UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SUPERFÍCIES DE TRANSLAÇÃO WEINGARTEN LINEARES NOS ESPAÇOS EUCLIDIANO E LORENTZ-MINKOWSKI

Thiago Lucas da Silva Ferreira

Manaus

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

THIAGO LUCAS DA SILVA FERREIRA

SUPERFÍCIES DE TRANSLAÇÃO WEINGARTEN LINEARES NOS ESPAÇOS EUCLIDIANO E LORENTZ-MINKOWSKI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas - área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dra. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

Manaus
2016

Thiago Lucas da Silva Ferreira

SUPERFÍCIES DE TRANSLAÇÃO WEINGARTEN LINEARES NOS ESPAÇOS EUCLIDIANO E LORENTZ-MINKOWSKI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas - área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 14 de dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof. Dra. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof. Dr.Ernani de Souza Ribeiro Junior, Membro
Universidade Federal do Ceará

....
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros, Membro
Universidade Federal do Ceará.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por esta conquista, sem ele não teria conseguido chegar até aqui. Em segundo, à minha família que sempre me apoiou e me incentivou, em especial a minha mãe Maria José da Silva Ferreira, e meu pai Artemis Balbino Ferreira, que infelizmente não pode ver a conclusão dessa conquista mas nunca deixou de acreditar em mim, com muitas dificuldades me apoiou quando eu decidi fazer uma graduação em matemática. Agradeço à minha irmã Thayná Silva Ferreira, aos meus irmãos Francinei Lafite de Paiva e Fernando Lafite de Paiva, que também são meus amigos e sempre acreditaram que conseguiria concluir essa etapa da minha vida. Aos professores da Universidade Federal do Amazonas - UFAM, por terem sido compreensivos em relação a minha base na graduação e pela força dada. Em especial aos professores da minha primeira etapa, Sandro Bitar, Sheila Campos Chagas, Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda (minha orientadora) e José Nazareno; também aos professores que me auxiliaram no decorrer da graduação Raul e Flávia Morgana que não deixaram a chama da matemática se apagasse em mim. Agradeço ao meu orientador do PET Matemática, José Kenedy Martins que sempre acreditou e incentivou a não parar só na graduação e dar continuidade no mestrado, e a professora Flávia Morgana pelas aulas de análise real. Aos meus companheiros de mestrado e amigos: Danilo, Cícero Keyson, Bruno, Fernando, Alan, José Raimundo, Ayana, Thiago Parente, Vinícius Bandeira , Rafael, Teo e Juan. Aos colegas de graduação na UFAM pelos momentos de descontração. À minha Orientadora Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda pela paciência e compreensão, e por ter sido acima de tudo uma amiga, juntamente com as professoras Inês Padilha e Maria Rosilene, que sempre estiveram dispostas a me ajudar sempre que precisei.

RESUMO

SUPERFÍCIES DE TRANSLAÇÃO WEINGARTEN LINEARES NOS ESPAÇOS EUCLIDIANO E LORENTZ-MINKOWSKI

Nesta dissertação apresentaremos uma demonstração de que uma superfície de translação Weingarten linear no espaço euclidiano e no espaço Lorentz-Minkowski deve ter curvatura média constante ou curvatura de Gauss constante. O trabalho é baseado no artigo "Translation surfaces of linear Weingarten type"de Antonio Bueno e Rafael López.

Palavras-chave: Superfície de Translação, Superfície Weingarten Linear, Curvatura Média, Curvatura de Gauss.

ABSTRACT

LINEAR WEINGARTEN TRANSLATION SURFACES IN EUCLIDEAN SPACE AND LORENTZ-MINKOWSKI SPACE

In this dissertation we will present a demonstration that a linear Weingarten translation surface in Euclidean space and Lorentz-Minkowski space should have constant mean curvature or constant Gaussian curvature. The work is based on the article "Translation surfaces of linear Weingarten type" Antonio Bueno and Rafael López.

Keywords: Translation surface, Linear Weingarten Surface, Mean Curvature, Gauss Curvature.

Conteúdo

Introdução

Superfícies com curvatura média H ou curvatura de Gauss K constante, também chamadas de H-superfícies e K-superfícies, respectivamente, no espaço eclidiano $\mathbb{R}^3$ surgem como pontos críticos de um funcional que envolve uma combinação linear da área ou da curvatura média total, com o volume limitado pela imersão. Em 1853, Bonnet observou que o estudo de K-superfícies poderia ser tão difícil quanto o das H-superfícies. Isto porque qualquer K-superfície, $K > 0$, tem uma superfície paralela de curvatura média constante $H = \frac{\sqrt{K}}{2}$, para uma distância $\frac{1}{\sqrt{K}}$, que pode ter singularidades.

De modo geral, uma superfície de Weingarten imersa num espaço tridimensional $\mathbb{M}^3$ é uma superfície S em que as curvaturas média H e Gaussiana K satisfazem uma relação não-trivial $\Psi(H, K) = 0$. Esse tipo de superfície foi introduzida por Weingarten em [11], no contexto do problema de encontrar todas as superfícies isométricas a uma dada superfície de revolução e tem sido muito estudada. Para simplificar o estudo das superfícies de Weingarten é natural impormos algumas condições geométricas adicionais, como por exemplo, que S seja regrada ou de rotação, ver em [1, 6, 5, 7, 10].

Neste sentido, Dillen, Goemans e Van de Woestyne [4], consideraram as superfícies de Weingarten tipo gráfico $z = f(x) + g(y)$, onde f e g são funções suaves definidas em intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$, respectivamente. Tais superfícies são chamadas de *superfícies de translação*, ou seja, são localmente parametrizadas como $X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$. Em particular, uma superfície de translação S tem a propriedade que as translações de uma curva paramétrica $x = constante$ pela curva paramétrica $y = constante$ ficam em S. No referido artigo, os autores classificam todas as superfícies de translação do tipo Weingarten do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ e do espaço Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$, a saber:

Teorema 1. *(Theorem 1, [4]) Uma superfície de translação do tipo Weingarten no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é um plano, um cilindro generalizado, uma superfície mínima de Scherk ou um parabolóide elíptico.*

Teorema 2. *(Theorem 2, [4]) Uma superfície de translação do tipo Weingarten no espaço Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ é*

- *um plano, um cilindro generalizado, uma superfície mínima de Scherk ou um parabolóide elíptico, se a superfície for do tipo espaço;*
- *um plano, um cilindro generalizado, uma superfície mínima de Scherk ou um parabolóide hiperbólico, se a superfície for do tipo tempo.*

O espaço Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ munido com a métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Uma superfície S imersa em $\mathbb{L}^3$ é dita não degenerada se a métrica induzida em S é não degenerada; neste caso, temos dois tipos: a positiva definida em que a superfície é chamada *tipo espaço*, e a Lorentziana de índice 1 em que a superfície é chamada *tipo tempo*. Similarmente ao que é feito no espaço euclidiano com a métrica canônica, podemos definir os conceitos de superfície de Weingarten e superfície de translação. No entanto, em $\mathbb{L}^3$, se a superfície S de translação é do tipo espaço, então é localmente parametrizada por $X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$; e se S é do tipo tempo então é localmente parametrizada por $X(y, z) = (f(y) + g(z), y, z)$ ou por $X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z)$.

Neste trabalho, consideraremos superfícies imersas nos espaços euclidiano $\mathbb{R}^3$ e Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ e apresentaremos uma demonstração de que superfícies de translação para o caso em que a relação de Weingarten é linear, ou seja, em que existem constantes a, b e c, não todas nulas, tais que $2aH + bK = c$, devemos ter $a = 0$ ou $b = 0$.

Os resultados apresentados foram publicados por Antonio Bueno e Rafael López no artigo intitulado "Translation surfaces of linear Weingarten type", [2]. Os teoremas principais são:

Teorema 3. *(Teorema 1.1, [2]) Uma superfície de translação no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ do tipo Weingarten linear é uma superfície com curvatura constante K ou curvatura média constante H. Em particular, a superfície é congruente com um plano, um cilindro generalizado, ou uma superfície mínima de Scherk.*

Teorema 4. *(Teorema 3.1, [2]) Uma superfície de translação do tipo Weingarten linear não degenerada no espaço Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ é uma superfície com curvatura constante K ou curvatura média constante H.*

Ressaltamos que Liu provou em [8] que as únicas superfícies de translação com curvatura de Gauss K constante ou curvatura Média H constante no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ ou no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ são um plano, um cilindro generalizado, uma superfície mínima de Scherk.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos algumas definições e alguns resultados, bem como estabeleceremos a terminologia e as notações que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 Superfícies no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$

Definição 1.1. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \longrightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \in \mathbb{R}^3$ tal que*

1) X é diferenciável;

2) X é um homeomorfismo;

3) para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Definição 1.2. *Em cada $p \in S$, o plano gerado por $\{X_u, X_v\}$ é chamado plano tangente a S em p e denotado por T_pS. Em cada plano tangente, a métrica induzida $\langle , \rangle$ determina a primeira forma fundamental $I_p(v) = \langle dX_p, dX_p \rangle = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$, cujos coeficientes são funções diferenciáveis definidas por*

$$\begin{aligned} L &= \langle Xu, Xu \rangle, \\ M &= \langle Xu, Xv \rangle, \\ N &= \langle Xv, Xv \rangle, \end{aligned}$$

chamados de coeficientes da primeira forma quadrática.

Definição 1.3. *Uma superfície regular S é orientável se for possível cobrí-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família,então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p. A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S, neste caso se diz que S é orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável.*

Proposição 1.1. *Uma superfície regular $S \in \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S.*
A demonstração pode ser encontrada em [3].

Definição 1.4. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação ν. A aplicação $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ associando a cada ponto $p \in S$ o vetor unitário normal a M no ponto p. A aplicação $\nu : S \to \mathbb{S}^2$, assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de S.*

A diferencial $d\nu_p$ em $p \in S$ é uma aplicação linear entre os espaços vetoriais T_pS e $T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$. Como T_pS e $T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$ são os mesmos espaços vetoriais podemos pensar em $d\nu_p$ como um operador linear em T_pS.

Proposição 1.2. *A diferencial $d\nu_p : T_pS \to T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*
A demonstração pode ser encontrada em [3].

O fato da $d\nu_p : T_pS \to T_pS$ ser uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a $d\nu_p$ uma forma quadrática Q definida em T_pS,dada por

$$Q(v) = -\langle d\nu_p(v), v\rangle, v \in T_pS.$$

Definição 1.5. *A forma quadrática $II_p(v) = -\langle d\nu_p(v), v\rangle$ definida em T_pS é chamada a segunda forma fundamental de S em p.*

Definição 1.6. *Sejam $p \in S$ e $d\nu_p : T_pS \to T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de $d\nu_p$ é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p. A metade do traço de $-d\nu_p$ é chamado a curvatura média H de S em p.*

Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 podemos escrever

$$K = k_1k_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

A partir de agora consideraremos as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ compatíveis com a orientação ν de S, isto é, em $X(U)$,

$$\nu = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Sejam $X(u,v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S, e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em M, com $\alpha(0) = p$. Para simplificar a notação as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p.

O vetor tangente a α em p é $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e $d\nu_p(\alpha') = \nu'(u,v) = \nu_u u' + \nu_v v'$.

Como ν_u e ν_v pertencem a T_pS, podemos escrever

$$\nu_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v, \tag{1.1}$$

$$\nu_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v, \tag{1.2}$$

e portanto,

$$d\nu_p(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v$$

isto é

$$d\nu_p \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}.$$

Assim, na base $\{X_u, X_v\}$, $d\nu_p$ é dada pela matriz (a_{ij}), com $i,j = 1,2$. Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle d\nu_p(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle \nu_u u' + \nu_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} e &= -\langle \nu_u, X_u \rangle = \langle \nu, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle \nu_v, X_u \rangle = \langle \nu, X_{uv} \rangle = \langle \nu, X_{vu} \rangle = -\langle \nu_u, X_v \rangle \\ g &= -\langle \nu_v, X_v \rangle = \langle \nu, X_{vv} \rangle, \end{aligned}$$

desde que $\langle \nu, X_u \rangle = \langle \nu, X_v \rangle = 0$.

Temos que e, f, g, são chamados coeficientes da segunda forma.

A partir das equações (1.1) e (1.2), obtemos:

$$\begin{aligned}
-f &= \langle \nu_u, X_v \rangle = a_{11}M + a_{21}N \\
-f &= \langle \nu_v, X_u \rangle = a_{12}L + a_{22}M \\
-e &= \langle \nu_u, X_u \rangle = a_{11}L + a_{21}M \\
-g &= \langle \nu_v, X_v \rangle = a_{12}M + a_{22}N
\end{aligned}$$

As relações acima podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

donde,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}^{-1},$$

e $[\quad]^{-1}$ significa a matriz inversa de $[\quad]$.

Observe que

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{LN - M^2} \begin{bmatrix} N & -M \\ -M & L \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \frac{1}{LN - M^2} \begin{bmatrix} N & -M \\ -M & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{fM - eN}{LN - M^2} & \dfrac{gM - fN}{LN - M^2} \\ \dfrac{eM - fL}{LN - M^2} & \dfrac{fM - gL}{LN - M^2} \end{bmatrix}.$$

Daí decorrem as seguintes expressões para os coeficientes para os coeficientes $[a_{ij}]$ da matriz de $d\nu$ na base $\{X_u, X_v\}$:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{fM - eN}{LN - M^2}, \\
a_{12} &= \frac{gM - fN}{LN - M^2}, \\
a_{21} &= \frac{eM - fL}{LN - M^2}, \\
a_{22} &= \frac{fM - gL}{LN - M^2}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos a curvatura Gaussiana em termos de coordenadas locais

$$K = \det[a_{ij}] = \frac{eg - f^2}{LN - M^2}. \tag{1.3}$$

Para o cálculo da curvatura média, lembremos que $-k_1$,$-k_2$ são os autovalores de $d\nu$. Portanto, k_1 e k_2 satisfazem a equação

$$d\nu(v) = -kv = -kI(v) \Rightarrow (d\nu + kI)(v) = 0$$

para algum $v \in T_pM, v \neq 0$,onde I é a aplicação identidade. Decorre que a aplicação linear $d\nu + kI$ não é invertível, logo, tem determinante nulo.

Assim,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}+k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+k \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$k^2 + k(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Como k_1 e k_2 são raízes da equação quadrática acima na variável k, concluímos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{eN - 2fM + gL}{LN - M^2}. \tag{1.4}$$

Temos que,

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

e, portanto,

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Definição 1.7. *Uma superfície S no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é chamada uma superfície de translação se for dada como um gráfico $z(x,y) = f(x)+g(y)$, em que f e g são funções suaves em algum intervalo $I, J \subset \mathbb{R}$, respectivamente.*

1.2 Superfícies no espaço Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$

Definição 1.8. *O espaço de Lorentz-Minkowski é o espaço métrico $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ onde a métrica $\langle,\rangle$ é dada por*

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3,$$

em que $u = (u_1,u_2,u_3)$ e $v = (v_1,v_2,v_3)$.

Definição 1.9. *Um vetor $v \in \mathbb{L}^3$ é dito*

1) tipo espaço se$\langle v, v\rangle > 0$ ou $v = 0$;

2) tipo tempo se $\langle v, v\rangle < 0$;

3) tipo luz se $\langle v, v\rangle = 0$ e $v \neq 0$.

Definição 1.10. *Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$, chamamos o produto vetorial lorentziano de u e v ao único vetor $w = u \wedge v$ definido por*

$$w = u \wedge v = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Definição 1.11. *Uma superfície de translação S no espaço lorentziano $\mathbb{L}^3$ é chamada do tipo espaço, quando S se escreve localmente como $z = f(x) + g(y)$; S é chamada do tipo tempo,quando S se escreve localmente como $y = f(x) + g(z)$ ou $x = f(y) + g(z)$, em que f e g são funções suaves em algum intervalo $I, J \subset \mathbb{R}$, respectivamente.*

Faremos uma abordagem análoga ao que foi feito no espaço euclidiano. Para isso, consideraremos uma parametrização local

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{L}^3, \quad X = X(u, v),$$

de uma imersão do tipo espaço ou tipo tempo. Seja $B = \{X_u, X_v\}$ uma base local do plano tangente de cada ponto de $X(U)$.

Com respeito a B seja $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N, \end{bmatrix}$ a expressão matricial da primeira forma fundamental, em que

$$L = \langle X_u, X_u \rangle \ , \ M\langle X_u, X_v \rangle \text{ e } N = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Denotaremos por $W = LN - M^2$. Se superfície é tipo espaço então $W > 0$ e se é tipo tempo $W < 0$. Tomemos o vetor unitário

$$\nu = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Usaremos a notação $\langle \nu, \nu \rangle = \epsilon$, com $\epsilon = -1$ se S é do tipo espaço e $\epsilon = 1$ se S é do tipo tempo. Logo,

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{-\epsilon(LN - M^2)} = \sqrt{-\epsilon W}.$$

Seja agora $\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$ a expressão matricial da segunda forma fundamental com respeito a B, então

$$\begin{aligned} e &= -\langle AX_u, X_u \rangle = \langle \nu_u, X_u \rangle = \langle \nu, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle AX_u, X_v \rangle = \langle \nu_v, X_u \rangle = -\langle X_v, \nu_u \rangle = \langle \nu, X_{uv} \rangle \\ g &= -\langle AX_v, X_v \rangle = \langle \nu_v, X_v \rangle = \langle \nu, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

em que A é a aplicação de Weingarten. Dessa forma

$$A = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

e as curvaturas média e de Gauss são dadas por:

$$H = \epsilon \frac{1}{2} \frac{eN - 2fM + gL}{LN - M^2}, \quad K = \epsilon \frac{eg - f^2}{LN - M^2}.$$

1.3 Superfícies de Weingarten

Definição 1.12. *Uma superfície S imersa é chamada superfície de Weingarten se suas curvaturas média H e Gaussiana K satisfazem a relação não-trivial $\psi(H.K) = 0$. Se tal relação é dado por*

$$2aH + bK = c \tag{1.5}$$

em que a, b, c constantes reais, com $a^2 + b^2 \neq 0$ dizemos que a superfície é Weingarten linear. Note que este caso incluem as superfícies com H constante e com K constante.

Capítulo 2

O Caso Euclidiano

Utilizando a notação fixada anteriormente, demonstraremos o teorema principal para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.1. *Uma superfície de translação do tipo Weingarten linear no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é uma superfície com curvatura de Gauss constante ou curvatura média constante. Em particular, a superfície é congruente à um plano, um cilindro generalizado ou uma superfície mínima de Scherk.*

Demonstração. Temos que as curvaturas média H e de Gauss K são expressas em uma parametrização local por (1.4) e (1.3). Assim, sendo S uma superfície de translação temos que $X(x,y) = (x, y, f(x) + g(y))$, com f e g funções suaves, é uma parametrização local de S. Então

$$\begin{aligned}
X_x(x,y) &= (1, 0, f') \\
X_y(x,y) &= (0, 1, g') \\
X_{xx}(x,y) &= (0, 0, f'') \\
X_{yy}(x,y) &= (0, 0, g'') \\
X_{xy}(x,y) &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

e

$$X_x \wedge X_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f' \\ 0 & 1 & g' \end{vmatrix} = -f'\vec{i} - g'\vec{j} + \vec{k}$$

$$|X_x \wedge X_y| = \sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}$$

portanto o vetor normal ν é dado por

$$\nu = \frac{(-f', -g', 1)}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}.$$

Dessa forma, temos os coeficientes da primeira forma fundamental

$$\begin{aligned} L &= 1 + f'^2 \\ M &= f'g' \\ N &= 1 + g'^2 \end{aligned}$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} e &= \frac{f''}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} \\ f &= 0 \\ g &= \frac{g''}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura de Gauss é dada

$$K = \frac{f''g''}{(f'^2 + g'^2 + 1)^2}$$

e a curvatura média é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{\dfrac{f''}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}(1 + g'^2) + (1 + f'^2)\dfrac{g''}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}}{1 + f'^2 + g'^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{f''(1 + g'^2) + g''(1 + f'^2)}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$H = \frac{f''(1 + g'^2) + g''(1 + f'^2)}{2(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{f''g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^2}.$$

Sendo S também uma superfície Weingarten linear, H e K satisfazem a relação (1.5), e teremos então

$$a\frac{f''(1 + g'^2) + g''(1 + f'^2)}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}} + b\frac{f''g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^2} = c. \tag{2.1}$$

A prova do Teorema 2.1 é por contradição, ou seja, vamos supor que existem superfícies de translação Weingarten linear que não sejam as de curvatura média H constante e as de curvatura de Gauss K constante. Sendo assim, suponhamos então que $a, b \neq 0$.

Observamos também que pela expressão de K devemos ter $f'' \neq 0$ e $g'' \neq 0$, porque do contrário e de (2.1), H seria constante.

Faremos a prova em dois casos: $c = 0$ e $c \neq 0$.
Seja
$$W = LN - M^2 = 1 + f'^2 + g'^2. \tag{2.2}$$

1º caso) $c = 0$

Substituindo $c = 0$ em (2.1) teremos

$$a\frac{f''(1+g'^2) + g''(1+f'^2)}{(1+f'^2+g'^2)^{3/2}} + b\frac{f''g''}{(1+f'^2+g'^2)^2} = 0. \tag{2.3}$$

Multiplicando a equação (2.3) por W^2 e dividindo por $(1+f'^2)(1+g'^2)$ obtemos

$$a\Big(\frac{f''}{1+f'^2} + \frac{g''}{1+g'^2}\Big)\sqrt{W} + b\frac{f''}{1+f'^2}\frac{g''}{1+g'^2} = 0. \tag{2.4}$$

Agora, sejam
$$\mathsf{F} = \frac{f''}{1+f'^2}, \quad \mathsf{G} = \frac{g''}{1+g'^2}. \tag{2.5}$$

Desde que $f'' \neq 0$ e $g'' \neq 0$, temos que $\mathsf{F} \neq 0$ e $\mathsf{G} \neq 0$.
A equação (2.4) se escreve como

$$a(\mathsf{F}+\mathsf{G})\sqrt{W} + b\mathsf{F}\mathsf{G} = 0. \tag{2.6}$$

Notamos que esta identidade implica em $\mathsf{F}+\mathsf{G} \neq 0$ pois do contrário teríamos $b = 0$.

De (2.6) temos

$$\begin{aligned} a(\mathsf{F}+\mathsf{G})\sqrt{W} &= -b\mathsf{F}\mathsf{G} \\ a^2(\mathsf{F}+\mathsf{G})^2 W &= b^2\mathsf{F}^2\mathsf{G}^2 \\ W &= \frac{b^2}{a^2}\Big(\frac{\mathsf{F}\mathsf{G}}{\mathsf{F}+\mathsf{G}}\Big)^2, \end{aligned}$$

e usando (2.2) obtemos

$$1 + f'^2 + g'^2 = \frac{b^2}{a^2}\Big(\frac{\mathsf{F}\mathsf{G}}{\mathsf{F}+\mathsf{G}}\Big)^2. \tag{2.7}$$

Derivando a equação (2.7) com respeito a x temos

$$\begin{aligned}
2f'f'' &= \frac{b^2}{a^2}\frac{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^2 2\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^2 - \mathsf{F}^2\mathsf{G}^2 2(\mathsf{F}+\mathsf{G})\mathsf{F}'}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^4} \\
&= \frac{b^2}{a^2}\frac{(\mathsf{F}+\mathsf{G})[2(\mathsf{F}+\mathsf{G})\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^2 - 2\mathsf{F}^2\mathsf{F}'\mathsf{G}^2]}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^4} \\
&= \frac{b^2}{a^2}\frac{2\mathsf{F}^2\mathsf{F}'\mathsf{G}^2 + 2\mathsf{G}\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^3 - 2\mathsf{F}^2\mathsf{F}'\mathsf{G}^2}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^3},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$2f'f'' = \frac{b^2}{a^2}\frac{2\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^3}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^3}. \tag{2.8}$$

Agora derivando (2.8) com respeito a y obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{a^2}\frac{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^3 6\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^2\mathsf{G}' - 6\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^3(\mathsf{F}+\mathsf{G})^2\mathsf{G}'}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^6} &= 0 \\
\frac{b^2}{a^2}\frac{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^2[(\mathsf{F}+\mathsf{G})6\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^2\mathsf{G}' - 6\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^3\mathsf{G}']}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^6} &= 0 \\
\frac{b^2}{a^2}\frac{6\mathsf{F}^2\mathsf{F}'\mathsf{G}^2\mathsf{G}' + 6\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^3\mathsf{G}' - 6\mathsf{F}\mathsf{F}'\mathsf{G}^3\mathsf{G}'}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^4} &= 0
\end{aligned}$$

portanto

$$6\frac{b^2}{a^2}\frac{\mathsf{F}^2\mathsf{G}^2\mathsf{F}'\mathsf{G}'}{(\mathsf{F}+\mathsf{G})^4} = 0. \tag{2.9}$$

A equação (2.9) implica em $\mathsf{F}'\mathsf{G}' = 0$. Se existe $x_0 \in I$ tal que $\mathsf{F}'(x_0) \neq 0$ então devemos ter $\mathsf{G}'(y) = 0$ para todo $y \in J$ e então $\mathsf{G} = d$, para alguma constante d. Substituindo em (2.6)

$$\begin{aligned}
a(\mathsf{F}+\mathsf{G})\sqrt{W} + b\mathsf{F}\mathsf{G} &= 0 \\
a(\mathsf{F}+d)\sqrt{W} + bd\mathsf{F} &= 0 \\
ad\sqrt{W} + a\mathsf{F}\sqrt{W} + bd\mathsf{F} &= 0 \\
\mathsf{F}(a\sqrt{W} + bd) &= -ad\sqrt{W} \\
\mathsf{F} &= \frac{-ad\sqrt{W}}{a\sqrt{W} + bd} \\
\mathsf{F} &= \frac{-ad\sqrt{1+f'^2+g'^2}}{a\sqrt{1+f'^2+g'^2} + bd}.
\end{aligned}$$

Mas a função F só depende de x, o que implica que g' é constante, o que é absurdo pois $g'' \neq 0$.

Devemos ter então $\mathsf{F}' = 0$ para todo $x \in I$ em (2.9). Sendo $\mathsf{F}' = 0$ então $\mathsf{F} = d$, para alguma constante d, e, com raciocínio análogo ao anterior teremos que, como G é função de y, f' deve ser constante e novamente teremos uma contradição visto que $f'' \neq 0$.

Concluímos dessa forma que quando $c = 0$ tem-se $a = 0$ ou $b = 0$, implicando em H constante ou K constante.

2º caso) $c \neq 0$

Sendo $c \neq 0$ em (2.1) podemos dividir a equação por c e, renomeando as constantes, obtemos

$$a\frac{f''(1+g'^2)+g''(1+f'^2)}{(1+f'^2+g'^2)^{3/2}} + b\frac{f''g''}{(1+f'^2+g'^2)^2} = 1. \tag{2.10}$$

Novamente, multiplicando tal equação por W^2 e dividindo por $(1 + f'^2)(1+g'^2)$ obtemos

$$a(\mathsf{F}+\mathsf{G})\sqrt{W} + b\mathsf{F}\mathsf{G} = \frac{W^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)} \tag{2.11}$$

em que F e G são dadas por (2.5).

Derivando (2.11) com respeito a x temos

$$a\big(\mathsf{F}'\sqrt{W}+(\mathsf{F}+\mathsf{G})\frac{f'f''}{\sqrt{W}}\big)+b\mathsf{F}'\mathsf{G} = \frac{4Wf'f''}{(1+f'^2)(1+g'^2)} - \frac{2W^2f'f''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)} \tag{2.12}$$

Agora derivando (2.11) com respeito a y temos

$$a\big(\mathsf{G}'\sqrt{W}+(\mathsf{F}+\mathsf{G})\frac{g'g''}{\sqrt{W}}\big)+b\mathsf{F}\mathsf{G}' = \frac{4Wg'g''}{(1+f'^2)(1+g'^2)} - \frac{2g'g''W^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)^2}. \tag{2.13}$$

Dividindo a equação (2.12) por $f'f''$ e a (2.13) por $g'g''$, e igualando seus termos obtemos

$$a\frac{\mathsf{F}'\sqrt{W}}{f'f''}+b\frac{\mathsf{F}'\mathsf{G}}{f'f''}+\frac{2W^2}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)} = a\frac{\mathsf{G}'\sqrt{W}}{g'g''}+b\frac{\mathsf{F}\mathsf{G}'}{g'g''}+\frac{2W^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)^2} \tag{2.14}$$

Obtendo o valor de W^2 de 2.11

$$W^2 = (a(\mathsf{F}+\mathsf{G})\sqrt{W} + b\mathsf{F}\mathsf{G})(1+f'^2)(1+g'^2),$$

e substituindo em (2.14) obtemos

$$a\Big(\frac{\mathsf{F}'}{f'f''}+\frac{2(\mathsf{F}+\mathsf{G})}{1+f'^2}-\frac{\mathsf{G}'}{g'g''}-\frac{2(\mathsf{F}+\mathsf{G})}{1+g'^2}\Big)\sqrt{W}=b\Big(\frac{2\mathsf{FG}}{1+g'^2}+\frac{\mathsf{FG}'}{g'g''}-\frac{2\mathsf{FG}}{1+f'^2}-\frac{\mathsf{F}'\mathsf{G}}{f'f''}\Big) \tag{2.15}$$

Por outro lado, reescrevemos (2.10)

$$a(f''(1+g'^2)+g''(1+f'^2))\sqrt{W}+bf''g''=W^2$$

e diferenciamos esta expressão com respeito a x

$$\begin{aligned} 4f'f''W &= a(f''(1+g'^2)+g''(1+f'^2))\frac{f'f''}{\sqrt{W}}+bf'''g'' \\ &\quad +a(f'''(1+g'^2)+2f'f''g'')\sqrt{W}) \end{aligned}$$

e depois com respeito a y

$$\begin{aligned} 4g'g''W &= a(2f''g'g''+g'''(1+f'^2))\sqrt{W}+bf''g''' \\ &\quad +a(f''(1+g'^2)+g''(1+f'^2))\frac{g'g''}{\sqrt{W}} \end{aligned}$$

De ambas as equações obtemos o valor de W, e igualando resulta em

$$a\Big(\frac{f'''}{f'f''}(1+g'^2)+2g''-2f''-\frac{g'''}{g'g''}(1+f'^2)\Big)\sqrt{W}=b\Big(f''\frac{g'''}{g'g''}-g''\frac{f'''}{f'f''}\Big) \tag{2.16}$$

Se escrevermos 2.15 e 2.16 como $aP_1\sqrt{W}=bQ_1$ e $aP_2\sqrt{W}=bQ_2$, respectivamente, teremos

$$abP_1Q_2\sqrt{W}=abP_2Q_1\sqrt{W},$$

o que implica

$$ab\sqrt{W}(P_1Q_2-P_2Q_1)=0,$$

e portanto temos

$$P_1Q_2-P_2Q_1=0.$$

Agora, podemos reescrever (2.16)

$$\begin{aligned} &(f'''g'g''(1+g'^2)+2f'f''g'g''^2-2f'f''^2g'g''-g'''f'f''(1+f'^2))\sqrt{W}= \\ &=\frac{b}{a}(f'f''^2g'''-g'g''^2f'''). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Da mesma forma, manipulando (2.15), e considerando que

$$\mathsf{F}' = \frac{f'''(1+f'^2) - 2f'f''^2}{(1+f'^2)^2}$$

e analogamente

$$\mathsf{G}' = \frac{g'''(1+g'^2) - 2g'g''^2}{(1+g'^2)^2}$$

temos

$$(f'''g'g''(1+g'^2) + 2f'f''g'g''^2 - f'f''g'''(1+f'^2) - 2f'f''^2g'g'')\sqrt{W} = \frac{b}{a}(1+f'^2)(1+g'^2)(f'f''^2g''' - f'''g'g''^2). \tag{2.18}$$

Concluímos então de (2.17) e (2.18) que

$$(f'f''^2g''' - f'''g'g''^2)(2f'f''g'g''(f''-g'') + f'f''(1+f'^2)g''' - f'''g'g''(1+g'^2)) = 0,$$

ou seja,

$$P_2Q_2 = 0.$$

Vamos discutir os casos:

(1) Se existe um ponto (x_0, y_0) em $I \times J$ tal que $P_2(x_0, y_0) \neq 0$, então $Q_2 = 0$ em algum sub-retângulo de $I \times J$ implicando por (2.16) que $P_2 = 0$ uma contradição.

(2) Portanto $P_2 = 0$ em $I \times J$, novamente usando (2.16), temos $Q_2 = 0$ em $I \times J$.

Estas duas equações se escrevem

$$\frac{f'''}{f'f''^2} = \frac{g'''}{g'g''^2} \tag{2.19}$$

e

$$2(f'' - g'') + \frac{g'''}{g'g''}(1+f'^2) - \frac{f'''}{f'f''}(1+g'^2) = 0. \tag{2.20}$$

A equação (2.19) implica a existência de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{f'''}{f'f''^2} = \frac{g'''}{g'g''^2} = 2\lambda$$

e assim

$$\frac{f'''}{f'f''} = 2\lambda f'' \qquad \frac{g'''}{g'g''} = 2\lambda g'' \tag{2.21}$$

substituindo as equações (2.21) em (2.20) obtemos

$$\begin{aligned}
2(f'' - g'') + 2\lambda(1 + f'^2)g'' - 2\lambda(1 + g'^2)f'' &= 0 \\
2(f'' - g'' + \lambda(1 + f'^2)g'' - \lambda(1 + g'^2)f'') &= 0 \\
f'' - g'' + \lambda g'' + \lambda f'^2 g'' - \lambda f'' - \lambda g'^2 f'' &= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f'' - g'' - \lambda g'' - \lambda f'' = \lambda g'^2 f'' - \lambda f'^2 g'' \tag{2.22}$$

Se $\lambda \neq 0$ derivando (2.22) com respeito a x e depois com respeito a y

$$\begin{aligned}
f''' - \lambda f''' &= \lambda g'^2 f''' - 2\lambda g'' f' f'' \\
0 &= 2\lambda g' g'' f''' - 2\lambda f' f'' g''' \\
2\lambda g' g'' f''' &= 2\lambda f' f'' g''' \\
f' f'' g''' &= g' g'' f'''.
\end{aligned}$$

Como assumimos que $f'', g'' \neq 0$ concluímos que:

$$\frac{f'''}{f' f''} = \frac{g'''}{g' g''} = \mu$$

para alguma constante $\mu \in \mathbb{R}$.

Substituindo em (2.21) deduzimos que $\mu \neq 0$ e f'', g'' são ambas funções constantes. Assim, $f''' = g''' = 0$ implicando em $\lambda = 0$, o que é uma contradição.

Dessa forma temos que ter $\lambda = 0$ em (2.21). Então a equação (2.22) nos diz $f'' = g'' = m$ para algum $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Então (2.10) se escreve como

$$a\frac{m(1 + g'^2) + m(1 + f'^2)}{W^{\frac{3}{2}}} + \frac{bm^2}{W^2} = 1$$

ou seja,

$$am(2 + f'^2 + g'^2) = (1 - bm^2 W^{-2})W^{\frac{3}{2}}$$

ou ainda,

$$am(2 + f'^2 + g'^2) = W^{\frac{3}{2}} - bm^2 W^{-\frac{1}{2}}.$$

Derivando com respeito a x obtemos:

$$2amf'f'' = \frac{3}{2}W^{\frac{1}{2}}2f'f'' + \frac{1}{2}bm^2W^{-\frac{3}{2}}2f'f'',$$

e dividindo por $f'f''$ temos:

$$2am = 3W^{\frac{1}{2}} + bm^2W^{-\frac{3}{2}}. \tag{2.23}$$

Observe que W é uma constante pois se diferenciarmos (2.23) com respeito a x resulta em

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}W^{-\frac{1}{2}}2f'f'' - \frac{3}{2}bm^2W^{-\frac{5}{2}}2f'f'' &= 0\\ \Rightarrow W^{-\frac{1}{2}} - bm^2W^{-\frac{5}{2}} &= 0\\ W^2 = bm^2.\end{aligned}$$

Sendo W constante, teríamos que $f'' = g'' = 0$, o que é novamente uma contradição.

$\square$

Capítulo 3

O Caso Lorentziano

Agora utilizando a notação fixada anteriormente, demonstraremos o teorema principal para o espaço lorentziano $\mathbb{L}^3$.

Teorema 3.1. *Uma superfície de translação não-degenerada no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ Weingarten linear é uma superfície com curvatura de Gauss constante K ou curvatura média constante H.*

Demonstração. Suponhamos os casos em que S é uma superfície tipo espaço ou tipo tempo. Suponha que S é do tipo espaço com $z = f(x) + g(y)$, então $X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$. Assim temos

$$\begin{aligned} X_x &= (1, 0, f') \\ X_y &= (0, 1, g') \\ X_{xx} &= (0, 0, f'') \\ X_{xy} &= (0, 0, 0) \\ X_{yy} &= (0, 0, g''). \end{aligned}$$

O normal será dado por

$$\nu = \frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|},$$

assim

$$X_x \wedge X_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ 1 & 0 & f' \\ 0 & 1 & g' \end{vmatrix} = -f'\vec{i} - g'\vec{j} + -\vec{k}$$

$|X_x \wedge X_y| = \sqrt{1 - f'^2 - g'^2}$,
e portanto, $\nu = \dfrac{(-f', -g', -1)}{\sqrt{1 - f'^2 - g'^2}}$.

Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned}
L &= \langle X_x, X_x\rangle = 1 - f'^2\\
M &= \langle X_x, X_y\rangle = -f'g'\\
N &= \langle X_y, X_y\rangle = 1 - g'^2\\
e &= \langle \nu, X_{xx}\rangle = \frac{-f''}{\sqrt{1-f'^2-g'^2}}\\
f &= \langle \nu, X_{xy}\rangle = 0\\
g &= \langle \nu, X_{yy}\rangle = \frac{-g''}{\sqrt{1-f'^2-g'^2}}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Suponha agora que S é tipo tempo. Então S pode ser expressa como $y = f(x)+g(z)$ ou $x = f(y)+g(z)$. Suporemos que a superfície tipo tempo é da forma $y = f(x) + g(z)$, logo se escreve como $X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z)$. Assim temos

$$\begin{aligned}
X_x &= (1, f', 0)\\
X_z &= (0, g', 1)\\
X_{xx} &= (0, f'', 0)\\
X_{xz} &= (0, 0, 0)\\
X_{zz} &= (0, g'', 0).
\end{aligned}$$

Obtemos o normal de maneira análoga

$$X_x \wedge X_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k}\\ 1 & f' & 0\\ 0 & g' & 1 \end{vmatrix} = f'\vec{i} - \vec{j} - g'\vec{k}$$

$|X_x \wedge X_z| = \sqrt{1+f'^2-g'^2}$,
Logo $\nu = \dfrac{(f', -1, -g')}{\sqrt{1+f'^2-g'^2}}$.

Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned}
L &= \langle X_y, X_y\rangle = 1 + f'^2\\
M &= \langle X_y, X_z\rangle = f'g'\\
N &= \langle X_z, X_z\rangle = -1 + g'^2\\
e &= \langle \nu, X_{yy}\rangle = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2-g'^2}}\\
f &= \langle \nu, X_{yz}\rangle = 0\\
g &= \langle \nu, X_{zz}\rangle = \frac{g''}{\sqrt{1+f'^2-g'^2}}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Comparando as equações em (3.1) e (3.2) podemos escrever de uma forma geral os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental tanto da superfície tipo espaço quanto da tipo tempo do seguinte modo

$$\begin{aligned} L &= 1+\epsilon f'^2 \\ M &= \epsilon f'g' \\ N &= \epsilon(g'^2-1) \\ e &= \epsilon\frac{-f''}{\sqrt{1+\epsilon f'^2-g'^2}} \\ f &= 0 \\ g &= \epsilon\frac{-g''}{\sqrt{1+\epsilon f'^2-g'^2}}. \end{aligned}$$

Sendo $W = LN - M^2$, logo $W = 1+\epsilon f'^2 - g'^2 > 0$. De acordo com o que foi feito anteriormente o vetor normal de ambas as superfícies, do tipo espaço e do tipo tempo são, respectivamente,

$$\nu = \frac{(-f', -g', -1)}{\sqrt{1+\epsilon f'^2-g'^2}},$$

$$\nu = \frac{(f', 1, -g')}{\sqrt{1+\epsilon f'^2-g'^2}}.$$

A expressão de H e K em coordenadas locais são dadas por (1.11), assim temos

$$K = -\frac{f''g''}{(1+\epsilon f'^2-g'^2)^2} \text{ e } H = \epsilon\frac{-\epsilon f''(1-g'^2)+g''(1+\epsilon f'^2)}{2(1+\epsilon f'^2-g'^2)^{3/2}}.$$

Substituindo em (1.5) temos

$$a\Big(\epsilon\frac{-\epsilon f''(1-g'^2)+g''(1+\epsilon f'^2)}{2(1+\epsilon f'^2-g'^2)^{3/2}}\Big) + b\epsilon\frac{f''g''}{(1+\epsilon f'^2-g'^2)^2} = c. \tag{3.3}$$

Suponhamos novamente por contradição que $a, b \neq 0$ em (1.5).

1º caso) $c = 0$

Multiplicando (3.3) por W^2 temos

$$a\epsilon(\epsilon f''(-1+g'^2)+g''(1+\epsilon f'^2))\sqrt{W} + b\epsilon f''g'' = 0 \tag{3.4}$$

Dividindo (3.4) por $(-1+g'^2)(1+\epsilon f'^2)$ temos

$$a(\epsilon^2\frac{f''}{1+\epsilon f'^2} + \epsilon\frac{g''}{-1+g'^2})\sqrt{W} + b\frac{f''}{1+\epsilon f'^2}\frac{\epsilon g''}{-1+g'^2} = 0$$

Fazendo a mudança

$$\mathsf{F} = \frac{f''}{1+\epsilon f'^2}, \mathsf{G} = \epsilon \frac{g''}{-1+g'^2}$$

Obtemos (2.6) . Isto implica que W é constante uma contradição.

2º caso) $c \neq 0$

Dividindo (3.3) por c, e novamente fazendo a mudança de notação na constante, obtemos

$$a(\mathsf{F}+\mathsf{G})\sqrt{W} + b\mathsf{F}\mathsf{G} = \epsilon \frac{W^2}{(1+\epsilon f'^2)(-1+g'^2)}. \tag{3.5}$$

Derivando separadamente em relação a x e depois em relação a y a equação (3.5) resulta em

$$\begin{aligned} a(\mathsf{F}'\sqrt{W} + (\mathsf{F}+\mathsf{G})\frac{\epsilon f' f''}{\sqrt{W}}) + b\mathsf{F}'\mathsf{G} &= \frac{4W f' f''}{(1+\epsilon f'^2)(-1+g'^2)} \\ &\quad - \frac{2\epsilon W^2 f' f''}{(1+f'^2)^2(-1+g'^2)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a(\mathsf{G}'\sqrt{W} + (\mathsf{F}+\mathsf{G})(\frac{-g' g''}{\sqrt{W}})) + b\mathsf{F}\mathsf{G}' &= -(\frac{4W g' g''}{(1+\epsilon f'^2)(-1+g'^2)}) \\ &\quad - \frac{2\epsilon g' g'' W^2}{(1+\epsilon f'^2)(-1+g'^2)^2} \end{aligned}$$

Dividindo a primeira equação por $\epsilon f' f''$ e a segunda por $-g' g''$

Agora 2.15 e 2.16 se escrevem respectivamente como

$$a\Big(\frac{\mathsf{F}'}{f' f''} + \frac{2(\mathsf{F}+\mathsf{G})}{\epsilon + f'^2} + \epsilon \frac{\mathsf{G}'}{g' g''} + \epsilon \frac{2(\mathsf{F}+\mathsf{G})}{-1+g'^2}\Big)\sqrt{W} + b\Big(\frac{\mathsf{F}'\mathsf{G}}{f' f''} + \frac{2\mathsf{F}\mathsf{G}}{\epsilon + f'^2} + \epsilon \frac{\mathsf{F}\mathsf{G}'}{g' g''} + \epsilon \frac{2\mathsf{F}\mathsf{G}}{-1+g'^2}\Big) = 0$$

e

$$a\Big(\frac{f'''}{f' f'}(-1+g'^2) + 2g'' + 2\epsilon f'' + \epsilon(\epsilon + f'^2)\frac{g'''}{g' g''}\Big)\sqrt{W} + \epsilon b\Big(f'' \frac{g'''}{g' g''} + \epsilon g'' \frac{f'''}{f' f''}\Big) = 0$$

Finalmente encontramos

$$(f'f''^2g'''+\epsilon f'''g'g''^2)(2f'f''g'g''(f''+\epsilon g'')+f'f''(f'^2+\epsilon)g'''+\epsilon f'''g'g''(g'^2-1))=0$$

Para concluir, basta considerar a mesma discussão dos casos análogo ao que foi feito para o caso Euclidiano. Obteremos W constante, consequentemente, teremos uma contradição.

$\square$

Bibliografia

[1] Beltrami, E. Risoluzione di un Problema Relativo all teoria delle Superfície Gobbe, Ann. Mat. Pura Appl. 7 139-150, 1865/1866

[2] Bueno, A., López, R. Translation surfaces of linear Weingarten type, accepted in An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.).

[3] Carmo, M. P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Textos Matemáticos, SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[4] Dillen, F., Goemans, W., Van de Woestyne, I.: Translation surfaces of Weingarten type in 3-space, Bull. Transilvania Univ. Brasov (Ser. III), 50 109-122, 2008

[5] Dillen, F. , Kühnel, W. Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space, Manuscripta Math. 98 307-320, 1999

[6] Dini, U., Sulle Superfície Gobbe nelle quali uno dei due Raggi di Curvature Pricipale w una Funzione Dell'altro, Ann . Mat. Pura Appl. 7 205-210, 1865-1866

[7] Kühnel, W. Ruled W-surfaces, Arch. Math, 62 465-480, 1994

[8] Liu, H., Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, J. Geom. 64 141-149, 1999

[9] López, R. Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski Space. arXiv:0810.3351v2 [math.DG](2014)

[10] Rosemberg, H., Sá Earp, R. The geometry of properly embedded special surfaces in $\mathbb{R}^3$; e.g., surfaces satisfying $aH + bK = 1$,where a and b are positive, Duke Math J. 73 291-306, 1994

[11] Weingarten, J., Uber eine Klasse auf einander abwickelbarer Fl¨achen, J. Reigen Angew. Math. 59 382-393, 1861

[12] Weinstein, T. An Introduction to Lorentz Surfaces, de Gruyter Expositions in Mathematics, 22. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996