Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez de sólitons de Ricci gradiente com curvatura escalar constante

Wington de Lima Vital

Manaus - AM
Fevereiro de 2019

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez de sólitons de Ricci gradiente com curvatura escalar constante

por

Wington de Lima Vital

sob a orientação do

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Manaus - AM
Fevereiro de 2019

Rigidez de sólitons de Ricci gradiente com curvatura escalar constante

por

Wington de Lima Vital [1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 15 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:

José Nazareno V. Gomes

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes - (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Antonio Airton Freitas Filho

Prof. Dr. Antônio Airton Freitas Filho - (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Manoel Vieira de Matos Neto

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto - (Membro Externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

[1] O autor foi bolsista da FAPEAM durante a elaboração desta dissertação.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Vital, Wington de Lima
V836r Rigidez de sólitons de Ricci gradiente com curvatura escalar constante / Wington de Lima Vital. 2019
32 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Curvatura escalar constante. 2. Tensor de Ricci. 3. Sóliton de Ricci gradiente . 4. Rigidez . I. Gomes, José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedico este trabalho aos meus pais Washington Luiz Alves Vital e Maria de Lourdes de Lima Vital.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por mais essa etapa alcançada em minha vida.

Aos meus pais Washington Luiz Alves Vital e a Maria de Lourdes de Lima Vital, pelo incentivo nos estudos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes, pela paciência na orientação e por todo o conhecimento que adquiri durante este trabalho.

Aos professores que contribuíram com minha formação.

Aos professores Antônio Aírton Freitas e Manuel Vieira de Matos Neto, por aceitarem avaliar esse trabalho.

Aos amigos, pelos incentivos, contribuições e principalmente pelos momentos de diversões que tivemos juntos. Em especial, aos amigos do Mestrado em Matemática: Davi Misturini, Gabriel Sousa e Matheus Hudson e ao amigo do Doutorado em Matemática Adrian Ribeiro. Obrigado a todos por fazerem essa caminhada muito mais proveitosa.

À FAPEAM (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas), pelo apoio financeiro que foi fundamental para se concretizar esta importante conquista.

Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse ter mais essa conquista.

Resumo

Neste trabalho nós estudamos os resultados de rigidez obtidos no artigo intitulado "On gradient Ricci solitons with constant scalar curvature" por Fernández-López e Garcia-Río [Proc. Amer. Math. Soc. 114 (2016) 369-373]. Eles provaram que: Se a curvatura escalar de um sóliton de Ricci gradiente for constante, então ela é um múltiplo da constante da equação fundamental do sóliton de Ricci. Este fato foi uma das principais ferramentas para eles obterem os resultados de rigidez subsequentes.

Palavras-chave: Curvatura escalar constante; Tensor de Ricci; Sóliton de Ricci gradiente; Rigidez.

Abstract

In this work we study the rigidity results obtained in the papper titled "On gradient Ricci solitons with constant scalar curvature" by Fernández-López and Garcia-Río [Proc. Amer. Math. Soc. 114 (2016) 369-373]. They proved that: if the scalar curvature of a gradient Ricci soliton is constant then it is a multiple of the constant of the fundamental equation of the Ricci soliton. This fact was one of the main tools for them to obtain subsequent rigidity results.

Keywords: Constant scalar curvature; Ricci tensor; Gradient Ricci soliton; Rigidity.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Tensores em Variedades Riemannianas 4

1.2 Operadores Diferenciais 9

1.2.1 Tensores e os Operadores Diferenciais 11

1.3 Funções Isoparamétricas 15

2 Sólitons de Ricci Gradiente. **20**

2.1 Resultados Auxiliares 20

3 Resultados Principais **25**

Referências Bibliográficas **29**

Introdução

Ultimamente é notável um crescente interesse no estudo de diversos fluxos definidos em uma variedade Riemanniana, entre eles destaca-se o fluxo de Ricci. Hamilton [17], na direção de resolver a conjectura da geometrização de Thurston, introduziu o referido fluxo. Precisamente, dada uma família a um parâmetro de métricas Riemannianas $g(t)$ em uma variedade diferenciável M, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotando por $Ric_{g(t)}$ o tensor de Ricci da métrica, a equação do fluxo de Ricci é

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}. \tag{1}$$

Hamilton provou que para qualquer métrica Riemanniana g_0 em uma variedade diferenciável compacta M, existe uma única solução $g(t)$ para a equação (1) definida em um intervalo $[0, \epsilon)$, com $g(0) = g_0$. Para o caso completo não compacto, Shi [31] provou a existência de uma solução completa de (1), sob a condição de que as curvaturas seccionais de (M, g_0) sejam limitadas.

O sóliton de Ricci é um fluxo de Ricci $(M, g(t)), 0 < t \leq T \leq \infty$, com a propriedade que, para cada $t \in [0, T)$, existe uma família a um parâmetro de difeomorfismos $\varphi_t : M \to M$ e uma constante $\sigma(t) > 0$ satisfazendo $\sigma(t)\varphi_t^* g_0 = g(t)$. Uma definição equivalente é a seguinte: um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana completa (M, g_0) junto com um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo a equação fundamental

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g_0 = \lambda g_0, \tag{2}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, em que Ric_{g_0} e $\mathcal{L}_X g_0$ denotam, respectivamente, o tensor de Ricci e a derivada de Lie da métrica g_0 com respeito a X. Para mais detalhes sobre os sólitons de Ricci indicamos ao leitor as anotações de Cao [4], o livro de Chow et al. [13] ou o livro de Chow e Knopf [12].

Um sóliton de Ricci gradiente é rígido, se ele é isométrico a uma variedade quociente $N^{n-k} \times_\Gamma \mathbb{R}^k$, sendo N uma variedade Einstein (com $Ric_N = \lambda g_N$) e Γ uma ação que age livremente sobre N e por transformações ortogonais sobre $\mathbb{R}^k$. Aqui a função potencial é obtida por levantamento da função $f(x) = \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$ definida em $\mathbb{R}^k$. Note que todo sóliton de Ricci gradiente rígido tem curvatura escalar constante.

A rigidez de sólitons de Ricci tem sido bastante explorada ao longo dos anos. Por exemplo, Eminenti et al. [14] mostraram que sólitons de Ricci gradiente compactos são rígidos quando a curvatura escalar é constante. Além disso, em dimensões 2, Hamilton [18] mostrou que sólitons de Ricci gradiente compactos estáveis ou contráteis são rígidos, Ivey [19] provou o mesmo resultado em dimensão 3. Koiso [20] construiu um exemplo de sóliton de Ricci gradiente compacto contrátil em dimensão 4 que não tem curvatura escalar constante sendo, portanto, não rígido. Em [19] também foi provado que em qualquer dimensão, sólitons de Ricci gradiente compactos estáveis ou expansivos são rígidos. No caso não compacto, Perelman [24] mostrou que em dimensão 3 todo sóliton de Ricci gradiente com curvatura seccional não-negativa são rígidos. É fato que em dimensões maiores é difícil detectar rigidez. Na verdade existem sólitons expansivos com curvatura escalar constante, que não são rígidos, tal afirmação foi demonstrada por Lauret [21]. Isto nos induz a pensar que outra hipótese é necessária, em geral, para provar uma tal rigidez.

Neste trabalho estamos interessados em demonstrar alguns teoremas de rigidez de sólitons de Ricci gradiente com curvatura escalar constante, a saber, foi estudado os resultados de Fernández-López e Garcia-Río [15]. Para esse fim, analisamos os resultados do Petersen e Wylie [27], neste artigo eles provaram o seguinte resultado: Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante R e $\lambda \neq 0$. Então $0 \leqslant R \leqslant n\lambda$ para $\lambda > 0$ e $n\lambda \leqslant R \leqslant 0$ para $\lambda < 0$. No caso em que a curvatura escalar é um dos extremos M é Einstein.

Fernández-López e Garcia-Río melhoraram substancialmente este último resultado. Eles mostraram que, na classe de sólitons de Ricci gradiente com curvatura escalar constante, os possíveis valores da curvatura escalar deve ser um múltiplo da constante λ. Para isso, eles usaram a teoria de Funções Isoparamétricas, uma vez que a função potencial do sóliton de Ricci gradiente satisfaz a equação $|\nabla f|^2 = 2\lambda f - R + c$, em que $c \in \mathbb{R}$. Ademais, contraindo a equação fundamental, obtêm-se $\Delta f = n\lambda - R$, de modo que, se R é constante, então f é uma Função Isoparamétrica. Precisamente, eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 1. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante R, então $R \in \{0, \lambda, \dots, (n-1)\lambda, n\lambda\}$.*

Destacamos a seguir uma condição necessária e suficiente pra que um sóliton de Ricci gradiente seja rígido.

Teorema 2. *Um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante é rígido se, e somente se, o operador de Ricci tem posto constante.*

Da forma que foi estabelecido o Teorema 1 os autores investigaram o que poderia ser concluído quando R assumisse um dos valores do conjunto $\{0, \lambda, \dots, (n-1)\lambda, n\lambda\}$. O caso em que $R = 0$ e $R = n\lambda$ o teorema de Petersen e Wylie garante que M é Einstein.

O caso em que $R = \lambda$, Fernández-López e Garcia-Río provaram que não existe sóliton de Ricci gradiente contrátil e quando $R = (n-1)\lambda$ eles provaram a requerida rigidez.

Teorema 3. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar* $R = (n-1)\lambda$*, então ele é rígido. Além disso, não existe sóliton de Ricci gradiente contrátil com curvatura escalar* $R = \lambda$*.*

Em [28] Petersen e Wylie provaram que: dado um sóliton de Ricci gradiente de dimensão 3 com curvatura escalar constante e tensor de Ricci com no máximo 3 autovalores distintos, então ele é rígido. Finalizaremos esta dissertação provando uma generalização deste último resultado, o qual foi feito em [15], a saber:

Teorema 4. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante. Se o tensor de Ricci tem no máximo 3 autovalores distintos, então ele é rígido.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos exibir algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Mais especificamente, abordaremos a teoria de Tensores em Variedades Riemannianas; Operadores Diferenciais; e de Funções Isoparamétricas.

1.1 Tensores em Variedades Riemannianas

Para um maior aprofundamento dos assuntos que abordaremos nesta seção recomendamos ao leitor os livros de M.P. do Carmo [5], Petersen [26], Lee [22] e Spivak [32]. Aqui assumiremos os conceitos e fórmulas básicas da teoria de Variedades Diferenciáveis.

Definição 1.1. *Um $(1, r)$-tensor em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

multilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Enquanto que, num $(0, r)$-tensor, o contradomínio é $C^\infty(M)$. Formalmente, para $f, \ell \in C^\infty(M)$ vale que

$$T(Y_1, \ldots, fX + \ell Y, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + \ell T(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r)$$

Exemplo 1.1. *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $X, Y \in T_pM$, o produto interno de X e Y na métrica Riemanniana de M, isto é, $g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_p$, é um $(0, 2)$-tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Um fato importante é que de modo geral, dado um $(0, r)$-tensor T em uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$, podemos identificá-lo com um $(1, r-1)$-tensor $\widetilde{T}$ mediante a métrica Riemanniana $\langle , \rangle$, fazendo

$$\langle \widetilde{T}(Y_1, \ldots, Y_{r-1}), Y_r \rangle := T(Y_1, \ldots, Y_r). \tag{1.1}$$

Por simplicidade e, desde que não haja confusão na notação, utilizaremos a mesma letra para indicar o $(1, r-1)$-tensor correspondente ao seu $(0, r)$-tensor. Em particular, o tensor métrico g pode ser identificado com o $(1,1)$-tensor identidade I em $\mathfrak{X}(M)$.

Em uma variedade diferenciável de modo natural podemos estender a noção de derivada covariante a tensores como segue.

Definição 1.2. *A derivada covariante de um $(1, r)$-tensor T é um $(1, r+1)$-tensor ∇T dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r). \tag{1.2}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots, Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

Definição 1.3. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor*

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$R_m(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.2. *Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R_m(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. De fato, seja $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n)$ e $\nabla_Y Z = (Yz_1, \ldots, Yz_n)$. Logo,*

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \ldots, XYz_n), \quad \nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X, Y]z_1, \ldots, [X, Y]z_n).$$

Portanto, $R_m(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$.

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$-tensor

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dado por

$$R_m(X, Y, Z, W) = \langle R_m(X, Y)Z, W \rangle$$

Proposição 1.1. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $R_m(X,Y,Z,W) = -R_m(Y,X,Z,W) = R_m(Y,X,W,Z)$.

2. $R_m(X,Y,Z,W) = R_m(Z,W,X,Y)$.

3. $R_m(X,Y)Z + R_m(Y,Z)X + R_m(Z,X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi).*

4. $(\nabla_X R_m)(Y,Z,W)+(\nabla_Y R_m)(Z,X,W)+(\nabla_Z R_m)(X,Y,W) = 0$ *(segunda identidade de Bianchi).*

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $i,j = 1,\dots,n$.

Definição 1.4. *A curvatura seccional $K_p(\sigma)$ no ponto $p \in M$ segundo um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, é definida por*

$$K_p(\sigma) = \frac{\langle R_m(x,y)y, x\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $x,y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes e $|x\wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2$. Convém considerarmos também a notação $K_p(x,y) = K_p(\sigma)$. Em muitas literaturas a curvatura seccional também aparece com a notação $sec(x,y)$.

Da teoria de Álgebra Linear segue que esta definição não depende da escolha dos vetores x,y que geram σ. Além disso, note que, se $\{e_1,\dots,e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, temos

$$K_{ij} := K(e_i,e_j) = \langle R(e_i,e_j)e_j, e_i\rangle = R(e_i,e_j,e_j,e_i) =: R_{ijji}.$$

Fixemos um vetor $v \in T_pM$, de modo que $\{v, e_1,\dots,e_{n-1}\}$ seja uma base ortonormal de T_pM. Vamos considerar todas as possíveis curvaturas seccionais dos planos que podemos gerar com v e tomar a média

$$Ric_p(v) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K_p(v,e_i).$$

Esta é conhecida como curvatura de Ricci no ponto p segundo v. Deste modo, podemos novamente considerar a base ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\} \subset T_pM$, para calcularmos a média

$$s := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ric_p(e_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} K_p(e_j,e_i).$$

Ligado a estas funções curvaturas temos.

Definição 1.5. *O tensor curvatura de Ricci é o $(0,2)$-tensor obtido pelo traço do tensor curvatura de Riemann. Isto é,*

$$Ric(Y,Z) = tr\{X \longmapsto R_m(X,Y)Z\}, \tag{1.4}$$

em que $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM$ é uma base ortonormal e $u, v \in T_pM$, então para cada $p \in M$ o tensor de Ricci é dado por

$$Ric(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R_m(e_i,u)v, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R_m(e_i,v)u, e_i\rangle = Ric(v,u),$$

onde a segunda igualdade segue da Proposição 1.1, o que prova a simetria do tensor de Ricci. Diremos que $Ric \geq k$ (ou $\leq k$) se cada autovalor real Λ de Ric satisfaz $\Lambda \geq k$ (ou $\leq k$).

Retornando à base ortonormal $\{v, e_1, \ldots, e_{n-1}\} \subset T_pM$, vamos deduzir que

$$Ric(v,v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R_m(e_i,v)v, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i,v) = (n-1)Ric(v). \tag{1.5}$$

Tomando o traço na equação (1.5) obtemos a relação entre R e s, a saber:

$$R := \sum_{j=1}^{n} Ric(e_j,e_j) = (n-1)\sum_{j=1}^{n} Ric(e_j) = n(n-1)s.$$

Por isso, R é conhecida como curvatura escalar, enquanto que s como curvatura escalar normalizada.

Uma conta direta mostra que, em dimensão dois, o tensor de Ricci fica determinado pela curvatura de Gauss K, pois é válida a relação

$$Ric = Kg.$$

Agora iremos fazer alguns comentários sobre a derivada de Lie, para isso recordemos agora o seguinte fato sobre EDO. Seja X um campo diferenciável de vetores em M. Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p, um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, e uma aplicação diferenciável $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \to M$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t,q)$ é a única curva diferenciável satisfazendo $\dfrac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t} = X_{\varphi(t,q)}$ e $\varphi(0,q) = q$, para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ e $q \in U$. Observemos que este resultado é apenas uma extensão para M^n do teorema fundamental de existência, unicidade e dependência das condições iniciais das equações diferenciais ordinárias.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \to M$ o fluxo de X. Consideremos, para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, o difeomorfismo $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$. A derivada de Lie de Y com respeito a X é o campo de vetores que a cada $p \in M$ associa ao vetor tangente dado por

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi_t^{-1} Y_{\varphi(t,p)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[d\varphi_t^{-1} Y_{\varphi(t,p)} - Y_p\big]. \tag{1.6}$$

Como $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ e $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = i_d$, temos a seguinte equivalência com a definição em (1.6)

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} d\varphi_{-t}\big[(Y_{\varphi_t(p)} - d\varphi_t Y)\big] = \lim_{t\to 0} d\varphi_{-t}\big[\frac{1}{t}(Y_{\varphi_t(p)} - d\varphi_t Y)\big] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[Y_{\varphi_t(p)} - d\varphi_t Y\big].$$

Na última igualdade utilizamos que $\lim\limits_{t\to 0} d\varphi_{-t} = i_d$. Este fato segue da definição de vetor tangente e da dependência contínua de $\varphi(t,q)$ com relação a t e q.

Considere um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, o seu fluxo $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, e para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, o difeomorfismo $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$. A derivada de Lie de T com respeito a X é o $(0,r)$-tensor $\mathcal{L}_X T$ que a cada $p \in M$ associa ao operador dado por

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^* T)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[\varphi_t^* T_{\varphi(t,p)} - T_p\big].$$

Para o caso de funções $f \in C^\infty(M)$, devemos interpretá-las como 0-tensores, de modo que $\varphi_t^* f = f \circ \varphi$ implica

$$(\mathcal{L}_X f)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^* f)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \varphi_t(p)).$$

Também vale a próxima propriedade da derivada de Lie para um $(0,r)$-tensor T em M

$$(\mathcal{L}_X T)(Y_1, \ldots, Y_r) = X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T([X, Y_1], Y_2, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, [X, Y_r]).$$

Iremos provar este fato para um $(0,2)$-tensor T. Como segue

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X T)_p(Y,Z) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[\varphi_t^* T_{\varphi(t,p)}(Y,Z) - T_p(Y,Z)\big] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[T_{\varphi_t(p)}(d\varphi_t Y, d\varphi_t Z) - T_p(Y,Z)\big] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[T_{\varphi_t(p)}\big(d\varphi_t Y - Y_{\varphi_t(p)} + Y_{\varphi_t(p)}\, ,\, d\varphi_t Z - Z_{\varphi_t(p)} + Z_{\varphi_t(p)}\big) - T_p(Y,Z)\big].
\end{aligned}$$

Pela bilinearidade de T,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X T)_p(Y,Z) &= \lim_{t\to 0} T_{\varphi_t(p)}\big(\frac{1}{t}(d\varphi_t Y - Y_{\varphi_t(p)}), d\varphi_t Z - Z_{\varphi_t(p)}\big) \\
&\quad + \lim_{t\to 0} T_{\varphi_t(p)}\big(\frac{1}{t}(d\varphi_t Y - Y_{\varphi_t(p)}), Z_{\varphi_t(p)}\big) \\
&\quad + \lim_{t\to 0} T_{\varphi_t(p)}\big(Y_{\varphi_t(p)}, \frac{1}{t}(d\varphi_t Z - Z_{\varphi_t(p)})\big) \\
&\quad + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[T_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}, Z_{\varphi_t(p)}) - T_p(Y,Z)\big] \\
&= -T_p([X,Y],Z) - T_p(Y,[X,Z]) + X(T(Y,Z)).
\end{aligned}$$

Em particular, para a métrica Riemanniana g em M vale:

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y). \tag{1.7}$$

1.2 Operadores Diferenciais

Nesta dissertação trabalharemos com operadores diferenciais (gradiente, laplaciano, etc.) em uma variedade Riemanniana M de dimensão n.

Definição 1.6. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de f é o campo vetorial diferenciável ∇f, definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X) \tag{1.8}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

É imediato das propriedades de derivação que para $f, h \in C^\infty(M)$, vale:

$$\nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h \quad \text{e} \quad \nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h.$$

Definição 1.7. *Seja X um campo de vetores diferenciável em M. A divergência de X é a função diferenciável* $\mathrm{div}X : M \to \mathbb{R}$*, definida pelo operador traço*

$$\mathrm{div}X = \mathrm{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\}. \tag{1.9}$$

Seja X um campo diferenciável em M e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então

$$\mathrm{div}X(p) = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle). \tag{1.10}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, temos que

$$\mathrm{div}X(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i). \tag{1.11}$$

De fato,

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}(e_i\langle X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle),$$

o que prova nossa afirmação. Além disso, uma conta direta prova que para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

e $f : M \to \mathbb{R}$, vale:

$$\text{div}(X+Y) = \text{div}X + \text{div}Y \ \text{ e } \ \text{div}(fX) = f\text{div}X + \langle \nabla f, X\rangle.$$

Definição 1.8. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O laplaciano de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \text{div}\nabla f. \tag{1.12}$$

Das propriedades estabelecidas acima obtemos a seguinte igualdade para o laplaciano, sejam $f, h \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(fh) &= \text{div}(\nabla(fh)) = \text{div}(h\nabla f) + \text{div}(f\nabla h) \\ &= h\ \text{div}\nabla f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle + f\ \text{div}\nabla h + \langle \nabla f, \nabla h\rangle \\ &= h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Definição 1.9. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$(\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.14}$$

Ou como $(0,2)$-tensor, dado por

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = \nabla^2_{X,Y}(f). \tag{1.15}$$

Um fato importante é que $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é simétrico. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle (\nabla^2 f)(X), Y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) = \nabla^2_{X,Y}(f). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Além disso, também teremos

$$\langle (\nabla^2 f)(Y), X\rangle = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) = \nabla^2_{Y,X}(f). \tag{1.17}$$

Subtraindo (1.17) de (1.16) concluímos a requerida simetria

$$\nabla^2_{X,Y}(f) = \langle (\nabla^2 f)(X), Y\rangle = \langle (\nabla^2 f)(Y), X\rangle = \nabla^2_{Y,X}(f).$$

Outros fatos relevantes são:

$$\begin{aligned}
\nabla df &= \nabla^2 f, \\
R_m(X,Y)\nabla f &= (\nabla_X \nabla^2 f)(Y) - (\nabla_Y \nabla^2 f)(X), \\
\mathcal{L}_{\nabla f} g &= 2\nabla^2 f, \\
\nabla|\nabla f|^2 &= 2\nabla^2 f(\nabla f).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

As duas primeiras igualdades seguem imediatamente da definição de derivada covariante de tensores e da definição do operador hessiano. Com efeito, sejam X e Y campos de vetores arbitrários em M, então

$$(\nabla df)(X,Y) \;=\; \nabla_X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f) = \nabla^2 f(X,Y)$$

como X e Y são arbitrários segue que $\nabla df = \nabla^2 f$. A segunda igualdade é a expressão para o tensor curvatura de Riemann R_m em termos do hessiano, deduzimos tal igualdade como segue. Sejam X e Y campos de vetores arbitrários, por um lado

$$(\nabla_X \nabla^2 f)(Y) = \nabla_X \nabla^2 f(Y) - \nabla^2 f(\nabla_X Y) = \nabla_X \nabla_Y \nabla f - \nabla_{\nabla_X Y} \nabla f \tag{1.19}$$

por outro lado, de maneira análoga temos

$$(\nabla_Y \nabla^2 f)(X) = \nabla_Y \nabla_X \nabla f - \nabla_{\nabla_Y X} \nabla f, \tag{1.20}$$

combinando (1.19) com (1.20) obtemos imediatamente a equação (1.18), como segue

$$(\nabla_X \nabla^2 f)Y - (\nabla_Y \nabla^2 f)X = \nabla_X \nabla_Y \nabla f - \nabla_Y \nabla_X \nabla f - \nabla_{[X,Y]} \nabla f = R_m(X,Y)\nabla f.$$

Para a terceira identidade, basta substituir os campos de vetores $\nabla f, Y, Z$ na equação (1.7)

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(Y,Z) &= \langle \nabla_Y \nabla f, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z \nabla f\rangle \\
&= \nabla^2 f(Y,Z) + \nabla^2 f(Y,Z) = 2\nabla^2 f(Y,Z),
\end{aligned}$$

donde obtemos a requerida identidade. A última identidade é apenas uma conta direta iniciando pela definição do gradiente.

1.2.1 Tensores e os Operadores Diferenciais

Nesta seção veremos algumas importantes propriedades dos tensores as quais envolvem os operadores diferenciais. Nosso primeiro objetivo será definir um produto interno entre tensores.

Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em uma variedade diferenciável M

de dimensão n com métrica Riemanniana $g = \langle , \rangle$, $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ o referencial coordenado e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal. O *traço* de um $(0,2)$-tensor T é dado por

$$tr(T) = \sum_i T(e_i, e_i),$$

ou ainda, utilizando a *convenção de Einstein da soma*, segundo a qual estará implícita uma soma sempre que houver índices repetidos e em posições invertidas, temos

$$tr(T) = g^{ij} T(\partial_i, \partial_j) = g^{ij} g(T(\partial_i), \partial_j). \tag{1.21}$$

Observemos que $T(\partial_i) = g^{kl} g(T(\partial_i), \partial_k)\partial_l = g^{kl} g(\partial_i, T^*(\partial_k))\partial_l$, onde T^* é o *operador adjunto formal* de T. Consideremos outro $(0,2)$-tensor S e seus respectivos $(1,1)$-tensores, dados por

$$T(X,Y) = \langle T(X), Y\rangle \ \text{ e } \ S(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle. \tag{1.22}$$

Desta forma, temos $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $S : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Além disso, $S^* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\langle S(X), Y\rangle = \langle X, S^*(Y)\rangle$. Vamos procurar uma expressão para $tr(TS^*)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} tr(TS^*) &\overset{(1.21)}{=} g^{ij} g\left((TS^*)(\partial_i), \partial_j\right) = g^{ij} g\left(T\left(S^*(\partial_i)\right), \partial_j\right) \\ &= g^{ij} g(T(g^{kl} g(\partial_i, S(\partial_k))\partial_l), \partial_j) \\ &= g^{ij} g^{kl} g(S(\partial_k), \partial_i) g(T(\partial_l), \partial_j) = g^{ij} g^{kl} S_{ki} T_{lj}. \end{aligned}$$

A simetria da matriz (g^{ij}) e uma renumeração nos índices permite-nos escrever

$$tr(TS^*) = g^{ik} g^{jl} T_{ij} S_{kl}. \tag{1.23}$$

Assim, em $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$\begin{aligned} tr(TS^*) &= \sum_{i,j} T_{ij} S_{ij} = \sum_{i,j} g(T(e_i), e_j) g(S(e_i), e_j) \\ &= \sum_i g(T(e_i), \sum_j g(S(e_i), e_j) e_j) = \sum_i g(T(e_i), S(e_i)), \end{aligned}$$

$$tr(TT^*) = \sum_i g(T(e_i), T(e_i)) = \sum_i |T(e_i)|^2 \tag{1.24}$$

e

$$tr(Tg^*) = \sum_i g\left(T(e_i), I(e_i)\right) = \sum_i g\left(T(e_i), e_i\right) = tr(T). \tag{1.25}$$

As relações (1.23) e (1.24) nos mostram que podemos definir um *produto interno* entre os $(0,2)$-tensores T e S, fazendo

$$\langle T, S\rangle := tr(TS^*). \tag{1.26}$$

Este é conhecido como *produto interno de Hilbert-Schmidt.*

Definição 1.10. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Definimos a parte sem traço de um $(0,2)$-tensor T em M por*

$$\mathring{T} := T - \frac{tr(T)}{n} g.$$

Então

$$0 \leq |\mathring{T}|^2 = \left| T - \frac{tr(T)}{n} g \right|^2 = |T|^2 - \frac{tr(T)^2}{n}.$$

Assim

$$|T|^2 \geq \frac{1}{n} tr(T)^2.$$

Note que a igualdade ocorre se, e somente se, $T = \frac{tr(T)}{n} g$.

O caso em que T é simétrico pode ser pensado assim. Considere uma base $\{e_i\}$ de T_pM tal que $Te_i = \lambda_i e_i$, para $i = 1, ..., n$, sendo assim,

$$\langle T, T\rangle = |T|^2 = tr(T^2) = \sum_i \lambda_i^2.$$

Recorde que $(a_1 + ... + a_n)^2 \leqslant n \sum_i a_i^2$ para todo $a_i \in \mathbb{R}$ desta maneira

$$(tr(T))^2 = (\lambda_1 + ... + \lambda_n)^2 \leqslant n \sum_i \lambda_i^2 = n|T|^2.$$

Definição 1.11. *Definimos a divergência de um $(1,r)$-tensor T em M, como sendo o $(0,r)$-tensor dado por*

$$(\mathrm{div} T)(v_1, \ldots, v_r)(p) = tr\big(w \mapsto (\nabla_w T)(v_1, \ldots, v_r)(p)\big),$$

onde $p \in M^n$ e $(v_1, \ldots, v_r) \in T_pM \times \ldots \times T_pM$.

Seja T um $(0,2)$-tensor em uma variedade Riemanniana M de dimensão n, tomemos um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em M. Consideremos o seu $(1,1)$-tensor correspondente T. Então, div$T$ é um $(0,1)$-tensor que satisfaz, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}T)(Z) &= \sum_i g(\,(\nabla_{e_i}T)(Z), e_i\,)\\ &= \sum_i g(\,\nabla_{e_i}T(Z),\, e_i\,) - g(\,T(\nabla_{e_i}Z),\, e_i\,)\\ &= \mathrm{div}(T(Z)) - \sum_i T(\nabla_{e_i}Z, e_i).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{div}(T(Z)) = (\mathrm{div}T)(Z) + \langle \nabla Z, T^* \rangle. \tag{1.27}$$

Além disso sabemos que a métrica Riemanniana g em M, induz em cada espaço dual T_p^*M do espaço tangente T_pM, um produto interno com propriedades análogas a g, bastando definir para cada $X^\flat, Y^\flat \in T_p^*M$

$$\langle X^\flat, Y^\flat \rangle = \langle X, Y \rangle, \tag{1.28}$$

em que $X, Y \in T_pM$ são os vetores correspondentes a $X^\flat$ e $Y^\flat$, respectivamente. Ademais,

$$\langle \mathrm{div}T, Z^\flat \rangle = \sum_i (\mathrm{div}T)(e_i)\langle Z, e_i \rangle = (\mathrm{div}T)\Big(\sum_i \langle Z, e_i \rangle e_i\Big) = (\mathrm{div}T)(Z).$$

Ao se escrever esta última relação para um $(0,2)$-tensor, fica implícito que estamos trabalhando com o $(1,1)$-tensor correspondente.

Fato 1.1. *As seguintes fórmulas são válidas em qualquer variedade Riemanniana M.*

1. $\mathrm{div}(fg) = df$, *para toda* $f \in C^\infty(M)$.
2. $\mathrm{div}Ric = \frac{1}{2}dR$ *(segunda identidade de Bianchi contraída).*

A demonstração do Item 1 é imediata da Definição 1.11, enquanto que a demonstração do Item 2 segue por contração da segunda identidade de Bianchi e pode ser encontrada no livro do Petersen [26].

Segue do Fato 1.1 que

$$\mathrm{div}\mathring{Ric} = \frac{n-2}{2n}dR, \tag{1.29}$$

em que $\mathring{Ric} := Ric - \frac{R}{n}g$.

Para o que segue, definimos o laplaciano Δdf da diferencial df de uma função $f \in C^\infty(M)$, pela divergência do $(1,1)$-tensor $\nabla df = \nabla^2 f$. A equação a seguir nos mostra que nem sempre o laplaciano comuta com a diferencial.

Corolário 1.1.

$$\Delta df = d\Delta f + Ric(\nabla f, \cdot). \tag{1.30}$$

Demonstração. Em geral, vale que

$$\begin{aligned} Ric(X, \nabla f) &= \operatorname{div}(\nabla_X \nabla f) - \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle \\ &= \operatorname{div}(\nabla^2 f(X)) - (d\Delta f)(X) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle. \end{aligned}$$

Ajustando os termos acima, utilizando a equação (1.27) e observando que $\nabla df = \nabla^2 f$, obtemos

$$Ric(X, \nabla f) + (d\Delta f)(X) = \operatorname{div}(\nabla^2 f(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle = (\operatorname{div} \nabla^2 f)(X) = (\Delta df)(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, o que é suficiente para obter a requerida equação do corolário. $\square$

Definição 1.12. *Seja T um $(1, r)$-tensor, o laplaciano de T em M é o $(0, r+1)$-tensor dado por*

$$\Delta T = \operatorname{div} \nabla T.$$

1.3 Funções Isoparamétricas

Um dos conceitos centrais para o entendimento de uma parte deste trabalho é o de Função Isoparamétrica. Por meio desta classe de funções é possível estudar os sólitons de Ricci gradiente com curvatura escalar constante. Nesta seção vamos comentar sobre fatos envolvendo funções isoparamétricas em variedades Riemannianas, motivaremos tal conceito e enunciaremos um teorema que relaciona funções isoparamétricas com uma hipersuperfície isoparamétrica. Para maiores detalhes recomendamos ao leitor os artigos de Levi-Civita [10], Segre [30] e Cartan [6, 7, 8, 9].

Seja M^n uma variedade Riemanniana e φ uma aplicação real diferenciável em $M \times \mathbb{R}$, dada pela equação da onda

$$\Delta\varphi(x, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t), \tag{1.31}$$

em que Δ denota-se o operador de Laplace-Beltrami, $t \in \mathbb{R}$ representa a variável temporal e $x \in M$ representa a variável espacial.

Define-se como frente de onda os conjuntos formados por pontos de um mesmo estado de fase em um instante de tempo $t_0 \in \mathbb{R}$, expresso em outros termos, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ definimos a aplicação $f_{t_0} : M \to \mathbb{R}$ por $f_{t_0}(x) = \varphi(x, t_0)$. As frentes de onda no tempo t_0 são os conjuntos de níveis da função f_{t_0}.

No intuito de nos aproximarmos do conceito de hipersuperfície isoparamétrica temos que impor condições sobre φ, então em primeiro lugar vamos assumir que a frente de onda não depende do tempo, desta forma se M é uma frente de onda e $x_0 \in M$, a aplicação

$c : M \to \mathbb{R}$, dada por $c(t) = \varphi(x_0, t)$ não depende de x_0 escolhido mas depende da frente da onda. O laplaciano de f é constante a longo do conjunto de nível, para que qualquer $x \in f^{-1}(c(t_0))$ tem-se

$$\Delta f(x) = \Delta\varphi(x, t_0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x, t_0) = c''(t_0). \tag{1.32}$$

Outra condição que devemos impor é que o gradiente seja constante ao longo de conjuntos de níveis e como conclusão podemos dizer que as ondas estacionárias com frente de ondas equidistantes permitem determinar uma função diferenciável f verificando que tanto $|\nabla f|$ como Δf são constantes ao longo de seus conjuntos de níveis o que nos permite apresentar a definição de função isoparamétrica, no qual aparece a primeira vez em [10].

Definição 1.13. *Seja M uma variedade Riemanniana, uma função diferenciável não constante $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é dita transnormal se houver uma função diferenciável $b : f(M) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que*

$$|\nabla f|^2 = b(f). \tag{1.33}$$

Se, além disso, houver uma função contínua $a : f(M) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta f = a(f), \tag{1.34}$$

então dizemos que f é uma função isoparamétrica.

Uma coleção $\{f^{-1}(c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ de conjuntos de níveis de f, é uma família isoparamétrica de hipersuperfícies, por outro lado, uma hipersuperfície N imersa em M é isoparamétrica se para cada ponto $p \in M$ existe uma aberto U em torno de p em M, tais que as hipersuperfícies equidistantes a U tem curvatura média constante.

O teorema abaixo relaciona de forma precisa a relação entre função isoparamétrica e hipersuperfície isoparamétrica, através dele podemos estudar a curvatura de hipersuperfícies por meio de funções isoparamétricas.

Teorema 1.1. *Sejam $f : M \to \mathbb{R}$ uma função isoparamétrica e $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de f. Então $N = f^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície isoparamétrica de M.*

Demonstração. Ver em [33]. □

A condição (1.33) implica que os conjuntos de níveis de f são paralelos entre si, enquanto que, a condição (1.34) implica que uma hipersuperfície de nível tem curvatura média constante.

A seguir daremos alguns exemplos de funções isoparamétricas nos espaços formas. Para um maior aprofundamento neste assunto, indicamos ao leitor a dissertação de Alexandrino [1].

Exemplo 1.3. *Considere a função* $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2$ *para* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $k \leq n$ *um inteiro positivo. Temos que* $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{k} 2x_i e_i$*, em que* $\{e_i\}$ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^n$*. Então,* f *é uma função isoparamétrica em* $\mathbb{R}^n$*.*

Com efeito, o laplaciano de f é dado por $\Delta f(x) = 2k$, além disso, vale

$$|\nabla f(x)|^2 \;=\; \langle \nabla f(x), \nabla f(x)\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{k} 2x_i e_i, \sum_{i=1}^{k} 2x_j e_j \Big\rangle = 4x_1^2 +, \cdots + 4x_k^2 = 4f(x).$$

Exemplo 1.4. *Seja* $\mathbb{M}^{n+1}(c)$ *o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$*, para* $c = -1$*, ou a esfera canônica* $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$*, para* $c = 1$*, ou seja,* $\mathbb{M}^{n+1}(c) = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + cx_{n+2}^2 = c\}$ *com a métrica Riemanniana induzida pela forma quadrática* $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2 + cdx_{n+2}^2$ *em* $\mathbb{R}^{n+2}$*. Em ambos os casos, o vetor* $\eta(x) = \vec{x}$*, com* $x \in \mathbb{M}^{n+1}(c)$*, é um vetor normal a* $\mathbb{M}^{n+1}(c)$ *na métrica induzida por* ds^2*. Defina* $\tilde{f}$ *no espaço geométrico* $(\mathbb{R}^{n+2}, ds^2)$ *pondo*

$$\tilde{f}(x) \;=\; cx_1^2 + \cdots + cx_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2,$$

em que k *é um inteiro positivo menor que* $n+2$*. Então a restrição* $f = \tilde{f}|_{\mathbb{M}^{n+1}(c)}$ *é uma função isoparamétrica em* $\mathbb{M}^{n+1}(c)$*.*

Com efeito, seja $\tilde{\nabla}\tilde{f}$ o gradiente de $\tilde{f}$ calculado na métrica dada por ds^2, então

$$\tilde{\nabla}\tilde{f}(x) = 2(cx_1, \ldots, cx_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}, cx_{n+2}). \tag{1.35}$$

Assim para todo $x \in \mathbb{M}^{n+1}(c)$ temos que

$$|\tilde{\nabla}\tilde{f}(x)|^2 = 4(x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + cx_{n+2}^2) = 4c. \tag{1.36}$$

Além disso,

$$\langle \tilde{\nabla}\tilde{f}(x), \eta(x)\rangle = 2(cx_1^2 + \cdots + cx_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2) = 2f(x). \tag{1.37}$$

Como $\langle \eta, \eta\rangle = c$, concluímos a partir de (1.37) que

$$\tilde{\nabla}\tilde{f}(x) = \nabla f(x) + c\langle \tilde{\nabla}\tilde{f}(x), \eta(x)\rangle \eta(x) = \nabla f(x) + 2cf(x)\eta(x). \tag{1.38}$$

Donde,

$$|\tilde{\nabla}\tilde{f}|^2 = |\nabla f|^2 + 4cf^2.$$

Substituindo (1.36) nesta última equação, obtemos

$$|\nabla f|^2 = -4cf^2 + 4c.$$

Isso prova que f é transnormal.

A seguir iremos mostrar que o laplaciano de f também é uma função de f satisfazendo, portanto, a condição para que f seja uma função isoparamétrica.

Seja $\tilde{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $(\mathbb{R}^{n+2}, ds^2)$ e ∇ a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}^{n+1}(c)$. Como os coeficientes de ds^2 são constantes, segue que $\tilde{\nabla}$ coincide com a conexão euclidiana, portanto, é imediato da equação (1.35) que

$$(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla} \tilde{f})(y) = 2(cy_1, \ldots, cy_k, y_{k+1}, \ldots, y_{n+1}, cy_{n+2}), \tag{1.39}$$

onde $y = (y_1, \ldots, y_{n+2})$. Em particular, para $Y(x) = \eta(x) = \vec{x}$ obtemos

$$\tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f} = \tilde{\nabla} \tilde{f}.$$

Logo, é imediato de (1.37) a próxima equação

$$\langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{f}(x), \eta(x) \rangle = 2f(x). \tag{1.40}$$

Aplicando a base canônica $\{u_1, \ldots, u_{n+1}, u_{n+2}\}$ de $(\mathbb{R}^{n+2}, ds^2)$ na equação (1.39), em que $\langle u_i, u_j \rangle = 1$ para $i = 1, \ldots, n+1$; $\langle u_{n+2}, u_{n+2} \rangle = c$ e $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, deduzimos

$$\tilde{\Delta} \tilde{f} = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \tilde{\nabla}_{u_i} \tilde{\nabla} f, u_i \rangle + c \langle \tilde{\nabla}_{u_{n+2}} \tilde{\nabla} f, u_{n+2} \rangle = 2ck + 2(n+1-k) + 2c. \tag{1.41}$$

Por outro lado, em um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2} = \eta\}$ em $(\mathbb{R}^{n+2}, ds^2)$ adaptado a $\mathbb{M}^{n+1}(c)$, este laplaciano é calculado como segue

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} \tilde{f} &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla} \tilde{f}, e_i \rangle + c \langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i \langle \tilde{\nabla} \tilde{f}, e_i \rangle - \langle \tilde{\nabla} \tilde{f}, \tilde{\nabla}_{e_i} e_i \rangle) + c \langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \tilde{\nabla}_{e_i} e_i(\tilde{f})) + c \langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Pela teoria de imersões isométricas nós escrevemos $\tilde{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i + \alpha(e_i, e_i)$, para $i = 1, \ldots, n+1$, em que α é a segunda forma fundamental de $\mathbb{M}^{n+1}$ em $(\mathbb{R}^{n+2}, ds^2)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}\tilde{f} &= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \nabla_{e_i} e_i(f) - \alpha(e_i, e_i)(\tilde{f})) + c\langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(e_i, e_i)(\tilde{f}) + c\langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle \\
&= \Delta f - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(e_i, e_i)(\tilde{f}) + c\langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle \\
&= \Delta f - \sum_{i=1}^{n+1} c\langle \alpha(e_i, e_i), \eta \rangle \eta(\tilde{f}) + c\langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Relembrando que $\langle \alpha(e_i, e_i), \eta \rangle = \langle A_\eta e_i, e_i \rangle$, em que A_η é o operador de Weingartein da imersão, que neste caso é $A_\eta = -d\eta = -id$, a equação anterior se resume a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}\tilde{f} &= \Delta f + \sum_{i=1}^{n+1} c\langle e_i, e_i \rangle \eta(\tilde{f}) + c\langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle \\
&= \Delta f + c(n+1)\eta(\tilde{f}) + c\langle \tilde{\nabla}_\eta \tilde{\nabla} \tilde{f}, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Note que $\eta(\tilde{f})$ é dado pela equação (1.37), enquanto que o terceiro termo é dado por (1.40), assim, essa última equação reduz-se a

$$\tilde{\Delta}\tilde{f} = \Delta f + 2c(n+1)f + 2cf = \Delta f + 2c(n+2)f.$$

Utilizando (1.41) concluímos que

$$\Delta f = -2c(n+2)f + 2ck + 2(n+1-k) + 2c.$$

Isso prova a nossa afirmação.

Capítulo 2

Sólitons de Ricci Gradiente.

Neste capítulo definimos sólitons de Ricci gradiente e pravamos algumas fórmulas que usaremos nas demonstrações.

2.1 Resultados Auxiliares

Definição 2.1. *Um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana completa* (M^n, g) *junto com um campo de vetores* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *satisfazendo a equação fundamental*

$$Ric_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{2.1}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$*, onde o* Ric_g *e* $\mathcal{L}_X g$ *denotam, respectivamente, o tensor de Ricci na métrica* g *e a derivada de Lie de* g *com respeito a* X*. A notação* (M^n, g, X, λ) *é utilizada para representar um sóliton de Ricci. Ele é chamado expansivo se* $\lambda < 0$*, estável se* $\lambda = 0$ *e contrátil se* $\lambda > 0$*. Se* $X = \nabla f$ *para alguma função diferenciável* $f : M \to \mathbb{R}$*, então a equação* (2.1) *fica reescrita da seguinte maneira*

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g \tag{2.2}$$

em que $\nabla^2 f$ *é o tensor hessiano da função* f*. Neste caso, a quádrupla* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *representa um sóliton de Ricci gradiente.*

Os dois próximos exemplos estão diretamente relacionados ao caso de rigidez que será discutido no capítulo principal.

Exemplo 2.1. *(Sóliton Einstein) Uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *é chamada de variedade Einstein se o tensor de Ricci satisfaz* $Ric = Kg$*, onde* K *é uma função real definida em* M^n *devendo ser igual a* R/n*, em que* $R = tr(Ric)$*. Supondo que* M^n *é conexa com dimensão* $n \geq 3$*, o teorema de Schur, cuja a prova pode ser encontrada em [26], nos garante que a função* K *é constante. Em particular, se* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é um campo Killing, isto é,* $\mathcal{L}_X g = 0$*, então* $(M^n, g, X, R/n)$ *satisfaz trivialmente a equação fundamental* (2.1).

Exemplo 2.2. *(Sóliton Gaussiano) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$, onde λ é uma constante real não nula. Note que, na métrica euclidiana g_0 de $\mathbb{R}^n$, é válido que $\nabla^2 f = \lambda g_0$. Como o tensor de Ric nesta métrica é nulo, segue que $(\mathbb{R}^n, g_0, \nabla f, \lambda)$ satisfaz a equação fundamental (2.2). Esta quádrupla é conhecida como sóliton Gaussiano.*

Lema 2.1. *Para todo sóliton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ valem as equações:*

1. $\mathring{Ric} = -\mathring{\nabla}^2 f$.
2. $\nabla R = 2Ric(\nabla f)$ *ou, equivalentemente,* $Ric(\nabla f, \cdot) = \frac{1}{2}dR$.
3. $R_m(X, \nabla f)\nabla f = (\nabla_{\nabla f} Ric)(X) + Ric \circ (\lambda I - Ric)(X) - \frac{1}{2}\nabla^2 R(X)$.
4. $R_m(X, \nabla f)\nabla f = -(\nabla_{\nabla f}\nabla^2 f)(X) + (\lambda I - \nabla^2 f) \circ \nabla^2 f(X) - \frac{1}{2}\nabla^2 R(X)$.
5. $\frac{1}{2}\Delta_f R = tr(Ric \circ (\lambda I - Ric))$.
6. $\frac{1}{2}\Delta_f R = \lambda R - |Ric|^2$ *ou , equivalentemente,* $|\mathring{Ric}|^2 = -\frac{1}{2}\Delta_f R + \frac{R}{n}(\lambda n - R)$.
7. $|\nabla f|^2 + R - 2\lambda f = c$, *para algum* $c \in \mathbb{R}$.

Estas fórmulas são conhecidas como as equações de estrutura de um sóliton de Ricci gradiente e são mais comuns nas suas respectivas expressões em coordenadas. No caso compacto elas têm maior importância, uma vez que, todo sóliton de Ricci compacto é gradiente, este resultado foi provado por Perelman [25].

Demonstração. Tomando o traço na equação fundamental $Ric + \nabla^2 f = \lambda g$ obtemos $R + \Delta f = \lambda n$. Agora nós acrescentamos o tensor $\frac{R}{n}g$ em cada membro desta primeira equação, resultando em

$$\mathring{Ric} = -\nabla^2 f + \big(\lambda - \frac{R}{n}\big)g = -\nabla^2 f + \frac{\Delta f}{n}g = -\mathring{\nabla}^2 f,$$

o que prova o Item 1. O Item 2 segue por uma simples combinação do Fato 1.1 com a equação (1.30). Vejamos:

$$\frac{dR}{2} = \mathrm{div}Ric = \mathrm{div}(\lambda I - \nabla^2 f) = -\mathrm{div}(\nabla^2 f) = -d\Delta f - Ric(\nabla f, \cdot) = dR - Ric(\nabla f, \cdot),$$

isto é suficiente para concluir o requerido item. Para o Item 3, primeiro substituímos $\nabla^2 f = -Ric + \lambda I$ na equação (1.18) para obter

$$(\nabla_Y Ric)X - (\nabla_X Ric)Y = R_m(X, Y)\nabla f.$$

Em particular, para $Y = \nabla f$ deduzimos a equação da curvatura na direção radial, a saber:

$$(\nabla_{\nabla f} Ric)X - (\nabla_X Ric)\nabla f = R_m(X, \nabla f)\nabla f. \tag{2.3}$$

Pela definição de derivada covariante de tensores e pelo Item 2, calculamos

$$\begin{aligned}(\nabla_X Ric)(\nabla f) &= \nabla_X Ric(\nabla f) - Ric(\nabla_X \nabla f)\\ &= \frac{1}{2}\nabla_X \nabla R - Ric(\nabla^2 f(X))\\ &= \frac{1}{2}\nabla^2 R(X) - Ric \circ (\lambda I - Ric)(X).\end{aligned}$$

Substituindo esta última equação em (2.3) o requerido item fica determinado. O Item 4 é equivalente ao anterior porque $Ric = \lambda I - \nabla^2 f$ e a métrica é covariantemente constante.

Para o Item 5 apenas observe que o operador traço comuta com a derivada covariante, de modo que, a identidade deste item é obtida primeiramente tomando o traço no Item 4 e concluindo com o uso do Item 2, neste caso, relembre que $\Delta_f R = \Delta R - \langle \nabla f, \nabla R\rangle$.

O Item 6 segue imediatamente do anterior e da definição da norma de Hilbert-Schmidt em (1.26), pois

$$\frac{1}{2}\Delta_f R = tr(Ric \circ (\lambda I - Ric)) = \langle Ric, \lambda I - Ric\rangle = \lambda R - |Ric|^2,$$

ou, equivalentemente, usando a Definição 1.10 reescrevemos

$$\frac{1}{2}\Delta_f R = \lambda R - (|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^2}{n}) = -|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R}{n}(\lambda n - R).$$

A prova do Item 7 inicia com a última identidade em (1.18) combinada com o Item 2, como segue

$$\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla^2 f(\nabla f) = 2(-Ric(\nabla f) + \lambda \nabla f) = -\nabla R + 2\lambda \nabla f.$$

Logo, $\nabla(|\nabla f|^2 - 2\lambda f + R) = 0$. Donde concluímos que $|\nabla f|^2 - 2\lambda f + R = c$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Finalizando a prova do lema. $\square$

Observação 2.1. *O caso $\lambda = 0$ tem uma consequência bem imediata do Item 6 do Lema 2.1. De fato, neste caso teremos $\frac{1}{2}\Delta_f R = -|Ric|^2 \leq 0$, de maneira que, se R atinge um mínimo, então pelo princípio do máximo deve-se ter R constante, recaindo, portanto, no resultado do teorema a seguir, o qual também é consequência do referido item.*

Teorema 2.1. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante R. Se $\lambda \geq 0$, então $0 \leq R \leq n\lambda$. Se $\lambda \leq 0$, então $n\lambda \leq R \leq 0$. Se a curvatura escalar é igual a um dos extremos, então (M^n, g) é Einstein.*

Demonstração. Como R é constante, segue do Item 6 do Lema 2.1 que

$$\lambda R = |Ric|^2 \quad \text{ou,} \quad \text{equivalentemente,} \quad |\mathring{Ric}|^2 = \frac{R}{n}(\lambda n - R). \tag{2.4}$$

Se $\lambda = 0$ (ou $R = 0$), então por (2.4) deve-se ter $Ric = 0$. Portanto, basta analisar o caso em que λ e R são não nulos. Mas, por (2.4) deduzimos que λ e R devem ter o mesmo sinal e a primeira parte do teorema segue por uma simples análise a partir deste fato. Para finalizar, note que, se $R = \lambda n$, então a equação (2.4) garante que $Ric = \frac{R}{n} g$. $\square$

Observação 2.2. *O leitor poderá facilmente observar que o caso $\lambda = 0$ não é interessante nos resultados a seguir.*

O Lema 2.1 também auxilia no estabelecimento de condições para que um sóliton de Ricci gradiente seja radialmente plano, isto é, $sec(\cdot, \nabla f) = 0$.

Teorema 2.2. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente, com $\lambda \neq 0$. Cada uma das condições abaixo implica que ele é radialmente plano.*

1. *A curvatura escalar é constante e $sec(\cdot, \nabla f) \geq 0$ (ou $sec(\cdot, \nabla f) \leq 0$);*

2. *A curvatura escalar é constante e $0 \leq Ric \leq \lambda g$ (ou $\lambda g \leq Ric \leqslant 0$);*

3. *R_m é harmônico ;*

4. *$Ric \geq 0$ (ou $Ric \leq 0$) e $sec(\cdot, \nabla f) = 0$.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{e_i\}$ uma base ortonormal de T_pM. Assuma que R é constante, então pelo o Item 2 do Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla f, \frac{1}{2} \nabla R \rangle = \langle \nabla f, Ric(\nabla f) \rangle = Ric(\nabla f, \nabla f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} R(e_i, \nabla f, \nabla f, e_i) = \sum_{i=1}^{n} sec(e_i, \nabla f). \end{aligned}$$

Segue que $sec(\cdot, \nabla f) = 0$, desde que $sec(\cdot, \nabla f) \geq 0$ (ou $sec(\cdot, \nabla f) \leq 0$).

Assuma a condição do Item 2. A hipótese sobre a curvatura de Ricci nos dá $Ric \geq 0$ e $\lambda I - Ric \geq 0$ (respectivamente, $Ric \leq 0$ e $\lambda I - Ric \leq 0$), portanto, o operador $Ric \circ (\lambda I - Ric) \geq 0$ (respectivamente, $Ric \circ (\lambda I - Ric) \leq 0$). Como R é constante, pelo Item 5 do Lema 2.1, vale que

$$0 = \frac{1}{2} \Delta_f R = tr(Ric \circ (\lambda I - Ric)) \geq 0 \, (\leq 0),$$

logo, $0 = Ric \circ (\lambda I - Ric) = Ric \circ \nabla^2 f$. Isto prova que os possíveis autovalores para $\nabla^2 f$ devem ser: 0 e λ.

Com efeito, seja $\psi \in C^\infty(M)$ um autovalor de $\nabla^2 f$, isto é, existe $\tilde{X} \neq 0$ tal que $\nabla^2 f(\tilde{X}) = \psi \tilde{X}$ ou, equivalentemente, $\psi \tilde{X} = \lambda \tilde{X} - Ric(\tilde{X})$ disso segue que $Ric(\tilde{X}) = (\lambda - \psi)\tilde{X}$. Por outro lado, temos que $Ric \circ \nabla^2 f(\tilde{X}) = 0$, donde $0 = \psi(\lambda - \psi)\tilde{X}$, de maneira que, $\psi = 0$ ou $\psi = \lambda$.

O fato que $Ric \circ (\lambda I - Ric) = 0$ também permite obter pelo Item 3 do Lema 2.1 a próxima identidade

$$R_m(\cdot, \nabla f)\nabla f = \nabla_{\nabla f} Ric = -\nabla_{\nabla f}\nabla^2 f. \tag{2.5}$$

Agora, uma conta direta a partir da equação (2.5) prova que $\langle R_m(\tilde{X}, \nabla f)\nabla f, \tilde{X}\rangle = 0$ para todos os autovetores associados a 0 ou λ. Mas isso é suficente para garantir que $sec(\cdot, \nabla f) = 0$.

Assuma que R_m seja harmônico, isto é,

$$0 = (\mathrm{div} R_m)(X, Y, Z) = (\nabla_X Ric)(Y, Z) - (\nabla_Y Ric)(X, Z).$$

Então,

$$0 = -(\nabla_X \nabla^2 f)(Y, Z) + (\nabla_Y \nabla^2 f)(X, Z) = -R_m(X, Y, \nabla f, Z).$$

Em particular, $R_m(X, \nabla f, \nabla f, X) = 0$, para todo X, ou seja, $sec(\cdot, \nabla f) = 0$.

Assuma $Ric \geq 0$ (ou $Ric \leq 0$) e $sec(\cdot, \nabla f) = 0$. Para o que falta, basta mostrar que R é constante (ver Item 1). Vejamos:

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = \sum_{i=1}^{n} R_m(e_i, \nabla f, \nabla f, e_i) = \sum_{i=1}^{n} sec(e_i, \nabla f) = 0.$$

Como $Ric \geq 0$ (ou $Ric \leq 0$), segue que $0 = Ric(\nabla f) = \frac{1}{2}\nabla R$, donde R é constante. □

Teorema 2.3. *Um sóliton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é rígido se, e somente se, tem curvatura escalar constante e $sec(\cdot, \nabla f) = 0$.*

Demonstração. Ver [27]. □

Capítulo 3

Resultados Principais

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ e denote $f_{min} = min\{f(x) : x \in M\}$ e $f_{max} = max\{f(x) : x \in M\}$. Para uma função transnormal definimos os conjuntos $M_- = \{x \in M : f(x) = f_{min}\}$ e $M_+ = \{x \in M : f(x) = f_{max}\}$ os quais são conhecidos como variedades focais. Note que M_- e M_+ podem ser vazios.

Observação 3.1. *Note que pelo Item 7 do Lema 2.1 a função potencial de todo sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante é uma função transnormal, já que* $|\nabla f|^2 = 2\lambda f - R + c$, *para algum* $c \in \mathbb{R}$.

Lema 3.1. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante. Se* $\lambda > 0$, *então* $M_- \neq \emptyset$. *Se* $\lambda < 0$, *então* $M_+ \neq \emptyset$.

Demonstração. Vamos mostrar o caso $\lambda > 0$, o outro caso é análogo. Precisaremos mostrar que a função potencial tem um mínimo. Lembremos que $|\nabla f|^2 = 2\lambda f - R + c$. Como R e c são constantes, por simplicidade, podemos supor que $|\nabla f|^2 = 2\lambda f$ (defina $\tilde{f} = 2\lambda f - R + c$ e note que $|\nabla \tilde{f}|^2 = 2\lambda \tilde{f}$). Portanto, $f \geqslant 0$ para $\lambda > 0$. Note que se $p \in M$ é tal que $\nabla f(p) = 0$, então $f(p) = 0$, ou seja, f tem um mínimo. Assuma, por contradição, que $\nabla f \neq 0$ em M. Então a função $r : M \to \mathbb{R}$ dada por $r = \sqrt{\frac{2f}{\lambda}}$ é positiva e $|\nabla r|^2 = 1$. Logo, as curvas integrais de ∇r são geodésicas, além disso, ∇r é um campo vetorial completo devido à completude de (M, g). Seja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma curva integral de ∇r e considere a composição $r \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que,

$$\frac{d}{dt}(r \circ \gamma(t)) = \langle \nabla r, \gamma'(t) \rangle = |\nabla r|^2 = 1.$$

Assim, $r \circ \gamma(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isso implica que a imagem de r deve ser $\mathbb{R}$, o que contradiz o fato que $r > 0$. $\square$

Nós destacamos que o caso $\lambda > 0$ no lema anterior também pode ser obtido pelo resultado de Cao e Zhou, a saber:

Teorema 3.1 (Cao e Zhou [3]). *Seja um sóliton de Ricci gradiente* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *com* $\lambda = \dfrac{1}{2}$, *não compacto. Então, a função potencial* f *satisfaz a seguinte estimativa*

$$\frac{1}{4}(r(x) - c_1)^2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4}(r(x) + c_2)^2 \tag{3.1}$$

onde $r(x) = d(x_0, x)$ *é a função distância a partir de um ponto fixado* $x_0 \in M$, *com* c_1 *e* c_2 *sendo constantes positivas que dependem apenas de* n *e da geometria da métrica na bola unitária* $B_{x_0}(1)$.

Agora provaremos um dos principais resultados desta dissertação.

Teorema 3.2. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante* R, *então* $R \in \{0, \lambda, \ldots, (n-1)\lambda, n\lambda\}$.

Nas condições do teorema anterior, o leitor poderá notar na demonstração abaixo que $R = k\lambda$, onde $k = dim(M_-)$, para $\lambda > 0$, enquanto que, $k = dim(M_+)$, para $\lambda < 0$, em ambos os caso $0 \leq k \leq n$. Além disso, $R = n\lambda$ se, e somente se, $\nabla^2 f = 0$ em M_- (ou M_+). Para $\lambda = 0$, nós já sabemos que $R = 0$, ver Teorema 2.1.

Demonstração. Como já sabemos basta analisar o caso $\lambda \neq 0$. Foi provado por Wang [33] que as variedades focais M_- e M_+ de uma função transnormal f, satisfazendo $|\nabla f|^2 = b(f)$, são subvariedades suaves de M. Façamos a demonstração do teorema assumindo $\lambda > 0$, pois o outro caso é análogo. Como M_- é subvariedade de M, podemos considerar a soma dos espaços vetoriais $T_pM = T_pM_- \oplus T_pM_-^{\perp}$, para cada $p \in M_-$. Wang também provou que $\nabla^2 f$ restrito a M_- (respec. M_+) tem apenas dois autovalores, a saber: 0 e $\frac{b'(f)}{2}$, mais precisamente, $\nabla^2 f|_{T_pM_-} = 0$ e $\nabla^2 f|_{T_pM_-^{\perp}} = \frac{b'(f)}{2} I$. Em nosso caso deve ser $b'(f) = 2\lambda$, então pela equação fundamental vale que $Ric|_{T_pM_-} = \lambda I$ e $Ric|_{T_pM_-^{\perp}} = 0$. Digamos que a dimensão de M_- seja k, onde $0 \leq k \leq n$. Assim, a matriz do tensor de Ricci visto como operador linear simétrico em T_pM é dada por

$$(Ric)|_{T_pM} = \begin{pmatrix} \lambda I_k & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

para cada $p \in M_-$, implicando que $R = k\lambda$ em M_- e, portanto, em toda a M, pois R é constante. Consequentemente, os possíveis valores para a curvatura escalar devem pertencer ao conjunto $\{0, \lambda, ..., (n-1)\lambda, n\lambda\}$, que dependerá da dimensão de M_-. $\square$

O próximo resultado trata da rigidez de sólitons de Ricci gradientes no sentido da definição a seguir:

Definição 3.1. *Um sóliton de Ricci gradiente é rígido, se ele é isométrico a uma variedade quociente* $N^k \times_\Gamma \mathbb{R}^{n-k}$, *sendo* N *uma variedade Einstein (com* $Ric_N = \lambda g_N$*) e* Γ *uma ação* *que age livremente sobre N e por transformações ortogonais sobre $\mathbb{R}^{n-k}$. Aqui a função potencial é obtida por levantamento da função $f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$ definida em $\mathbb{R}^{n-k}$.*

Vamos observar que um sóliton de Ricci gradiente rígido tem posto constante. Para isso, sejam π e σ as projeções canônicas de $M^n = N^k \times R^{n-k}$ em N^k e $\mathbb{R}^{n-k}$, respectivamente. Sem perda de generalidade consideremos M com a métrica produto $g = \pi^* g_N + \sigma^* g_{can}$ e $f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$, com $x \in \mathbb{R}^{n-k}$. Então $(M, g, \nabla\tilde{f}, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente, com $\tilde{f} = f \circ \sigma$. De fato, como $Ric_N = \lambda g_N$ e ${}^{\mathbb{R}^{n-k}}\nabla^2 f = \lambda g_{can}$, segue que

$$Ric_M = \pi^* Ric_N + \sigma^* Ric_{\mathbb{R}^{n-k}} = \pi^* Ric_N = \lambda \pi^* g_N$$

e

$$\nabla^2 \tilde{f} = \sigma^* \ {}^{\mathbb{R}^{n-k}}\nabla^2 f = \lambda \sigma^* g_{can}.$$

Donde

$$Ric_M + \nabla^2 \tilde{f} \quad = \quad \lambda \pi^* g_N + \lambda \sigma^* g_{can} = \lambda g.$$

Isto prova a nossa última afirmação. Além disso, note que

$$(Ric)|_M = \begin{pmatrix} \lambda I_k & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

o que implica $posto(Ric) = k\lambda$. Agora nós observamos que, pelo fato de Γ ser uma ação que age livremente em toda M, segue que $N^k \times_\Gamma \mathbb{R}^{n-k}$ é uma variedade suave cuja projeção canônica de seu recobrimento M é um difeomorfismo local, portanto, (M, g) e $(N^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \tilde{g})$ são loclamente isométricas, onde $\tilde{g}$ é a métrica induzida pelo recobrimento, ver [2, pg 29], o que é suficiente para garantir que a consistência da Definição 3.1. Por fim, note que $M_- = \tilde{f}^{-1}(0) = N^k \times \{0\}$, o que está em concordância com a prova do Teorema 3.2.

Teorema 3.3. *Um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante é rígido se, e somente se, o tensor de Ricci tem posto constante.*

Demonstração. Como R é constante, pelo Item 6 do Lema 2.1, obtemos

$$|Ric|^2 = \lambda R.$$

O caso em que $\lambda = 0$ temos que $Ric = 0$, então pelo Teorema 2.3 obtemos a rigidez requerida. Assuma que o posto do tensor de Ric seja constante. Vamos provar o teorema para $\lambda > 0$, pois o outro caso é análogo. O fato do posto do tensor de Ricci ser constante implica que podemos calculá-lo restrito a M_-^k, com $0 \leq k \leq n$, de modo que, $R = k\lambda$ em

M_-^k, sendo, portanto, em toda M, pois R é constante. Sejam R_i, $i = 1, ..., k$, os possíveis autovalores não-nulos do tensor de Ricci. A conta auxiliar segue abaixo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\Big(R_i - \lambda\Big)^2 &= \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{k} R_i + k\lambda^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} R_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n} R_i + k\lambda^2 \\ &= |Ric|^2 - 2R\lambda + \lambda R \\ &= \lambda R - 2\lambda R + \lambda R = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $R_1 = \ldots = R_k = \lambda$. Donde, $0 \leq Ric \leq \lambda$, então pelo Teorema 2.2, $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é radialmente plano e rígido pelo Teorema 2.3. □

Teorema 3.4. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar $R = (n-1)\lambda$, então ele é rígido. Além disso, não existe sóliton de Ricci gradiente contrátil com curvatura escalar $R = \lambda$.*

Demonstração. Novamente o caso $\lambda = 0$ é trivial. Façamos a prova do caso $\lambda > 0$, sendo o outro caso análogo. Primeramente, observemos que, sendo R constante, então $(n-1)\lambda = R = k\lambda$, ou seja, $k = (n-1)$ (ver prova do Teorema 3.2) e, portanto, podemos considerar R_i, $i = 1, \ldots, n-1$, os autovalores não-nulos do operador de Ricci em qualquer ponto de M, além disso, $|Ric|^2 = \lambda R$, pelo Item 6 do Lema 2.1. A conta auxiliar agora é:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}(R_i - \lambda)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} R_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n-1} R_i + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} R_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n} R_i + (n-1)\lambda^2 \\ &= |Ric|^2 - 2\lambda R + (n-1)\lambda^2 \\ &= \lambda R - 2\lambda R + \lambda R = 0.\end{aligned}$$

Assim, o resultado da primeira parte segue como na prova do Teorema 3.3.

Para a segunda parte, assuma que $R = \lambda > 0$. Assim, por um lado, M_- deve ter dimensão um, por outro lado, Ge e Tang [16] provaram que M_- é uma subvariedade mínima de M. Então deve ser totalmente geodésica. Estes fatos nos mostraram que M_- deve ser $\mathbb{S}^1$. Além disso, Miyaoka [23] mostrou que M deve ser difemorfa a um fibrado vetorial sobre $\mathbb{S}^1$, mas isto contradiz o fato de que todo sóliton de Ricci contrátil tem grupo fundamental finito, cf. Wylie [34]. □

Observação 3.2. *Foi mostrado no Corolário* 2 *de [29] a existência de um autovalor não-nulo para o operador de Ric de multiplicidade* $n-1$. *A suposição* $R = (n-1)\lambda$ *do Teorema 3.4 é equivalente à existência de um autovalor de multiplicidade* $n-1$ *ao longo das variedades focais* M_- *(respec.* M_+*).*

Finalizaremos nossos trabalhos provando o teorema a seguir.

Teorema 3.5. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *um sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante. Se o tensor de Ricci tem no máximo* 3 *autovalores distintos, então ele é rígido.*

Demonstração. Façamos o caso $\lambda > 0$, sendo análogo para $\lambda < 0$. Afirmamos que se R é constante então Ric tem pelo menos um autovalor nulo em $M \setminus M_-$. De fato, pelo Item 2 do Lema 2.1 é válido $Ric(\nabla f) = 0$, para todo $p \in M$, o que inclui os pontos regulares de f, isso mostra que o operador de Ricci tem um autovalor nulo em $M \setminus M_-$. Além disso, como mostrado na prova do Teorema 3.2, o número 0 é autovalor de Ric em M_-. Acabamos de provar que: em todo sóliton de Ricci gradiente (não trivial) com curvatura escalar constante, vale que $posto(Ric) \leq (n-1)$.

Suponha que Ric tenha dois autovalores (possivelmente) não-nulos R_1 e R_2 distintos, com multiplicidades k_1 e k_2, respectivamente. Como R é constante então $|Ric|^2 = \lambda R$ também é constante, então R_1 e R_2 devem ser constantes. De fato, eles são soluções do sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} k_1R_1 + k_2R_2 = R \\ k_1R_1^2 + k_2R_2^2 = \lambda R \end{cases}$$

o qual tem duas soluções se $R_1 \neq R_2$ e única solução se $R_1 = R_2$. Pela continuidade dos autovalores do operador de Ricci, segue que R_1 e R_2 são constantes, a partir do qual nós obtemos a requerida rigidez. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] M. M. Alexandrino. *Dissertação de Mestrado. Hipersuperfícies de nível de uma função transnormal*. Rio de Janeiro: Setembro de 1997.

[2] R. L. Bishop and B. O'Neill. *Manifolds of negative curvature*. Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969) 1-49.

[3] H. D. Cao and D. Zhou. *On complete gradient shrinking Ricci soliton*. J. Differential Geom. 85 (2010) 175-185.

[4] H. D. Cao. *Recent Progress on Ricci Solitons*. Adv. Lect. Math. 17 (2011) 227-246.

[5] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. IMPA. Rio de Janeiro. 5 (2011) 332.

[6] É. Cartan. *Familles de surfaces isoparametriques dans les espaces à courbure constante*. Ann. Mat. Pura Appl. IV. Ser. 17 (1938) 177-191.

[7] É. Cartan. *Sur des familles remarquabless d'hypersurfaces isoparametriques dans les espaces sphériques*. Math. Z. 45 (1939) 335-367.

[8] É. Cartan. *Sur des familles remarquabless d'hypersurfaces*. C.R. Congrès Math. Liège. (1939) 30-41.

[9] É. Cartan. *Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et á 9 dimensions*. Revista Univ. Tucuman. Serie A. 1 (1940) 5-22.

[10] T. L. Civita. *Famiglie di superficie isoparametriche spazio euclideo*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 26 (1937) 355-362.

[11] Q. M. Cheng. *Compact locally conformally flat Riemannian manifolds*. Bull. London Math. Soc. 33 (2001) 459-465.

[12] B. Chow and D. Knopf. *The Ricci flow: an introduction*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004 (Mathematical surveys and monographs, v. 110).

[13] B. Chow, P. Lu and L. Ni. *Hamilton's Ricci flow*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 77).

[14] M. Eminenti, L. N. Gabriele and C. Mantegazza. *Ricci solitons - The equation point of view*. arXiv: math/0607546.

[15] M. Fernandez-López and E. Garcia-Río. *On gradient Ricci solitons with constant scalar curvature*. Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016) 369-378.

[16] J. Ge and Z. Tang. *Geometry of isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds*. Asian J. Math. 18 (2014) 117-125.

[17] R. Hamilton. *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. J. Differential Geom. 17 (1982) 255-306.

[18] R. Hamilton. *The Ricci flow on Surface*. Amer. Math. Soc. 71 (1988) 237-262.

[19] T. Ivey. *Ricci solitons on compact three-manifolds*. Differential Geom. Appl. 3 (1993) 301-307.

[20] N. Koiso. *On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kahler-Einstein metrics*. Front. Math. China. 6 (2011) 391-410.

[21] J. Lauret. *Ricci Soliton homogeneous nilmanifolds*. Math. Ann. 319 (2001) 715-733.

[22] J. Lee. *Introduction to smooth Manifolds*. Springer-Verlag. New York. 218 (2002).

[23] R. Miyaoka. *Transnormal functions on a Riemannian manifold*. Differential Geom. Appl. 31 (2013) 130-139.

[24] G. Peralman. *Ricci flow with surgery on three manifolds*. arXiv: math/0303109.

[25] G. Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. arXiv: math./0211159.

[26] P. Petersen. *Riemannian geometry*. New York: Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics) 87 (1998).

[27] P. Petersen and W. Wylie. *Rigidity of gradient Ricci solitons*. Pacific J. Math. 241 (2009) 329-345.

[28] P. Petersen and W. Wylie. *On gradient Ricci solitons with symmetry*. Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009) 2085-2092.

[29] P. Petersen and W. Wylie. *On the classification of gradient Ricci solitons*. Geom. Topol. 14 (2010) 2277-2300.

[30] B. Segre. *Famiglie di ipersuperficie negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimension*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 27 (1938) 203-207.

[31] W. X. Shi. *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*. J. Differential. Geom. 30 (1989) 223-301.

[32] M. Spivak. *A comprehensive introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish. 1 (1979) 508.

[33] Q. M. Wang. *Isoparametric functions on Riemannian manifolds I*. Math. Ann. 277 (1987) 639-646.

[34] W. Wylie. *Complete shrinking Ricci solitons have finite fundamental group*. Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 1803-1806.