UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre a curvatura gaussiana de superfícies compactas em variedades homogêneas de dimensão três

João Filipe Bezerra Pereira

Manaus

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

João Filipe Bezerra Pereira

Sobre a curvatura gaussiana de superfícies compactas em variedades homogêneas de dimensão três

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Manaus
2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P436s

Pereira, João Filipe Bezerra
Sobre a curvatura gaussiana de superfícies compactas em variedades homogêneas de dimensão três / João Filipe Bezerra Pereira. 2015
51 f.: il.; 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Variedades homogêneas tridimensionais. 2. superfícies compactas. 3. curvatura gaussiana constante. 4. curvatura gaussiana constante. I. Gomes, José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

João Filipe Bezerra Pereira

Sobre a curvatura gaussiana de superfícies compactas em variedades homogêneas de dimensão três

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 6 de março de 2015.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev, Membro
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos, Membro
Universidade Federal do ABC.

À minha tia Jobilina da Silva Moraes
(in memorian).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, a minha mãe Maria da Conceição e a minha avó Alaíde pelo apoio, pelo carinho, pela confiança, pelo amor incondicional.

Aos meus familiares, meu tio Sebastião, minha tia Lina, meu pai João, meu irmão, minhas irmãs, meus primos e minhas primas pelos votos de confiança, apoio, carinho e amor incondicionais.

Agradeço aos meus amigos de Graduação em Matemática: André, Ruth, Ilana, Haida, Keyla, José Adelino, Diana, Josiel, Adrian, Thiago Lucas, Eduardo Bruno, e os demais nos quais formei amizades ao longo do curso.

Aos professores de Graduação em Matemática da UFAM: Disney Douglas, Flávia Morgana, Domingos Anselmo, Roberto Cristóvão, Claudenir, Raul Mesquita, Mário Salvatierra, Nilomar Vieira, Ivan Tribuzy, Sandro Bitar por conhecimentos transmitidos. Agradeço também ao professor Renato Tribuzy por ter me orientado no PIBIC durante a minha graduação, com o qual foi de grande relevância no meu crescimento na Matemática, o que me fez estudar a Matemática no nível mais elevado, adquirindo novos conhecimentos, novas ferramentas e nisso facilitou a minha entrada no Mestrado em Matemática, isto é, consegui com êxito ser aprovado no Exame de Seleção do Mestrado.

Ao professor Dr. José Nazareno Vieira Gomes pela orientação, pela ajuda na elaboração deste trabalho e por ter me acompanhado ao longo do Mestrado.

Agradeço aos professores Dr. Dragomir Mitkov Tsonev e Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos por terem aceitado participar da minha banca.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática: José Nazareno, Nilomar Vieira, Flávia Morgana, Alfredo Wagner, Michel Pinho, Inês Padilha, Stefan, Sandro Bitar, Dragomir que contribuiram para a minha formação acadêmica e o meu desenvolvimento na Matemática, no qual me ajudou a obter ferramentas para a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos de Mestrado: Fábio Júnior, Suellen, Soraya Bianca, Raphael, Ozenildo, Márcia Sarraff, Daniele, Ezequiel, Andrea, Raimundo Nonato, Abraão; e Doutorado: Marcos Aurélio, Elzimar, Francisco Eteval, Airton Freitas.

Agradeço também a quem não citei nessa lista de agradecimentos, que contribuiram também para minha formação na Matemática.

À Capes pelo apoio financeiro.

"A persistência é o caminho do êxito.

(Charles Chaplin)

RESUMO

Neste trabalho vamos classificar as superfícies compactas planas em variedades riemannianas homogêneas tridimensionais com grupo de isometrias de dimensão 4. Além disso, vamos estabelecer resultados de inexistência de superfícies compactas de curvatura gaussiana constante nestas variedades.

Palavras-chave: Variedades homogêneas tridimensionais, superfícies compactas, curvatura gaussiana constante.

ABSTRACT

Compact flat surfaces of homogeneous Riemannian 3-manifolds with isometry group of dimension 4 are classified. Nonexistence results for compact constant Gauss curvature surfaces in these 3-manifolds are established.

Keywords: Homogeneous 3-manifolds, compact surfaces, constant Gaussian curvature.

Conteúdo

Introdução

O estudo de superfícies completas de curvatura gaussiana constante em variedades tridimensionais de curvatura constante é um tema clássico em geometria diferencial. Nos últimos anos, as superfícies nestes ambientes foram profundamente estudadas, particularmente as de curvatura média constante. O ponto de partida deste estudo foi o trabalho de Abresch e Rosenberg [18], onde eles encontraram uma diferencial holomorfa quadrática em qualquer superfície de curvatura média constante de uma variedade riemanniana homogênea tridimensional com o grupo de isometrias de dimensão 4. Os exemplos mais significativos de tais variedades são: as esferas de Berger, o grupo de Heisenberg, o recobrimento universal do grupo de Lie $PSl(2,\mathbb{R})$ e os produtos riemannianos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{H}^2$ são, respectivamente, a esfera e o plano hiperbólico com suas métricas padrões. Três anos depois Aledo, Espinar e Gálvez [9, 10] classificaram as superfícies completas de curvatura gaussiana constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para algum valor da curvatura gaussiana, exceto para diversos valores, em que a classificação ainda está em aberto.

Nesta dissertação faremos um estudo da curvatura gaussiana de superfícies compactas em variedades riemannianas homogêneas tridimensionais com grupo de isometrias de dimensão 4, basicamente esclareceremos os resultados provados por Torralbo e Urbano em [8]. Apresentaremos uma fórmula integral (cf. Eq. (3.4)) que permite classificar as superfícies compactas planas (cf. Teorema 3.1). Esta fórmula, obtida por Torraldo e Urbano, é nova no sentido de que não há similaridade para superfícies em formas espaciais tridimensionais. Em suas demonstrações, eles usaram argumentos de natureza topológica. Por exemplo, nas esferas de Berger as únicas superfícies compactas planas são toros de Hopf, i.e., aquelas que são imagem inversa de curvas fechadas de $\mathbb{S}^2$ pela fibração de Hopf $\Pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, enquanto que na esfera canônica de dimensão 3, além deles, há outros toros planos [19].

O Teorema Principal (Teorema 3.3) e o Corolário 3.3 mostram o comportamento da curvatura gaussiana desta classe de superfícies. Também discutiremos alguns resultados de inexistência de superfícies compactas com curvatura gaussiana constante em variedades riemannianas homogêneas tridimensionais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos exibir definições, resultados e exemplos da teoria básica geral de geometria riemanniana que serão utilizados no decorrer desta dissertação. Faremos uma revisão dos conceitos de tensores, curvaturas, operadores diferenciais, geodésicas, campos de Killing, imersões isométricas, segunda forma fundamental e submersões riemannianas. Nossa maior preocupação será detalhar os resultados obtidos por Torralbo e Urbano [8], por isso omitiremos alguns conceitos que já são bem conhecidos na presente teoria, contudo se o leitor achar necessário recomendamos os livros [1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 17].

1.1 Tensores em Variedades Riemannianas

Relembremos que um $(1, r)$-tensor em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

multilinear sobre o anel das funções diferenciáveis $C^\infty(M)$. Enquanto que, num $(0, r)$-tensor, o contradomínio é o $C^\infty(M)$. Além disso, dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(U)$, pede-se que $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ seja uma função diferenciável em um aberto $U \subset M$ e T é $C^\infty(U)$-linear em cada variável, isto é,

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $f, h \in C^\infty(U)$.

Exemplo 1.1. *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $X, Y \in T_pM$, o produto interno de X e Y na métrica* *riemanniana de M, isto é, $g_p(X,Y) = \langle X, Y\rangle_p$, é um $(0,2)$-tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Exemplo 1.2. *Toda k-forma diferencial ω em M é automaticamente um $(0,k)$-tensor em M.*

Observação 1.1. *Em uma variedade riemanniana a métrica riemanniana faz corresponder a cada campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma forma diferencial $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por*

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y\rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Neste sentido, um campo de vetores diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser identificado com um $(0,1)$-tensor $X : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dado por

$$X(Y) = \langle X, Y\rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante ∇ a tensores como veremos agora.

Definição 1.1. *A derivada covariante de um $(1,r)$-tensor T é um $(1,r+1)$-tensor ∇T dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r) \quad (1.1)$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0,r)$-tensor T é um $(0,r+1)$-tensor ∇T dado como em (1.1).

Exemplo 1.3. *A derivada covariante de $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ em relação ao campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned}
(\nabla\omega_X)(Z,Y) &= Z(\omega_X(Y)) - \omega_X(\nabla_Z Y) = Z\langle X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\
&= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\
&= \langle \nabla_Z X, Y\rangle = \langle \nabla X(Z), Y\rangle = \nabla X(Z,Y).
\end{aligned}$$

Decorre daí que $\nabla\omega_X$ pode ser identificada ao $(0,2)$-tensor ∇X. Isto mostra que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivação covariante de campos. Derivar um campo é o mesmo que derivar covariantemente o seu dual. Motivados por este resultado e, por conveniência de notação, convém considerar o $(1,1)$-tensor $\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Assim, pela Definição 1.1, teremos o $(1,2)$-tensor dado por

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{X,Y} Z &:= \nabla\nabla Z(X,Y) \\
&= \nabla_X(\nabla Z(Y)) - (\nabla Z)(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z, \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Analogamente,

$$\nabla^2_{Y,X} Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z. \qquad (1.3)$$

Subtraindo (1.3) de (1.2) obtemos, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, o $(1,2)$-tensor dado por

$$\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Fazendo Z variar na equação anterior, uma conta direta mostra que teremos um $(1,3)$-tensor. O que motiva a definição seguinte.

Definição 1.2. *Seja M uma variedade riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$R(X,Y)Z = -(\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$-tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dado por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle.$$

Proposição 1.1. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z)$

(ii) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

(iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi)*

A partir do tensor curvatura definiremos os seguintes entes geométricos:

Definição 1.3. *Seja M^n uma variedade riemanniana n-dimensional e p um ponto de M. A curvatura seccional $K(x, y)$ segundo um subespaço bidimensional σ do espaço tangente T_pM, onde $x, y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes, é definida por:*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

onde $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2$.

Segue-se da Álgebra linear que esta definição não depende da escolha dos vetores linearmente independentes $x, y \in \sigma$. Além disso, para uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM, temos

$$K(e_i, e_j) = \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle = R(e_i, e_j, e_i, e_j).$$

Proposição 1.2. *Sejam M uma variedade riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R_0 : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle R_0(x, y, z), w\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle y, z\rangle\langle x, w\rangle,$$

para todo $x, y, z, w \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0R_0$, onde R é o tensor curvatura de M.

Demonstração. Ver [3]. □

Definição 1.4. *Definimos o tensor curvatura de Ricci de uma variedade riemanniana M como o traço do tensor curvatura de Riemann. Isto é, se $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM$ é uma base ortonormal, então para todo $x, y \in T_pM$*

$$Ric(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, x)e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, y)e_i, x\rangle,$$

onde a última igualdade segue do item (ii) da Proposição 1.1. Portanto, Ric é um $(0, 2)$-tensor simétrico.

1.2 Operadores Diferenciais

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades riemannianas certos operadores diferenciais de uso frequente no $\mathbb{R}^n$. Passaremos a uma exposição de alguns destes operadores. Em tudo que segue, M^n denotará uma variedade riemanniana de dimensão n com métrica $\langle , \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇.

Definição 1.5. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X) \tag{1.4}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Então, pela definição de gradiente, teremos em U

$$\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, e_i \rangle e_i = \sum_i e_i(f) e_i = \sum_{i=1}^n f_i e_i. \tag{1.5}$$

Mais geralmente, se $\partial_1, \ldots, \partial_n$ são campos coordenados em U, teremos

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_j(f) \partial_i, \tag{1.6}$$

onde $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}). Além disso, é imediato das propriedades de derivação o seguinte fato: Se $f, \ell : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então vale a regra da soma $\nabla(f + \ell) = \nabla f + \nabla \ell$ e a regra do produto $\nabla(f\ell) = \ell \nabla f + f \nabla \ell$.

Definição 1.6. *Seja X um campo de vetores suave em M. A divergência de X é a função diferenciável $divX : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$(divX)(p) = tr\{v \in T_pM \mapsto \nabla_v X\}, \tag{1.7}$$

onde tr denota o traço do operador linear $v \in T_pM \mapsto \nabla_v X$.

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Proposição 1.3. *Seja X um campo diferenciável em M e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ em U, então*

$$(divX)(p) = \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle).$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, temos que

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i). \tag{1.8}$$

Demonstração. Pela definição de divergência de um campo vetorial, obtemos

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(e_i \langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle \big) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle). \end{aligned}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em p, teremos a equação (1.8). □

Mais uma vez é imediato das propriedades de derivação que, para campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e para qualquer função suave $f : M \to \mathbb{R}$, são válidas as propriedades: $div(X+Y) = divX + divY$ e $div(fX) = fdivX + \langle \nabla f, X \rangle$.

Definição 1.7. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f). \tag{1.9}$$

Aplicando esta definição ao produto de duas funções suaves $f, \ell : M \to \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} \Delta(f\ell) &= div(\nabla(f\ell)) = div(\ell \nabla f) + div(f \nabla \ell) \\ &= \ell div(\nabla f) + \langle \nabla \ell, \nabla f \rangle + f div(\nabla \ell) + \langle \nabla f, \nabla \ell \rangle \\ &= \ell \Delta f + f \Delta \ell + 2 \langle \nabla f, \nabla \ell \rangle. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Definição 1.8. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$(Hessf)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.11}$$

Ou como $(0,2)$-tensor, dado por

$$Hessf(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

Neste caso, $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é um tensor simétrico. De fato,

$$\begin{aligned} \langle (Hessf)(X), Y \rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Analogamente,

$$\langle (Hessf)(Y), X\rangle = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f). \tag{1.13}$$

Agora basta subtrair as equações (1.12) e (1.13) para comprovar a nossa afirmação. Ademais, seja $p \in M$ e considere $U \subset M$ uma vizinhança coordenada de p onde esteja definido um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$. Então

$$tr(Hessf)_p = \sum_{i=1}^{n} \langle (Hessf)_p(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle = div(\nabla f)(p) = \Delta f(p).$$

Assim,

$$\Delta f = tr(Hessf).$$

Observação 1.2. *Seja M uma variedade riemanniana orientável de dimensão n. O elemento de volume (ou forma volume) de M é a n-forma diferencial ω definida em cada ponto $p \in M$ por*

$$\omega_p(v_1, \dots, v_n) = det(\langle v_i, e_j\rangle) \quad (\textit{volume do paralelepípedo orientado } [v_1, \dots, v_n]),$$

onde cada $v_i \in T_pM$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal positiva de T_pM. Também denotamos ω por dM.

Suponha agora que M é uma variedade com bordo ∂M. Denotamos por ν o campo unitário normal exterior a M ao longo de ∂M. A orientação de M induz uma orientação em ∂M da maneira seguinte: dado $p \in \partial M$ e dada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \subset T_p\partial M$, dizemos que β é positiva se $\{\nu, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base positiva de T_pM.

Definição 1.9. *Seja M^n uma variedade riemanniana orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. O produto interior de uma k-forma ω na direção de X é a $(k-1)$-forma $\iota_X\omega$ definida por*

$$(\iota_X\omega)_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega_p(X_p, v_1, \dots, v_{k-1}) \tag{1.14}$$

para todo $p \in M$ e $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_pM$. Também denotamos $\iota_X\omega$ por $X \lrcorner \omega$.

Por exemplo, seja M uma variedade riemanniana orientada com forma volume dM e bordo ∂M. Seja ν o normal unitário exterior a ∂M, segue da Observação 1.2 que $\nu \lrcorner dM$ é a forma volume de ∂M induzida por M. Denotamos $\nu \lrcorner dM = d\nu$.

Proposição 1.4. *Seja M^n uma variedade riemanniana orientada com elemento de volume dM. Então*

$$d(X \lrcorner dM) = divXdM \tag{1.15}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Ver [5]. □

Precisaremos da seguinte versão do teorema da divergência:

Teorema 1.1. *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzida por M e ν denota o normal unitário exterior a M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M divX dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\nu. \tag{1.16}$$

Demonstração. Segue da Proposição 1.4 e do Teorema de Stokes [12], que

$$\begin{aligned} \int_M divX\ dM &= \int_M d(X \lrcorner dM) = \int_{\partial M} X \lrcorner dM = \int_{\partial M} (X^\top + X^\perp) \lrcorner dM \\ &= \int_{\partial M} (\langle X, \nu \rangle \nu) \lrcorner dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \nu \lrcorner dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle\ d\nu. \end{aligned}$$

Note que no caso de ν ser o normal unitário interior a M ao longo de ∂M, o segundo membro da igualdade (1.16) muda de sinal. □

As fórmulas da proposição a seguir são conhecidas como as *identidades de Green.*

Proposição 1.5. *Sejam $f, \ell : M \to \mathbb{R}$ funções suaves e ν o campo de vetores normais unitários exterior a M ao longo de ∂M, então:*

(a) (Primeira identidade de Green)

$$\int_M \ell \Delta f dM = -\int_M \langle \nabla f, \nabla \ell \rangle dM + \int_{\partial M} \ell \frac{\partial f}{\partial \nu} d\nu. \tag{1.17}$$

(b) (Segunda identidade de Green)

$$\int_M (\ell \Delta f - f \Delta \ell) dM = \int_{\partial M} \Big(\ell \frac{\partial f}{\partial \nu} - f \frac{\partial \ell}{\partial \nu} \Big) d\nu. \tag{1.18}$$

Demonstração. Para o item (a) aplicamos o teorema da divergência ao campo $X = \ell \nabla f$. O item (b) segue agora imediatamente de (a), trocando ℓ por f em (a) e subtraindo membro a membro as duas identidades assim obtidas. □

1.3 Geodésicas; Campos de Killing

Nesta seção apresentaremos a definição de geodésica, o teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias e a definição de campo de Killing, o qual será de grande importância no desenvolvimento desse trabalho.

A partir de agora admitiremos que M é uma variedade riemanniana munida de sua conexão riemanniana ∇. Enquanto que $\frac{D}{dt}$ denota a derivada covariante ao longo de uma curva (diferenciável) parametrizada $\alpha(t)$ em M.

Definição 1.10. *Seja $\gamma : I \to M$ uma curva parametrizada. A curva γ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\frac{d\gamma}{dt} = 0$ no ponto t_0. Dizemos que γ é uma geodésica se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$.*

Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, temos $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = c$. De fato,

$$\frac{d}{dt}\Big\langle\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\Big\rangle = 2\Big\langle\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\Big\rangle = 0.$$

Então, o comprimento de arco s de γ, a partir de uma origem fixa, digamos $t = t_0$, é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \Big|\frac{d\gamma}{dt}\Big| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que a geodésica γ está normalizada.

A seguir o teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias.

Teorema 1.2. *Se X é um campo C^∞ num aberto V de uma variedade diferenciável M e $p \in V$ então existem um aberto $U \subset V$, $p \in U$, um número $\epsilon > 0$, e uma aplicação C^∞, $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to V$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $q \in U$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q, para cada $q \in U$. Isto é, $\frac{d}{dt}\varphi(t, q) = X(\varphi(t, q))$ e $\varphi(0, \cdot) = Id_U$.*

A curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ dada acima é chamada a curva integral de X em V. A aplicação $\varphi_t : U \to V$ dada por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ é chamada o fluxo de X em V.

Definição 1.11. *(Campo de Killing). Sejam M uma variedade riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $p \in M$, e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$ (U e φ são dados pelo Teorema 1.2). X é chamado um campo de Killing (ou uma isometria infinitesimal) se, para todo $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $\varphi_{t_0} : U \subset M \to \varphi_{t_0}(U)$ é uma isometria.*

Um campo de Killing também pode ser caracterizado por uma equação diferencial, a saber: X é de Killing se, e somente se,

$$\langle\nabla_Y X, Z\rangle + \langle\nabla_Z X, Y\rangle = 0, \tag{1.19}$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Para maiores detalhes, duas boas referências são [12] e [15]. Façamos um breve resumo dos fatos que nos interessa.

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo, o pull-back de um $(0,2)$-tensor T é um tensor do mesmo tipo que a cada ponto $p \in M$ associa

$$(f^*T)_p(X_p, Y_p) := T_{f(p)}(df_p(X_p), df_p(Y_p)).$$

Assim a derivada de Lie de T, com respeito ao campo X, é:

$$(\mathfrak{L}_X T)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* T_{\varphi_t(p)},$$

onde $\varphi_t : U \to V$ é o fluxo de X. Sua relação com o Colchete de Lie é obtida como aplicação da propriedade

$$(\mathfrak{L}_X T)(Y, Z) = \mathfrak{L}_X T(Y, Z) - T([X, Y], Z) - T(Y, [X, Z]).$$

Em particular, tomando $T = \langle\ ,\ \rangle$, teremos

$$(\mathfrak{L}_X \langle\ ,\ \rangle)(Y, Z) \quad = \quad \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_X \langle\ ,\ \rangle)_p(Y, Z) &= \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* \langle\ ,\ \rangle_{\varphi_t(p)}\Big)(Y, Z) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{[(\varphi_t^* \langle\ ,\ \rangle_{\varphi_t(p)})(Y, Z) - \langle\ ,\ \rangle_p(Y, Z)]}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\langle d\varphi_t|_p(Y), d\varphi_t|_p(Z)\rangle_{\varphi_t(p)} - \langle Y, Z\rangle_p].
\end{aligned}$$

Portanto, X é de Killing se, e somente se, vale (1.19).

1.4 Imersões Isométricas

Seja $\phi : M^2 \to \overline{M}^3$ uma imersão isométrica, isto é, ϕ é uma aplicação diferenciável e para todo $p \in M$, $d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}\overline{M}$ é injetiva, além disso, para todo $u, v \in T_pM$, $\langle u, v\rangle_p = \langle d\phi_p u, d\phi_p v\rangle_{\phi(p)}$. Além disso, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$, $p \in U$, tal que $\phi|_U : U \to \overline{M}$ é um mergulho. Isto é, localmente, ϕ é um mergulho. Por esta razão, identificaremos U com $\phi(U)$ e para todo $v \in T_pM$ com $d\phi_p v$.

Estas identificações serão utilizadas para estender, por exemplo, um campo local (definido em U) de vetores em M a um campo local (definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$. Tal extensão é sempre possível, se U for suficientemente pequena. Desta maneira, podemos considerar o complemento ortogonal $(T_pM)^\perp$ de T_pM em $T_p\overline{M}$, de modo que, para cada $p \in M$, temos a decomposição de $T_p\overline{M}$ em soma direta:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp.$$

Logo, para todo $v \in T_p\overline{M}$ podemos escrever

$$v = v^T + v^\perp,\ v^T \in T_pM,\ v^\perp \in (T_pM)^\perp.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e $v^\perp$ a componente normal de v.

Sejam X, Y campos locais de vetores em M, $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$, ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente. Então $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp$. Uma conta direta prova que a primeira parcela define (independentemente das extensões dos campos de vetores) uma conexão em M, então segue da unicidade da conexão riemanniana de M que

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T = \nabla_X Y.$$

Para analisarmos a segunda parcela, primeiro vamos notar que $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M, este não depende da escolha de extensões locais de X, Y, isto é, podemos considerar α como uma aplicação em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ tomando valores no espaço $\mathfrak{X}(M)^\perp$ dos campos de vetores normais a M. A aplicação α é $C^\infty(M)$-bilinear e simétrica, ela é conhecida por *segunda forma fundamental da imersão* ϕ. O caráter tensorial das conexões envolvidas na definição de α, implica no caráter tensorial da própria α. Além disso, observe que para $\nu \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$0 = X\langle \nu, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \nu, Y\rangle + \langle \nu, \overline{\nabla}_X Y\rangle = \langle (\overline{\nabla}_X \nu)^T, Y\rangle + \langle \nu, \alpha(X, Y)\rangle. \tag{1.20}$$

Assumindo que ν é unitário, vamos definir o operador $\mathcal{A}_\nu : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$\mathcal{A}_\nu X = -(\overline{\nabla}_X \nu)^T = -\overline{\nabla}_X \nu,$$

o qual, pela equação (1.20), satisfaz

$$\langle \mathcal{A}_\nu X, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), \nu\rangle. \tag{1.21}$$

O operador $\mathcal{A}_\nu$ é conhecido por *operador de Weingarten* ou *operador de forma da imersão* e por causa da estreita relação com α dada pela equação (1.21) é também chamado de *segunda forma fundamental da imersão* ϕ.

De acordo com a equação (1.21) $\mathcal{A}_\nu$ é simétrico, portanto convém considerarmos o seu traço. Para isso seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal em T_pM, definimos o vetor curvatura média $\mathbf{H}$ da imersão ϕ por

$$2\mathbf{H} = \alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2) = (\langle \alpha(e_1, e_1), \nu\rangle + \langle \alpha(e_2, e_2), \nu\rangle)\nu = tr(\mathcal{A}_\nu)\nu.$$

Segue que $\mathbf{H}$ não depende do referencial escolhido e $\mathbf{H} = H\nu$, onde H é a função curvatura média de ϕ dada por $2H = tr\mathcal{A}_\nu$.

Um estudo detalhado da segunda forma fundamental α de ϕ motiva as definições seguintes:

Definição 1.12. *Dizemos que ϕ é mínima em $p \in M$ quando $\boldsymbol{H}(p) = 0$ e que ϕ é uma imersão mínima quando é mínima em todos os pontos de M.*

Seja γ geodésica, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X$. Sejam N e $\bar{X}$ extensão locais em p de ν e X, respectivamente. Como α tem caráter tensorial, segue que

$$\langle \alpha(X, X), \nu\rangle = \langle \overline{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X} - \nabla_X X, N\rangle(p). \tag{1.22}$$

É imediato a partir da definição da segunda forma fundamental que, $\alpha(X, X)(p) = 0$ se, e somente se, $\overline{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X} = \nabla_X X$. O que motiva a próxima definição.

Definição 1.13. *A imersão ϕ é geodésica em $p \in M$ se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p (ou equivalentemente, se $\alpha(X, X)(p) = 0$ para todo $X \in T_pM$). A imersão é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.*

No caso em que $\overline{M} = \mathbb{R}^3$, existe uma interpretação geométrica de $\mathcal{A}_\nu$, a saber: sejam $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^3$ e N uma extensão local de ν, tal que $|N| = 1$. Defina a aplicação normal de Gauss $g : M^2 \to \mathbb{S}^2$, por: 1º) transladando a origem do campo N para a origem de $\mathbb{R}^3$; 2º) $g(q) =$ ponto final do transladado de $N(q)$. Como $T_{g(p)}\mathbb{S}^2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle w, \vec{g}(p)\rangle = 0\}$, podemos identificar $T_qM \approx T_{g(q)}\mathbb{S}^2$. Assim, para cada $q \in M$, a aplicação $dg_q : T_qM \to T_qM$ é calculada como segue

$$dg_q(v) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \overline{\nabla}_v N = (\overline{\nabla}_v N)^T = -\mathcal{A}_\nu(v),$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva diferenciável, com $c(0) = q$ e $c'(0) = v$. Daí, observamos que $-\mathcal{A}_\nu$ é a diferencial da aplicação normal de Gauss.

Se R e $\overline{R}$ são os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente, relembremos que a *Equação de Gauss* é dada por

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z)\rangle.$$

Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)X, Y\rangle$ e $\overline{K}(X,Y) = \langle \overline{R}(X,Y)X,Y\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$, a equação de Gauss torna-se

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle - \langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y)\rangle,$$

ou melhor,

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + det\mathcal{A}_\nu. \tag{1.23}$$

Vamos denotar $\mathbb{R}^3_\sigma$, $\sigma \in \{0,1\}$, o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ dotado de produto interno $\langle\, ,\, \rangle$ dado por

$$\langle\, v, w\,\rangle = \sum_{i=1}^{2} v_i w_i + (-1)^\sigma v_3 w_3,$$

onde $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ são os elementos de $\mathbb{R}^3$. Com essa configuração, a esfera padrão é definida por

$$\mathbb{S}^2(1) = \{p \in \mathbb{R}^3_0 : \langle p, p\rangle = 1\}.$$

Enquanto que, o espaço hiperbólico é dado por

$$\mathbb{H}^2(-1) = \{p \in \mathbb{R}^3_1 : \langle p, p\rangle = -1, p_3 \geq 1\},$$

é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^3_1$, i.e., restrito a $\mathbb{H}^2(-1)$ o produto interno $\langle\, ,\, \rangle$ é uma métrica riemanniana. Segue de (1.23) que a curvatura seccional de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é constante igual a 1, enquanto que a curvatura de $\mathbb{H}^2$ é -1.

Agora, vamos notar que a componente normal de $\overline{\nabla}_X \nu$ que é chamada conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão, satisfaz

$$\nabla^\perp_X \nu = (\overline{\nabla}_X \nu)^\perp = \overline{\nabla}_X \nu - (\overline{\nabla}_X \nu)^T = \overline{\nabla}_X \nu + \mathcal{A}_\nu(X).$$

A conexão normal $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão afim, em verdade, ela é $C^\infty(M)$-linear em X, aditiva em ν, e

$$\nabla^\perp_X (f\nu) = f\nabla^\perp_X \nu + X(f)\nu, \quad f \in C^\infty(M).$$

Considerando a componente normal de $\overline{R}(X,Y)Z$, obtemos a *Equação de Codazzi* a saber:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z) - (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z).$$

1.5 Submersões Riemannianas

Seja $\Pi : N^n \to M^m$ uma submersão, isto é, Π é aplicação suave que em cada ponto $q \in N$, $d\Pi_q : T_qN \to T_{\Pi(q)}M$ é sobrejetiva, ou seja, em cada ponto $q \in N$, $d\Pi_q : T_qN \to T_{\Pi(q)}M$ tem posto (dim $d\Pi_q(T_qN)$) constante igual a m.

Exemplo 1.4. *Sejam $M_1, \ldots, M_k$ variedades diferenciáveis, cada projeção $\Pi_i : M_1 \times \ldots \times M_k \to M_i$ é uma submersão, onde $i = 1, \ldots, k$. Em particular, a projeção $\Pi : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^m$ nas m primeiras coordenadas é uma submersão.*

Segue da Forma Local das Submersões que $\Pi^{-1}(\Pi(q))$ é uma subvariedade diferenciável mergulhada de N cuja codimensão é igual a dimensão de M, para todo $q \in N$. Além disso, $Ker(d\Pi_q) = T_q\Pi^{-1}(\Pi(q))$. Denotamos $\mathcal{F} = \Pi^{-1}(\Pi(q))$.

Desde que $d\Pi_q : T_qN \to T_{\Pi(q)}M$ é sobrejetiva, sua restrição a $T_q\mathcal{F}^\perp$ induz um isomorfismo

$$d\Pi_q : T_q\mathcal{F}^\perp \to T_{\Pi(q)}M.$$

Na situação acima, N é o espaço total, M a base e $\mathcal{F}$ uma fibra de Π.

Um vetor é vertical se for tangente a uma fibra, e um campo vertical é constituído por vetores verticais. Um vetor ortogonal a uma fibra é horizontal, e um campo horizontal é constituído por vetores horizontais.

Fixado $q \in N$, denotamos por $\mathcal{H}_q$ e $\mathcal{V}_q$ os conjuntos dos vetores tangentes a N que são, respectivamente, horizontais e verticais. É imediato que $\mathcal{H}_q$ e $\mathcal{V}_q$ são subespaços vetoriais de T_qN e temos soma direta ortogonal

$$T_qN = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q.$$

Se $\mathcal{F} = \Pi^{-1}(\Pi(q))$, então $\mathcal{V}_q = T_q\mathcal{F}$.

Se $Y_q \in T_qN$, podemos escrever $Y_q = Y_q^{\mathcal{H}} + Y_q^{\mathcal{V}}$, de tal forma que $Y_q^{\mathcal{H}}$ e $Y_q^{\mathcal{V}}$ são as projeções ortogonais de Y_q sobre $\mathcal{H}_q$ e $\mathcal{V}_q$, respectivamente.

Da mesma forma, se $Y \in \mathfrak{X}(N)$, os campos horizontal e vertical são denotados respectivamente por $Y^{\mathcal{H}}$ e $Y^{\mathcal{V}}$, onde vale para cada $q \in N$,

$$Y_q = Y_q^{\mathcal{H}} + Y_q^{\mathcal{V}}.$$

Um campo vetorial $\overline{X}$ em N é Π-relacionado a um campo X em M, se

$$d\Pi_q(\overline{X}_q) = X_{\Pi(q)}$$

para todo $q \in N$; neste caso, dizemos também que $\overline{X}$ e X são Π-relacionados.

Em particular, um campo em N é vertical se, e somente se, for Π-relacionado ao campo nulo em M, e um campo horizontal $\overline{X}$ em N é dito básico (ou levantamento horizontal de X) se for Π-relacionado a um campo X em M.

Proposição 1.6. *Se X é um campo vetorial em M, então existe um único campo vetorial básico $\overline{X}$ em N, tal que $\overline{X}$ é Π-relacionado a X.*

Demonstração. (Existência). Para cada ponto $q \in N$, $d\Pi_q : \mathcal{H}_q \to T_{\Pi(q)}M$ é um isomorfismo, então dado $X_{\Pi(q)} \in T_{\Pi(q)}M$, existe um único vetor tangente $\overline{X}_q \in \mathcal{H}_q$, tal que $d\Pi_q(\overline{X}_q) = X_{\Pi(q)}$. Precisamos mostrar a suavidade do tal campo $\overline{X}$, exprimindo-o em um sistema de coordenadas locais.

Escrevendo $n = m + k$, fixando um ponto q em N e utilizando o Teorema do Posto [12], temos a existência de cartas locais (U, φ) para N em torno de q em N e (V, ψ) para M em torno de $\Pi(q)$ em M, tais que a expressão local de Π é

$$(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}) \mapsto (x_1, \ldots, x_m).$$

Sejam $\{\overline{\partial}_1, \ldots, \overline{\partial}_{m+k}\}$ e $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ bases coordenadas associadas a N e a M, respectivamente. Então, $\overline{\partial}_i$ e ∂_i são Π-relacionados, para $1 \leq i \leq m$.

Escrevendo $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \partial_i$ em $\Pi(U)$, onde $a_i \in C^\infty(\Pi(U))$, teremos

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{m} (a_i \circ \Pi)\overline{\partial}_i + \sum_{j=m+1}^{m+k} b_j \overline{\partial}_j$$

em U, com $(a_i \circ \Pi), b_j \in C^\infty(U)$.

(Unicidade). Suponha que $\overline{\overline{X}}$ seja um outro campo vetorial básico em N do campo X em M, então para todo $q \in N$,

$$d\Pi_q(\overline{\overline{X}}_q) = X_{\Pi(q)} = d\Pi_q(\overline{X}_q).$$

Como $d\Pi_q$ é isomorfismo, $\overline{\overline{X}}_q = \overline{X}_q$, para todo $q \in N$. $\square$

Vejamos uma caracterização e uma propriedade envolvendo o colchete de Lie dos campos Π-relacionados:

Lema 1.1. *Sejam $\Pi : N \to M$ e $f : M \to \mathbb{R}$ suaves, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$, Y e Z são Π-relacionados se, e somente se,*

$$Y(f \circ \Pi) = (Zf) \circ \Pi.$$

Demonstração. Suponha que Y e Z são Π-relacionados, isto é,

$$d\Pi(Y) = Z \circ \Pi.$$

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave, então

$$Y(f \circ \Pi) = d(f \circ \Pi)(Y) = df(d\Pi(Y)) = df(Z \circ \Pi) = (Zf) \circ \Pi.$$

Reciprocamente, suponha que $Y(f \circ \Pi) = (Zf) \circ \Pi$, onde $f \in C^\infty(M)$, então

$$(d\Pi(Y))f = df(d\Pi(Y)) = d(f \circ \Pi)(Y) = Y(f \circ \Pi) = (Zf) \circ \Pi = (Z \circ \Pi)f.$$

□

Lema 1.2. *Sejam $\Pi : N \to M$ suave, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ e $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$, se para $i = 1, 2$, Y_i, Z_i são Π-relacionados, então $[Y_1, Y_2]$ e $[Z_1, Z_2]$ são Π-relacionados.*

Demonstração. De acordo com o Lema 1.1, dada uma função $f \in C^\infty(M)$, precisamos mostrar que

$$[Y_1, Y_2](f \circ \Pi) = ([Z_1, Z_2]f) \circ \Pi.$$

Para $i = 1, 2$, Y_i, Z_i Π-relacionados, segue-se que

$$Y_1Y_2(f \circ \Pi) = Y_1((Z_2f) \circ \Pi) = (Z_1Z_2f) \circ \Pi,$$

$$Y_2Y_1(f \circ \Pi) = Y_2((Z_1f) \circ \Pi) = (Z_2Z_1f) \circ \Pi.$$

Então,

$$\begin{aligned}
[Y_1, Y_2](f \circ \Pi) &= (Y_1Y_2 - Y_2Y_1)(f \circ \Pi) = Y_1Y_2(f \circ \Pi) - Y_2Y_1(f \circ \Pi) \\
&= (Z_1Z_2f) \circ \Pi - (Z_2Z_1f) \circ \Pi = (Z_1Z_2f - Z_2Z_1f) \circ \Pi \\
&= ((Z_1Z_2 - Z_2Z_1)f) \circ \Pi = ([Z_1, Z_2]f) \circ \Pi.
\end{aligned}$$

Logo, $[Y_1, Y_2]$ e $[Z_1, Z_2]$ são Π-relacionados. □

Observação 1.3. *Note que nas hipóteses do Lema 1.1 e do Lema 1.2 a aplicação Π não precisa ser submersão, basta que Π seja suave.*

Vamos denotar por $\langle\, , \rangle$ as métricas riemannianas de N e M, $\overline{\nabla}$ e ∇ as respectivas conexões riemannianas de N e M. Nosso objetivo é relacionar a curvatura seccional da N com a curvatura seccional da M, para isso, vamos definir submersão riemanniana e estudar suas propriedades.

Definição 1.14 (Submersão Riemanniana). *A submersão $\Pi : N \to M$ é riemanniana se a diferencial $d\Pi_q : T_qN \to T_{\Pi(q)}M$ preserva comprimento de vetores horizontais, isto é,*

$$\text{para todo } q \in N, \ v \in \mathcal{H}_q, \ \langle v, v\rangle_q = \langle d\Pi_q v, d\Pi_q v\rangle_{\Pi(q)}.$$

Observação 1.4. *Note que a Definição 1.14 equivale à*

$$\text{para todo } q \in N, \ v_1, v_2 \in \mathcal{H}_q, \ \langle v_1, v_2\rangle_q = \langle d\Pi_q v_1, d\Pi_q v_2\rangle_{\Pi(q)}.$$

Isto é, a submersão $\Pi : N \to M$ é riemanniana se a diferencial restrita à $\mathcal{H}_q$, $d\Pi_q : \mathcal{H}_q \to T_{\Pi(q)}M$ é uma isometria, para todo $q \in N$.

A partir da Observação 1.4, dados X_1, X_2 campos de vetores em M, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ seus levantamentos horizontais (campos básicos) em N, tem-se que

$$\langle \overline{X}_1, \overline{X}_2\rangle = \langle X_1, X_2\rangle \circ \Pi. \tag{1.24}$$

Proposição 1.7. *Sejam V um campo de vetores vertical em N e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ com respectivos levantamentos horizontais (campos básicos) $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$. Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões riemannianas de N e M, respectivamente. Então:*

(a) $[V, \overline{X}]$ *é vertical;*

(b) $(\mathfrak{L}_V\langle \ , \ \rangle)(\overline{X}, \overline{Y}) = V\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle = 0$*;*

(c) $\langle [\overline{X}, \overline{Y}], V\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, V\rangle = -2\langle \overline{\nabla}_V \overline{X}, \overline{Y}\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} V, \overline{X}\rangle$*;*

(d) $[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}}$ *é Π-relacionada a $[X, Y]$;*

(e) $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{H}}$ *é Π-relacionada a $\nabla_X Y$;*

(f) $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}$*, onde $[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}$ é a componente vertical de $[\overline{X}, \overline{Y}]$.*

Demonstração. (a) Como $\overline{X}$ é Π-relacionado a X e V é Π-relacionado ao campo nulo 0 em M, o Lema 1.2 garante que

$$d\Pi([V, \overline{X}]) = [d\Pi(V), d\Pi(\overline{X})] = [0, X \circ \Pi] = 0.$$

(b) Usando o item (a), segue que:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_V\langle \ , \ \rangle)(\overline{X}, \overline{Y}) &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} V, \overline{Y}\rangle + \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} V, \overline{X}\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_V \overline{X}, \overline{Y}\rangle + \langle [\overline{X}, V], \overline{Y}\rangle + \langle \overline{\nabla}_V \overline{Y}, \overline{X}\rangle + \langle [\overline{Y}, V], \overline{X}\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_V \overline{X}, \overline{Y}\rangle + \langle \overline{\nabla}_V \overline{Y}, \overline{X}\rangle \\
&= V\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle.
\end{aligned}$$

Por (1.24) e pelo Lema 1.1, temos que

$$V\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle \;=\; V(\langle X,Y\rangle\circ\Pi)=(0\langle X,Y\rangle)\circ\Pi=0.$$

Logo,

$$(\mathfrak{L}_V\langle\ ,\ \rangle)(\overline{X},\overline{Y})=V\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle=0.$$

(c) Segue-se da Fórmula de Kozsul (o leitor pode encontrar nas referências [3, 4, 12, 15, 17]) e dos itens (a) e (b) que

$$\begin{aligned}2\langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},V\rangle &= \overline{Y}\langle\overline{X},V\rangle+\overline{X}\langle\overline{Y},V\rangle-V\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle+\langle[\overline{X},\overline{Y}],V\rangle+\langle[V,\overline{Y}],\overline{X}\rangle\\ &- \langle[\overline{X},V],\overline{Y}\rangle=\langle[\overline{X},\overline{Y}],V\rangle.\end{aligned}$$

Analogamente, prova-se o restante das igualdades

$$\begin{aligned}2\langle\overline{\nabla}_V\overline{X},\overline{Y}\rangle &= -\langle[\overline{X},\overline{Y}],V\rangle,\\ 2\langle\overline{\nabla}_{\overline{Y}}V,\overline{X}\rangle &= \langle[\overline{X},\overline{Y}],V\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle[\overline{X},\overline{Y}],V\rangle=2\langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},V\rangle=-2\langle\overline{\nabla}_V\overline{X},\overline{Y}\rangle=2\langle\overline{\nabla}_{\overline{Y}}V,\overline{X}\rangle.$$

(d) O Lema 1.2 garante que $[\overline{X},\overline{Y}]$ e $[X,Y]$ são Π-relacionados, então

$$d\Pi([\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{H}})=d\Pi([\overline{X},\overline{Y}])-d\Pi([\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}})=[X\circ\Pi,Y\circ\Pi]-0=[X,Y]\circ\Pi.$$

(e) Seque-se da Fórmula de Kozsul, da (1.24), do Lema 1.1 e do item (d) que

$$\begin{aligned}2\langle(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{H}},\overline{Z}\rangle &= 2\langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}\rangle\\ &= \overline{Y}\langle\overline{X},\overline{Z}\rangle+\overline{X}\langle\overline{Y},\overline{Z}\rangle-\overline{Z}\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle\\ &\quad+\langle[\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}\rangle+\langle[\overline{Z},\overline{Y}],\overline{X}\rangle-\langle[\overline{X},\overline{Z}],\overline{Y}\rangle\\ &= \overline{Y}(\langle X,Z\rangle\circ\Pi)+\overline{X}(\langle Y,Z\rangle\circ\Pi)-\overline{Z}(\langle X,Y\rangle\circ\Pi)\\ &\quad+\langle[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{H}},\overline{Z}\rangle+\langle[\overline{Z},\overline{Y}]^{\mathcal{H}},\overline{X}\rangle-\langle[\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{H}},\overline{Y}\rangle\\ &= (Y\langle X,Z\rangle)\circ\Pi+(X\langle Y,Z\rangle)\circ\Pi-(Z\langle X,Y\rangle)\circ\Pi\\ &\quad+\langle[X,Y],Z\rangle\circ\Pi+\langle[Z,Y],X\rangle\circ\Pi-\langle[X,Z],Y\rangle\circ\Pi\\ &= 2\langle\nabla_XY,Z\rangle\circ\Pi=2\langle\overline{\nabla_XY},\overline{Z}\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{H}}=\overline{\nabla_XY}.$$

Sabendo que $\overline{\nabla_XY}$ é levantamento horizontal de ∇_XY, isto é, $\overline{\nabla_XY}$ e ∇_XY são Π-relacionados, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{H}} \text{ é } \Pi\text{-relacionado a } \nabla_X Y.$$

(f) Segue-se do item (c) que

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, V\rangle = \frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}], V\rangle,$$

então

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}.$$

Com isso, $\frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}$ é a componente vertical de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ e o item (e) garante que

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{H}} = \overline{\nabla_X Y}.$$

Assim,

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}.$$

$\square$

Proposição 1.8 (B. O'Neill e A. Grey)**.** *Seja R o tensor curvatura de M e $\overline{R}$ o tensor curvatura de N, então*

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle \overline{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\rangle + \frac{3}{4}\|[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}}\|^2.$$

Demonstração. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}$ seus levantamentos horizontais (campos básicos) em N, então

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z} + \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z},\overline{W}\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z},\overline{W}\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z},\overline{W}\rangle + \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z},\overline{W}\rangle.
\end{aligned}$$

Os termos do tensor curvatura $\overline{R}$ de N são calculados como seguem abaixo:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z},\overline{W}\rangle &= \Big\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\Big(\overline{\nabla_X Z} + \frac{1}{2}[\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{V}}\Big),\overline{W}\Big\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla_X Z},\overline{W}\rangle + \frac{1}{2}\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}[\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{V}},\overline{W}\rangle \\
&= \Big\langle \overline{\nabla_Y\nabla_X Z} + \frac{1}{2}[\overline{Y},\overline{\nabla_X Z}]^{\mathcal{V}},\overline{W}\Big\rangle + \frac{1}{2}\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}[\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{V}},\overline{W}\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla_Y\nabla_X Z},\overline{W}\rangle + \frac{1}{2}\langle [\overline{Y},\overline{\nabla_X Z}]^{\mathcal{V}},\overline{W}\rangle + \frac{1}{4}\langle [\overline{W},\overline{Y}],[\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{V}}\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla_Y\nabla_X Z},\overline{W}\rangle + \frac{1}{4}\langle [\overline{W},\overline{Y}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{V}}\rangle \\
&= \langle \nabla_Y\nabla_X Z, W\rangle + \frac{1}{4}\langle [\overline{W},\overline{Y}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{V}}\rangle,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle &= \Big\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \Big(\overline{\nabla_Y Z} + \frac{1}{2}[\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \Big), \overline{W} \Big\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla_Y Z}, \overline{W} \rangle + \frac{1}{2} \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, \overline{W} \rangle \\
&= \Big\langle \overline{\nabla_X \nabla_Y Z} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{\nabla_Y Z}]^{\mathcal{V}}, \overline{W} \Big\rangle + \frac{1}{2} \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, \overline{W} \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla_X \nabla_Y Z}, \overline{W} \rangle + \frac{1}{2} \langle [\overline{X}, \overline{\nabla_Y Z}]^{\mathcal{V}}, \overline{W} \rangle + \frac{1}{4} \langle [\overline{W}, \overline{X}], [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla_X \nabla_Y Z}, \overline{W} \rangle + \frac{1}{4} \langle [\overline{W}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle + \frac{1}{4} \langle [\overline{W}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \rangle
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{Z}, \overline{W} \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle + \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla_{[X,Y]} Z}, \overline{W} \rangle - \frac{1}{2} \langle [\overline{Z}, \overline{W}], [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle + \frac{1}{2} \langle [[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, \overline{W} \rangle \\
&= \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle - \frac{1}{2} \langle [\overline{Z}, \overline{W}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{R}(\overline{X}, \overline{Y}) \overline{Z}, \overline{W} \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z} - \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z} + \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{Z}, \overline{W} \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle + \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{Z}, \overline{W} \rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle + \frac{1}{4} \langle [\overline{W}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle \\
&\quad - \frac{1}{4} \langle [\overline{W}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \rangle + \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle - \frac{1}{2} \langle [\overline{Z}, \overline{W}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&= \langle R(X,Y)Z, W \rangle + \frac{1}{4} \langle [\overline{W}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&\quad - \frac{1}{4} \langle [\overline{W}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}} \rangle - \frac{1}{2} \langle [\overline{Z}, \overline{W}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle .
\end{aligned}
$$

Agora tome $Z = X$ e $W = Y$, então

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{R}(\overline{X}, \overline{Y}) \overline{X}, \overline{Y} \rangle &= \langle R(X,Y)X, Y \rangle + \frac{1}{4} \langle [\overline{Y}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{X}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&\quad - \frac{1}{4} \langle [\overline{Y}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{Y}, \overline{X}]^{\mathcal{V}} \rangle - \frac{1}{2} \langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&= \langle R(X,Y)X, Y \rangle - \frac{1}{4} \langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle - \frac{1}{2} \langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&= \langle R(X,Y)X, Y \rangle - \frac{3}{4} \langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle \\
&= \langle R(X,Y)X, Y \rangle - \frac{3}{4} \| [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \|^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\langle R(X,Y)X, Y \rangle = \langle \overline{R}(\overline{X}, \overline{Y}) \overline{X}, \overline{Y} \rangle + \frac{3}{4} \| [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \|^2 .
$$

□

Definição 1.15 (Submersão Killing). *Uma submersão riemanniana* $\Pi : N^3 \to M^2$ *é chamada Killing se, e somente se, cada fibra é uma geodésica completa; e as fibras da fibração são curvas integrais de um campo de vetores unitário Killing em* N^3.

Capítulo 2

Variedades Homogêneas Tridimensionais

2.1 Estudando a variedade $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Relembremos que uma variedade riemanniana homogênea M é caracterizada pela seguinte propriedade: dados $p, q \in M$ existe uma isometria de M que leva p em q.

Nesta seção vamos considerar uma variedade riemanniana homogênea $\mathbb{N}(\kappa, \tau)$ de dimensão três com grupo de isometrias de dimensão 4. Tal variedade é uma fibração riemanniana sobre um espaço forma $\mathbb{M}^2(\kappa)$ de dimensão 2 simplesmente conexo de curvatura seccional constante κ, isto é, a menos de isometria, $\mathbb{M}^2(\kappa)$ é: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2(\kappa)$ ou $\mathbb{H}^2(\kappa)$, conforme κ seja zero, positivo ou negativo, respectivamente. Mais precisamente, existe uma submersão riemanniana $\Pi : \mathbb{N}(\kappa, \tau) \to \mathbb{M}^2(\kappa)$ que é também uma submersão Killing, ou seja, cada fibra da fibração é uma geodésica completa e elas são curvas integrais de um campo de vetores unitários Killing ξ sobre $\mathbb{N}(\kappa, \tau)$ que é vertical com respeito a Π. A curvatura do fibrado é τ.

Se $\mathbb{N}(\kappa, \tau)$ é simplesmente conexa, vamos denotar $\mathbb{N}(\kappa, \tau) = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, no qual são cinco variedades riemannianas, dadas abaixo:

Denotando o espaço de Heisenberg por $Nil_3(\kappa, \tau)$, as esferas de Berger por $\mathbb{S}^3_{\kappa,\tau}$ e o recobrimento universal do grupo de Lie $PSl(2,\mathbb{R})(\kappa,\tau)$ por $\widetilde{PSl(2,\mathbb{R})}(\kappa,\tau)$ teremos:

$$\mathbb{E}(\kappa,\tau) = \begin{cases} \mathbb{S}^2(\kappa)\times\mathbb{R} & \text{Se} \quad \kappa > 0, \qquad \tau = 0 \\ \mathbb{H}^2(\kappa)\times\mathbb{R} & \text{Se} \quad \kappa < 0, \qquad \tau = 0 \\ Nil_3(\kappa,\tau) & \text{Se} \quad \kappa = 0, \qquad \tau \neq 0 \\ \widetilde{PSl(2,\mathbb{R})}(\kappa,\tau) & \text{Se} \quad \kappa < 0, \qquad \tau \neq 0 \\ \mathbb{S}^3_{\kappa,\tau} & \text{Se} \quad \kappa > 0, \qquad \tau \neq 0. \end{cases}$$

Para maiores detalhes sobre o estudo da geometria desses objetos, o leitor pode consultar o artigo de Daniel [7] e a tese de Torralbo [20].

Se $\mathbb{N}(\kappa,\tau)$ não é simplesmente conexa, $\mathbb{N}(\kappa,\tau)$ é dado por outros espaços homogêneos tridimensionais com grupo de isometrias de dimensão 4, sendo eles:

- $\mathbb{M}^2(\kappa)\times\mathbb{S}^1$, se $\kappa \neq 0$ e $\tau = 0$;

- $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3_{\kappa,\tau}/\mathbb{Z}_2$ (espaço projetivo real);

- $L_n = \mathbb{S}^3_{\kappa,\tau}/\mathbb{Z}_n$, $n \geq 3$ (espaço lenticular);

- $PSl(2,\mathbb{R})(\kappa,\tau)/\mathbb{Z}_2$;

- $PSl(2,\mathbb{R})(\kappa,\tau)/\mathbb{Z}_n$, $n \geq 3$.

Para mais informações sobre esses espaços, o leitor pode consultar [20].

Note que podemos assumir que $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ está orientada. Denotando por $\overline{\nabla}$ a sua conexão riemanniana, teremos

$$\overline{\nabla}_V\xi = \tau(V\wedge\xi), \quad \forall\ V \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa,\tau)). \tag{2.1}$$

Observemos que esta equação está de acordo com a caracterização (1.19) sobre ξ ser um campo de Killing, pois

$$\langle\overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle + \langle\overline{\nabla}_Y\xi, X\rangle = \tau(\langle X\wedge\xi, Y\rangle + \langle Y\wedge\xi, X\rangle) = 0,$$

onde $\wedge$ é o produto vetorial em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$, isto é, para $X(p), Y(p) \in T_p\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ o vetor $X(p)\wedge Y(p)$ é o produto vetorial em $T_p\mathbb{E}(\kappa,\tau)$.

Para provar a equação (2.1) vamos primeiramente observar que: sendo Π uma submersão, segue que a dimensão da fibra $\Pi^{-1}(p)$ é um, então podemos encontrar um referencial ortonormal local $\{E_1, E_2\}$ em $(T\Pi^{-1}(p))^\perp$, de modo que, para cada $q \in \Pi^{-1}(p)$, $\{E_1, E_2, E_3\}$ seja a base positiva de $T_q\mathbb{E}(\kappa,\tau)$, com $E_3 = E_1\wedge E_2 = \xi$.

Suponha que $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ não é a variedade produto $\mathbb{M}^2(\kappa)\times\mathbb{R}$.

Os símbolos de Christoffel de $\overline{\nabla}$ são dados por

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k}=\overline{\Gamma}_{ij}^{l}\delta_{lk}=\langle\overline{\Gamma}_{ij}^{l}E_l,E_k\rangle=\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_j,E_k\rangle=-\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_k,E_j\rangle=-\overline{\Gamma}_{ik}^{j}.$$

Além disso, é imediato que $\overline{\Gamma}_{ij}^{j}=0$, para todo $i,j=1,2,3$. Como E_3 é Killing, então $\overline{\Gamma}_{i3}^{i}=0$, $\overline{\Gamma}_{3i}^{3}=-\overline{\Gamma}_{33}^{i}=-\langle\overline{\nabla}_{E_3}E_3,E_i\rangle=\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_3,E_3\rangle=0$ e $\overline{\Gamma}_{23}^{1}+\overline{\Gamma}_{13}^{2}=\langle\overline{\nabla}_{E_2}E_3,E_1\rangle+\langle\overline{\nabla}_{E_1}E_3,E_2\rangle=0$.

Observe que $\overline{\nabla}_{E_2}E_3-[E_2,E_3]=\overline{\nabla}_{E_3}E_2$. Defina

$$\tau:=\langle\overline{\nabla}_{E_2}E_3,E_1\rangle\quad\text{e}\quad\sigma:=\langle[E_2,E_3],E_1\rangle.$$

Assim,

$$\overline{\Gamma}_{32}^{1}=\langle\overline{\nabla}_{E_3}E_2,E_1\rangle=\langle\overline{\nabla}_{E_2}E_3,E_1\rangle-\langle[E_2,E_3],E_1\rangle=\tau-\sigma.$$

Resumindo, já temos

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{j}=\overline{\Gamma}_{i3}^{i}=0,\ \overline{\Gamma}_{3i}^{3}=-\overline{\Gamma}_{33}^{i}=\overline{\Gamma}_{i3}^{3}=0,\ \overline{\Gamma}_{12}^{3}=-\overline{\Gamma}_{13}^{2}=\overline{\Gamma}_{23}^{1}=-\overline{\Gamma}_{21}^{3}=:\tau,\ -\overline{\Gamma}_{31}^{2}=\overline{\Gamma}_{32}^{1}=\tau-\sigma,$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned}
[E_2,E_3] &= (\overline{\Gamma}_{23}^{k}-\overline{\Gamma}_{32}^{k})E_k=(\overline{\Gamma}_{23}^{1}-\overline{\Gamma}_{32}^{1})E_1=(\tau-(\tau-\sigma))E_1=\sigma E_1,\\
[E_3,E_1] &= (\overline{\Gamma}_{31}^{k}-\overline{\Gamma}_{13}^{k})E_k=(\overline{\Gamma}_{31}^{2}-\overline{\Gamma}_{13}^{2})E_2=(\sigma-\tau+\tau)E_2=\sigma E_2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, o fato de $\{E_1,E_2,E_3\}$ ser a base positiva de $T_q\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ implica que $E_2\wedge E_3=E_1$ e $E_3\wedge E_1=E_2$. Donde,

$$\begin{aligned}
\sigma(E_2\wedge E_3) &= \sigma E_1=[E_2,E_3]=\overline{\nabla}_{E_2}E_3-\overline{\nabla}_{E_3}E_2=\overline{\nabla}_{E_2}E_3-\overline{\Gamma}_{32}^{1}E_1\\
&= \overline{\nabla}_{E_2}E_3-(\tau-\sigma)E_1=\overline{\nabla}_{E_2}E_3-(\tau-\sigma)(E_2\wedge E_3).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\overline{\nabla}_{E_2}E_3=\tau(E_2\wedge E_3).$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\sigma(E_1\wedge E_3) &= -\sigma E_2=-[E_3,E_1]=[E_1,E_3]=\overline{\nabla}_{E_1}E_3-\overline{\nabla}_{E_3}E_1\\
&= \overline{\nabla}_{E_1}E_3-\overline{\Gamma}_{31}^{2}E_2=\overline{\nabla}_{E_1}E_3+(\tau-\sigma)E_2\\
&= \overline{\nabla}_{E_1}E_3-(\tau-\sigma)(E_1\wedge E_3).
\end{aligned}$$

Logo

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_3 = \tau(E_1 \wedge E_3).$$

Além disso,

$$\overline{\nabla}_{E_3}E_3 = \overline{\nabla}_{\xi}\xi = 0,$$

pois ξ é Killing. Para qualquer campo de vetores $V = \alpha^i E_i$ ($\alpha^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$), temos que

$$\overline{\nabla}_V \xi \;=\; \alpha^i \overline{\nabla}_{E_i}\xi = \alpha^i \tau(E_i \wedge \xi) = \tau\big(\alpha^i E_i \wedge \xi\big) = \tau(V \wedge \xi).$$

Como havíamos afirmado.

Agora vamos provar que τ e σ são constantes. Vejamos: Primeiramente note que

$$\begin{aligned}
\tau &= \overline{\Gamma}_{12}^{3} = \langle \overline{\nabla}_{E_1}E_2, E_3\rangle = \langle [E_1, E_2] + \overline{\nabla}_{E_2}E_1, E_3\rangle \\
&= \langle [E_1, E_2], E_3\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_2}E_1, E_3\rangle = \langle [E_1, E_2], E_3\rangle + \overline{\Gamma}_{21}^{3} \\
&= \langle [E_1, E_2], E_3\rangle - \tau.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle [E_1, E_2], E_3\rangle = 2\tau.$$

Seja φ_t o fluxo de E_3 (portanto uma isometria de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$), tal que $\varphi_t(p) = q$. Assim,

$$\begin{aligned}
2\tau(q) &= \langle [E_1, E_2], E_3\rangle_q \\
&= \langle [E_1, E_2]^{\mathcal{V}}, E_3\rangle_q \\
&= \langle d\varphi_t^{-1}|_q [E_1, E_2]^{\mathcal{V}}, d\varphi_t^{-1}|_q E_3\rangle_p \\
&= \langle [E_1, E_2]^{\mathcal{V}}, E_3\rangle_p \\
&= \langle [E_1, E_2], E_3\rangle_p \\
&= 2\tau(p).
\end{aligned}$$

Logo, τ é constante.

Sabendo que para $\tau \neq 0$, os espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ são o grupo de Heisenberg $Nil_3(\kappa, \tau)$, as esferas de Berger $\mathbb{S}^3_{\kappa,\tau}$ e o recobrimento universal do grupo especial linear $\widetilde{PSl(2, \mathbb{R})}(\kappa, \tau)$. Então, nessas geometrias as componentes do colchete $[E_1, E_2]$ no referencial ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ são:

$$-\overline{\Gamma}_{11}^{2} = \overline{\Gamma}_{12}^{1} = \langle [E_1, E_2], E_1\rangle = 0 \quad \text{e} \quad -\overline{\Gamma}_{22}^{1} = \overline{\Gamma}_{21}^{2} = \langle [E_2, E_1], E_2\rangle = 0.$$

Portanto,

$$[E_1, E_2] \ = \ (\overline{\Gamma}_{12}^k - \overline{\Gamma}_{21}^k)E_k = (\overline{\Gamma}_{12}^3 - \overline{\Gamma}_{21}^3)E_3 = 2\tau E_3. \tag{2.2}$$

Como $\overline{\Gamma}_{11}^1$ e $\overline{\Gamma}_{11}^3$ são ambos nulos, segue que

$$\langle \overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_1}E_1, E_2\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_2}(\overline{\Gamma}_{11}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{11}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{11}^3E_3), E_2\rangle = 0.$$

Além disso, sabendo que $\overline{\Gamma}_{21}^1 = 0$, $\overline{\Gamma}_{21}^2 = 0$ e $\overline{\Gamma}_{21}^3 = -\tau$, teremos

$$\langle \overline{\nabla}_{E_1}\overline{\nabla}_{E_2}E_1, E_2\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_1}(\overline{\Gamma}_{21}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{21}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{21}^3E_3), E_2\rangle = \tau^2.$$

Denotando por $\overline{R}$ o tensor curvatura de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Segue das duas últimas equações e de (2.2) que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_1}E_1, E_2\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_1}\overline{\nabla}_{E_2}E_1, E_2\rangle + \langle \overline{\nabla}_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\rangle \\
&= -\tau^2 + \langle \overline{\nabla}_{2\tau E_3}E_1, E_2\rangle \\
&= -\tau^2 + 2\tau\langle \overline{\nabla}_{E_3}E_1, E_2\rangle \\
&= -\tau^2 + 2\tau\overline{\Gamma}_{31}^2 \\
&= -\tau^2 + 2\tau(\sigma - \tau) \\
&= -3\tau^2 + 2\sigma\tau. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Este resultado será útil para determinarmos a curvatura κ da base da fibração. Vejamos: utilizando a Proposição 1.8 e a equação (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\kappa &= \langle R(d\Pi E_1, d\Pi E_2)d\Pi E_1, d\Pi E_2\rangle = \langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle + \frac{3}{4}\|[E_1, E_2]^{\mathcal{V}}\|^2 \\
&= -3\tau^2 + 2\sigma\tau + \frac{3}{4}\|2\tau E_3\|^2 = -3\tau^2 + 2\sigma\tau + 3\tau^2 = 2\sigma\tau.
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, obtemos $\langle \overline{R}(E_2, E_3)E_2, E_3\rangle$, $\langle \overline{R}(E_3, E_1)E_3, E_1\rangle$, $\langle \overline{R}(E_2, E_3)E_3, E_1\rangle$, $\langle \overline{R}(E_3, E_1)E_1, E_2\rangle$ e $\langle \overline{R}(E_2, E_3)E_1, E_2\rangle$, como segue:

Sabendo que $\overline{\Gamma}_{32}^1 = \tau - \sigma$ e $\overline{\Gamma}_{21}^3 = -\overline{\Gamma}_{12}^3 = -\tau$ são constantes; $\overline{\Gamma}_{22}^1$, $\overline{\Gamma}_{22}^2$, $\overline{\Gamma}_{22}^3$, $\overline{\Gamma}_{32}^2$ e $\overline{\Gamma}_{32}^3$ são nulos, teremos

$$\langle \overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_2}E_2, E_3\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_3}(\overline{\Gamma}_{22}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{22}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{22}^3E_3), E_3\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_3}E_2, E_2\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_2}(\overline{\Gamma}_{32}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{32}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{32}^3E_3), E_3\rangle \\
&= \overline{\Gamma}_{32}^1\langle \overline{\nabla}_{E_2}E_1, E_3\rangle \\
&= (\tau - \sigma)\langle \overline{\nabla}_{E_2}E_1, E_3\rangle \\
&= (\tau - \sigma)\overline{\Gamma}_{21}^3 \\
&= (\tau - \sigma)(-\tau) \\
&= -\tau^2 + \tau\sigma
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\overline{R}(E_2,E_3)E_2,E_3\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_2}E_2,E_3\rangle - \langle\overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_3}E_2,E_3\rangle + \langle\overline{\nabla}_{[E_2,E_3]}E_2,E_3\rangle \\
&= \tau^2 - \tau\sigma + \langle\overline{\nabla}_{\sigma E_1}E_2,E_3\rangle \\
&= \tau^2 - \tau\sigma + \sigma\langle\overline{\nabla}_{E_1}E_2,E_3\rangle \\
&= \tau^2 - \tau\sigma + \sigma\overline{\Gamma}_{12}^3 \\
&= \tau^2 - \tau\sigma + \tau\sigma \\
&= \tau^2. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Além disso, sabendo que $\overline{\Gamma}_{13}^2 = -\overline{\Gamma}_{23}^1 = -\tau$ e $\overline{\Gamma}_{32}^1 = \tau - \sigma$ são constantes; $\overline{\Gamma}_{13}^1$, $\overline{\Gamma}_{13}^3$ e $\overline{\Gamma}_{33}^i$ são nulos, para todo $i = 1,2,3$, então

$$\langle\overline{\nabla}_{E_1}\overline{\nabla}_{E_3}E_3,E_1\rangle = \langle\overline{\nabla}_{E_1}(\overline{\Gamma}_{33}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{33}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{33}^3E_3),E_1\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_1}E_3,E_1\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{E_3}(\overline{\Gamma}_{13}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{13}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{13}^3E_3),E_1\rangle \\
&= \langle\overline{\nabla}_{E_3}(-\tau E_2),E_1\rangle = -\tau\langle\overline{\nabla}_{E_3}E_2,E_1\rangle \\
&= -\tau\overline{\Gamma}_{32}^1 = -\tau(\tau-\sigma) = -\tau^2 + \tau\sigma
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\overline{R}(E_3,E_1)E_3,E_1\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{E_1}\overline{\nabla}_{E_3}E_3,E_1\rangle - \langle\overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_1}E_3,E_1\rangle + \langle\overline{\nabla}_{[E_3,E_1]}E_3,E_1\rangle \\
&= \tau^2 - \tau\sigma + \langle\overline{\nabla}_{\sigma E_2}E_3,E_1\rangle = \tau^2 - \tau\sigma + \sigma\langle\overline{\nabla}_{E_2}E_3,E_1\rangle \\
&= \tau^2 - \tau\sigma + \sigma\overline{\Gamma}_{23}^1 = \tau^2 - \tau\sigma + \tau\sigma = \tau^2. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Como $\overline{\Gamma}_{23}^1 = \tau$ é constante; $\overline{\Gamma}_{31}^1$, $\overline{\Gamma}_{23}^2$, $\overline{\Gamma}_{23}^3$ e $\overline{\Gamma}_{33}^i$ são nulos, para todo $i = 1,2,3$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_2}E_3,E_1\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{E_3}(\overline{\Gamma}_{23}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{23}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{23}^3E_3),E_1\rangle \\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_{E_3}E_1,E_1\rangle = \tau\overline{\Gamma}_{31}^1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\langle\overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_3}E_3,E_1\rangle = \langle\overline{\nabla}_{E_2}(\overline{\Gamma}_{33}^1E_1 + \overline{\Gamma}_{33}^2E_2 + \overline{\Gamma}_{33}^3E_3),E_1\rangle = 0$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\overline{R}(E_2,E_3)E_3,E_1\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_2}E_3,E_1\rangle - \langle\overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_3}E_3,E_1\rangle + \langle\overline{\nabla}_{[E_2,E_3]}E_3,E_1\rangle \\
&= \langle\overline{\nabla}_{\sigma E_1}E_3,E_1\rangle \\
&= \sigma\langle\overline{\nabla}_{E_1}E_3,E_1\rangle \\
&= \sigma\tau\langle E_1\wedge E_3,E_1\rangle \\
&= 0. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Ademais, como $\overline{\Gamma}_{31}^2 = \sigma - \tau$ e $\overline{\Gamma}_{21}^3 = -\tau$ são constantes; $\overline{\Gamma}_{12}^2$, $\overline{\Gamma}_{21}^1$, $\overline{\Gamma}_{21}^2$, $\overline{\Gamma}_{22}^2$, $\overline{\Gamma}_{31}^1$, $\overline{\Gamma}_{31}^3$ e $\overline{\Gamma}_{11}^i$ são nulos, para todo $i = 1, 2, 3$, teremos

$$\begin{aligned}\langle \overline{\nabla}_{E_1} \overline{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_1} (\overline{\Gamma}_{31}^1 E_1 + \overline{\Gamma}_{31}^2 E_2 + \overline{\Gamma}_{31}^3 E_3), E_2 \rangle \\ &= (\sigma - \tau) \langle \overline{\nabla}_{E_1} E_2, E_2 \rangle \\ &= (\sigma - \tau) \overline{\Gamma}_{12}^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\langle \overline{\nabla}_{E_3} \overline{\nabla}_{E_1} E_1, E_2 \rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_3} (\overline{\Gamma}_{11}^1 E_1 + \overline{\Gamma}_{11}^2 E_2 + \overline{\Gamma}_{11}^3 E_3), E_2 \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(E_3, E_1) E_1, E_2 \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_1} \overline{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_3} \overline{\nabla}_{E_1} E_1, E_2 \rangle + \langle \overline{\nabla}_{[E_3, E_1]} E_1, E_2 \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\sigma E_2} E_1, E_2 \rangle = \sigma \langle \overline{\nabla}_{E_2} E_1, E_2 \rangle = \sigma \overline{\Gamma}_{21}^2 = 0, \qquad (2.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \overline{\nabla}_{E_3} \overline{\nabla}_{E_2} E_1, E_2 \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_3} (\overline{\Gamma}_{21}^1 E_1 + \overline{\Gamma}_{21}^2 E_2 + \overline{\Gamma}_{21}^3 E_3), E_2 \rangle \\ &= -\tau \langle \overline{\nabla}_{E_3} E_3, E_2 \rangle = -\tau \langle E_3 \wedge E_3, E_2 \rangle = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \overline{\nabla}_{E_2} \overline{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_2} (\overline{\Gamma}_{31}^1 E_1 + \overline{\Gamma}_{31}^2 E_2 + \overline{\Gamma}_{31}^3 E_3), E_2 \rangle \\ &= (\sigma - \tau) \langle \overline{\nabla}_{E_2} E_2, E_2 \rangle = (\sigma - \tau) \overline{\Gamma}_{22}^2 = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(E_2, E_3) E_1, E_2 \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_3} \overline{\nabla}_{E_2} E_1, E_2 \rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_2} \overline{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle + \langle \overline{\nabla}_{[E_2, E_3]} E_1, E_2 \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\sigma E_1} E_1, E_2 \rangle = \sigma \langle \overline{\nabla}_{E_1} E_1, E_2 \rangle = \sigma \overline{\Gamma}_{11}^2 = 0. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

O tensor curvatura $\overline{R}$ de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ define uma aplicação bilinear simétrica

$$\mathcal{R} : \Lambda^2(\mathbb{E}(\kappa, \tau)) \times \Lambda^2(\mathbb{E}(\kappa, \tau)) \to \mathbb{R},$$

dada por

$$\mathcal{R}(X \wedge Y, Z \wedge W) := \langle \overline{R}(X, Y) Z, W \rangle,$$

onde $\Lambda^2(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$ é o espaço das $2-$formas (bivetores) em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. A forma bilinear $\mathcal{R}$ associa a um operador auto-adjunto $\mathcal{R} : \Lambda^2(\mathbb{E}(\kappa, \tau)) \to \Lambda^2(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$, através da relação

$$\langle \mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = \mathcal{R}(X \wedge Y, Z \wedge W).$$

O operador $\mathcal{R}$ é o operador de curvatura em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Devido aos cálculos das curvaturas (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8), podemos obter as componentes de uma matriz de ordem 3, que é o operador $\mathcal{R}$ na base $\{E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2\}$ da seguinte forma:

Escrevendo $f_1 = E_2 \wedge E_3$, $f_2 = E_3 \wedge E_1$, $f_3 = E_1 \wedge E_2$ e $\mathcal{R}_{ij} = \langle \mathcal{R}(f_i), f_j \rangle$, teremos

$$\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{12} = \langle \mathcal{R}(f_1), f_2 \rangle = \langle \mathcal{R}(E_2 \wedge E_3), E_3 \wedge E_1 \rangle = \langle \overline{R}(E_2, E_3)E_3, E_1 \rangle = 0,$$

$$\mathcal{R}_{31} = \mathcal{R}_{13} = \langle \mathcal{R}(f_1), f_3 \rangle = \langle \mathcal{R}(E_2 \wedge E_3), E_1 \wedge E_2 \rangle = \langle \overline{R}(E_2, E_3)E_1, E_2 \rangle = 0,$$

$$\mathcal{R}_{32} = \mathcal{R}_{23} = \langle \mathcal{R}(f_2), f_3 \rangle = \langle \mathcal{R}(E_3 \wedge E_1), E_1 \wedge E_2 \rangle = \langle \overline{R}(E_3, E_1)E_1, E_2 \rangle = 0,$$

$$\mathcal{R}_{11} = \langle \mathcal{R}(f_1), f_1 \rangle = \langle \mathcal{R}(E_2 \wedge E_3), E_2 \wedge E_3 \rangle = \langle \overline{R}(E_2, E_3)E_2, E_3 \rangle = \tau^2,$$

$$\mathcal{R}_{22} = \langle \mathcal{R}(f_2), f_2 \rangle = \langle \mathcal{R}(E_3 \wedge E_1), E_3 \wedge E_1 \rangle = \langle \overline{R}(E_3, E_1)E_3, E_1 \rangle = \tau^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{33} &= \langle \mathcal{R}(f_3), f_3 \rangle = \langle \mathcal{R}(E_1 \wedge E_2), E_1 \wedge E_2 \rangle = \langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle = 2\tau\sigma - 3\tau^2 \\ &= \kappa - 3\tau^2. \end{aligned}$$

Com isso, o operador $\mathcal{R}$ na base $\{E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2\}$ é uma matriz diagonal de ordem 3, dada por

$$\mathcal{R} = \overline{R} = diag(a, a, b),$$

onde

$$a = \tau^2, \quad b = \kappa - 3\tau^2.$$

Proposição 2.1. *Para todos campos de vetores X, Y, Z, W em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi; X, Y)Z, W \rangle$$

com

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X,$$

$$R_1(V; X, Y)Z = \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y.$$

Demonstração. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$, escreva $X = X^{\mathcal{H}} + x\xi$, $Y = Y^{\mathcal{H}} + y\xi$, $Z = Z^{\mathcal{H}} + z\xi$ e $W = W^{\mathcal{H}} + w\xi$, onde $x = \langle X, \xi \rangle$, $y = \langle Y, \xi \rangle$, $z = \langle Z, \xi \rangle$ e $w = \langle W, \xi \rangle$, então

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}+x\xi, Y^{\mathcal{H}}+y\xi)(Z^{\mathcal{H}}+z\xi), W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&= \langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}+y\xi)(Z^{\mathcal{H}}+z\xi), W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&\quad +x\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}}+y\xi)(Z^{\mathcal{H}}+z\xi), W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&= \langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})(Z^{\mathcal{H}}+z\xi), W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&\quad +y\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, \xi)(Z^{\mathcal{H}}+z\xi), W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&\quad +x\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}})(Z^{\mathcal{H}}+z\xi), W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&\quad +xy\langle \overline{R}(\xi, \xi)(Z^{\mathcal{H}}+z\xi), W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&= \langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle + z\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&\quad +y\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, \xi)Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle + yz\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, \xi)\xi, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&\quad +x\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle + xz\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}})\xi, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&\quad +xy\langle \overline{R}(\xi, \xi)Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle + xyz\langle \overline{R}(\xi, \xi)\xi, W^{\mathcal{H}}+w\xi\rangle\\
&= \langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}\rangle + w\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}, \xi\rangle\\
&\quad +z\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi, W^{\mathcal{H}}\rangle + zw\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi, \xi\rangle\\
&\quad +y\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, \xi)Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}\rangle + yw\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, \xi)Z^{\mathcal{H}}, \xi\rangle\\
&\quad +yz\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, \xi)\xi, W^{\mathcal{H}}\rangle + yzw\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}}, \xi)\xi, \xi\rangle\\
&\quad +x\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}\rangle + xw\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}, \xi\rangle\\
&\quad +xz\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}})\xi, W^{\mathcal{H}}\rangle + xzw\langle \overline{R}(\xi, Y^{\mathcal{H}})\xi, \xi\rangle\\
&\quad +xy\langle \overline{R}(\xi, \xi)Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}\rangle + xyw\langle \overline{R}(\xi, \xi)Z^{\mathcal{H}}, \xi\rangle\\
&\quad +xyz\langle \overline{R}(\xi, \xi)\xi, W^{\mathcal{H}}\rangle + xyzw\langle \overline{R}(\xi, \xi)\xi, \xi\rangle.
\end{aligned}$$

Devido as propriedades do tensor curvatura, os termos onde ξ aparece 3 ou 4 vezes nas entradas do tensor curvatura $\overline{R}$, ou nas posições $1,2$ ou $3,4$ das entradas se anulam. Como as curvaturas seccionais $\langle \overline{R}(E_2,E_3)E_2,E_3\rangle = \langle \overline{R}(E_3,E_1)E_3,E_1\rangle = \tau^2$ e $\langle \overline{R}(E_1,E_2)E_1,E_2\rangle = \kappa - 3\tau^2$ são contantes, pela Proposição 1.2 teremos:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},\xi)Z^{\mathcal{H}},\xi\rangle &= \tau^2(\langle X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle \xi,\xi\rangle - \langle \xi,Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle X^{\mathcal{H}},\xi\rangle),\\
\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},\xi)W^{\mathcal{H}},\xi\rangle &= \tau^2(\langle X^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle\langle \xi,\xi\rangle - \langle \xi,W^{\mathcal{H}}\rangle\langle X^{\mathcal{H}},\xi\rangle),\\
\langle \overline{R}(Y^{\mathcal{H}},\xi)Z^{\mathcal{H}},\xi\rangle &= \tau^2(\langle Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle \xi,\xi\rangle - \langle \xi,Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle Y^{\mathcal{H}},\xi\rangle),\\
\langle \overline{R}(Y^{\mathcal{H}},\xi)W^{\mathcal{H}},\xi\rangle &= \tau^2(\langle Y^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle\langle \xi,\xi\rangle - \langle \xi,W^{\mathcal{H}}\rangle\langle Y^{\mathcal{H}},\xi\rangle)
\end{aligned}$$

e

$$\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle = (\kappa-3\tau^2)(\langle X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle Y^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle - \langle Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle X^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle).$$

Além disso, os termos onde ξ aparece uma vez se anulam, pois a matriz do operador curvatura $\mathcal{R}$ na base $\{E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2\}$ é diagonal. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle \\
&\quad +yw\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},\xi)Z^{\mathcal{H}},\xi\rangle + yz\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},\xi)\xi,W^{\mathcal{H}}\rangle \\
&\quad +xw\langle \overline{R}(\xi,Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}},\xi\rangle + xz\langle \overline{R}(\xi,Y^{\mathcal{H}})\xi,W^{\mathcal{H}}\rangle \\
&= (\kappa-3\tau^2)(\langle X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle Y^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle - \langle Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle X^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle) \\
&\quad +yw\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},\xi)Z^{\mathcal{H}},\xi\rangle - yz\langle \overline{R}(X^{\mathcal{H}},\xi)W^{\mathcal{H}},\xi\rangle \\
&\quad -xw\langle \overline{R}(Y^{\mathcal{H}},\xi)Z^{\mathcal{H}},\xi\rangle + xz\langle \overline{R}(Y^{\mathcal{H}},\xi)W^{\mathcal{H}},\xi\rangle \\
&= (\kappa-3\tau^2)[(\langle X,Z\rangle - xz)(\langle Y,W\rangle - yw) - (\langle Y,Z\rangle - yz)(\langle X,W\rangle - xw)] \\
&\quad +yw\tau^2(\langle X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle\xi,\xi\rangle - \langle\xi,Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle X^{\mathcal{H}},\xi\rangle) \\
&\quad -yz\tau^2(\langle X^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle\langle\xi,\xi\rangle - \langle\xi,W^{\mathcal{H}}\rangle\langle X^{\mathcal{H}},\xi\rangle) \\
&\quad -xw\tau^2(\langle Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle\xi,\xi\rangle - \langle\xi,Z^{\mathcal{H}}\rangle\langle Y^{\mathcal{H}},\xi\rangle) \\
&\quad +xz\tau^2(\langle Y^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}}\rangle\langle\xi,\xi\rangle - \langle\xi,W^{\mathcal{H}}\rangle\langle Y^{\mathcal{H}},\xi\rangle) \\
&= (\kappa-3\tau^2)(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle) \\
&\quad +(\kappa-3\tau^2)(xw\langle Y,Z\rangle + yz\langle X,W\rangle - yw\langle X,Z\rangle - xz\langle Y,W\rangle) \\
&\quad +\tau^2(yw\langle X,Z\rangle - yz\langle X,W\rangle - xw\langle Y,Z\rangle + xz\langle Y,W\rangle) \\
&= (\kappa-3\tau^2)\langle\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X,W\rangle \\
&\quad +(\kappa-3\tau^2)(xw\langle Y,Z\rangle + yz\langle X,W\rangle - yw\langle X,Z\rangle - xz\langle Y,W\rangle) \\
&\quad -\tau^2(xw\langle Y,Z\rangle + yz\langle X,W\rangle - yw\langle X,Z\rangle - xz\langle Y,W\rangle) \\
&= (\kappa-3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z,W\rangle \\
&\quad +(\kappa-4\tau^2)(xw\langle Y,Z\rangle + yz\langle X,W\rangle - yw\langle X,Z\rangle - xz\langle Y,W\rangle) \\
&= (\kappa-3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z,W\rangle \\
&\quad +(\kappa-4\tau^2)\langle\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle X + \langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle\xi - \langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi \\
&\quad -\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle Y,W\rangle \\
&= (\kappa-3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z,W\rangle + (\kappa-4\tau^2)\langle R_1(\xi;X,Y)Z,W\rangle.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Resultados Principais

3.1 Superfícies em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$

Seja $\Phi : \Sigma \to \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ uma imersão isométrica de uma superfície Σ com conexão riemanniana ∇, tensor curvatura R e curvatura Gaussiana K. Admitiremos que Σ está orientada pelo campo de vetores normais unitários N, então podemos considerar a função ângulo C dada por

$$C = \langle \xi, N\rangle,$$

onde $\langle,\rangle$ é a métrica em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$. Seja $\mathcal{A}$ o operador de Weingarten de Φ associado a N.

Proposição 3.1. *Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z, W\rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T;X,Y)Z, W\rangle,$$

onde T é a projeção de ξ em $T\Sigma$, isto é, $T = \xi - CN$.

Demonstração. Sejam X, Y, Z e W campos de vetores tangentes, N normal à superfície, e $T = \xi - CN$, pela Proposição 2.1

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z, W\rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi;X,Y)Z, W\rangle.$$

Façamos

$$\begin{aligned} R_1(T;X,Y)Z &= \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle X + \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle T - \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle T - \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle Y \\ &= \langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle X + \langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle(\xi - CN) - \langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle(\xi - CN) \\ &\quad -\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle Y, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle R_1(T;X,Y)Z,W\rangle &= \langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,W\rangle + \langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle\langle \xi,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle\langle \xi,W\rangle \\
&\quad -\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,W\rangle \\
&= \langle \langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle X + \langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle\xi - \langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi \\
&\quad -\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle Y, W\rangle \\
&= \langle R_1(\xi;X,Y)Z,W\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = (\kappa-3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z,W\rangle + (\kappa-4\tau^2)\langle R_1(T;X,Y)Z,W\rangle.
$$

□

Corolário 3.1. *A equação de Gauss de Φ é*

$$
K = \det\mathcal{A} + \tau^2 + (\kappa-4\tau^2)C^2 = 2H^2 - \frac{|\mathcal{A}|^2}{2} + \tau^2 + (\kappa-4\tau^2)C^2, \tag{3.1}
$$

onde H é a curvatura média associada a N.

Demonstração. Pela equação (1.23), temos que

$$
K = det\mathcal{A} + \bar{K}.
$$

Sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ortonormais, então

$$
\begin{aligned}
\bar{K}(X,Y) &= \langle \bar{R}(X,Y)X,Y\rangle \\
&= (\kappa-3\tau^2)\langle R_0(X,Y)X,Y\rangle + (\kappa-4\tau^2)\langle R_1(T;X,Y)X,Y\rangle \\
&= \kappa-3\tau^2-(\kappa-4\tau^2)|T|^2 \\
&= \kappa-3\tau^2-(\kappa-4\tau^2)(1-C^2) \\
&= \tau^2+(\kappa-4\tau^2)C^2.
\end{aligned}
$$

Assim, $K = \det\mathcal{A} + \tau^2 + (\kappa-4\tau^2)C^2$. Por outro lado, se k_1 e k_2 são as curvaturas principais de $\mathcal{A}$, então

$$
(2H)^2 = (k_1+k_2)^2 = k_1^2+k_2^2+2k_1k_2 = |\mathcal{A}|^2 + 2det\mathcal{A},
$$

donde vamos obter a segunda parte da equação (3.1). □

As duas equações a seguir são para uso mais à frente. Seja $\{e_i\}_{i=1,2}$ um referencial ortonormal local em Σ, de modo que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, o tensor de Ricci de Σ é dado por

$$\begin{aligned}
Ric(Y,Y) &= \Sigma_{j=1}^{2}\langle R(Y,e_j)Y,e_j\rangle \\
&= \Sigma_{j=1}^{2}\langle R((\Sigma_{i=1}^{2}x_ie_i),e_j)(\Sigma_{i=1}^{2}x_ie_i),e_j\rangle \\
&= x_2^2\langle R(e_2,e_1)e_2,e_1\rangle + x_1^2\langle R(e_1,e_2)e_1,e_2\rangle \\
&= K(x_1^2+x_2^2) \\
&= K|Y|^2. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
div(\nabla_Y Y) &= \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla_Y Y,e_i\rangle \\
&= \Sigma_{i=1}^{2}\langle R(Y,e_i)Y,e_i\rangle + \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_Y\nabla_{e_i}Y,e_i\rangle + \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{[e_i,Y]}Y,e_i\rangle \\
&= Ric(Y,Y) + Y(\Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}Y,e_i\rangle) - \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}Y,\nabla_Y e_i\rangle + \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{\nabla_{e_i}Y}Y,e_i\rangle \\
&\quad -\Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{\nabla_Y e_i}Y,e_i\rangle \\
&= K|Y|^2 + \langle \nabla(divY),Y\rangle + \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{\nabla_{e_i}Y}Y,e_i\rangle - \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}Y,\nabla_Y e_i\rangle \\
&\quad -\Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{\nabla_Y e_i}Y,e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Em particular, se o referencial é geodésico em um ponto $p \in \Sigma$, teremos:

$$div(\nabla_Y Y)(p) = K|Y|^2 + \langle \nabla(divY),Y\rangle + \Sigma_{i=1}^{2}\langle \nabla_{\nabla_{e_i}Y}Y,e_i\rangle. \qquad (3.3)$$

3.2 Classificação de Superfícies em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$

Como existe uma submersão riemanniana $\Pi : \mathbb{E}(\kappa,\tau) \to \mathbb{M}^2(\kappa)$, podemos construir superfícies planas em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ da seguinte maneira: dada uma curva regular γ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$, $\Pi^{-1}(\gamma)$ é uma superfície em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ que tem o campo vertical ξ como um campo de vetores tangentes, isto é, $C = 0$. A partir da equação (2.1) segue que ξ restrito a superfície $\Pi^{-1}(\gamma)$ é um campo paralelo e, portanto $\Pi^{-1}(\gamma)$ é uma superfície plana. Chamamos $\Pi^{-1}(\gamma)$ de superfície de Hopf de $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$.

Definição 3.1. *Seja $\Pi^{-1}(\gamma)$ superfície de Hopf. Se γ é uma curva fechada, então $\Pi^{-1}(\gamma)$ é um cilindro plano, e além disso, se γ é um círculo, então $\Pi^{-1}(\gamma)$ é um toro plano, que chamaremos de toro de Hopf.*

Começamos provando o resultado geral a seguir:

Proposição 3.2. *Para qualquer superfície compacta* Σ *isometricamente imersa em* $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ *vale a fórmula integral:*

$$\int_\Sigma K(1-3C^2)d\Sigma + 2(\kappa - 4\tau^2)\int_\Sigma C^4 d\Sigma = 0, \tag{3.4}$$

onde $d\Sigma$ *é o elemento de área de* Σ.

Demonstração. Comecemos assumindo que existe um campo de vetores normais unitários N exterior a Σ. Seja X a componente tangente de ξ, isto é,

$$X = \xi - CN.$$

Seja v um vetor tangente a Σ e ∇ a conexão riemanniana de Σ, então pela equação (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_v X &= \overline{\nabla}_v(\xi - CN) = \tau(v\wedge\xi) - v(C)N - C\overline{\nabla}_v N \\
&= \tau(v\wedge\xi) + C\mathcal{A}v - v(C)N \\
&= \tau(v\wedge(X+CN)) + C\mathcal{A}v - v(C)N \\
&= \tau(v\wedge X) + \tau C(v\wedge N) + C\mathcal{A}v - v(C)N
\end{aligned}$$

Donde

$$\nabla_v X = \tau C(v\wedge N) + C\mathcal{A}v. \tag{3.5}$$

Tomando o traço em (3.5) vamos obter imediatamente que

$$divX = 2CH.$$

Usando (3.5), temos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{i=1}^2\langle\nabla_{\nabla_{e_i}X}X, e_i\rangle &= \Sigma_{i=1}^2\langle\tau C(\nabla_{e_i}X\wedge N) + C\mathcal{A}(\nabla_{e_i}X), e_i\rangle \\
&= \Sigma_{i=1}^2\tau C\langle\nabla_{e_i}X\wedge N, e_i\rangle + \Sigma_{i=1}^2 C\langle\mathcal{A}(\nabla_{e_i}X), e_i\rangle \\
&= \Sigma_{i=1}^2\tau C\langle(\tau C(e_i\wedge N) + C\mathcal{A}e_i)\wedge N, e_i\rangle + \Sigma_{i=1}^2 C\langle\nabla_{e_i}X, \mathcal{A}e_i\rangle \\
&= \Sigma_{i=1}^2\tau^2C^2\langle(e_i\wedge N)\wedge N, e_i\rangle + \Sigma_{i=1}^2\tau C^2\langle\mathcal{A}e_i\wedge N, e_i\rangle \\
&\quad + \Sigma_{i=1}^2 C\langle\tau C(e_i\wedge N) + C\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_i\rangle \\
&= \tau^2C^2\Sigma_{i=1}^2\langle((e_i,N\rangle)N - \langle N,N\rangle e_i, e_i\rangle + \tau C^2\Sigma_{i=1}^2\langle Ae_i\wedge N, e_i\rangle \\
&\quad + \tau C^2\Sigma_{i=1}^2\langle e_i\wedge N, \mathcal{A}e_i\rangle + C^2\Sigma_{i=1}^2\langle\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_i\rangle \\
&= -\tau^2C^2\Sigma_{i=1}^2\langle e_i, e_i\rangle + C^2|\mathcal{A}|^2 \\
&= -2\tau^2C^2 + C^2|\mathcal{A}|^2.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $Y = X$ em (3.3), obtemos:

$$div(\nabla_X X) = K|X|^2 + \langle \nabla(divX), X\rangle + C^2|\mathcal{A}|^2 - 2\tau^2C^2.$$

Logo,

$$div(2CHX) = div((divX)X) = \langle \nabla(divX), X\rangle + (divX)^2 = \langle \nabla(divX), X\rangle + 4C^2H^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} div(\nabla_X X - 2CHX) &= K|X|^2 + C^2|\mathcal{A}|^2 - 2\tau^2C^2 - 4C^2H^2 \\ &= K(1-C^2) + C^2|\mathcal{A}|^2 - 2\tau^2C^2 - 4C^2H^2. \end{aligned}$$

O último termo desta equação é obtido diretamente da equação de Gauss (3.1), isto é,

$$-4C^2H^2 = -2C^2K - C^2|\mathcal{A}|^2 + 2C^2\tau^2 + 2(\kappa - 4\tau^2)C^4.$$

Então,

$$div(\nabla_X X - 2CHX) = K(1-3C^2) + 2(\kappa - 4\tau^2)C^4.$$

A fórmula integral em (3.4), segue imediatamente pelo teorema da divergência. Ademais, embora a função C esteja bem definida apenas para superfícies orientáveis, é evidente que C^2 é sempre bem definida, mesmo para superfícies não-orientáveis. Assim a fórmula (3.4) é válida para qualquer superfície compacta em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$. □

Agora estamos prontos para classificar as superfícies compactas em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$.

Teorema 3.1. *As únicas superfícies compactas planas em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ são os toros de Hopf. Em particular,*

1. *Não existem superfícies compactas planas em $\mathbb{M}^2(\kappa)\times\mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, em Nil_3 e em $\widetilde{PSl(2,\mathbb{R})}(\kappa,\tau)$.*

2. *As únicas superfícies compactas planas em $\mathbb{M}^2(\kappa)\times\mathbb{S}^1$, $\kappa\neq 0$, são os produtos $\gamma\times\mathbb{S}^1$, onde γ é uma curva fechada em $\mathbb{M}^2(\kappa)$.*

3. *As únicas superfícies compactas planas em esferas de Berger, em $PSl(2,\mathbb{R})(\kappa,\tau)/\mathbb{Z}_2$ e em outros espaços quocientes L_n e $PSl(2,\mathbb{R})(\kappa,\tau)/\mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 3$, são os toros de Hopf.*

Observação 3.1. *O resultado do Teorema 3.1 na esfera de Berger contraria com o caso da esfera redonda, onde além do toro de Hopf, existem outros toros planos [19].*

Demonstração. Se $K = 0$, é imediato que

$$2(\kappa - 4\tau^2) \int_\Sigma C^4 d\Sigma = 0.$$

Como $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ (aqui estamos excluindo a esfera euclidiana), segue que $C = 0$ em Σ. Isso significa que $X = \xi$ e portanto o campo vertical Killing da fibração $\Pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \to \mathbb{M}^2(\kappa)$ é tangente a Σ. Como Σ é compacta, segue que $\Pi(\Sigma)$ é uma curva fechada γ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$ e então $\Pi^{-1}(\gamma) \supset \Sigma$, isto prova que Σ é toro de Hopf $\Pi^{-1}(\gamma)$. $\square$

A fórmula (3.4) é válida também para superfície compacta em outras variedades riemannianas de dimensão 3. De fato, suponha que Σ é uma superfície compacta do produto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ ou $M^2 \times \mathbb{S}^1$, onde M^2 é uma superfície orientada. Neste caso, $\Pi : M^2 \times \mathbb{R} \to M^2$ é uma submersão trivial e assim $\xi = (0, 1)$ é um campo de vetores paralelo. Seguindo a prova do Teorema 3.1, se X é componente tangente de ξ, então $divX = 2CH$ e $div(\nabla_X X - 2CHX) = K(1 - 3C^2) + \overline{K}C^4$, onde $\overline{K}$ é a curvatura de Gauss de superfície M^2.

Agora novamente pelo teorema da divergência, temos

$$\int_\Sigma [K(1 - 3C^2) + \overline{K}C^4] d\Sigma = 0.$$

Devido a Observação 3.1 e seguindo da prova do Teorema 3.1, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Seja M^2 uma superfície orientada com curvatura $\overline{K} > 0$ ou $\overline{K} < 0$. Então:*

1. *Não existem superfícies compactas planas em $M^2 \times \mathbb{R}$.*

2. *As únicas superfícies compactas planas em $M^2 \times \mathbb{R}$ são os produtos $\gamma \times \mathbb{S}^1$, onde γ é uma curva fechada em M^2.*

Corolário 3.2. *As únicas superfícies compactas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com C constante e $C^2 < 1$ são toros de Hopf, para os quais $C = 0$.*

Observação 3.2. *Este resultado não é válido para superfícies não compactas. De fato, na referência [16] Leite constrói para cada $K_0 \in \,]0, 1[$ uma curvatura média constante incorporada do plano hiperbólico com sua métrica padrão de curvatura constante negativa K_0 em $\mathbb{M}^2(-1) \times \mathbb{R}$, com função constante $C = -K_0$.*

Demonstração. Como $C^2 < 1$, então a componente tangente X do campo Killing ξ é um campo de vetores em Σ sem zeros. De fato, $|X|^2 = 1 - C^2 > 0$, o que implica $X \neq 0$, com isso a soma dos índices das singularidades do campo X (que não têm) é zero, pelo Teorema do Índice [6, 21] a característica de Euler-Poincaré $\chi(\Sigma) = 0$, então pelo Teorema de Gauss-Bonnet [6, 21]

$$\int_\Sigma K d\Sigma = 0.$$

Agora, como C é constante, a fórmula (3.4) torna-se $(\kappa - 4\tau^2)C^4 Area(\Sigma) = 0$, e daqui $C = 0$. $\square$

Começamos provando as propriedades da função ângulo $C = \langle \xi, N \rangle$ e do campo de vetores $X = \xi - CN$ que serão úteis na prova do Teorema Principal a seguir:

Proposição 3.3. *Para qualquer superfície Σ orientada isometricamente imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, o gradiente da função ângulo C é dado por*

$$\nabla C = \tau(X \wedge N) - \mathcal{A}X. \tag{3.6}$$

Demonstração. Seja $\Phi : \Sigma \to \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma imersão de uma superfície orientável Σ. Sejam X a componente tangente do campo Killing ξ e $\nabla^\perp$ a conexão normal da imersão Φ. Pelas equações (2.1) e (3.5), para qualquer vetor tangente v a Σ e observando que $\nabla^\perp_v N = 0$, onde N é um normal unitário, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla C, v \rangle &= v(C) = v\langle \xi, N \rangle = \langle \overline{\nabla}_v \xi, N \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_v N \rangle \\
&= \langle \tau(v \wedge \xi), N \rangle + \langle X + CN, (\overline{\nabla}_v N)^T + (\overline{\nabla}_v N)^\perp \rangle \\
&= \langle \tau(v \wedge (X + CN)), N \rangle + \langle X + CN, -\mathcal{A}v + \nabla^\perp_v N \rangle \\
&= \langle \tau(v \wedge (X + CN)), N \rangle + \langle X + CN, -\mathcal{A}v \rangle \\
&= \tau\langle v \wedge X, N \rangle + \tau C \langle v \wedge N, N \rangle - \langle X, \mathcal{A}v \rangle - C\langle N, \mathcal{A}v \rangle \\
&= \tau\langle X \wedge N, v \rangle - \langle \mathcal{A}X, v \rangle \\
&= \langle \tau(X \wedge N) - \mathcal{A}X, v \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla C = \tau(X \wedge N) - \mathcal{A}X$. $\square$

Observação 3.3. *Dado ponto $p \in \Sigma$, temos que:*

1. *$C^2(p) = 1$ se, e somente se, $X(p) = 0$. De fato, se $C^2(p) = 1$, então $C(p) = 1$ ou $C(p) = -1$. Em ambos os casos: se $C(p) = 1$, por uma conta direta (basta*

calcular $|X(p)|^2$), teremos $X(p) = 0$, de maneira análoga, se $C(p) = -1$, obtemos $X(p) = 0$. Reciprocamente, se $X(p) = 0$, então $0 = |X(p)|^2 = 2 - 2C^2(p)$, obtendo $C^2(p) = 1$.

2. *Se $C^2(p) = 1$, que é equivalente à $X(p) = 0$, então $\nabla C(p) = 0$, isto é, p é ponto crítico da função C. De fato, pela equação (3.6), obtemos*

$$\nabla C(p) = \tau(X(p) \wedge N(p)) - \mathcal{A}X(p) = 0.$$

Proposição 3.4. *Dado ponto $p \in \Sigma$. Suponha que p é ponto crítico de C com $C^2(p) < 1$, nestas condições a curvatura Gaussiana K no ponto p é dado por*

$$K(p) = (\kappa - 4\tau^2)C^2(p).$$

Demonstração. Suponha que p é ponto crítico de C com $C^2(p) < 1$. Então, pelo primeiro item da Observação 3.3 temos que $X(p) \neq 0$ e utilizando a equação (3.6) obtemos $\mathcal{A}X(p) = \tau(X(p) \wedge N(p))$. Fixado N o normal unitário a Σ podemos definir uma orientação de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ de tal forma que:

$$\begin{array}{ccccc} e_1 & \wedge & e_2 & = & N(p), \\ e_2 & \wedge & N(p) & = & e_1, \\ e_1 & \wedge & N(p) & = & -e_2, \end{array}$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma$, com $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2$. Escrevendo $X(p) = ae_1 + be_2$, segue que

$$\mathcal{A}(ae_1 + be_2) = \mathcal{A}X(p) = \tau(X(p) \wedge N(p)) = \tau((ae_1 + be_2) \wedge N(p)).$$

O que implica

$$(\lambda_1 a)e_1 + (\lambda_2 b)e_2 = (-\tau a)e_2 + (\tau b)e_1.$$

Donde $\lambda_1 a = \tau b$ e $\lambda_2 b = -\tau a$. Como $X(p) \neq 0$, a última equação nos permite concluir que $det\mathcal{A}(p) = \lambda_1\lambda_2 = -\tau^2$.

A equação (3.1) implica que

$$K(p) = det\mathcal{A}(p) + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)C^2(p) = (\kappa - 4\tau^2)C^2(p).$$

□

A recíproca do segundo item da Observação 3.3 é verdadeira se acrescentarmos uma condição a mais na hipótese, isto é, precisamos acrescentar uma condição sobre a curvatura Gaussiana K em p como veremos na proposição a seguir:

Proposição 3.5. *Seja p ponto crítico de C, isto é, $\nabla C(p) = 0$ e suponha que a curvatura Gaussiana em p satisfaz $K < min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$. Então, $C^2(p) = 1$, que é equivalente à $X(p) = 0$.*

Demonstração. Suponha que $C^2(p) < 1$ e pela Proposição 3.4 a curvatura Gaussiana em p é: $K(p) = (\kappa - 4\tau^2)C^2(p)$. Consideramos dois casos:

Se $0 < \kappa - 4\tau^2$, temos $min\{0, \kappa - 4\tau^2\} = 0$. Como $0 \leq C^2(p) < 1$, então $min\{0, \kappa - 4\tau^2\} = 0 \leq K(p) < \kappa - 4\tau^2$, que é uma contradição com a hipótese.

Se $\kappa - 4\tau^2 < 0$, temos $min\{0, \kappa - 4\tau^2\} = \kappa - 4\tau^2$. Como $0 \leq C^2(p) < 1$, então $0 \geq K(p) > \kappa - 4\tau^2 = min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$, que também é uma contradição com a hipótese.

Assim $C^2(p) = 1$, isto é, os únicos pontos críticos de C na condição de $K < min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$ são os pontos que satisfazem $C^2(p) = 1$. □

Proposição 3.6. *Seja $p \in \Sigma$ ponto crítico de C e $K(p) < min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$, então*

$$det(HessC)(p) = (K(p) - (\kappa - 4\tau^2))^2 > 0.$$

Isto é, C tem todos os pontos críticos não-degenerados, ou melhor, C é uma função de Morse.

Demonstração. Relembremos que o hessiano da função C é visto como um $(0, 2)$-tensor, dado por

$$(HessC)(v, w) = v(w(C)) - (\nabla_v w)(C),$$

onde v e w são vetores tangentes a Σ. Assim,

$$\begin{aligned} v(w(C)) &= v(w(\langle \xi, N \rangle)) = v(\langle \overline{\nabla}_w \xi, N \rangle) + v(\langle \xi, \overline{\nabla}_w N \rangle) \\ &= \langle \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_w \xi, N \rangle + \langle \overline{\nabla}_w \xi, \overline{\nabla}_v N \rangle + \langle \overline{\nabla}_v \xi, \overline{\nabla}_w N \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_w N \rangle. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Façamos os cálculos dos quatro termos da expressão (3.7) como segue:

O primeiro termo de (3.7):

A equação (3.5) será utilizada em uma das igualdades abaixo da expressão do primeiro termo de (3.7) como segue

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_w\xi, N\rangle &= \langle\overline{\nabla}_v(\tau(w\wedge\xi)), N\rangle\\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge\xi), N\rangle\\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge(X+CN)), N\rangle\\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_v((w\wedge X)+C(w\wedge N)), N\rangle\\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge X)+\overline{\nabla}_v(C(w\wedge N)), N\rangle\\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge X)+C\overline{\nabla}_v(w\wedge N)+v(C)(w\wedge N), N\rangle\\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge X), N\rangle+\tau C\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge N), N\rangle+\tau v(C)\langle w\wedge N, N\rangle\\
&= \tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge X), N\rangle+\tau C\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge N), N\rangle\\
&= \tau v\langle w\wedge X, N\rangle-\tau\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle+\tau Cv\langle w\wedge N, N\rangle-\tau C\langle w\wedge N, \overline{\nabla}_vN\rangle\\
&= -\tau v\langle w\wedge N, X\rangle-\tau\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle-\tau C\langle w\wedge N, (\overline{\nabla}_vN)^T\rangle\\
&= -\tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge N), X\rangle-\tau\langle w\wedge N, \overline{\nabla}_vX\rangle-\tau\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle\\
&\quad +\tau\langle w\wedge N, C\mathcal{A}v\rangle\\
&= -\tau\langle\overline{\nabla}_v(w\wedge N), X\rangle-\tau\langle w\wedge N, \overline{\nabla}_vX\rangle-\tau\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle\\
&\quad +\tau\langle w\wedge N, \nabla_vX-\tau C(v\wedge N)\rangle\\
&= -\tau\langle\nabla_v(w\wedge N), X\rangle-\tau\langle w\wedge N, \nabla_vX\rangle-\tau\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle\\
&\quad +\tau\langle w\wedge N, \nabla_vX\rangle-\tau^2C\langle w\wedge N, v\wedge N\rangle\\
&= -\tau\langle\nabla_v(w\wedge N), X\rangle-\tau\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle-\tau^2C\langle v\wedge N, w\wedge N\rangle.
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle = 0$. De fato, se w e X forem linearmente dependentes, então $w\wedge X = 0$, caso contrário, w e X são linearmente independentes, ou seja, $w\wedge X = \lambda N$, para alguma função $\lambda\in C^\infty(\Sigma)$, então

$$\langle w\wedge X, \overline{\nabla}_vN\rangle = \langle\lambda N, \overline{\nabla}_vN\rangle = \lambda\langle N, \nabla_v^\perp N\rangle = 0.$$

Portanto, o primeiro termo da expressão (3.7) é dado abaixo por

$$\langle\overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_w\xi, N\rangle = -\tau\langle\nabla_v(w\wedge N), X\rangle-\tau^2C\langle v\wedge N, w\wedge N\rangle.$$

O segundo termo de (3.7):

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_w \xi, \overline{\nabla}_v N \rangle &= \langle \tau(w \wedge \xi), (\overline{\nabla}_v N)^T + (\overline{\nabla}_v N)^{\perp} \rangle \\
&= \langle \tau(w \wedge \xi), -\mathcal{A}v + \nabla_v^{\perp} N \rangle \\
&= \langle \tau(w \wedge \xi), -\mathcal{A}v \rangle \\
&= -\tau \langle w \wedge \xi, \mathcal{A}v \rangle \\
&= -\tau \langle w \wedge (X + CN), \mathcal{A}v \rangle \\
&= -\tau \langle w \wedge X, \mathcal{A}v \rangle - \tau C \langle w \wedge N, \mathcal{A}v \rangle.
\end{aligned}$$

O terceiro termo de (3.7):

Por contas análogas ao cálculo do segundo termo da expressão (3.7) obtemos a expressão do terceiro termo de (3.7) como segue

$$\langle \overline{\nabla}_v \xi, \overline{\nabla}_w N \rangle = -\tau \langle v \wedge X, \mathcal{A}w \rangle - \tau C \langle v \wedge N, \mathcal{A}w \rangle.$$

O quarto termo de (3.7):

Por contas diretas, o quarto termo de (3.7) é expresso abaixo por

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_w N \rangle &= \langle X + CN, \overline{\nabla}_v ((\overline{\nabla}_w N)^T + (\overline{\nabla}_w N)^{\perp}) \rangle \\
&= \langle X + CN, \overline{\nabla}_v (-\mathcal{A}w + \nabla_w^{\perp} N) \rangle \\
&= -\langle X + CN, \overline{\nabla}_v \mathcal{A}w \rangle \\
&= -\langle X + CN, \nabla_v \mathcal{A}w + \alpha(v, \mathcal{A}w) \rangle \\
&= -\langle X, \nabla_v \mathcal{A}w \rangle - C \langle N, \nabla_v \mathcal{A}w \rangle - \langle X, \alpha(v, \mathcal{A}w) \rangle - C \langle N, \alpha(v, \mathcal{A}w) \rangle \\
&= -\langle X, \nabla_v \mathcal{A}w \rangle - C \langle \mathcal{A}v, \mathcal{A}w \rangle \\
&= -\langle X, \nabla_v \mathcal{A}w \rangle - C \langle \mathcal{A}^2 v, w \rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, pela equação (3.6)

$$\begin{aligned}
(\nabla_v w)(C) &= \langle \nabla_v w, \nabla C \rangle \\
&= \langle \nabla_v w, \tau(X \wedge N) - \mathcal{A}X \rangle. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Somando as parcelas da expressão (3.7) e a expressão (3.8), obtemos o hessiano de C

como segue

$$\begin{aligned}
(HessC)(v,w) &= -\tau\langle w\wedge X,\mathcal{A}v\rangle - \tau C\langle w\wedge N,\mathcal{A}v\rangle\\
&\quad -\tau\langle v\wedge X,\mathcal{A}w\rangle - \tau C\langle v\wedge N,\mathcal{A}w\rangle\\
&\quad -\langle X,\nabla_v\mathcal{A}w\rangle - C\langle \mathcal{A}^2v,w\rangle\\
&\quad -\tau\langle \nabla_v(w\wedge N),X\rangle - \tau^2 C\langle v\wedge N,w\wedge N\rangle\\
&\quad -\langle \nabla_v w,\tau(X\wedge N)+\mathcal{A}X\rangle.
\end{aligned}$$

Por hipótese p é ponto crítico de C, satisfazendo $K(p) < min\{0,\kappa-4\tau^2\}$. Então, pela Proposição 3.5 temos que $C^2(p)=1$, isto é, $X(p)=0$, assim o hessiano de C neste ponto p é dado por

$$\begin{aligned}
(HessC)_p(v,w) &= -C(p)\langle \mathcal{A}^2v,w\rangle - \tau^2C(p)\langle v\wedge N(p),w\wedge N(p)\rangle\\
&\quad -\tau C(p)\langle \mathcal{A}v\wedge w+\mathcal{A}w\wedge v,N(p)\rangle,
\end{aligned}$$

onde v e w são vetores tangentes de Σ em p.

Agora, seja $\{e_1,e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p\Sigma$ com $\mathcal{A}e_i=\lambda_ie_i$, $i=1,2$, então o determinante do hessiano de C em p é dado por

$$det(HessC)(p) = (HessC)_p(e_1,e_1)(HessC)_p(e_2,e_2) - ((HessC)_p(e_1,e_2))^2.$$

As parcelas do determinante do hessiano de C em p são dadas abaixo por

$$\begin{aligned}
(HessC)_p(e_1,e_1) &= -C(p)\langle \mathcal{A}^2e_1,e_1\rangle - \tau^2C(p)\langle e_1\wedge N(p),e_1\wedge N(p)\rangle\\
&\quad -\tau C(p)\langle \mathcal{A}e_1\wedge e_1+\mathcal{A}e_1\wedge e_1,N_p\rangle\\
&= -C(p)\langle \lambda_1^2e_1,e_1\rangle - \tau^2C(p)\langle e_1\wedge N(p),e_1\wedge N(p)\rangle\\
&\quad -\tau C(p)\langle \lambda_1e_1\wedge e_1+\lambda_1e_1\wedge e_1,N(p)\rangle\\
&= -C(p)\lambda_1^2 - \tau^2C(p)\langle -e_2,-e_2\rangle\\
&= -C(p)\lambda_1^2 - \tau^2C(p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(HessC)_p(e_2,e_2) &= -C(p)\langle \mathcal{A}^2e_2,e_2\rangle - \tau^2C(p)\langle e_2\wedge N(p),e_2\wedge N(p)\rangle\\
&\quad -\tau C(p)\langle \mathcal{A}e_2\wedge e_2+\mathcal{A}e_2\wedge e_2,N(p)\rangle\\
&= -C(p)\langle \lambda_2^2e_2,e_2\rangle - \tau^2C(p)\langle e_2\wedge N(p),e_2\wedge N(p)\rangle\\
&\quad -\tau C(p)\langle \lambda_2e_2\wedge e_2+\lambda_2e_2\wedge e_2,N(p)\rangle\\
&= -C(p)\lambda_2^2 - \tau^2C(p)\langle e_1,e_1\rangle\\
&= -C(p)\lambda_2^2 - \tau^2C(p)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(HessC)_p(e_1,e_2) &= -C(p)\langle \mathcal{A}^2 e_1, e_2\rangle - \tau^2 C(p)\langle e_1\wedge N(p), e_2\wedge N(p)\rangle \\
&\quad -\tau C(p)\langle \mathcal{A}e_1\wedge e_2 + \mathcal{A}e_2\wedge e_1, N(p)\rangle \\
&= -C(p)\langle \lambda_1^2 e_1, e_2\rangle - \tau^2 C(p)\langle -e_2, e_1\rangle \\
&\quad -\tau C(p)\langle \lambda_1 e_1\wedge e_2 + \lambda_2 e_2\wedge e_1, N(p)\rangle \\
&= -\tau C(p)\langle \lambda_1 N(p) - \lambda_2 N(p), N(p)\rangle \\
&= -\tau C(p)(\lambda_1 - \lambda_2).
\end{aligned}$$

Com isso, o determinante do hessiano de C em p é:

$$\begin{aligned}
det(HessC)(p) &= (HessC)_p(e_1,e_1)(HessC)_p(e_2,e_2) - ((HessC)_p(e_1,e_2))^2 \\
&= (-C(p)\lambda_1^2 - \tau^2 C(p))(-C(p)\lambda_2^2 - \tau^2 C(p)) - (-\tau C(p)(\lambda_1-\lambda_2))^2 \\
&= C^2(p)(\lambda_1^2+\tau^2)(\lambda_2^2+\tau^2) - C^2(p)\tau^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 \\
&= (\lambda_1^2+\tau^2)(\lambda_2^2+\tau^2) - \tau^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 \\
&= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\tau^2 + \lambda_2^2\tau^2 + \tau^4 - \lambda_1^2\tau^2 + 2\lambda_1\lambda_2\tau^2 - \lambda_2^2\tau^2 \\
&= \lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2\tau^2 + \tau^4 \\
&= (\lambda_1\lambda_2 + \tau^2)^2 \\
&= (det\mathcal{A}(p) + \tau^2)^2 \\
&= (K(p) - (\kappa - 4\tau^2)C^2(p))^2 \\
&= (K(p) - (\kappa - 4\tau^2))^2 > 0.
\end{aligned}$$

□

Definição 3.2. *Seja p um zero do campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, isto é, $Y(p) = 0$ e $(\nabla Y)(p) : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ a derivada covariante do campo Y no ponto p, então p é dito um zero não-degenerado de Y, se $det(\nabla Y)(p) \neq 0$.*

Proposição 3.7. *Seja p um zero do campo de vetores X, onde $X = \xi - CN$. Suponhamos que tanto $\kappa - 4\tau^2 < K \leq 0$ ou $0 \leq K < \kappa - 4\tau^2$, em p. Então, p é um zero não-degenerado de X.*

Demonstração. Sejam p um zero do campo de vetores X, onde $X = \xi - CN$ e $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p\Sigma$ com $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2$, pela equação (3.5) temos que

$$\langle \nabla_{e_j} X, e_k\rangle = C(p)\langle \mathcal{A}e_j, e_k\rangle - \tau C(p)\langle e_j\wedge e_k, N(p)\rangle,$$

para cada $j, k = 1, 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_1} X, e_1 \rangle &= C(p)\langle \mathcal{A}e_1, e_1 \rangle - \tau C(p)\langle e_1 \wedge e_1, N(p)\rangle \\
&= C(p)\langle \lambda_1 e_1, e_1 \rangle \\
&= \lambda_1 C(p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_1} X, e_2 \rangle &= C(p)\langle \mathcal{A}e_1, e_2 \rangle - \tau C(p)\langle e_1 \wedge e_2, N(p)\rangle \\
&= C(p)\langle \lambda_1 e_1, e_2 \rangle - \tau C(p)\langle N(p), N(p)\rangle \\
&= -\tau C(p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_2} X, e_1 \rangle &= C(p)\langle \mathcal{A}e_2, e_1 \rangle - \tau C(p)\langle e_2 \wedge e_1, N(p)\rangle \\
&= C(p)\langle \lambda_2 e_2, e_1 \rangle - \tau C(p)\langle -N(p), N(p)\rangle \\
&= \tau C(p)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_2} X, e_2 \rangle &= C(p)\langle \mathcal{A}e_2, e_2 \rangle - \tau C(p)\langle e_2 \wedge e_2, N(p)\rangle \\
&= C(p)\langle \lambda_2 e_2, e_2 \rangle \\
&= \lambda_2 C(p).
\end{aligned}$$

Calculando o determinante de ∇X em p e usando a equação (3.1), teremos

$$\begin{aligned}
det(\nabla X)(p) &= \langle \nabla_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \nabla_{e_2} X, e_2 \rangle - \langle \nabla_{e_1} X, e_2 \rangle \langle \nabla_{e_2} X, e_1 \rangle \\
&= (\lambda_1 C(p))(\lambda_2 C(p)) - (-\tau C(p))(\tau C(p)) \\
&= C^2(p)\lambda_1\lambda_2 + C^2(p)\tau^2 \\
&= \lambda_1\lambda_2 + \tau^2 \\
&= det\mathcal{A}(p) + \tau^2 \\
&= K(p) - (\kappa - 4\tau^2)C^2(p) \\
&= K(p) - (\kappa - 4\tau^2).
\end{aligned}$$

Agora, utilizando as hipóteses sobre a curvatura Gaussiana K no ponto p, teremos que o zero p de X é não-degenerado. $\square$

Agora estamos prontos para provar o Teorema Principal.

Teorema 3.3 (Teorema Principal).

a) Não existem superfícies compactas em $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ com curvatura Gaussiana $K < min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$

b) Seja $\Phi : \Sigma \to \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ uma imersão de uma superfície compacta Σ com curvatura de Gauss K.

1. *Se $\kappa - 4\tau^2 > 0$ e $0 \leq K < max\{\kappa - 4\tau^2, \tau^2\}$, então $K = 0$ e Σ é um toro de Hopf.*
2. *Se $\kappa - 4\tau^2 < K \leq 0$, então $K = 0$ e Σ é um toro de Hopf.*
3. *Se $\kappa - 4\tau^2 < 0 \leq K < \kappa - 3\tau^2$ (κ deve ser positivo), então $K = 0$ e Σ é um toro de Hopf.*

Demonstração.

a) Considerando o recobrimento duplo orientado, se necessário, podemos assumir que a superfície Σ é orientável. Suponha que $\Phi : \Sigma \to \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ é uma imersão de uma superfície compacta orientável com curvatura de Gauss $K < min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$.

Para cada i, considere p_i ponto crítico da função C, pela Proposição 3.5 temos que $C^2(p_i) = 1$, para cada i e pela Proposição 3.6 obtemos que cada p_i é ponto crítico não-degenerado de C, isto é, C é uma função de Morse que têm um número finito de pontos de máximo e mínimo p_i. Para cada i, denotamos I_i o índice do campo ∇C no ponto p_i. Pela teoria elementar de Morse [6] temos que cada I_i é igual a 1, pois cada p_i é ponto de máximo (ou ponto de mínimo) da função C, assim a soma dos índices I_i é positivo. Utilizando o Teorema de Gauss-Bonnet e o Teorema do Índice [6, 21] obtemos

$$\int_\Sigma K d\Sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = 2\pi\Sigma_i I_i > 0.$$

Como Σ é uma superfície compacta e conexa, pela aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet, temos que $\chi(\Sigma) = 2$ e assim Σ deve ser uma esfera. Como K é negativa, isto contradiz o Teorema de Gauss-Bonnet. Isto prova a).

b) Como no caso a), podemos assumir que a superfície Σ é orientável.

(2) Suponhamos que tanto $\kappa - 4\tau^2 < K \leq 0$ ou $0 \leq K < \kappa - 4\tau^2$. Seja p um zero do campo de vetores X dado por $X = \xi - CN$. Então, pela Proposição 3.7, um tal zero p de X é não-degenerado. Assim, X tem um número finito de zeros.

Como o índice de X em um zero não-degenerado p é 1 (respectivamente -1), se $det(\nabla X)(p) > 0$ (respectivamente $det(\nabla X)(p) < 0$), temos que, se $K > \kappa - 4\tau^2$, então todos os zeros de X (caso existam) tem o índice 1, e pelo Teorema do Índice obtemos que $\chi(\Sigma) = 2$, se X têm zeros ou $\chi(\Sigma) = 0$, se X não têm zeros. Como $K \leq 0$, pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos que $K = 0$ e assim pelo Teorema 3.1, Σ é um toro de Hopf. Isso prova (2).

(1) Se $K < \kappa - 4\tau^2$, então todos os zeros de X (caso existam) tem índice -1, e pelo Teorema do Índice temos que $\chi(\Sigma) = 0$, se X não têm zeros. Como $K \leq 0$, pelo Teorema de Gauss-Bonnet obtemos que $K = 0$ e Σ é um toro de Hopf.

Suponha que $\kappa - 4\tau^2 > 0$ e $0 \leq K < \tau^2$. Pela equação de Gauss de Φ teremos

$$\tau^2 > K = det\mathcal{A} + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)C^2 \geqslant det\mathcal{A} + \tau^2.$$

Assim, $det\mathcal{A} < 0$ em Σ, e se $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ são as curvaturas de Σ associada a N, então $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, e o fibrado tangente $T\Sigma$ é a soma direta de dois sub-fibrados de vetores de dimensão 1 de Σ, isto é, $T\Sigma = D_1 \oplus D_2$ é definido por $D_i(p) = \{v \in T_p\Sigma; \mathcal{A}v = \lambda_i(p)v\}$, $i = 1, 2$. Como uma esfera não admite nenhum campo de vetores sem zeros e nem duplo recobrimento, uma tal decomposição não é possível se Σ é uma esfera. Daí, $\chi(\Sigma) \leq 0$. Como $K \geq 0$, pelo teorema de Gauss-Bonnet temos que Σ é plano e pelo Teorema 3.1 obtemos que Σ é um toro de Hopf. Isto finaliza a prova de (1).

(3) Finalmente, suponha que $\kappa - 4\tau^2 < 0 \leqslant K < \kappa - 3\tau^2$. Neste caso, como $C^2 \leq 1$, temos que

$$\kappa - 3\tau^2 > K = det\mathcal{A} + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)C^2 \geqslant det\mathcal{A} + \kappa - 3\tau^2.$$

Assim, $det\mathcal{A} < 0$ em Σ e o raciocínio acima prova mais uma vez que $K = 0$ e Σ é toro de Hopf. Isso prova (3). $\square$

Corolário 3.3. *Seja $\Phi : \Sigma \to \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma imersão de uma superfície compacta Σ com curvatura de Gauss constante K.*

1. *Se $\kappa - 4\tau^2 > 0$ e $K \in \,]-\infty, max\{\kappa - 4\tau^2, \tau^2\}[$, então $K = 0$ e Σ é toro de Hopf.*

2. *Se $\kappa - 4\tau^2 < 0 < \kappa - 3\tau^2$ e $K \in \,]-\infty, \kappa - 3\tau^2[$, então $K = 0$ e Σ é toro de Hopf ou $K = \kappa - 4\tau^2$.*

3. *Se $\kappa - 4\tau^2 < 0$ e $K \in \,]-\infty, 0]$, então $K = 0$ e Σ é toro de Hopf ou $K = \kappa - 4\tau^2$.*

Observação 3.4. *Quando $\tau = 0$, esse corolário é provado em [9] e [10]. Na verdade, os autores classificaram superfícies de curvatura Gaussiana de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, exceto para $K = \kappa$.*

Bibliografia

[1] Brickell, F. and Clark R. S., *Differrential Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1973.

[2] Caminha, A., *Introdução à Geometria das Aplicações Harmônicas*, XVI Escola de Geometria Diferencial, RiMa, São Carlos, 231 (2010).

[3] Carmo, M. P., *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[4] Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[5] Carmo, M. P., *O Método do Referencial Móvel*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[6] Carmo, M. P., *Formas Diferenciais e Aplicações*, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.

[7] Daniel, B., *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv., 82 (2007), 87-131.

[8] Francisco T. and Francisco U., *On the gauss curvature of compact surfaces in homogeneous 3-manifolds*, American Mathematical Society, 138 (2010), 2561-2567.

[9] J. A. Aledo, J. M. Espinar and J.A. Gálvez, *Complete surfaces of constant curvature in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Calculus of Variations and PDE's, 29 (2007), 347-363.

[10] J. A. Aledo, J. M. Espinar and J. A. Gálvez, *Surfaces with constant curvature in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Bull. Braz. Math. Soc., 38 (2007), 533-554.

[11] Klingenberg, W., *Contributions to Riemannian Geometry in the large*, Ann. of Math. 69 (1959), 654-666.

[12] Lee, J. M., *Introduction to smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[13] Lee, J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2011.

[14] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[15] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[16] Leite, M. L., *An elementary proof of the Abresch-Rosenberg theorem on constant mean curvature immersed surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Quart. J . Math, 58 (2007), 479-487.

[17] Spivak, M., *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1979.

[18] U. Abresch and H. Rosenberg., *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math., 193 (2004), 141-174.

[19] Weiner, J. L., *Flat tori in* $\mathbb{S}^3$ *and their Gauss map*, Proc. London Math. Soc., 62 (1991), 54-76.

[20] F. Torralbo, *Superficies de Curvatura Media Paralela en* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *y* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ *y Superficie de Curvatura Media constante en Espacios Homogéneos*, Ph.D. Thesis, Universidade de Granada (2010).

[21] Hicks, N. J., *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1965.