

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*RETAS NO ESPAÇO PROJETIVO DE DIMENSÃO 3*

TÉO FELIPE DOS SANTOS

Manaus

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TÉO FELIPE DOS SANTOS

RETAS NO ESPAÇO PROJETIVO DE DIMENSÃO 3

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Álgebra.

Orientador: Prof. Dr.Dmitry Logachev

Manaus, 10 de julho de 2017.

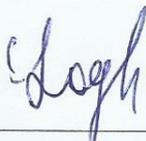
TÉO FELIPE DOS SANTOS

RETAS NO ESPAÇO PROJETIVO DE DIMENSÃO 3

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Álgebra.

Aprovada por:

BANCA EXAMINADORA



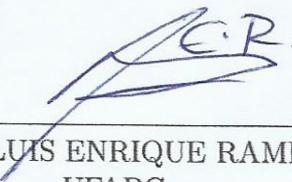
---

Prof. Dr. DMITRY LOGACHEV - Orientador  
UFAM



---

Prof. Dr. STEFAN JOSEF EHBAUER  
UFAM



---

Prof. Dr. LUIS ENRIQUE RAMIREZ  
UFABC

Manaus-Am  
2017

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S237r Santos, Téo Felipe dos  
Retas no Espaço Projetivo de dimensão 3 / Téo Felipe dos Santos. 2017  
54 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Dmitry Logachev  
Dissertação (Mestrado em Matemática - Álgebra) - Universidade Federal do Amazonas.

1. retas no espaço. 2. superfícies quadráticas. 3. variedades grassmannianas. 4. inchamentos de superfícies. I. Logachev, Dmitry II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me sustentar espiritualmente em todos momentos da minha vida.

À minha querida avó Manuela, pelos sábios e carinhosos conselhos.

À minha querida mãe, por estar sempre presente nas minhas jornadas e me incentivando carinhosamente com seu afeto.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dmitry Logachev, por ter me dado a oportunidade de desfrutar de seu tempo e conhecimento, e o privilégio de ser seu orientando.

Ao Prof. Dr. Stefan Josef Ehbauer, por todos os momentos e conversas motivadoras, as quais foram de enorme valia para o meu conhecimento matemático.

Ao Prof. Dr. Luis Enrique Ramirez, pelas sábios conselhos para valorizar o trabalho.

Aos professores do PPGMAT-UFAM, pelo seu excelente profissionalismo, motivando sempre seus alunos a seguir em frente.

Aos professores, Agnaldo Ferreira e Alexandra, pelas cartas de recomendação.

Aos meu colegas de curso que se tornaram amigos e que levarei para a vida, e que com certeza sem eles este trabalho não teria sido realizado: João Raimundo, Fernando, Alan, Bruno, Eduardo, Rafael, Ayana, Márcia, Daniele, Juan, Vinicius, Thiago, Danilo, Cícero e Edfran.

E o meu agradecimento em especial à minha linda esposa Vanessa, a quem também dedico este trabalho, por toda a paciência que teve comigo durante esse percurso tão difícil de dupla jornada de 2 anos de estudos e trabalho. E por todo apoio, amor, carinho e dedicação que sempre tem comigo.

# RESUMO

## RETAS NO ESPAÇO PROJETIVO DE DIMENSÃO 3

Apresentamos neste trabalho um estudo de retas no  $\mathbb{P}^3$ , inicialmente abordamos alguns conceitos fundamentais à Geometria Algébrica, tais como o espaço projetivo, variedades projetivas, dimensão, grau e blowup (inchamento). Em seguida estudamos o conjunto das retas nos espaços projetivos e, mais detalhado, no espaço  $\mathbb{P}^3$ . No qual é mostrado que elas formam uma variedade algébrica chamada a variedade de Grassmann. Também estudamos os ciclos de Schubert e os anéis de Chow das grassmannianas. Estes resultados se aplicam ao estudo das retas nas superfícies quádricas em  $\mathbb{P}^3$ . Por exemplo, é mostrado que 4 retas na posição geral no  $\mathbb{P}^3$  têm 2 retas secantes, e que uma quádrica inchada em 1 ponto é isomorfa ao plano inchado em 2 pontos.

**Palavras-chave:** retas no espaço; superfícies quádricas; variedades grassmannianas; inchamentos de superfícies.

# ABSTRACT

## LINES IN THE PROJECTIVE SPACE OF DIMENSION 3

We present in this work a study of lines in the  $\mathbb{P}^3$ , initially approached some concepts fundamental to the Algebraic Geometry, such as the projective space, projective varieties, dimension, degree and blowup. Next we study the set of the lines in the projective spaces and, more detailed, in the space  $\mathbb{P}^3$ . In which it is shown that they form an algebraic variety called the Grassman variety. We also studied the Schubert cycles and the Grassmannian Chow rings. These results apply to the study of lines on quadratic surfaces in  $\mathbb{P}^3$ .

For example, it is shown that 4 lines in the general position on  $\mathbb{P}^3$  have 2 secant lines, and that a quadratic surfaces swollen at 1 point is isomorphic to the plane swollen at 2 points.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Variedades Algébricas Afins</b>	<b>3</b>
1.1 Conjuntos Algébricos Afins . . . . .	3
1.2 Variedades Algébricas Afins . . . . .	7
<b>2 Espaço Projetivo</b>	<b>9</b>
2.1 Espaço Projetivo . . . . .	9
2.1.1 Conjuntos Algébricos Projetivos . . . . .	11
2.1.2 Variedades Projetivas . . . . .	11
2.2 Morfismos entre Espaços Projetivos . . . . .	14
2.2.1 Aplicação racional . . . . .	15
2.2.2 Produtos de Espaços Projetivos . . . . .	16
2.2.3 Mergulho de Segre . . . . .	17
2.3 Variedades singulares e não singulares . . . . .	18
2.4 Grau das variedades . . . . .	18
2.5 Dimensão das Variedades . . . . .	21
2.6 Teorema de Bézout . . . . .	21
<b>3 Superfícies Quádricas</b>	<b>22</b>
3.1 Cônicas em $\mathbb{P}^2$ . . . . .	22
3.2 Quádricas em $\mathbb{P}^3$ . . . . .	25
<b>4 A Grassmanniana de retas no <math>\mathbb{P}^3</math></b>	<b>27</b>
4.1 Subespaços Lineares da Grassmanniana de Retas . . . . .	30

<i>SUMÁRIO</i>	1
4.2 Condições de Schubert . . . . .	32
4.2.1 O Cálculo de Schubert . . . . .	33
<b>5 Blowup - Inchamento</b>	<b>37</b>
5.1 Teoria de intersecção . . . . .	39
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>52</b>

# Introdução

Neste trabalho, temos como objetivo o estudo das retas no  $\mathbb{P}^3$ . E para desenvolver este tema, iniciamos com o *Capítulo 1* onde apresentamos algumas definições importantes sobre conjuntos algébricos afins e variedades algébricas afins no espaço afim, com a finalidade de dar um suporte preliminar ao conteúdo que se desenvolve no decorrer do trabalho em um ambiente projetivo.

No *Capítulo 2* é dedicado aos conceitos importantes sobre o espaço projetivo, conjuntos algébricos projetivos e variedades algébricas projetivas, morfismos entre espaços projetivos, variedades singulares e não-singulares, grau e dimensão das variedades, bem como a definição do importante teorema de Bézout.

No *Capítulo 3*, Estudamos as definições das superfícies quádricas no  $\mathbb{P}^3$  e motivamos com alguns exemplos do teorema importante que 4 retas na posição geral no  $\mathbb{P}^3$  têm 2 retas secantes.

No *Capítulo 4*, estudamos as variedades grassmanianas dos subespaços e especialmente a variedade  $G(2, 4)$  das retas em  $\mathbb{P}^3$ . As coordenadas de Pluecker na  $G(2, 4)$  e seu anel de Chow,  $CH(G(2, 4))$ , quer dizer, várias configurações dos planos no  $\mathbb{P}^3$ . Em particular, é mostrado que o conjunto das retas na superfície quádrica em  $\mathbb{P}^3$  é a união de duas elipses na  $G(2, 4)$ . E também estudamos o teorema importante que 4 retas na posição geral no  $\mathbb{P}^3$  têm 2 retas secantes é provado por dois métodos diferentes: método geométrico e o método que aplica o anel de Chow.

E finalmente no *Capítulo 5*, desenvolvemos a teoria geral de inchamento e intersecção de superfícies. O teorema que uma superfície quádrica inchada em 1 ponto é isomorfa ao plano inchado em 2 pontos é provada pela maneira geométrica. Finalmente, se tratam subespaços lineares da dimensão máxima nos superfícies quádricas de dimensão par qualquer.

# Capítulo 1

## Variedades Algébricas Afins

### 1.1 Conjuntos Algébricos Afins

O espaço ambiente onde definimos os conjuntos algébricos afins é o espaço afim de dimensão  $n$  sobre um corpo algebricamente fechado  $K$  e denotamos por  $\mathbb{A}^n(K)$  ou simplesmente de  $\mathbb{A}^n$ , ou seja, o conjunto de todas as  $n$ -uplas dos elementos de  $K$ . O elemento  $P \in \mathbb{A}^n$  chamamos de ponto, e denotamos  $P = (a_1, \dots, a_n)$  com  $a_i \in K$ , tal que  $a_i$  são as coordenadas de  $P$ .

**Definição 1.1.1** *Seja  $X \subset \mathbb{A}^n$  tal que  $X = \{(P) \in \mathbb{A}^n / f(P) = 0, \forall f \in S\}$ ;  $S \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  anel de polinômios, onde  $S$  é uma família de polinômios. Então  $X$  é um conjunto algébrico afim ou simplesmente conjunto algébrico.*

Consideramos o anel de polinômios  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  com  $n$  variáveis e com coeficientes em  $K$ . Seja  $S \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , então definimos o conjunto de zeros de  $S$  como sendo os zeros comuns de todos os seus elementos, ou seja, por  $Z(S) := \{P \in \mathbb{A}^n / f(P) = 0, \forall f \in S\}$ .

#### Lema 1.1

(a)  $Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n$  e  $Z(K[X_1, X_2, \dots, X_n]) = \emptyset$ .

(b) Se  $S_1$  e  $S_2$  são subconjuntos de  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  com  $S_1 \subset S_2$ , então  $Z(S_2) \subset Z(S_1)$

(c) Dada uma família  $S_i$  de subconjuntos de  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , então  $\bigcap_i Z(S_i) = Z(\bigcup_i S_i)$

(d) Se  $S_1$  e  $S_2$  são subconjuntos de  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , então  $Z(S_1) \cup Z(S_2) = Z(S)$ , onde  $S = S_1 \cdot S_2 := \{f_1 \cdot f_2 / f_i \in S_i, i = 1, 2\}$

**Prova 1.1.1** *As afirmações (a), (b) e (c) são óbvias. Vamos mostrar (d). Primeiro tome  $x \in Z(S_1) \cup Z(S_2)$ . Então  $x \in Z(S_i)$  para algum  $i = 1, 2$  e logo  $f_i(x) = 0$  para todo  $f_i \in S_i$ . Portanto  $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = 0$  para todo  $f_1 \in S_1$  e  $f_2 \in S_2$ , implicando que  $x \in Z(S)$ .*

*Reciprocamente, tome  $x \in Z(S)$ . Suponha que  $x \notin Z(S_1)$ . Então existe  $f_1 \in S_1$  tal que  $f_1(x) \neq 0$ . Mas  $f_1(x) f_2(x) = 0$  para todo  $f_2 \in S_2$  e logo  $f_2(x) = 0$  para todo  $f_2 \in S_2$ , isto é,  $x \in Z(S_2)$ .*

Dizemos que um subconjunto  $X \subset \mathbb{A}^n$  é fechado se  $X = Z(S)$  para algum  $S \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ . Assim, um subconjunto aberto de  $\mathbb{A}^n$  é o complementar de um fechado.

Os subconjuntos fechados de  $\mathbb{A}^n$  são também chamados de conjuntos algébricos afins.

**Proposição 1.1.1** *Os subconjuntos abertos de  $\mathbb{A}^n$  formam uma topologia chamada topologia de Zariski.*

- \*  $\emptyset$  e  $\mathbb{A}^n$  são abertos;
- \* união de abertos é aberta;
- \* interseção finita de abertos é aberta.

Por outro lado, podemos definir também a Topologia de Zariski em  $\mathbb{A}^n$ , tomando como fechados os conjuntos algébricos afins. E de fato:

- \*  $\emptyset = Z(1)$  e  $\mathbb{A}^n = Z(0)$  são fechados;
- \* Interseção arbitrária de fechados é fechada,  $\cap Z(I_\alpha) = Z(\langle I_\alpha \rangle)$ .
- \* União finita de um fechado é fechada,  $Z(I_1) \cup Z(I_2) = Z(I_1 \cdot I_2)$ .

Definimos a topologia de Zariski em  $X \subset \mathbb{A}^n$  um conjunto algébrico afim, como a topologia induzida pela topologia de Zariski em  $\mathbb{A}^n$ .

**Exemplo 1.1.1** *É fácil descrever os subconjuntos fechados de  $\mathbb{A}^1$ . Como polinômios em uma variável têm apenas um número finito de zeros, os fechados de  $\mathbb{A}^1$  são subconjuntos finitos.*

**Exemplo 1.1.2** *Agora descreveremos os fechados em  $\mathbb{A}^2$ . Tome  $f(X_1, X_2) \in K[X_1, X_2]$ . O fechado  $Z(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$  é chamado de curva algébrica plana afim.*

**Exemplo 1.1.3** *Os fechados de  $\mathbb{A}^2$  são da forma  $X = \text{curva plana afim} \cup \text{número finito de pontos}$ .*

*Se  $S = (X_2(X_2^2 - X_1), X_2(X_1 - 1))$ , então  $X = Z(S)$  é dado por  $X = Z(X_2) \cup Z(X_2^2 - X_1, X_1 - 1) = \{(t, 0) \mid t \in k\} \cup \{(1, 1), (1, -1)\}$ .*

**Definição 1.1.2** *Uma curva algébrica plana afim ou simplesmente curva é uma classe de equivalência de polinômios não constantes  $f \in K[X_1, X_2]$ , módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por alguma constante.*

Nesse contexto, a equação de uma curva é um qualquer polinômio nessa classe.

Dizemos que uma curva está definida sobre um corpo  $k_0 \subset K$  se ela admitir uma equação a coeficientes em  $K_0$ .

O *traço* de uma curva é o conjunto das soluções da equação. Que usualmente cometemos o abuso de designar pelo mesmo simbolo tanto a curva quanto seu traço.

O *grau* de uma curva  $f$  é o grau de sua equação. Como exemplos temos que as curvas de graus 1, 2, 3, ... são chamadas retas, cônicas, cúbicas, ...

Uma *curva* é irredutível se admite uma equação que é um polinômio irredutível.

As componentes irredutíveis de uma curva  $f$  são as curvas definidas pelos fatores irredutíveis de  $f$ .

A multiplicidade de uma componente  $p$  de  $f$  é o expoente com que o fator  $p$  ocorre na decomposição de  $f$ ; quando  $\geq 2$ , dizemos que  $p$  é componente múltipla de  $f$ . Para mais aprofundamento sobre curvas recomendamos [27].

Consideramos um fechado afim  $X \subset \mathbb{A}^n$  dado por  $X = Z(S)$  com  $S \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ . Denotamos por  $\langle S \rangle$  o ideal gerado por  $S$  em  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ . Note que  $X = Z(S) = Z(\langle S \rangle)$ . Mais ainda, suponha que  $\langle S \rangle$  é finitamente gerado, isto é, que existe um número finito de polinômios  $(f_1, \dots, f_r) \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  tais que  $\langle S \rangle = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Então temos  $X = Z(f_1, \dots, f_r)$ , já que todo  $f \in \langle S \rangle$  é da forma  $f = h_1 f_1 + \dots + h_r f_r$  com  $h_1, \dots, h_r \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ .

**Definição 1.1.3** *Um anel  $A$  é dito Noetheriano se, equivalentemente,*

- (i) *cada ideal de  $A$  é finitamente gerado;*
- (ii) *cada cadeia ascendente de ideais  $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$  é estacionária, isto é, existe  $n$  tal que  $I_n = I_{n+l}$  para todo  $l \geq 0$ ;*
- (iii) *cada conjunto não vazio de ideais de  $A$  tem um elemento maximal.*

**Exemplo 1.1.4** *Todo corpo  $K$  é anel Noetheriano, pois seus únicos ideais são  $\langle 0 \rangle$  e  $K$ . O anel  $\mathbb{Z}$  dos inteiros é Noetheriano pois todo ideal em  $\mathbb{Z}$  é principal, isto é, gerado por um único elemento. E também como consequência o anel de polinômios em  $n$  variáveis sobre um corpo  $K$  não necessariamente fechado é Noetheriano. Este resultado é conhecido como teorema da base de Hilbert.*

**Teorema 1.1** *(Teorema da Base de Hilbert)*

*Se  $A$  é anel Noetheriano, então o anel de polinômios em uma variável  $A[X]$  também é Noetheriano.*

A prova do teorema pode ser vista [4].

Podemos estender o Teorema de uma variável para n-variáveis.

Se  $A$  é Noetheriano então o anel de polinômios  $A[X_1, X_2, \dots, X_n]$  em  $n$  variáveis também é Noetheriano. Em particular  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  é Noetheriano e todo fechado afim  $X \subset \mathbb{A}^n$  pode ser descrito por um número finito de equações, isto é, ser dado na forma  $X = Z(f_1, \dots, f_r)$  com  $f_1, \dots, f_r \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ .

Seja  $X \subset \mathbb{A}^n$  um subconjunto qualquer. Definimos o ideal de  $X$  como  $I(X) = \{f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in X\}$ . E por consequência do Teorema da Base de Hilbert, temos que o  $I(X)$  é finitamente gerado, isto é, existe  $m \in \mathbb{Z}$  e  $f_1, \dots, f_m \in I$  tal que  $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . E nesse caso escrevemos  $z(I) = Z(f_1, \dots, f_r)$ .

**Exemplo 1.1.5** *Todo conjunto finito em  $\mathbb{A}^n$  é um conjunto Algébrico.*

Seja  $X \subset \mathbb{A}^n$ , tal que  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Tomamos  $Z(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ , isto mostra que qualquer conjunto finito de pontos em  $\mathbb{A}^n$  é conjunto algébrico.

**Lema 1.2** (a)  $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$  e  $I(\emptyset) = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ ;

(b) Se  $X_1$  e  $X_2$  são subconjuntos de  $\mathbb{A}^n$  com  $X_1 \subset X_2$  então  $I(X_2) \subset I(X_1)$ ;

(c) Para  $S \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  e  $X \subset \mathbb{A}^n$  subconjuntos temos  $S \subset I(Z(S))$  e  $X \subset Z(I(X))$ ;

(d) Para  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{A}^n$  temos  $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$ .

A demonstração do lema pode ser visto em [11].

Seja  $X \subset \mathbb{A}^n$  um subconjunto. O fecho de  $X$  é o menor fechado  $\overline{X}$  de  $\mathbb{A}^n$  contendo  $X$ , ou seja, se  $W$  é um fechado de  $\mathbb{A}^n$  contendo  $X$  então  $W$  contém  $\overline{X}$ .

**Exemplo 1.1.6** *O fecho de  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_2 = 0, x_1 \neq 0\}$  é  $\overline{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_2 = 0\}$ .*

**Proposição 1.1.2** *Se  $X \subset \mathbb{A}^n$  então  $\overline{X} = Z(I(X))$ .*

**Prova 1.1.2** *Pelo Lema 1.2 (c),  $Z(I(X))$  é um fechado contendo  $X$ .*

*Agora tome  $W \subset \mathbb{A}^n$  um fechado contendo  $X$ . Temos que mostrar que  $W \subset Z(I(X))$ .*

*Como  $W$  é fechado, temos  $W = Z(S)$  para algum  $S \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ .*

*Como  $X \subset W$  então, pelo Lema 1.2 (b),  $S \subset I(W) \subset I(X)$  e portanto  $Z(I(X)) \subset Z(S) = W$ .  $\square$*

Seja  $A$  um anel e  $I \subset A$  um ideal. O radical de  $I$  é  $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists m \in \mathbb{Z}; a^m \in I\}$ . Dizemos que o ideal  $I$  é um ideal radical se  $I = \sqrt{I}$ .

**Teorema 1.2** *(Nullstellensatz, Teorema dos Zeros de Hilbert) Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado,  $I \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  um ideal, e  $f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , então  $f(x) = 0$  para todo  $x$  em  $Z(I)$  se e somente se  $f \in \sqrt{I}$ . Em outra palavras,  $\sqrt{I} = \{f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in Z(I)\}$ . Para cada ideal  $I \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , temos  $I(Z(I)) = \sqrt{I}$ .*

A demonstração do teorema pode ser visto em [4].

Fazendo uma construção inversa, obtemos que:

Dado  $Z \subset \mathbb{A}^n$  e  $Z_1 \subset Z_2$  subconjuntos algébricos de  $\mathbb{A}^n$ , definimos  $I(Z) = \{f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n] / f(x) = 0, \forall x \in Z\}$ , tal que  $I(Z_2) \subset I(Z_1)$  subconjuntos de ideias de  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ .

$$I : \{Z_1 \subset Z_2 \subset \mathbb{A}^n\} \longrightarrow \{I(Z_2) \subset I(Z_1) \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]\}$$

$$Z : \{I(Z_2) \subset I(Z_1) \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]\} \longrightarrow \{Z_1 \subset Z_2 \subset \mathbb{A}^n\}$$

I e Z são inversas uma da outra.

**Definição 1.1.4** Um conjunto algébrico  $X = Z(S)$  de  $\mathbb{A}^n$  é redutível se X pode decompor em  $X = X_1 \cup X_2$ , tal que  $X_1, X_2$  são conjuntos algébricos de  $\mathbb{A}^n$  e  $X_i \neq X$  para  $i = 1, 2$ . Caso contrário X é irredutível. O conjunto vazio é irredutível por definição.

**Proposição 1.1.3** Seja  $X \subset \mathbb{A}^n$  conjunto algébrico, tal que X é irredutível  $\iff I(X)$  é um ideal primo.

**Prova 1.1.3** ( $\implies$ ) Suponhamos que X é irredutível. Sejam  $f, g \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  tal que  $f, g \in I(X)$ , queremos mostrar que  $f \in I(X)$  ou  $g \in I(X)$ . Podemos escrever  $X = Z(\langle I, f \rangle) \cup Z(\langle I, g \rangle)$ , como X é irredutível, sem perda de generalidade podemos supor que  $X = Z(\langle I, f \rangle) \implies I(X) = \sqrt{\langle I, f \rangle} \implies f \in I(X)$ .

( $\impliedby$ ) Suponhamos que X não é irredutível, ou seja,  $X = Z(I_1) \cup Z(I_2)$ , tais que  $Z(I_i) \subsetneq X$  são ideias radicais,  $I_i = I(Z(I_i))$  então existe  $f_i \in I_i \setminus I(X), i = 1, 2$ . Tomamos  $f = f_1 \cdot f_2 \in I(X)$ , mas  $f_1$  e  $f_2 \notin I(X)$ , portanto  $I(X)$  não é primo.  $\square$

## 1.2 Variedades Algébricas Afins

**Definição 1.2.1** Uma variedade algébrica afim ou simplesmente variedade afim é um conjunto algébrico afim que seja fechado e irredutível de  $\mathbb{A}^n$ . Ou seja, é definido por um ideal primo.

**Exemplo 1.2.1** Seja  $f \in K[X_1, X_2]$  um polinômio irredutível, então obtemos uma variedade afim  $X = Z(f)$ . Que chamamos de curva afim a equação definida  $f(X_1, X_2) = 0$ . Se f tem grau d, então a curva X tem grau d.

**Exemplo 1.2.2** Seja  $f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  um polinômio irredutível, então obtemos uma variedade afim  $X = Z(f)$  que chamamos de hipersuperfície para  $n \geq 3$ .

Agora podemos fazer a relação de bijeção com o conjunto de ideais radicais e conjuntos algébricos.

$$I : \{Z_1 \subset Z_2 \subset \mathbb{A}^n\} \longrightarrow \{I(Z_2) \subset I(Z_1) \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]\}$$

$$Z : \{I(Z_2) \subset I(Z_1) \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]\} \longrightarrow \{Z_1 \subset Z_2 \subset \mathbb{A}^n\}$$

**Definição 1.2.2** *Seja  $X \subset \mathbb{A}^n$  conjunto algébrico afim, definimos o Anel de Coordenadas de  $X$  como  $A(X) = K[X_1, X_2, \dots, X_n]/I(X)$ . E também  $A(X)$  pode ser interpretado como  $K$ -Álgebra finitamente gerada e sem Nilpotentes das funções polinomiais em  $X$ . E ainda, se  $X$  é uma variedade afim, então  $A(X)$  é um Domínio de Integridade.*

**Observação 1.2.1** *No caso que  $X$  é irredutível  $\iff A(X)$  é Domínio. Definimos  $K(X)$  o corpo de funções de  $X$  como o Corpo Quociente de  $A(X)$ .*

**Definição 1.2.3** *Sejam  $X \subset \mathbb{A}^n$  e  $Y \subset \mathbb{A}^m$  conjuntos algébricos afins. Uma função  $f : X \longrightarrow Y$  é dita um morfismo de conjuntos algébricos afins se,  $\exists p_1, \dots, p_m \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  tais que  $\forall x \in X, f(x) = (p_1(x), \dots, p_m(x)) \in Y$ .*

*Um isomorfismo é um morfismo com um morfismo inverso.*

**Definição 1.2.4** *Uma Variedade Quase-Afim é um aberto na Topologia de Zariski de uma Variedade Afim.*

**Definição 1.2.5** *Seja  $X \subset \mathbb{A}^n$  uma variedade Quase-Afim e  $x \in X$  um ponto. Uma função  $f : X \longrightarrow K$  é dizemos que é regular em  $X$ , se existe um aberto  $\mathcal{U} \subset X$  contendo  $x$  e polinômios  $p, q \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  tal que  $\forall y \in \mathcal{U}, q(y) \neq 0$  e  $f(y) = \frac{p(y)}{q(y)}$ . E ainda, dizemos que  $f$  é função regular se  $f$  é regular em todos os pontos de  $X$ . O conjunto das funções regulares em  $X$  formam uma  $K$ -Álgebra, e denotamos por  $\mathcal{O}(X)$ .*

**Observação 1.2.2** *Sejam  $X \subset \mathbb{A}^n$  e  $Y \subset \mathbb{A}^m$  variedades Quase-afins.*

*Uma aplicação  $f : X \longrightarrow Y$  dizemos que é um morfismo se  $\exists f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(X)$  tal que  $f = (f_1, \dots, f_m)$ .*

# Capítulo 2

## Espaço Projetivo

### 2.1 Espaço Projetivo

**Definição 2.1.1** *Sejam  $K$  corpo algebricamente fechado e  $V$  um  $K$ -espaço vetorial de dimensão finita, o espaço projetivo  $\mathbb{P}(V)$  associado a  $V$  é o conjunto dos subespaços de  $V$  de dimensão 1. Isto é, o conjunto de retas em  $K^{n+1}$  que passam pela origem.*

Se  $V = K^{n+1}$ , escrevemos  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(K^{n+1}) = \mathbb{P}^n := (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ ,

onde  $\sim$  é a relação de equivalência definida por  $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$  se existe  $\lambda \in K^*$  tal que  $(x_0, \dots, x_n) = (\lambda y_0, \dots, \lambda y_n)$ .

Temos que um ponto  $P \in \mathbb{P}^n$  é da forma  $P = (a_0 : a_1 : \dots : a_n) \sim (\lambda a_0 : \lambda a_1 : \dots : \lambda a_n)$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , não nulo. Observe que os pontos  $a_i$  não podem ser todos nulos simultaneamente  $(0 : 0 : \dots : 0)$ . E dessa forma tomamos os pontos ao infinito quando temos  $a_0 = 0$ , ou seja, pontos ao infinito são da forma  $(0 : a_1 : a_2 : \dots : a_n)$ .

No entanto, de uma forma bem simples podemos dizer que um espaço projetivo é a união disjunta do espaço afim com o conjunto de pontos ao infinito. Isto é,  $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup (\mathbb{P}^{n-1} = \{\infty\})$

Observe que  $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ , com  $a_0 \neq 0$  podemos escolher sem perda de generalidade  $a_0 = 1$  e dividir cada coordenada  $a_i$  por  $a_0$ , logo temos  $(1 : a_1 : a_2 : \dots : a_n) \equiv (a_1 : a_2 : \dots : a_n) \in \mathbb{A}^n$ . Os pontos que sobram são os pontos ao infinito com  $a_0 = 0$ , do tipo  $(0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^{n-1}$ .

Note que de maneira sucessiva temos:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = (1 : a_1 : a_2 : \dots : a_n) \cup (0 : a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n).$$

$$\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^{n-1} \cup \mathbb{P}^{n-2} = (0 : 1 : a_2 : \dots : a_n) \cup (0 : 0 : a_2 : a_3 : \dots : a_n).$$

$$\mathbb{P}^{n-2} = \mathbb{A}^{n-2} \cup \mathbb{P}^{n-3} = (0 : 0 : 1 : \dots : a_n) \cup (0 : 0 : 0 : a_3 : \dots : a_n).$$

Portanto, podemos escrever que  $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup \mathbb{A}^{n-2} \cup \dots \cup \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$ , onde  $\mathbb{A}^0$  é um ponto.

Por exemplo, temos para  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 : a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{A}^3 \\ (0 : 1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{A}^2 \\ (0 : 0 : 1 : a_3) \in \mathbb{A}^1 \\ (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{A}^0 \end{array} \right. , \in \mathbb{P}^3$$

Em geral,  $\mathbb{P}^0$  é um ponto,  $\mathbb{P}^1$  é a reta projetiva,  $\mathbb{P}^2$  é o plano projetivo,  $\mathbb{P}^3$  é o espaço projetivo, e o  $\mathbb{P}^n$  é o espaço projetivo com dimensão n.

Seja  $f \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ , dado  $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ , em geral  $f(P) = 0$  não está definido, pois se  $f(P) = 0$  então  $f(\lambda P) \neq 0$ . E para isso é necessário que f seja Polinômio Homogêneo.

Um polinômio é homogêneo quando todos seus mônônios não nulos tem os mesmo grau total. Ou seja,  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$  tal que  $f_i \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]_d$ , é um polinômio homogêneo de grau d. Então,  $f(\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0 : \dots : a_n)$ . Assim a condição  $f(P) = 0$  está bem definida.

**Exemplo 2.1.1** *Seja a parábola  $f \in \mathbb{A}^2$ , definida  $f(x, y) = y - x^2$ , tomando o  $P = (a_0, a_1)$ , talque  $f(P) = 0$ , temos que  $f(\lambda a_0, \lambda a_1) = \lambda a_1 - (\lambda a_0)^2 = \lambda(a_1 - \lambda a_0^2)$ . Mas observamos que  $f(P) = 0$  mas  $f(\lambda P) \neq 0$ .*

*É fácil ver que o polinômio f não é homogêneo. Agora faremos a homogeneização do polinômio f.*

*Temos que  $(z : x : y) \in \mathbb{P}^2$ , e que podemos dividir todos os elementos pelo z, para  $z \neq 0$ , ou seja,  $(1 : x/z : y/z) \sim (x/z, y/z) \in \mathbb{A}^2$ . Então substituindo no polinômio  $f(x, y) = f(x/z, y/z) = y/z - (x/z)^2 = y/z - x^2/z^2 = yz - x^2$ , temos que  $f(z : x : y) = yz - x^2$ . Seja  $P = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ , tal que  $f(P) = 0$ , temos que  $f(\lambda a_0 : \lambda a_1 : \lambda a_2) = \lambda^2(a_1 a_2 - a_0^2) = 0$ , logo  $f(\lambda P) = \lambda^2 f(P)$ . Desta forma dizemos que a parábola f está na forma projetiva.*

**Definição 2.1.2** *Um Anel Graduado é um anel S, juntamente com uma decomposição em soma direta de grupo abelianos  $S_d$ , isto é,  $S = \bigoplus S_d, d \geq 0$ , tal que  $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$ . Os elementos de  $S_d$  são ditos homogêneos de grau d. Como podemos ver  $S^h = \bigcup_{d \geq 0} S_d$ .*

*Um ideal  $I \subset S$  é dito homogêneo, se I é gerado por elementos homogêneos.  $I = \bigoplus (I \cap S_d)$ , se  $a \in I$  e  $a = a_0 + a_1 + \dots + a_d$ ,  $a_i \in S_i$ , então cada parcela  $a_0, \dots, a_d \in I$ . Observação: Seja  $I \subset S$  ideal homogêneo, então I é primo se e somente se  $a, b \in S^h$  tal que  $ab \in I$  então  $a \in I$  ou  $b \in I$ .*

**Observação 2.1.1** *Seja S um anel graduado, então a soma, produto e radical de ideais homogêneos é também homogêneos.*

**Observação 2.1.2** *Observação:* Seja  $I \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  ideal homogêneo, então  $Z(I) = Z(\sqrt{I})$ .

### 2.1.1 Conjuntos Algébricos Projetivos

Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado,  $\mathbb{P}^n$  espaço projetivo.  $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  o anel de polinômios homogêneos em  $n+1$  variáveis com coeficientes em  $K$ .

**Definição 2.1.3** *Os conjuntos algébricos projetivos são os fechados da forma  $Z(T) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0, \forall f \in T\}$ , tal que  $T \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ .*

**Teorema 2.1** (*Nullstellensatz, Teorema dos Zeros de Hilbert - Versão Projetiva*)  
Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado,  $I \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  um ideal homogêneo, e  $f \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ , tal que  $f(P) = 0$  para todo  $P \in Z(I)$ , então  $f \in \sqrt{I}$ .  
A não ser que  $\sqrt{I} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$  ideal maximal irrelevante.

E ainda,  $I(X) = \langle f \in K[X_0, \dots, X_n] \mid f(P) = 0, \forall P \in X \rangle$ .

Como consequência temos uma bijeção entre  $Z$  e  $I$ :

$\{\text{Conjuntos Algébricos de } \mathbb{P}^n\} \longleftrightarrow \{\text{Conjuntos Homogêneos radicais } I \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]\}$ .

A prova do teorema pode ser vista em [11], [4].

**Observação 2.1.3** (*Topologia de Zariski*) Como no caso afim, cada subconjunto de  $\mathbb{P}^n$  herda a topologia induzida de Zariski. E os fechados são os conjuntos algébricos projetivos em  $\mathbb{P}^n$ .

**Definição 2.1.4** *Um conjunto algébrico projetivo  $X \subset \mathbb{P}^n$  é redutível se  $X$  pode decompor em  $X = X_1 \cup X_2$ , tal que  $X_1, X_2$  são conjuntos algébricos projetivos de  $\mathbb{P}^n$  e  $X_i \neq X$  para  $i = 1, 2$ . Caso contrário  $X$  é irredutível. O conjunto vazio é irredutível por definição.*

**Observação 2.1.4**  $X \subset \mathbb{P}^n$  é irredutível  $\iff I(X)$  é primo.

Observação:

### 2.1.2 Variedades Projetivas

**Definição 2.1.5** *Uma variedade algébrica projetiva é um conjunto algébrico projetivo irredutível, ou seja, se  $I = \langle T \rangle \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  ideal homogêneo, então  $Z(I) = Z(T) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0, \forall f \in I\}$ .*

Em outras palavras, podemos dizer que uma Variedade Projetiva, como espaço topológico, é um conjunto fechado irredutível em  $\mathbb{P}^n$ .

Dizemos em casos mais conhecidos como segue: Que se o grau de  $f$  é 1, 2 ou 3 então,  $X$  é um Hiperplano, Quádrica ou Cúbica, respectivamente.

**Definição 2.1.6** *Se  $X \subset \mathbb{P}^n$  é uma variedade algébrica projetiva, temos que para cada  $U \subset X$  uma estrutura induzida de variedade, chamamos de Variedade Quase-Projetiva.*

Toda variedade afim, e mesmo toda subvariedade aberta de uma variedade afim, é uma variedade quase-projetiva.

Consideramos a injeção:

$$\varphi_0 : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

Temos que a imagem é um aberto  $\varphi_0(\mathbb{A}^n) = \mathcal{U}_0 = \mathbb{P}^n / Z(x_0)$ .

E a inversa:  $\psi_0 : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbb{A}^n$

$$(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}) = (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$$

Com a topologia de Zariski em  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathcal{U}_0$ , temos que  $\varphi_0$  e  $\psi_0$  são homeomorfos.

Para provar que são homeomorfos, precisamos mostrar a continuidade (fechados em fechados). Seja  $Y \subset \mathcal{U}_0$  fechado, então tome o fecho projetivo  $\bar{Y} \subset \mathbb{P}^n$ , e  $I(\bar{Y}) \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  um ideal homogêneo. Seja  $F \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ , e definimos a desomogeneização de  $F$  por  $f$ , isto é,  $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$  e  $J = \langle F(1, x_1, \dots, x_n) \rangle$ ,  $F \in I$ .

$\psi_0(Y) = Z(J) \subset \mathbb{A}^n$ , isto mostra que  $\varphi_0$  leva fechados em fechados.

E reciprocamente, seja  $Z \subset \mathbb{A}^n$  um fechado, e  $I = I(Z) \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , dado  $f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , e a homogeneização de  $f$  é  $F(x_0, \dots, x_n) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]_d$  tal que,  $d$  é o grau de  $f$ . Se tomar  $f = F(x_0, \dots, x_n)$ , e  $\tilde{I} = \langle F \rangle$ ,  $F \in I$ , observamos que  $\varphi_0(Z) = \mathcal{U}_0 \cap Z(\tilde{I})$ .  $\square$

Analogamente, temos homeomorfismo  $\varphi_i : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathcal{U}_i = \mathbb{P}^n / Z(x_i)$  com  $x_i \neq 0$ .

Podemos verificar assim que  $\mathbb{P}^n = \cup \mathcal{U}_i, i = 0, \dots, n$ . Ou seja, toda variedade projetiva é união finita de abertos homeomorfos a variedades afins.

**Observação 2.1.5**  $\mathbb{P}^n / \mathcal{U}_i = Z(x_i) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ , uma compactificação.

**Observação 2.1.6** *Toda variedade afim ou quase-afim, pode ser vista como variedade quase-projetiva.*

**Definição 2.1.7** *Um subespaço linear  $L$  em  $\mathbb{P}^n$  é definido pelo conjunto dos pontos  $P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$  tais que as coordenadas  $x_i$  satisfazem a um sistema linear de equações*

$$\sum_{i=0}^n a_{\alpha i} x_i; \alpha = 1, \dots, (n-d).$$

Dizemos que  $L$  tem dimensão  $d$  se as  $(n-d)$  equações acima são linearmente independentes, isto é, se a matriz  $(n-d) \times (n+1)$  de coeficientes  $(a_{\alpha i})$  tem todos os menores  $(n-d) \times (n-d)$  não nulos. Sabemos da Álgebra Linear que existem  $(d+1)$  pontos  $P_i = (a_{i0} : \dots : a_{in})$ , com  $i = 0, \dots, d$ , que geram  $L$ .

$L$  é chamado de RETA se  $d = 1$ , de PLANO se  $d = 2$  e HIPERPLANO se  $d = (n-1)$ . Um  $d$ -plano é um espaço linear de dimensão  $d$ .

**Definição 2.1.8** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade quase-projetiva, e  $P \in X$ , então uma função  $f : X \rightarrow K$  é dita regular em  $P$  se existe um aberto  $\mathcal{U} \subset X$ , e  $P \in \mathcal{U}$ , e existem  $F, G \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  homogêneos e de mesmo grau tal que para todo  $Q \in \mathcal{U}$ ,  $G(Q) \neq 0$  e  $f(Q) = \frac{F(Q)}{G(Q)}$ . E ainda, dizemos que  $f$  é função regular se é regular em todos os pontos de  $X$ .*

*O conjunto das funções regulares em  $X$  formam uma  $K$ -Álgebra, e denotamos por  $\mathcal{O}(X)$ .*

**Observação 2.1.7** *Como no caso afim, se  $f, g \in \mathcal{O}(X)$ , tal que  $f(X) = g(X), \forall x \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ , então  $f=g$ .*

**Observação 2.1.8** *No caso afim,  $\mathcal{O}(X) \cong A(X)$ , e neste caso a variedade afim é determinada a menos de isomorfismo pelo anel de coordenadas  $A(X)$ . Mas para o caso de  $X$  um variedade projetiva,  $\mathcal{O}(X) = K$ , onde  $K$  (funções constantes). Isto é, as únicas funções regulares em  $X$  são as funções constantes.*

**Definição 2.1.9** *O anel local de  $x \in X$  tal que  $X$  é uma variedade quase-projetiva, é definido por:  $\mathcal{O}_x, X = f \in K(X)$  tal que  $f$  é regular em  $x$ , isto é,  $x$  pertence ao domínio de definição de  $f$ .*

$\mathcal{O}_x, X$  é um anel local com ideal maximal  $m_x = f \in \mathcal{O}_x, X | f(x) = 0$ .

**Proposição 2.1.1** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  variedade projetiva com dimensão  $n$ , e  $F \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  homogêneos, grau  $F > 0$  tal que  $F \notin I(X)$ , então toda componente irredutível de  $X \cap Z(F)$ , tem exatamente dimensão  $n-1$ .*

A prova da proposição pode ser vista [11].

## 2.2 Morfismos entre Espaços Projetivos

**Definição 2.2.1** *Sejam  $X \subset \mathbb{P}^n$  e  $Y \subset \mathbb{P}^m$  variedades quase-projetivas.*

*Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita um morfismo se, e somente se,  $\forall P \in X, \exists \mathcal{U} \subset X, P \in \mathcal{U}$  e  $F_0, \dots, F_m \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  homogêneos e de mesmo grau, tal que  $\forall Q \in \mathcal{U}, f(Q) = (F_0(Q), \dots, F_m(Q))$ .*

**Exemplo 2.2.1** *(As projeções lineares)*

Seja um ponto  $P \in \mathbb{P}^n$ , tal que  $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ . Então a projeção do ponto  $P$  por outro ponto  $Q \in \mathbb{P}^n$  a um hiperplano  $\mathbb{P}^{n-1}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_P(Q) : \mathbb{P}^n / \{P\} &\rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto (x_1 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

Seja  $E \subset \mathbb{P}^n$ , subespaço linear de dimensão  $m$ , isto é,  $E = Z(L_1, \dots, L_{n-m})$ , então os  $L_i \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ , com grau 1, lineamente independentes.

$$\pi_E : \mathbb{P}^n / \{E\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-m-1}.$$

O fecho projetivo de uma fibra de  $\pi_E$  é um subespaço linear de dimensão  $m + 1$  contendo  $E$ .

**Exemplo 2.2.2** *(Mergulho de Veronese)*

Seja  $X = \mathbb{P}^n$ , e  $K[X_0, X_1, \dots, X_n]_d$ ,  $d > 0$  é o grau, e  $K$ -espaço vetorial de dimensão  $\binom{n+d}{d}$ .

$$N := \binom{n+d}{d} - 1, \text{ enumeramos os monômios de grau } d, (M_0 : \dots : M_N).$$

Definimos o mergulho  $d$ -úpulo de Veronese por:

$$\begin{aligned} \nu_d : \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (M_0 : \dots : M_N) \end{aligned}$$

Observamos que  $\nu_d$  está bem definido, pois existem  $i_0, \dots, i_n$  tal que  $M_{i_j} = X_j^d$ .

Nomenclatura clássica: Para  $n = 1$ , temos  $\nu_d(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$  é chamada curva racional normal de grau  $d$ .

$$d = 1, \nu_1(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^1 \text{ (identidade)}$$

$$d = 2, \nu_2(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^2 \text{ (cônica)}$$

$$d = 3, \nu_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3 \text{ (cúbica torcida)}$$

E para  $n = 2$  e  $d = 2$ , temos  $\nu_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ , chamamos de Superfície de Veronese.

Podemos ver que  $\nu_d$  é um isomorfismo entre  $\mathbb{P}^n$  e um fechado  $Y \subset \mathbb{P}^N$ , e possui geradores para  $I(Y) \subset K[Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$ .

Segue como exemplo o

$$\nu_3 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(s : t) \mapsto (x : y : z : w) = (s^3 : s^2t : st^2 : t^3), \text{ tal que } s^3t^3 = s^2t \cdot st^2.$$

E portanto,  $\nu_3(\mathbb{P}^1) \subset Z(xw - yz : xz - y^2 : yw - z^2)$ , ideal que gera a imagem de  $\mathbb{P}^1$ .

### 2.2.1 Aplicação racional

**Definição 2.2.2** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades quase-projetivas, uma aplicação racional  $\varphi : X \dashrightarrow Y$ , não necessariamente morfismo, é uma classe de equivalência de pares  $(\mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}})$ ,  $\mathcal{U} \subset X$  aberto não vazio, tal que  $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow Y$  um morfismo, onde  $(\mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}}) \sim (\mathcal{V}, \varphi_{\mathcal{V}})$  se, e somente se  $\varphi_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}} = \varphi_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}}$ .*

O domínio de definição de  $\varphi$  é o maior aberto  $\mathcal{U} \subset X$  tal que  $\varphi$  tem representante da forma  $(\mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}})$ .

**Definição 2.2.3** *Uma aplicação racional é dita Dominante, se existe um representante  $(\mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}})$  de  $\varphi$ , tal que  $\varphi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$  é denso em  $Y$ .*

Se  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  e  $\psi : Y \dashrightarrow Z$  são aplicações racionais dominantes, então  $\psi \circ \varphi : X \dashrightarrow Z$  é uma aplicação racional dominante.

**Definição 2.2.4** *Uma aplicação racional dominante  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  é dita birracional, se  $\varphi$  tem aplicação racional inversa  $\varphi^{-1} : Y \dashrightarrow X$ , então  $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id_x$ .*

*Neste caso, dizemos que  $X$  e  $Y$  são birracionalmente equivalentes.*

**Exemplo 2.2.3**  $\pi : Bl_P \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  é um morfismo birracional.

**Definição 2.2.5** *Uma variedade quase-projetiva é dita racional se é birracionalmente equivalente a  $\mathbb{A}^n$  ou  $\mathbb{P}^n$  para algum  $n$ .*

**Exemplo 2.2.4**  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  é birracionalmente equivalente a  $\mathbb{P}^{n+m}$ .

**Exemplo 2.2.5** *Considere a transformação Quadrática Standar,  $q : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ , tal que  $(x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy) = (\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z})$ .*

*Notamos que o domínio de definição de  $q : \mathbb{P}^2 / \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\}$ , e que  $q^2 = Id_{\mathbb{P}^2}$ .*

**Definição 2.2.6** *As funções racionais em  $X$  formam um corpo chamado Corpo de funções de  $X$  e denotado por  $K(X)$ .*

**Observação 2.2.1** *Se  $X \subset \mathbb{A}^n$  é uma variedade afim, então o  $K(X)$  é o corpo quociente de  $A(X)$ . Em outras palavras,  $K(X) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in K[X_1, X_2, \dots, X_n], g \notin I(X) \right\}$  tal que  $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \Leftrightarrow fg' - f'g \in I(X)$ .*

## 2.2.2 Produtos de Espaços Projetivos

Sem perda de generalidade podemos começar mostrando o produto de variedades afins para que seja feita uma comparação.

$$\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \leftrightarrow \mathbb{A}^{n+m}$$

$$((x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_m)) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (z_1, \dots, z_{n+m})$$

*Justaposição*

Observamos que a topologia de Zariski de  $\mathbb{A}^{n+m}$ , não corresponde a topologia produto em  $\mathbb{A}^{n+m}$ .

Agora observamos como se comporta as variedades quase-projetivas. Utilizando mesmo raciocínio que o anterior temos como exemplo:

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \leftrightarrow \mathbb{P}^{n+m}$$

temos que para  $n = m = 1$ ,

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \leftrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(x : y) \times (z : w) \mapsto (x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3$$

Por tanto percebemos que não vale o mesmo raciocínio que o anterior.

Para resolvermos o produto de conjuntos algébricos projetivos, usamos o Mergulho de Segre.

### 2.2.3 Mergulho de Segre

$$s : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$$

$$(x_0 : \dots : x_n) \times (y_0 : \dots : y_m) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : \dots : x_0y_m : x_1y_0 : \dots : x_1y_m : \dots : x_ny_0 : \dots : x_ny_m)$$

Tomamos  $z_{ij} = x_iy_j$ , tal que  $s$  está bem definida.  $\exists i, j$  tal que  $x_iy_j \neq 0$ . E  $s$  não depende da escolha de coordenadas homogêneas de  $x$  e  $y$ . E facilmente percebemos que  $s$  é injetiva.

Se  $X \subset \mathbb{P}^n$  e  $Y \subset \mathbb{P}^m$  são fechados, então  $s(X \times Y)$  é fechado em  $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ .

A topologia de Zariski induzida por  $s$  não é a topologia produto em  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ . Existem fechados que não são da forma  $X \subset \mathbb{P}^n \times Y \subset \mathbb{P}^m$ .

Segue como exemplo:  $s : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$

$$(x_0 : x_1) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1)$$

Em coordenadas de  $z_0, z_1, z_2$  e  $z_3$ , a imagem é chamada de Quádrica de Segre, dada por  $z_0z_3 = z_1z_2$ .

$$s(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = Z(z_0z_3 - z_1z_2) \subset \mathbb{P}^3$$

Se fixarmos  $(x_0 : x_1)$ , teremos  $(a : b) \times \mathbb{P}^1 \mapsto$  família de retas em  $\mathbb{P}^3$  passando por  $(a : 0 : b : 0)$  e  $(0 : a : 0 : b)$

Agora se fixarmos  $(y_0 : y_1)$ , teremos  $\mathbb{P}^1 \times (c : d) \mapsto$  Outra família de retas em  $\mathbb{P}^3$  passando por  $(c : d : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : c : d)$

Cujas equações são dadas por:

$$bz_0 = az_2, bz_1 = az_3 \text{ e } dz_0 = cz_1, dz_2 = cz_3$$

Observamos que as duas famílias se cruzam, pois  $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = 0$ , para quaisquer

quer  $a, b, c$  e  $d$ .

Tomamos o hiperplano  $H = Z(z_0 - z_3)$  e a quádrica  $Q = Z((z_0z_3 - z_1z_2))$ , temos que  $Q \cap H$  é uma cônica.. Fechado de  $Q$ , que não é da forma  $X \times Y$ .

Agora vamos caracterizar os fechados de  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ , em função das coordenadas homogêneas  $(x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_m)$ .

seja  $s : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ , com os fechados  $s^{-1}(W)$ , tal que  $W$  é fechado em  $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ .

Tomamos  $W = Z(\langle F_1, \dots, F_k \rangle)$ ,  $F_i \in K[Z_{ij}]$  homogêneos, temos que  $(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ , logo  $s(x, y) \in W \Leftrightarrow F_\ell(x_i y_j) = 0, \forall \ell$ . Com  $G_\ell := F_\ell(x_i y_j) \in K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ , polinômio homogêneo, com o meso grau. Neste caso,  $G_\ell$  é dito polinômio Bi-homogêneo de Bi-grau  $(d, d)$ .

Suponha que  $G \in K[\bar{x}_i, \bar{y}_j]$ , Bi-homogêneo de Bi-grau  $(d_1, d_2)$  com  $d_1 \leq d_2$ . Observe que a condição  $G(x, y) = 0$ , tal que  $(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ , está bem definida.

$Z(G) = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid G(x, y) = 0\}$ , Bi-homogêneo de Bi-grau  $(d_1, d_2)$ .

$$Z(G) = Z \left( \begin{array}{c} x_0^{d_2-d_1} G \\ \vdots \\ x_n^{d_2-d_1} G \end{array} \right), \text{ tal que } x_i^{d_2-d_1} G, \text{ são Bi-homogêneos de Bi-grau } (d_1, d_2).$$

Conclusão: Um subconjunto  $W \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  é fechado se, e somente se  $W = Z(G_1, \dots, G_k)$ , com cada  $G_i$  Bi-homogêneo.

Analogamente,  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^m$ , tem estrutura de variedades quase-projetiva. Os fechados de  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^m$ , são os conjuntos da forma  $Z(\langle F_1, \dots, F_k \rangle)$ ,  $F_i \in K[x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$  homogêneos nas variáveis  $y_i$ .

## 2.3 Variedades singulares e não singulares

**Definição 2.3.1** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$ , uma variedade projetiva de dimensão  $n$ , e seja  $x \in X$ , tal que  $I(X) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ ,  $f_i \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ . Então  $x$  é ponto não singular (ou liso, ou regular) de  $X$  se o posto da Jacobiana  $J(X) = r$ , caso contrário  $x$  é singularidade em  $X$ . E a matriz Jacobiana em  $x$ , é dada por:*

$$J(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right); 1 \leq i \leq r; 0 \leq j \leq n, \text{ posto } J(x) = r.$$

*Isto é, uma variedade projetiva é dita não singular se todos seus pontos, são pontos não singulares.*

**Exemplo 2.3.1** *Seja  $X = V(y^2z - x^3 - x^2z) \subset \mathbb{P}^2$  uma curva cúbica, tal que  $P = (1 : 0 : 0) \in X$  é um ponto singular. Ou seja,  $\frac{\partial X}{\partial x}(P) = 3x^2 + 2xz = 0$ ,  $\frac{\partial X}{\partial y}(P) = 2yz = 0$  e  $\frac{\partial X}{\partial z}(P) = x^2 + y^2 = 0$ .*

## 2.4 Grau das variedades

Nossa motivação será determinar o número de pontos de interseção de variedades determinadas (caso esse número seja finito).

Tendo em conta estes dois pontos, vemos que os nossos principais objetos de estudo terão de ser ideais homogêneos em anéis polinomiais.

O conceito central de que precisamos é da função de Hilbert de tal ideal.

**Definição 2.4.1** (*Função de Hilbert*)

Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva,  $I(X) \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  ideal homogêneo, e  $S(X) = K[X_0, X_1, \dots, X_n]/I(X)$  é o anel de coordenadas homogêneas, então podemos definir a função de Hilbert de  $X$  por:

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ m &\mapsto \dim_k S(X)_m \end{aligned}$$

**Exemplo 2.4.1** A função de Hilbert de  $\mathbb{P}^n$  é dada por  $\varphi_x(m) = \dim_k S(X)_m = \dim K[X_0, X_1, \dots, X_n]_m = \binom{n+m}{n}$  para  $m \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 2.4.2** Seja  $X = a \subset \mathbb{P}^n$  um único ponto. Para calcular a função de Hilbert de  $X$ , sem perda, podemos tomar  $a = (1 : 0 : \dots : 0)$ , tal que  $I(a) = (x_1, \dots, x_n)$ . Então  $S(X) = K[X_0, X_1, \dots, X_n]/I(a) \cong K[X_0]$ , logo  $\varphi_x(m) = 1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

Para trabalhar com funções de Hilbert é conveniente adotar a linguagem de seqüências exatas da álgebra comutativa.

De uma maneira simples podemos definir seqüências exatas como:

Seja  $f : U \rightarrow V$  e  $g : V \rightarrow W$  sejam mapas lineares de espaços vetoriais sobre  $K$ . Assumimos que necessariamente  $f$  é injetiva e  $g$  sobrejetiva, e que  $\text{Im} f = \text{Ker} g$ . Podemos representar como segue:

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

Segue que a  $\dim_k V = \dim_k U + \dim_k W$ .

**Definição 2.4.2** (*Polinômio de Hilbert*)

Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  um conjunto algébrico,  $I(X) \subset K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  ideal homogêneo, e  $S(X) = K[X_0, X_1, \dots, X_n]/I(X)$  um  $S$ -módulo graduado, então existe um único polinômio  $P_x \in \mathbb{Q}[m]$  tal que  $P_x(m) = \varphi_x(m)$ , para  $m \gg 0$ . Chamamos de polinômio de Hilbert,  $P_x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $a_n \in \mathbb{Q}/0$ .

Um estudo mais detalhado sobre a função e o polinômio de Hilbert pode ser visto em [11]

Fatos:

1) O grau  $\partial(P_x) = \dim_k X = n$

2) O grau de  $X$ , denotamos como  $\partial X = a_n \cdot n!$ , ou seja, coeficiente líder de  $P_x$  multiplicado pelo  $(\partial P_x) = n!$ .

**Exemplo 2.4.3** Vamos verificar o grau de  $X = \mathbb{P}^n$ .

Seja a função de Hilbert de  $X = \mathbb{P}^n$ , definida como

$$\varphi_x(m) = \dim_k S(X)_m = \dim K[X_0, X_1, \dots, X_n]_m = \binom{n+m}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (m+i).$$

Ou seja,

$$P_x(t) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (m+i) = \frac{1}{n!} t^n + \text{lot.}$$

obs: lot significa termos de ordem mais baixas, para não precisar escrever o resto do polinômio que é desnecessário.

Observe que o grau do  $\partial P_x(t) = n = \dim_k X$ .

E que coeficiente líder de  $P_x$  é  $\frac{1}{n!}$ , portanto o  $\partial X = \frac{1}{n!} \cdot n! = 1$ .

**Exemplo 2.4.4** Seja  $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície, com  $\partial F = d$  e  $\dim X = n - 1$ . Vamos verificar o que o  $\partial X = \partial F = d$ .

Sabemos que  $S(X) = K[X_0, X_1, \dots, X_n]/F$   $S$ -módulo graduado, portanto temos uma sequência exata:  $0 \rightarrow K[X_0, X_1, \dots, X_n]_{m-d} \xrightarrow{F} K[X_0, X_1, \dots, X_n]_m \rightarrow S(X)_m \rightarrow 0$ .

$$\varphi_x(m) = \dim S(X)_m = P_{\mathbb{P}^n}(m) - P_{\mathbb{P}^n}(m-d)$$

$$P_x(t) = P_{\mathbb{P}^n}(t) - P_{\mathbb{P}^n}(t-d) = \frac{1}{n!} n d t^{n-1} + \text{lot} = \frac{1}{(n-1)!} d t^{n-1}.$$

Concluimos que  $\partial P_x(t) = \dim X = n - 1$ . E que  $\partial X = \frac{1}{(n-1)!} d (n-1)! = d = \partial F$ .

**Exemplo 2.4.5** Dado o mergulho  $d$ -úplo de Veronese por  $\nu_d : \mathbb{P}^n \rightarrow X \subset \mathbb{P}^N$ , com  $N := \binom{n+d}{d} - 1$ , tal que  $X = \nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ .

Observamos que  $S(X)_m \cong K[X_0, X_1, \dots, X_n]_{md}$ .

Então temos que  $P_x(m) = \binom{md+n}{n}$ , logo  $P_x(t) = \frac{1}{n!} d^n t^n + \text{lot}$ .

Portanto, o  $\partial X = n! \frac{d^n}{n!} = d^n$ .

## 2.5 Dimensão das Variedades

**Definição 2.5.1** A dimensão de uma variedade quase-projetiva irredutível  $X$ , é o grau de transcendência do corpo de funções  $K(X)$  sobre  $K$  e é denotada por  $\dim(X)$ . A dimensão de uma variedade redutível é o máximo das dimensões de suas componentes irredutíveis. Se  $Y \subset X$  é uma subvariedade de  $X$ , então o número  $(\dim(X) - \dim(Y))$  é chamado de codimensão de  $Y$  em  $X$ .

Para uma mapa regular  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades quase-projetivas e um ponto  $y \in Y$ , o conjunto  $f^{-1}(y)$  é chamado de fibra de  $f$  por  $y$ . Esse conjunto é uma subvariedade fechada de  $X$ .

**Teorema 2.2** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um mapa regular entre variedades quase-projetivas irredutíveis. Suponha que  $f$  seja sobrejetiva:  $f(X) = Y$  e que  $\dim(X) = n$  e  $\dim(Y) = m$ . Então  $m \leq n$  e;

(1) para qualquer componente  $F$  da fibra  $f^{-1}(y)$ ,  $y \in Y$ , temos que  $\dim(F) \geq n - m$ ;

(2) existe um subconjunto aberto não-vazio  $U \subset Y$  tal que  $\dim(f^{-1}(y)) = n - m$ , para qualquer  $y \in U$ .

**Definição 2.5.2** Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade quase-projetiva irredutível  $k$ -dimensional. Se  $\Gamma$  é um  $(n - k)$ -plano genérico em  $\mathbb{P}^n$ , então o grau de  $X$ , denotado por  $\deg(X)$ , é o número de pontos da interseção  $X \cap \Gamma$ .

Toda essa definição de dimensão e bem como a prova do teorema podem ser melhor estudado em [11] e [22].

## 2.6 Teorema de Bézout

**Teorema 2.3** Uma curva de grau  $k$ , e outra curva de grau  $\ell$  que não tenham componentes comuns e já contando as multiplicidades têm  $k \times \ell$  pontos de intersecções.

De uma forma generalizada podemos formalizar o Teorema de Bézout da seguinte maneira:

**Teorema 2.4** Sejam  $X, Y \subset \mathbb{P}^n$  variedades de dimensão  $k$  e  $l$  respectivamente, com  $k + l = n$  e suponha que a interseção  $X \cap Y$  seja transversal. Então  $X \cap Y$  consiste exatamente de  $\deg(X \cap Y) = \deg(X) \cdot \deg(Y)$ , pontos.

**Teorema 2.5** Uma hipersuperfície  $X \subset \mathbb{P}^n$  de grau  $d$  intercepta uma reta genérica em  $d$  pontos.

O estudo mais aprofundado do Teorema de Bézout bem como sua prova, pode ser visto em [17].

# Capítulo 3

## Superfícies Quádricas

Uma Superfície Quádrica em  $\mathbb{P}^n$  é dada pelos zeros de um polinômio homogêneo  $f$  em  $n+1$  variáveis de grau 2. ou seja, é dada por

$$\mathbf{Q} = F(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j}^n a_{ij} X_i X_j = 0$$

E também pode ser expressa de maneira única em forma matricial  $X^T A X$ , onde  $X = (x_0, \dots, x_n)^T$  e  $A = (a_{ij})$  é uma matriz simétrica, ou seja,  $a_{ij} = a_{ji}$ . Isto é,  $A$  tem elemento diagonal  $(a_{ii})$  igual ao coeficiente de  $x_i^2$  e elementos  $a_{ij}$  e  $a_{ji}$  cada um igual a metade do coeficiente de  $x_i x_j$ .

$$\mathbf{Q} = X^T A X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Observação 3.0.1** *A quádrlica fica determinada dependendo apenas do Posto da matriz simétrica  $A$ .*

### 3.1 Cônicas em $\mathbb{P}^2$

Uma cônica é uma variedade em  $\mathbb{P}^2$  dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2, ou seja, uma cônica é uma superfície Quádrica no plano projetivo, definida por um polinômio da forma:

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i \leq j}^2 a_{ij} X_i X_j = a_{00} X_0^2 + a_{01} X_0 X_1 + a_{02} X_0 X_2 + a_{11} X_1^2 + a_{12} X_1 X_2 + a_{22} X_2^2 = 0$$

Cada ponto de  $\mathbb{P}^5(V)$ , onde  $V$  é o espaço vetorial de dimensão 6 dos polinômios homogêneos de grau 2 nas variáveis  $X_0, X_1, X_2$ , corresponde a uma única cônica.

Dizemos que  $\mathbb{P}^5$  parametriza as cônicas do plano projetivo. Os espaços projetivos  $\mathbb{P}^n$  possuem uma importância fundamental como espaços de parâmetros. Para ilustrar esta afirmativa, considere o conjunto das cônicas que passam por um ponto  $P = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ . Estas cônicas satisfazem a equação:  $A_0x_0^2 + A_1x_0x_1 + A_2x_0x_2 + A_3x_1^2 + A_4x_1x_2 + A_5x_2^2 = 0$ . Esta equação pensada no  $\mathbb{P}^5$  das cônicas é a equação de um hiperplano. Se considerarmos cinco destes planos vemos que, em geral, eles se interceptam em um ponto. Isto mostra que dados cinco pontos em  $\mathbb{P}^2$ , entre os quais quaisquer três não estão alinhados, existe uma única cônica passando por eles.

$$X^TAX = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sabemos também que por uma matriz de mudança de variáveis  $P$ , na forma quadrática existe uma substituição linear  $Y = PX$  que diagonaliza a matriz simétrica  $X^TAX$ , ou seja, sem perda de generalização podemos diagonalizar a forma quadrática da seguinte maneira:

$$X^TAX = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Portanto a partir do Posto podemos definir a cônica, ou seja, para o posto 1 temos:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X_0^2 = 0 \Leftrightarrow X_0 = 0, \text{ ou seja, uma}$$

reta dupla.

Para posto 2, temos:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X_0^2 + X_1^2 = 0 \Leftrightarrow (X_0 - iX_1)(X_0 +$$

$X_1) = 0$ , ou seja, união de duas retas.

e para o posto 3, ou seja, posto máximo temos:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0, \text{ ou seja, uma}$$

quádrica não-singular.

Isto é,  $\frac{\partial F}{\partial X_0} = 2X_0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial X_1} = 2X_1$ ,  $\frac{\partial F}{\partial X_2} = 2X_2$ ; tal que o ponto  $(0 : 0 : 0) \notin \mathbb{P}^2$ .

Como cônicas não-singulares podemos citar as parábolas, elipses, hipérbolas e circunferências.

**Observação 3.1.1** *O Teorema de Bézout em (2.5) afirma que duas curvas  $f, g$  no*

plano projetivo sobre o corpo  $K = \mathbb{C}$ , se intersectam em  $k.l$  pontos, contando suas multiplicidades, onde  $k$  e  $l$  são os seus respectivos graus.

Dadas duas circunferências  $f, g$  em  $\mathbb{P}^2$ , então de acordo com o Teorema de Bézout a intersecção de  $f.g = 4$  pontos.

- Caso 1: Seja  $f$  de centro  $(a, b)$  e raio  $R$ , ou seja,  $f(X_0 : X_1 : X_2) = (X_1 - aX_0)^2 + (X_2 - bX_0)^2 - R^2X_0^2$ .

Primeiro observamos que qualquer circunferência em  $\mathbb{P}^2$  passa pelos dois pontos dados por  $(0 : 1 : i)$  e  $(0 : 1 : -i)$ , ou seja, em  $X_0 = 0$  pontos ao infinito.

Para  $X_0 = 0$  em  $f$  de uma maneira geral, temos que  $f = 0$  logo  $X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow X_2 = \pm iX_1$ , logo notamos que  $f$  passa pelos pontos do tipo  $(0 : \lambda : \pm i\lambda) \sim (0 : 1 : i)$  e  $(0 : 1 : -i)$ .

Desta maneira já podemos dizer que duas circunferências quaisquer sempre se intersectam nesses pontos ao infinito. Agora falta mostrar os outros dois pontos de intersecção.

Tomamos  $g$  de centro  $(a, b)$  e raio  $2R$ , ou seja,  $g(X_0 : X_1 : X_2) = (X_1 - aX_0)^2 + (X_2 - bX_0)^2 - 4R^2X_0^2$ .

Observamos que  $R$  é não nulo, logo temos que  $f \cap g$  são os dois pontos  $(0 : 1 : i)$  e  $(0 : 1 : -i)$  com multiplicidade 2, portanto totaliza 4 pontos comuns.

- Caso 2: Seja  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  automorfismo de conjugação complexa, definida por  $\sigma(a + bi) = (a - bi)$ .

Dados  $f$  e  $g$  com coeficientes reais, existem dois pontos de intersecção  $t_1$  e  $t_2$  no plano afim além dos dois pontos ao infinito que todas as circunferências passam e visto anteriormente,  $(0 : 1 : i)$  e  $(0 : 1 : -i)$ . Tais que,  $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ , então temos que  $\sigma(t_1) = t_2$ , quando não têm todas coordenadas reais. É também que  $\sigma(t_1) \neq t_1$ . Se substituirmos  $t_1$  em  $f$  e  $g$  eles satisfaz a igualdade, bem como  $\sigma(t_1)$ .

Isto é, dados os conjugados  $t_1, t_2 \in \mathbb{A}^2$ , sobre os complexos, temos que  $t_1 = (a + bi, c + di)$  e  $t_2 = (a - bi, c - di)$ , então a reta  $r = (t_1 t_2)$  tem coeficientes reais.

Sem perda de generalidade, no plano afim  $\mathbb{A}^2$  podemos tomar a reta  $r : y = kx + l$ , tais que  $k = \frac{(c - di) - (c + di)}{(a - bi) - (a + bi)} = \frac{d}{b}$ , ou seja,  $k$  é real logo  $\sigma(k) = k$ .

E aplicando  $t_1$  em  $r$ , temos que  $l = c - \frac{da}{b}$ , visto que  $l$  é real também, e  $\sigma(l) = l$ .

Agora temos que  $\sigma(r) : y = \sigma(k)x + \sigma(l)$ , e que  $\sigma(r) = r \Leftrightarrow r \in \mathbb{R}$ . Observamos que  $t_1, t_2 \in r$  e que  $\sigma(t_1) = t_2$  e  $\sigma(t_2) = t_1$  ambos pertencem a  $\sigma(r)$ , portanto  $\sigma(r) = r$ .

Podemos afirmar agora que a reta  $r$  é sempre real, quando  $f$  e  $g$  tem coeficientes reais.

**Exemplo 3.1.1** Sejam  $f : X_1^2 + X_2^2 = X_0^2$  e  $g = (X_1 - 4X_0)^2 + X_2^2 = 4X_0^2$ , então

temos que  $f \cap g$  no plano afim,  $X_0 = 1$ , é dada pelos pontos  $t_1 = (1 : \frac{13}{8} : -i\sqrt{\frac{105}{64}})$  e  $t_2 = (1 : \frac{13}{8} : i\sqrt{\frac{105}{64}})$ . Tal que a reta  $X_1 = \frac{13}{8}$  é real.

### 3.2 Quádricas em $\mathbb{P}^3$

As quádricas em  $\mathbb{P}^3$  são análogas as cônicas, porém agora com uma variável a mais, ou seja, chamadas de superfícies da seguinte maneira:

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i \leq j}^3 a_{ij} X_i X_j = a_{00} X_0^2 + a_{01} X_0 X_1 + a_{02} X_0 X_2 + a_{03} X_0 X_3 + a_{11} X_1^2 + a_{12} X_1 X_2 + a_{13} X_1 X_3 + a_{22} X_2^2 + a_{23} X_2 X_3 + a_{33} X_3^2 = 0$$

As quádricas em  $\mathbb{P}^3$  podem ser parametrizadas por  $\mathbb{P}^9(V)$ , onde  $V$  denota o espaço vetorial das formas de grau 2 em 4 variáveis. Vemos então que uma quádrlica de  $\mathbb{P}^3$  fica determinada pela escolha de 9 pontos de  $\mathbb{P}^3$ , em posição geral. E ainda, possui um único invariante que é o seu índice.

Isto é, toda Quádrlica pode ser transformada em soma de quadrados da forma:  $X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_r^2 = 0$ , com  $0 \leq r \leq n$ . Quando  $r = n$  temos o posto máximo da matriz associada, e daí a Quádrlica é não-singular. E nos concentraremos para  $\mathbb{P}^3$ , isto é, a menos de transformações projetivas, existem exatamente quatro possibilidades:

se  $r=3$ , temos que  $f = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ , uma Quádrlica não-singular  
 se  $r=2$ , temos que  $f = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$ , o Cone  
 se  $r=1$ , temos que  $f = X_0^2 + X_1^2$ , a união de dois planos e,  
 se  $r=0$ , temos que  $f = X_0^2$  o plano duplo.

Ou seja, se  $\mathbf{Q}$  é uma Quádrlica não-singular em  $\mathbb{P}^3$ , então:

$\mathbf{Q}$  é uma superfície regrada, com duas famílias infinitas de retas;

Por cada ponto  $p$  em  $\mathbf{Q}$  passa exatamente uma reta de cada família;

Duas retas de uma mesma família são disjuntas; e

Uma reta de uma família corta em um membro qualquer da outra família em um ponto.

**Lema 3.1** *Dadas três retas disjuntas em  $\mathbb{P}^3$ , então existe uma única Quádrlica não-singular que as contém.*

**Prova 3.2.1** *Tomamos três pontos em cada reta, totalizando nove pontos. A exigência de uma quádrlica conter um ponto impõe uma condição linear em  $\mathbb{P}^9$ , que não é vazia. Existe, portanto, pelo menos uma Quádrlica que contém os três pontos de cada uma das retas e portanto contém as três retas. Pelo Teorema de Bézout, uma reta que não está contida em uma Quádrlica, a intersecta em no máximo dois pontos. Por outro lado, uma Quádrlica singular em  $\mathbb{P}^3$  não pode conter três retas disjuntas, pois essas Quádrlicas são dos tipos: Cone, União de dois planos e plano*

duplo. Portanto  $\mathbb{Q}$  é não-singular. Agora, sabemos que as três retas disjuntas em uma Quádrica são da mesma família.

Supomos que  $\mathbb{Q}_1 \neq \mathbb{Q}_2$  Quádricas que contêm as três retas disjuntas, então toda reta transversal a estas três em  $\mathbb{Q}_1$  é da mesma forma transversal em  $\mathbb{Q}_2$ , assim esta transversal corta cada uma das retas em um ponto, desta forma três pontos são comuns a  $\mathbb{Q}_1$  e  $\mathbb{Q}_2$ , e como estas quádricas são irredutíveis, por Bézout, temos que  $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ .

### Motivação:

Dadas quatro retas disjuntas em  $\mathbb{P}^3$ , temos duas possibilidades:

Ou as quatro retas estão contidas em  $\mathbb{Q}$  (Quádrica) em  $\mathbb{P}^3$  e então elas possuem infinitas retas transversais comuns;

Ou não estão contidas em nenhuma Quádrica e então possuem exatamente uma ou duas retas transversais comuns.

Sejam  $r_i, i = 1, \dots, 4$  quatro retas disjuntas, sabemos que existe uma única Quádrica não singular que contém três retas disjuntas, a saber podemos tomar  $r_1, r_2$  e  $r_3$  em  $\mathbb{Q}$ . E para  $r_4$  a reta que sobrou, ou  $r_4 \subset \mathbb{Q}$  e daí as quatro retas pertencem a mesma família por serem disjuntas e logo existe uma infinidade de retas transversais comuns as quatro retas; Ou a reta  $r_4 \not\subset \mathbb{Q}$ , e então a reta corta a Quádrica em dois pontos (que coincidem em um ponto quando  $r_4$  é tangente a  $\mathbb{Q}$ ), neste caso as retas da outra família que passam por estes pontos são as únicas duas retas transversais comuns as quatro retas dadas.

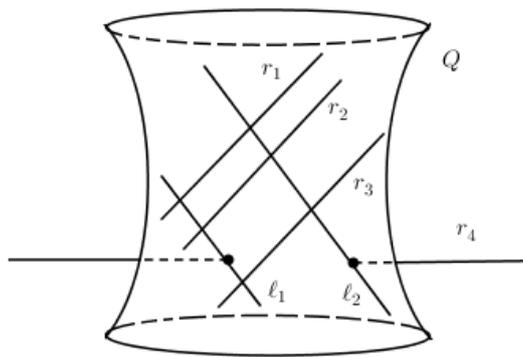


Figura 3.1: Quádrica -  $\mathbb{Q}$

# Capítulo 4

## A Grassmanniana de retas no $\mathbb{P}^3$

Sabemos que se  $X = V(f)$ ,  $X$  é dita uma hipersuperfície e seu grau é o mesmo grau de  $f$ . Logo se  $\partial f = 1$  a hipersuperfície é chamada um hiperplano. Se  $\partial f = 2$  a hipersuperfície é chamada uma quádrlica. E se  $X$  é a interseção de  $k$ -hiperplanos linearmente independentes a variedade linear é chamada um  $(n-k)$ -plano.

Considere o plano  $P = V(aX + bY + cZ + dW) \subset \mathbb{P}^3$  e a reta  $L$  de  $\mathbb{P}^3$  dada por  $L = V(a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4W, a'_1X + a'_2Y + a'_3Z + a'_4W)$ . Analisando o sistema formado por estas três equações vemos que para quaisquer valor dos coeficientes o plano intercepta a reta em um ponto, exceto quando a reta está contida no plano.

Considere agora a interseção de duas retas em  $\mathbb{P}^3$ :

$$L_1 = V(a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4W, a'_1X + a'_2Y + a'_3Z + a'_4W)$$

$$L_2 = V(b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4W, b'_1X + b'_2Y + b'_3Z + b'_4W)$$

Analisando o sistema formado pelas quatro equações acima vemos que dependendo do valor dos coeficientes existem as seguintes possibilidades:

- a única solução do sistema é a origem caso em que as retas não se interceptam.
- o sistema possui infinitas soluções e neste caso as retas se interceptam em um ponto ou são coincidentes.

A grassmanniana de retas de  $\mathbb{P}^3$  é o espaço que parametriza as retas de  $\mathbb{P}^3$ .

Como exemplo, podemos verificar que há outro método de solução para o seguinte problema: Sejam dadas 4 retas em  $\mathbb{P}^3$  em posição geral. Quantas retas de  $\mathbb{P}^3$  interceptam as 4 retas dadas?

Este problema foi abordado por Schubert no século XIX e resolvido da seguinte maneira. Espacialize as quatro retas dadas  $L_1, L_2, L_3, L_4$  de tal maneira que o primeiro par se encontre em um ponto  $P_1$  e o segundo par em um ponto  $P_2$ . Temos então duas soluções: a reta  $M$  determinada por  $P_1, P_2$  e a reta  $N$  intersecção do plano  $\alpha$  determinado por  $L_1, L_2$  e o plano  $\beta$  determinado por  $L_3, L_4$ .

No século XIX aplicava-se então o princípio da continuidade, devido a Poncelet,

dizia que quando as retas  $L_i$  fossem quaisquer o número de soluções para o problema seria o mesmo. Ainda no século XIX este tipo de solução sofreu objeções dos matemáticos da época. Daremos uma solução mais formal a este problema introduzindo o espaço de parâmetros adequado: a Grassmanniana de retas.

A Grassmanniana de retas de  $\mathbb{P}^3$  é uma generalização do espaço projetivo  $\mathbb{P}^3$ . Lembramos que  $\mathbb{P}^3$  pode ser construído considerando  $\mathbb{A}^4$  e um ponto de  $\mathbb{P}^3$  é uma reta de  $\mathbb{A}^4$  passando pela origem. No caso da grassmanniana de retas os pontos serão subespaços de dimensão dois.

**Definição 4.0.1** *Seja  $V$  um  $k$ -espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $1 \leq d \leq n - 1$ . A Grassmanniana  $G(d, n)$  é o conjunto de subespaços vetoriais de  $V$  de dimensão  $d$ .  $G(2, n + 1)$  é o conjunto de retas  $\mathbb{P}^n$ .*

Como nosso trabalho está direcionado para o  $\mathbb{P}^3$ , focaremos nossos estudos em  $G(2, 4)$  que parametriza as retas de  $\mathbb{P}^3$  de dimensão 4, já que uma reta de  $\mathbb{P}^3$  é um plano de  $\mathbb{A}^4$  passando pela origem.

**Definição 4.0.2** *A Grassmanniana de retas de  $\mathbb{P}^3$  é o conjunto dos subespaços lineares de  $\mathbb{A}^4$  de dimensão dois que passam pela origem, que será notado por  $G(2, 4)$ . Chamaremos os subespaços lineares de  $\mathbb{A}^4$  de dimensão dois de planos.*

Como  $\mathbb{P}^n$  pode ser coberto por espaços afins,  $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n \mathbb{A}^i$ , faremos algo parecido para o  $G(2, 4)$ .

Dado um plano  $\Gamma \subset \mathbb{A}^4$  podemos representá-lo por dois vetores linearmente independentes,  $u, v \in \mathbb{A}^4$ ,  $u = (a_0, a_1, a_2, a_3)$  e  $v = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ , tais que geram o plano. O plano  $\Gamma$  pode ser representado por meio a matriz destes dois vetores,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Seja  $U_{01} = \{\Gamma \subset G(2, 4) | a_0b_1 - a_1b_0 \neq 0\}$ , onde  $\Gamma$  está representado pelos dois geradores  $u$  e  $v$ . Observamos que para escolher os geradores  $u$  e  $v$  de forma que cada elemento de  $U_{01}$  possui uma única representação da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

e reciprocamente cada matriz como acima corresponde a um único plano  $\Gamma \in U_{01}$ . Assim, existe uma correspondência biunívoca entre  $U_{01}$  e  $\mathbb{A}^4$ .

Seja  $U_{ij} = \{\Gamma \in G(2, 4) | a_ib_j - a_jb_i \neq 0\}$ , para  $i \neq j$ , desta forma existem 6 tais  $U_{ij}$ , a saber  $U_{01} \cup U_{02} \cup U_{03} \cup U_{12} \cup U_{13} \cup U_{23} = G(2, 4)$

Uma das vantagens desta representação é que faz sentido falar na dimensão de  $G(2, 4)$ . Como cobrimos  $G(2, 4)$  por um número finito de  $U_{ij}$  todos de dimensão 4 podemos dizer que sua dimensão é 4. Melhor ainda, seremos capazes de identificar  $G(2, 4)$  com uma hipersuperfície em  $\mathbb{P}^5$ .

**Teorema 4.1** *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de  $G(2, 4)$  e os pontos  $(x_{01} : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23}) \subset \mathbb{P}^5$ , cujas coordenadas satisfazem a equação:  $x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0$*

**Prova 4.0.1** *Considere a aplicação,*

$$\begin{aligned} \varphi : G(2, 4) &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ \Gamma &\mapsto (x_{01} : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23}) \end{aligned}$$

*tal que os  $x_{ij}$  são os determinantes  $2 \times 2$  dos menores da matriz que representa  $\Gamma$ . E  $\varphi$  é bem definida pois  $u$  e  $v$  são vetores linearmente independentes e geram  $\Gamma$ , portanto alguns  $x_{ij} \neq 0$ .*

*A verificação que  $\varphi(\Gamma)$  satisfaz a equação  $x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0$  é simples.*

$$(a_0b_1 - b_0a_1)(a_2b_3 - b_2a_3) - (a_0b_2 - b_0a_2)(a_1b_3 - b_1a_3) + (a_0b_3 - b_0a_3)(a_1b_2 - b_1a_2) = 0$$

*Reciprocamente, suponhamos que um ponto  $P \in \mathbb{P}^5$ , tal que  $P = (x_{01} : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23})$  satisfaz a equação acima, e que  $x_{01} \neq 0$  e para os demais é idêntico.*

*Sem perda suponhamos  $x_{01} = 1$ , temos que  $x_{23} = x_{02}x_{13} - x_{03}x_{12}$  segue que o ponto  $\Gamma_0 \in G(2, 4)$  dado por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_{12} & -x_{13} \\ 0 & 1 & x_{02} & x_{03} \end{pmatrix}$$

*é tal que  $\varphi(\Gamma_0) = (1 : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23})$  como queríamos. Além disso se  $\varphi(\Gamma_1) = P$  temos que  $\Gamma_1$  é dado pela mesma base acima, logo  $\Gamma_0 = \Gamma_1$ , terminando a prova.*

Seja a reta  $r \subset \mathbb{P}^3$  que passa pelos pontos  $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$  e  $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ , então tem a equação paramétrica  $(\lambda a_0 + \mu b_0 : \lambda a_1 + \mu b_1 : \lambda a_2 + \mu b_2 : \lambda a_3 + \mu b_3)$  tal que  $(\lambda : \mu)$  são os parâmetros. Através do mergulho de Plucker podemos associar a reta  $r$  a um único ponto em  $\mathbb{P}^5$ , a partir dos cálculos dos menores.

$$\left( \begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} a_0 & a_1 & b_0 & b_1 & a_0 & a_2 & b_0 & b_2 & a_0 & a_3 & b_0 & b_3 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & a_1 & a_3 & b_1 & b_3 & a_2 & a_3 & b_2 & b_3 \end{array} \right)$$

Podemos representar o ponto por  $(x_{01} : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23})$ , que chamamos de coordenadas de Plucker. E é dada a equação de Plucker por  $x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0$  que é fácil ver que é uma variedade, ou seja, uma Quádrica -  $\mathbf{Q}$  em  $\mathbb{P}^5$ .

## 4.1 Subespaços Lineares da Grassmanniana de Retas

Como hipersuperfície de  $\mathbb{P}^5$ ,  $\mathbf{Q}$  pode conter subespaços lineares de dimensão menor, como retas e planos por exemplo.

**Proposição 4.1.1** *Sejam  $p, q \subset \mathbb{P}^3$  retas. A reta  $\lambda P + \mu Q \subset \mathbb{P}^5$  está contida em  $\mathbf{Q}$  se e somente se  $p$  e  $q$  se intersectam.*

**Prova 4.1.1** *Sem perda de generalidade podemos supor que o ponto de intersecção das retas  $p$  e  $q$  é  $(1 : 0 : 0 : 0)$ . Sejam  $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  e  $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$  respectivamente dois outros pontos das retas  $p$  e  $q$ . Podemos representar  $p$  e  $q$  respectivamente pelas seguintes matrizes:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

*é fácil ver que  $P = (1 : p_1 : p_2 : 0 : 0 : 0)$  e  $Q = (1 : q_1 : q_2 : 0 : 0 : 0)$  satisfazem a equação de Plucker, portanto  $P, Q \subset \mathbf{Q}$ , logo a combinação linear dos pontos também, ou seja,  $\lambda P + \mu Q \subset \mathbf{Q}$ .*

*Reciprocamente, suponhamos que a reta  $\lambda P + \mu Q \subset \mathbf{Q}$ . Temos que  $P = (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$  e  $Q = (q_{12} : q_{13} : q_{14} : q_{23} : q_{24} : q_{34})$ , logo podemos escrever sua forma para paramétrica:  $(\lambda p_{12} + \mu q_{12} : \lambda p_{13} + \mu q_{13} : \lambda p_{14} + \mu q_{14} : \lambda p_{23} + \mu q_{23} : \lambda p_{24} + \mu q_{24} : \lambda p_{34} + \mu q_{34})$ , agora substituindo na equação da quádrlica (ou equação de Plucker) temos:  $\lambda^2(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}) + \mu^2(q_{12}q_{34} - q_{13}q_{24} + q_{14}q_{23}) + 2\lambda\mu(p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + q_{12}p_{34} - q_{13}p_{24} + q_{14}p_{23}) = 0$ , observamos que as duas primeiras parcelas zeram, logo ficamos apenas com a última parcela que é classicamente conhecida como a equação do hiperplano tangente,  $\omega_{pq} = p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + q_{12}p_{34} - q_{13}p_{24} + q_{14}p_{23} = 0$ . Podemos concluir então que  $p$  e  $q$  se cruzam quando  $P$  e  $Q$  pertencem ao mesmo hiperplano tangente, ou seja,  $\omega_{pq} = 0$ . Mais detalhes sobre a equação da hiperplano tangente pode ser visto em [21].*

E como consequência, temos o seguinte corolário.

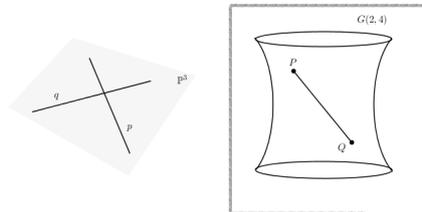


Figura 4.1: Reta  $\subset G(2, 4)$

**Corolário 4.1.1** *Dada uma reta  $L \subset \mathbf{Q}$ ,  $L$  parametriza o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  contidas em um plano e passando por um ponto. Esta configuração é conhecida como feixe (plano) de retas de  $\mathbb{P}^3$ .*

**Prova 4.1.2** *Seja  $L = \lambda P + \mu Q \subset \mathbf{Q}$  a reta. Da proposição acima sabemos que  $p$  e  $q$  se interceptam em um ponto  $p_0 \in \mathbb{P}^3$ . Sejam  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^3$  tais que  $p = \langle p_0, p_1 \rangle$  e  $q = \langle p_0, p_2 \rangle$ . Temos então que as retas determinadas por  $\langle p_0, p_1 + \lambda p_2 \rangle$  são todas as retas contidas no plano gerado por  $\langle p_0, p_1, p_2 \rangle$  que passam por  $p_0$ . Por outro lado tomando  $p_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ ,  $p_1 = (p_{11} : p_{12} : p_{13} : p_{14})$  e  $p_2 = (p_{21} : p_{22} : p_{23} : p_{24})$ , vemos facilmente que as retas  $\langle p_0, p_1 + \lambda p_2 \rangle$  correspondem aos pontos  $P + \lambda Q \subset \mathbf{Q}$ .*

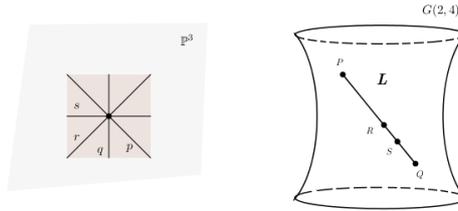


Figura 4.2: Feixe de retas em  $\mathbb{P}^3$

**Definição 4.1.1** *O conjunto de todas as retas contidas em um plano de  $\mathbb{P}^3$  é chamado de plano regrado.*

**Definição 4.1.2** *O conjunto de todas as retas de  $\mathbb{P}^3$  que passam por um mesmo ponto é chamado de estrela.*

Diremos que um subconjunto  $S \subset G(2, 4)$  é um espaço linear de retas se  $\varphi(S)$  for um sub-espaço linear de  $\mathbb{P}^5$ . Já vimos que os únicos subespaços lineares de  $\mathbb{P}^3$  de dimensão 1 são os feixes planos. Em dimensão dois temos:

**Proposição 4.1.2** *Os únicos subespaços lineares de  $\mathbb{P}^3$  de dimensão dois são os planos regrados e as estrelas. Não existem subespaços lineares de  $\mathbb{P}^3$  de dimensão maior que dois.*

**Prova 4.1.3** *Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbf{Q}$ , pontos linearmente independentes de  $\mathbb{P}^5$  tais que qualquer combinação linear  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$  também representa uma reta de  $\mathbb{P}^3$  ou seja tal que  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \in \mathbf{Q}$ . Isto significa que qualquer par de retas  $p_i, p_j$  do conjunto  $p_1, p_2, \dots, p_n$  se intersectam. Então  $p_1, p_2$  se intersectam em um ponto  $P \in \mathbb{P}^3$  e estão contidas em um plano comum  $\alpha$ . Temos duas possibilidades para  $p_3$ :*

- $p_3$  intercepta  $p_1, p_2$  em pontos  $Q, R \in \mathbb{P}^3$  distintos de  $P$ , tal que  $p_3$  está contida em  $\alpha$ .
- $p_3$  não está contida em  $\alpha$ , mas intercepta  $p_1, p_2$  no ponto  $P$ .

No primeiro caso temos que é o plano regrado, no segundo a estrela. Em qualquer caso não pode existir uma reta  $p_4$  linearmente independente com  $p_1, p_2, p_3$  e intersectando  $p_1, p_2, p_3$ .

Seja a reta  $r \subset \mathbb{P}^3$ , tal que  $R$  é o ponto correspondente da reta  $r$  em  $\mathbf{Q} \subset \mathbb{P}^5$ ,  $R = (a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{23} : a_{24} : a_{34})$  e  $T_R$  o hiperplano tangente a  $\mathbf{Q}$  em  $R$ .

A equação de  $T_R = \omega_R(x_{12} : x_{13} : x_{14} : x_{23} : x_{24} : x_{34}) = a_{12}x_{34} - a_{13}x_{24} + a_{14}x_{23} + a_{34}x_{12} - a_{24}x_{13} + a_{23}x_{14}$ .

Vemos que  $\omega_R(x_{12} : x_{13} : x_{14} : x_{23} : x_{24} : x_{34}) = 0$  para  $x_{ij} \in \mathbf{Q}$  se e somente se a reta correspondente intercepta  $r$ . Concluimos que

$$T_R \cap \mathbf{Q} \longleftrightarrow \{ \text{retas de } \mathbb{P}^3 \text{ que intersectam } r \}$$

Dadas quatro retas  $a, b, c, d \subset \mathbb{P}^3$ , nas quais não se intersectam, para resolver esse problema, corresponde a encontrar o número de pontos do conjunto:

$$\mathbf{Q} \cap T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D$$

,

Seja  $M = T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D$ , temos duas possibilidades: Se os planos tangentes são linearmente dependentes, então a  $\dim(M) = 2$ . Como a  $\dim(\mathbf{Q}) = 4$ , segue que  $M \cap \mathbf{Q}$  é um conjunto infinito.

Se por os planos tangentes são linearmente independentes, então  $\dim(M) = 1$  e temos daí duas outras possibilidades.

1.  $M \not\subset \mathbf{Q}$  e  $M \cap \mathbf{Q}$  é constituído por dois pontos coincidentes ou não.
2.  $M \subset \mathbf{Q}$  e temos uma infinidade de soluções para o problema.

O número de retas de  $\mathbb{P}^3$  que interceptam 4 retas dadas pode ser uma reta, duas retas ou infinitas retas.

Seja o plano  $\pi \subset \mathbb{P}^5$ , se  $\pi \not\subset \mathbb{G}(2, 4)$ , então  $\pi \cap \mathbb{G}(2, 4) = C$ , onde  $C$  é uma curva de grau 2.

Dadas quatro retas em  $\mathbb{P}^3$  em posição geral, existem exatamente duas retas que cortam todas as quatro.

Dada uma reta  $r \subset \mathbb{P}^3$ , sabemos que por coordenadas de Plucker, podemos representar de forma única um ponto em  $\mathbb{G}(2, 4) \subset \mathbb{P}^5$  a este ponto é definido um plano tangente  $T_r \subset \mathbb{P}^4$  e uma condição para que uma reta em  $\mathbb{P}^3$  intersecte  $r$ , é que seu ponto representante em  $\mathbb{P}^5$  esteja contido no mesmo plano tangente  $T_r \subset \mathbb{P}^4$ . Então se tomarmos quatro retas teremos quatro hiperplanos (planos tangentes), como as retas são gerais, estes quatro hiperplanos se intersectam em uma reta geral em  $\mathbb{P}^5$  tal que esta reta intersecta a Quádrica  $\mathbb{G}(2, 4)$  em dois pontos. Portanto, temos que duas retas em  $\mathbb{P}^3$  que cortam as outras quatro.

## 4.2 Condições de Schubert

**Definição 4.2.1** *Seja  $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d$  uma sequência estritamente crescente de  $(d+1)$  espaços lineares em  $\mathbb{P}^n$ . Dizemos que um  $d$ -plano  $L$  em  $\mathbb{P}^n$  satisfaz a condição*

de Schubert definida por esta sequência se  $\dim(A_i \cap L) \geq i$ , para todo  $i = 0, \dots, d$ . O conjunto de todos os  $d$ -planos  $L$  que satisfazem tal condição é um subconjunto de  $G(d; n)$  denotado por  $\Omega(A_0 \dots A_d)$ .

**Exemplo 4.2.1** Fixe uma reta  $A_0$  em  $\mathbb{P}^3$  e tome  $A_1$  como sendo o próprio  $\mathbb{P}^3$ . O subconjunto  $\Omega(A_0 A_1) \subset G(2, 4)$  é o conjunto de todas as retas  $L$  em  $\mathbb{P}^3$  satisfazendo,

$$\dim(L \cap A_0) \geq 0$$

$$\dim(L \cap A_1) \geq 1$$

$\Omega(A_0 A_1)$  representa o conjunto das retas  $L$  em  $\mathbb{P}^3$  que interceptam a reta  $A_0$ .

### 4.2.1 O Cálculo de Schubert

Na matemática mais avançada podemos afirmar que a Topologia Algébrica nos garante que a cada classe de cohomologia, isto é, cada elemento em  $H^*(G(d; n), \mathbb{Z})$ , podemos associar uma variedade algébrica em  $G(d; n)$  e vice versa.

Se duas variedades são elementos de um mesmo sistema contínuo de subvariedades, associamos às duas a mesma classe de  $H^*(G(d; n), \mathbb{Z})$ .

Os subconjuntos  $\Omega(A_0 \dots A_d)$  são subvariedades de  $G(d; n)$ , chamadas variedades de Schubert e suas classes de cohomologia são chamadas ciclos de Schubert.

Afirmamos que a classe de  $\Omega(A_0 \dots A_d)$  depende apenas dos inteiros  $a_i = \dim(A_i)$ , para  $i = 0, \dots, d$ .

Denotaremos então esse ciclo de Schubert apenas por  $\Omega(a_0 \dots a_d)$ .

Vamos enunciar agora um importante teorema do Cálculo de Schubert, que nos assegura que os ciclos de Schubert determinam completamente a cohomologia de  $G(d; n)$ .

#### **Teorema 4.2** (Teorema da base)

*Considerado aditivamente, o grupo  $H^*(G(d; n), \mathbb{Z})$  é abeliano livre e os ciclos de Schubert  $\Omega(a_0 \dots a_d)$  formam uma base.*

Por esse motivo chamaremos  $\Omega(a_0 \dots a_d)$  de ciclos da base de Schubert. Outro fato importante a respeito desses ciclos é que

$$\dim(\Omega(a_0 \dots a_d)) = \sum_{i=0}^d (a_i - i)$$

Para o nosso trabalho será abordado o assunto de maneira que o ciclo de Schubert é dado por  $\Omega(a_0 \dots a_d)$ . E para maiores detalhes sobre classe de cohomologia,  $H^*(G(d; n), \mathbb{Z})$ , indicamos as referências [11], [13].

**Exemplo 4.2.2** Consideremos a Grassmanniana  $G(2, 4)$  e vamos calcular seus ciclos de Schubert.

- $\Omega(01) = \{L \in G(2, 4), \dim(L \cap A_0) \geq 0, \dim(L \cap A_1) \geq 1\}$

Parametriza uma reta fixa  $l$  em  $\mathbb{P}^3$ . Vamos denotá-lo por  $|l|$ .

- $\Omega(02) = \{L \in G(2, 4), \dim(L \cap A_0) \geq 0, \dim(L \cap A_2) \geq 2\}$

Parametriza o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  que passam por um ponto  $P$  e estão contidas em um plano  $\pi$ . Vamos denotá-lo por  $\sigma(P, \pi)$ .

- $\Omega(03) = \{L \in G(2, 4), \dim(L \cap A_0) \geq 0, \dim(L \cap A_3) \geq 3\}$

Parametriza o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  que passam por um ponto  $P$ . Denotaremos por  $\sigma(P)$ .

- $\Omega(12) = \{L \in G(2, 4), \dim(L \cap A_1) \geq 1, \dim(L \cap A_2) \geq 2\}$

Parametriza o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  que estão contidas num plano  $\pi$ . Denotaremos por  $\sigma(\pi)$ .

- $\Omega(13) = \{L \in G(2, 4), \dim(L \cap A_1) \geq 1, \dim(L \cap A_3) \geq 3\}$

Parametriza as retas de  $\mathbb{P}^3$  que intersectam uma reta  $l$ . Vamos denotá-lo por  $\sigma(l)$ .

- $\Omega(23) = \{L \in G(2, 4), \dim(L \cap A_2) \geq 2, \dim(L \cap A_3) \geq 3\}$

Parametriza o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  que intersectam um plano  $\pi$  vamos denotá-lo por  $\sigma^\pi$ .

Note que estamos considerando a seguinte sequência de espaços lineares  $P \in l \subset \pi \subset \mathbb{P}^3$ .

Quando várias variedades se intersectam propriamente em um número finito de pontos, então o número de pontos na interseção, contados com multiplicidade, é igual ao produto das classes correspondentes. Dessa forma podemos resolver problemas enumerativos através de operações nos ciclos de Schubert. Essas operações satisfazem as seguintes propriedades:

1. A cada ciclo de Schubert  $\sigma$  podemos associar sua dimensão  $k$ , que é a dimensão de um representante qualquer  $\Omega(A_0 \dots A_d)$  do ciclo como variedade em  $G(d; n)$ .

2. Dados dois ciclos de Schubert  $\sigma$  e  $\sigma'$  de dimensão  $k$ , podemos definir o ciclo de Schubert  $\sigma + \sigma'$  como sendo o conjunto dos pontos  $P \in G(d; n)$ , tais que  $P \in \sigma \cup \sigma'$ .

3. Dados dois ciclos de Schubert  $\sigma$  e  $\sigma'$  de dimensões  $k$  e  $k'$ , respectivamente, definimos o ciclo de Schubert  $\sigma \cdot \sigma'$  como sendo o conjunto dos pontos  $P \in G(d; n)$ , tais  $P \in \sigma \cap \sigma'$ .

4. Dado um ciclo de Schubert  $\sigma$  e um inteiro positivo  $n$ , definimos

$$n\sigma = \sigma + \dots + \sigma \text{ (nvezes)}$$

$$\sigma^n = \sigma \cdot \dots \cdot \sigma \text{ (nvezes)}$$

Além disso, vale a lei distributiva  $\sigma(\sigma' + \sigma'') = \sigma\sigma' + \sigma\sigma''$ . Se  $\sigma = \sigma' + \sigma''$ , dizemos também que  $\sigma' = \sigma - \sigma''$ .

Vejamos algumas relações entre os ciclos de Schubert de  $G(2, 4)$ .

- $\sigma(P)^2 = |l|$ .

Dados dois pontos  $P$  e  $P'$  em  $\mathbb{P}^3$ , existe apenas uma reta  $l$  passando por  $P$  e  $P'$ .

- $\sigma(\pi)^2 = |l|$ .

Dados dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  em posição geral, contidos em  $\mathbb{P}^3$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  se intersectam ao longo de uma reta  $l$ . Portanto  $l$  é a única reta que está contida em  $\alpha$  e  $\beta$ .

- $\sigma(l)\sigma(\pi) = \sigma(P, \pi)$ .

Uma reta  $\lambda$  que satisfaz a condição  $\sigma(l)\sigma(\pi)$ , intersecta a reta  $l$  e está contida em um plano  $\pi$ . Como podemos tomar  $l$  e  $\pi$  em posição geral,  $l \cap \pi$  é um ponto  $P$ . Portanto  $\lambda$  pertence ao plano  $\pi$  e passa por  $P$ , mas isso é exatamente o que diz a condição  $\sigma(P, \pi)$ .

- Fórmula de Redução:  $\sigma(l)^2 = \sigma(P) + \sigma(\pi)$ .

Uma reta  $\lambda$ , que satisfaz a condição  $\sigma(l)^2$ , intersecta duas retas  $l$  e  $l'$  distintas em  $\mathbb{P}^3$ . Como não faz diferença a escolha do representante de cada ciclo de Schubert, podemos escolher as retas  $l$  e  $l'$  se intersectando em um ponto  $P$ , sem que isso altere o resultado. Desse modo, ou  $\lambda$  passa por  $P$ , ou  $\lambda$  está contida no plano gerado por  $l$  e  $l'$ . Mas isso é exatamente o que diz a condição  $\sigma(P) + \sigma(\pi)$ .

A partir dessas relações podemos resolver o seguinte problema enumerativo:

Quantas retas interceptam quatro retas de  $\mathbb{P}^3$  em posição geral?

$$\sigma(l)^4 = (\sigma(l)^2)^2 = (\sigma(P) + \sigma(\pi))^2 = \sigma(P)^2 + 2\sigma(P)\sigma(\pi) + \sigma(\pi)^2 = |l| + 0 + |l| = 2|l|$$

.

$\sigma(P)\sigma(\pi) = 0$ , pois podemos tomar  $P$  e  $\pi$  em posição geral, assim  $P \notin \pi$ . Portanto não existe nenhuma reta que passa por  $P$  e está contida em  $\pi$ . Portanto o cálculo de Schubert nos dá que duas retas interceptam quatro retas em posição geral em  $\mathbb{P}^3$ .

Podemos fazer uma outra abordagem, utilizando outra notação.

Há quatro tipos de subconjuntos notáveis em  $G(2, 4)$ :

- 1) Todas as retas que cruzam a reta fixa, de  $\dim = 3$ .
- 2)  $\alpha$  - planos: todas as retas que passa por um ponto  $P$ ,  $\dim = 2$ .
- 3)  $\beta$  - planos: Retas contidas em um plano fixo,  $\dim = 2$ .
- 4) retas no plano fixo que contêm ponto  $P$  fixo,  $\dim = 1$ .

Os subconjuntos  $S(a_0 : \dots : a_d)$  são subvariedades de  $G(d; n)$ , chamadas variedades de Schubert e suas classes de cohomologia são chamadas de ciclos de Schubert.

os ciclos em  $\mathbb{G}(2, 4)$  são definidos como:

$S_r$  - parametriza uma reta fixa  $r \subset \mathbb{P}^3$

$S_p$  - parametriza  $\mathbb{G}(2, 4)$  que passam por um ponto  $p$ ;

$S_\pi$  - parametriza  $\mathbb{G}(2, 4)$  que estão contidas em um plano  $\pi$

$S_{p,\pi}$  - parametriza  $\mathbb{G}(2, 4)$  que por um ponto  $P$  e estão contidas em um plano  $\pi$

Conjunto de subvariedades de  $\mathbb{G}(2, 4)$  até equivalência forma um anel, chamamos de Anel de Chow. Pelo teorema da base de  $Ch(\mathbb{G}(2, 4))$  temos a seguinte base:

$$1, S_3, S_{2,0}, S_{2,1}, S_1, S_0$$

Observamos que:

$S_3$  - reta fixa, de  $\dim = 3$

$S_{2,0}$  -  $\alpha$  - plano

$S_{2,1}$  -  $\beta$  - plano

$S_1$  - retas no plano fixo que contêm ponto  $P$  fixo,  $\dim = 1$

$S_0$  - Ponto

Dadas quatro retas em  $\mathbb{P}^3$  m posição geral, existem exatamente duas retas que cortam todas quatro.

Aplicando os ciclos de Schubert, temos a seguinte relação:

$$(S_3)^2 = S_{2,0} + S_{2,1}$$

$$(S_{2,1}) = S_0$$

$$(S_{2,0}) = S_0$$

$$S_{2,1} \cdot S_{2,0} = 0$$

Como são quatro retas, temos que:

$$(S_3)^4 = ((S_3)^2)^2 = (S_{2,1} + S_{2,0})^2 = (S_{2,1})^2 + 2 \cdot S_{2,1} \cdot S_{2,0} + (S_{2,0})^2 = S_0 + S_0 = 2 \cdot S_0$$

Portanto temos dois pontos de intersecções em  $\mathbb{G}(2, 4)$ , então temos duas retas que intersectam as quatro em  $\mathbb{P}^3$ .

# Capítulo 5

## Blowup - Inchamento

O Blowup, ou explosão ou inchamento é um tipo de transformação geométrica que substitui um subespaço de um espaço por todas as direções apontando para fora daquele subespaço.

Por exemplo, a explosão de um ponto em um plano substitui o ponto pelo espaço tangente projetivizado naquele ponto.

Inchamentos são as transformações mais importantes em geometria birracional, porque todo morfismo birracional entre variedades projetivas é uma explosão. O teorema da fatoração fraca diz que a toda aplicação birracional pode ser considerada como uma composição de explosões particularmente simples.

Também é uma importante forma de construção de novos espaços. Por exemplo, a maioria dos procedimentos para a resolução de singularidades consiste na aplicação de vários inchamentos seguidos na singularidade, até que estas se tornem suaves.

Uma consequência disso é que blowups podem ser usados para resolver as singularidades de aplicações birracionais.

A geometria algébrica contemporânea trata a explosão como uma operação intrínseca em uma variedade algébrica. Desta perspectiva, uma explosão é a maneira universal (no sentido da teoria das categorias) de transformar uma subvariedade em um divisor de Cartier.

**Exemplo 5.0.1** *Vamos verificar o Blowup de  $\mathbb{A}^n$  no ponto  $P = (0, \dots, 0)$ , observamos que podemos inchar não só um ponto, mas um subconjunto fechado.*

*Vamos definir uma variedade quase-projetiva  $X$  e um morfismo  $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ .*

*Seja  $E = \pi^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ , tal que  $E$  é naturalmente isomorfo a todas as direções tangentes em  $P$ , ou seja, substitui  $P$  por todas as direções tangentes em  $P$ .*

*Fora do ponto  $P$ , temos um isomorfismo do tipo:  $\pi|_{X/E} : X/E \rightarrow \mathbb{A}^n / \{P\}$ .*

*Verificamos também que  $\mathbb{P}^{n-1}$  é a variedade projetiva que parametriza toda as reta de  $\mathbb{A}^n$  que passam pela origem.*

$$E = \pi^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^{n-1} \longleftrightarrow \{\text{Retas de } \mathbb{A}^n \text{ por } P\}.$$

Definimos um fechado  $X = Z(x_i y_j - x_j y_i) \subset \mathbb{A}_{(x_1, \dots, x_n)}^n \times \mathbb{P}_{y_1, \dots, y_n}^{n-1}$

$$\pi_1 : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathbb{A}^n$$

$$\pi = \pi_1|_X : X \rightarrow \mathbb{A}^n.$$

Se  $Q \in \mathbb{A}^n$ ,  $\pi^{-1}(Q) = \{((a_1, \dots, a_n)(a_1 : \dots : a_n))\}$

$$\pi^{-1} : \mathbb{A}^n / \{0\} \rightarrow X/E \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_1, \dots, x_n)(x_1 : \dots : x_n))$$

$$E = \pi^{-1}(P) = \{P\} \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

Notação:  $X = Bl_P \mathbb{A}^n$  é Inchamento ou Blowup de  $\mathbb{A}^n$  no ponto  $P$ , tal que  $X \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ .

Os abertos são da forma  $X_i = X \cap Y_i$ , por exemplo temos para  $X_1 = X \cap Y_1 \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n-1}$ .

$$(x_1, \dots, x_n)(z_2, \dots, z_n); z_i = \frac{y_i}{y_1}$$

$$X_1 = Z(x_i - x_1 z_i) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n-1}$$

$$x_i = x_1 z_i; X_1 \cong \mathbb{A}^n$$

$$(x_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$Bl_P \mathbb{A}^n = \bigcup X_i, i = 1, \dots, m. X_i \cong \mathbb{A}^n.$$

$$\pi|_{X_i} : X_i \rightarrow \mathbb{A}^n$$

$$(x_i z_1, \dots, x_i, \dots, x_i z_n)$$

**Exemplo 5.0.2** Seja  $P \in C \subset \mathbb{A}^2$ ,  $P = (0, 0)$ , tal que  $C$  é um fechado. Logo o  $X = Bl_P \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ ,  $(x, y) \times (t : s)$ .

Também chamado de curva Excepcional, temos que  $E = \pi^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^1$ .

Temos que  $X = Z(xs - yt)$

Dado um fechado  $C \subset \mathbb{A}^2$ , definimos a transformada estrita de  $C$  por:

$$\overline{(\pi|_{X/E})^{-1}(C/\{P\})} = \tilde{C} \subset X.$$

$$E = \pi^{-1}(P) = \{P\} \times \mathbb{P}^1.$$

**Exemplo 5.0.3** E podemos falar ainda sobre  $\tilde{C} \cap E$ .

Se  $C$  é uma reta por  $P$ , tal como  $C = Z(ax + by)$

$$\begin{aligned}
& (\pi|_{X/E})^{-1} : \mathbb{A}^2/Z(X) \rightarrow \mathbb{A}^2 \\
& (x, y) \mapsto (x, \frac{y}{x}) \\
& \text{Cartas: } X_1 = X \cap t, t \neq 0 \text{ e } X_2 = X \cap s, s \neq 0. \\
& X = X_1 \cup X_2 \\
& X_1 \cong \mathbb{A}^2_{(x, y')} \supset E = Z(x) \\
& \pi_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}^2 \\
& (x, y') \mapsto (x, xy') \\
& C = Z(ax + by) \subset \mathbb{A}^2, b \neq 0 \\
& (\pi|_{X/E})^{-1}(C) = Z(ax - bxy') \subset X_1 \\
& Z(ax - bxy') = Z(x) \cup Z(a - by') \text{ tal que } \tilde{C} = Z(a - by') \\
& \tilde{C} \cap E \leftrightarrow (1 : \frac{a}{b}) = (b : a).
\end{aligned}$$

Uma descrição equivalente de Explosão ou Blowup.

Considere a projeção do ponto  $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ , temos que  $\pi_P : \mathbb{A}^n/\{P\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$

$\Gamma :=$  Gráfico de  $\pi_P$  em  $\mathbb{A}^n/\{P\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$

$Bl_P \mathbb{A}^n \cong \bar{\Gamma} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ , tal que  $\bar{\Gamma}$  é o fecho.

Daqui em diante faremos inchamentos utilizando os ciclos e o Anel de Chow, e para isso daremos uma breve definição destes.

Em matemática, a teoria da intersecção é um ramo da geometria algébrica, onde as subvariedades são interceptadas em uma variedade algébrica.

## 5.1 Teoria de intersecção

A teoria de intersecção é um ramo da geometria algébrica onde variedades são intersectadas em uma variedade algébrica. Nossa intenção nesse tópico é de dar um suporte para o entendimento para o anel de intersecções, isto é, o Anel de Chow, e que de forma alguma temos a pretensão de detalhar tal teoria, tão rica e importante. Para melhor aprofundamento da teoria, sugerimos [6]

Seja  $X$  uma variedade não singular, o  $k$ -ciclos em  $X$  é o grupo abeliano livre, gerado pelas subvariedades projetivas de  $X$ . Isto é,  $Y \subset X$  subvariedade projetiva, defini um  $k$ -ciclos em  $X$  como um soma finita  $\sum k_i Y_i$ , onde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , e cada  $Y_i$  é uma subvariedade de dimensão  $k$ .

Seja  $X$  variedade não singular de dimensão  $n$ , enquanto  $Y, Z \subset X$  são subvariedades de codimensões  $i$  e  $j$  respectivamente. Se  $Y$  e  $Z$  se intersectam transversalmente,

então  $Y \cap Z$  é uma subvariedade não singular de codimensão  $i + j$  que é denotada por  $Y.Z$ . No caso geral o par  $(Y, Z)$  constitui um ciclo algébrico de codimensão  $i + j$ .

A ideia em geral, é substituir os ciclos  $Y$  e  $Z$  por ciclos  $Y'$  e  $Z'$  que são equivalentes em algum sentido, mas que estão em posição geral, e então um leva ao outro a intersecção de  $Y'$  e  $Z'$ , e claro que  $Y'.Z'$  também é definido como equivalência.

Em essência, o grau de um ciclo é o número de pontos em seu componente de dimensão zero.

A composição da multiplicação com o grau permite medir uma intersecção numericamente.

O grau de uma variedade projetiva  $X \subset \mathbb{P}^n$  de dimensão  $k$  é definido como o índice de intersecção de  $X$  com um subespaço linear  $\mathbb{P}^{n-k}$  de dimensão complementar; Se as variedades  $X$  e  $Y$  se cruzam transversalmente, então o grau de  $X \cap Y$  é o produto dos graus de  $X$  e  $Y$ .

### Anel de Chow

O Anel de Chow, também chamado de anel das intersecções, é o conjunto de ciclos algébricos módulo equivalência racional.

Seja  $X$  um hipersuperfície, Logo temos que  $CH(X) =$  Classe de  $X$  mesma  $\oplus$  Classe das Curvas  $\oplus$  Classe dos pontos  $= CH_2(X) \oplus CH_1(X) \oplus CH_0(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}$ , isto é,  $CH_1(X) = \mathbb{Z}^k$  é não trivial. E o valor de  $k$  é o que precisamos descobrir.

O anel de Chow de  $\mathbb{P}^n$  é dado por:  $CH(\mathbb{P}^n) = \{d_0, d_1H, d_2H^2, \dots, d_nH^n\}$ , tal que  $d_i$  é o grau dos subespaços de codim  $i$ .

$H^i$  é a classe de subespaços de codim  $i$ .

$H^n$  é um ponto

$H^{n+1} = 0$

$H$  é a classe do hiperplano.

Além disso, qualquer subvariedade  $Y$  de grau  $a$  e codimensão  $r$  no espaço projetivo é racionalmente equivalente a  $aH^r$ ,  $Y \sim aH^r$ .

Segue-se que, para qualquer duas variedades  $Y$  e  $Z$  de dimensão complementar em  $\mathbb{P}^n$  e graus  $a$  e  $b$  respectivamente, seu produto no Anel de Chow é dado por  $[Y].[Z] = abH^n$ .

**Exemplo 5.1.1** *O Anel de Chow do Plano Projetivo, é dado por  $CH(\mathbb{P}^2) = \{1, d_1H, d_2H^2\}$ , tal que  $H^3 = 0$  e  $H^2$  é um ponto.*

**Exemplo 5.1.2** *O Anel de Chow do Espaço Projetivo de dimensão 3, é dado por  $CH(\mathbb{P}^3) = \{1, d_1H, d_2H^2, d_3H^3\}$ , tal que  $H^4 = 0$  e  $H^3$  é um ponto.*

*E ainda temos,  $H^2$  é a classe das retas.*

### O Anel de Chow do produto de Espaços Projetivos.

O Anel de Chow do produto de Espaços Projetivos, é dado por:  $CH(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ .

E é verificado o produto de acordo com o mergulho de Segre.

$$s : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$$

$$(x_0 : \dots : x_n) \times (y_0 : \dots : y_m) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : \dots : x_0y_m : x_1y_0 : \dots : x_1y_m : \dots : x_ny_0 : \dots : x_ny_m)$$

Tal que, as classes são da forma  $H_1 \subset \mathbb{P}^n$ , um Hiperplano, e  $H_2 \subset \mathbb{P}^m$ , outro Hiperplano.

Na Codim 1, temos que  $\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$ , tal que  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ : Efetivo. E que não efetivo é quando  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Na Codim 2, temos que  $\lambda_1 H_1^2 + \lambda_2 H_1 H_2 + \lambda_3 H_2^2$ , tal que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ , Efetivo. E que não efetivo é  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

E melhor verificado de acordo com a figura abaixo:

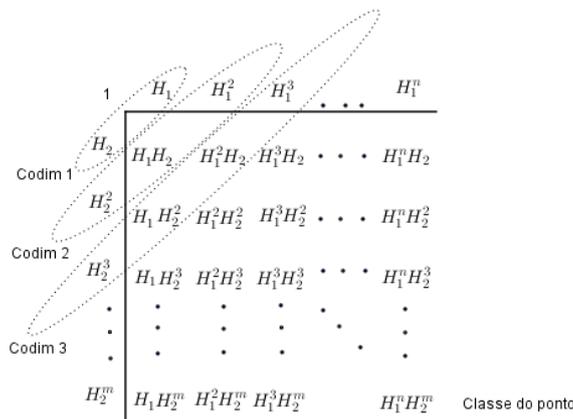


Figura 5.1:  $CH(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$

**Exemplo 5.1.3** O Anel de Chow de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , uma quádrlica regradada em  $\mathbb{P}^3$ , é dado por:

$$CH(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \{1, d_1 H_1, d_2 H_2, d_3 H_1 H_2\}.$$

Tal que,  $H_1 H_2$  é um ponto.

Observamos que  $H_1^2 = 0$ , pois é classe das retas e as mesmas não se cruzam, pois pertencem a mesma família. E da mesma forma segue para  $H_2^2 = 0$ .

Se  $Y \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , uma curva de bigrau  $(d_1, d_2)$ , tal que  $y \sim d_1 H_1 + d_2 H_2$ .

**Exemplo 5.1.4** O Anel de Chow de  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^5$ , é dado por:

$$CH(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) = \{1, H_1, H_2, H_1^2, H_1 H_2, H_1^2 H_2\}.$$

Tal que,  $H_1$ , Hiperplano em  $\mathbb{P}^2$ , e  $H_2$ , Hiperplano  $\mathbb{P}^1$ .

Temos que  $H_1^2 H_2$  é um ponto.

$$H_1^3 = H_2^2 = 0.$$

Na Codim 1 temos  $\{H_1, H_2\}$  e na Codim 2 temos  $\{H_1^2, H_1 H_2\}$ .

### Grau da Variedade, via produto de Espaços Projetivos.

Seja a variedade projetiva  $X$ , definida como  $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ , tomamos  $H_1$  em  $\mathbb{P}^m$  e  $H_2$  em  $\mathbb{P}^n$ , tal que  $H_g$  em  $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ . Sabemos que a dimensão de  $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  é  $m+n$ , portanto temos que o Grau =  $(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cap \mathbb{P}^{\text{Complementar}}$

O espaço  $\mathbb{P}^{\text{Complementar}} = H_{g1} \cap H_{g2} \cap \dots \cap H_{g(m+n)}$ , logo  $(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cap \mathbb{P}^{\text{Complementar}} = [(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cap H_{g1}] \cap [(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cap H_{g2}] \cap \dots \cap [(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cap H_{g(m+n)}]$ .

A subvariedade de codimensão 1 em  $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  é dado por  $[(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cap H_{g1}]$ .

A classe de  $(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cap H_g = d_1 H_1 + d_2 H_2$ , verificamos que  $(x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_m y_n)$ , e  $H_g : \alpha_{00} x_0 y_0 + \alpha_{01} x_0 y_1 + \dots + \alpha_{mn} x_m y_n = 0$

Temos que  $X \cap H_g = H_1 + H_2$ , portanto o Grau =  $(X \cap H_g)^{m+n} = (H_1 + H_2)^{m+n}$ .

**Exemplo 5.1.5** Verificaremos o grau da variedade  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

Temos que  $CH(X) = 1, H_1, H_2, H_1 H_2$ . Portanto o grau é dado por:

$(H_1 + H_2)^2 = H_1^2 + 2H_1 H_2 + H_2^2 = 2$ , pois  $H_1^2 = H_2^2 = 0$ , e  $H_1 H_2$  é a classe do ponto.

**Exemplo 5.1.6** Verifiaremos o grau da variedade  $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ .

Sabemos que o  $CH(X) = 1, H_1, H_2, H_1^2, H_1 H_2, H_1^2 H_2$ . Portanto o grau de  $X$  é dado por:  $(H_1 + H_2)^2 = H_1^3 + 3H_1^2 H_2 + 3H_1 H_2^2 + H_2^3 = 3$ , pois  $H_1^3 = 3H_1 H_2^2 = H_2^3 = 0$  e  $H_1^2 H_2$  é a classe do ponto.

No caso geral, podemos então associar da seguinte forma:

$(H_1 + H_2)^{m+n} = \binom{m+n}{n} H_1^m H_2^n$ , deste desenvolvimento tem um único termo distinto de zero, e o coeficiente será o grau.

### Auto-intersecção

Dado uma subvariedade  $Y$ , podemos definir a auto intersecção da única subvariedade.

Dado, por exemplo, uma curva  $C$  em uma superfície  $S$ , sua intersecção com ela mesma é apenas:  $C \cap C = C$ . Isso é claramente correto, mas, por outro lado, insatisfatório. Devido a duas curvas distintas em uma superfície (sem componente em comum), elas se cruzam em algum conjunto de pontos, que, por exemplo, pode contar, obtendo um número de intersecção e podemos fazer o mesmo para uma determinada curva: a analogia é que as curvas distintas que se cruzam são como

multiplicar dois números  $xy$ , enquanto que a auto-intersecção é como enquadrar um único número:  $x^2$ .

Uma solução geométrica para isso é cruzar a curva  $C$  não consigo mesmo, mas com uma versão ligeiramente empurrada de si mesma. No plano, isso significa apenas transladar a curva  $C$  em alguma direção, mas, em geral, fala-se em tomar uma curva  $C'$  que é linearmente equivalente a  $C$ , e contando a intersecção  $C.C'$ , obtendo assim um número de intersecção, denotado  $C.C$ . Note que, ao contrário das curvas distintas  $C$  e  $D$ , os pontos reais de intersecção não são definidos, porque dependem de uma escolha de  $C'$ , mas os pontos de intersecção automática de  $C$  podem ser interpretados como  $k$  pontos genéricos em  $C$ , onde  $K = C.C$ . Mais apropriadamente, os pontos de auto-intersecção de  $C$  é o ponto genérico de  $C$ , tomado com a multiplicidade  $C.C$ .

**Exemplo 5.1.7** *Considere uma reta  $\ell \subset \mathbb{P}^2$ , ela tem auto-intersecção  $\ell^2 = 1$ , uma vez que todas as outras retas cruzam uma vez.*

*Podemos mover  $\ell$  para  $\ell'$  e  $\ell.\ell' = 1$  para qualquer escolha de  $\ell'$ . Portanto,  $\ell.\ell = 1$ . Em termos de formas de intersecção, dizemos que o plano projetivo tem um do tipo  $x^2$ , isto é, há apenas uma classe de retas, e todas elas se cruzam entre si.*

**Exemplo 5.1.8** *Uma reta  $\ell \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , tal que  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  também pode ser interpretada como a quádrlica  $Q$  não singular em  $\mathbb{P}^3$ , tem auto-intersecção  $\ell^2 = 0$ , uma vez que uma reta pode ser deslocada e pertencer a mesma família, ou seja, sem intersecção. Em termos de formas de intersecção, dizemos que  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  tem um tipo  $xy$ , pois existem duas classes de retas que se cruzam em um ponto  $xy$ , mas têm zero auto-intersecção.*

**Observação 5.1.1** *Importante propriedade é que a curva excepcional, denotado por  $E$  de um inchamento, tem como seu número de auto-intersecção  $E^2 = -1$ .*

**Exemplo 5.1.9** *Queremos inchar um ponto em  $\mathbb{P}^2$ , sem perda podemos tomar o ponto  $P = (1 : 0 : 0)$  e sabemos que o inchaço de  $\mathbb{P}^2$  é  $X = \mathbb{P}'^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ , temos uma equação do tipo  $x_1y_2 = x_2y_1$ , ou seja, é não singular e sabemos via mergulho de Segre que  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ .*

*Temos que  $G : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$*

*$(x_0 : x_1 : x_2) \times (y_1 : y_2) \mapsto (x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_1 : x_2y_2)$ , tal que podemos definir  $z_0 = x_0y_1, z_1 = x_0y_2, \dots, z_5 = x_2y_2$ .*

*$z_0z_5 = z_1z_4; z_2z_5 = z_3z_4; z_0z_3 = z_1z_2$  são três equações de grau 2 cada.*

*$\mathbb{P}'^2 = G(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) \cap \{z_3 = z_4\}$ , tal que  $z_3 = z_4$  é um hiperplano em  $\mathbb{P}^5$ .*

*Temos também que  $\mathbb{P}'^2 \subset \mathbb{P}^4$ , pois existem 3 equações de grau 2 cada. A saber,  $z_0z_5 = z_1z_3; z_2z_5 = z_3^2; z_0z_3 = z_1z_2$ . das quais duas equações são iguais a  $\mathbb{P}'^2 \cup \text{Plano}$ .*

*Seja  $\varphi : \mathbb{P}'^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ , tal que  $r \subset \mathbb{P}'^2$ , e  $\varphi(r) = P$ , isto é,  $\varphi : (\mathbb{P}'^2 - r) \rightarrow (\mathbb{P}^2 - P)$ , é um isomorfismo.*

$$\varphi'(P) = \varphi(1 : 0 : 0) = r = \{P\} \cup \mathbb{P}^1.$$

Seja  $\ell_1 \subset \mathbb{P}^2$ , definida por  $\ell_1 = c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ , tal que  $P \in \ell_1$ , com  $c_0 = 0$ . A equação paramétrica de  $\ell_1$  é  $x_0 = 1; x_1 = \mu c_2; x_2 = -\mu c_1$ .

Se  $\mu \neq 0$ , temos que  $(1 : \mu c_2 : -\mu c_1) \neq P$ . Sua pré imagem é dada por:

$$\begin{cases} (1 : \mu c_2 : -\mu c_1) \\ (\mu c_2 : -\mu c_1) \end{cases} \in \mathbb{P}'^2$$

$$\begin{cases} (1 : \mu c_2 : -\mu c_1) \\ (c_2 : -c_1) \end{cases} \in \ell'_1 \subset \mathbb{P}'^2$$

E para  $\mu = 0$ , temos que  $\ell'_1 \cap r$ .

$$\begin{cases} (1 : 0 : 0) \\ (c_2 : -c_1) \end{cases} \in r$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \varphi'(P) &= r, \\ \varphi'(\ell_1) &= \ell'_1 \\ \varphi'(\ell_2) &= \ell'_2 \\ \varphi'(\ell_3) &= \ell'_3 \end{aligned}$$

O Anel de Chow  $\mathbb{P}^2$ , dado por  $CH(\mathbb{P}^2) = \{1, d_1H, d_2H^2\}$ , tal que  $H$  classe das retas, que podemos identificar como simplesmente por  $\ell$ .

Sabemos que  $\ell_1.\ell_2 = 1$ , portanto verificamos que as classes equivalentes devem ser,  $\varphi'(\ell_1).\varphi'(\ell_2) = (r + \ell'_1)(r + \ell'_2) = r^2 + r\ell'_1 + r\ell'_2 + \ell'_1.\ell'_2 = -1 + 1 + 1 + 0 = 1$ .

Então podemos afirmar que o Anel de Chow  $\mathbb{P}'^2$  é gerado por  $\{1, r, \ell_1, \text{Ponto}\}$ , ou seja,  $CH(\mathbb{P}'^2) = \{1, r, \ell_1, \text{Ponto}\}$ .

Tomamos um reta  $h \subset \mathbb{P}^2$ , que não passe pelo ponto  $P$ , portanto temos  $\varphi'(h) = h'$ , sendo que  $h' = r + \ell'_1$ .

E ainda,  $h'.h' = 1$ , logo  $(r + \ell'_1)^2 = 1$ , então  $r^2 + 2r\ell'_1 + \ell'^2_1 = 1 \Rightarrow r^2 + 2.1 + 0 = 1 \Rightarrow r^2 = -1$ , confirmando assim que  $r$  é não deformável e é uma curva excepcional de um inchamento.

Concluimos que se inchamos pontos em  $\mathbb{P}^2$ , temos retas em  $\mathbb{P}'^2$ .

Segue uma tentativa do esboço do que está acontecendo, via a figura 5.2.

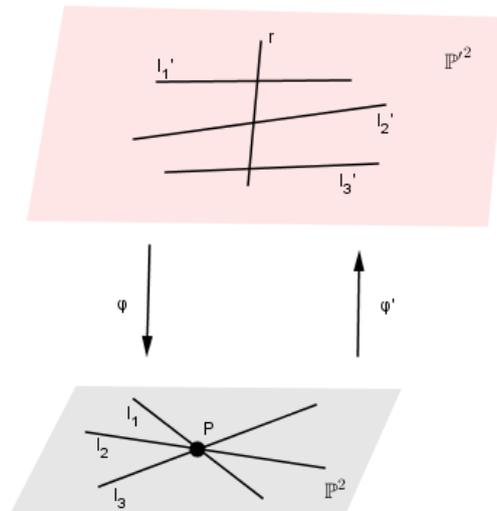


Figura 5.2:  $\mathbb{P}^2$  inchado em um ponto.

**Exemplo 5.1.10** Definimos a transformação quadrática stander, de  $\varphi : \mathbb{P}^2/\{P_0, P_1, P_2\} \rightarrow \mathbb{P}^2/\{P_0, P_1, P_2\}$  como sendo  $\varphi(z : x : y) = (\frac{1}{z} : \frac{1}{x} : \frac{1}{y}) \sim (xy : zy : zx)$ , porém observamos que os pontos  $P_0 = (1 : 0 : 0)$ ,  $P_1 = (0 : 1 : 0)$  e  $P_2 = (0 : 0 : 1)$ , não tem imagem definida e os mesmos são chamados de pontos fundamentais. As retas  $r_{01} = P_0P_1 = y = 0 \rightarrow (0 : 0 : 1)$ ,  $r_{02} = P_0P_2 = x \rightarrow (0 : 1 : 0)$  e  $r_{12} = P_1P_2 = z = 0 \rightarrow (1 : 0 : 0)$ , são chamadas de retas fundamentais. Sabemos que a transformação é um isomorfismo em seu domínio definido, e que  $\varphi^2 = Id$ .

Para inchar os 3 pontos fundamentais e bem como as retas fundamentais, temos que fazer de acordo com o seguinte diagrama abaixo:

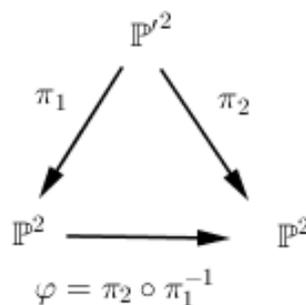


Figura 5.3: Diagrama de Inchaço de 3 pontos via transformação quadrática

De tal forma que a  $\varphi$  fora dos pontos e retas fundamentais é um isomorfismo.

$$\varphi(P_i) = \pi_2(\pi_1^{-1}(P_i)) = \pi_2(r_i), \text{ para } i = 0, 1, 2.$$

Segue uma tentativa de desenho do inchamento de  $\varphi$  como sequência de inchaços,

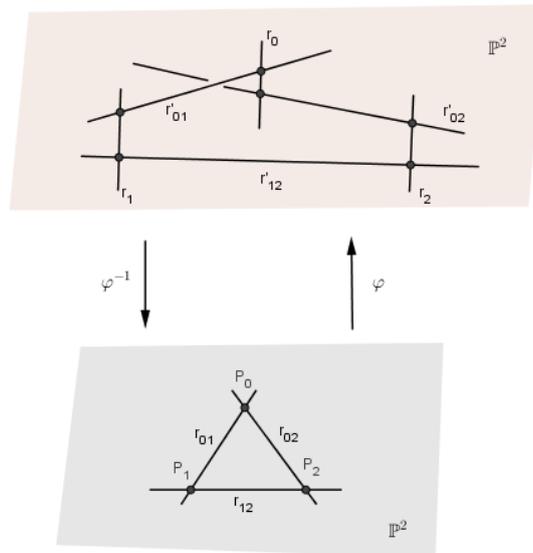


Figura 5.4: Inchaço de 3 pontos via transformação quadrática

conforme a figura 5.3.

**Exemplo 5.1.11** A aplicação inversa circular pode ser vista da seguinte forma:

A inversão em relação a uma circunferência  $C(O, r)$ , de centro  $O$  e raio  $r$ , é a transformação do plano sem o ponto  $O$ , em si mesmo que leva um ponto  $t$  em  $i(t)$ .

Seja uma circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$ .

Dado um ponto  $i(t)$  no exterior de  $C$  tracemos, a sua tangente passando por  $i(t)$ . Logo temos o ponto  $T_g$ . Tracemos o segmento perpendicular em relação a reta que liga  $Oi(t)$  a partir de  $T_g$ ; ele corta a reta num ponto  $t$ .

Se  $i(t)$  pertence à  $C$ , consideremos  $t = i(t)$ .

Observe que se  $t \neq O, (t)' = t$  e, portanto, a inversão é uma aplicação bijetiva do plano sem a origem nele mesmo.

A inversão em relação à circunferência  $C$  é a transformação, do plano sem o centro  $O$ , que leva cada ponto  $t \neq 0$  num ponto  $i(t)$  da semi-reta  $Ot$  tal que  $|Ot||Oi(t)| = r^2$ .

Observamos que  $i(C) = C'$ , isto é, a inversão de um circunferência é outra circunferência. E que  $i(\ell) = C'$ , isto é, a inversão de um reta que não está em  $C$ , é uma circunferência que passa através da origem.

Seja uma circunferência  $C$  unitária, onde  $t = (x, y)$ , logo  $i(t) = (\lambda x, \lambda y)$ , temos que:

$$|Ot||Oi(t)| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \lambda \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{x^2 + y^2}. \text{ Portanto } i(t) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

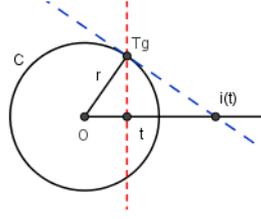


Figura 5.5: Inversa

Homogeneizando, temos que  $t = (z : x : y) = (1 : \frac{x}{z} : \frac{y}{z})$ , logo temos  $i(t) = (1 : \frac{x/z}{x^2/z^2 + y^2/z^2} : \frac{y/z}{x^2/z^2 + y^2/z^2}) = (1 : \frac{xz}{x^2 + y^2} : \frac{yz}{x^2 + y^2}) = (x^2 + y^2 : xz : yz)$ .

Se  $z \neq 0$ , então temos que  $t_0 = (1 : 0 : 0)$ , origem.

Se  $z = 0$ , então temos que  $t_1 = (0 : 1 : i); t_2 = (0 : 1 : -i)$

Agora devemos encontrar as retas  $\ell_{01}; \ell_{02}; \ell_{12}$ .

$$\ell_{01} = (\lambda : \mu : i\mu) \longrightarrow i(\ell_{01}) = (\mu^2 + i^2\mu^2 : \lambda\mu : i\mu\lambda) = (0 : 1 : i) = t_1.$$

$$\ell_{02} = (\lambda : \mu : -i\mu) \longrightarrow i(\ell_{02}) = (\mu^2 + (-i^2\mu^2) : \lambda\mu : -i\mu\lambda) = (0 : 1 : -i) = t_2.$$

$$\ell_{12} = (0 : \lambda + \mu : i(\lambda + \mu)) \longrightarrow i(\ell_{12}) = ((\lambda + \mu)^2 + (i(\lambda + \mu))^2 : 0 : 0) = (4\lambda\mu : 0 : 0) = (1 : 0 : 0) = t_0.$$

**Exemplo 5.1.12** Vamos inchar o ponto de singularidade, da curva cúbica dada por  $C := f(z, x, y) = zy^2 - zx^2 - x^3$ , tal que  $C \subset \mathbb{P}^2$ .

Achando o ponto de singularidade da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2zx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 - x^2$$

Portanto, o ponto  $t = (1 : 0 : 0)$ , é o ponto de singularidade da curva.

Seja  $\pi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ , tal que  $\pi(r) = t$ . Então temos que  $\pi : (\mathbb{P}^2 - r) \rightarrow (\mathbb{P}^2 - t)$  é um isomorfismo.

Logo temos que  $\pi^{-1}(t) = r \approx \mathbb{P}^1$ . E que  $\pi^{-1}(C) = C'$

Fazendo uma mudança de coordenadas, sem perda temos que  $(z : x : y) = (x_0 : x_1 : x_2)$ , logo temos  $zy^2 = zx^2 + x^3 \Rightarrow x_0x_2^2 = x_0x_1^2 + x_1^3$ .

Temos duas retas tangentes a  $C$  em  $t$ , do tipo  $x_2 = \pm x_1$ , portanto no seu inchamento teremos dois pontos de tangência em  $C' \subset \mathbb{P}^2$ , nos quais são  $t_1; t_2$ , obviamente por onde passam as retas inchadas das tangentes em  $C$ .

Temos que  $C' \subset \mathbb{P}'^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ . Tal que  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 := (x_0 : x_1 : x_2) \times (y_1 : y_2)$

Por sua vez  $\mathbb{P}'^2 : x_1y_2 = x_2y_1$ .

Seja  $C : x_0x_2^2 = x_0x_1^2 + x_1^3$ , podemos definir  $C' : x_0y_2^2 = x_0y_1^2 + x_1y_1^2$ , homogêneo.

Observamos que  $(x_0 : x_1 : x_2) \in C$  e que podemos tomar  $(x_1 : x_2) = (y_1 : y_2)$

Logo temos que as retas em  $C$ ,  $x_2 = \pm x_1$ , em  $C'$  são  $y_2 = \pm y_1$ , até uma proporcionalidade.

Portanto, os dois pontos em  $r$  são  $t_1 = (1 : 0 : 0), (1 : -1)$  e  $t_2 = (1 : 0 : 0), (1 : 1)$ .

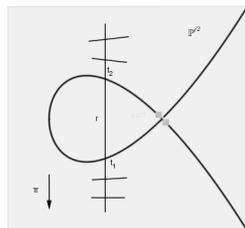


Figura 5.6: Curva cúbica inchada em  $t$ .

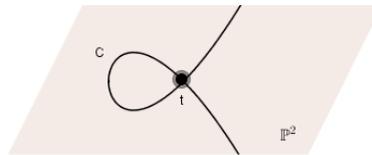


Figura 5.7: Curva cúbica

**Teorema 5.1** Uma quádrlica em  $\mathbb{P}^3$  inchada em 1 ponto é isomorfa ao plano em  $\mathbb{P}^2$  inchado em 2 pontos.

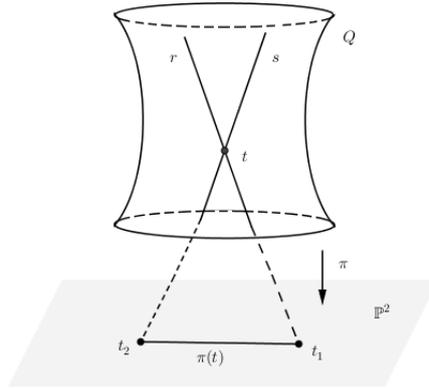
**Prova 5.1.1** *Projeção de uma quádrlica  $Q$ , não singular em  $\mathbb{P}^3$  sobre o plano  $\mathbb{P}^2$ .*

Seja a projeção definida por  $\pi : Q \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Tomamos um ponto  $t \in Q$ . Como  $Q$  é não singular, logo ela é uma superfície regrada, ou seja, existem duas famílias de retas, nas quais duas retas da mesma família não se cruzam, e retas de famílias distintas se cruzam em um ponto.

Logo por  $t$  passam duas retas  $r$  e  $s$ , uma de cada família.

Temos que  $\pi(r) = t_1 \in \mathbb{P}^2$  e  $\pi(s) = t_2 \in \mathbb{P}^2$ . E portanto, temos que  $\pi(t) = t_1 \cup t_2$ , ou seja, uma reta  $(t_1t_2)$ . E qualquer outra reta que passe por  $t$ , será um ponto da reta  $\pi(t)$ .

Agora iremos inchar o ponto  $t \in Q$ , ou seja, construir uma outra superfície  $Q'$ , para verificarmos o comportamento das retas que passam por  $t$  após o inchamento.


 Figura 5.8: Projeção da Quádriga no  $\mathbb{P}^2$ 

Tomamos uma aplicação  $\pi_1 : Q' \rightarrow Q$ , tal que  $Q'$  é o inchaço de  $Q$ .

Observamos que  $Q \subset \mathbb{P}^3$ , e portanto seu inchaço  $Q' \subset \mathbb{P}'^3 \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$ . Então  $\varphi^{-1}(t) = \beta \approx \mathbb{P}^2$ , ou seja, o inchaço de um ponto em  $\mathbb{P}^3$  é equivalente a um plano em  $\mathbb{P}'^3$ , tal que  $\varphi : \mathbb{P}'^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ .

Vamos analisar o seguinte,  $\mathbb{P}'^3 \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$ .

Temos que  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2 := (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \times (y_1 : y_2 : y_3)$  que via mergulho de Segre, está contido em  $\mathbb{P}^{11}$ . Temos a seguinte relação:

$$\begin{cases} x_1 y_2 = x_2 y_1 \\ x_1 y_3 = x_3 y_1 \\ x_2 y_3 = x_3 y_2 \end{cases}$$

Voltando ao caso do inchaço de  $t$  em  $Q$ , temos que  $\pi_1^{-1}(t) = r$ .

$\pi_1 : (Q' - r) \rightarrow (Q - t)$  é um isomorfismo.

Como  $Q \subset \mathbb{P}^3$ , podemos tomar sem perda que  $t = (1 : 0 : 0 : 0)$ , tal que  $t \in Q$ .

Agora tomamos ponto  $p \neq t$ , tal que  $p = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ , temos que  $\pi'_1(p) = 1$  ponto,  $x_i = y_i$ .

Se  $p = t$ , temos que  $\pi'_1(t) = r = Q' \cap \mathbb{P}^2$ , há um salto na pré imagem.

Tomando, uma reta  $\ell_1 \subset Q$ , tal que,  $t \in \ell_1$ .

Podemos considerar os seguintes pontos que definem a reta  $\ell_1$ :

$$\begin{cases} t = (1 : 0 : 0 : 0) \\ p = (0 : a : b : c) \end{cases}, \in \ell_1.$$

Logo pela forma paramétrica  $\ell_1 := (\lambda : \mu a : \mu b : \mu c)$ . Seja  $v$  um ponto arbitrário de  $\ell_1$ , logo  $\pi'_1(v) = (\lambda : \mu a : \mu b : \mu c); (\mu a : \mu b : \mu c) \sim (\lambda : \mu a : \mu b : \mu c); (a : b : c)$ .

Se  $\mu \rightarrow 0$ , então  $v \rightarrow t; (1 : 0 : 0 : 0); (a : b : c)$ , portanto  $\pi'_1(v) \rightarrow \pi'_1(t)$ .

Portanto,  $\pi'_1(\ell_1) = \ell'_1$ , que passa por  $r$ . E dessa forma temos também que  $\pi'_1(\ell_2) = \ell'_2$ , que passa por  $r$ .

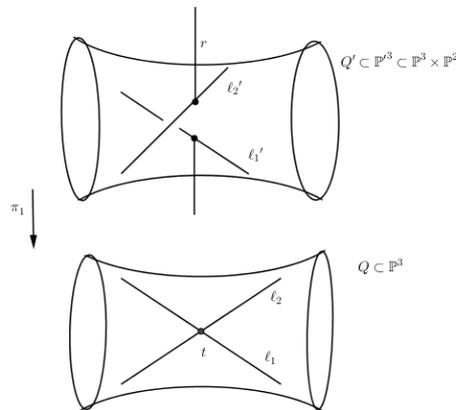


Figura 5.9: Inchamento de  $t$  em  $Q$ .

Agora, a projeção de  $Q'$  sobre  $\mathbb{P}^2$ , podemos considerar como:  $\pi_2 : Q' \rightarrow \mathbb{P}^2$ , tal que,  $\pi_2(\ell'_1) = P_1$ ,  $\pi_2(\ell'_2) = P_2$  e  $\pi_2(r) = (P_1P_2)$ , ou seja, uma reta.

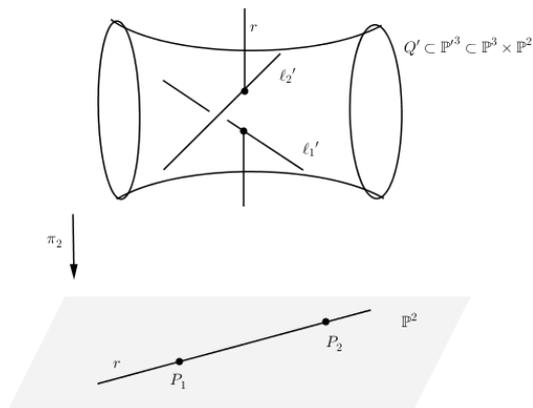


Figura 5.10: projeção de  $Q'$  sobre  $\mathbb{P}^2$

Portanto, podemos concluir que  $\pi = \pi_1^{-1} \circ \pi_2$ . Ou seja, uma quádrlica inchada em 1 ponto é isomorfa ao  $\mathbb{P}^2$  inchado em 2 pontos.

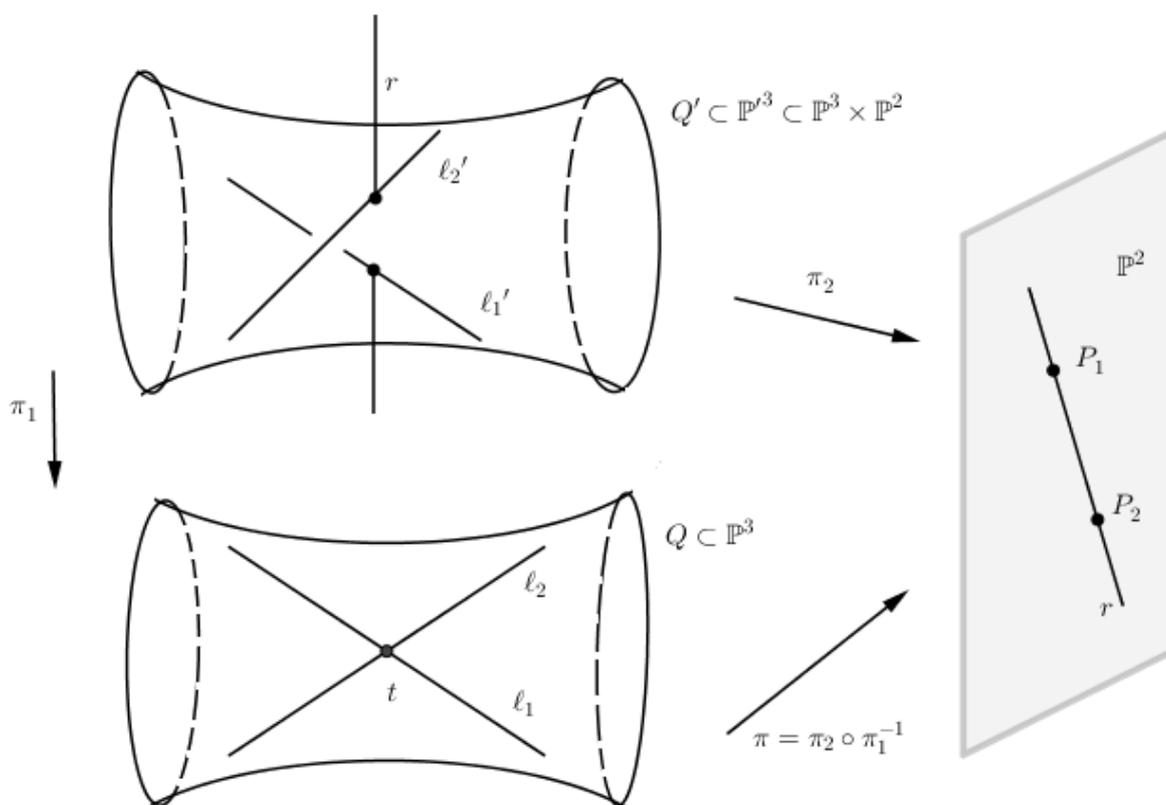


Figura 5.11: Uma quádrca inchada em 1 ponto é isomorfa ao plano em inchado em 2 pontos

# Referências Bibliográficas

- [1] ASSIS, C. F. C., *As 27 Retas Sobre uma Superfície Cúbica não Singular*, dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2014.
- [2] AVRITZER, DAN *Introdução a Geometria Enumerativa via Teoria de Deformações*, 2a bienal da sociedade brasileira de matemática, Salvador- Outubro de 2004.
- [3] BATISTA, E., *Geometria e Topologia do Grupo de Rotações*, mini-curso, DM-UFSC.
- [4] COELHO, JULIANA. *Introdução à Geometria Algébrica*, Notas de aula, verão de 2009 da UFF.
- [5] FULTON, WILLIAM. *An Introduction to Algebraic Geometry*, January 28, 2008
- [6] FULTON, WILLIAM. *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, Conference Board of the Mathematical Sciences, regional conference series in mathematics, supported by the National Science Foundation, Number 54.
- [7] GHORPADE, Sudhir R. *introduction of Algebraic Geometry*, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai 400 076, India.
- [8] GALLO, María J. V., *Las 27 rectas de una superficie cúbica*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 5, no. 2, 271 - 296(2002).
- [9] GARCIA, A. e Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006 (Projeto Euclides)
- [10] GONÇALVES, FERNANDA SCABIO. *Introdução à Geometria Algébrica* dissertação para mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 17 de dezembro de 2010.
- [11] HARTSHORNE, ROBIN. *Algebraic Geometry*, Graduate texts in mathematics 52, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [12] HEFEZ, A., *Singularidade de Curvas Irredutíveis Planas*. In The Sixth Workshop On Real And Complex Singularities. USP-São Carlos 17-21 July, 1992
- [13] KLEIMAN S. L. e D.Laksov. *Schubert's calculus* Am. Math. Monthly 79, 1972.

- [14] MAIA, J. A., *Geometria enumerativa de variedades projetivas contendo retas*, tese de doutorado, UFMG, 2010.
- [15] MARTINS, PAULO A., E MARIA L., *Tópicos de Álgebra Linear: Espaços Afins*, Falta informação.
- [16] MONDEK, P., *Os Grupos de Automorfismos da Esfera de Riemann*, dissertação de mestrado, IMPA, 1988.
- [17] MUNFORD, DAVID *Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [18] OTTO, ENDLER. *teoria dos números algébricos*, 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [19] REID, MILES. *Undergraduate Algebraic Geometry*, Math Inst., University of Warwick, October 20, 2013.
- [20] ROJAS, J. e Mendoza, R., *Álgebra Linear e o Problemas das Quatro Retas do Schoubert*. In Revista Matemática Universitária. no 45, p. 55-69, 2010.
- [21] SEMPLE, J.G., e Kneebone, G.T.: *Algebraic Projective Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1952.
- [22] SHAFAREVICH, IGOR R. *Basic Algebraic Geometry 1*, Varieties in Projective Space, Third Edition, Springer Heidelberg New York Dordrecht London 2010.
- [23] SKOROBOGATOV, Alexei. *ALGEBRAIC GEOMETRY*, December 16, 2003.
- [24] TURA, F. C., *Resultante, Equações Polinomiais e o Teorema de Bézout*. dissertação de mestrado, DM-UFRGS, 2006.
- [25] VAINSENER, Israel. *Characteristic Classes in Algebraic Geometry*, UFMG, BH, November 26, 2012.
- [26] VAINSENER, Israel, *Geometria Algébrica I*, Notas de aula, UFMG de 9 de setembro de 2008.
- [27] VAINSENER, Israel, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005 (Matemática Universitária).