pois existem alunos no sistema que foram censurados mas seguramente não retornarão ao curso.

Para verificar o ajuste do modelo é apresentado os QQPlots marginais e seus respectivos estimadores da função de permanência comparada com o estimador de Kaplan Meier (Figura 5.2).

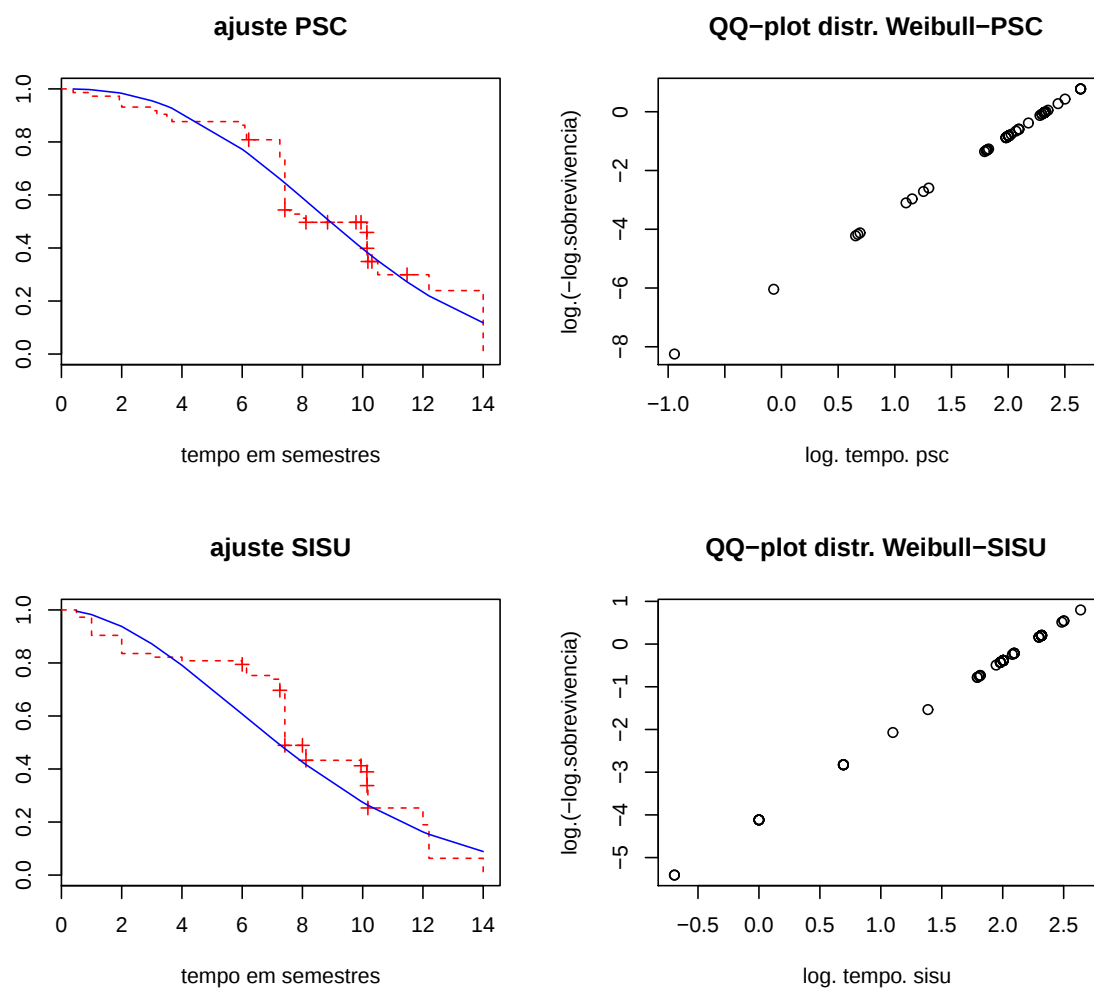


Figura 5.2: QQPlots marginais e permanências marginais estimadas

Capítulo 6

Considerações finais

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi construído um modelo Weibull multivariado para dados que exibem uma certa dependência espacial, temporal e quando necessário dependência espaço-tempo ou por grupos de indivíduos ou objetos

O modelo foi construído através da marginalização de uma distribuição Weibull G-exponencializada condicionada a uma variável (ou campo aleatório) latente formado por uma mistura de distribuições estáveis. As variáveis latentes foram incorporadas ao modelo para capturar a dependência de interesse. Foram apresentados alguns casos especiais para dados de dependência espacial, temporal e análise de sobrevivência do modelo Weibull multivariado e algumas propriedades, por exemplo como gerar valores desse modelo. As principais características do modelo Weibull multivariado proposto são as seguintes: a distribuição G é weibull, a distribuição condicional de $Y(s)$ dado H é Weibull, a distribuição do mínimo é Weibull e as marginais também são da família Weibull. O modelo proposto é positivamente dependente, ou seja, o modelo será negativamente dependente se a formulação algébrica for tratada através da função $\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$. A função de densidade de probabilidade multivariada foi obtida através da derivada da $\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$. Devido a complexidade analítica da densidade conjunta para estimação de parâmetros foi usado como alternativa a obtenção dos estimadores via MCEM.

A aplicação desse modelo Weibull multivariado com fragilidade compartilhada foi proposta para estimar a probabilidade de ocorrer a evasão no curso de Estatística da UFAM.

O tempo médio de permanência de cada aluno tanto do SISU quanto PSC é de 14 semestres ou aproximadamente 7 anos (em particular, acredita-se que este valor é devido ao período de greve não ter sido retirado da análise, assim o tempo médio de permanência é estimado em torno de 6,4 anos) e foi estimado que 13,4 % dos alunos se evadiram do curso até o primeiro ano. A chance de um aluno do SISU ser evasor quando comparado com o aluno do PSC é igual $0,29/0,163 = 1,78$, isto é, 78 % a mais. Através do QQPlot Weibull avaliou-se o ajuste marginal do modelo e verificou-se que a distribuição proposta se adequou bem aos dados. A análise dos resultados da aplicação sugere que o modelo proposto serve para situações que pedem análise multivariada e foi capaz de incorporar dependência obtendo bom ajuste.

6.2 Propostas de trabalhos futuros

Devido a simplicidade do algoritmo desenvolvido para estimar os parâmetros, ao menos duas outras abordagens podem ser desenvolvidas a partir do modelo:

1. Regressão Weibull multivariada;
2. Modelos de fragilidade compartilhada com dependência espacial.

Referências Bibliográficas

- Alzaghal, A., Famoye, F. & Lee, C. (2013). Exponentiated t - x family of distributions with some applications. *International Journal of Statistics and Probability*, **2**(3), 31.
- Asimit, A. V., Li, D. & Peng, L. (2010). Pitfalls in using weibull tailed distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**(7), 2018–2024.
- Bakouch, H. S., Ristić, M. M., Asgharzadeh, A., Esmaily, L. & Al-Zahrani, B. M. (2012). An exponentiated exponential binomial distribution with application. *Statistics & Probability Letters*, **82**(6), 1067–1081.
- Barreto-Souza, W., Simas, A. B. et al. (2013). The exp- g family of probability distributions. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **27**(1), 84–109.
- Casella, G. & Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*, volume 2. Duxbury Pacific Grove, CA.
- Colosimo, E. A. & Giolo, S. R. (2006). *Análise de Sobrevida Aplicada*. ABE-Projeto Fisher.
- Crowder, M. (1989). A multivariate distribution with weibull connections. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 93–107.
- D’Amico, G., Petroni, F. & Prattico, F. (2015). Wind speed prediction for wind farm applications by extreme value theory and copulas. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **145**, 229–236.
- Dempster, A. P., Laird, N. M. & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*, pages 1–38.
- Fougères, A.-L., Nolan, J. P. & Rootzén, H. (2009). Models for dependent extremes using stable mixtures. *Scandinavian Journal of Statistics*, **36**(1), 42–59.
- Ghahfarokhi, M. & Ghahfarokhi, P. B. (2009). Applications of stable distributions in time series analysis, computer sciences and financial markets. *Proc World Acad Sci Eng Technol*, **49**, 1027–1031.

- Gryning, S.-E., Batchvarova, E. & Floors, R. (2013). A study on the effect of nudging on long-term boundary layer profiles of wind and weibull distribution parameters in a rural coastal area. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, **52**(5), 1201–1207.
- Gualtieri, G. & Secci, S. (2014). Extrapolating wind speed time series vs. weibull distribution to assess wind resource to the turbine hub height: A case study on coastal location in southern Italy. *Renewable Energy*, **62**, 164–176.
- Gupta, R. D. & Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and weibull distributions. *Biometrical journal*, **43**(1), 117–130.
- Hagey, T. J., Puthoff, J. B., Crandell, K. E., Autumn, K. & Harmon, L. J. (2016). Modeling observed animal performance using the weibull distribution. *Journal of Experimental Biology*, **219**(11), 1603–1607.
- Hanagal, D. D. (1996). A multivariate weibull distribution. *Economic Quality Control*, **11**, 193–200.
- Harris, R. I. & Cook, N. J. (2014). The parent wind speed distribution: Why weibull? *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **131**, 72–87.
- Kanter, M. et al. (1975). Stable densities under change of scale and total variation inequalities. *The Annals of Probability*, **3**(4), 697–707.
- Kundu, D. & Gupta, R. D. (2010). A class of bivariate models with proportional reversed hazard marginals. *Sankhya B*, **72**(2), 236–253.
- Kundu, D., Franco, M. & Vivo, J.-M. (2014). Multivariate distributions with proportional reversed hazard marginals. *Computational Statistics & Data Analysis*, **77**, 98–112.
- Lee, C. K. & Wen, M.-J. (2006). A multivariate weibull distribution. *arXiv preprint math/0609585*.
- Lee, L. (1979). Multivariate distributions having weibull properties. *Journal of Multivariate Analysis*, **9**(2), 267–277.
- Lehmann, E. L. (1953). The power of rank tests. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 23–43.
- Levy, P. (1925). Calcul des probabilités, Paris.
- Lima, M. (2015). O que dizem os números do SIE, sobre a evasão no ICE. III Semana de Ciência e Tecnologia do Instituto de Ciências Exatas-ICE/UFAM.

- Lu, J.-C. (1989). Weibull extensions of the freund and marshall-olkin bivariate exponential models. *IEEE Transactions on Reliability*, **38**(5), 615–619.
- Lu, J.-C. & Bhattacharyya, G. K. (1990). Some new constructions of bivariate weibull models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **42**(3), 543–559.
- Marshall, A. W. & Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **62**(317), 30–44.
- Marshall, A. W. & Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **83**(403), 834–841.
- Mudholkar, G. S. & Srivastava, D. K. (1993). Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**(2), 299–302.
- Nadarajah, S. & Kotz, S. (2006). The exponentiated type distributions. *Acta Applicandae Mathematica*, **92**(2), 97–111.
- Nolan, J. P. (2015). *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhauser, Boston. In progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/~jpnolan.
- Patra, K. & Dey, D. K. (1999). A multivariate mixture of weibull distributions in reliability modeling. *Statistics & probability letters*, **45**(3), 225–235.
- Pfeifer, S., Park, S.-H. & Bandaru, P. (2010). Analysis of electrical percolation thresholds in carbon nanotube networks using the weibull probability distribution. *Journal of applied physics*, **108**(2), 024305.
- Pinho, L., Cordeiro, G. & Nobre, J. (2012). The gamma-exponentiated weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **11**(4), 379–395.
- Rand, D. R. & McLinn, J. A. (2011). Analysis of field failure data when modeled weibull slope increases with time. *Quality and Reliability Engineering International*, **27**(1), 99–105.
- Ravishanker, N. & Dey, D. K. (2000). Multivariate survival models with a mixture of positive stable frailties. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **2**(3), 293–308.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull distribution: a handbook*. CRC Press.
- Ristić, M. M. & Balakrishnan, N. (2012). The gamma-exponentiated exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82**(8), 1191–1206.

- Roy, D. & Mukherjee, S. (1989). Characterizations of some bivariate life-distributions. *Journal of multivariate analysis*, **28**(1), 1–8.
- SenGupta, A., Kulkarni, H. V. & Hubale, U. D. (2015). Prediction intervals for environmental events based on weibull distribution. *Environmental and Ecological Statistics*, **22**(1), 87–104.
- Shaked, M. (1982). A general theory of some positive dependence notions. *Journal of Multivariate Analysis*, **12**(2), 199–218.
- Shi, D. (1995). Multivariate extreme value distribution and its fisher information matrix. *ACTA Mathematicae Applicatae Sinica*, **11**(4), 421–428.
- Tye, M. R., Stephenson, D. B., Holland, G. J. & Katz, R. W. (2014). A weibull approach for improving climate model projections of tropical cyclone wind-speed distributions. *Journal of Climate*, **27**(16), 6119–6133.
- Villanueva, D., Feijóo, A. & Pazos, J. L. (2013). Multivariate weibull distribution for wind speed and wind power behavior assessment. *Resources*, **2**(3), 370–384.
- Virto, R., Sanz, D., Alvarez, I., Condon, S. & Raso, J. (2006). Application of the weibull model to describe inactivation of listeria monocytogenes and escherichia coli by citric and lactic acid at different temperatures. *Journal of the Science of Food and Agriculture*, **86**(6), 865–870.
- Wahed, A. S., Luong, T. M. & Jeong, J.-H. (2009). A new generalization of weibull distribution with application to a breast cancer data set. *Statistics in medicine*, **28**(16), 2077–2094.
- Wang, G., Wong, W.-K., Hong, Y., Liu, L., Dong, J. & Xue, M. (2015). Improvement of forecast skill for severe weather by merging radar-based extrapolation and storm-scale nwp corrected forecast. *Atmospheric Research*, **154**, 14–24.
- Wang, J. (2016). Reviews of seismicity around taiwan: Weibull distribution. *Natural Hazards*, **80**(3), 1651–1668.
- Wei, G. C. & Tanner, M. A. (1990). A monte carlo implementation of the em algorithm and the poor man's data augmentation algorithms. *Journal of the American statistical Association*, **85**(411), 699–704.
- Weibull, W. (1951). Wide applicability. *Journal of applied mechanics*, **103**, 293–297.
- Wu, C. J. (1983). On the convergence properties of the em algorithm. *The Annals of statistics*, pages 95–103.

Zhu, H. P., Xia, X., Chuan, H. Y., Adnan, A., Liu, S. F. & Du, Y. K. (2011). Application of weibull model for survival of patients with gastric cancer. *BMC gastroenterology*, **11**(1), 1.