

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Imersões Isométricas em Variedades Homogêneas de  
Dimensão 3*

Danilo Ferreira da Silva

Manaus - 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Imersões Isométricas em Variedades Homogêneas de  
Dimensão 3*

Danilo Ferreira da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAM como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração Geometria.

Orientadora: Profa. Dra.  
Inês Silva de Oliveira Padilha  
Universidade Federal do Amazonas -  
UFAM

Manaus - 2017

Danilo Ferreira da Silva

*Imersões Isométricas em Variedades Homogêneas de  
Dimensão 3*

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAM como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração Geometria.

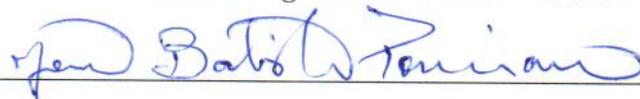
Manaus , 10 de Agosto de 2017



Profa. Dra. Inês Silva de Oliveira Padilha  
Universidade Federal do Amazonas - UFAM



Prof. Dr. Flávio França Cruz  
Universidade Regional do Cariri - URCA



Prof. Dr. João Batista Ponciano  
Universidade Estadual do Amazonas - UEA

*Dedico esse trabalho à minha mãe Jucileide, minha noiva Ozana, meus irmãos Diego, Douglas e os que a vida me deu Genilson, Valéria e Keyson.*

# Agradecimentos

A Deus pela saúde, motivação e inspiração de cada dia e pelo prazer da descoberta de aprender cada vez mais.

A minha família por acreditar em mim e estar sempre presente mesmo a distância. Em especial minha mãe Jucileide, que sempre cuida de mim e me motiva a realizar meus sonhos.

A minha noiva Ozana, que esteve ao meu lado todos esses dias me dando todo apoio e fazendo meus dias melhores.

Aos meus irmãos Diego, Douglas, Genilson e Valéria que sempre me apoiam.

A meu amigo Keyson, que agora considero um irmão, pela parceria nos estudos desde a graduação e que se estendeu até o mestrado.

A minha Orientadora, a professora Inês por acreditar em mim na elaboração desse trabalho, pela excelente orientação, paciência e atenção desde os meus primeiros estudos, onde tive o privilégio de ser seu aluno.

Ao professor Flávio por me apoiar em dar continuidade aos meus estudos e ter feito parte da banca examinadora contribuindo com suas correções e sugestões.

Ao professor Ponciano por aceitar fazer parte da banca Examinadora e contribuir com suas correções e sugestões.

Aos professores Rosilene, Juliana, Julio, Dragomir, Alfredo, Nazareno, Stefan e Thiago por contribuir na minha formação acadêmica.

Aos amigos que a UFAM me deu, Jhonata, Mel, Vinícius, Cíndel, Guilherme, Alice, Renata, Regina, Juan, Thiago Silveira, Thiago Lucas, Alex, Milena, Erico, Wington e Alan, pela companhia em todo esse período difícil, mas compensador de estudo.

As amigas companheiras de verão Franciery e Gisane pela amizade que se estende até hoje.

A dona Neíza a tia da limpeza pelas conversas do dia a dia.

Aos secretários Ari e Euclimar pela prestatividade e auxílios no que precisei.

Por fim, a FAPEAM pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Um problema clássico em geometria é encontrar condições para que uma variedade seja imersa isometricamente em outra. Neste trabalho, apresentamos condições necessárias e suficientes para que uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de dimensão 2 seja imersa em uma variedade Riemanniana homogênea simplesmente conexa de dimensão 3, com grupo de isometria de dimensão 4. Veremos que tais condições estão expressas em termos da métrica, da segunda forma fundamental e de alguns dados envolvendo um certo campo de Killing definido no espaço ambiente.

Este resultado foi obtido por Benoît Daniel no artigo intitulado: "*Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*" e possui resultados relevantes para a geometria diferencial. As ferramentas para demonstrar o teorema são baseadas na utilização do método do referencial móvel e distribuições integráveis.

**Palavras-chaves:** Geometria, imersão isométrica, variedades homogêneas, distribuição, referencial móvel.

# Abstract

A classical problem in geometry is to find conditions for one a manifold to be immersed isometrically in another. In this work, we present necessary and sufficient conditions for a simply connected 2-dimensional Riemannian manifold to be immersed isometrically into a 3-dimensional homogeneous simply connected Riemannian manifold with a 4-dimensional isometry group. We will see that such conditions are expressed in terms of the metric, the second fundamental form, and data arising from an ambient Killing field.

This result was obtained by Benoît Daniel in the paper entitled "Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds" and has relevant resultads for the differential geometry. The tools to demonstrate this theorem are based on use of the thechnique of moving frame and integrable distributions.

**Keywords:** Geometry, isometric immersions, homogeneous manifolds, distributions, moving frame

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1 Imersões Isométricas . . . . .	3
1.1.1 A equação de Gauss e de Codazzi . . . . .	5
1.2 Submersão Riemanniana . . . . .	6
1.2.1 Fibrados Vetoriais . . . . .	10
1.3 Formas Diferenciais e Referencial Móvel . . . . .	12
1.3.1 O Referencial Móvel . . . . .	17
1.4 Distribuições . . . . .	22
<b>2 Variedades Homogêneas de dimensão 3</b> . . . . .	<b>26</b>
2.1 Variedade homogênea com grupo de isometria de dimensão 4 . . . . .	33
2.1.1 As Esferas de Berger . . . . .	33
2.1.2 O Espaço de Heisenberg . . . . .	40
2.1.3 O espaço $PS\widetilde{L}_2(\mathbb{R})$ . . . . .	44
2.2 As Equações de Compatibilidade . . . . .	46
<b>3 Resultado principal</b> . . . . .	<b>54</b>
3.1 Imersão Isométrica de Superfícies em Variedades Homogêneas . . . . .	54
<b>Referências</b> . . . . .	<b>91</b>

# Introdução

O Teorema Fundamental das Imersões Isométricas configura na Geometria Diferencial clássica um assunto de grande interesse, pois proporciona resultados altamente relevantes para a pesquisa matemática. A pesquisa por tal tema foi motivado pelos trabalhos publicados nos últimos anos que teve como precursor o resultado de Ossian Bonnet [1] em 1867, onde mostra que se duas formas quadráticas definidas em um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  satisfazem as equações de Gauss e Codazzi-Mainard, então existe a menos de um movimento rígido, uma única imersão local  $f : V \subset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cuja métrica induzida e segunda forma fundamental são as formas quadráticas dadas. Tal resultado pode ser encontrado em [7], onde as formas quadráticas são apresentadas em termos de funções diferenciáveis,  $E, F, G, e, f, g$ , os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental respectivamente.

Os teoremas de imersões ganharam grandes proporções com o advento da teoria da relatividade geral, onde a hipótese do espaço-tempo estar imerso em um espaço ambiente de dimensão maior possibilitou a definição de uma nova teoria de gravitação. Uma primeira contribuição em resolver o problema de imersão das variedades, foi dada por Schaffli, em 1873, em forma de conjectura, que dizia que toda variedade de dimensão  $n$ , munida de uma métrica analítica, semi-definida, poderia ser imersa localmente e isometricamente em um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^N$ , com  $N = n(n + 1)/2$ , e a veracidade dessa conjectura foi provada (porém incompleta) por Janet em 1926, sendo resolvida completamente em 1927 por E. Cartan, ficando conhecido como o Teorema de Janet-Cartan. Outro resultado muito importante e pouco conhecido é o Teorema de Campbell-Magaard, que garante que toda variedade Riemanniana de dimensão  $n$ , pode ser imersa localmente em uma variedade Ricci-flat de dimensão  $n + 1$ , reduzindo a codimensão de  $n(n - 1)/2$ , dada pelo teorema de Janet-Cartan, para 1.

Desde então, importantes contribuições foram feitas, adaptando em alguns casos as hipóteses sobre a curvatura e/ou considerando novos espaços em que tais variedades pudessem ser imersas, determinando sempre sob quais condições tal imersão existe e é única. Neste trabalho, temos como objetivo mostrar o Teorema Fundamental da Imersões Isométricas em variedades homogêneas de dimensão 3, provado em 2007, por Benoît Daniel [3] no artigo : *Isometric Immersions Into 3-dimensional Homogeneous Manifolds*, onde o mesmo apresenta condições necessárias e suficientes para que uma variedade Riemanniana, simplesmente conexa, de dimensão 2, seja imersa

isometricamente em uma variedade Riemanniana homogênea, simplesmente conexa, de dimensão 3, com grupo de isometria de dimensão 4. Veremos que tais condições são dadas pelas equações de Gauss, Codazzi e outras duas equações envolvendo dados relacionados a um certo campo de Killing unitário, definido no espaço ambiente. A prova desse resultado foi inspirada no método utilizado por Kettenblat no artigo [19], onde estende o resultado de Bonnet, mostrando que uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  munida de algumas informações, e que satisfazem as equações de Gauss e Codazzi-Mainard pode ser localmente imersa isometricamente em  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

A classificação das variedades homogêneas simplesmente conexa de dimensão 3, depende da dimensão do grupo de isometria que nesse caso assume os valores 3, 4 ou 6. O caso a ser tratado neste trabalho é quando o grupo de isometria tem dimensão 4. Essas variedades são fibrações Riemannianas sobre uma forma espacial  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  de curvatura Gaussiana constante  $\kappa$  e admite um campo de Killing unitário  $\xi$  tangente às fibras. Tais variedades, são denotadas por  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  e classificadas, a menos de isometria, pela curvatura da base de fibração  $\kappa$ , e pela curvatura do fibrado  $\tau$ , onde  $\kappa$  e  $\tau$  são números reais satisfazendo  $\kappa \neq 4\tau^2$ . Quando  $\tau = 0$ ,  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  ou é o espaço produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e este teorema de imersão foi provado em [4]. Para  $\tau \neq 0$ ,  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  será as esferas de Berger  $\mathbb{S}_\kappa^3$  para  $\kappa > 0$ , o grupo de Heisenberg  $Nil_3$  para  $\kappa = 0$  e o grupo de Lie  $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$  para  $\kappa < 0$ .

O trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo 1 iniciamos estabelecendo a notação, apresentando algumas definições e fatos elementares da geometria Riemanniana, além de alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho.

No capítulo 2 apresentamos o espaço ambiente e as propriedades gerais das variedades homogêneas  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , com grupo de isometria de dimensão 4. Descrevemos a métrica e o referencial móvel construído nessas variedades. Apresentamos ainda, as equações de compatibilidade que são condições necessárias para que uma variedade Riemanniana de dimensão 2, simplesmente conexa seja imersa em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

Por fim, no capítulo 3, damos a prova do resultado principal, objeto de estudo deste trabalho. Exibimos alguns lemas técnicos e proposições essenciais na construção da prova do teorema, onde utilizamos essencialmente formas diferenciais, o método do referencial móvel e distribuições integráveis.

# 1 Preliminares

Iniciamos o trabalho apresentando alguns conceitos e resultados de Geometria Riemanniana que julgamos necessários para o entendimento da dissertação. Assumiremos as definições de variedades diferenciáveis, métrica Riemanniana, conexão Riemanniana e etc.

## 1.1 Imersões Isométricas

A busca de condições para estabelecer imersões entre variedades tem sido uma ampla área de pesquisa em geometria diferencial, pois possibilita relacionar as variedades e assim obter resultados relevantes. Estabeleceremos agora os principais conceitos da teoria de imersão e enfatizaremos o caso de hipersuperfície que será o mais utilizado neste trabalho.

**Definição 1.1.** *Sejam  $M$  e  $\overline{M}$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é uma imersão se  $df_p$  é injetiva para cada  $p \in M$ . Se  $\overline{M}$  é uma variedade Riemanniana e  $f$  uma imersão, definimos uma métrica Riemanniana em  $M$  pondo*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

para cada  $p \in M$  e  $u, v \in T_p M$ . Com essa métrica  $M$  é dita imersa isometricamente e  $f$  é chamada uma imersão isométrica.

Vale ressaltar que por  $f$  ser localmente um mergulho, podemos identificar localmente  $M$  com  $f(M)$  e cada campo  $X \in TM$  com sua imagem  $df(X)$ , i.e., cada  $p \in M$  com  $f(p) \in \overline{M}$  e cada  $X_p \in T_p M$  com  $df_p(X_p) \in T_{f(p)} \overline{M}$ . Como  $\text{Im}(df_p)$  é um subespaço de  $T_{f(p)} \overline{M}$  a métrica de  $\overline{M}$  decompõe o espaço  $T_{f(p)} \overline{M}$  na soma direta ortogonal

$$T_{f(p)} \overline{M} = \text{Im}(df_p) \oplus (\text{Im}(df_p))^\perp$$

e com as identificações feitas, podemos escrever  $\text{Im}(df_p) = df_p(T_p M) \approx T_p M$ , então

$$T_{f(p)} \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

Assim, qualquer  $v \in T_{f(p)} \overline{M}$  pode ser escrito por  $v = v^\top + v^\perp$ , onde  $v^\top \in T_p M$  e  $v^\perp \in (T_p M)^\perp$  são as respectivas componentes tangentes e normais a  $M$ .

**Observação 1.1.** *Indicaremos com uma barra, os elementos referentes à  $\overline{M}$ .  $\mathfrak{X}(M)$  denotará o conjunto dos campos diferenciáveis e tangentes a  $M$  e  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  o conjunto dos campos diferenciáveis e ortogonais à  $M$ .*

Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  são campos locais em  $M$ , e  $\overline{X}, \overline{Y}$  são extensões locais a  $\overline{M}$ , então  $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p) \in T_p\overline{M}$  e assim

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p))^\top + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p))^\perp \quad (1.1)$$

É possível mostrar que  $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p))^\top = \nabla_X Y(p)$  para cada  $p$ , ou seja a conexão Riemanniana relativa a métrica induzida de  $M$  é a componente tangente de  $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ . Sendo  $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp$  ortogonal a  $M$ , e de 1.1 temos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Com isso, tem-se a seguinte

**Proposição 1.1.** *Seja  $U \subset M$  aberto. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , a aplicação  $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$  dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

*Demonstração.* Veja [5] pág. 140. □

Usando as propriedades da aplicação  $B$  podemos definir a segunda forma fundamental. Seja  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . A aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é uma forma bilinear simétrica.

**Definição 1.2.** *A forma quadrática  $II_\eta$  definida em  $T_p M$  por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

*é chamada a segunda forma fundamental de  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .*

Da álgebra linear, é sabido que cada forma bilinear simétrica está associada a um operador linear auto-adjunto  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ , (garantido pelo teorema da representação de Riez) dado por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

$S_\eta$  é chamado *operador forma* segundo o vetor  $\eta$ . Se  $X, Y$  e  $N$  são extensões locais de  $x, y$  e  $\eta$  com  $X, Y$  tangentes a  $M$  e  $N$  normal a  $M$ , segue que  $\langle N, Y \rangle = 0$  e usando a compatibilidade com a métrica tem-se

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y, N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{Y}, N \rangle(p) = -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) \\ &= \langle -\bar{\nabla}_X N, y \rangle = \langle -(\bar{\nabla}_X N)^\top, y \rangle + \langle -(\bar{\nabla}_X N)^\perp, y \rangle \\ &= \langle -(\bar{\nabla}_X N)^\top, y \rangle. \end{aligned}$$

Como  $y$  é arbitrário segue da propriedade do produto interno que  $S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_X N)^\top$ .

No caso em que a codimensão da imersão é 1, i.e.,  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ ,  $f(\bar{M}) \subset \bar{M}$  é então denominada uma *hipersuperfície*. Quando  $M$  é uma hipersuperfície, há apenas duas escolhas para o vetor  $\eta$  normal unitário à  $M$ . Se  $M$  e  $\bar{M}$  são ambas orientáveis, então o vetor  $\eta$  é univocamente determinado se exigirmos que sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base na orientação de  $M$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  seja uma base na orientação de  $\bar{M}$ . Como  $S_\eta$  é linear e auto-adjunto existe uma base ortonormal formada por autovetores  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $T_p M$ , que a diagonaliza ou seja,  $S_\eta(E_i) = k_i E_i$  com  $i = 1, \dots, n$ . Denominamos  $E_i$  direções principais e  $k_i$  curvaturas principais.

### 1.1.1 A equação de Gauss e de Codazzi

Usaremos a seguinte convenção para o Tensor curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  com conexão Riemanniana  $\nabla$ .

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

A seguir mostraremos as principais equações de uma imersão isométrica, cuja prova podem ser encontradas em [5].

**Proposição 1.2.** (*Equação de Gauss*) Para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$  vale

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(Y, W), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle.$$

*Demonstração.* Veja [5] pág. 145. □

Para o caso de hipersuperfície a equação de Gauss se torna

**Corolário 1.1.** Se  $\dim \bar{M} - \dim M = 1$ , então a equação de Gauss tem a forma:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle$$

*Demonstração.* Como  $B(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)^\perp$  e se  $N$  é o vetor unitário normal a  $M$ , então

$$B(X, Y) = \langle B(X, Y), N \rangle N$$

mas,  $\langle B(X, Y), N \rangle = \langle SX, Y \rangle$ , onde  $SX = S_N X$  é o operador forma. Substituindo na equação de Gauss temos

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle \langle N, N \rangle - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle \langle N, N \rangle \\ &= \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle. \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.3.** (*Equação de Codazzi*) Para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$  vale

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta),$$

onde por definição

$$(\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) = Y \langle B(X, Z), \eta \rangle - \langle B(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle - \langle B(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle - \langle B(X, Z), \nabla_Y^\perp \eta \rangle.$$

$$\text{e } \nabla_Y^\perp \eta := (\bar{\nabla}_Y \eta)^\perp.$$

Para o caso de hipersuperfície, uma vez fixado  $\eta$  vetor unitário normal a  $M$ , tem-se que  $\bar{\nabla}_X \eta$  é tangente a  $M$ , ou seja  $\langle \bar{\nabla}_X \eta, \eta \rangle = 0$ .

De fato, como  $\langle \eta, \eta \rangle = 1$  então

$$0 = X \langle \eta, \eta \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_X \eta, \eta \rangle. \text{ Segue que } \langle \bar{\nabla}_X \eta, \eta \rangle = 0.$$

Logo,  $\bar{\nabla}_X \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^\top = \nabla_X \eta$ .

Podemos expressar a equação de Codazzi por

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)\eta, Z \rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta + \bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta, Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y \nabla_X \eta - \bar{\nabla}_X \nabla_Y \eta + \nabla_{[X, Y]}\eta, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X \eta + B(Y, \nabla_X \eta) - \nabla_X \nabla_Y \eta - B(X, \nabla_Y \eta) + \nabla_{[X, Y]}\eta, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y], Z \rangle \end{aligned}$$

já que  $B(X, Y)$  é normal a  $M$  e  $-\nabla_X \eta = SX$ .

## 1.2 Submersão Riemanniana

Nesta seção mostraremos as principais definições e resultados de uma fibração e submersão Riemanniana, que serão úteis no decorrer deste trabalho.

**Definição 1.3.** *Sejam  $\overline{M}, M$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $F : \overline{M} \rightarrow M$  é chamada submersão se  $dF_{\overline{p}}$  é sobrejetiva em cada ponto  $\overline{p} \in \overline{M}$ .*

Para cada  $p \in M$ , a fibra  $F^{-1}(p) = F_p$  é uma subvariedade fechada de  $\overline{M}$  e um vetor tangente de  $\overline{M}$  tangente a algum  $F_p$ ,  $p \in M$ , é chamado um *vetor vertical* da submersão. Se  $\overline{M}$  tem uma métrica Riemanniana  $\overline{g}$  em cada ponto  $\overline{p} \in \overline{M}$ , então o espaço tangente  $T_{\overline{p}}\overline{M}$  decompõe-se em uma soma direta ortogonal.

$$T_{\overline{p}}\overline{M} = H_{\overline{p}} \oplus V_{\overline{p}}$$

onde  $V_{\overline{p}} := \text{Ker}(dF_{\overline{p}}) = T_{\overline{p}}F_p$  é o espaço vertical e  $H_{\overline{p}} := V_{\overline{p}}^\perp$  é o espaço horizontal. Logo, todo vetor  $u \in T_{\overline{p}}\overline{M}$  pode ser escrito como

$$u = u^h + u^v, \quad \text{com } u^h \in H_{\overline{p}}, u^v \in V_{\overline{p}}.$$

Nesta situação definimos

**Definição 1.4.** *Sejam  $(\overline{M}, \overline{g}), (M, g)$  variedades Riemannianas. Uma submersão  $F : \overline{M}^{m+n} \rightarrow M^n$  é chamada uma submersão Riemanniana se*

$$\overline{g}(X, Y) = g(dF_{\overline{p}}(X), dF_{\overline{p}}(Y)),$$

sempre que  $X$  e  $Y$  são horizontais.

**Exemplo 1.1.** *Se  $M_1 \times M_2$  é um produto Riemanniano, então as projeções naturais  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ ,  $i = 1, 2$ , são submersões Riemannianas.*

Vejam o que ocorre para  $\pi_1$ . Sejam  $(U_1 \times U_2, \varphi)$ ,  $(U_i, \psi_i)$  estruturas diferenciáveis para  $M_1 \times M_2$  e  $M_i$ ,  $i = 1, 2$  respectivamente. Então a representação local de  $\pi_1$  é dada por  $\tilde{\pi}_1 = (\psi_1^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi) : U_1 \times U_2 \rightarrow U_1$ . Se  $q = (q_1, q_2) \in U_1 \times U_2$  tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1(q) &= (\psi_1^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi)(q) \\ &= \psi_1^{-1}(\pi_1(\psi_1(q_1), \psi_2(q_2))) \\ &= \psi_1^{-1}(\psi_1(q_1)) = q_1. \end{aligned}$$

Logo,  $\tilde{\pi}_1$  é a projeção  $U_1 \times U_2 \rightarrow U_1$  entre abertos do espaço euclidiano, que é diferenciável, já que  $\tilde{\pi}_1$  é linear e mais  $d\tilde{\pi}_1 = T_{q_1}U_1 \times T_{q_2}U_2 \rightarrow T_{\tilde{\pi}_1(q)}U_1$ , é a aplicação de projeção  $(d\tilde{\pi}_1)_q(v_1, v_2) = v_1$ , pois se  $\alpha : I \rightarrow U_1 \times U_2$  é uma curva diferenciável, tal que  $\alpha(0) = (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = q$  e  $\alpha'(0) = v = (v_1, v_2) \in T_{\pi(p)}(U_1 \times U_2)$  temos

$$(d\tilde{\pi}_1)_p(v) = \left. \frac{d}{dt}(\tilde{\pi}_1 \circ \alpha(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\alpha_1(t)) \right|_{t=0} = \alpha'_1(0) = v_1$$

que é sobrejetora, pois todo vetor  $w_1 \in T_{\tilde{\pi}_1(q)}U_1$  é imagem de  $u = (w_1, u_2)$ . Com isso,  $d\tilde{\pi}$  é a projeção  $T_p(M_1 \times M_2) \rightarrow T_{p_1}M_1$  que é diferenciável. Resta mostrar que  $\bar{g}(x, y) = g_1((d\pi_1)_p(x), (d\pi_1)_p(y))$  para todo  $x, y \in (Ker\ d\pi_1)^\perp$ , onde  $\bar{g}$  e  $g_1$  denotam as métricas Riemanniana de  $M_1 \times M_2$  e  $M_1$  respectivamente.

De fato, sendo  $(d\pi_1)_p(x_1, x_2) = x_1$ . Observe que

$$Ker(d\pi_1)_p = \{(x_1, x_2) \in T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2; x_1 = 0\} \Leftrightarrow Ker(d\pi_1) = \{0\} \times T_{p_2}M_2.$$

Logo,  $V_p = \{0\} \times T_{p_2}M_2$  e consequentemente  $H_p = T_{p_1}M_1 \times \{0\}$ .

Com isso, se  $x, y \in H_p$ , então  $x = (x_1, 0)$  e  $y = (y_1, 0)$  e

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, y) &= g_1((d\pi_1)_p(x), (d\pi_1)_p(y)) + g_2((d\pi_2)_p(x), (d\pi_2)_p(y)) \\ &= g_1((d\pi_1)_p(x), (d\pi_1)_p(y)) + g_2(0, 0) \\ &= g_1((d\pi_1)_p(x), (d\pi_1)_p(y)). \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.** *Seja  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$  o fibrado tangente de uma variedade Riemanniana  $M$ . Se  $TM$  está munido com a métrica:*

$$\langle V, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(V), d(W) \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{dt}(0) \right\rangle_p,$$

onde  $V, W \in T_{(p,v)}TM$ , ou seja existem curvas em  $TM$

$$\alpha(t) = (p(t), v(t)) \text{ e } \beta(t) = (q(t), w(t))$$

tal que  $\alpha(0) = (p(0), v(0)) = (p, v) = \beta(0) = (q(0), w(0))$  e  $\alpha'(0) = V, \beta'(0) = W$ . Com  $\frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{dt}(0)$  as derivadas covariantes de  $v$  e  $w$  em  $\theta$ . Então a projeção  $\pi : TM \rightarrow M$  é uma submersão Riemanniana.

Inicialmente, devemos mostrar que  $\pi$  é uma submersão. Semelhante ao exemplo anterior, observa-se que a representação local de  $\pi$  é uma projeção  $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que é diferenciável e assim vimos que  $\pi$  é uma submersão. Resta provar que

$$\langle V, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p \text{ para } V, W \text{ horizontais.}$$

Observando a métrica do fibrado é suficiente provar que  $\left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{dt}(0) \right\rangle_p = 0$  sempre que  $V, W$  são horizontais. Usaremos a seguinte afirmação:

Dada uma curva  $\alpha(t) = (p(t), v(t))$  em  $TM$ ,  $\alpha'(t)$  é horizontal se, e somente se  $v(t)$  é um campo paralelo ao longo de  $p(t)$ .

De fato, por definição  $\alpha'(t) \in H_{\alpha(t)}$  se, e somente se, para qualquer  $X \in V_{\alpha(t)} = Ker(d\pi)$ , tem-se  $\langle \alpha'(t), X \rangle = 0$ , mas observe que

$$Ker(d\pi) = \{V \in T_{(p,v)}TM, d\pi(V) = 0\}.$$

Seja  $V \in T_{(p,v)}TM$ , isto é  $V = \alpha'(0)$  com  $\alpha(t) = (p(t), v(t))$  uma curva em  $TM$  e  $\alpha(0) = (p, v)$ , logo  $V = (p'(0), v'(0))$ , mas sendo  $d\pi(V) = p'(0)$  tem-se que

$$d\pi(V) = 0 \Leftrightarrow p'(0) = 0, \quad \text{logo} \quad Ker(d\pi) = \{0\} \times v'(0).$$

Assim para cada  $t$ , tem-se que  $X \in V_{\alpha(t)}$  então  $X = (0, x'(t))$  e

$$0 = \langle \alpha'(t), X \rangle = \langle d\pi(\alpha'(t)), d\pi(X) \rangle = \langle p'(t), 0 \rangle + \left\langle \frac{Dv}{dt}(t), \frac{Dx}{dt}(t) \right\rangle \Leftrightarrow \frac{Dv}{dt}(t) = 0.$$

Portanto,  $v(t)$  é paralelo ao longo de  $p(t)$ . Usando essa afirmação, segue que se  $V, W$  são vetores horizontais então  $\frac{Dv}{dt}(0) = \frac{Dw}{dt}(0) = 0$  e isso finaliza a prova.

Na presente situação, se  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos o *levantamento horizontal*  $\bar{X}$  de  $X$ , o campo horizontal dado por  $dF_{\bar{p}}(\bar{X}(\bar{p})) = X(p)$ , ou seja, o campo  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$   $F$ -relacionado com  $X$ . Pelo Lema 4.8 de [13], tem-se que  $\bar{X}$  é diferenciável.

A proposição seguinte apresenta as principais propriedades de uma submersão Riemanniana.

**Proposição 1.4.** *Temos as seguintes propriedades para uma submersão Riemanniana  $F : \bar{M}^{m+n} \rightarrow M^n$ .*

1. *Sejam  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  as conexões Riemannianas de  $M$  e  $\bar{M}$  respectivamente. Então*

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \overline{(\nabla_X Y)} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v$$

*onde  $Z^v$  é a componente vertical de  $Z$  e  $\bar{X}$  o levantamento horizontal de  $X$ .*

2. *Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}$  seus respectivos levantamentos horizontais, e sejam  $R, \bar{R}$  os tensores de curvatura de  $M$  e  $\bar{M}$  respectivamente, então*

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W} \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \frac{1}{4}\langle [\bar{X}, \bar{Z}]^v, [\bar{Y}, \bar{W}]^v \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4}\langle [\bar{Y}, \bar{Z}]^v, [\bar{X}, \bar{W}]^v \rangle - \frac{1}{2}\langle [\bar{Z}, \bar{W}]^v, [\bar{X}, \bar{Y}]^v \rangle. \end{aligned}$$

3. *Sejam  $K, \bar{K}$  as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\bar{M}$ . Se  $\sigma$  é o plano gerado pelos vetores ortonormais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\bar{\sigma}$  é o plano gerado por  $\bar{X}, \bar{Y}$ , então*

$$K(\sigma) = \bar{K}(\bar{\sigma}) + \frac{3}{4}|[\bar{X}, \bar{Y}]^v|^2 \geq \bar{K}(\bar{\sigma}),$$

Uma situação particular de uma submersão, surge quando as fibras de uma submersão admitem um campo de Killing.

**Definição 1.5.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Sejam  $p \in M$ ,  $U \subset M$  uma vizinhança de  $p$  e  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável tais que para todo  $q \in U$  a curva  $t \mapsto \varphi(t, q)$  é a trajetória de  $X$  passando por  $q$  em  $t = 0$ .  $X$  é chamado um campo de Killing se para todo  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , a aplicação  $\varphi_{t_0} : U \subset M \rightarrow M$  é uma isometria.*

Vale a seguinte equivalência

$X$  é Killing se, e somente se  $\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$  para todo  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,

tal equação é chamada a *equação de Killing*.

Uma submersão é chamada *submersão de Killing*, se suas fibras são trajetórias de um campo de Killing. Associada a uma submersão de Killing existe uma função real  $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz a

**Proposição 1.5.** *Seja  $M$  uma submersão Killing,  $\nabla$ ,  $\wedge$  e  $\times$  sua conexão Riemanniana e o produto exterior e produto vetorial respectivamente e  $\xi$  um campo de Killing ao longo das fibras de  $M$ . Então*

$$\nabla_X \xi = \tau X \wedge \xi = \tau X \times \xi, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

*Demonstração.* Veja [10]. □

### 1.2.1 Fibrados Vetoriais

Admitiremos que  $M$  e  $E$  são espaços topológicos.

**Definição 1.6.** *Um fibrado vetorial de posto  $k$  sobre  $M$  é um espaço topológico  $E$  junto com uma aplicação contínua sobrejetiva  $\pi : E \rightarrow M$  satisfazendo:*

- (i) *Para cada  $p \in M$ , o conjunto  $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$  (chamado as fibras de  $E$  sobre  $p$ ) é dotado com uma estrutura de um espaço vetorial de dimensão  $k$ .*
- (ii) *Para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$ , e um homeomorfismo  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  (chamado uma trivialização local de  $E$  sobre  $U$ ), tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

(onde  $\pi_1$  é a projeção no primeiro fator); e tal que para cada  $q \in U$ , a restrição de  $\Phi$  a  $E_q$  é um isomorfismo linear entre  $E_q$  e  $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ .

Quando  $M$  e  $E$  são variedades diferenciáveis,  $\pi$  é diferenciável e  $\Phi$  pode ser escolhida sendo um difeomorfismo, então  $E$  é localmente difeomorfa ao produto  $U \times \mathbb{R}^k$ , e é chamado um *fibrado vetorial diferenciável*. O espaço  $E$  é chamado *espaço total* do fibrado,  $M$  sua *base* e  $\pi$  sua *projeção*.

**Exemplo 1.3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $TM$  seu fibrado tangente. Munido com a projeção natural  $(p, v) \mapsto p$ ,  $TM$  é um fibrado vetorial de posto  $n$  sobre  $M$ .*

De fato, tomando uma estrutura diferenciável  $(U, \varphi)$  para  $M$ , e munindo  $TM$  com a estrutura de variedade diferenciável de dimensão  $2n$ , dada por  $(V, \tilde{\varphi})$ , onde  $V$  é um aberto de  $TM$  e  $\tilde{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), (v_1, \dots, v_n)) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ . Definimos  $\Phi : TM \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  pondo  $\Phi(p, v) = (p, (v_1, \dots, v_n))$ , onde  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  está escrito na base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Observe que  $\pi_1 \circ \Phi = \pi$ . E tomando, a aplicação  $\theta : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  por  $\theta(q, (v_1, \dots, v_n)) = (\varphi(q), (v_1, \dots, v_n))$ , i.e.,  $\theta = (\varphi, Id_{\mathbb{R}^n})$ , segue que

$$\theta \circ \Phi(p, v) = \theta((p, (v_1, \dots, v_n))) = (\varphi(p), (v_1, \dots, v_n)),$$

ou seja,  $\theta \circ \Phi = \tilde{\varphi}$ , e como ambas  $\theta, \tilde{\varphi}$  são difeomorfismos, segue que  $\Phi$  também é. Assim  $\Phi$  é uma trivialização local diferenciável e portanto  $TM$  é um fibrado vetorial sobre  $M$ .

Mais detalhes e resultados da teoria de fibrados vetoriais podem ser encontrados em [13].

### 1.3 Formas Diferenciais e Referencial Móvel

Nesta seção apresentamos a definição de formas diferenciais e a técnica do referencial móvel, conteúdo indispensável no percurso dessa dissertação. Mostraremos as equações de estrutura para uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  e definimos algumas 1-formas especiais que utilizaremos ao longo do trabalho.

Dado um espaço vetorial real  $V$  de dimensão finita, dizemos que uma aplicação  $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é *k-linear*, se é linear em cada entrada, ou seja

$$T(x_1, \dots, x_i + \lambda y, \dots, x_k) = T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) + \lambda T(x_1, \dots, y, \dots, x_k)$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $T$  é *alternada* se

$$T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -T(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k),$$

para quaisquer  $i \neq j = 1, \dots, k$ .

O conjunto de todas as aplicações  $k$ -lineares e alternadas munido com a soma e produto por escalar usuais de funções é um espaço vetorial, o qual denotaremos por  $\Lambda^k(V^*)$ , onde  $V^*$  denota o dual de  $V$  ( i.e., o conjunto das aplicações lineares  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ ). Definimos uma *k-forma*, sendo uma aplicação  $\omega : V \rightarrow \Lambda^k(V^*)$  que associa a cada  $x \in V$  uma aplicação  $\omega(x) \in \Lambda^k(V^*)$ .

Em particular, define-se uma *k-forma exterior* em  $\mathbb{R}^n$  como a aplicação que a cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  associa a aplicação,  $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{T}_p\mathbb{R}^n)^*$ . Definindo o produto entre 1-formas por:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)) \quad i, j = 1, \dots, k,$$

onde  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (\mathbb{T}_p\mathbb{R}^n)^*$  temos um elemento  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{T}_p\mathbb{R}^n)$ .

Pelas propriedades da aplicação determinante e de cada  $\varphi_i$ , segue que de fato  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  é uma *k-forma* em  $\mathbb{R}^n$ .

O produto  $\wedge$ , é chamado de *produto exterior*. Uma base para  $(\mathbb{T}_p\mathbb{R}^n)^*$  é dada por  $\{dx_1, \dots, dx_n\}_p$ , onde  $(dx_i)_p$  é a diferencial da aplicação de projeção  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  na  $i$ -ésima coordenada, no ponto  $p$ , então o elemento  $(dx_1)_p \wedge (dx_2)_p \wedge \dots \wedge (dx_n)_p \in \Lambda^n(\mathbb{T}_p\mathbb{R}^n)^*$  é uma base para as *n-formas* em  $\mathbb{R}^n$ , como podemos verificar na seguinte proposição.

**Proposição 1.6.** *O conjunto*

$$\{(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

forma uma base para  $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ .

*Demonstração.* Veja [8] □

Segue da proposição que cada  $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$  pode ser escrita como

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \dots, n\},$$

onde  $a_{i_1 \dots i_k}$  são funções reais definidas em  $\mathbb{R}^n$ . Quando  $a_{i_1 \dots i_k}$  são funções diferenciáveis  $\omega$  é chamada uma  $k$ -forma diferencial.

Para simplificar a escrita usaremos a seguinte notação,  $\omega(p) = \sum_I a_I(p) dx_I(p)$ , onde  $I$  denota a  $k$ -upla  $(i_1, \dots, i_k), i_1 < \dots < i_k, i_j \in \{1, \dots, n\}$ . Convencionaremos, também que uma 0-forma diferencial em  $\mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.4.** 1. Toda aplicação linear  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  é alternada, já que não é possível violar a condição de ser alternada.  $\varphi$  é um exemplo de uma 1-forma.

2. O determinante de uma matriz  $m \times m$  poderá ser considerado como uma forma  $m$ -linear alternada  $\det \in \Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*$  se pusermos  $\det(v_1, \dots, v_m) =$  determinante da matriz  $m \times m$  cujas colunas são os vetores  $v_i$ .

A seguir definimos a soma e o produto exterior entre formas.

Se  $\omega$  e  $\varphi$  são  $k$ -formas com

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \quad \text{e} \quad \varphi = \sum_I b_I dx_I,$$

então  $\omega + \varphi$  é uma  $k$ -forma dada por

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Se  $\omega$  é uma  $k$ -forma e  $\varphi$  uma  $s$ -forma, o produto exterior  $\omega \wedge \varphi$  é uma  $(k+s)$ -forma dada por

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_i \wedge dx_J, \quad \text{onde}$$

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \quad \varphi = \sum_J b_J dx_J.$$

O produto exterior possui as seguintes propriedades:

**Proposição 1.7.** *Sejam  $\omega$  uma  $k$ -forma,  $\varphi$  uma  $s$ -forma e  $\theta$  uma  $r$ -forma. Então*

- a)  $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$ ,
- b)  $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$ ,
- c)  $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$ , se  $r = s$ .

*Demonstração.* Veja [8] □

**Definição 1.7.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Então,  $f$  induz uma aplicação  $f^*$ , que leva  $k$ -formas em  $\mathbb{R}^m$  em  $k$ -formas em  $\mathbb{R}^n$  e é definido como segue. Seja  $\omega$  uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^m$ . Então,  $f^*\omega$  é a  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^n$  dada por*

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)).$$

onde  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_1, \dots, v_k \in T_p\mathbb{R}^n$  e  $df_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{(f(p))}\mathbb{R}^m$  é a diferencial da aplicação  $f$  em  $p$ . Convencionamos que, se  $g$  é uma  $0$ -forma, então  $f^*(g) = g \circ f$ .

Definimos a *derivada exterior* de uma forma exterior por

**Definição 1.8.** *Seja  $\omega = \sum a_I dx_I$  uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^n$ . A derivada exterior  $d\omega$  de  $\omega$  é uma  $(k+1)$ -forma, definida por*

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

A derivada exterior goza das seguintes propriedades.

- Proposição 1.8.** a)  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ , onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são  $k$ -formas.
- b)  $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$ , onde  $\omega$  é uma  $k$ -forma e  $\varphi$  é uma  $s$ -forma.
- c)  $d(d\omega) = d^2\omega = 0$ .
- d)  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ , onde  $\omega$  é uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^m$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação diferenciável.

*Demonstração.* Vamos provar os itens b) e c). O item a) segue direto da definição e o item d) o leitor pode verificar em [8] ou [13].

b) Sejam  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  e  $\varphi = \sum_J b_J dx_J$ . Então

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= \sum_{IJ} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{IJ} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{IJ} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
db_J \wedge dx_I &= \sum_j \frac{\partial b_J}{\partial x_j} dx_j \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\
&= (-1) \sum_j \frac{\partial b_J}{\partial x_j} dx_{i_1} \wedge dx_j \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= (-1)^k \sum_j \frac{\partial b_J}{\partial x_j} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_j \\
&= (-1)^k dx_I \wedge db_J,
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{IJ} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J = d\omega \wedge \varphi.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \varphi) &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \sum_{IJ} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\
&= d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi.
\end{aligned}$$

c) Vamos provar o item c) para o caso  $k = 0$ . Se  $\omega$  é uma 0-forma, então  $\omega$  é uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right).
\end{aligned}$$

Abrindo os somatórios e usando o fato,  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ , para  $i \neq j$  e  $dx_i \wedge dx_i = 0$ , obtemos

$$d(df) = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Mas,  $f$  é diferenciável, logo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ . Portanto a diferença na equação acima é zero e isso finaliza a prova.

Para o caso geral, pelo item a) basta tomar  $\omega = a_I dx_I$ , com  $a_I \neq 0$ . Pelo item b), temos que

$$d\omega = da_I \wedge dx_I + a_I d(dx_I).$$

Mas,  $d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0$ . Então

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_I) \wedge dx_I - da_I d(dx_I) = 0$$

Já que  $d(da_I) = 0$ , pelo caso  $k = 0$  e  $d(dx_I) = 0$ .

□

Dada uma variedade diferenciável  $M$ , como em cada ponto  $p \in M$ , o espaço tangente  $T_pM$  em  $p$ , é um espaço vetorial, definimos uma  $k$ -forma exterior em  $M$  por.

**Definição 1.9.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável. Uma  $k$ -forma exterior  $\omega$  em  $M$  é a escolha, para cada  $p \in M$ , de um elemento  $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)^*$ .*

Podemos estender de  $\mathbb{R}^n$  as definições de operações e diferenciabilidade para formas exterior em variedades da seguinte forma. Dada uma  $k$ -forma exterior em  $M^n$  uma variedade diferenciável, a representação de  $\omega$  numa dada parametrização  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow M^n$  em torno de  $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ , é a  $k$ -forma exterior  $\omega_\alpha$  em  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , dada por

$$\omega_\alpha(v_1, \dots, v_k) = \omega(df_\alpha(v_1), \dots, df_\alpha(v_k)), \quad v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n \quad \text{ou seja,} \quad \omega_\alpha = f^*\omega.$$

Pode-se verificar que a definição de representação de uma forma exterior em variedades, não depende da vizinhança coordenada. Veja [8].

**Definição 1.10.** *Uma  $k$ -forma diferencial em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma  $k$ -forma exterior tal que, em algum dos sistemas de coordenadas (donde em todos), sua representação é diferenciável.*

Por essa definição todas as operações para formas diferenciais em  $\mathbb{R}^n$  podem ser estendidas a formas diferenciais em  $M^n$ , por meio de sua representação local. Em particular, se  $\omega$  for uma  $k$ -forma diferencial em  $M^n$ , então  $d\omega$  é a  $(k+1)$ -forma representada por  $d\omega_\alpha$ , se  $\omega_\alpha$  for a representação de  $\omega$ , numa dada parametrização  $f_\alpha$  de  $M^n$ .

Dados dois campos diferenciáveis  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$  o colchete  $[X, Y]$  é também um campo diferenciável dado por:  $[X, Y]f = (XY - YX)f$  para cada  $f$  diferenciável definida em  $M^n$ . Existe uma relação muito importante entre a derivada exterior e o colchete, tal relação é o conteúdo da proposição seguinte.

**Proposição 1.9.** *Para quaisquer 1-forma diferenciável  $\omega$  e campos diferenciáveis  $X$  e  $Y$  em  $M$ , vale*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Sendo  $\omega$  uma 1-forma, tem-se que  $\omega$  pode ser expressa localmente como soma de termos da forma  $gdf$  com  $f, g$  funções diferenciáveis. É suficiente provarmos o

caso  $\omega = gdf$ . O primeiro membro da equação (1.2) é

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= d(gdf)(X, Y) = dg \wedge df(X, Y) \\ &= dg(X)df(Y) - dg(Y)df(X) \\ &= XgYf - YgXf. \end{aligned}$$

O segundo membro é

$$\begin{aligned} &X(gdf(Y)) - Y(gdf(X)) - gdf([X, Y]) \\ &= X(gYf) - Y(gXf) - g[X, Y]f \\ &= XgYf + gXYf - YgXf - gYXf - gXYf + gYXf \\ &= XgYf - YgXf. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a igualdade das expressões. □

### 1.3.1 O Referencial Móvel

**Definição 1.11.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana. Sejam  $U \subset M^n$  um conjunto aberto e  $e_1, \dots, e_n$  campos vetoriais diferenciáveis em  $U$ , tais que,  $\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_j^i$ , para cada  $p \in U$  onde  $\delta_j^i = 0$  se  $i \neq j$  e 1 se  $i = j$ . O referencial  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é chamado referencial móvel ortonormal.*

Todo  $p \in M$ , possui uma vizinhança que admite um referencial móvel, pois se  $(x_1, \dots, x_n)$  são coordenadas diferenciáveis em  $U \subset M$ , vizinhança de  $p$ , existe  $\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$  base de  $T_p M$  em cada  $p$ , aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para a base  $\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$  em cada  $p \in U$ , tem-se um referencial móvel ortonormal. Indicamos [6] para mais detalhes.

Para cada  $p \in U$  seja  $\{(\omega^1)_p, \dots, (\omega^n)_p\}$  a base dual de  $\{(e_i)_p\}$ , ou seja  $\omega^i(X) = \langle X, e_i \rangle$ , para todos  $i = 1, \dots, n$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Observe que cada  $\omega^i$  define uma 1-forma. Outras 1-formas de grande importância são as *formas de conexão* que passamos a definir. Seja  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica Riemanniana de  $M^n$ .

**Definição 1.12.** *As formas de conexão de  $U \subset M^n$  no referencial  $\{e_1, \dots, e_n\}$  são as 1-formas  $\omega_j^i$ , definidas por*

$$\omega_j^i(X) = \langle \nabla_X e_j, e_i \rangle \text{ para cada } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Pelas propriedades da conexão, tem-se que de fato cada  $\omega_j^i$  são 1-formas diferenciais em  $U$ . Pela compatibilidade da conexão com a métrica, temos

$$\omega_j^i(X) = \langle \nabla_X e_j, e_i \rangle = X \langle e_j, e_i \rangle - \langle e_j, \nabla_X e_i \rangle = -\omega_i^j(X).$$

Logo,  $\omega_j^i = -\omega_i^j$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . Em particular  $\omega_i^i = 0$ .

A seguir apresentaremos as equações de estrutura, definidas numa variedade Riemanniana de dimensão  $n$ . Seja  $(\mathcal{V}, ds^2)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ , com  $\nabla$  sua conexão Levi-Civita,  $R$  o tensor curvatura riemanniano,  $S$  um campo de operadores simétricos  $S_y : T_y\mathcal{V} \rightarrow T_y\mathcal{V}$ . Seja  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal local em  $\mathcal{V}$  com  $e_{n+1}$  normal a  $\mathcal{V}$  e  $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n\}$  a base dual de  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , i.e.,

$$\omega^i(e_k) = \delta_k^i.$$

Temos também

$$\omega^{n+1}(e_k) = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Definimos as formas  $\omega_j^i, \omega_j^{n+1}, \omega_{n+1}^i$  e  $\omega_{n+1}^{n+1}$  em  $\mathcal{V}$  por

$$\begin{aligned} \omega_j^i(e_k) &= \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle, \\ \omega_j^{n+1}(e_k) &= \langle S e_k, e_j \rangle, \\ \omega_{n+1}^i &= -\omega_i^{n+1}, \\ \omega_{n+1}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

As 1-formas acima, estão bem definidas e como  $\{e_i\}$  é ortonormal, obtemos

$$\nabla_{e_k} e_j = \sum_i \omega_j^i(e_k) e_i, \quad S e_k = \sum_j \omega_j^{n+1}(e_k) e_j.$$

Pela multilinearidade do tensor curvatura  $R$  tem-se para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$ .

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l} x_i y_j z_k w_l \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, denotaremos  $R_{ijk}^l = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ .

**Proposição 1.10.** *As seguintes equações são válidas:*

$$d\omega^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega^p = 0, \tag{1.4}$$

$$\sum_p \omega_p^{n+1} \wedge \omega^p = 0, \tag{1.5}$$

$$d\omega_j^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_l R_{klj}^i \omega^k \wedge \omega^l, \tag{1.6}$$

$$d\omega_j^{n+1} + \sum_p \omega_p^{n+1} \wedge \omega_j^p = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \langle \nabla_{e_k} S e_l - \nabla_{e_l} S e_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l. \tag{1.7}$$

*Demonstração.* Pela Proposição 1.9,

$$\begin{aligned}
d\omega^i(e_p, e_q) &= e_p(\omega^i(e_q)) - e_q(\omega^i(e_p)) - \omega^i([e_p, e_q]) \\
&= -\omega^i(\nabla_{e_p} e_q - \nabla_{e_q} e_p) \\
&= -\omega^i(\nabla_{e_p} e_q) + \omega^i(\nabla_{e_q} e_p) \\
&= -\langle \nabla_{e_p} e_q, e_i \rangle + \langle \nabla_{e_q} e_p, e_i \rangle \\
&= -\omega_q^i(e_p) + \omega_p^i(e_q).
\end{aligned}$$

Para  $q < p$  temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega^k(e_p, e_q) &= \sum_{k=1}^n \{\omega_k^i(e_p)\omega^k(e_q) - \omega_k^i(e_q)\omega^k(e_p)\} \\
&= \omega_1^i(e_p)\omega^1(e_q) - \omega_1^i(e_q)\omega^1(e_p) + \dots + \omega_q^i(e_p)\omega^q(e_q) - \omega_q^i(e_p)\omega^q(e_p) + \dots \\
&\quad + \omega_p^i(e_p)\omega^p(e_q) - \omega_p^i(e_q)\omega^p(e_p) + \dots + \omega_n^i(e_p)\omega^n(e_q) - \omega_n^i(e_q)\omega^n(e_p) \\
&= \omega_q^i(e_p) - \omega_p^i(e_q).
\end{aligned}$$

Somando os resultados, obtemos a equação (1.4).

$$d\omega^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega^p = 0$$

Para a segunda equação basta lembrar que  $S$  é auto adjunto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (\omega_k^{n+1} \wedge \omega^k)(e_p, e_q) &= \omega_q^{n+1}(e_p) - \omega_p^{n+1}(e_q) \\
&= \langle S e_p, e_q \rangle - \langle S e_q, e_p \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para provar a equação (1.6), observe que dado  $v \in T_p \mathcal{V}$ , então  $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$  e

$$\omega_j^i(v) = \omega_j^i\left(\sum_{k=1}^n v_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n v_k \omega_j^i(e_k) = \sum_{k=1}^n v_k \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle.$$

mas,

$$\omega^k(v) = \sum_k v_k \omega^k(e_k) = v_k.$$

Logo,

$$\omega_j^i(v) = \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^k(v) \quad \text{i.e.,} \quad \omega_j^i = \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^k.$$

Tomando a derivada exterior de  $\omega_j^i$

$$\begin{aligned}
d\omega_j^i &= \sum_{k=1}^n d(\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle) \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^n [d\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \wedge \omega^k + (-1)^0 \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle d\omega^k].
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Como  $d\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle$  é uma 1-forma, então

$$d\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle = \sum_{l=1}^n a_l \omega^l \Rightarrow d\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle(e_j) = \sum_{l=1}^n a_l \omega^l(e_j) = a_j.$$

Assim,

$$d\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle = \sum_{l=1}^n d\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle(e_l) \omega^l = \sum_{l=1}^n e_l \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^l.$$

Segue da equação (1.4) que (1.8) é igual a

$$\begin{aligned} d\omega_j^i &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e_l \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^l \wedge \omega^k - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega_l^k \wedge \omega^l \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle \nabla_{e_k} e_j, \nabla_{e_l} e_i \rangle \omega^l \wedge \omega^k + \langle \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^l \wedge \omega^k) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega_l^k \wedge \omega^l. \end{aligned}$$

Além disso, como  $\omega_l^k = \sum_q \langle \nabla_{e_q} e_l, e_k \rangle \omega^q$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega_l^k \wedge \omega^l &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \langle \nabla_{e_q} e_l, e_k \rangle \omega^q \wedge \omega^l \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \langle \nabla_{e_q} e_l, e_k \rangle e_k \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^q \wedge \omega^l \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \langle \nabla_{\nabla_{e_q} e_l} e_j, e_i \rangle \omega^q \wedge \omega^l. \end{aligned} \quad (1.9)$$

pois,  $\nabla_{e_q} e_l = \sum_k \langle \nabla_{e_q} e_l, e_k \rangle e_k$ . Por outro lado

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \omega_p^i \wedge \omega_j^p &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \langle \nabla_{e_l} e_p, e_i \rangle \langle \nabla_{e_k} e_j, e_p \rangle \omega^l \wedge \omega^k \\ &= - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \langle \nabla_{e_l} e_i, e_p \rangle \langle \nabla_{e_k} e_j, e_p \rangle \omega^l \wedge \omega^k \\ &= - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle \nabla_{e_l} e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Trocando os índices  $q$  por  $l$  e  $l$  por  $k$  em (1.9), obtemos

$$d\omega_j^i + \sum_{p=1}^n \omega_p^i \wedge \omega_j^p = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle e_i, \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j - \nabla_{\nabla_{e_l} e_k} e_j \rangle) \omega^l \wedge \omega^k.$$

Portanto

$$\begin{aligned} 2(d\omega_j^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle e_i, \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j - \nabla_{\nabla_{e_l} e_k} e_j \rangle) \omega^l \wedge \omega^k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle e_i, \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j - \nabla_{\nabla_{e_l} e_k} e_j \rangle) \omega^l \wedge \omega^k. \end{aligned}$$

Trocando os índices  $k$  por  $l$  na segunda parcela e usando o fato que  $\omega^k \wedge \omega^l = -\omega^l \wedge \omega^k$ .

$$\begin{aligned}
2(d\omega_j^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle e_i, \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j - \nabla_{e_k} \nabla_{e_l} e_j + \nabla_{\nabla_{e_k} e_l} e_j - \nabla_{\nabla_{e_l} e_k} e_j \rangle) \omega^l \wedge \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle e_i, \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j - \nabla_{e_k} \nabla_{e_l} e_j + \nabla_{[e_k, e_l]} e_j \rangle) \omega^l \wedge \omega^k \\
&= \langle e_i, \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R(e_k, e_l) e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R_{klj}^i \omega^k \wedge \omega^l.
\end{aligned}$$

Portanto temos a equação (1.6)

Para provar a equação (1.7), utilizaremos  $\omega_j^{n+1} = \sum_{k=1}^n \langle S e_k, e_j \rangle \omega^k$ , para obter

$$\begin{aligned}
d\omega_j^{n+1} &= \sum_{k=1}^n (d\langle S e_k, e_j \rangle \wedge \omega^k + \langle S e_k, e_j \rangle d\omega^k) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e_l \langle S e_k, e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle S e_k, e_j \rangle \omega_l^k \wedge \omega^l \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle \nabla_{e_l} S e_k, e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k + \langle S e_k, \nabla_{e_l} e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \langle S e_k, e_j \rangle \langle e_k, \nabla_{e_q} e_l \rangle \omega^q \wedge \omega^l.
\end{aligned}$$

Como  $S$  é auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \langle S e_k, e_j \rangle \langle e_k, \nabla_{e_q} e_l \rangle \omega^q \wedge \omega^l &= \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{k=1}^n \langle S e_j, e_k \rangle \langle e_k, \nabla_{e_q} e_l \rangle \omega^q \wedge \omega^l \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \langle S e_j, \nabla_{e_q} e_l \rangle \omega^q \wedge \omega^l.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^n \omega_p^{n+1} \wedge \omega_j^p &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \langle S e_k, e_p \rangle \omega^k \wedge \omega_j^p \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{l=1}^n \langle S e_k, e_p \rangle \langle e_p, \nabla_{e_l} e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle S e_k, \nabla_{e_l} e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
d\omega_j^{n+1} + \sum_{p=1}^n \omega_p^{n+1} \wedge \omega_j^p &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\langle \nabla_{e_l} S e_k, e_j \rangle - \langle S e_j, \nabla_{e_l} e_k \rangle) \omega^l \wedge \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle e_j, \nabla_{e_l} S e_k - S \nabla_{e_l} e_k \rangle \omega^l \wedge \omega^k.
\end{aligned}$$

Usando o fato  $\omega^k \wedge \omega^l = -\omega^l \wedge \omega^k$ , obtemos

$$\begin{aligned}
2(dw_j^{n+1} + \sum_{p=1}^n \omega_p^{n+1} \wedge \omega_j^p) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle e_j, \nabla_{e_l} S e_k - S \nabla_{e_l} e_k \rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle e_j, \nabla_{e_k} S e_l - S \nabla_{e_k} e_l \rangle \omega^k \wedge \omega^l \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle e_j, \nabla_{e_l} S e_k - \nabla_{e_k} S e_l + S \nabla_{e_k} e_l - S \nabla_{e_l} e_k \rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle e_j, \nabla_{e_k} S e_l - \nabla_{e_l} S e_k - S[e_k, e_l] \rangle \omega^k \wedge \omega^l.
\end{aligned}$$

□

## 1.4 Distribuições

Ao longo dessa seção, apresentamos a definição de distribuição, distribuição integrável e alguns resultados dessa teoria, que servirão como ferramenta na demonstração do resultado principal desse trabalho.

**Definição 1.13.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. A escolha de um subespaço linear  $k$ -dimensional  $D_p \subset T_p M$ , em cada ponto  $p \in M$  é chamada uma distribuição  $k$ -dimensional.*

Uma distribuição é dita ser diferenciável, se a união de todos os subespaços forma um subfibrado diferenciável  $D = \bigcup_{p \in M} D_p \subset TM$ .

O próximo lema dá um critério para garantir quando uma distribuição  $D$  é diferenciável.

**Lema 1.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e suponha que  $D \subset TM$  é uma distribuição  $k$ -dimensional. Então  $D$  é diferenciável se, e somente se a seguinte afirmação é satisfeita: Em cada ponto  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  sobre o qual existem campos de vetores diferenciáveis  $Y_1, \dots, Y_k : U \rightarrow TM$  tal que,  $Y_1|_q, \dots, Y_k|_q$  forma uma base para  $D_q$  em cada  $q \in U$*

Na condições do Lema, dizemos que  $D$  é a distribuição (localmente) gerada pelos campos vetores  $Y_1, \dots, Y_k$ .

Suponha  $D \subset TM$  uma distribuição diferenciável. Uma subvariedade imersa  $N \subset M$  é chamada uma *variedade integral* de  $D$  se  $T_p N = D_p$  em cada ponto  $p \in N$ .

Dizemos que uma distribuição é *integrável* se cada ponto de  $M$  está contido em uma variedade integral de  $D$ .

A primeira questão a analisar, é quando uma distribuição é integrável. Antes disso vamos ver alguns exemplos.

**Exemplo 1.5.** a) *Se  $X$  é qualquer campo de vetor diferenciável em  $M$  que nunca se anula. Então  $X$  gera uma distribuição diferenciável de dimensão 1 em  $M$ . A imagem de qualquer curva integral de  $X$  é uma variedade integral de  $D$ .*

*De fato, como  $X_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ , então  $\text{span}\{X_p\} = D_p$  é um subespaço de dimensão 1 de  $T_pM$ , logo  $D$  é uma distribuição em  $M$  e pelo lema anterior  $D$  é diferenciável. Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva integral, ou seja  $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$  para todo  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Como  $\alpha(t) \in M$ , seja  $t_0 \in I$ , e  $T_{\alpha(t_0)}\alpha(t) \subset T_{\alpha(t_0)}M$ , o espaço tangente de  $\alpha(t)$  no ponto  $\alpha(t_0)$ . Mas,*

$$T_{\alpha(t_0)}\alpha(t) = \text{span}\{\alpha'(t_0)\} = D_{\alpha(t_0)},$$

*sendo  $t_0$  arbitrário, segue que  $T_{\alpha(t)}\alpha(t) = D_{\alpha(t)}$ , para todo  $\alpha(t) \in \alpha(I)$  e assim concluímos que  $\alpha$  é uma variedade integral para  $D$ .*

b) *Defina uma distribuição em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , tomando  $D_p$  como o subespaço de  $T_p\mathbb{R}^n$  ortogonal ao vetor radial  $E_1|_p = \sum_{i=1}^n x_i \partial x_i(p)$ . Se estendermos  $E_1$  a um referencial local diferenciável  $\{E_1, \dots, E_n\}$  e aplicando o processo de Gram-Schmidt, então  $D$  é localmente gerado por  $\{E_2, \dots, E_n\}$ . Assim,  $D$  é uma distribuição de dimensão  $(n-1)$  em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Ao longo de cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , a esfera de raio  $|p|$  em torno de  $0$  é uma variedade integral.*

*Com efeito, sendo  $E_1|_p$  radial, então  $E_1|_p$  é múltiplo do vetor posição  $p$ , logo se  $D_p$  é o subespaço ortogonal à  $E_1|_p$ , então  $D_p = \text{span}\{p\}^\perp$  e se  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal, segue que  $u \in D_p$ ,  $u = \sum_{i=1}^n u_i E_i$  e como*

$$0 = \langle u, E_1 \rangle = \langle u_1 E_1 + \dots + u_n E_n, E_1 \rangle = u_1, \quad \text{segue que}$$

*$u \in \text{span}\{E_2, \dots, E_n\}$  Portanto,  $D_p = \text{span}\{E_2, \dots, E_n\}$ , pois  $E_j \perp E_1, j = 2, \dots, n$  e isso implica que  $\text{span}\{E_2, \dots, E_n\} \subset \text{span}\{p\}^\perp$ . Com isso  $D_p$  é uma distribuição diferenciável de dimensão  $(n-1)$ . Seja  $\mathbb{S}^{n-1}(|p|) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , já é de conhecimento que  $T_p\mathbb{S}^{n-1}(|p|) = \text{span}\{p\}^\perp$ , para cada  $p \in \mathbb{S}^{n-1}(|p|)$ , isso mostra que  $D_p = T_p\mathbb{S}^{n-1}(|p|)$  para cada  $p \in \mathbb{S}^{n-1}(|p|)$ . Portanto,  $\mathbb{S}^{n-1}(|p|)$  é a variedade integral de  $D$  em torno de  $0$ .*

Em geral, nem sempre uma distribuição é integrável. Queremos estabelecer quais condições uma distribuição deve satisfazer para que seja integrável. Apresentamos abaixo um exemplo de uma distribuição não integrável.

**Exemplo 1.6.** *Seja  $D$  a distribuição diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ , gerada pelos seguintes vetores:*

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

*$D$  não é integrável.*

*A prova é feita por absurdo, supondo que  $D$  admita uma variedade integral em torno da origem. Detalhes podem ser encontrados em [13].*

**Definição 1.14.** *Uma distribuição  $D$  é involutiva se dado qualquer par de campos de vetores diferenciáveis  $X, Y$  em  $D$ , (i. e.,  $X_p, Y_p \in D_p$ ) para cada  $p$ , seu colchete de Lie  $[X, Y]_p \in D_p$ .*

A proposição seguinte garante que ser involutiva é uma propriedade necessária para ser integrável.

**Proposição 1.11.** *Toda distribuição integrável é involutiva.*

*Demonstração.* Seja  $D \subset TM$  uma distribuição integrável. Sejam  $X, Y$  campos de vetores em  $U \subset M$ , tais que  $X_p, Y_p \in D$  para cada  $p \in U$ . Seja  $N \subset M$  uma variedade integral que contém  $p \in M$ , logo  $T_p N = D_p$ , como  $X_p, Y_p \in D_p$ , segue que  $X_p, Y_p$  são tangentes a  $N$ , resta mostrar que  $[X, Y]_p \in D_p$  para cada  $p \in U$ . Seja  $i : N \rightarrow M$  a aplicação de inclusão. Como,  $N$  é uma subvariedade de  $M$ , segue que para cada  $X, Y$  campos em  $U \subset M$ , tal que  $X_p, Y_p$  são tangentes a  $N$ ,  $N$  admite campos  $X|_N, Y|_N$  em  $N$  que são  $i$ -relacionado com  $X, Y$ , respectivamente. (cf. Proposição (8.25) de [13]), logo  $[X, Y]$  é  $i$ -relacionado com  $[X|_N, Y|_N]$ , ou seja,

$$di_p([X|_N, Y|_N]) = [X, Y]_{i(p)} \in T_{i(p)}N = T_p N.$$

Portanto,  $[X, Y]_p \in T_p N = D_p$ , para cada  $p \in U$ . Como isto é verdadeiro em qualquer  $p \in U$ , segue que  $D$  é involutiva.  $\square$

Observe que no Exemplo 1.6, a distribuição não é involutiva, pois

$$[X, Y] = XY - YX = -\frac{\partial}{\partial z},$$

que não pertence a  $D$ , já que  $D$  é uma combinação linear de  $X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}$ , e  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ .

O próximo Teorema é o principal resultado da teoria de distribuição e garante que a condição de involutividade é também uma condição suficiente para que uma distribuição seja integrável. Esse é o chamado Teorema de Frobenius.

**Teorema 1.1** (Frobenius). *Uma distribuição  $D$  em uma variedade  $M$ , é integrável se, e somente se é involutiva.*

*Demonstração.* A prova pode ser encontrada em [13, 18]. □

## 2 Variedades Homogêneas de dimensão 3

Sejam  $(M, g)$  e  $(N, h)$  variedades Riemannianas. Dizemos que um *difeomorfismo*  $f : M \rightarrow N$  é uma *isometria* se

$$g(u, v)_p = h(df_p(u), df_p(v))_{f(p)}, \quad \text{para quaisquer } u, v \in T_p M \text{ e } p \in M.$$

A aplicação  $f$  é uma *isometria local* em  $p \in M$  se existe um aberto  $U \subset M$ , com  $p \in U$ , tal que  $f : U \rightarrow f(U)$  é um difeomorfismo satisfazendo

$$g(u, v)_p = h(df_p(u), df_p(v))_{f(p)} \quad \text{para todo } u, v \in T_p U, \quad p \in U.$$

**Definição 2.1.** *Uma variedade  $M$  é dita homogênea se para cada dois pontos  $p, q$  em  $M$ , existe uma isometria  $\varphi : M \rightarrow M$  que leva  $p$  em  $q$ .*

Seja  $Isom(M)$  o conjunto das isometrias de  $M$  (i.e.,  $Isom(M) = \{\varphi : M \rightarrow M; \varphi \text{ é uma isometria}\}$ ). Tal conjunto munido com a operação de composição de funções, é um grupo ao que chamaremos de *grupo de isometria* ou *grupo isométrico*. É possível mostrar que  $Isom(M)$  é uma subvariedade fechada de  $O(M)$ , o fibrado de referenciais ortonormais sobre  $M$ , o que implica que  $Isom(M)$  é um grupo de Lie, com isso a *dimensão de  $Isom(M)$*  é definida como a dimensão de seu espaço vetorial em cada ponto. Para detalhes veja [12].

A definição de variedade Homogênea é equivalente a dizer que  $Isom(M)$  age transitivamente sobre  $M$ . Veja [13].

**Exemplo 2.1.**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{S}^n$  são exemplos de variedades homogêneas. Com efeito, o grupo de isometria de  $\mathbb{R}^n$  é composto das aplicações da forma  $Ax + b$  onde  $A$  é uma matriz ortogonal e  $b \in \mathbb{R}^n$  é um ponto. Qualquer  $y \in \mathbb{R}^n$  não nulo é enviado em outro  $x \in \mathbb{R}^n$ , não nulo pela seguinte isometria: Tome  $\frac{x}{|x|}$  e  $\frac{y}{|y|}$  e complete duas bases ortonormais, uma contendo  $\frac{x}{|x|}$  e a outra  $\frac{y}{|y|}$ . Seja  $A$  e  $A'$  matrizes ortogonais cujas colunas são as coordenadas das bases ortonormais escolhidas. Verifique que  $A'A^{-1}$  leva  $x$  em  $y$ . O grupo de isometria de  $\mathbb{S}^n$  é dado pela restrição a  $\mathbb{S}^n$  de cada aplicação do grupo ortogonal  $O_{n+1}$ , ou seja, a multiplicação de matrizes  $(A, x) \mapsto Ax$ , com  $A \in O_{n+1}$  e  $x \in \mathbb{S}^n$ . Por fim, as isometrias de  $\mathbb{H}^n$  são as restrições a  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$  das transformações conformes de  $\mathbb{R}^n$  que levam  $\mathbb{H}^n$  sobre si mesmo, conforme Teorema 5.3 de [5].

As variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três, foram totalmente classificadas e tal classificação está relacionada com a dimensão do grupo de isometria, que nesse caso assume os valores 3, 4 ou 6. Mais detalhes podem ser encontrados em [21, 22].

Quando o grupo de isometria tem dimensão 3, as variedades homogêneas simplesmente conexas tem a geometria do grupo de Lie  $Sol_3$ . Quando a dimensão do grupo de isometria é 6, tem-se os espaços formas, que são as variedades com curvatura seccional constante, ou seja o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura seccional  $K = 0$ , o espaço Hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , com  $K = -1$  e a esfera unitária  $\mathbb{S}^3$ , com  $K = 1$ .

Por fim, se a dimensão do grupo de isometria é 4, essas variedades homogêneas, que denotaremos por  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , são fibrações sobre uma forma espacial de dimensão 2, cujas fibras são trajetórias de um campo de Killing  $\xi$ , um campo vertical. Tais variedades são classificadas a menos de isometrias, pelas curvatura  $\kappa$  da superfície base  $\mathbb{M}_2(\kappa)$  e  $\tau$  a curvatura do fibrado, números reais que satisfazem a condição  $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ . Além disso a curvatura do fibrado é o número real tal que  $\overline{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$ , para qualquer  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$ , onde  $\overline{\nabla}$  é a conexão Riemanniana de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

A classificação de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  é resumida em

$$\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \begin{cases} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, & \text{se } \kappa > 0 \text{ e } \tau = 0 \\ \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, & \text{se } \kappa < 0 \text{ e } \tau = 0 \\ Nil_3, (\text{espaço de Heisenberg}) & \text{se } \kappa = 0 \text{ e } \tau \neq 0 \\ \mathbb{S}_\kappa^3, (\text{As esferas de Berger}), & \text{se } \kappa > 0 \text{ e } \tau \neq 0 \\ \widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}), & \text{se } \kappa < 0 \text{ e } \tau \neq 0 \end{cases} .$$

Para simplificar a notação denotaremos apenas por  $\mathbb{E}$ , as variedades homogêneas de dimensão 3, simplesmente conexas, com grupo de isometria de dimensão 4. Os resultados deste trabalho são tratados no caso em que  $\mathbb{E}$  não é um produto Riemanniano, logo consideraremos  $\tau \neq 0$ . O caso  $\tau = 0$  foi estudado em [4].

Iniciamos investigando as propriedades gerais de  $\mathbb{E}$ .

Vejamos que o espaço  $\mathbb{E}$  admite um referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , construído naturalmente. Para isso considere a submersão Riemanniana  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}_2(\kappa)$  dada por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Seja  $\{e_1, e_2\}$  um referencial ortonormal de  $T_q \mathbb{M}_2(\kappa)$ ,  $q \in \mathbb{M}_2(\kappa)$ , e  $\{E_1, E_2\}$  os únicos levantamentos horizontais, de  $e_1$  e  $e_2$  respectivamente, i.e.,

$$d\pi_p(E_1) = e_1(\pi(p)), \quad d\pi_p(E_2) = e_2(\pi(p)),$$

e  $E_3 = \xi$  o campo de Killing vertical. Por construção, os campos  $E_1, E_2$  são unitários e

ortogonais, pois

$$\langle E_i, E_j \rangle_p = \langle d\pi_p(E_i), d\pi_p(E_j) \rangle_{\pi(p)} = \langle e_i, e_j \rangle_{\pi(p)} = \delta_j^i.$$

Como  $E_3 = \xi$  é um campo vertical, segue que  $E_1, E_2$  são ortogonais à  $E_3$ . Assim  $\{E_1, E_2, E_3\}$  é um referencial ortonormal em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

Sejam  $\bar{\nabla}$ , e  $\bar{R}$  a conexão Riemanniana e o tensor curvatura de  $\mathbb{E}$ , respectivamente. Seja  $\{E_1, E_2, E_3\}$  um referencial ortonormal local em  $\mathbb{E}$ , com  $E_3 = \xi$ . Temos que  $\bar{\nabla}_{E_\beta} E_\gamma = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^k E_k$ , onde  $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^k$  são os símbolos de Christoffel associados ao referencial  $\{E_1, E_2, E_3\}$ . Podemos escrever

$$\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \langle \bar{\nabla}_{E_\beta} E_\gamma, E_\alpha \rangle.$$

Sendo  $\xi = E_3$  campo de Killing, então  $\langle \bar{\nabla}_{E_\alpha} E_3, E_\beta \rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_\beta} E_3, E_\alpha \rangle = 0$ . Para  $\alpha = 1, \beta = 2$  e  $\gamma = 3$  temos

$$\bar{\Gamma}_{23}^1 = \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_1 \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_1} E_3, E_2 \rangle = -\bar{\Gamma}_{13}^2.$$

Como  $E_3 = \xi$  é Killing, então  $\bar{\nabla}_X E_3 = \tau X \times E_3 \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$ , onde  $X \times Y$  é o único campo que satisfaz  $\langle X \times Y, Z \rangle = \det_{\{E_1, E_2, E_3\}}(X, Y, Z)$ , isto é, o determinante das coordenadas dos campos  $X, Y, Z$  na base  $\{E_1, E_2, E_3\}$ . Assim

$$-\bar{\Gamma}_{13}^2 = -\langle \bar{\nabla}_{E_1} E_3, E_2 \rangle = -\tau \det(E_1, E_3, E_2) = -\tau(-\det(E_1, E_2, E_3)) = \tau$$

e usando a compatibilidade com a métrica,  $\bar{\Gamma}_{23}^1 = -\bar{\Gamma}_{21}^3$  e  $-\bar{\Gamma}_{13}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^3$ , então

$$\bar{\Gamma}_{23}^1 = -\bar{\Gamma}_{21}^3 = -\bar{\Gamma}_{13}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^3 = \tau.$$

Analogamente,

$$\bar{\Gamma}_{32}^1 = \langle \bar{\nabla}_{E_3} E_2, E_1 \rangle = -\langle E_2, \bar{\nabla}_{E_3} E_1 \rangle = -\bar{\Gamma}_{31}^2 = \tau - \sigma, \quad \text{onde}$$

$\sigma$  é um número real que será exibido posteriormente. Os demais símbolos de Christoffel, são todos nulos.

$\bar{\nabla}_{E_\alpha} E_\alpha = 0$  para todo  $\alpha = 1, 2, 3$ , e

Assim

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= \bar{\Gamma}_{21}^1 E_1 + \bar{\Gamma}_{21}^2 E_2 + \bar{\Gamma}_{21}^3 E_3 = -\tau E_3 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \bar{\Gamma}_{12}^1 E_1 + \bar{\Gamma}_{12}^2 E_2 + \bar{\Gamma}_{12}^3 E_3 = \tau E_3 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= 2\tau E_3. \\ [E_3, E_1] &= \bar{\nabla}_{E_3} E_1 - \bar{\nabla}_{E_1} E_3 = \bar{\Gamma}_{31}^2 E_2 - \bar{\Gamma}_{13}^2 E_2 = (\sigma - \tau) E_2 - (-\tau E_2) = \sigma E_2. \\ [E_2, E_3] &= \bar{\nabla}_{E_2} E_3 - \bar{\nabla}_{E_3} E_2 = \bar{\Gamma}_{23}^1 E_1 - \bar{\Gamma}_{32}^1 E_1 = \tau E_1 - (\tau - \sigma) E_1 = \sigma E_1. \end{aligned}$$

É possível identificar  $\bar{R}$  com um operador  $\mathcal{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ , definindo:

$$\langle \mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle.$$

$\mathcal{R}$  é um operador simétrico, chamado de *operador curvatura*, logo a matriz que representa  $\mathcal{R}$  é diagonalizável. Vamos mostrar que a base  $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$  diagonaliza  $\mathcal{R}$ . Para isso identificaremos os termos da matriz que representa  $\mathcal{R}$  por

$$\mathcal{R}_{ij} = \langle \mathcal{R}(e_i), e_j \rangle,$$

onde  $e_i = E_j \wedge E_k$ , com  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Primeiro observe que se  $i, j$  e  $k$  são distintos entre si, então  $\bar{R}_{ij} = 0$ .

De fato,  $\bar{\nabla}_{E_i} E_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k E_k$ , já que os únicos símbolos de Christoffel que não se anulam são os com índices diferentes dois a dois. Logo  $\bar{\nabla}_{E_i} E_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, 3$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij} &= \langle \bar{R}(E_j, E_k)E_i, E_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_j} E_i - \bar{\nabla}_{E_j} \bar{\nabla}_{E_k} E_i + \bar{\nabla}_{[E_j, E_k]} E_i, E_k \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{E_k} \bar{\Gamma}_{ij}^k E_k - \bar{\nabla}_{E_j} \bar{\Gamma}_{ki}^j E_j - \bar{\nabla}_{(\bar{\Gamma}_{jk}^i - \bar{\Gamma}_{kj}^i)E_i} E_i, E_k \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{R}_{ii}$  é a diagonal de  $\mathcal{R}$  e é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= \langle \bar{R}(E_2, E_3)E_2, E_3 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_3} \bar{\nabla}_{E_2} E_2 - \bar{\nabla}_{E_2} \bar{\nabla}_{E_3} E_2 + \bar{\nabla}_{[E_2, E_3]} E_2, E_3 \rangle \\ &= -\tau(\sigma - \tau) \langle E_3, E_3 \rangle + \sigma \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_3 \rangle \\ &= \tau^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{22} &= \langle \bar{R}(E_3, E_1)E_3, E_1 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_1} \bar{\nabla}_{E_3} E_3 - \bar{\nabla}_{E_3} \bar{\nabla}_{E_1} E_3 + \bar{\nabla}_{[E_3, E_1]} E_3, E_1 \rangle \\ &= \tau(\tau - \sigma) \langle E_1, E_1 \rangle + \sigma \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_1 \rangle \\ &= \tau^2 - \sigma\tau + \sigma\tau \\ &= \tau^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{33} = \langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_2} \overline{\nabla}_{E_1} E_1 - \overline{\nabla}_{E_1} \overline{\nabla}_{E_2} E_1 + \overline{\nabla}_{[E_1, E_2]} E_1, E_2 \rangle \\
&= -\tau^2 \langle E_2, E_2 \rangle + \langle 2\tau \overline{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle \\
&= -\tau^2 + 2\tau(\sigma - \tau) \\
&= -3\tau^2 + 2\tau\sigma.
\end{aligned}$$

Como,  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}_2(\kappa)$  é uma submersão Riemanniana, então a curvatura seccional de um 2-plano  $\Pi$  em  $T_q\mathbb{M}_2(\kappa)$ , com  $q \in \mathbb{M}_2(\kappa)$ , gerado por um par ortonormal  $\{X, Y\}$  é:

$$K(\Pi) = \overline{K}(\overline{\Pi}) + \frac{3}{4} \|\overline{[X, Y]}^v\|^2$$

onde  $\overline{X}, \overline{Y}$  são os levantamentos horizontais de  $X, Y$  em  $\mathbb{M}_2(\kappa)$ ,  $\overline{K}(\overline{\Pi})$  é a curvatura seccional de um 2-plano  $\overline{\Pi}$  em  $T_p\mathbb{E}$ , com  $p \in \mathbb{E}$ , gerado por  $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$  e  $Z^v$  denota a parte vertical de um campo vetorial  $Z$  em  $\mathbb{E}$ . Tomando  $\overline{X} = E_1, \overline{Y} = E_2$ . Temos

$$\begin{aligned}
\kappa = K(\Pi) &= \overline{K}(E_1, E_2) + \frac{3}{4} \|\overline{[E_1, E_2]}^v\|^2 \\
&= \langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle + \frac{3}{4} \|2\tau E_3^v\|^2 \\
&= -3\tau^2 + 2\tau\sigma + \frac{3}{4} 4\tau^2 = 2\tau\sigma.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}. \quad (2.1)$$

A proposição seguinte nos dá a expressão do tensor curvatura  $\overline{R}$  de  $\mathbb{E}$ .

**Proposição 2.1.** *Para quaisquer campos de vetores  $X, Y, Z, W$  em  $\mathbb{E}$  temos*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2) \langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \langle R_1(\xi; X, Y)Z, W \rangle$$

com

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X$$

$$R_1(V; X, Y)Z = \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y.$$

*Demonstração.* Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$ . Vamos considerar as componentes horizontal e vertical de cada um destes campos. Assim podemos escrever o campo  $X$ , por exemplo, como  $X = \widetilde{X} + x\xi$ , onde  $\widetilde{X}$  denota a componente horizontal e  $x = \langle X, \xi \rangle$  a componente vertical de  $X$ . Usando a expressão do tensor curvatura e aplicando as propriedades relacionada a este tensor, obtemos uma soma de 16 parcelas, onde os

termos em que contém  $\xi$  três, quatro vezes, ou duas vezes nas posições 1, 2 ou 3, 4 desaparece por antissimetria. Logo

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + x\langle \bar{R}(\xi, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + y\langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi)\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + z\langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi, \tilde{W} \rangle + zx\langle \bar{R}(\xi, \tilde{Y})\xi, \tilde{W} \rangle + zy\langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi)\xi, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + w\langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi \rangle + wx\langle \bar{R}(\xi, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi \rangle + wy\langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi)\tilde{Z}, \xi \rangle\end{aligned}$$

Vejam os que ocorrem nas parcelas em que  $\xi$  aparece apenas uma vez. Observe que cada  $\tilde{X}$  horizontal pode ser escrito como:  $\tilde{X} = \tilde{x}_1 E_1 + \tilde{x}_2 E_2$ , já que  $E_3 = \xi$  é vertical, com  $\tilde{x}_i = \langle \tilde{X}, E_i \rangle$  e assim  $\xi \wedge \tilde{X}$  pode ser escrito na base  $\{E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2\}$ . De fato, pelas propriedades do produto exterior,

$$\begin{aligned}\xi \wedge \tilde{X} &= E_3 \wedge (\tilde{x}_1 E_1 + \tilde{x}_2 E_2) = \tilde{x}_1 E_3 \wedge E_1 + \tilde{x}_2 E_3 \wedge E_2 = \tilde{x}_1 E_3 \wedge E_1 - \tilde{x}_2 E_2 \wedge E_3, \\ \tilde{X} \wedge \tilde{Y} &= (\tilde{x}_1 E_1 + \tilde{x}_2 E_2) \wedge (\tilde{y}_1 E_1 + \tilde{y}_2 E_2) = (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1) E_1 \wedge E_2.\end{aligned}$$

Como

$$\langle \bar{R}(\xi, \tilde{X})\tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle \mathcal{R}(\xi \wedge \tilde{X}), \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}(\xi \wedge \tilde{X}), \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \rangle &= \langle \mathcal{R}(\tilde{x}_1 E_3 \wedge E_1 - \tilde{x}_2 E_2 \wedge E_3), (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1) E_1 \wedge E_2 \rangle \\ &= (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1) [\tilde{x}_1 \langle \mathcal{R}(E_3 \wedge E_1), E_1 \wedge E_2 \rangle - \tilde{x}_2 \langle \mathcal{R}(E_2 \wedge E_3), E_1 \wedge E_2 \rangle] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  são campos de vetores horizontais arbitrários, segue que todas as parcelas que contém  $\xi$  apenas uma vez são todas nulas.

Para calcular as parcelas restantes, usamos a mesma decomposição dos campos horizontais e as propriedades do tensor curvatura, obtendo

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}), \tilde{Z} \wedge \tilde{W} \rangle &= (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1)(\tilde{z}_1 \tilde{w}_2 - \tilde{z}_2 \tilde{w}_1) \langle \bar{R}(E_1 \wedge E_2), E_1 \wedge E_2 \rangle \\ &= (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1)(\tilde{z}_1 \tilde{w}_2 - \tilde{z}_2 \tilde{w}_1)(-3\tau^2 + 2\sigma\tau).\end{aligned}$$

Sendo  $\{E_1, E_2, E_3\}$  uma base ortonormal, então

$$\begin{aligned}\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle &= (\tilde{x}_1 \tilde{z}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{z}_2)(\tilde{y}_1 \tilde{w}_1 + \tilde{y}_2 \tilde{w}_2) - (\tilde{x}_1 \tilde{w}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{w}_2)(\tilde{y}_1 \tilde{z}_1 + \tilde{y}_2 \tilde{z}_2) \\ &= (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1)(\tilde{z}_1 \tilde{w}_2 - \tilde{z}_2 \tilde{w}_1).\end{aligned}$$

De  $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}$ , tem-se

$$\langle \mathcal{R}(\tilde{X} \wedge \tilde{Y})\tilde{Z} \wedge \tilde{W} \rangle = (\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle)(\kappa - 3\tau^2).$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}(\xi \wedge \tilde{Y}), \tilde{Z} \wedge \tilde{W} \rangle &= \langle \mathcal{R}(\tilde{y}_1 E_3 \wedge E_1 - \tilde{y}_2 E_2 \wedge E_3), \tilde{w}_1 E_3 \wedge E_1 - \tilde{w}_2 E_2 \wedge E_3 \rangle \\
&= \tilde{w}_1 \tilde{y}_1 \langle \mathcal{R}(E_3 \wedge E_1), E_3 \wedge E_1 \rangle + \tilde{w}_2 \langle \mathcal{R}(E_2 \wedge E_3), E_2 \wedge E_3 \rangle \\
&= \tau^2 (\tilde{w}_1 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \tilde{w}_2 \tilde{y}_2) \\
&= \tau^2 \langle \tilde{W}, \tilde{Y} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{R}(\tilde{X} \wedge \xi), \xi \wedge \tilde{W} \rangle = -\tau^2 \langle \tilde{W}, \tilde{X} \rangle.$$

$$\langle \mathcal{R}(\xi \wedge \tilde{Y}), \tilde{Z} \wedge \xi \rangle = -\tau^2 \langle \tilde{Z}, \tilde{Y} \rangle.$$

$$\langle \mathcal{R}(\tilde{X} \wedge \xi), \tilde{Z} \wedge \xi \rangle = \tau^2 \langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle.$$

Com isso

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle) (\kappa - 3\tau^2) \\
&\quad + \tau^2 (zx \langle \tilde{W}, \tilde{Y} \rangle + wy \langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle - zy \langle \tilde{W}, \tilde{X} \rangle - wx \langle \tilde{Z}, \tilde{Y} \rangle) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Como

$$\langle X, Z \rangle = \langle \tilde{X} + x\xi, \tilde{Z} + z\xi \rangle = \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle + \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle$$

então  $\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle = \langle X, Z \rangle - \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle$ . Logo

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle &= \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle \\
&\quad - \langle Y, W \rangle \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle + \langle X, W \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \\
&\quad + \langle Y, Z \rangle \langle X, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

A segunda parcela de (2.2) é:

$$\langle X, Z \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle.$$

Após somar os termos comuns tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\kappa - 3\tau^2) (\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) \\
&\quad + (\kappa - 4\tau^2) (\langle X, W \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle + \langle Y, Z \rangle \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \\
&\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle).
\end{aligned}$$

Fazendo

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X,$$

$$R_1(V; X, Y)Z = \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y,$$

concluimos a demonstração.  $\square$

## 2.1 Variedade homogênea com grupo de isometria de dimensão 4

Nesta seção descreveremos a geometria das variedades homogêneas de dimensão 3 com grupo de isometria de dimensão 4.

### 2.1.1 As Esferas de Berger

Para apresentarmos a estrutura geométrica das esferas de Berger, vamos introduzir algumas definições e rever alguns resultados necessários. As referências [13, 16, 17], podem ser verificadas para mais detalhes.

Vamos apresentar uma submersão Riemanniana entre a esfera unitária  $\mathbb{S}^3$  e a esfera bidimensional  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$  de raio  $\frac{1}{2}$ , conhecida como a *fibração de Hopf*, que decompõe  $\mathbb{S}^3$  em círculos  $\mathbb{S}^1$  disjuntos. A fibração de Hopf é definida por

$$(z, w) \mapsto \left( \frac{1}{2}(\|w\|^2 - \|z\|^2), z\bar{w} \right).$$

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3.$$

Veamos a seguir algumas definições. Seja  $\mathbb{S}^3$  a esfera unitária de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  definida por

$$\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; \|z\| + \|w\| = 1\}$$

e  $\mathbb{S}^1 = \{\alpha \in \mathbb{C}; \|\alpha\| = 1\}$  o *grupo circular*. Defina a seguinte multiplicação entre  $\mathbb{S}^1$  e  $\mathbb{S}^3$ .

$$\alpha \cdot (z, w) = (\alpha z, \alpha w),$$

onde em cada coordenada consideramos o produto complexo. Note que essa multiplicação, define uma ação por isometria em  $\mathbb{S}^3$ . Definimos, a seguinte relação  $(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2)$  se, e somente se, existe  $\alpha \in \mathbb{S}^1$ , tal que  $(z_1, w_1) = (\alpha z_2, \alpha w_2)$ , tal relação é de equivalência. Assim, o conjunto das classes de equivalência  $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$  é uma variedade, chamada de *espaço projetivo complexo* e denotada por  $CP^1 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ . Cada classe de equivalência é o conjunto  $\{\alpha \cdot (z, w) \in \mathbb{S}^3, \alpha \in \mathbb{S}^1\}$ , e como  $\|z\|^2 + \|w\|^2 = 1$  e  $\|\alpha\| = 1$ , segue que os pontos  $\alpha \cdot (z, w) \in \mathbb{S}^1$ , ou seja, as classes são parte do círculo  $\mathbb{S}^1$ .

Como a ação de  $\mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{S}^3$  é por isometria, induzimos uma métrica na projeção natural  $\mathbb{S}^3 \rightarrow CP^1$ , de modo que seja uma submersão Riemanniana. Essa submersão é chamada de fibração de Hopf, que é dada por:

$$(z, w) \mapsto \left( \frac{1}{2}(\|w\|^2 - \|z\|^2), z\bar{w} \right),$$

onde  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  e  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ . De fato, essa aplicação é uma submersão Riemanniana. Veja [16] pág. 4.

Quando  $\tau \neq 0$  e  $\kappa > 0$ , denotaremos  $\mathbb{E} = \mathbb{S}^3$ . Neste caso temos uma fibração sobre  $\mathbb{S}^2$ . As *Esferas de Berger*, assim conhecidas, são obtidas deformando a métrica de uma esfera preservando a fibração de Hopf, mas modificando o comprimento das fibras.

Seja  $SO_3(\mathbb{R})$  o conjunto das matrizes de ordem 3, ortogonais com determinante 1, tal conjunto é identificado com o fibrado tangente unitário  $US^2$  de  $\mathbb{S}^2$ , já que  $SO_3(\mathbb{R})$  age transitivamente em  $US^2$ , e o estabilizador de qualquer ponto em  $US^2$  é trivial. Como  $\mathbb{S}^3$  é o recobrimento universal de  $SO_3(\mathbb{R})$ , segue que se tivermos uma métrica em  $SO_3(\mathbb{R})$ , induzimos uma métrica em  $\mathbb{S}^3$ . Vamos apresentar uma expressão para essa métrica, determinando uma métrica em  $US^2 \cong SO_3(\mathbb{R})$ . Seja  $D$  um domínio de  $\mathbb{S}^2$ , tomando  $\varphi$  uma parametrização conforme para  $D$ , sua métrica é dada por  $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$ , onde  $\lambda$  é o fator conforme (i.e.,  $\lambda > 0$  definida no domínio de  $\varphi$ ). Como

$$UD = \{(p, v); p \in D \text{ e } v \in T_p D, \|v\| = 1\},$$

então, uma parametrização para  $UD$  é dada por:

$$(x, y, \theta) \mapsto \left( \varphi(x, y), \frac{1}{\lambda}(\cos\theta\partial x + \sin\theta\partial y) \right).$$

onde na primeira coordenada parametrizamos  $D$  e na segunda o espaço tangente  $T_p D$ . Observe que a segunda coordenada é dada dessa forma pois  $\{\partial x, \partial y\}$  é a base de  $T_p D$ , então  $v = a\partial x + b\partial y$  e como  $\|v\| = 1$  tem-se  $1 = \|v\|^2 = \lambda^2(a^2 + b^2)$ . Portanto,  $(a, b) \in \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ .

Logo, existe  $\theta \in \mathbb{R}$ , tal que  $a = \frac{1}{\lambda}\cos\theta$  e  $b = \frac{1}{\lambda}\sin\theta$ .

Dado  $(p, v) \in UD$ , existe  $(x, y, \theta)$  tal que  $p = \varphi(x, y)$  e  $v \in T_p D$ . Seja  $V \in T_{(p,v)}(UD)$ , e uma curva  $\alpha(t) = (p(t), v(t))$  em  $UD$  tal que  $p(0) = p, v(0) = v$  e  $\alpha'(0) = V$ . Assim a norma de  $V$  é dada por

$$\|V\|_{(p,v)}^2 = \|d\pi(V)\|_p^2 + \left\| \frac{Dv}{dt}(0) \right\|_p^2.$$

onde  $\pi : UD \rightarrow D$  é a projeção canônica dada por  $\pi(p, v) = p$ .

Tomando  $\alpha(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$  e a parametrização restrita à curva temos

$$\left( \varphi(x(t), y(t)), \frac{1}{\lambda}(\cos\theta(t)\partial x + \sin\theta(t)\partial y) \right)$$

então,  $v(t) = \frac{1}{\lambda}(\cos\theta(t)\partial x + \sin\theta(t)\partial y)$  é um campo vetorial em  $D$ .

Pelas propriedades da derivada covariante e restringindo  $\lambda$  aos pontos da curva tem-se  $\lambda(x(t), y(t))$ . Então

$$\begin{aligned}\frac{Dv}{dt} &= \frac{D}{dt} \left( \frac{1}{\lambda} (\cos\theta \partial x + \operatorname{sen}\theta \partial y) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\lambda} \cos\theta \right) \partial x + \frac{1}{\lambda} \cos\theta \frac{D(\partial x)}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \right) \partial y + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \frac{D(\partial y)}{dt} \\ &= \left( \frac{-\lambda'}{\lambda^2} \cos\theta - \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \cdot \theta' \right) \partial x + \left( \frac{-\lambda'}{\lambda^2} \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\lambda} \cos\theta \cdot \theta' \right) \partial y \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \cos\theta \frac{D(\partial x)}{dt} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \frac{D(\partial y)}{dt}.\end{aligned}$$

Como  $p(t) = (x(t), y(t))$  é uma curva em  $D$ , temos

$$\frac{D(\partial x)}{dt} = \nabla_{\frac{dx}{dt}} \partial x = x' \nabla_{\partial x} \partial x + y' \nabla_{\partial y} \partial x.$$

$$\frac{D(\partial y)}{dt} = \nabla_{\frac{dy}{dt}} \partial y = x' \nabla_{\partial x} \partial y + y' \nabla_{\partial y} \partial y.$$

Como a matriz da métrica  $ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$  e de sua inversa são dadas respectivamente por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix},$$

usando a expressão

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \{ \partial x_i (g_{jk}) + \partial x_j (g_{ki}) - \partial x_k (g_{ij}) \} g^{km},$$

associando  $x_1 \rightarrow x$  e  $x_2 \rightarrow y$ , obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \{ (\partial x (g_{22})) + \partial y (g_{21}) - \partial y (g_{12}) \} g^{22} \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial x (\lambda^2) + \partial y (0) - \partial y (0) \} \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2\lambda \lambda_x \} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda_x}{\lambda}\end{aligned}$$

Com cálculos semelhantes encontramos os demais símbolos de Christoffel, que são

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \frac{\lambda_x}{\lambda}, \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_y}{\lambda}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-\lambda_y}{\lambda} \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-\lambda_x}{\lambda}.$$

Usando que  $\lambda' = x'\lambda_x + y'\lambda_y$  e os símbolos de Christoffel, determinamos cada  $\nabla_{\partial x_i} \partial x_j = \Gamma_{ij}^1 \partial x_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial x_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{dt} &= \frac{-x'\lambda_x - y'\lambda_y}{\lambda^2} (\cos\theta \partial x + \sen\theta \partial y) + \frac{\theta'}{\lambda} (-\sen\theta \partial x + \cos\theta \partial y) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} [x' \cos\theta (\lambda_x \partial x - \lambda_y \partial y) + \cos\theta y' (\lambda_y \partial x + \lambda_x \partial y) \\ &\quad + x' \sen\theta (\lambda_y \partial x + \lambda_x \partial y) + y' \sen\theta (-\lambda_x \partial x + \partial y)] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [\sen\theta (-\lambda\theta' + \lambda_y x' - \lambda_x y) \partial x + \cos\theta (\lambda\theta' - \lambda_y x' + y\lambda_x y')] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (\lambda\theta' - \lambda_y x' + y\lambda_x y') (\cos\theta \partial y - \sen\theta \partial x). \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \frac{Dv}{dt}(0) \right\|_p^2 = \lambda^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4} (\lambda\theta' - \lambda_y x' + \lambda_x y')^2 = \frac{1}{\lambda^2} (\lambda\theta' - \lambda_y x' + \lambda_x y')^2.$$

Como  $V = \alpha'(0) = (x'(0), y'(0), \theta'(0))$  e  $\pi$  é a projeção, que é linear, segue que

$$d\pi_{(p,v)}(V) = x'(0)\partial x + y'(0)\partial y.$$

$$\|d\pi_{(p,v)}(V)\| = \|x'(0)\partial x + y'(0)\partial y\|_p^2 = \lambda^2(x'^2 + y'^2).$$

Portanto

$$\|V\|_p^2 = \lambda^2(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{\lambda^2} (\lambda\theta' - \lambda_y x' + \lambda_x y')^2.$$

Fazendo  $z = \theta$  no recobrimento universal, temos a seguinte expressão da métrica

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left(-\frac{\lambda_y}{\lambda} dx + \frac{\lambda_x}{\lambda} dy + dz\right)^2.$$

Tomando  $D = \mathbb{S}^2(\frac{1}{2}) \setminus \{\infty\}$  e parametrizando  $D$  com a projeção estereográfica tem-se

$$\lambda = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Logo  $\lambda_x = \frac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2}$  e  $\lambda_y = \frac{-2y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$  e assim

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (2\lambda(ydx - xdy) + dz)^2.$$

Mais geralmente, o  $\mathbb{R}^3$  munido com a métrica

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tau\lambda(ydx - xdy) + dz)^2, \text{ onde}$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)}$$

é o recobrimento universal de uma variedade homogênea  $\mathbb{E}$  de curvatura do fibrado  $\tau$  e curvatura da base  $\kappa > 0$ , a menos da fibra correspondente ao ponto  $\infty \in \mathbb{S}^2$ . As fibras sobre  $\mathbb{E}$  são  $\{x = x_0, y = y_0\}$ , já que  $\mathbb{E}$  é uma fibração sobre  $\mathbb{S}^2$ .

Vamos determinar um referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , tal que  $E_3 = \xi$  seja o campo de Killing e satisfaça

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = \frac{\kappa}{2\tau} E_1 \quad e \quad [E_3, E_1] = \frac{\kappa}{2\tau} E_2.$$

Como vimos,  $(x, y, \theta) \mapsto (\varphi(x, y), \frac{1}{\lambda} \cos\theta \partial x + \frac{1}{\lambda} \sin\theta \partial y)$ , define uma parametrização para o fibrado unitário  $UD$  de um domínio  $D \subset \mathbb{S}^2$ , parametrizado por  $\varphi$  uma parametrização conforme. Considerando a projeção natural,  $\pi : UD \rightarrow D$ , que é uma submersão Riemanniana (cf. Exemplo (1.2)), podemos construir um referencial ortonormal em  $UD$  pelo levantamento horizontal. Como todo  $v \in T_p D$  é da forma  $v(\theta) = \frac{1}{\lambda} \cos\theta \partial x + \frac{1}{\lambda} \sin\theta \partial y$  e  $\|v\| = 1$  na métrica conforme  $ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$  de  $D$ . Considerando

$$e_1 = \frac{1}{\lambda} \cos\theta \partial x + \frac{1}{\lambda} \sin\theta \partial y \quad e \quad e_2 = J(e_1),$$

onde  $J : T_p D \rightarrow T_p D$  é a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em  $T_p D$ . Então

$$e_2 = -\frac{1}{\lambda} \sin\theta \partial x + \frac{1}{\lambda} \cos\theta \partial y.$$

Como  $\|e_1\| = 1$ , então  $\|e_2\| = 1$ . Seja  $E_1$  e  $E_2$  os levantamentos horizontais por  $\pi$  de  $e_1$  e  $e_2$  respectivamente, ou seja  $d\pi_p(E_1) = e_1(\pi(p))$ , e  $d\pi_p(E_2) = e_2(\pi(p))$ . Escrevendo  $E_i = a_i \bar{\partial}x + b_i \bar{\partial}y + c_i \bar{\partial}z$ , com  $i = 1, 2$  e  $\{\bar{\partial}x, \bar{\partial}y, \bar{\partial}z\}$  é a base coordenada de  $\mathbb{E}$ , obtemos

$$d\pi_p(E_1) = a_1 d\pi_p(\bar{\partial}x) + b_1 d\pi_p(\bar{\partial}y) + c_1 d\pi_p(\bar{\partial}z) = \frac{1}{\lambda} \cos\theta \partial x + \frac{1}{\lambda} \sin\theta \partial y.$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} d\pi_p(\bar{\partial}x) &= d\pi_p(1, 0, 0) = (1, 0) = \partial x, \\ d\pi_p(\bar{\partial}y) &= d\pi_p(0, 1, 0) = (0, 1) = \partial y \\ d\pi_p(\bar{\partial}z) &= d\pi_p(0, 0, 1) = (0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$a_1 \partial x + b_1 \partial y = \frac{1}{\lambda} \cos\theta \partial x + \frac{1}{\lambda} \sin\theta \partial y,$$

Donde obtemos  $a_1 = \frac{1}{\lambda} \cos\theta$ ,  $b_1 = \frac{1}{\lambda} \sin\theta$ . Analogamente, encontramos  $a_2 = -\frac{1}{\lambda} \sin\theta$ ,  $b_2 = \frac{1}{\lambda} \cos\theta$ .

Observe que  $Ker(d\pi_p) = span\{\bar{\partial}z\}$ , pois  $d\pi_p(x, y, z) = 0$ , se e somente se  $(x, y) = 0$ . Assim,  $E_3 = \bar{\partial}z$  e como queremos que  $\langle E_i, E_3 \rangle = 0, i = 1, 2$ , na métrica de  $\widetilde{UD}$ , então

$$\begin{aligned} 0 = \langle E_1, E_3 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\lambda} \cos\theta \bar{\partial}x + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \bar{\partial}y + c_1 \bar{\partial}z, \bar{\partial}z \right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \cos\theta \langle \bar{\partial}x, \bar{\partial}z \rangle + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \langle \bar{\partial}y, \bar{\partial}z \rangle + c_1 \langle \bar{\partial}z, \bar{\partial}z \rangle \end{aligned}$$

Para calcular esses produtos internos, vamos determinar a matriz  $(g_{ij})$  que representa a métrica  $ds^2$ . Temos

$$\begin{aligned} ds^2(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) &= ds \otimes ds(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) = (\lambda^2(dx^2 + dy^2) + (-\frac{\lambda_y}{\lambda}dx + \frac{\lambda_x}{\lambda}dy + dz)^2)(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) \\ &= \lambda^2(dx \otimes dx(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) + dy \otimes dy(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z)) + \tau^2 \lambda^2 y^2 dx \otimes dx(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) \\ &\quad - 2\tau^2 \lambda^2 xy dx \otimes dy(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) + \tau^2 \lambda^2 x^2 dx \otimes dx(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) + dz \otimes dz(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) \\ &\quad + 2\tau \lambda y dx \otimes dz(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) - 2\tau \lambda x dy \otimes dz(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z). \end{aligned}$$

Mas,

$$dx \otimes dz(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) = \frac{1}{2}(dx(\bar{\partial}x)dz(\bar{\partial}z) + dz(\bar{\partial}x)dx(\bar{\partial}z)) = \frac{1}{2}$$

e os demais termos são zero. Então

$$ds^2(\bar{\partial}x, \bar{\partial}z) = \langle \bar{\partial}x, \bar{\partial}z \rangle = 2\tau \lambda y \frac{1}{2} = \tau \lambda y.$$

Com cálculos análogos, obtemos a matriz  $(g_{ij})$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda^2 \tau^2 y^2 & -\tau \lambda^2 xy & \tau \lambda y \\ -\tau^2 \lambda^2 xy & \lambda^2 + \lambda^2 \tau^2 x^2 & -\tau \lambda x \\ \tau \lambda y & -\tau \lambda x & 1 \end{pmatrix}$$

onde  $g_{ij} = \langle \bar{\partial}x_i, \bar{\partial}x_j \rangle$ , associando  $x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow y$  e  $x_3 \rightarrow z$ . Assim

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\lambda} \cos\theta \langle \bar{\partial}x, \bar{\partial}z \rangle + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \langle \bar{\partial}y, \bar{\partial}z \rangle + c_1 \langle \bar{\partial}z, \bar{\partial}z \rangle, \\ &= \frac{1}{\lambda} \cos\theta(\tau \lambda y) - \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta(\tau \lambda x) + c_1, \end{aligned}$$

ou seja,  $c_1 = \tau(x \operatorname{sen}\theta - y \cos\theta)$ . Para determinar  $c_2$ , temos

$$0 = \langle E_2, E_3 \rangle = -\frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \langle \bar{\partial}x, \bar{\partial}z \rangle + \frac{1}{\lambda} \cos\theta \langle \bar{\partial}y, \bar{\partial}z \rangle + c_2 \langle \bar{\partial}z, \bar{\partial}z \rangle$$

Logo,

$$c_2 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}\theta(\tau \lambda y) - \frac{1}{\lambda} \cos\theta(-\tau \lambda x) = \tau(x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta).$$

Devemos ter ainda que  $[E_3, E_1] = \frac{\kappa}{2\tau}E_2$ , isto é

$$[\bar{\partial}z, \frac{1}{\lambda}\cos\theta\bar{\partial}x] + [\bar{\partial}z, \frac{1}{\lambda}\sen\theta\bar{\partial}y] + [\bar{\partial}z, \tau(x\sen\theta - y\cos\theta)\bar{\partial}z] = \frac{\kappa}{2\tau}E_2.$$

Pelas propriedades do colchete o lado esquerdo é

$$\begin{aligned} & [\bar{\partial}z, \frac{1}{\lambda}\cos\theta\bar{\partial}x] + [\bar{\partial}z, \frac{1}{\lambda}\sen\theta\bar{\partial}y] + [\bar{\partial}z, \tau(x\sen\theta - y\cos\theta)\bar{\partial}z] = \\ & = \bar{\partial}z \left( \frac{1}{\lambda}\cos\theta \right) \bar{\partial}x + \bar{\partial}z \left( \frac{1}{\lambda}\sen\theta \right) \bar{\partial}y + \bar{\partial}z(\tau(x\sen\theta - y\cos\theta))\bar{\partial}z. \end{aligned}$$

O lado direito é

$$\frac{\kappa}{2\tau}E_2 = \frac{\kappa}{2\tau} \left( -\frac{1}{\lambda}\sen\theta \right) \bar{\partial}x + \frac{\kappa}{2\tau} \left( \frac{1}{\lambda}\cos\theta \right) \bar{\partial}y + \frac{\kappa}{2}(x\cos\theta + y\sen\theta)\bar{\partial}z,$$

Logo

$$\begin{cases} \bar{\partial}z \left( \frac{1}{\lambda}\cos\theta \right) = \frac{\kappa}{2\tau} \left( -\frac{1}{\lambda}\sen\theta \right) \\ \bar{\partial}z \left( \frac{1}{\lambda}\sen\theta \right) = \frac{\kappa}{2\tau} \left( \frac{1}{\lambda}\cos\theta \right) \\ \tau\bar{\partial}z(x\sen\theta - y\cos\theta) = \frac{\kappa}{2}(x\cos\theta + y\sen\theta) \end{cases}.$$

Como  $\lambda$  só depende de  $x$  e  $y$ , deduzimos da primeira equação que  $\theta$  depende de  $z$ .

Logo a primeira equação se torna

$$-\frac{1}{\lambda}\sen\theta\frac{d\theta}{dz} = \frac{\kappa}{2\tau} \left( -\frac{1}{\lambda}\sen\theta \right).$$

Portanto,  $\frac{d\theta}{dz} = \frac{\kappa}{2\tau}$  o que implica  $\theta = \frac{\kappa}{2\tau}z$ . Contudo, omitindo a barra em  $\bar{\partial}x_i$ , temos que o referencial canônico é dado por:

$$\begin{aligned} E_1 &= \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial x + \sen(\sigma z)\partial y) + \tau(x\sen(\sigma z) - y\cos(\sigma z))\partial z, \\ E_2 &= \lambda^{-1}(-\sen(\sigma z)\partial x + \cos(\sigma z)\partial y) + \tau(x\cos(\sigma z) + y\sen(\sigma z))\partial z, \\ E_3 &= \partial z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

com

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau},$$

satisfazendo

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = \frac{\kappa}{2\tau}E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{\kappa}{2\tau}E_2.$$

**Observação 2.1.** a) Por construção, como a projeção estereográfica omite um ponto, chamado de ponto no infinito, então o referencial está definido em um conjunto aberto  $\mathbb{E}'$  de  $\mathbb{E}$  que coincide com  $\mathbb{E} \setminus \{\infty\}$ .

b) Outra forma de abordagem das esferas de Berger é dada por: Considerando  $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; |z| + |w| = 1\}$ , existe um referencial global de vetores em  $\mathbb{S}^3$ , dado por:

$$V(z, w) = (iz, iw), \quad E_1(z, w) = (-\bar{w}, \bar{z}), \quad E_2(z, w) = (-i\bar{w}, i\bar{z}).$$

Uma métrica para as esferas de Berger é dada por

$$g(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[ \langle X, Y \rangle + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle \right]$$

onde,  $X, Y \in T\mathbb{S}^3$ .

Observe que, quando  $\kappa = 4\tau^2$  a métrica acima coincide com a métrica padrão de  $\mathbb{S}^3$ , mas como estamos considerando a variedades homogêneas com grupo de isometria de dimensão 4, segue  $\kappa \neq 4\tau^2$ .

Neste contexto, a aplicação  $\Pi : (\mathbb{S}^3, g) \rightarrow \mathbb{S}^2(\kappa)$  (a esfera de raio  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ ) dada por

$$\Pi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \left( z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2) \right)$$

é uma submersão Riemanniana, chamada fibração de Hopf. Tal modelo pode ser encontrado em [20].

## 2.1.2 O Espaço de Heisenberg

O grupo de Heisenberg é o grupo de Lie

$$Nil_3 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right); (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

munido com uma métrica invariante à esquerda. Neste modelo, o espaço Heisenberg  $Nil_3$  é o  $\mathbb{R}^3$  munido com a seguinte métrica:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (\tau(ydx - xdy) + dz)^2.$$

Observe que a aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow Nil_3$  dada por

$$\varphi(x, y, z) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

define uma parametrização para o espaço de Heisenberg. Identificamos assim

$$(x, y, z) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar  $T_I Nil_3 = \mathfrak{h}_3$  (álgebra de Lie de  $Nil_3$ ), onde  $I$  denota a matriz identidade de  $\mathbb{R}^3$  que é o elemento neutro de  $Nil_3$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva tal que  $\alpha(0) = I$  e  $\alpha'(0) = v \in T_I \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ . Se  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , então

$$\begin{aligned} d\varphi_I(v) &= \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & x(t) & z(t) \\ 0 & 1 & y(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x'(0) & z'(0) \\ 0 & 0 & y'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathfrak{h}_3$  é formado pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Se  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^3$  está munido com a métrica  $ds^2$  acima, a aplicação  $\pi : Nil_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  é uma submersão de Killing.

De fato,  $\pi$  é uma submersão, como já vimos no Exemplo 1.5. Resta mostrar que  $d\pi_p$  é uma isometria para vetores horizontais. Observe que  $Ker(d\pi_p) = span\{\partial z\}$ , com  $\partial z = (0, 0, 1)$ . Com isso o espaço horizontal  $H_p = (Ker d\pi_p)^\perp = (\partial z)^\perp$ , ou seja  $a\partial x + b\partial y + c\partial z \in H_p$  se, e somente se  $\langle a\partial x + b\partial y + c\partial z, \partial z \rangle = 0$ . Como  $\lambda = 1$  a matriz da métrica  $ds^2$  é dada por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \tau^2 y^2 & -\tau^2 xy & \tau y \\ -\tau^2 xy & 1 + \tau^2 x^2 & -\tau x \\ \tau \lambda y & -\tau x & 1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a\partial x + b\partial y + c\partial z, \partial z \rangle \\ &= a\langle \partial x, \partial x \rangle + b\langle \partial y, \partial y \rangle + c\langle \partial z, \partial z \rangle \\ &= a\tau y - b\tau x + c \end{aligned}$$

ou seja,  $(a, b, c)$  satisfaz a equação  $x\tau y - y\tau x + z = 0$ . Assim, para cada  $p \in Nil_3$  e  $u = (a_1, b_1, c_1), v = (a_2, b_2, c_2) \in H_p$ , temos

$$\begin{aligned}\langle d\pi_p(u), d\pi_p(v) \rangle_{\pi(p)} &= \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle_{\pi(p)} \\ &= a_1a_2 + b_1b_2.\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_p &= a_1a_2\langle \partial x, \partial x \rangle + a_1b_2\langle \partial x, \partial y \rangle + a_1c_2\langle \partial x, \partial z \rangle \\ &\quad + b_1a_2\langle \partial y, \partial x \rangle + b_1b_2\langle \partial y, \partial y \rangle \\ &\quad + b_1c_2\langle \partial y, \partial z \rangle + c_1a_2\langle \partial z, \partial x \rangle + c_1b_2\langle \partial z, \partial y \rangle + c_1c_2\langle \partial z, \partial z \rangle,\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_p &= a_1a_2(1 + \tau^2y^2) - a_1b_2\tau^2xy + a_1c_2\tau y - b_1a_2\tau^2xy + b_1b_2(1 + \tau^2x^2) \\ &\quad - b_1c_2\tau x + c_1a_2\tau y - c_1b_2\tau x + c_1c_2 \\ &= a_1a_2 + b_1b_2 + (a_2\tau y - b_2\tau x + c_2)(a_1\tau y - b_1\tau x + c_1) \\ &= a_1a_2 + b_1b_2.\end{aligned}$$

A segunda parcela se anula, já que  $a_2\tau y - b_2\tau x + c_2 = 0 = a_1\tau y - b_1\tau x + c_1$ .

Portanto,  $\langle d\pi_p(u), d\pi_p(v) \rangle_{\pi(p)} = \langle u, v \rangle_p$  e  $\pi$  é uma submersão Riemanniana. As translações ao longo das fibras, que são as retas  $\pi^{-1}(x_0, y_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x_0, y = y_0, z \in \mathbb{R}\}$ , são trajetórias do campo de Killing  $\partial z = \xi$ .

Para determinar um referencial ortonormal em  $Nil_3$ , construímos o referencial da mesma forma feito para as esferas de Berger, sendo  $e_1 = \partial x$  e  $e_2 = \partial y$  bases de  $\mathbb{R}^2$ , e tomando  $E_1$  e  $E_2$  seus respectivos levantamentos horizontais por  $\pi$  e  $E_3 = \partial z$  o campo vertical. Portanto teremos

$$\begin{cases} E_1 = \partial x - \tau y \partial z \\ E_2 = \partial y + \tau x \partial z \\ E_3 = \partial z \end{cases} .$$

Outra forma de determinar os campos  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , é usar o fato que eles são invariantes à esquerda.

Como a operação  $*$  em  $Nil_3$  é dada por

$$(x, y, z) * (x_0, y_0, z_0) = (x + x_0, y + y_0, z + z_0 + \tau(x_0y - xy_0))$$

denotando por  $L_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z)$  a translação à esquerda de  $(x, y, z)$  por  $(x_0, y_0, z_0)$  tem-se

$$L_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z) = (x + x_0, y + y_0, z + z_0 + \tau(x_0y - xy_0))$$

Assim, se  $\{E_1, E_2, E_3\}$  é uma base de  $\mathfrak{h}$ , estes são campos invariantes à esquerda, então

$$E_1(e) = \partial x = (1, 0, 0) \quad E_2(e) = \partial y = (0, 1, 0) \quad E_3(e) = (0, 0, 1)$$

onde  $e = (0, 0, 0)$  é o elemento neutro de  $Nil_3$ . Portanto

$$dL_p(E_i(e)) = E_i(p), \quad i = 1, 2, 3.$$

$$(dL_p)_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tau y & \tau x & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$(dL_p)_e(E_1(e)) = E_1(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tau y & \tau x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tau y \end{pmatrix},$$

$$(dL_p)_e(E_2(e)) = E_2(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tau y & \tau x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau x \end{pmatrix},$$

$$(dL_p)_e(E_3(e)) = E_3(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tau y & \tau x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ou seja,

$$E_1 = \partial x - \tau y \partial_z, \quad E_2 = \partial y + \tau x \partial_z, \quad E_3 = \partial_z.$$

Sendo,  $\kappa = 0$  segue que  $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau} = 0$ . Logo os símbolos de Christoffel, são

$$\bar{\Gamma}_{23}^1 = -\bar{\Gamma}_{21}^3 = -\bar{\Gamma}_{13}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^3 = \tau$$

$$\bar{\Gamma}_{32}^1 = -\bar{\Gamma}_{31}^2 = \tau$$

E,  $\bar{\nabla}_{E_i} E_i = 0$  para cada  $i = 1, 2, 3$ , então

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \bar{\Gamma}_{12}^3 E_3 = \tau E_3,$$

$$\bar{\nabla}_{E_2} E_1 = \bar{\Gamma}_{21}^3 E_3 = -\tau E_3,$$

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_3 = \bar{\Gamma}_{13}^2 E_2 = -\tau E_2,$$

$$\bar{\nabla}_{E_3} E_1 = \bar{\Gamma}_{31}^2 E_2 = -\tau E_2,$$

$$\bar{\nabla}_{E_2} E_3 = \bar{\Gamma}_{23}^1 E_1 = \tau E_1,$$

$$\bar{\nabla}_{E_3} E_2 = \bar{\Gamma}_{32}^1 E_1 = \tau E_1.$$

Como a conexão é simétrica, ou seja

$$\bar{\nabla}_{E_i} E_j - \bar{\nabla}_{E_j} E_i = [E_i, E_j]$$

segue que

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = 0 \quad [E_3, E_1] = 0.$$

Para mais informações sobre o grupo de Heisenberg, veja [17, 11].

### 2.1.3 O espaço $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$

Vejamos a seguir que

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); xw - zy = 1 \right\}$$

munido da multiplicação de matrizes é um grupo de Lie.

Definindo  $det : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ , onde  $GL_2(\mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes invertíveis (isto é, com determinante diferente de zero), podemos observar que  $det$  é um homomorfismo de grupo, já que  $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$ , e  $det$  é uma aplicação linear. Note que  $SL_2(\mathbb{R}) = Ker(det)$ . Logo um subgrupo de  $GL_2(\mathbb{R})$ . Vamos mostrar que  $det$  é uma submersão e assim concluir que  $SL_2(\mathbb{R}) = det^{-1}(1)$  é um subvariedade fechada de  $GL_2(\mathbb{R})$ , logo um subgrupo de Lie de  $GL_2(\mathbb{R})$  de codimensão 1, ou seja,  $SL_2(\mathbb{R})$  têm dimensão 3. (cf. Proposição (2.18) de [13]).

De fato, seja  $A \in GL_2(\mathbb{R})$  temos que

$$d(det_A)(B) = detA \cdot tr(A^{-1}B)$$

onde  $B \in T_A GL_2(\mathbb{R}) \cong M_2(\mathbb{R})$ . Assim, tomando  $B = A$ , temos

$$d(det_A)(A) = detA \cdot tr(A^{-1}A) = detA \cdot tr(I) = n \cdot detA \neq 0,$$

E  $d(det_A)$  é não nulo, logo sobrejetora. Portanto  $det$  é uma submersão.

Para definirmos o espaço  $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ , vamos lembrar alguns conceitos.

Seja  $G$  um grupo e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Dizemos que  $H$  é um *subgrupo normal* de  $G$ , se as classes laterais à esquerda e a direita são iguais, isto é,  $gH = Hg$  para todo  $g \in G$ . Seja  $H$  um subgrupo normal de  $G$ . Definimos  $G/H$  o conjunto das classes laterais, com a operação induzida de  $G$ , ou seja, se  $g_1H, g_2H \in G/H$ , e  $*$  é a operação de  $G$ , então  $(g_1H, g_2H) \mapsto (g_1 * g_2)H$  é a operação em  $G/H$ . Com esta operação,  $G/H$  é um grupo, chamado *grupo quociente*. Definimos a projeção natural  $\pi : G \rightarrow G/H$  como a aplicação que associa cada  $g$  a classe lateral  $gH$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $G$  uma grupo de Lie, (i.e., uma variedade diferenciável que também é um grupo, munido de uma multiplicação e inversão diferenciável) e  $H$  um subgrupo de Lie fechado de  $G$ . O conjunto das classes laterais à esquerda  $G/H$  tem uma única estrutura de variedade diferenciável tal que a aplicação quociente  $\pi$  é uma submersão diferenciável. A ação à esquerda de  $G$  em  $G/H$  é dada por*

$$g_1(g_2H) = (g_1g_2)H$$

torna  $G/H$  um espaço homogêneo.

**Definição 2.2.** *Sejam  $\widetilde{M}$  e  $M$  variedades diferenciáveis conexas. Uma aplicação  $\Gamma : \widetilde{M} \rightarrow M$  diferenciável sobrejetiva é chamada aplicação de recobrimento diferenciável, se para cada ponto  $p \in M$  existe uma vizinhança conexa  $U$  de  $p$  em  $M$  tal que cada as componentes de  $\Gamma^{-1}(U)$  é aplicada por  $\Gamma$ , difeomorficamente sobre  $U$ .*

Neste contexto,  $M$  é chamada variedade base e  $\widetilde{M}$  de variedade de recobrimento. Mais detalhes e propriedades podem ser vistos em [13].

Um resultado importante é dado pelo seguinte teorema

**Teorema 2.2.** *(Existência de um Grupo de Recobrimento Universal) Seja  $G$  um grupo de Lie conexo. Existe um grupo de Lie simplesmente conexo  $\widetilde{G}$  ( chamado Grupo de Recobrimento Universal ) e uma aplicação de recobrimento diferenciável  $\Gamma : \widetilde{G} \rightarrow G$  que também é um homomorfismo de grupo de Lie.*

*Demonstração.* Veja [13]. □

Como o centro de  $SL_2(\mathbb{R})$  é  $\{-I, I\}$ , e este é sempre um subgrupo normal, segue que  $SL_2(\mathbb{R})/\{-I, I\}$  é um grupo de Lie e a ele denominamos por  $PSL_2(\mathbb{R})$  que também é um grupo de Lie e  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  seu recobrimento universal.

O grupo  $PSL_2(\mathbb{R})$  age transitivamente sobre  $U\mathbb{H}^2$  e o estabilizador de qualquer ponto em  $U\mathbb{H}^2$  é trivial, assim podemos identificar o espaço  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  com o recobrimento universal do fibrado unitário tangente  $U\mathbb{H}^2$  do espaço hiperbólico e como  $U\mathbb{H}^2$  é uma subvariedade do fibrado tangente  $T\mathbb{H}^2$ , herda a métrica induzida padrão deste (a métrica apresentada no Exemplo 1.2).

Considerando a projeção  $\pi : U\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $\pi(p, v) = p$ , tem-se que  $U\mathbb{H}^2$  é um fibrado circular, já que  $\|v\| = 1$ , logo podemos identificar  $U\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$ , com isso  $\widetilde{U\mathbb{H}^2} \cong \widetilde{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Assim,  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \cong \widetilde{U\mathbb{H}^2} \cong \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Podemos definir uma

submersão Riemanniana  $\tilde{\pi} : \widetilde{U\mathbb{H}^2} \rightarrow \mathbb{H}^2$ , pelo levantamento de  $\pi : U\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ . Com isso, teremos uma fibração Riemanniana de  $\tilde{\pi}$  de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  em  $\mathbb{H}^2$ .

Se  $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$  é uma parametrização conforme de  $\mathbb{H}^2$  e  $\lambda$  o fator conforme, i.e., a métrica de  $\mathbb{H}^2$  é dada por  $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$ . Podemos proceder como no caso das Esferas de Berger e obter a métrica de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  que é dada por

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left( -\frac{\lambda_y}{\lambda}dx + \frac{\lambda_x}{\lambda}dy + dz \right)^2.$$

Tomando o modelo do disco de Poincaré para o plano hiperbólico de curvatura constante  $\kappa < 0$ , a variedade  $\mathbb{D}^2(\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}) \times \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{D}^2(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < \rho^2\}$  munido da métrica

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tau\lambda(ydx - xdy) + dz)^2,$$

com

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)}.$$

é o recobrimento universal de uma variedade homogênea  $\mathbb{E}$  de fibrado curvatura  $\tau$  e curvatura de base  $\kappa < 0$ .

O referencial  $\{E_1, E_2, E_3\}$  é dado por

$$\begin{aligned} E_1 &= \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial x + \sin(\sigma z)\partial y) + \tau(x\sin(\sigma z) - y\cos(\sigma z))\partial z, \\ E_2 &= \lambda^{-1}(-\sin(\sigma z)\partial x + \cos(\sigma z)\partial y) + \tau(x\cos(\sigma z) + y\sin(\sigma z))\partial z, \\ E_3 &= \partial z, \end{aligned}$$

com  $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}$  satisfazendo

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = \frac{\kappa}{2\tau} E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{\kappa}{2\tau} E_2.$$

## 2.2 As Equações de Compatibilidade

Considere  $\mathbb{E}$  uma variedade homogênea de dimensão 3 com um grupo de isometria de dimensão 4. Sendo  $\kappa$  a curvatura da base e  $\tau$  a curvatura do fibrado e  $\bar{R}$  o tensor curvatura de Riemann de  $\mathbb{E}$ . Seja  $\mathcal{V}$  uma superfície orientada em  $\mathbb{E}$ ,  $\nabla$  a conexão de  $\mathcal{V}$ ,  $J$  a rotação do ângulo  $\frac{\pi}{2}$  em  $T\mathcal{V}$ ,  $N$  normal unitário à  $\mathcal{V}$  e  $S$  o operador forma de  $\mathcal{V}$ .

**Proposição 2.2.** Para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$  temos

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle, \\ \bar{R}(X, Y)N &= (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),\end{aligned}$$

onde  $\nu = \langle N, \xi \rangle$ ,  $T$  é a projeção de  $\xi$  em  $T\mathcal{V}$ , i.e.,  $T = \xi - \nu N$  e  $R_0$  e  $R_1$  são como na Proposição 2.1

*Demonstração.* Pela Proposição 2.1 tem-se

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle.$$

para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$  e  $\xi$  campo vertical em  $\mathfrak{X}(\mathbb{E})$ .  $\xi$  pode ser decomposto em

$$\xi = T + \nu N$$

Portanto

$$\begin{aligned}\langle R_1(\xi, X, Y)Z, W \rangle &= \langle Y, T + \nu N \rangle \langle Z, T + \nu N \rangle \langle X, W \rangle \\ &\quad + \langle Y, T + \nu N \rangle \langle X, T + \nu N \rangle \langle (T + \nu N), W \rangle \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, T + \nu N \rangle \langle T + \nu N, W \rangle - \langle X, T + \nu N \rangle \langle Z, T + \nu N \rangle \langle Y, W \rangle \\ &= \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle + \langle Y, T \rangle \langle X, T \rangle \langle T, W \rangle \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \langle T, W \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle \\ &= \langle R_1(T, X, Y)Z, W \rangle\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle$$

Tomando  $Z = N$ , temos que  $R_0$  e  $R_1$  ficam

$$R_0(X, Y)N = \langle X, N \rangle Y - \langle Y, N \rangle X = 0.$$

$$\begin{aligned}R_1(\xi, X, Y)N &= \langle Y, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle X + \langle Y, N \rangle \langle X, \xi \rangle \xi - \langle X, N \rangle \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle Y \\ &= \langle Y, T \rangle \nu X - \langle X, T \rangle \nu Y \\ &= \nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).\end{aligned}$$

Portanto

$$\bar{R}(X, Y)N = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).$$

□

**Corolário 2.1.** *As equações de Gauss e Codazzi em  $\mathbb{E}$  são:*

$$K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2$$

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).$$

onde  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $\mathcal{V}$ .

*Demonstração.* A equação de Gauss é:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle.$$

Seja  $\sigma \subset T_p \mathcal{V}$ ,  $p \in \mathcal{V}$ , um subespaço bidimensional e  $\{X_1, X_2\}$  uma base ortonormal para  $\sigma$ , com  $X_1, X_2$  autovetores do operador forma  $S$  com respeito à  $N$ . Logo  $S(X_1) = \lambda_1 X_1$ ,  $S(X_2) = \lambda_2 X_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $X = Z = X_1$  e  $Y = W = X_2$  na Proposição 2.2, temos

$$\langle \bar{R}(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi, X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle.$$

$$\langle R_0(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle = \langle X_1, X_1 \rangle \langle X_2, X_2 \rangle - \langle X_2, X_1 \rangle \langle X_1, X_2 \rangle = 1.$$

$$\begin{aligned} \langle R_1(\xi; X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle &= \langle X_2, \xi \rangle \langle X_1, \xi \rangle \langle X_1, X_2 \rangle + \langle X_2, X_1 \rangle \langle X_1, \xi \rangle \langle \xi, X_2 \rangle \\ &\quad - \langle X_1, X_1 \rangle \langle X_2, \xi \rangle \langle \xi, X_2 \rangle - \langle X_1, \xi \rangle \langle X_1, \xi \rangle \langle X_2, X_2 \rangle \\ &= -(\langle X_2, \xi \rangle)^2 - (\langle X_1, \xi \rangle)^2. \end{aligned}$$

O campo  $T$  que representa a componente tangente de  $\xi$  sobre  $\sigma$ , se escreve na base  $\{X_1, X_2\}$ , como

$$T = \langle T, X_1 \rangle X_1 + \langle T, X_2 \rangle X_2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle \xi, X_1 \rangle &= \langle T + \nu N, X_1 \rangle = \langle T, X_1 \rangle. \\ \langle \xi, X_2 \rangle &= \langle T, X_2 \rangle. \end{aligned}$$

Assim

$$-[(\langle X_2, \xi \rangle)^2 + (\langle X_1, \xi \rangle)^2] = -[(\langle T, X_1 \rangle)^2 + (\langle T, X_2 \rangle)^2] = -\|T\|^2.$$

Como  $\xi$  é unitário, então

$$\begin{aligned} 1 = \langle \xi, \xi \rangle &= \langle T + \nu N, T + \nu N \rangle \\ &= \langle T, T \rangle + \nu^2 \\ &= \|T\|^2 + \nu^2. \end{aligned}$$

Logo

$$-\|T\|^2 = \nu^2 - 1$$

Com isso

$$\langle R_1(\xi; X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle = \nu^2 - 1.$$

e

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle &= \kappa - 3\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(\nu^2 - 1) \\ &= \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2. \end{aligned}$$

Por um lado a equação de Gauss é

$$\langle R(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle - \langle \bar{R}(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle = K - \tau^2 - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle - \langle \bar{R}(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle &= \langle SX_1, X_1 \rangle \langle SX_2, X_2 \rangle - \langle SX_1, X_2 \rangle \langle SX_2, X_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \langle X_1, X_1 \rangle \langle X_2, X_2 \rangle - \lambda_1 \lambda_2 \langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \lambda_2 = \det S. \end{aligned}$$

Portanto,

$$K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2.$$

Como a equação de Codazzi é dada por

$$\langle R(X, Y)N, W \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X N - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N + \bar{\nabla}_{[X, Y]} N, W \rangle.$$

Sendo  $\mathcal{V}$  uma superfície em  $\mathbb{E}$ , podemos escolher um campo  $N$  unitário normal a  $\mathcal{V}$ . Temos que  $\langle N, N \rangle = 1$ , desta forma  $X \langle N, N \rangle = 0$ . Segue que  $\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = 0$ , ou seja,  $\bar{\nabla}_X N$  não tem componente normal. Assim a equação de Codazzi se torna

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)N, W \rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X N - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N + \bar{\nabla}_{[X, Y]} N, W \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X N + B(Y, \nabla_X N) - \nabla_X \nabla_Y N - B(X, \nabla_Y N) - \nabla_{[X, Y]} N, W \rangle \\ &= \langle -\nabla_Y S_N X + \nabla_X S_N Y + S_N[X, Y], W \rangle \\ &= \langle \nabla_X S Y - \nabla_Y S X + S[X, Y], W \rangle. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2 temos

$$\nabla_X S Y - \nabla_Y S X + S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle)X - \langle X, T \rangle Y.$$

□

A próxima proposição nos dá a expressão da derivada do campo de Killing  $\xi$ .

**Proposição 2.3.** *Para  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$  temos*

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX), \quad d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0$$

*Demonstração.* Por um lado temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X(T + \nu N) \\ &= \bar{\nabla}_X T + \bar{\nabla}_X \nu N \\ &= \nabla_X T + B(X, T) + X(\nu)N + \nu \bar{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X T + \langle SX, T \rangle N + d\nu(X)N - \nu SX. \end{aligned}$$

Por outro lado usando o fato que  $\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \times \xi$ .

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi = \tau X \times \xi &= \tau X \times (T + \nu N) \\ &= \tau(X \times T + \nu X \times N). \end{aligned}$$

Tomando  $J : T\mathcal{V} \rightarrow T\mathcal{V}$  a rotação de  $\pi/2$  em  $T\mathcal{V}$ , e considerando  $\|X\| = 1$ , então  $\{X, JX\}$  forma uma base para  $T_p\mathcal{V}$ ,  $p \in \mathcal{V}$ , logo  $T = \langle T, X \rangle X + \langle T, JX \rangle JX$  e

$$X \times T = X \times (\langle T, X \rangle X + \langle T, JX \rangle JX) = \langle T, JX \rangle X \times JX = \langle T, JX \rangle N.$$

$$X \times N = -JX.$$

Assim

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau(\langle T, JX \rangle N - \nu JX).$$

Portanto

$$\tau(\langle T, JX \rangle N - \nu JX) = \nabla_X T + \langle SX, T \rangle N + d\nu(X)N - \nu SX.$$

Igualando cada componente normal e tangente, temos

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX), \quad d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0$$

□

Considere agora uma superfície orientável  $\mathcal{V}$  de uma variedade Riemanniana  $\bar{M}$  de dimensão 3. Seja  $\{e_1, e_2\}$  um referencial ortonormal em  $\mathcal{V}$ , com  $e_3$  o normal a  $\mathcal{V}$ , e  $\{E_1, E_2, E_3\}$  um referencial ortonormal em  $\bar{M}$ . Denotamos  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  as conexões Riemannianas de  $\mathcal{V}$  e  $\bar{M}$  respectivamente e seja  $S$  o operador forma de  $\mathcal{V}$  com respeito

ao normal  $e_3$ .

Como

$$T_p\overline{\mathcal{M}} = T_p\mathcal{V} \oplus (T_p\mathcal{V})^\perp$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{e_k} e_\beta &= (\overline{\nabla}_{e_k} e_\beta)^\top + (\overline{\nabla}_{e_k} e_\beta)^\perp \\ &= \nabla_{e_k} e_\beta(p) + \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_\beta(p), e_3 \rangle e_3\end{aligned}$$

mas,

$$\langle \overline{\nabla}_{e_k} e_\beta(p), e_3 \rangle = -\langle e_\beta, \overline{\nabla}_{e_k} e_3(p) \rangle = \langle e_\beta, S e_k \rangle = \omega_\beta^3(e_k).$$

Logo

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{e_k} e_\beta(p) &= \sum_{\alpha=1}^2 \omega_\beta^\alpha(e_k) e_\alpha + \omega_\beta^3(e_k) e_3 \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\beta^\alpha(e_k) e_\alpha\end{aligned}$$

Para cada  $q \in \mathcal{V}$ , seja  $\Omega$  a matriz formada pelas coordenadas de  $\overline{\nabla}_{e_k} e_\beta$  na base  $\{e_1, e_2, e_3\}_q$ . Então as colunas de  $\Omega$  são dadas por  $(\omega_\beta^1(e_k), \omega_\beta^2(e_k), \omega_\beta^3(e_k))$  e a matriz  $\Omega \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  é dada por

$$\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 \end{pmatrix}.$$

Considere a matriz de 1-formas  $\Omega$  definida por  $\Omega = (\omega_j^i) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , onde  $i, j = 1, 2, 3$ . Como  $\omega_j^i = -\omega_i^j$  para cada  $i, j = 1, 2, 3$ , temos

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $A$ , é uma matriz de  $k$ -formas e  $B$  uma matriz de  $s$ -formas, motivado pelo produto de matrizes definimos a seguinte multiplicação:  $A \wedge B = (A \wedge B)_j^i$ , é uma matriz de  $(k + s)$ -formas, com  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , dada por

$$(A \wedge B)_j^i = \sum_{k=1}^3 A_k^i \wedge B_j^k.$$

onde,  $\wedge$  é o produto exterior entre formas.

Seja  $A$  a matriz cujas colunas são as coordenadas de  $e_\beta$  no referencial  $\{E_\alpha\}$ . Observe que os elementos de  $A$  são da forma  $A_j^i = \langle e_j, E_i \rangle$ . Tem-se que  $A$  é a matriz mudança de base, da base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  para a base  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , como essas bases são ortonormais, segue que  $A$  é uma matriz ortogonal.

O lema a seguir mostra que a matriz  $A$  satisfaz uma certa equação diferencial.

**Lema 2.1.** *A matriz  $A$  satisfaz a seguinte equação:*

$$A^{-1}dA = \Omega + L(A).$$

com

$$L(A)_\beta^\alpha = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta, \varepsilon=1}^3 A_\alpha^\varepsilon A_k^\gamma A_\beta^\delta \bar{\Gamma}_{\gamma, \varepsilon}^\delta \right) \omega^k.$$

onde os  $\bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta$  são os símbolos de Christoffel no referencial  $\{E_1, E_2, E_3\}$ .

*Demonstração.* Temos que

$$e_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 A_\beta^\alpha E_\alpha.$$

Por um lado

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta &= \bar{\nabla}_{e_k} \left( \sum_{\alpha=1}^3 A_\beta^\alpha E_\alpha \right) = \bar{\nabla}_{e_k} (A_\beta^1 E_1 + A_\beta^2 E_2 + A_\beta^3 E_3) \\ &= e_k(A_\beta^1) E_1 + A_\beta^1 \bar{\nabla}_{e_k} E_1 + e_k(A_\beta^2) E_2 + A_\beta^2 \bar{\nabla}_{e_k} E_2 \\ &\quad + e_k(A_\beta^3) E_3 + A_\beta^3 \bar{\nabla}_{e_k} E_3 \\ &= \sum_{\delta=1}^3 A_\beta^\delta \bar{\nabla}_{e_k} E_\delta + \sum_{\delta=1}^3 dA_\beta^\delta(e_k) E_\delta \end{aligned}$$

mas,

$$\bar{\nabla}_{e_k} E_\delta = \bar{\nabla}_{\sum_{\gamma=1}^3 A_k^\gamma E_\gamma} E_\delta = \sum_{\gamma=1}^3 A_k^\gamma \bar{\nabla}_{E_\gamma} E_\delta = \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\varepsilon=1}^3 A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\varepsilon E_\varepsilon$$

pois,  $\bar{\nabla}_{E_\gamma} E_\delta = \sum_{\varepsilon=1}^3 \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\varepsilon E_\varepsilon$ . Logo

$$\bar{\nabla}_{e_k} e_\beta = \sum_{\delta=1}^3 dA_\beta^\delta(e_k) E_\delta + \sum_{\delta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\varepsilon=1}^3 A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\varepsilon E_\varepsilon.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta &= \sum_{\gamma=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) e_\gamma = \sum_{\gamma=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) \sum_{\varepsilon=1}^3 A_\gamma^\varepsilon E_\varepsilon \\ &= \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\varepsilon=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) A_\gamma^\varepsilon E_\varepsilon. \end{aligned}$$

Comparando as expressões encontradas para  $\nabla_{e_k} e_\beta$ , obtemos

$$\sum_{\gamma=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) A_\gamma^\varepsilon = dA_\beta^\varepsilon(e_k) + \sum_{\delta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\varepsilon$$

Assim,

$$\begin{aligned} dA_\beta^\varepsilon(e_k) &= - \sum_{\delta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\varepsilon + \sum_{\gamma=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) A_\gamma^\varepsilon \\ &= \sum_{\delta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta + \sum_{\gamma=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) A_\gamma^\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Onde usamos a compatibilidade, o fato de  $\{E_1, E_2, E_3\}$  ser ortonormal para concluir que  $\bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\varepsilon = -\bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta$ .

Como  $A$  é ortogonal, tem-se  $A^{-1} = A^t$ , então os elementos da matriz produto  $A^{-1}A = I$  são dados por

$$(A^{-1}A)_\beta^\alpha = \sum_{\gamma=1}^3 A_\alpha^\gamma A_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha,$$

pois, sendo  $(A^{-1})_\beta^\alpha = A_\alpha^\beta$ , temos  $(A^{-1}A)_\beta^\alpha = \sum_{\gamma=1}^3 (A^{-1})_\beta^\gamma A_\gamma^\alpha = \sum_{\gamma=1}^3 A_\alpha^\gamma A_\beta^\gamma$ .

Com isso multiplicando a equação (2.4) por  $A_\alpha^\varepsilon$  e tomando o somatório em  $\varepsilon$  temos

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=1}^3 A_\alpha^\varepsilon dA_\beta^\varepsilon(e_k) &= \sum_{\varepsilon=1}^3 A_\alpha^\varepsilon \sum_{\delta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta + \sum_{\varepsilon=1}^3 A_\alpha^\varepsilon \sum_{\gamma=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) A_\gamma^\varepsilon \\ &= \sum_{\varepsilon=1}^3 \sum_{\delta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 A_\alpha^\varepsilon A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta + \sum_{\gamma=1}^3 \omega_\beta^\gamma(e_k) \sum_{\varepsilon=1}^3 A_\alpha^\varepsilon A_\gamma^\varepsilon. \end{aligned}$$

A primeira parcela representa uma matriz que denotamos por  $L(A)$  e escrevendo na base dual teremos

$$L(A)_\beta^\alpha = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{\gamma, \delta, \varepsilon=1}^3 A_\alpha^\varepsilon A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta \right) \omega^k$$

e a segunda parcela só não se anula quando  $\gamma = \alpha$ , restando apenas  $\omega_\beta^\alpha$ . Portanto

$$A^{-1}dA = \Omega + L(A).$$

□

## 3 Resultado principal

### 3.1 Imersão Isométrica de Superfícies em Variedades Homogêneas

Sabemos da teoria de imersões isométricas, que uma condição necessária para que uma dada superfície seja imersa em outra variedade é que a mesma satisfaça as equações de compatibilidade. O objetivo do Teorema principal é obter condições necessárias e suficientes para que uma superfície seja imersa isometricamente em uma variedade homogênea de dimensão três com grupo de isometria de dimensão 4.

Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade Riemanniana simplesmente conexa orientada de dimensão 2,  $ds^2$  a métrica em  $\mathcal{V}$  (que também denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ),  $\nabla$  sua conexão Riemanniana,  $R$  seu tensor curvatura,  $K$  sua curvatura de Gauss e  $J$  a rotação de ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  em  $T\mathcal{V}$ . Seja  $S$  um campo de operadores simétricos,  $S_y : T_y\mathcal{V} \rightarrow T_y\mathcal{V}$ ,  $T$  um campo vetorial em  $\mathcal{V}$  tal que  $\|T\| \leq 1$  e  $\nu$  uma função suave em  $\mathcal{V}$  tal que  $\nu^2 \leq 1$ .

As equações de compatibilidade para superfícies em variedades homogêneas com grupo de isometria de dimensão 4 estabelecidas no capítulo anterior motivam a seguinte definição.

**Definição 3.1.** *Seja  $\mathbb{E}$  uma variedade homogênea de dimensão 3 com grupo de isometria de dimensão 4. Seja  $\kappa$  a curvatura da base e  $\tau$  a curvatura do fibrado. Dizemos que  $(ds^2, S, T, \nu)$  satisfaz as equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}$  se*

$$\|T\|^2 + \nu^2 = 1$$

e, para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$ ,

$$K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2, \quad (3.1)$$

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle)X - \langle X, T \rangle Y, \quad (3.2)$$

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX), \quad (3.3)$$

$$d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0. \quad (3.4)$$

Mostraremos no decorrer deste capítulo que as equações de compatibilidade não são apenas condições necessárias para  $\mathcal{V}$  ser localmente imersa isometricamente em  $\mathbb{E}$ , mas também suficientes. Além disso, a imersão será única a menos de uma isometria

global de  $\mathbb{E}$  que preserva as orientações tanto da fibra como da base de fibração, e  $\mathcal{V}$  sendo simplesmente conexa, a imersão é global.

Enunciamos abaixo o teorema fundamental das imersões de superfície em  $\mathbb{E}$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $(\mathcal{V}, ds^2)$  uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de dimensão 2, com  $\nabla$  sua conexão Riemanniana. Seja  $S$  um campo de operadores simétricos  $S_y : T_y\mathcal{V} \rightarrow T_y\mathcal{V}$ ,  $T$  um campo vetorial em  $\mathcal{V}$  e  $\nu$  uma função suave em  $\mathcal{V}$  tal que  $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$ .*

*Seja  $\mathbb{E}$  uma variedade homogênea de dimensão 3, com grupo de isometria de dimensão 4 e campo de vetor vertical  $\xi$ . Seja  $\kappa$  a curvatura da base e  $\tau$  a curvatura do fibrado. Então, existe uma imersão isométrica  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{E}$  tal que o operador forma com respeito ao normal  $N$  associado a  $f$  é*

$$df \circ S \circ df^{-1} \quad (3.5)$$

e tal que

$$\xi = df(T) + \nu N \quad (3.6)$$

*se, e somente se,  $(ds^2, S, T, \nu)$  satisfaz as equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}$ . Neste caso, a imersão é única a menos de uma isometria global de  $\mathbb{E}$  e preserva a orientação tanto das fibras como da base de fibração.*

A prova de que as equações de compatibilidade são necessárias foi dada na Seção 2.2. Resta provar que as condições são suficientes, i.e., se  $(ds^2, S, T, \nu)$  satisfaz as equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}$ , então existe uma imersão isométrica  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{E}$  com operador forma e decomposição do campo  $\xi$  com a forma dada pelas equações.

Para isso vamos considerar  $\{e_1, e_2\}$  referencial ortonormal em  $\mathcal{V}$  e as formas  $\omega^i, \omega^3, \omega_j^i$  e  $\omega_3^3$  definidos na equação (1.3), sendo  $n = 2$ . Seja  $\{E_1, E_2, E_3\}$  o referencial ortonormal canônico de  $\mathbb{E}$  como apresentado na Seção 2, onde  $E_3 = \xi$ . Seja  $\mathbb{E}'$  o conjunto aberto onde o referencial canônico está definido. Denotaremos

$$T^k = \langle T, e_k \rangle, \text{ para } k = 1, 2 \text{ e } T^3 = \nu.$$

Vamos definir a 1-forma  $\eta$  em  $\mathcal{V}$  por

$$\eta(X) = \langle T, X \rangle.$$

No referencial  $\{e_1, e_2\}$  tem-se  $\eta(e_k) = \langle T, e_k \rangle = T^k$ . Logo se  $v \in T_p\mathcal{V}$  é dado por  $v = \sum_{k=1}^2 v_k e_k$ , então

$$\eta(v) = \langle T, \sum_{k=1}^2 v_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^2 v_k \langle T, e_k \rangle = \sum_{k=1}^2 T^k \omega^k(v).$$

Assim,  $\eta = \sum_{k=1}^2 T^k \omega^k$ . Definimos a matriz de 1-formas  $\Omega$  como na Seção 2.2, ou seja  $\Omega = (\omega_j^i)$  para  $i, j = 1, 2, 3$ , tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada ponto  $y \in \mathcal{V}$  onde  $\{e_1, e_2\}$  está definido, seja  $\mathcal{Z}(y)$  o conjunto das matrizes  $Z \in SO_3(\mathbb{R})$ , tais que os coeficientes da última linha de  $Z$  são  $T^\beta(y)$ , isto é, cada  $Z \in \mathcal{Z}(y)$  tem a forma

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1^1 & Z_2^1 & Z_3^1 \\ Z_1^2 & Z_2^2 & Z_3^2 \\ T^1(y) & T^2(y) & T^3(y) \end{pmatrix}.$$

**Lema 3.1.** *Para cada  $y \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{Z}(y)$  é uma subvariedade compacta de  $SO_3(\mathbb{R})$  e possui dimensão igual a 1.*

*Demonstração.* Seja  $F : SO_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^2$  definida por:  $F(Z) = (Z_1^3, Z_2^3, Z_3^3)$  i.e.,  $F(Z)$  é a última linha da matriz  $Z$ . Como para cada  $Z \in SO_3(\mathbb{R})$ , as linhas ou colunas de  $Z$  formam vetores unitários, segue que  $(Z_1^3)^2 + (Z_2^3)^2 + (Z_3^3)^2 = 1$ . Logo,  $F$  está bem definida.

Vejam inicialmente que  $F$  é uma submersão. Considere  $\bar{F} : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação dada por:  $\bar{F}(Z) = (Z_1^3, Z_2^3, Z_3^3)$ . Observe que  $F$  é a restrição de  $\bar{F}$  à  $SO_3(\mathbb{R})$ .  $\bar{F}$  é linear, pois se  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned} \bar{F}(A + \lambda B) &= (A_1^3 + \lambda B_1^3, A_2^3 + \lambda B_2^3, A_3^3 + \lambda B_3^3) \\ &= (A_1^3, A_2^3, A_3^3) + \lambda (B_1^3, B_2^3, B_3^3) \\ &= \bar{F}(A) + \lambda \bar{F}(B). \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  é um espaço vetorial, então  $T_Z \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  é isomorfo a  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , (Veja Proposição 3.8 de [13]), identificando cada  $V \in T_Z \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  com uma matriz de  $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , e como  $\bar{F}$  é linear, tem-se  $d\bar{F}_Z$  tem a mesma lei de associação que  $\bar{F}$ , i.e.,

$d\bar{F}_Z(V) = (V_1^3, V_2^3, V_3^3)$  e como  $F = \bar{F}|_{SO_3(\mathbb{R})}$ , segue que  $dF_Z(V) = (V_1^3, V_2^3, V_3^3)$ . Vamos mostrar que  $(dF)_Z$  é sobrejetora para todo  $Z \in SO_3(\mathbb{R})$ .

Observe que se  $\zeta \in T_Z SO_3(\mathbb{R})$ ,  $\zeta = ZX$ , então  $X \in T_I(SO_3(\mathbb{R})) = \mathfrak{so}_3$  (ou seja,  $X^t = -X$ ), onde  $I$  denota a matriz identidade de ordem 3. Como  $T_Z SO_3(\mathbb{R}) = \{\zeta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); Z\zeta^t + \zeta Z^t = 0\}$ , então

$$\zeta = -Z\zeta^t Z = Z(-\zeta^t Z).$$

Vejamos que  $-\zeta^t Z \in \mathfrak{so}_3$ . De fato,

$$(-\zeta^t Z)^t = -Z^t \zeta = -Z^t(-Z\zeta^t Z) = \zeta^t Z$$

Logo,  $-\zeta^t Z \in \mathfrak{so}_3$ . Agora se  $X \in \mathfrak{so}_3$ , então

$$Z(ZX)^t + ZXZ^t = ZX^t Z^t + ZXZ^t = -ZXZ^t + ZXZ^t = 0.$$

Para cada  $V \in T_{F(Z)}\mathbb{S}^2$ , devemos mostrar que existe  $X \in \mathfrak{so}_3$ , tal que  $(dF)_Z(ZX) = V$ . De fato, para  $\beta = 1, 2, 3$ , tem-se

$$(dF)_Z(ZX) = (ZX)_\beta^3 = \left( \sum_{k=1}^3 Z_k^3 X_\beta^k \right)_\beta.$$

Como  $X^t = -X$ ,  $X_i^j = -X_j^i$ , e portanto  $X_i^i = 0$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ . Observe que para cada índice  $\beta$  temos: Se  $\beta = 1$ , então

$$\begin{aligned} (ZX)_1^3 &= \sum_{k=1}^3 Z_k^3 X_1^k \\ &= Z_1^3 X_1^1 + Z_2^3 X_1^2 + Z_3^3 X_1^3 \\ &= Z_2^3 X_1^2 + Z_3^3 X_1^3. \end{aligned}$$

Para  $\beta = 2$ , então

$$\begin{aligned} (ZX)_2^3 &= \sum_{k=1}^3 Z_k^3 X_2^k \\ &= Z_1^3 X_2^1 + Z_2^3 X_2^2 + Z_3^3 X_2^3 \\ &= Z_1^3 X_2^1 + Z_3^3 X_2^3. \end{aligned}$$

Para  $\beta = 3$ , então

$$\begin{aligned} (ZX)_3^3 &= \sum_{k=1}^3 Z_k^3 X_3^k \\ &= Z_1^3 X_3^1 + Z_2^3 X_3^2 + Z_3^3 X_3^3 \\ &= Z_1^3 X_3^1 + Z_2^3 X_3^2. \end{aligned}$$

Sendo  $V = (V_1, V_2, V_3) \in T_{F(Z)}\mathbb{S}^2$ , temos  $\langle V, F(Z) \rangle = 0$ , i.e.,  $V_1Z_1^3 + V_2Z_2^3 + V_3Z_3^3 = 0$ . Como  $Z \in SO_3(\mathbb{R})$ , então algum  $Z_\beta^3 \neq 0$ . Se  $Z_1^3 \neq 0$ , então

$$V_1 = \frac{-V_2Z_2^3 - V_3Z_3^3}{Z_1^3}$$

Para cada índice  $\alpha$  com  $\alpha \neq 1$  (ou seja,  $\alpha = 2, \alpha = 3$ ), definimos a matriz  $X(\alpha)$  por

$$X(\alpha)_\alpha^1 = 1, \quad X(\alpha)_1^\alpha = -1$$

e os demais termos são nulos. Assim, para  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 3$

$$X(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que para cada  $\alpha$ ,  $X(\alpha) \in T_I(SO_3(\mathbb{R}))$ . Assim, tomando

$$X = \frac{V_2X(2) + V_3X(3)}{Z_1^3} = \frac{1}{Z_1^3} \begin{pmatrix} 0 & V_2 & V_3 \\ -V_2 & 0 & 0 \\ -V_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

segue que  $X \in T_I(SO_3(\mathbb{R}))$  e

$$\begin{aligned} dF_Z(ZX) &= (Z_2^3X_1^2 + Z_3^3X_1^3, Z_1^3X_2^1 + Z_3^3X_2^3, Z_1^3X_3^1 + Z_2^3X_3^2) \\ &= \left(-\frac{Z_2^3V_2}{Z_1^3} - \frac{Z_3^3V_3}{Z_1^3}, \frac{Z_1^3V_2}{Z_1^3}, \frac{Z_1^3V_3}{Z_1^3}\right) = (V_1, V_2, V_3) = V. \end{aligned}$$

Se  $Z_2^3 \neq 0$ , então

$$V_2 = \frac{-V_1Z_1^3 - V_3Z_3^3}{Z_2^3}$$

Para  $\alpha \neq 2$  e  $\alpha \neq 1$  (ou seja,  $\alpha = 3$ ) definimos a matriz  $X(3)$  por  $X(3)_3^2 = 1$ ,  $X(3)_2^3 = -1$  e os demais termos nulos. Assim,

$$X(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

E a matriz  $X(1)$  por  $X(1)_1^2 = 1$ ,  $X(1)_2^1 = -1$  e os demais termos nulos. Temos

$$X(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando

$$X = \frac{V_1 X(1) + V_3 X(3)}{Z_2^3}$$

temos

$$X = \frac{1}{Z_2^3} \begin{pmatrix} 0 & -V_1 & 0 \\ V_1 & 0 & V_3 \\ 0 & -V_3 & 0 \end{pmatrix}$$

portanto,  $X \in \mathbb{T}_I(SO_3(\mathbb{R}))$  e temos

$$\begin{aligned} (dF)_Z(ZX) &= (Z_2^3 X_1^2 + Z_3^3 X_1^3, Z_1^3 X_2^1 + Z_3^3 X_2^3, Z_1^3 X_3^1 + Z_2^3 X_3^2) \\ &= \left( \frac{Z_2^3 V_1}{Z_2^3}, \frac{-V_1 Z_1^3 - V_3 Z_3^3}{Z_2^3}, \frac{Z_2^3 V_3}{Z_2^3} \right) = (V_1, V_2, V_3) = V. \end{aligned}$$

Finalmente, quando  $Z_3^3 \neq 0$ , temos

$$V_3 = \frac{-V_1 Z_1^3 - V_2 Z_2^3}{Z_3^3}.$$

Para  $\alpha \neq 3$ , e  $\alpha \neq 1$ , definimos  $X(2)$  por

$$X(2)_2^3 = 1, X(2)_3^2 = -1$$

e os demais termos nulos. Então

$$X(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Além disso, definindo  $X(1)$  por  $X(1)_1^3 = 1, X(1)_3^1 = -1$ , e os demais termos nulos, temos

$$X(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando

$$X = \frac{V_1 X(1) + V_2 X(2)}{Z_3^3},$$

temos

$$X = \frac{1}{Z_3^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -V_1 \\ 0 & 0 & -V_2 \\ V_1 & V_2 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto,  $X \in \mathbb{T}_I(SO_3(\mathbb{R}))$ . Logo

$$\begin{aligned} (dF)_Z(ZX) &= (Z_2^3 X_1^2 + Z_3^3 X_1^3, Z_1^3 X_2^1 + Z_3^3 X_2^3, Z_1^3 X_3^1 + Z_2^3 X_3^2) \\ &= \left( \frac{Z_3^3 V_1}{Z_3^3}, \frac{Z_3^3 V_2}{Z_3^3}, \frac{-V_1 Z_1^3 - V_2 Z_2^3}{Z_3^3} \right) = (V_1, V_2, V_3) = V. \end{aligned}$$

Portanto,  $F$  é uma submersão. Observe que  $\mathcal{Z}(y) = F^{-1}[(T^1(y), T^2(y), T^3(y))]$ , ou seja a fibra correspondente ao ponto  $(T^1(y), T^2(y), T^3(y)) \in \mathbb{S}^2$ , já que  $(T^1(y))^2 + (T^2(y))^2 + (T^3(y))^2 = 1$ . Contudo,  $\mathcal{Z}(y)$  é uma subvariedade fechada de  $SO_3(\mathbb{R})$  e como  $\dim(SO_3(\mathbb{R})) = 3$  e  $\dim(\mathbb{S}^2) = 2$ , segue que  $\dim(\mathcal{Z}(y)) = 3 - 2 = 1$ . Sendo  $SO_3(\mathbb{R})$  compacto,  $\mathcal{Z}(y)$  é compacto.  $\square$

Para iniciar a prova do Teorema principal, precisamos de alguns lemas técnicos, que decorrem das equações de compatibilidade, que são as hipóteses do Teorema. A ideia geral da construção da prova, é embasado nas Proposições 3.1 e 3.2, que por sua vez depende dos lemas para sua prova. A técnica utilizada é baseada na construção de uma matriz de 1-formas e associada a essa matriz de 1-formas, definimos uma aplicação cujo núcleo gera uma distribuição integrável, possibilitando a determinação de uma aplicação  $f$  que é uma imersão isométrica local.

Vejamos a seguir alguns lemas técnicos.

**Lema 3.2.**  $\eta$  satisfaz

$$d\eta = -2\nu\nu\omega^1 \wedge \omega^2.$$

*Demonstração.* Como  $\eta$  é uma 1-forma dada por  $\eta(X) = \langle T, X \rangle$  para todo  $X \in \text{TV}$ , pela Proposição 1.9 tem-se

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) \\ &= X\langle T, Y \rangle - Y\langle T, X \rangle - \langle T, [X, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_X T, Y \rangle + \langle T, \nabla_X Y \rangle - \langle \nabla_Y T, X \rangle - \langle T, \nabla_Y X \rangle - \langle T, [X, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_X T, Y \rangle - \langle T, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.3) e o fato de  $S$  ser auto adjunto temos

$$\langle \nabla_X T, Y \rangle - \langle X, \nabla_Y T \rangle = \langle \nu(SX - \tau JX), Y \rangle - \langle \nu(SY - \tau JY), X \rangle = \nu\tau \langle -JX, Y \rangle + \nu\tau \langle JY, X \rangle$$

mas como  $J$  é uma aplicação linear e ortogonal, logo  $J$  é uma isometria então  $\langle X, Y \rangle = \langle JX, JY \rangle$ , temos

$$-\langle X, JY \rangle = \langle -X, JY \rangle = \langle J(J(X)), JY \rangle = \langle JX, Y \rangle.$$

Assim

$$d\eta(X, Y) = \nu\tau \langle -JX, Y \rangle + \nu\tau \langle JY, X \rangle = 2\nu\tau \langle X, JY \rangle.$$

Logo  $d\eta$  na base  $\{e_1, e_2\}$  fica

$$d\eta(e_1, e_2) = 2\nu\tau \langle e_1, Je_2 \rangle = 2\nu\tau \langle e_1, -e_1 \rangle = -2\nu\tau.$$

Escrevendo  $X = x_1e_1 + x_2e_2$  e  $Y = y_1e_1 + y_2e_2$  teremos

$$\begin{aligned}
d\eta(X, Y) &= 2\nu\tau\langle X, JY \rangle \\
&= 2\nu\tau\langle x_1e_1 + x_2e_2, y_1J(e_1) + y_2J(e_2) \rangle \\
&= 2\nu\tau(x_1y_1\langle e_1, e_2 \rangle + x_1y_2\langle e_1, -e_1 \rangle + x_2y_1\langle e_2, e_2 \rangle + x_2y_2\langle e_2, -e_1 \rangle) \\
&= -2\nu\tau(x_1y_2 - x_2y_1) = -2\nu\tau\omega^1 \wedge \omega^2(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Como  $T$  é um campo tangente em  $\mathcal{V}$  e suas coordenadas no referencial  $\{e_1, e_2\}$  são dadas por  $T^i = \langle T, e_i \rangle$ ,  $i = 1, 2$  e  $T^3 = \nu$  em cada  $y \in \mathcal{V}$ . Podemos obter o seguinte lema.

**Lema 3.3.** *O campo  $T$  satisfaz*

$$\begin{aligned}
dT^1 &= \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_1^\gamma + \tau T^3 \omega^2, \\
dT^2 &= \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_2^\gamma - \tau T^3 \omega^1, \\
dT^3 &= \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_3^\gamma - \tau T^1 \omega^2 + \tau T^2 \omega^1.
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Para cada  $p \in \mathcal{V}$ , onde  $\{e_1, e_2\}$  esteja definido, seja  $X \in T_p\mathcal{V}$  e  $T = T^1e_1 + T^2e_2$ . Como  $\omega_\beta^\alpha(X) = \langle \nabla_X e_\beta, e_\alpha \rangle$ ,  $\omega_1^3(X) = \langle SX, e_1 \rangle$ , e pela equação (3.3), temos

$$\begin{aligned}
dT^1(X) = d\langle T, e_1 \rangle(X) &= X\langle T, e_1 \rangle \\
&= \langle \nabla_X T, e_1 \rangle + \langle T, \nabla_X e_1 \rangle \\
&= \langle \nu(SX - \tau JX), e_1 \rangle + \langle T^1e_1 + T^2e_2, \nabla_X e_1 \rangle \\
&= T^3\langle SX, e_1 \rangle - \tau T^3\langle JX, e_1 \rangle + T^1\langle e_1, \nabla_X e_1 \rangle + T^2\langle e_2, \nabla_X e_1 \rangle \\
&= T^3\omega_1^3(X) - \tau T^3\langle JX, e_1 \rangle + T^1\omega_1^1(X) + T^2\omega_1^2(X).
\end{aligned}$$

mas,  $\langle JX, e_1 \rangle = -\langle X, Je_1 \rangle = -\langle X, e_2 \rangle$ .

Então

$$\begin{aligned}
dT^1(X) &= T^3\omega_1^3(X) + T^2\omega_1^2(X) + \tau T^3\langle X, e_2 \rangle \\
&= \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_1^\gamma(X) + \tau T^3 \omega^2(X).
\end{aligned}$$

Usando novamente a equação (3.3), obtemos  $dT^2$ .

$$\begin{aligned}
dT^2(X) = d\langle T, e_2 \rangle(X) &= X\langle T, e_2 \rangle \\
&= \langle \nabla_X T, e_2 \rangle + \langle T, \nabla_X e_2 \rangle \\
&= \langle \nu(SX - \tau JX), e_2 \rangle + \langle T^1 e_1 + T^2 e_2, \nabla_X e_2 \rangle \\
&= T^3 \langle SX, e_2 \rangle - \tau T^3 \langle JX, e_2 \rangle + T^1 \langle e_1, \nabla_X e_2 \rangle + T^2 \langle e_2, \nabla_X e_2 \rangle \\
&= T^3 \omega_2^3(X) - \tau T^3 \langle X, e_1 \rangle + T^1 \omega_2^1(X) + T^2 \omega_2^2(X) \\
&= \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_2^\gamma(X) - \tau T^3 \omega^1(X).
\end{aligned}$$

Para determinar  $dT^3$  usamos a equação (3.4) que nos dá

$$d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}
dT^3(X) = d\nu(X) &= -\langle SX - \tau JX, T \rangle \\
&= -\langle SX, T^1 e_1 + T^2 e_2 \rangle + \tau \langle JX, T^1 e_1 + T^2 e_2 \rangle \\
&= -T^1 \langle SX, e_1 \rangle - T^2 \langle SX, e_2 \rangle - \tau T^1 \langle X, J e_1 \rangle - \tau T^2 \langle X, J e_2 \rangle \\
&= \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_3^\gamma(X) + \tau T^2 \langle X, e_1 \rangle - \tau T^1 \langle X, e_2 \rangle \\
&= \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_3^\gamma(X) + \tau T^2 \omega^1(X) - \tau T^1 \omega^2(X).
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.4.**  $\Omega$  satisfaz

$$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \tau^2 & 0 \\ -\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 + (\kappa - 4\tau^2) T^3 \begin{pmatrix} 0 & T^3 & -T^2 \\ -T^3 & 0 & T^1 \\ T^2 & -T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

*Demonstração.* Seja  $\Psi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega$  e como  $R_{klj}^i = \langle R(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle$ . Pela Proposição 1.10, temos

$$\begin{aligned}
\Psi_j^i &= d\Omega_j^i + (\Omega \wedge \Omega)_j^i \\
&= -\frac{1}{2} \sum_k \sum_l R_{klj}^i \omega^k \wedge \omega^l - \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p + \sum_\gamma \omega_\gamma^i \wedge \omega_j^\gamma,
\end{aligned}$$

mas como  $i, j, p = 1, 2$  e  $\gamma = 1, 2, 3$  então

$$-\sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p + \sum_\gamma \omega_\gamma^i \wedge \omega_j^\gamma = \omega_3^i \wedge \omega_j^3.$$

Logo

$$\Psi_j^i = d\Omega_j^i + (\Omega \wedge \Omega)_j^i = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_l R_{klj}^i \omega^k \wedge \omega^l + \omega_3^i \wedge \omega_j^3.$$

Pela equação de Gauss no Corolário 2.1

$$R_{klj}^i = \bar{R}_{klj}^i + \det S.$$

Usando a Proposição 2.1 tem-se

$$\begin{aligned} \bar{R}_{klj}^i &= \langle \bar{R}(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle \\ &= (\kappa - 3\tau^2) \langle R_0(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \langle R_1(T; e_k, e_l)e_j, e_i \rangle \end{aligned}$$

mas

$$\langle R_0(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle = \langle e_k, e_j \rangle \langle e_l, e_i \rangle - \langle e_l, e_j \rangle \langle e_k, e_i \rangle = (\delta_j^k \delta_i^l - \delta_j^l \delta_i^k).$$

$$\begin{aligned} \langle R_1(T; e_k, e_l)e_j, e_i \rangle &= \langle e_l, T \rangle \langle e_j, T \rangle \langle e_k, e_i \rangle + \langle e_l, e_i \rangle \langle e_k, T \rangle \langle T, e_j \rangle \\ &\quad - \langle e_k, e_j \rangle \langle e_l, T \rangle \langle T, e_i \rangle - \langle e_k, T \rangle \langle e_j, T \rangle \langle e_l, e_i \rangle \\ &= (T^l T^j \delta_i^k + \delta_j^l T^k T^i - \delta_j^k T^l T^i - T^k T^j \delta_i^l). \end{aligned}$$

Logo

$$\bar{R}_{klj}^i = (\kappa - 3\tau^2)(\delta_j^k \delta_i^l - \delta_j^l \delta_i^k) + (\kappa - 4\tau^2)(T^l T^j \delta_i^k + \delta_j^l T^k T^i - \delta_j^k T^l T^i - T^k T^j \delta_i^l).$$

Sendo  $\{e_1, e_2\}$  referencial ortonormal, segue que

$$\det S = \langle S e_k, e_j \rangle \langle S e_l, e_i \rangle - \langle S e_k, e_i \rangle \langle S e_l, e_j \rangle = \omega_j^3(e_k) \omega_i^3(e_l) - \omega_i^3(e_k) \omega_j^3(e_l) = \omega_j^3 \wedge \omega_i^3(e_k, e_l).$$

Assim

$$\Psi_j^i = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\bar{R}_{klj}^i + \omega_j^3 \wedge \omega_i^3(e_k, e_l)) \omega^k \wedge \omega^l + \omega_3^i \wedge \omega_j^3.$$

Supondo  $i < j$  e expandindo os somatórios temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_k \sum_l \bar{R}_{klj}^i \omega^k \wedge \omega^l &= -\frac{1}{2} \{-2(\kappa - 3\tau^2) + 2(\kappa - 4\tau^2)(T^j T^j + T^i T^i)\} \omega^i \wedge \omega^j \\ &= (\kappa - 3\tau^2) \omega^i \wedge \omega^j - (\kappa - 4\tau^2)(T^j T^j + T^i T^i) \omega^i \wedge \omega^j. \end{aligned}$$

Tomando  $e_k, e_l$  da base de  $T_p \mathcal{V}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_j^i(e_k, e_l) &= (\kappa - 3\tau^2) \omega^i \wedge \omega^j(e_k, e_l) - (\kappa - 4\tau^2)(T^j T^j + T^i T^i) \omega^i \wedge \omega^j(e_k, e_l) \\ &\quad - \frac{1}{2} \omega_j^3 \wedge \omega_i^3(e_k, e_l) \sum_k \sum_l \omega^k \wedge \omega^l(e_k, e_l) + \omega_3^i \wedge \omega_3^j(e_k, e_l). \end{aligned}$$

Observe que

$$\omega^1 \wedge \eta = T^2 \omega^1 \wedge \omega^2 \quad \text{e} \quad \omega^2 \wedge \eta = -T^1 \omega^1 \wedge \omega^2,$$

isto é  $T^j \omega^i \wedge \omega^j = \omega^i \wedge \eta$  para  $i, j = 1, 2$ , e

$$-\frac{1}{2} \omega_j^3 \wedge \omega_i^3(e_k, e_l) \sum_k \sum_l \omega^k \wedge \omega^l(e_k, e_l) + \omega_3^i \wedge \omega_3^j(e_k, e_l) = 0.$$

Então

$$\Psi_j^i = (\kappa - 3\tau^2) \omega^i \wedge \omega^j + (\kappa - 4\tau^2)(T^i \omega^j - T^j \omega^i) \wedge \eta.$$

Analogamente, pela Proposição 1.10 tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_j^3 &= d\Omega_j^3 + (\Omega \wedge \Omega)_j^3 \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \langle \nabla_{e_k} S e_l - \nabla_{e_l} S e_k - S[e_k, e_l] \rangle \omega^k \wedge \omega^l - \sum_{p=1}^2 \omega_p^3 \wedge \omega_j^p + \sum_{\gamma=1}^3 \omega_\gamma^3 \wedge \omega_j^\gamma \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \langle \nabla_{e_k} S e_l - \nabla_{e_l} S e_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l. \end{aligned}$$

Pela equação de Codazzi no Corolário 2.1 temos

$$\begin{aligned} \Psi_j^3 &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\kappa - 4\tau^2) T^3 (\langle e_l, T \rangle \langle e_k, e_j \rangle - \langle e_k, T \rangle \langle e_l, e_j \rangle) \omega^k \wedge \omega^l \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\kappa - 4\tau^2) T^3 (T^l \delta_j^k - T^k \delta_j^l) \omega^k \wedge \omega^l \end{aligned}$$

expandindo os somatórios obtemos

$$\Psi_j^3 = (\kappa - 4\tau^2) T^3 \omega^j \wedge \eta.$$

Como  $\Psi$  é uma matriz de formas antissimétricas logo  $\Psi_j^i = -\Psi_i^j$ . Assim como

$$\begin{aligned} \Psi_2^1 &= (\kappa - 3\tau^2) - \tau^2 + \tau^2 - (\kappa - 4\tau^2)((T^1)^2 + (T^2)^2) \\ &= (\kappa - 4\tau^2)(1 + T^3 - 1) + \tau^2 \\ &= T^3(\kappa - 4\tau^2) + \tau^2. \end{aligned}$$

$$\Psi_3^1 = -T^3 T^2 (\kappa - 4\tau^2).$$

$$\Psi_3^2 = T^3 T^1 (\kappa - 4\tau^2).$$

Com isso temos

$$\begin{aligned} \Psi &= (\kappa - 3\tau^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 + (\kappa - 4\tau^2) \begin{pmatrix} 0 & -T^2 & -T^3 \\ T^2 & 0 & 0 \\ T^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \eta \\ &\quad + (\kappa - 4\tau^2) \begin{pmatrix} 0 & T^1 & 0 \\ -T^1 & 0 & -T^3 \\ 0 & T^3 & 0 \end{pmatrix} \omega^2 \wedge \eta \end{aligned}$$

Portanto

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & \tau^2 & 0 \\ -\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 + (\kappa - 4\tau^2) \begin{pmatrix} 0 & T^3 & -T^2 \\ -T^3 & 0 & T^1 \\ T^2 & -T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

□

No Lema 2.1 ficou definida a matriz  $L(A)$ . Para cada  $Z \in \mathcal{Z}(y)$ , a matriz  $L(Z)$  define uma matriz de 1-formas, como mostra o próximo lema.

**Lema 3.5.** *A matriz  $L(Z)$  é dada por*

$$L(Z) = (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \omega^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^2.$$

*Demonstração.* Calculamos cada elemento de  $L(Z)$  que é dado por

$$\begin{aligned} L(Z)_{\beta}^{\alpha} &= \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta, \epsilon=1}^3 Z_{\alpha}^{\epsilon} Z_k^{\gamma} Z_{\beta}^{\delta} \bar{\Gamma}_{\gamma\epsilon}^{\delta} \right) \omega^k \\ &= \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta=1}^3 Z_k^{\gamma} Z_{\beta}^{\delta} (Z_{\alpha}^1 \bar{\Gamma}_{\gamma 1}^{\delta} + Z_{\alpha}^2 \bar{\Gamma}_{\gamma 2}^{\delta} + Z_{\alpha}^3 \bar{\Gamma}_{\gamma 3}^{\delta}) \right) \omega^k \\ &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{\gamma=1}^3 Z_{\alpha}^1 Z_k^{\gamma} (Z_{\beta}^1 \bar{\Gamma}_{\gamma 1}^1 + Z_{\beta}^2 \bar{\Gamma}_{\gamma 1}^2 + Z_{\beta}^3 \bar{\Gamma}_{\gamma 1}^3) + Z_{\alpha}^2 Z_k^{\gamma} (Z_{\beta}^1 \bar{\Gamma}_{\gamma 2}^1 + Z_{\beta}^2 \bar{\Gamma}_{\gamma 2}^2 + Z_{\beta}^3 \bar{\Gamma}_{\gamma 2}^3) \right. \\ &\quad \left. + Z_{\alpha}^3 Z_k^{\gamma} (Z_{\beta}^1 \bar{\Gamma}_{\gamma 3}^1 + Z_{\beta}^2 \bar{\Gamma}_{\gamma 3}^2 + Z_{\beta}^3 \bar{\Gamma}_{\gamma 3}^3) \right\} \omega^k. \end{aligned}$$

Os símbolos de Christoffel não-nulos são

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{23}^1 &= -\bar{\Gamma}_{21}^3 = -\bar{\Gamma}_{13}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^3 = \tau, \\ \bar{\Gamma}_{32}^1 &= -\bar{\Gamma}_{31}^2 = \tau - \sigma. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
L(Z)_{\beta}^{\alpha} &= \sum_{k=1}^2 \{Z_{\alpha}^1 Z_{\beta}^2 Z_k^3 (-\tau + \sigma) + Z_{\alpha}^1 Z_{\beta}^3 Z_k^2 (-\tau) + Z_{\alpha}^2 Z_{\beta}^1 Z_k^3 (\tau - \sigma) + Z_{\alpha}^2 Z_{\beta}^3 Z_k^1 (\tau) \\
&\quad + Z_{\alpha}^3 Z_{\beta}^1 Z_k^2 (\tau) + Z_{\alpha}^3 Z_{\beta}^2 Z_k^1 (-\tau)\} \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^2 \{\tau (Z_{\alpha}^2 Z_{\beta}^3 Z_k^1 + Z_{\alpha}^3 Z_{\beta}^1 Z_k^2 - Z_{\alpha}^1 Z_{\beta}^3 Z_k^2 - Z_{\alpha}^3 Z_{\beta}^2 Z_k^1) \\
&\quad + (\tau - \sigma) (Z_{\alpha}^2 Z_{\beta}^1 Z_k^3 - Z_{\alpha}^1 Z_{\beta}^2 Z_k^3)\} \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^2 \{\tau T^{\beta} (Z_{\alpha}^2 Z_k^1 - Z_{\alpha}^1 Z_k^2) + \tau T^{\alpha} (Z_{\alpha}^1 Z_k^2 - Z_{\beta}^2 Z_k^1) + (\tau - \sigma) T^k (Z_{\alpha}^2 Z_{\beta}^1 - Z_{\alpha}^1 Z_{\beta}^2)\} \omega^k.
\end{aligned}$$

Mas, a matriz  $Z$  pertence a  $SO_3(\mathbb{R})$ , logo sua comatriz é ela própria. Para ver isso basta usar a propriedade:  $Z^t Com(Z) = det Z \cdot I$ , onde  $Z^t$  denota a matriz transposta de  $Z$ ,  $Com(Z)$  a comatriz de  $Z$  e  $I$  a matriz identidade. Assim

$$Z^t Com(Z) = det Z \cdot I = I = Z^t Z \Rightarrow Com(Z) = Z.$$

como os elementos da comatriz são dados por  $Com(Z)_{ij}^i = (-1)^{i+j} det M$ , onde  $M$  é a matriz obtida quando se omite a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $Z$ . Logo

$$\begin{aligned}
Z_3^3 &= Z_1^1 Z_2^2 - Z_1^2 Z_2^1 \\
Z_2^3 &= -(Z_1^1 Z_3^2 - Z_1^2 Z_3^1) \\
Z_1^3 &= Z_2^1 Z_3^2 - Z_2^2 Z_3^1
\end{aligned}$$

Quando  $\alpha = \beta$  tem-se  $L(Z)_{\alpha}^{\alpha} = 0$ , pois

$$L(Z)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{k=1}^2 \{\tau T^{\alpha} (Z_{\alpha}^2 Z_k^1 - Z_{\alpha}^1 Z_k^2) + \tau T^{\alpha} (Z_{\alpha}^1 Z_k^2 - Z_{\alpha}^2 Z_k^1) + (\tau - \sigma) T^k (Z_{\alpha}^2 Z_{\alpha}^1 - Z_{\alpha}^1 Z_{\alpha}^2)\} \omega^k = 0.$$

Mas geralmente, tem-se

$$L(Z)_{\alpha}^{\beta} = \sum_{k=1}^2 \{\tau T^{\alpha} (Z_{\beta}^2 Z_k^1 - Z_{\beta}^1 Z_k^2) + \tau T^{\beta} (Z_{\beta}^1 Z_k^2 - Z_{\alpha}^2 Z_k^1) + (\tau - \sigma) T^k (Z_{\beta}^2 Z_{\alpha}^1 - Z_{\beta}^1 Z_{\alpha}^2)\} \omega^k.$$

Logo,

$$L(Z)_{\alpha}^{\beta} + L(Z)_{\beta}^{\alpha} = \sum_{k=1}^2 \{-\tau T^{\alpha} (-Z_{\beta}^1 Z_k^2 + Z_{\alpha}^1 Z_k^2) + \tau T^{\beta} (Z_{\beta}^1 Z_k^2 - Z_{\alpha}^1 Z_k^2)\} = 0.$$

Assim,  $L(Z)_{\beta}^{\alpha} = -L(Z)_{\alpha}^{\beta}$  e a matriz  $L(Z)$  é antissimétrica. Como  $(T^1)^2 + (T^2)^2 + (T^3)^2 = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
L(Z)_{\alpha}^{\beta} &= \tau T^2 (Z_1^2 Z_2^1 - Z_1^1 Z_2^2) \omega^2 + \tau T^1 (Z_2^2 Z_1^1 - Z_2^1 Z_1^2) \\
&\quad + (\tau - \sigma) (Z_1^2 Z_2^1 - Z_1^1 Z_2^2) (T^1 \omega^1 + T^2 \omega^2) \\
&= -\tau T^2 Z_3^3 \omega^2 - \tau T^1 Z_3^3 \omega^1 - (\tau - \sigma) Z_3^3 (T^1 \omega^1 + T^2 \omega^2) \\
&= -(2\tau - \sigma) T^3 (T^1 \omega^1 + T^2 \omega^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(Z)_3^1 &= \tau T^3(Z_2^1 Z_1^2 - Z_1^1 Z_2^2)\omega^2 + \tau T^1(Z_3^1 Z_1^2 - Z_1^1 Z_3^2)\omega^1 + \tau T^1(Z_3^1 Z_2^2 - Z_2^1 Z_3^2)\omega^2 \\
&\quad + (\tau - \sigma)(Z_3^1 Z_1^2 - Z_1^1 Z_3^2)(T^1\omega^1 + T^2\omega^2) \\
&= (\tau T^1 T^2 + (\tau - \sigma)T^1)\omega^1 + (-\tau(T^3)^2 - \tau(T^1)^2 + (\tau - \sigma)(T^2)^2)\omega^2 \\
&= (2\tau - \sigma)T^1 T^2\omega^1 + (2\tau - \sigma)(T^2)^2 - \tau\omega^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(Z)_3^2 &= \tau T^3(Z_1^1 Z_2^2 - Z_2^1 Z_3^2)\omega^1 + \tau T^2(Z_3^1 Z_1^2 - Z_1^1 Z_3^2)\omega^1 + \tau T^2(Z_3^1 Z_2^2 - Z_2^1 Z_3^2)\omega^2 \\
&\quad + (\tau - \sigma)(Z_3^1 Z_2^2 - Z_2^1 Z_3^2)(T^1\omega^1 + T^2\omega^2) \\
&= (\tau(T^3)^2 + \tau(T^2)^2 - (\tau - \sigma)(T^1)^2)\omega^1 + (-\tau T^2 T^1 - (\tau - \sigma)T^2 T^1)\omega^2 \\
&= -(2\tau - \sigma)(T^1)^2\omega^1 - (2\tau - \sigma)T^2 T^1\omega^2 + \tau\omega^1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
L(Z) &= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 T^1 & T^1 T^2 \\ T^3 & 0 & -(T^1)^2 + \tau \\ -T^1 T^2 & (T^1)^2 - \tau & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \\
&\quad + (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 T^2 & (T^2)^2 - \tau \\ T^3 T^2 & 0 & -T^1 T^2 \\ -(T^2)^2 + \tau & T^1 T^2 & 0 \end{pmatrix} \omega^2 \\
&= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} T^1 \omega^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \\
&\quad (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} T^2 \omega^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^2 \\
&= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \omega^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^2.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.6.** *A matriz  $L$  satisfaz*

$$L \wedge L = \tau(2\tau - \sigma)T^3 \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ + (\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

*Demonstração.* Sendo  $L$  uma matriz de 1-formas, segue que  $L \wedge L$  é uma matriz de 2-formas e pelo lema anterior, temos

$$L \wedge L = (A\eta + B\omega^1 + C\omega^2) \wedge (A\eta + B\omega^1 + C\omega^2)$$

onde

$$A = (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelas propriedades do produto exterior, tem-se

$$L \wedge L = (BA - AB)\omega^1 \wedge \eta + (CA - AC)\omega^2 \wedge \eta + (BC - CB)\omega^1 \wedge \omega^2.$$

mas,  $\omega^1 \wedge \eta = T^2\omega^1 \wedge \omega^2$ ,  $\omega^2 \wedge \eta = -T^1\omega^1 \wedge \omega^2$ . e

$$BA - AB = \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & T^2 & T^3 \\ -T^2 & 0 & 0 \\ -T^3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CA - AC = \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^1 & 0 \\ T^1 & 0 & T^3 \\ 0 & -T^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BC - CB = \tau^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
L \wedge L &= \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & T^2 & T^3 \\ -T^2 & 0 & 0 \\ -T^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^2 \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&+ \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^1 & 0 \\ T^1 & 0 & T^3 \\ 0 & -T^3 & 0 \end{pmatrix} (-T^1 \omega^1 \wedge \omega^2) + \tau^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&= \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & 1 - (T^3)^2 & T^3 T^2 \\ (T^3)^2 - 1 & 0 & -T^3 T^1 \\ -T^3 T^2 & T^3 T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&+ \tau^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&= \tau(2\tau - \sigma) T^3 \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&+ \tau(\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.7.** A matriz de 2-formas  $L \wedge \Omega + \Omega \wedge L$  é dada por

$$\begin{aligned}
L \wedge \Omega + \Omega \wedge L &= (2\tau - \sigma) \eta \wedge \begin{pmatrix} 0 & -dT^3 & dT^2 \\ dT^3 & 0 & -dT^1 \\ -dT^2 & dT^1 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \tau(2\tau - \sigma) T^3 \begin{pmatrix} 0 & T^3 & -T^2 \\ -T^3 & 0 & T^1 \\ T^2 & -T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&+ \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&+ \tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} d\omega^1 + \tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\omega^2.
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Fazendo um cálculo direto temos

$$\begin{aligned}
L \wedge \Omega &= (2\tau - \sigma)\eta \wedge \begin{pmatrix} T^3\omega_2^1 - T^2\omega_3^1 & -T^2\omega_3^2 & -T^3\omega_3^2 \\ T^1\omega_3^1 & T^3\omega_2^1 + T^1\omega_3^2 & T^3\omega_3^1 \\ -T^1\omega_2^1 & -T^2\omega_2^1 & -T^2\omega_3^1 + T^1\omega_3^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \tau\omega^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \\ \omega_2^1 & 0 & -\omega_3^2 \end{pmatrix} + \tau\omega^2 \begin{pmatrix} \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \end{pmatrix}. \\
\Omega \wedge L &= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} T^3\omega_2^1 - T^2\omega_3^1 & T^1\omega_3^1 & -T^1\omega_2^1 \\ -T^2\omega_3^2 & T^3\omega_2^1 + T^1\omega_3^2 & -T^2\omega_2^1 \\ -T^3\omega_3^2 & T^3\omega_3^1 & -T^2\omega_3^1 + T^1\omega_3^2 \end{pmatrix} \wedge \eta \\
&\quad + \tau \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^1 & \omega_2^1 \\ 0 & -\omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_3^2 \end{pmatrix} \wedge \omega^1 + \tau \begin{pmatrix} \omega_3^1 & 0 & 0 \\ \omega_3^2 & 0 & \omega_2^1 \\ 0 & 0 & \omega_3^1 \end{pmatrix} \wedge \omega^2. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Observe que  $\omega \wedge \varphi = -\varphi \wedge \omega$  para quaisquer  $\omega, \varphi$  1-formas, comutando  $\eta, \omega^1,$  e  $\omega^2$  em suas respectivas parcelas, invertemos o sinal de  $\Omega \wedge L$ , assim somando com  $L \wedge \Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned}
L \wedge \Omega + \Omega \wedge L &= (2\tau - \sigma)\eta \wedge \begin{pmatrix} 0 & -T^1\omega_3^1 - T^2\omega_3^2 & T^1\omega_2^1 - T^3\omega_3^2 \\ T^2\omega_3^2 + T^1\omega_3^1 & 0 & T^2\omega_2^1 + T^3\omega_3^1 \\ T^3\omega_3^2 - T^1\omega_2^1 & -T^3\omega_3^1 - T^2\omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \tau\omega^1 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^1 & -\omega_2^1 \\ -\omega_3^1 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tau\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^2 & 0 \\ -\omega_3^2 & 0 & -\omega_2^1 \\ 0 & \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3 e o fato que  $(T^1)^2 + (T^2)^2 + (T^3)^2 = 1$ , a primeira parcela se torna

$$\begin{aligned}
(2\tau - \sigma)\eta \wedge \begin{pmatrix} 0 & -dT^3 & dT^2 \\ dT^3 & 0 & -dT^1 \\ -dT^2 & dT^1 & 0 \end{pmatrix} + \tau(2\tau - \sigma)T^3\eta \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^1 \\ 0 & 0 & \omega^2 \\ -\omega^1 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \\
+ \tau(2\tau - \sigma)\eta \wedge \begin{pmatrix} 0 & -T^1\omega^2 + T^2\omega^1 & 0 \\ T^1\omega^2 - T^2\omega^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como  $\eta = T^1\omega^1 + T^2\omega^2$  é uma 1-forma, entrando com o produto exterior em cada entrada das matrizes nas duas últimas parcelas e lembrando que  $\eta \wedge \omega^1 = -T^2\omega^1 \wedge \omega^2$

e  $\eta \wedge \omega^2 = T^1 \omega^1 \wedge \omega^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} & (2\tau - \sigma)\eta \wedge \begin{pmatrix} 0 & -dT^3 & dT^2 \\ dT^3 & 0 & -dT^1 \\ -dT^2 & dT^1 & 0 \end{pmatrix} + \tau(2\tau - \sigma)T^3 \begin{pmatrix} 0 & T^3 & -T^2 \\ -T^3 & 0 & T^1 \\ T^2 & -T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ & + \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Pelas equações (1.4) e (1.5) da Proposição 1.10 tem-se

$$\begin{aligned} & \tau\omega^1 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^1 & -\omega_2^1 \\ -\omega_3^1 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tau\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^2 & 0 \\ -\omega_3^2 & 0 & -\omega_2^1 \\ 0 & \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \tau \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 \wedge \omega_3^1 & \omega^1 \wedge \omega_2^1 \\ -\omega^1 \wedge \omega_3^1 & 0 & 0 \\ \omega^1 \wedge \omega_2^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \wedge \omega_3^2 & 0 \\ -\omega^2 \wedge \omega_3^2 & 0 & -\omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ 0 & \omega^2 \wedge \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} d\omega^1 + \tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\omega^2. \end{aligned}$$

□

As equações de compatibilidade e os lemas anteriores garantem a seguinte

**Proposição 3.1.** *Assuma que as equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}$  são satisfeitas. Se  $y_0 \in \mathcal{V}$  e  $A_0 \in \mathcal{Z}(y_0)$ , então existe uma vizinhança  $U_1$  de  $y_0$  em  $\mathcal{V}$  e uma única aplicação  $A : U_1 \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  tal que*

$$A^{-1}dA = \Omega + L(A),$$

$$A(y) \in \mathcal{Z}(y) \text{ para todo } y \in U_1,$$

$$A(y_0) = A_0.$$

*Demonstração.* Seja  $U$  uma vizinhança coordenada de  $y_0 \in \mathcal{V}$ . Seja  $\mathcal{F}$ , o conjunto

$$\mathcal{F} = \{(y, Z) \in U \times SO_3(\mathbb{R}); Z \in \mathcal{Z}(y)\}.$$

Afirmamos que  $\mathcal{F}$  é uma variedade diferenciável de dimensão 3. Como  $y_0 \in U$ , e  $A_0 \in \mathcal{Z}(y_0)$ , tem-se que  $(y_0, A_0) \in \mathcal{F}$ , logo  $\mathcal{F}$  é não vazio. Vamos determinar uma

parametrização para  $\mathcal{F}$ . Observe que cada  $Z \in \mathcal{Z}(y)$  depende de  $y \in U$ , então vamos determinar uma aplicação  $M : U \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  tal que  $M(y) \in \mathcal{Z}(y)$ , i.e.,  $M(y)_\beta^3 = T^\beta(y)$ .

Seja  $W$  uma vizinhança coordenada de  $y_0$ , e considere  $t_1, t_2$  vetores de  $\mathbb{R}^3$  e uma base  $\{t_1, t_2, T(y_0)\}$  ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  em  $y_0$ , e  $\det(t_1, t_2, T(y_0)) = 1$ , onde  $T(y_0)$ , denota o vetor  $(T^1(y_0), T^2(y_0), T^3(y_0))$ . Assim existe uma vizinhança  $U \subset W$  suficientemente pequena, tal que  $\{t_1(y), t_2(y), T(y)\}$ , são vetores linearmente independente em  $\mathbb{R}^3$ , para todo  $y \in U$ . Aplicando o processo de Gram-Schmidt a esse conjunto de vetores, obtemos vetores  $t_1(y), t_2(y)$  definidos em  $U$ , com  $t_1(y_0) = t_1, t_2(y_0) = t_2$ , tais que para cada  $y \in U$   $\{T(y), t_1(y), t_2(y)\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Com isso, definimos  $M : U \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  por

$$M(y) = \begin{pmatrix} t_1^1(y) & t_1^2(y) & t_1^3(y) \\ t_2^1(y) & t_2^2(y) & t_2^3(y) \\ T^1(y) & T^2(y) & T^3(y) \end{pmatrix},$$

onde  $t_1(y) = (t_1^1(y), t_1^2(y), t_1^3(y))$  e  $t_2(y) = (t_2^1(y), t_2^2(y), t_2^3(y))$ .

Note que  $M(y)_\beta^3 = (T^\beta(y))$ , com  $\beta = 1, 2, 3$ .

Agora, observe que  $Z \in \mathcal{Z}(y)$  se, e somente se

$$ZM^{-1}(y) = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & 0 \\ B_1^2 & B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para algum  $B = (B_j^i) \in SO_2(\mathbb{R})$ . De fato, seja  $Z \in \mathcal{Z}(y)$ . Como  $M(y) \in \mathcal{Z}(y) \subset SO_3(\mathbb{R})$ , segue  $M^{-1}(y) = M^t(y) \in SO_3(\mathbb{R})$ , onde  $M^t(y)$  denota a matriz transposta de  $M(y)$ , então  $ZM^{-1}(y) \in SO_3(\mathbb{R})$ , e como a última coluna de  $M^t(y)$ , coincide com a última linha de  $Z$ , obtemos  $[ZM^{-1}(y)]_3^1 = [ZM^{-1}(y)]_3^2 = (ZM^{-1}(y))_1^3 = (ZM^{-1}(y))_2^3 = 0$  e  $(ZM^{-1}(y))_3^3 = 1$ , pois  $Z$  e  $M^{-1}(y)$  são ortogonais. Com isso

$$ZM^{-1}(y) = \begin{pmatrix} (ZM^{-1}(y))_1^1 & (ZM^{-1}(y))_2^1 & 0 \\ (ZM^{-1}(y))_1^2 & (ZM^{-1}(y))_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como,  $ZM^{-1}(y) \in SO_3(\mathbb{R})$ , então  $1 = \det(ZM^{-1}(y)) = \det(ZM^{-1}(y))_\alpha^\beta$ , onde  $\alpha, \beta = 1, 2$ ; e de fato  $[(ZM^{-1}(y))_\alpha^\beta]^{-1} = [(ZM^{-1}(y))_\alpha^\beta]^t$ .

Reciprocamente, considere

$$ZM^{-1}(y) = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & 0 \\ B_1^2 & B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$Z = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & 0 \\ B_1^2 & B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M(y).$$

Como  $B \in SO_2(\mathbb{R})$  e  $M(y) \in SO_3(\mathbb{R})$ . Segue que  $Z \in SO_3(\mathbb{R})$ . A última linha de  $Z$  é exatamente a última linha de  $M(y)$  que é  $(T^1(y), T^2(y), T^3(y))$ , i.e.,  $Z_\beta^3 = T^\beta(y)$ . Portanto  $Z \in \mathcal{Z}(y)$ .

Com isso, se  $(\varphi, I)$  é uma estrutura diferenciável para  $SO_2(\mathbb{R})$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . definimos  $\Psi : I \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  por

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t)_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

e observe que sua inversa é dada por

$$\Psi^{-1} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi^{-1}(B).$$

Pelo que provamos, se  $y \in U$ , então  $\Psi(t)M(y) \in \mathcal{Z}(y)$ , logo definimos a aplicação  $F_\varphi : U \times I \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$  por

$$F_\varphi(y, t) = (y, \Psi(t)M(y))$$

que está bem definida. Vamos mostrar que  $F_\varphi$  é uma parametrização para  $\mathcal{F}$ . Devemos mostrar que:

1.  $\bigcup_{\alpha} F(U \times I_{\alpha}) = \mathcal{F}$ .
2. Dado  $(\varphi_{\alpha}, I_{\alpha})$  e  $(\varphi_{\beta}, I_{\beta})$  parametrizações de  $SO_2(\mathbb{R})$ , tais que  $F_{\varphi_{\alpha}}(U \times I_{\alpha}) \cap F_{\varphi_{\beta}}(U \times I_{\beta}) \neq \emptyset$ , então as aplicações  $F_{\varphi_{\beta}}^{-1} \circ F_{\varphi_{\alpha}}$  são diferenciáveis.

Para mostrar o item 1, resta provar  $\mathcal{F} \subset \bigcup_{\alpha} F(U \times I_{\alpha})$ . Assim, seja  $(y, Z) \in \mathcal{F}$ , então  $Z \in \mathcal{Z}(y)$ , logo, existe  $M(y) \in SO_3(\mathbb{R})$ , tal que

$$Z = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M(y),$$

onde  $B \in SO_2(\mathbb{R})$ . Dessa forma existe  $\gamma; t \in I_{\gamma}$ , tal que  $B = \varphi(t)$ , o que implica que  $t = \varphi^{-1}(B)$  e assim tomamos  $(y, t) = (y, \varphi^{-1}(B)) \in U \times I_{\gamma}$  e teremos que

$$F_{\varphi_{\gamma}}(y, \varphi^{-1}(B)) = (y, \Psi_{\gamma}(\varphi^{-1}(B))M(y)) = (y, Z).$$

Portanto,  $(y, Z) \in F_{\varphi_\gamma}(U, I_\gamma) \subset \bigcup_{\alpha} F(U \times I_\alpha)$ . Seja agora  $(y, t) \in F_{\varphi_\alpha}(U \times I_\alpha) \cap F_{\varphi_\beta}(U \times I_\beta)$ , então

$$\begin{aligned} F_{\varphi_\beta}^{-1} \circ F_{\varphi_\alpha}(y, t) &= F_{\varphi_\beta}^{-1}(y, \Psi_\alpha(t)M(y)) \\ &= (y, \Psi_\beta^{-1}(\Psi_\alpha(t)M(y)M^{-1}(y))) \\ &= (y, \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha)). \end{aligned}$$

que é diferenciável. Contudo,  $\mathcal{F}$  é uma variedade diferenciável de dimensão 3.

O espaço tangente  $T_{(y,Z)}\mathcal{F}$  para cada  $(y, Z) \in \mathcal{F}$  é dado por:

$$T_{(y,Z)}\mathcal{F} = \{(u, \zeta) \in T_y U \times T_Z SO_3(\mathbb{R}); \zeta_\beta^3 = dT_y^\beta(u).\}$$

Consideremos as seguintes aplicações

$$\pi_1 : U \times SO_3(\mathbb{R}) \rightarrow U,$$

$$\pi_2 : U \times SO_3(\mathbb{R}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R}).$$

As projeções no primeiro e segundo fator. Seja  $h : GL_3(\mathbb{R}) \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$ , dada por  $h(Z) = Z^{-1}$ . Definimos a seguinte matriz de 1-formas em  $\mathcal{F}$ .

$$\Theta = (h \circ \pi_2)d\pi_2 - \pi_1^*\Omega - \pi_1^*(L \circ M),$$

onde  $\pi_1^*\Omega$  e  $\pi_1^*(L \circ M)$  denotam o *pullback* das matrizes de 1-formas  $\Omega$  e  $L(Z)$ . Para cada  $(y, Z) \in \mathcal{F}$  e  $(u, \zeta) \in T_{(y,Z)}\mathcal{F}$ , temos

$$\begin{aligned} \Theta_{(y,Z)}(u, \zeta) &= (h \circ \pi_2)_{(y,Z)}d\pi_2(u, \zeta) - (\pi_1^*\Omega)_{(y,Z)}(u, \zeta) - (\pi_1^*(L \circ M))_{(y,Z)}(u, \zeta) \\ &= Z^{-1}\zeta - \Omega_y(d\pi_1(u, \zeta)) - L(Z)_y(d\pi_1(u, \zeta)) \\ &= Z^{-1}\zeta - \Omega_y(u) - L(Z)_y(u). \end{aligned}$$

Observe que  $\Omega, L(Z) \in \mathfrak{so}_3$ ,  $Z \in \mathcal{Z}(y)$  e  $\zeta \in T_Z SO_3(\mathbb{R})$ , i.e.,  $\zeta_\beta^3 = dT_y^\beta(u)$ , com  $u \in T_y U$ . Então  $\zeta = ZX$ , com  $X \in \mathfrak{so}_3 = T_I SO_3(\mathbb{R})$ , logo

$$(Z^{-1}\zeta)^t + Z^1\zeta = (Z^1ZX)^t + Z^{-1}(ZX) = X^t Z^t (Z^{-1})^t + X = X^t + X = 0.$$

Assim,  $Z^{-1}\zeta \in \mathfrak{so}_3$ . Portanto,  $\Theta(y, Z)$  pertence a  $\mathfrak{so}_3$ . Afirmamos que para cada  $(y, Z) \in \mathcal{F}$ , o espaço

$$\mathcal{D}(y, Z) = \text{Ker}\Theta_{(y,Z)}$$

tem dimensão 2. Para provar isso, vamos mostrar que  $\text{Im}\Theta_{(y,Z)}$  tem dimensão 1 e como  $\Theta_{(y,Z)}$  é linear, concluir a prova da afirmação pelo teorema do núcleo e da imagem. Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathfrak{so}_3; (ZH)_\beta^3 = 0\}, \text{ com } \beta = 1, 2, 3.$$

Temos que a imagem de  $\Theta_{(y,Z)}$  está contido em  $\mathcal{H}$ , pois

$$(Z\Theta)_\beta^3 = dZ_\beta^3 - (Z\Theta)_\beta^3 - (ZL(Z))_\beta^3$$

mas,

$$(Z\Theta)_\beta^3 = \sum_{\gamma=1}^3 Z_\gamma^3 \omega_\beta^\gamma, \quad (ZL(Z))_\beta^3 = \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma L(Z)_\beta^\gamma \text{ e } dZ_\beta^3 = dT^\beta,$$

e pelos Lemas 3.3 e 3.5 calculamos. Para  $\beta = 1$

$$\begin{aligned} (Z\Theta)_1^3 &= dT^1 - \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_1^\gamma - \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma L(Z)_1^\gamma \\ &= \tau T^3 \omega^2 - T^2 L(Z)_1^2 - T^3 L(Z)_1^3 \\ &= \tau T^3 \omega^2 - T^2(2\tau - \sigma)T^3 - T^3[(2\tau - \sigma)(-T^2) + \tau\omega^2] = 0 \end{aligned}$$

Para  $\beta = 2$ .

$$\begin{aligned} (Z\Theta)_2^3 &= dT^2 - \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_2^\gamma - \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma L(Z)_2^\gamma \\ &= -\tau T^2 \omega^1 - T^1 L(Z)_2^1 - T^3 L(Z)_2^3 \\ &= -\tau T^3 \omega^1 - T^1[(2\tau - \sigma)(-T^3)] - T^3[(2\tau - \sigma)T^1 - \tau\omega^1] = 0 \end{aligned}$$

Para  $\beta = 3$

$$\begin{aligned} (Z\Theta)_3^3 &= dT^3 - \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma \omega_3^\gamma - \sum_{\gamma=1}^3 T^\gamma L(Z)_3^\gamma \\ &= -\tau T^1 \omega^2 + \tau T^2 \omega^1 - T^1 L(Z)_3^1 - T^2 L(Z)_3^2 \\ &= -\tau T^1 \omega^2 + \tau T^2 \omega^1 - T^1[(2\tau - \sigma)T^2 - \tau\omega^2] - T^2[(2\tau - \sigma)(-T^1) + \tau\omega^1] = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $(Z\Theta)_\beta^3 = 0$  para cada  $\beta = 1, 2, 3$  e portanto a imagem de  $\Theta_{(y,Z)}$  está em  $\mathcal{H}$ . Vamos mostrar primeiro que  $\dim\mathcal{H} = 1$ . Observe que se  $H \in \mathcal{H}$ , então  $ZH \in T_Z SO_3(\mathbb{R})$  e como  $(ZH)_\beta^3 = 0 = dT_y^3(0)$ , então  $\{(0, ZH); H \in \mathcal{H}\} \subset T_{y,Z}\mathcal{F}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \Theta_{(y,Z)}(0, ZH) &= Z^{-1}dZ(0, ZH) - \Omega_y(0) - L(Z)_y(0) \\ &= Z^{-1}(ZH) = H \end{aligned}$$

Assim,  $\dim(\mathcal{H}) \leq \dim(\text{Im}\theta_{(y,Z)})$  e como  $\text{Im}\theta_{(y,Z)} \subset \mathcal{H}$ , então  $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\text{Im}\theta_{(y,Z)})$ . Vejamos agora que  $\dim(\mathcal{H}) = 1$ .

A aplicação  $F : SO_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^2$  definida por  $F(Z) = (Z_1^3, Z_2^3, Z_3^3)$  é uma submersão (cf. Lema 3.1). Observe que  $H \in \mathcal{H}$  se, e somente se  $ZH \in \text{Ker}dF_Z$ , pois se  $H \in \mathcal{H}$  então  $(ZH)_\beta^3 = 0$  para  $\beta = 1, 2, 3$ , e como já vimos,  $dF_Z(\zeta) = (\zeta_1^3, \zeta_2^3, \zeta_3^3)$ ,  $\zeta \in T_Z SO_3(\mathbb{R})$ .

Assim,  $dF_Z(ZH) = ((ZH)_1^3, (ZH)_2^3, (ZH)_3^3) = (0, 0, 0)$  e portanto  $ZH \in \text{Ker}(df_Z)$ . A recíproca é imediata.

Com isso, pelo teorema do núcleo e da imagem aplicado a  $dF_Z : T_Z SO_3(\mathbb{R}) \rightarrow T_{F(Z)} \mathbb{S}^2$  que é uma aplicação sobrejetora, temos  $\dim(\text{Im}\theta_{(y,Z)}) = \dim(\mathcal{H}) = \dim(dF_Z) = 1$ . Aplicando o teorema do núcleo e imagem para  $\Theta_{(y,Z)} T_{y,Z} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , temos

$$3 = \dim T_Z \mathcal{F} = \dim \text{Im } \theta_{(y,z)} + \dim \text{Ker}(\theta_{(y,Z)}) = 1 + \dim \text{Ker}(\theta_{(y,Z)}).$$

Portanto,  $\dim \text{Ker}\Theta_{(y,Z)} = 2$  Provaremos agora que a distribuição  $\mathcal{D}$  é involutiva. Calculamos primeiro  $d\Theta$ . Como  $\pi_2(y, Z) = Z$ , denotaremos  $\pi_2 = Z$ . Logo

$$\Theta = Z^{-1}dZ - \pi_1^*\Omega - \pi_1^*L(Z).$$

Assim

$$d\Theta = d(Z^{-1}dZ) - d(\pi_1^*\Omega) - d(\pi_1^*L(Z)).$$

Como  $ddZ = 0$  e o *pullback* comuta com a derivada exterior, obtemos  $d(\pi_1^*\Omega) = \pi_1^*d\Omega$ ,  $d(\pi_1^*L(Z)) = \pi_1^*dL(Z)$  logo, denotando  $\pi_1^*\Omega = \Omega$ ,  $\pi_1^*d\Omega = d\Omega$  e  $\pi_1^*dL(Z) = dL(Z)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} d\Theta &= -Z^{-1}dZ \wedge Z^{-1}dZ + Z^{-1}d(dZ) - d\Omega - dL \\ &= -(\Theta + \Omega + L) \wedge (\Theta + \Omega + L) - d\Omega - dL \\ &= -\Theta \wedge \Theta - \Theta \wedge \Omega - \Theta \wedge L - \Omega \wedge \Theta - \Omega \wedge \Omega - \Omega \wedge L \\ &\quad - L \wedge \Theta - L \wedge \Omega - L \wedge L - d\Omega - dL. \end{aligned}$$

Pelos Lemas 3.5 e 3.2, encontramos

$$\begin{aligned} dL(Z) &= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -dT^3 & dT^2 \\ dT^3 & 0 & -dT^1 \\ -dT^2 & dT^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \eta \\ &\quad + (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge (-2\tau\nu\omega^1 \wedge \omega^2) \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} d\omega^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} d\omega^2. \end{aligned}$$

Agora usando os Lemas 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 e a expressão de  $dL$  temos que

$$\begin{aligned}
& -d\Omega - \Omega \wedge \Omega - \Omega \wedge L - L \wedge \Omega - L \wedge L - dL \\
= & \begin{pmatrix} 0 & -\tau^2 & 0 \\ \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 + (\kappa - 4\tau^2)T^3 \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
& -\tau(\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 - \tau(2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
& + 2\tau(2\tau - \sigma)T^3 \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos comuns, obtemos

$$\begin{aligned}
= & [\tau^2 + \tau(\tau - \sigma) - \tau(2\tau - \sigma)] \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
& + [(\kappa - 4\tau^2 + 4\tau^2 - 2\tau\sigma)T^3] \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.
\end{aligned}$$

onde, usamos a relação  $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}$ . Substituindo o resultado acima na expressão de  $d\Theta$  encontramos

$$d\Theta = -\Theta \wedge \Theta - \Theta \wedge \Omega - \Theta \wedge L - \Omega \wedge \Theta - L \wedge \Theta.$$

Por esta fórmula decorre que se  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(y, Z)$ , então  $d\Theta(\xi_1, \xi_2) = 0$ . Além disso

$$0 = d\Theta(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\Theta(\xi_2) - \xi_2\Theta(\xi_1) - \Theta([\xi_1, \xi_2]) \Rightarrow \Theta([\xi_1, \xi_2]) = 0.$$

e como  $\Theta(\xi_1) = \Theta(\xi_2) = 0$ , segue que  $\Theta([\xi_1, \xi_2]) = 0$ . Portanto, a distribuição  $\mathcal{D}$  é involutiva e pelo Teorema de Frobenius, (cf. Teorema 1.1) é integrável. Seja  $\mathcal{A}$  uma variedade integral que contém  $(y_0, A_0)$ , então  $T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A} = \mathcal{D}(y_0, A_0)$ . Observe que

$$T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A} \cap (\{0\} \times T_{A_0}SO_3(\mathbb{R})) = \{0\}.$$

pois, se  $(u, \zeta) \in T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A} \cap (\{0\} \times T_{A_0}SO_3(\mathbb{R}))$ , então  $u = 0$  e

$$0 = \Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta) = A_0^{-1}\zeta, \text{ logo } \zeta = 0.$$

Tomando,  $\pi_1$  restrito à  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ , temos que  $d(\pi_1)_{(y_0, A_0)} : T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A} \rightarrow T_{y_0}U$  está definido em espaços de mesma dimensão e observe que  $Ker(d(\pi_1)_{(y_0, A_0)}) = \{0\}$ , pois se  $(u, \zeta) \in Ker(d(\pi_1)_{(y_0, A_0)})$ , então

$$0 = d(\pi_1)_{(y_0, A_0)}(u, \zeta) = u.$$

Mas,  $(0, \zeta) \in T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A}$  se, e somente se  $\zeta = 0$ , logo  $(u, \zeta) = \{0\}$ . Assim,  $d(\pi_1)_{(y_0, A_0)}$  é injetora e portanto um isomorfismo. Pelo Teorema da aplicação implícita, existe  $U_1 \subset U$ , com  $y_0 \in U_1$  e  $W \subset (U \times SO_3(\mathbb{R})) \cap \mathcal{A}$ , tais que para cada  $y \in U_1$ , existe único  $A(y) \in SO_3(\mathbb{R})$ , com  $(y, A(y)) \in W$  e  $\pi_1(y, A(y)) = \pi_1(y_0, A_0) := c$ , i.e.,  $\pi_1^{-1}(c) \cap W \subset \mathcal{A}$  é gráfico de uma aplicação  $A : U_1 \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$ . Como  $\Theta(y, A(y)) = 0$ , segue que

$$0 = A^{-1}dA - \Omega - L(A) \Rightarrow A^{-1}dA = \Omega + L(A).$$

Como  $(y, A(y)) \in W \subset \mathcal{A}$  segue que  $A(y) \in \mathcal{Z}(y)$ , em particular,  $(y_0, A_0) \in \mathcal{A}$ , logo  $(y_0, A_0) = (y_0, A(y_0))$ , ou seja  $A(y_0) = A_0$ . Com isso,  $A$  é solução da equação diferencial e pela unicidade da solução,  $A$  é única em  $U_1$ .  $\square$

De posse da aplicação  $A$  satisfazendo a Proposição 3.1, podemos construir uma nova distribuição integrável que nos garante uma imersão isométrica local de  $\mathcal{V}$  em  $\mathbb{E}$  e esse é o conteúdo da próxima proposição.

**Proposição 3.2.** *Seja  $x_0 \in \mathbb{E}$  (sem perda de generalidade podemos assumir que  $x_0 \in \mathbb{E}'$ ). Então existe uma vizinhança  $U_2$  de  $y_0$  contida em  $U_1$  e uma única aplicação  $f : U_2 \rightarrow \mathbb{E}'$  tal que*

$$df = (B \circ f)A\omega,$$

$$f(y_0) = x_0,$$

onde  $\omega$  é a coluna  $(\omega^1, \omega^2, 0)$  e, para  $x \in \mathbb{E}'$ ,  $B(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  é a matriz das coordenadas do referencial  $(E_1(x), E_2(x), E_3(x))$  no referencial  $(\partial x_1(x), \partial x_2(x), \partial x_3(x))$ .

*Demonstração.* Seja  $U_1 \times \mathbb{E}'$ . Como  $U_1$  e  $\mathbb{E}'$  são abertos de  $\mathcal{V}$  e  $\mathbb{E}$  respectivamente, então  $U_1 \times \mathbb{E}'$  é uma variedade produto de dimensão 5, já que  $\dim U_1 = 2$  e  $\dim \mathbb{E}' = 3$ . Considere as seguintes projeções naturais:  $\pi_1 : U_1 \times \mathbb{E}' \rightarrow U_1$ , e  $\pi_2 : U_1 \times \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}'$  e considere em  $U_1 \times \mathbb{E}'$  a seguinte matriz de 1-formas:

$$\Lambda = (B^{-1} \circ \pi_2)d\pi_2 - (A \circ \pi_1)\pi_1^*\omega$$

onde  $B^{-1}$  é a inversa da matriz  $B$ , ou seja a matriz das coordenadas do referencial  $\{\partial x_1(x), \partial x_2(x), \partial x_3(x)\}$  no referencial  $\{E_1(x), E_2(x), E_3(x)\}$ ,  $d(\pi_2)_{(q,x)} : T_q U_1 \times$

$T_x\mathbb{E}' \rightarrow T_x\mathbb{E}'$  é a aplicação de projeção no segundo fator,  $A$  é a aplicação obtida na Proposição 3.1 e  $\pi_1^*\omega$  é o *pullback* da coluna  $(\omega^1, \omega^2, 0)$  para  $U_1 \times \mathbb{E}'$ .

$\Lambda$  está bem definida, pois para cada  $(q, x) \in U_1 \times \mathbb{E}'$  e  $(u, v) \in T_q U_1 \times T_x \mathbb{E}'$ , temos

$$\begin{aligned}\Lambda_{(q,x)}(u, v) &= (B^{-1} \circ \pi_2)(q, x) d\pi_{2(q,x)}(u, v) - (A \circ \pi_1)(q, x) (\pi_1^*\omega)_{(q,x)}(u, v) \\ &= B^{-1}(x) d\pi_{2(q,x)}(u, v) - A(q) \omega(\pi_1(q, x)) (d\pi_{1(q,x)}(u, v)) \\ &= B^{-1}(x)v - A(q) \omega_q d\pi_{1(q,x)}(u).\end{aligned}$$

Sendo  $d\pi_{2(q,x)}$  a diferencial da aplicação de projeção  $\pi_2$ , então  $d\pi_{2(q,x)}(u, v)$  é uma matriz coluna 3x1, logo o produto  $B^{-1}(x) d(\pi_2)_{(q,x)}(u, v)$  é uma matriz coluna 3x1, o mesmo acontece com o produto  $A(q) \omega_q d\pi_{1(q,x)}(u)$ .

Observe que para cada  $(q, x) \in U_1 \times \mathbb{E}'$ ,  $\Lambda_{(q,x)}$  é sobrejetora. É claro que  $\text{Im}\Lambda_{(q,x)} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  e seja  $(0, B(x)v) \in (\{0\} \times T_x\mathbb{E}')$ , com  $v = (x, y, z)$  escrito na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Assim

$$\begin{aligned}\Lambda_{(q,x)}(0, B(x)v) &= B^{-1}(x) d(\pi_2)_{(q,x)}(0, B(x)v) - A(q) \omega_q(0) \\ &= B^{-1}(x)(B(x)v) = v = (x, y, z)\end{aligned}$$

e portanto,  $\Lambda_{(q,x)}$  é sobrejetora. Segue que o espaço

$$\mathcal{E}(q, x) = \text{Ker}\Lambda_{(q,x)}$$

tem dimensão 2. Provaremos agora que a distribuição  $\mathcal{E}$  é integrável. Como  $\pi_2(q, x) = x$ , e  $\pi_1(q, x) = q$ , para simplificar a notação denotaremos  $\pi_2 = x$  e  $\pi_1 = q$ . Logo  $d(\pi_2)_{(q,x)} = dx_{(q,x)}$ ,  $(B^{-1} \circ \pi_2)(q, x)$  por  $B^{-1}(x)$  e  $A \circ \pi_1(q, x) = A(q)$ . Lembrando que  $A$  e  $B^{-1}$  são matrizes de funções e que  $d(dx) = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}d\Lambda &= d(B^{-1}dx) - d(A\pi_1^*\omega) \\ &= -B^{-1}dB B^{-1} \wedge dx + B^{-1}d(dx) - dA \wedge \omega - Ad\pi_1^*\omega \\ &= -B^{-1}dB B^{-1} \wedge dx - dA \wedge \omega - A\pi_1^*(d\omega).\end{aligned}$$

Mas, pela equações (1.4) e (1.5) para  $n = 2$  temos

$$d\omega = \begin{pmatrix} d\omega^1 \\ d\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^1 \wedge \omega^1 - \omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ -\omega_1^2 \wedge \omega^1 - \omega_2^2 \wedge \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ -\omega_1^2 \wedge \omega^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e observe que

$$-\Omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 \\ \omega_2^1 & 0 & -\omega_3^2 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ -\omega_1^2 \wedge \omega^1 \\ \omega_3^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ -\omega_1^2 \wedge \omega^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo,  $-\Omega \wedge \omega = d\omega$ , o que implica que  $\pi_1^*(-\Omega \wedge \omega) = \pi_1^*(d\omega)$ , por simplicidade omitiremos o *pullback* a partir de agora. Além disso pela Proposição 3.1 temos que  $dA = A\Omega + AL(A)$ . E como  $B^{-1} \wedge dx = \Lambda + A\omega$ , temos

$$\begin{aligned} d\Lambda &= -B^{-1}dB B^{-1} \wedge dx - (A\Omega + AL(A)) \wedge \omega - Ad\omega \\ &= -B^{-1}dB \wedge (\Lambda + A\omega) - A\Omega \wedge \omega - AL(A) \wedge \omega + A\Omega \wedge \omega \\ &= -B^{-1}dB \wedge \Lambda - B^{-1}dB \wedge A\omega - A(LA) \wedge \omega \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.1, calculamos  $L(A) \wedge \omega$ , temos

$$\begin{aligned} L(A) \wedge \omega &= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & -T^3 & T^2 \\ T^3 & 0 & -T^1 \\ -T^2 & T^1 & 0 \end{pmatrix} \eta \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega^2 \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} -T^3\eta \wedge \omega^2 \\ T^3\eta \wedge \omega^1 \\ -T^2\eta \wedge \omega^1 + T^1\eta \wedge \omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau\omega^1 \wedge \omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau\omega^2 \wedge \omega^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como,

$$\begin{aligned} (T^1)^2 + (T^2)^2 + (T^3)^2 &= 1 \\ \eta \wedge \omega^1 &= -T^2\omega^1 \wedge \omega^2 \quad \text{e} \quad \eta \wedge \omega^2 = T^1\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} L(A) \wedge \omega &= (2\tau - \sigma) \begin{pmatrix} -T^3T^1 \\ -T^3T^2 \\ 1 - (T^3)^2 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\tau \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -(2\tau - \sigma)T^3 \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\tau - \sigma - 2\tau \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -(2\tau - \sigma)T^3 \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

usando o fato que  $A_\beta^3 = T^\beta$ , temos

$$AL(A) \wedge \omega = -(2\tau - \sigma)T^3 \begin{pmatrix} T^1A_1^1 + T^2A_2^1 + T^3A_3^1 \\ T^1A_1^2 + T^2A_2^2 + T^3A_3^2 \\ (T^1)^2 + (T^2)^2 + (T^3)^2 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 + \begin{pmatrix} -\sigma A_3^1 \\ -\sigma A_3^2 \\ -\sigma T^3 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Como  $A = \text{com}(A)$  lembre que os elementos da comatriz de  $A$  são dados por:  $A_j^i = (-1)^{i+j} \det M$ , onde  $M$  é a matriz obtida quando se omite a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ . Temos

$$\begin{aligned} A_1^1 &= T^3 A_2^2 - T^2 A_3^2, \\ A_2^1 &= T^1 A_3^2 - T^3 A_1^2, \\ A_3^1 &= T^2 A_1^2 - T^1 A_2^2, \\ A_1^2 &= T^2 A_3^1 - T^3 A_2^1, \\ A_2^2 &= T^3 A_1^1 - T^1 A_3^1, \\ A_3^2 &= T^1 A_2^1 - T^2 A_1^1. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} T^1 A_1^1 + T^2 A_2^1 + T^3 A_3^1 &= 0, \\ T^1 A_1^2 + T^2 A_2^2 + T^3 A_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Então

$$AL(A) \wedge \omega = \begin{pmatrix} -\sigma A_3^1 \\ -\sigma A_3^2 \\ -(2\tau - \sigma)T^3 - \sigma T^3 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2 = \begin{pmatrix} -\sigma A_3^1 \\ -\sigma A_3^2 \\ -2\tau T^3 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Denotando por  $(x, y, z)$  as coordenadas em  $\mathbb{E}$  e usando os modelos locais descritos no capítulo 2 temos que a matriz  $B$  é dada por

$$B = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} \cos(\sigma z) & -\lambda^{-1} \sin(\sigma z) & 0 \\ \lambda^{-1} \sin(\sigma z) & \lambda^{-1} \cos(\sigma z) & 0 \\ \tau(x \sin(\sigma z) - y \cos(\sigma z)) & \tau(x \cos(\sigma z) + y \sin(\sigma z)) & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

com

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)}.$$

Logo

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda \cos(\sigma z) & \lambda \sin(\sigma z) & 0 \\ -\lambda \sin(\sigma z) & \lambda \cos(\sigma z) & 0 \\ \tau \lambda y & -\tau \lambda x & 1 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo

$$A\omega = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \eta \end{pmatrix},$$

com

$$\alpha^j = A_1^j \omega^1 + A_2^j \omega^2, \text{ com } j = 1, 2, 3.$$

Seja  $dX$  a coluna  $(dx, dy, dz)$  temos

$$\Lambda = B^{-1}dX - A\omega = \begin{pmatrix} \lambda(\cos(\sigma z)dx + \text{sen}(\sigma z)dy) - \alpha^1 \\ \lambda(\cos(\sigma z)dy - \text{sen}(\sigma z)dx) - \alpha^2 \\ \tau\lambda(ydx - xdy) + dz - \eta \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Além disso, calculamos  $dB$ , determinando a diferencial de cada entrada da matriz  $B$  e usando o fato que  $d\lambda^{-1} = \frac{\kappa}{2}x dx + \frac{\kappa}{2}y dy$ , teremos  $dB$ , assim  $B^{-1}dB$  é dado por:

$$B^{-1}dB = \begin{pmatrix} \lambda \frac{\kappa}{2}(x dx + y dy) & -\sigma dz & 0 \\ \sigma dz & \lambda \frac{\kappa}{2}(x dx + y dy) & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$a = \frac{\tau\kappa}{2}\lambda(y\cos(\sigma z) - x\text{sen}(\sigma z))(x dx + y dy) + \tau(\text{sen}(\sigma z)dx - \cos(\sigma z)dy),$$

$$b = -\frac{\tau\kappa}{2}\lambda(y\text{sen}(\sigma z) + x\cos(\sigma z))(x dx + y dy) + \tau(\cos(\sigma z)dx + \text{sen}(\sigma z)dy).$$

Com isso

$$B^{-1}dB \wedge A\omega + AL(A)\omega = \begin{pmatrix} \lambda \frac{\kappa}{2}(x dx + y dy) \wedge \alpha^1 - \sigma dz \wedge \alpha^2 \\ \sigma dz \wedge \alpha^1 + \lambda \frac{\kappa}{2}(x dx + y dy) \wedge \alpha^2 \\ a \wedge \alpha^1 + b \wedge \alpha^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma A_3^1 \\ -\sigma A_3^2 \\ -2\tau T^3 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Mas,  $\Lambda_{(q,x)}(u, v) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , então existem  $\Lambda^1, \Lambda^2$  e  $\Lambda^3$  funções reais definidas em  $T_{(q,x)}(U_1 \times \mathbb{E}')$  tais que  $\Lambda_{(q,x)}(u, v) = (\Lambda^1(u, v), \Lambda^2(u, v), \Lambda^3(u, v))$  e pela expressão de  $\Lambda_{(q,x)}$  na equação (3.9), temos

$$\begin{cases} \lambda \cos(\sigma z)dx + \lambda \text{sen}(\sigma z)dy - \alpha^1 & = \Lambda^1 \\ -\lambda \text{sen}(\sigma z)dx + \lambda \cos(\sigma z)dy - \alpha^2 & = \Lambda^2 \\ -\lambda\tau(ydx - xdy) + \eta + \Lambda^3 & = dz \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por  $\text{sen}(\sigma z)$  e a segunda por  $\cos(\sigma z)$  e somando os resultados

$$\lambda dy = \text{sen}(\sigma z)\Lambda^1 + \cos(\sigma z)\Lambda^2 + \alpha^1 \text{sen}(\sigma z) + \alpha^2 \cos(\sigma z).$$

Multiplicando agora a primeira equação do sistema por  $\cos(\sigma z)$  e a segunda por  $-\text{sen}(\sigma z)$  e somando os resultados

$$\lambda dx = \cos(\sigma z)\Lambda^1 - \text{sen}(\sigma z)\Lambda^2 + \alpha^1 \cos(\sigma z) - \alpha^2 \text{sen}(\sigma z).$$

Assim, a expressão de  $dz$  é

$$dz = (-\tau y \cos(\sigma z) + \tau x \operatorname{sen}(\sigma z))\Lambda^1 + (\tau y \operatorname{sen}(\sigma z) + \tau x \cos(\sigma z))\Lambda^2 \\ + (-\tau y \cos(\sigma z) + \tau x \operatorname{sen}(\sigma z))\alpha^1 + (\tau y \operatorname{sen}(\sigma z) + \tau x \cos(\sigma z))\alpha^2 + \Lambda^3 + \eta.$$

Note que  $\alpha^j \wedge \alpha^j = 0$ , logo o primeiro termo de  $B^{-1}dB \wedge A\omega + AL(A) \wedge \omega$  é

$$\frac{\kappa}{2}(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))\alpha^2 \wedge \alpha^1 + \frac{\kappa}{2}(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))\alpha^1 \wedge \alpha^2 - \sigma A_3^1 \omega^1 \wedge \omega^2 \\ - \sigma \eta \wedge \alpha^2 + \chi^1, \quad (3.10)$$

onde

$$\chi^1 = \frac{\kappa}{2}(x \cos(\sigma z) + y \operatorname{sen}(\sigma z))\Lambda^1 \alpha^1 + \frac{\kappa}{2}(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))\Lambda^2 \alpha^1 \\ - \sigma \Lambda^3 \alpha^2 - \sigma \tau (y \operatorname{sen}(\sigma z) + x \cos(\sigma z))\Lambda^2 \alpha^2.$$

Como  $\alpha^1 \wedge \alpha^2 = -\alpha^2 \wedge \alpha^1$ , as duas primeiras parcelas da expressão na equação (3.10) se anulam. Além disso, temos

$$-\sigma \eta \wedge \alpha^2 = -\sigma(A_1^3 \omega^1 + A_2^3 \omega^2) \wedge (A_1^2 \omega^1 + A_2^2 \omega^2) \\ = -\sigma(A_1^3 A_2^2 - A_2^3 A_1^2) \omega^1 \wedge \omega^2 \\ = -\sigma(-A_3^1) \omega^1 \wedge \omega^2,$$

onde usamos o fato de  $A \in \mathcal{Z}(y)$ , logo  $A_\beta^3 = T^\beta$  e  $A = \operatorname{Com}A$ , restando apenas  $\chi^1$ . Analogamente, o segundo termo é  $\chi^2$ , com

$$\chi^2 = -\frac{\kappa}{2}(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))\Lambda^1 \alpha^1 + \frac{\kappa}{2}(\operatorname{sen}(\sigma z)(y - x) + x \cos(\sigma z))\Lambda^2 \alpha^1 \\ + \frac{\kappa}{2}(x \cos(\sigma z) + y \operatorname{sen}(\sigma z))\Lambda^1 \alpha^2 + \frac{\kappa}{2}(y \cos(\sigma z)\Lambda^2 \alpha^2 + \sigma \Lambda^3 \alpha^1).$$

Por fim, para calcular o terceiro termo, substituímos as expressões de  $\lambda dx$  e  $\lambda dy$  nas expressões de  $a$  e  $b$  então

$$a \wedge \alpha^1 = \frac{k\tau}{2}(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))(x \cos(\sigma z) + y \operatorname{sen}(\sigma z))\Lambda^1 \alpha^1 \\ + \frac{k\tau}{2}(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))\Lambda^2 \alpha^1 \\ + \frac{k\tau}{2}(y \cos(\sigma z) - x \operatorname{sen}(\sigma z))^2 \alpha^2 \wedge \alpha^1 \\ - \lambda^{-1} \tau \Lambda^2 \alpha^1 - \lambda^{-1} \tau \alpha^2 \wedge \alpha^1.$$

$$\begin{aligned}
b \wedge \alpha^2 &= -\frac{k\tau}{2}(xcos(\sigma z) + ysen(\sigma z))(xcos(\sigma z) + ysen(\sigma z))\Lambda^1\alpha^2 \\
&\quad - \frac{k\tau}{2}(xcos(\sigma z) + ysen(\sigma z))(ycos(\sigma z) - xsen(\sigma z))\Lambda^2\alpha^2 \\
&\quad - \frac{k\tau}{2}(xcos(\sigma z) + ysen(\sigma z))^2\alpha^1 \wedge \alpha^2 \\
&\quad + \lambda^{-1}\tau\Lambda^1\alpha^2 + \lambda^{-1}\tau\alpha^1 \wedge \alpha^2.
\end{aligned}$$

Como  $\lambda^{-1} = 1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2)$  e que  $\alpha^1 \wedge \alpha^2 = T^3\omega^1 \wedge \omega^2$ , ao considerar  $a \wedge \alpha^1 + b \wedge \alpha^2$  o coeficiente de  $\alpha^1 \wedge \alpha^2$  se cancela com  $-2\tau T^3\omega^1 \wedge \omega^2$ , restando uma combinação linear de  $\Lambda^\alpha$ , que denotaremos por  $\chi^3$ . Concluimos que

$$B^{-1}dB \wedge A\omega + AL(A) = (\chi^1, \chi^2, \chi^3) = \chi.$$

Assim,  $d\Lambda = -B^{-1}dB \wedge \Lambda - \chi$ . Por essa expressão deduzimos que se  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{E}(q, x) = \text{Ker}\Lambda_{(q,x)}$ , então  $d\Lambda(\xi_1, \xi_2) = 0$ , como para cada  $\beta = 1, 2, 3$  vale a fórmula da Proposição 1.9 para a 2-forma  $(d\Lambda)^\beta$

$$0 = (d\Lambda)^\beta(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\Lambda^\beta(\xi_2) - \xi_2\Lambda^\beta(\xi_1) - \Lambda^\beta([\xi_1, \xi_2]).$$

o que implica que  $\Lambda^\beta([\xi_1, \xi_2]) = 0$ , logo  $[\xi_1, \xi_2] \in \mathcal{E}(q, x)$ . Portanto a distribuição  $\mathcal{E}(q, x)$  é involutiva, então pelo Teorema de Frobenius, é integrável.

Seja  $\mathcal{A}$  uma variedade integral passando por  $(y_0, x_0) \in (U_1 \times \mathbb{E}')$ , então  $T_{(y_0, x_0)}\mathcal{A} = \mathcal{E}(y_0, x_0)$ . Note que

$$T_{(y_0, x_0)}\mathcal{A} \cap (\{0\} \times T_{x_0}\mathbb{E}') = \{0\}.$$

De fato, se  $(u, v)$  pertence a essa interseção, então  $u = 0$  e  $(0, v) \in \text{Ker}\Lambda_{(y_0, x_0)}$ . Logo

$$0 = \Lambda_{(y_0, x_0)}(0, v) = B^{-1}(x_0)(dx_0)_{(y_0, x_0)}(0, v) - A_{y_0}\omega_{y_0}(0) = B^{-1}(x_0)v.$$

o que implica,  $v = 0$  e assim  $(u, v) = 0$ . Tome  $\pi_1$  restrita a  $\mathcal{A}$ . Observe que  $\text{Ker}(d\pi_1|_{\mathcal{A}}) = 0$ . De fato, se  $(u, v) \in \text{Ker}(d\pi_1|_{\mathcal{A}})$ , então  $0 = d\pi_1|_{\mathcal{A}}(u, v) = u$ , implica que  $u = 0$ , como  $(0, v) \in T_{(y_0, x_0)}\mathcal{A}$ , pela observação anterior  $(u, v) = 0$ . Assim,  $d\pi_1|_{\mathcal{A}}$  é injetora e como está definida entre espaços de mesma dimensão, é um isomorfismo.

Pelo teorema da aplicação implícita, existem abertos  $U_2 \subset U_1$ , com  $y_0 \in U_2$  e  $W \subset (U_1 \times \mathbb{E}') \cap \mathcal{A}$ , tais que para cada  $y \in U_2$  existe um único  $f(y) \in \mathbb{E}'$  com

$$\pi_1(y, f(y)) = c := \pi_1(y_0, x_0) \quad \text{e} \quad (y, f(y)) \in W,$$

ou seja,  $(y, f(y)) \in \pi_1^{-1}(c) \cap W$  e  $\pi_1^{-1}(c) \cap W \subset \mathcal{A}$  é gráfico da aplicação  $f : U_2 \rightarrow \mathbb{E}'$ , ou seja  $\mathcal{A}$  é localmente gráfico de  $f$ . Como  $T_{(y, f(y))}(\pi_1^{-1}(c) \cap W) \subseteq T_{(y_0, x_0)}\mathcal{A}$  tem-se

$$0 = \Lambda_{(y, f(y))}(u, v) = B^{-1}(\pi_2(y, f(y)))d(\pi_2)_{(y, f(y))}(u, v) - A(\pi_1(y, f(y)))(\pi_1)^*\omega_{(y, f(y))}(u, v). \quad (3.11)$$

mas,  $d(\pi_2)_{(y,f(y))}(u, v) = df_y(u)$ , pois se  $\alpha : I \rightarrow \pi_1^{-1}(c) \cap W$  é uma curva diferenciável, tal que  $\alpha(0) = (y, f(y))$  e  $\alpha'(0) = (u, v)$ . Então

$$d(\pi_2)_{(y,f(y))}(u, v) = \left. \frac{d}{dt}(\pi_2 \circ \alpha(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f(y(t))) \right|_{t=0} = df_y(u).$$

Logo a equação (3.11) se torna

$$\begin{aligned} B^{-1}(f(y))df_y(u) - A_y\omega_y(u) &= 0, \quad \text{ou seja,} \\ B^{-1}(f(y))df_y(u) &= A_y\omega_y(u). \quad \text{Segue que} \\ df_y(u) &= (B \circ f)_y A(y)\omega_y(u). \end{aligned}$$

Portanto,  $df = (B \circ f)A\omega$ . Como  $y_0 \in U_2$ , então existe único  $f(y_0) \in \mathbb{E}'$  tal que  $(y_0, f(y_0)) \in W$  e  $\pi_1(y_0, f(y_0)) = c$ . Mas  $(y_0, x_0) \in \pi_1^{-1}(c) \cap W$  logo,

$$(y_0, x_0) = (y_0, f(y_0)), \quad \text{ou seja } x_0 = f(y_0).$$

Pela construção da demonstração,  $f$  é solução da equação diferencial  $dF = (B \circ F)A\omega$ , com a condição inicial  $F(y_0) = x_0$ , pela unicidade da solução  $f$  é única em  $U_2$ .  $\square$

Com base nas proposições anteriores, provaremos o resultado principal.

*Demonstração.* Sejam  $y_0 \in \mathcal{V}$ ,  $A_0 \in \mathcal{Z}(y_0)$  e  $x_0 \in \mathbb{E}'$ . Vamos considerar em  $\mathcal{V}$  um referencial ortonormal local  $(e_1, e_2)$  na vizinhança de  $y_0$ . Usando as Proposições 3.1 e 3.2 existe uma única aplicação  $A : U_1 \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  tal que

$$A^{-1}dA = \Omega + L(A),$$

$$A(y) \in \mathcal{Z}(y) \text{ para todo } y \in U_1,$$

$$A(y_0) = A_0,$$

e uma única aplicação  $f : U_2 \rightarrow \mathbb{E}'$  tal que

$$df = (B \circ f)A\omega, \quad f(y_0) = x_0,$$

onde  $U_2$  é uma vizinhança de  $y_0$ , que podemos assumir simplesmente conexa ( já que  $\mathcal{V}$  é simplesmente conexa). Vejamos a seguir que  $f$  satisfaz as propriedades mencionadas no teorema em  $U_2$ . Como  $df = (B \circ f)A\omega$ , com  $B$  da forma dada pela equação (2.3),

$A\omega = (\alpha^1, \alpha^2, \eta)$ , onde  $\alpha^j = A_1^j\omega^1 + A_2^j\omega^2$ . Podemos observar, por exemplo, que

$$\begin{aligned} df(e_1) &= (B \circ f)A\omega(e_1) = (B \circ f) \begin{pmatrix} \alpha^1(e_1) \\ \alpha^2(e_1) \\ \eta(e_1) \end{pmatrix} = (B \circ f) \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ T^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_1^1 A_1^1 + B_2^1 A_1^2 + B_3^1 T^1 \\ B_1^2 A_1^1 + B_2^2 A_1^2 + B_3^2 T^1 \\ B_1^3 A_1^1 + B_2^3 A_1^2 + B_3^3 T^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^1 A_1^1 + B_2^1 A_1^2 \\ B_1^2 A_1^1 + B_2^2 A_1^2 \\ B_1^3 A_1^1 + B_2^3 A_1^2 + T^1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pois,  $B_3^1 = B_3^2 = 0$  e  $B_3^3 = 1$ . De forma geral, temos

$$df_y(e_k) = \begin{pmatrix} B_1^1 A_k^1 + B_2^1 A_k^2 \\ B_1^2 A_k^1 + B_2^2 A_k^2 \\ B_1^3 A_k^1 + B_2^3 A_k^2 + T^k \end{pmatrix}.$$

Escrevendo o vetor  $df_y(e_k)$  na base  $\{\partial x, \partial y, \partial z\}$ , temos que o mesmo é dado pela  $k$ -ésima coluna da matriz  $BA$ , que é invertível. Como os vetores  $df_y(e_1)$ ,  $df_y(e_2)$  são linearmente independentes, eles formam uma base da  $Imdf$ . Assim  $df$  tem posto 2 e conseqüentemente  $df_y$  é injetiva, o que significa que  $f$  é uma imersão. No referencial  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , o vetor  $df_y(e_k)$  é dado pela  $k$ -ésima coluna da matriz  $A$ .

De fato, como  $B$  é a matriz mudança de base da base  $\{\partial x, \partial y, \partial z\}$  para a base  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , para escrever  $df_y(e_k)$  na base  $\{E_1, E_2, E_3\}$  multiplicamos o vetor  $df_y(e_k) = (BA)_k$  que inicialmente está escrito na base  $\{\partial x, \partial y, \partial z\}$  por  $B^{-1}$ , ou seja  $[df(e_k)]_{\{E_\alpha\}} = [B^{-1}][df(e_k)]_{\{\partial x_\alpha\}}$ . Temos

$$B^{-1}(BA)_k = \left( \sum_{i=1}^3 (B_i^1)^{-1} (BA)_k^i, \sum_{i=1}^3 (B_i^2)^{-1} (BA)_k^i, \sum_{i=1}^3 (B_i^3)^{-1} (BA)_k^i \right)$$

mas,  $(BA)_k^i = \sum_{j=1}^3 B_j^i A_k^j$ . Segue que

$$\sum_{i=1}^3 (B_i^1)^{-1} (BA)_k^j = \sum_{i=1}^3 ((B_i^1)^{-1} B_j^i) \sum_{j=1}^3 A_k^j = A_k^1.$$

Portanto,  $B^{-1}(BA)_k = (A_k^1, A_k^2, A_k^3)$ . E assim  $df_y(e_k) = \sum_{j=1}^3 A_k^j E_j$ . Como  $A$  é ortogonal, suas colunas são ortonormais, então

$$\begin{aligned} \langle df(e_k), df(e_l) \rangle &= \langle (A_k^1, A_k^2, A_k^3), (A_l^1, A_l^2, A_l^3) \rangle \\ &= \delta_l^k = \langle e_k, e_l \rangle. \end{aligned}$$

Sendo  $f$  uma imersão, localmente  $f$  é um difeomorfismo, e como satisfaz a igualdade acima,  $f$  é portanto uma isometria local. Como  $A(y)$  é ortogonal suas colunas formam um referencial ortonormal direto de  $\mathbb{E}$ . A primeira e a segunda coluna formam uma base ortonormal de  $T_{f(y)}f(\mathcal{V})$ . Assim a terceira coluna nos dá, no referencial  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , o normal unitário  $N(f(y))$  a  $f(\mathcal{V})$  em  $\mathbb{E}$  no ponto  $f(y)$ . Considere  $X_j = df(e_j)$ . Observe que para cada  $y \in U_2$ , tem-se  $df_y(e_j) = X_j(f(y))$ . Como  $df(e_j) = \sum_{k=1}^3 A_j^k E_k$ , então  $\langle X_j, E_\alpha \rangle = A_j^\alpha$ . Usando o fato de  $f$  ser uma isometria, temos

$$\begin{aligned} dA_j^\alpha(e_k) &= d\langle X_j, E_\alpha \rangle(e_k) = d\langle df(e_j), E_\alpha \rangle(e_k) \\ &= d\langle e_j, df^{-1}(E_\alpha) \rangle(e_k) = e_k \langle e_j, df^{-1}(E_\alpha) \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela compatibilidade da conexão com a métrica e sendo  $f$  uma isometria, temos

$$\begin{aligned} e_k \langle e_j, df^{-1}(E_\alpha) \rangle &= \langle \nabla_{e_k} e_j, df^{-1}(E_\alpha) \rangle + \langle e_j, \nabla_{e_k} df^{-1}(E_\alpha) \rangle \\ &= \langle df(\nabla_{e_k} e_j), df(df^{-1}(E_\alpha)) \rangle + \langle df(e_j), df(\nabla_{e_k} df^{-1}(E_\alpha)) \rangle. \end{aligned}$$

Temos ainda, que se  $f : M \rightarrow \bar{M}$  é uma isometria, vale a relação  $df(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{df(X)} df(Y)$  para todo  $X, Y \in TM$ . Assim

$$\begin{aligned} e_k \langle e_j, df^{-1}(E_\alpha) \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{df(e_k)} df(e_j), E_\alpha \rangle + \langle df(e_j), \bar{\nabla}_{df(e_k)} E_\alpha \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j \rangle + \langle X_j, \bar{\nabla}_{X_k} E_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} dA_j^\alpha(e_k) &= \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, E_\alpha \rangle + \langle X_j, \bar{\nabla}_{X_k} E_\alpha \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, E_\alpha \rangle + \left\langle \sum_{\delta=1}^3 A_j^\delta E_\delta, \sum_{\gamma=1}^3 A_k^\gamma \bar{\nabla}_{E_\gamma} E_\alpha \right\rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, E_\alpha \rangle + \sum_{\gamma, \delta=1}^3 A_k^\gamma A_j^\delta \langle E_\delta, \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^l E_\alpha \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, E_\alpha \rangle + \sum_{\gamma, \delta=1}^3 A_j^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\delta \quad \text{e como} \end{aligned}$$

$$L(A)_\beta^\alpha = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta, \varepsilon=1}^3 A_\alpha^\varepsilon A_\beta^\delta A_k^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta \right) \omega^k,$$

temos

$$\begin{aligned}
(AL(A))_j^\alpha &= \sum_{l=1}^3 A_l^\alpha L(A)_j^l = \sum_{l=1}^3 A_l^\alpha \left( \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta, \varepsilon=1}^3 A_l^\alpha A_l^\varepsilon A_k^\gamma A_j^\delta \bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta \right) \omega^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta, \varepsilon=1}^3 A_l^\alpha A_l^\varepsilon A_k^\gamma A_j^\delta \bar{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^\delta \right) \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta=1}^3 A_k^\gamma A_j^\delta \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\delta \right) \omega^k
\end{aligned}$$

a última igualdade decorre do fato  $\sum_{l=1}^3 A_l^\alpha A_l^\varepsilon = 1$  quando  $\varepsilon = \alpha$ , já que  $A$  é ortogonal.

Com isso

$$(AL(A))_j^\alpha(e_k) = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{\gamma, \delta=1}^3 A_k^\gamma A_j^\delta \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\delta \right) \omega^k(e_k) = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 A_k^\gamma A_j^\delta \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\delta.$$

Assim,

$$\langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, E_\alpha \rangle = dA_j^\alpha(e_k) - (AL(A))_j^\alpha(e_k)$$

e como  $N(f(y)) = \sum_{\alpha=1}^3 A_3^\alpha E_\alpha$ , temos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, N \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, \sum_{\alpha=1}^3 A_3^\alpha E_\alpha \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 A_3^\alpha \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, E_\alpha \rangle \\
&= \sum_{\alpha=1}^3 A_3^\alpha (dA_j^\alpha(e_k) - (AL(A))_j^\alpha(e_k)) = \sum_{\alpha=1}^3 A_3^\alpha (A\Omega)_j^\alpha(e_k) = \sum_{\alpha=1}^3 A_3^\alpha \sum_{\gamma=1}^3 A_\gamma^\alpha \Omega_j^\gamma(e_k) \\
&= \sum_{\alpha, \gamma=1}^3 A_3^\alpha A_\gamma^\alpha \Omega_j^\gamma(e_k) = \omega_j^3(e_k) \\
&= \langle Se_k, e_j \rangle,
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\langle \bar{\nabla}_{X_k} X_j, N \rangle = X_k \langle X_j, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{X_k} N, X_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{X_k} N, X_j \rangle. \quad (3.12)$$

Sendo  $\{e_1, e_2\}$  definido em uma vizinhança de  $y_0 \in U_2$ , segue que  $Se_k \in T_{y_0} U_2$  e sendo  $f$  uma isometria, temos

$$\begin{aligned}
\langle Se_k, e_j \rangle &= \langle S(df^{-1}(X_k)), df^{-1}(X_j) \rangle = \langle df(S(df^{-1}(X_k))), df(df^{-1}(X_j)) \rangle \\
&= \langle (df \circ S \circ df^{-1})(X_k), X_j \rangle.
\end{aligned} \quad (3.13)$$

Igualando as equações (3.12) e (3.13), e denotando  $\tilde{S} : T_{f(y)} f(\mathcal{V}) \rightarrow T_{f(y)} f(\mathcal{V})$  o operador forma em  $f(\mathcal{V}) \subset \mathbb{E}$  tem-se

$$-\langle \bar{\nabla}_{X_k} N, X_j \rangle = \langle \tilde{S}(X_k), X_j \rangle = \langle (df \circ S \circ df^{-1})(X_k), X_j \rangle.$$

para todo  $X_j \in T_{f(y)}f(\mathcal{V})$ , assim

$$\tilde{S} = df \circ S \circ df^{-1}.$$

Finalmente, os coeficientes do vetor vertical  $\xi = E_3$  no referencial  $\{X_1, X_2, N\}$  é dado pela última linha de  $A$ . Como  $A(y) \in \mathcal{Z}(y)$  para todo  $y \in U_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{j=1}^2 T^j X_j + T^3 N = df(T) + \nu N \quad \text{pois,} \\ \sum_{j=1}^2 T^j X_j &= \sum_{j=1}^2 T^j df(e_j) = \sum_{j=1}^2 T^j e_j(f) = T(f) = df(T). \end{aligned}$$

Agora provaremos que a imersão local  $f$  é única a menos de uma isometria global de  $\mathbb{E}$  preservando  $\xi$  ( e conseqüentemente a orientação da base de fibração). Seja  $\tilde{f} : U_3 \rightarrow \mathbb{E}$  uma outra imersão satisfazendo a conclusão do teorema, onde  $U_3$  é uma vizinhança de  $y_0$ , simplesmente conexa contida em  $U_2$ . Seja  $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3\}$  o referencial associado (*i.e.*,  $\tilde{X}_j = d\tilde{f}(e_j)$  e  $\tilde{X}_3$  é o normal a  $\tilde{f}(\mathcal{V})$ ) e seja  $\tilde{A}$  a matriz das coordenadas do referencial  $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3\}$  no referencial  $\{E_1, E_2, E_3\}$ . Como  $\mathbb{E}$  é uma variedade homogênea, existe uma isometria  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  tal que  $\varphi(f(y_0)) = \tilde{f}(y_0)$ . Assim podemos assumir que  $f(y_0) = \tilde{f}(y_0)$  e que os referenciais  $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3\}$  e  $\{X_1, X_2, X_3\}$  coincidem em  $y_0$ , e portanto  $A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$ , pois

$$\begin{aligned} X_\beta(y_0) = \tilde{X}_\beta(y_0) &\Leftrightarrow df_{y_0}(e_\beta) = d\tilde{f}_{y_0}(e_\beta) \Leftrightarrow (B \circ f(y_0))A\omega(e_\beta) = (B \circ \tilde{f}(y_0))\tilde{A}\omega(e_\beta) \\ &\Leftrightarrow BA\omega(e_\beta) = B\tilde{A}\omega(e_\beta) \Leftrightarrow A\omega(e_\beta) = \tilde{A}\omega(e_\beta) \\ &\Leftrightarrow (A_\beta^1, A_\beta^2, A_\beta^3) = (\tilde{A}_\beta^1, \tilde{A}_\beta^2, \tilde{A}_\beta^3) \Leftrightarrow A(y_0) = \tilde{A}(y_0) \end{aligned}$$

onde nas igualdades acima, as matrizes  $A, \tilde{A}$  estão calculadas no ponto  $y_0$  e  $B$  em  $f(y_0)$ .

Observe que esta isometria fixa  $\xi$ , pois tomando  $x = f(y_0)$  e  $\tilde{x} = \tilde{f}(y_0)$ , como  $f(y_0) = \tilde{f}(y_0)$  e  $X_\beta(y_0) = \tilde{X}_\beta(y_0)$ , temos

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{x}) &= \sum_{j=1}^2 T^j(\tilde{x})\tilde{X}_j + T^3(\tilde{x})\tilde{X}_3 \\ &= \sum_{j=1}^2 T^j(x)X_j + T^3(x)N = \xi(x). \end{aligned}$$

Além disso, como as matrizes  $A$  e  $\tilde{A}$  satisfazem

$$A^{-1}dA = \Omega + L(A) \text{ e } \tilde{A}^{-1}d\tilde{A} = \Omega + L(\tilde{A}), \text{ com}$$

$A(y), \tilde{A}(y) \in \mathcal{Z}(y)$  para todo  $y \in U_3$  e  $A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$ , então

pela unicidade da solução da equação diferencial com condição inicial vista na Proposição 3.1, obtemos que  $A(y) = \tilde{A}(y)$  para todo  $y \in U_3$ . Similarmente,  $f$  e  $\tilde{f}$  satisfazem

$$\begin{aligned}df &= (B \circ f)A\omega, & f(y_0) &= x_0 \\d\tilde{f} &= (B \circ \tilde{f})\tilde{A}\omega, & \tilde{f}(y_0) &= x_0.\end{aligned}$$

Como em  $y \in U_3$   $A = \tilde{A}$ , pela unicidade da solução na Proposição 3.2 tem-se  $f = \tilde{f}$  em  $U_3$ .

Resta provar que  $f$  pode ser estendida a  $\mathcal{V}$ . Para isso considere  $y_0, y_1 \in \mathcal{V}$ . Como a superfície  $\mathcal{V}$  é simplesmente conexa existe uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$ , em  $\mathcal{V}$  tal que  $\gamma(0) = y_0$  e  $\gamma(1) = y_1$ . Pela construção feita acima, para cada  $p \in \gamma([0, 1])$  existe  $W_p \subset \mathcal{V}$  aberto, com  $p \in W_p$  e uma única imersão isométrica  $f_p : W_p \rightarrow \mathbb{E}'$  que satisfaz as propriedades do teorema. Observe que  $\gamma([0, 1]) \subset \cup_{p \in \gamma} W_p$ , e como  $\gamma([0, 1])$  é compacta podemos extrair uma família finita  $W_1, W_2, \dots, W_n$  cobrindo  $\gamma$ . Vamos supor que  $W_1 = U_1$  e seja  $f_k$  a imersão isométrica de  $W_k$  em  $\mathbb{E}'$ , com as propriedades do teorema. Tomaremos  $f_1 = f$ . Se  $W_k \cap U_1 \neq \emptyset$ , então a menos de uma isometria do ambiente  $f = f_k$  em  $W_k \cap U_1$ . Logo podemos estender  $f$  a  $W_k \cup U_1$ . Realizando esse processo sucessivamente, conseguiremos estender  $f$  para cada  $W_k$  de modo único e como  $\mathcal{V}$  é simplesmente conexa essa extensão não depende de  $\gamma$ , assim  $f(y_1)$  está bem definida e  $f$  é uma imersão de  $\mathcal{V}$  em  $\mathbb{E}$ .

□

# Referências

- [1] Bonnet, O., Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Deuxième partie. Gauthier-Villars, 1867.
- [2] Capistrano, A. J. S e Odon P.I., Introdução ao Teorema do Nash e às Brabas Mundo, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 32, n. 1, 1305, 2010.
- [3] Daniel, B., Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 82(1):87–131, 2007.
- [4] Daniel, B., Isometric immersions into  $S^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  e aplicações to minimal surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(12):6255–6282, 2009.
- [5] Do Carmo, Manfredo P., Geometria riemanniana. IMPA, 5. ed. 2011.
- [6] Do Carmo, Manfredo P., O Método do Referencial Móvel. IMPA, 1976.
- [7] Do Carmo, Manfredo P., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, 6. ed, Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- [8] Do Carmo, Manfredo P., Formas diferenciais e aplicações. SBM, Rio de Janeiro 2015.
- [9] Escobosa, F. M. N, Teorema Fundamental das Imersões e Superfícies Mínimas em Espaços Produto, 2017, 86 f. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.
- [10] Espinar, José M and de Oliveira, Inês S., Locally convex surfaces immersed in a Killing submersion. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 44(1):155–171, 2013.
- [11] Figueroa, C. B. Mercuri, F. and Pedrosa R. H., Invariant surfaces of the heisenberg groups. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 177(1):173–194, 1999.
- [12] Kobayashi, S., Transformation Groups in Differential Geometry. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972.
- [13] Lee, M. J., Smooth Manifolds. Springer New York, New York, NY, 2003.

- [14] Nash, Forbes J., The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, pages 20–63, 1956.
- [15] Pereira, Dannilo José, *Teoria Gravitacional da Matéria Induzida*, Dissertação de Mestrado - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.
- [16] Petersen, P., *Riemannian geometry*, graduate texts in mathematics, vol. 171. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [17] Scott, P., The geometries of 3-manifolds. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 15(5):401–487, 1983.
- [18] Spivak, M., *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, Publish or Perish, Houston, 1999.
- [19] Tenenblat, K., On isometric immersions of riemannian manifolds. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 2(2); 23-36, 1971
- [20] Torralbo, T. F., *Superfícies de curvatura media paralela en  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos*. PhD thesis, Universidade de Granada, 2010.
- [21] Toubiana, E. Note sur les variétés homonènes de dimension 3, preprint, 2008.
- [22] Vaisman, I. Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous riemannian manifolds by cartan triples. *A mean value Inequality With Applications to Bergman Space Operators*, 173(2): 511, 1996.