

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

JUNOUT MARTINS LOUZADA NETO

MÉTODOS DE PROGNÓSTICO HÍBRIDO BASEADOS EM FILTRO DE PARTÍCULAS
APLICADOS EM UMA CAIXA DE ENGRENAGENS

MANAUS/AM

2019

JUNOUT MARTINS LOUZADA NETO

MÉTODOS DE PROGNÓSTICO HÍBRIDO BASEADOS EM FILTRO DE PARTÍCULAS
APLICADOS EM UMA CAIXA DE ENGRENAGENS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação e Controle.

Orientador: Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho - UFAM

MANAUS/AM

2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

L895m Louzada Neto, Junout Martins
Métodos de prognóstico híbrido baseados em Filtro de Partículas aplicados em uma caixa de engrenagens / Junout Martins Louzada Neto. 2019
103 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: João Edgar Chaves Filho
Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Prognóstico. 2. Filtro de Partículas. 3. Vida Útil Remanescente. 4. Caixa de Engrenagens. 5. Particle Metropolis-Hastings. I. Chaves Filho, João Edgar II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

JUNOUT MARTINS LOUZADA NETO

**MÉTODOS DE PROGNÓSTICO HÍBRIDO BASEADOS EM FILTRO DE
PARTÍCULAS APLICADOS EM UMA CAIXA DE ENGRENAGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

Aprovado em 17 de maio de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. João Caldas do Lago Neto, Membro
Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. José Luiz de Souza Pio, Membro
Instituto Federal do Amazonas

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, pela força de vontade e pela benção de permitir que eu possa fazer o que amo.

Ao meu pai Leomir Xavier Louzada e minha mãe Dirce Maria da Silva Louzada, por terem me ensinado tudo o que sei. Sem vocês, eu nada seria.

Aos meus irmãos Ramsés da Silva Louzada, Raíza da Silva Louzada e Juliana da Silva Louzada pelo suporte diário, pela companhia e pela motivação.

À minha namorada, Jéssica Santiago Santos, por permitir que eu fizesse parte de sua vida. Obrigado por compartilhar nossos sonhos e me fazer querer ser sempre melhor. Esse é apenas o primeiro de muitos que iremos conquistar juntos.

Ao prezado professor Orientador Dr. João Edgar Chaves Filho pela amizade, orientação e suporte técnico, sem o qual a elaboração desse trabalho não seria possível.

Aos colegas professores Iury Bessa e Renan Landau pelas inúmeras contribuições nesse trabalho, sendo essenciais para a sua realização.

Aos colegas do Departamento de Engenharia Mecânica pelo auxílio.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, aos técnicos dos Laboratórios e à Secretaria do Programa, pela disponibilidade e apoio.

A quem citei e aos que por ventura não tenha citado, o meu MUITO OBRIGADO por terem me dado suporte durante essa etapa da vida.

RESUMO

No presente trabalho, duas abordagens híbridas de prognóstico de falha baseadas em Filtro de Partículas (FP) são desenvolvidas para estimar a Vida Útil Remanescente (RUL) de uma caixa de engrenagens. A caixa de engrenagens é composta por um par de engrenagens retas e a falha considerada é uma fratura na raiz em um dos dentes do pinhão. A primeira abordagem é o FP com dinâmica artificial nos parâmetros, na qual os parâmetros são tratados como estados e a estimativa pelo FP é aplicada ao chamado espaço estendido. A segunda é o *Particle Metropolis-Hastings* (PMH), que une o FP ao método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC). Primeiramente, são implementados os modelos de degradação e de medição. O modelo de degradação é baseado na lei de Paris, que descreve o comportamento dinâmico da propagação da fratura com base no Fator de Intensidade de Tensão (SIF) e parâmetros do material. Nesse trabalho, o SIF é obtido através de um modelo em elementos finitos em conjunto com um modelo dinâmico do sistema de engrenagens. O modelo de medição desenvolvido relaciona o comprimento da fratura aos índices de variação de *Root Mean Square* (RMS) e variação de Kurtosis extraídos do sinal de vibração. Nesses modelos são inseridas três fontes de incertezas: erro do modelo de degradação, parâmetros do material tratados como incertos e erro de medição. As duas abordagens de prognóstico estimaram precisamente o comprimento da fratura e RUL da caixa de engrenagens, além de possibilitarem a estimativa dos parâmetros do material.

Palavras-chaves: Prognóstico; Filtro de Partículas; Vida Útil Remanescente; Caixa de Engrenagens; Particle Metropolis-Hastings.

ABSTRACT

In the present work, two hybrid failure prognostics approaches based on particle filters (PF) were developed to predicting Remaining Useful Life (RUL) of a gearbox. The gearbox is composed by a spur gear pair on which pinion has a tooth root crack. The first approach is the PF with artificial dynamic on parameters, on which parameters are treated as states and the PF is applied to, so called, extended space. The second approach, it is the Particle Metropolis-Hastings (PMH), which unifies the PF with Markov Chain Monte Carlo (MCMC). First, the degradation and measurement model are implemented. The degradation model is based on the Paris Law, which describes the dynamic behavior of crack propagation based on Stress Intensity Factor (SIF) and material parameters. In this work, the SIF is obtained by finite elements model with gear model. The measurement model developed relates the crack length with the Root Mean Square (RMS) variation and Kurtosis variation indexes extracted from the vibration signal. Three uncertainty sources are considered on these models: degradation model uncertainty, material parameters uncertainty, and measurements errors. With the models, the two prognostics approaches were tested and both prognostics approaches obtained success at estimating the crack length and the RUL of the gearbox. In addition, the two approaches estimate the material parameters.

Keywords: Prognostic; Particle Filter; Remaining Useful Life; Gearbox; Particle Metropolis-Hastings.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema tradicional de um sistema CBM/PHM	21
Figura 2 – Dados de turbinas eólicas <i>on-shore</i> na Europa. Em destaque as caixas de engrenagens	25
Figura 3 – Modos de carga atuantes em uma fratura.....	27
Figura 4 – Estado de tensão localizado próximo a extremidade da fratura.....	28
Figura 5 – Curva típica do crescimento de fratura em materiais metálicos	29
Figura 6 – Modelo dinâmico para um sistema composto por um par de engrenagens.....	30
Figura 7 – (a) Geração de uma curva involuta e (b) ação de uma curva involuta quando há engrenamento.....	33
Figura 8 – Fases de engrenamento	34
Figura 9 – Geometria da engrenagem saudável com os parâmetros utilizados no cálculo das rigidezes.....	36
Figura 10 - Geometria da engrenagem fraturada com os parâmetros utilizados no cálculo das rigidezes.....	39
Figura 11 – Esquema para obtenção dos modelos de degradação e de medição.....	60
Figura 12 – Esquema do Algoritmo do PF com Dinâmica Artificial.....	65
Figura 13 – Esquema do Algoritmo PMH.....	66
Figura 14 – Rigidez de engrenamento: saudável, 1 mm, 2 mm, 3 mm e 4 mm	71
Figura 15 – Rigidez de engrenamento para uma fratura com comprimento de 3,7 mm	71
Figura 16 – Velocidades angulares, aceleração do pinhão e força de engrenamento para engrenagens saudáveis.....	72

Figura 17 – Velocidade angulares, aceleração do pinhão e força de engrenamento para um pinhão com fratura de 3.7 mm.....	73
Figura 18 – (a) razão de transmissão de carga; (b) carga dinâmica aplicada ao pinhão fraturado (3.7 mm)	74
Figura 19 – Fratura obtida no FRANC2D após o procedimento de propagação	74
Figura 20 – Curva dos fatores SIF K_I e K_{II} para cada comprimento de fratura a	75
Figura 21 – (a)Variação do de RMS e (b) Variação do Kurtosis em função do comprimento da fratura.....	76
Figura 22 – Sinal de vibração ruidoso para SNR 1000, 100, 50 e 10 gerados para o comprimento de fratura de 3,7 mm.....	77
Figura 23 – Histograma e distribuição gaussiana aproximada para o comprimento de 3,7 e SNR 1000, 100, 50 e 10 (RMS)	77
Figura 24 – Histogramas para os comprimentos de 1,5 mm e 4,5 mm para SNR 1000, 100, 50 e 10 (RMS)	78
Figura 25 – Histograma e distribuição gaussiana aproximada para o comprimento de 3,7 e SNR 1000, 100, 50 e 10 (Kurtosis)	79
Figura 26 – Distribuições gaussiana aproximadas para a variação percentual de RMS nos comprimentos (a) 0,1 mm e (b) 4,8 mm	80
Figura 27 – Distribuições gaussiana aproximadas para a variação percentual de Kurtosis nos comprimentos (a) 0,1 mm e (b) 4,8 mm	80
Figura 28 – Curva ajustada para as médias das distribuições da variação percentual de Kurtosis em função do comprimento de fratura.....	81
Figura 29 – Medições geradas e utilizadas para teste das abordagens de prognóstico	82
Figura 30 – Estimativa do comprimento de fratura para cada instante de medição (PF com Dinâmica Artificial).....	84

Figura 31 – Aproximação das distribuições do comprimento de fratura filtrado para as medições 5, 10, 15 e 20. Em azul: comprimento verdadeiro; em vermelho: o comprimento estimado; em verde: o intervalo de confiança para 99%	84
Figura 32 – Estimativa da RUL da caixa de engrenagens para cada instante de medição (PF por Dinâmica Artificial).....	85
Figura 33 – Aproximação da distribuição da RUL estimada para as medições 5, 10 15 e 20. Em azul: RUL verdadeira; em vermelho: a RUL estimada; em verde: o intervalo de confiança para 99%.....	85
Figura 34 – Estimativas dos parâmetros m e C para cada instantes de medição (PF por Dinâmica Artificial)	86
Figura 35 – Estimativas para o experimento 03, no qual foram obtidos os piores índices de erro EA e RMSE	87
Figura 36 – Estimativa do comprimento da fratura realizada no experimento 1 (PMH)	90
Figura 37 – Amostras aceitas do parâmetro m no Algoritmo de Metropolis-Hastings e a distribuição gerada na simulação da medida 19 do experimento 1 (PMH).....	91
Figura 38 – Amostras aceitas do parâmetro m no Algoritmo de Metropolis-Hastings e a distribuição gerada na simulação da medida 20 do experimento 1 (PMH).....	92
Figura 39 – Estimativa da RUL no experimento 1 (PMH).....	93
Figura 40 – Estimativas para o experimento 06, no qual foram obtidos melhores índices de erro EA e RMSE utilizando PMH	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Descrição dos parâmetros físicos do modelo dinâmico da caixa de engrenagens....	31
Tabela 2 – Parâmetros das engrenagens utilizadas para simulação.....	68
Tabela 3 - Parâmetros físicos do sistema dinâmico do par de engrenagens.....	69
Tabela 4 - Dimensões das engrenagens obtidos a partir dos parâmetros da tabela 2.....	70
Tabela 5 – Valores dos parâmetros utilizados no PF na abordagem por Dinâmica Artificial .	83
Tabela 6 – Índices de erro EA e RMSE da estimativa do comprimento da fratura para os experimentos realizados	87
Tabela 7 – Índices AC, AOF, FAR e PER da estimativa da RUL do sistema para os experimentos realizados	88
Tabela 8 – Valores dos parâmetros utilizados na abordagem PMH.....	89
Tabela 9 – Índices de erro EA e RMSE para a estimativa do comprimento da fratura para os experimentos realizados com PMH.....	90
Tabela 10 – Índices AC, AOF, FAR e PER para a estimativa da RUL do sistema utilizando PMH	93
Tabela 11 – Resumo dos índices de desempenho obtidos nas abordagens. Em parênteses está o desvio padrão	95

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AC	Acurácia
ANFIS	Sistema de Inferência Neuro-Fuzzy
CBM	Manutenção Baseado na Condição
CM	Monitoramento de Condição
EA	Erro Absoluto
fdp	Função de Densidade de Probabilidade
FMECA	Análise do Modo de Falhas, Efeitos e Criticalidade
FP	Filtro de Partículas
GDL	Graus de Liberdade
gPC	Expansão de Caos Polinomial Generalizado
HMM	Modelo de Markov Escondido
HPSCT	Mais Alto Ponto de Contato em um Único Dente
MCMC	Monte Carlo via Cadeia de Markov
PHM	Prognóstico e Gerenciamento de Saúde
PMCMC	<i>Particle</i> Monte Carlo via Cadeia de Markov
PMH	<i>Particle</i> Metropolis-Hastings
RMS	<i>Root Mean Square</i>
RMSE	Raiz do Quadrado Médio do Erro
RNA	Redes Neurais Artificiais
RUL	Vida Útil Remanescente
SIR	Amostragem por Importância com Reamostragem
SIS	Amostragem por Importância Sequencial

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
1.1 Contextualização.....	13
1.2 Justificativa	15
1.3 Objetivos.....	18
1.4 Organização do Trabalho	18
2. VISÃO GERAL E REVISÃO DA LITERATURA	20
2.1 Manutenção Corretiva × Preventiva × Baseada na Condição	20
2.2 Prognóstico e Gerenciamento de Saúde.....	21
2.3 Métodos de Prognóstico.....	22
2.3.1 Método de Prognóstico Orientados à Dados	22
2.3.2 Métodos de Prognóstico Baseados em Fenômenos Físicos.....	23
2.3.3 Método de Prognóstico Híbridos	23
2.4 Métodos de Prognóstico aplicados em Caixa de Engrenagens.....	24
3. MODELO DE DEGRADAÇÃO.....	27
3.1 Modelo Físico da Falha por Fratura.....	27
3.2 Modelo Dinâmico de um Par de Engrenagens.....	30
3.3 Cálculo da Rigidez de Engrenamento.....	33
3.3.1 Geometria das Engrenagens	33
3.3.2 Rigidez de Engrenamento – Método de Energia Potencial	35
3.4 Processo de Obtenção do SIF	41
3.5 Lei de Paris – Fontes de Incertezas.....	42
3.6 Índices de RMS e Kurtosis	43
4. FILTRO DE PARTÍCULAS	44
4.1 Problema de Estimação Bayesiano	44
4.1.1 Amostragem por importância.....	46

4.1.2	SIS e SIR	48
4.2	Filtro de Partículas – Predição a Longo Prazo.....	50
4.3	Filtro de Partículas e Estimação de Parâmetros.....	52
4.3.1	Abordagem por Dinâmica Artificial (ou Espaço Aumentado).....	52
4.3.2	Abordagem por <i>Particle</i> Metropolis-Hastings (PMH).....	53
4.4	Métricas de Desempenho	57
5.	METODOLOGIA.....	60
5.1	Modelo de Degradação	60
5.1.1	Cálculo Analítico da Rigidez.....	61
5.1.2	Obtenção do Sinal de Vibração e Carga Dinâmica pelo Modelo Dinâmico	61
5.1.3	Obtenção do SIF e Direção da Propagação da Fratura por Elementos Finitos...	62
5.2	Modelo de Medição	63
5.3	Prognóstico com FP	65
5.3.1	FP com Dinâmica Artificial.....	65
5.3.2	PMH	66
5.4	Procedimento Experimental.....	67
6.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	70
6.1	Modelo de Degradação	70
6.2	Modelo de Medição	76
6.3	Prognóstico utilizando FP.....	81
6.3.1	Abordagem com FP com Dinâmica Artificial.....	83
6.3.2	Abordagem com PMH.....	89
7.	CONCLUSÕES	96
7.1	Trabalhos Futuros	97
	REFERÊNCIAS	98

1. INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Os projetos de sistemas de engenharia estão cada vez mais rigorosos quanto a requisitos fundamentais, como segurança e redução de custos, os quais devem ser considerados desde a etapa de concepção do equipamento até a manutenção quando este já está em funcionamento.

A manutenção pode ser realizada tradicionalmente com base em três filosofias distintas: manutenção corretiva, preventiva e baseada na condição (CBM – *Condition Based Maintenance*) ou também chamada de preditiva. A manutenção corretiva realiza as ações de forma reativa, ou seja, após a falha do sistema. Na manutenção preventiva, as ações ocorrem em intervalos regulares pré-estabelecidos baseados na experiência do projetista ou em dados estatísticos, visando minimizar a possibilidade de falha. Já a CBM requer uma análise da condição atual do equipamento, a qual é aferida através de dados obtidos por sensores em tempo real. As ações de manutenção são escalonadas com base nessa condição. A CBM, quando implementada eficientemente, minimiza os custos relacionados ao tempo de parada do equipamento devido a falhas, maximiza o tempo de serviço dos componentes e disponibilidade da máquina (BUTLER, 2012).

O emprego da CBM pode ser efetuado através da metodologia de Prognóstico e Gerenciamento de Saúde (PHM – *Prognostic and Health Management*). Uma das fases dessa metodologia é o prognóstico, que tem como principal objetivo estimar a vida útil remanescente (RUL – *Remaining Useful Life*) do sistema, com base em dados de degradação medidos (KAN et al., 2015). Como o processo de prognóstico envolve estimar estados futuros de degradação, é inevitável que nas predições seja introduzido certo grau de incerteza, portanto é necessária a quantificação dessas incertezas para posterior derivação do intervalo de confiança da predição. No campo de prognóstico, algoritmos de estimação recursiva bayesiana podem ser utilizadas para esse propósito (BUTLER, 2012).

Um sistema bastante visado no estudo de prognóstico são caixas de engrenagens (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b; ZHAO et al., 2018; LEE et al., 2014; LI & LEE, 2015). Esses sistemas estão presentes na grande maioria de máquinas rotativas em que se deseja transmissão de potência, mudança de velocidades e até direção de movimento. A falha desses componentes gera grandes tempos de parada e, se ocorrerem em sistemas onde há risco a vida humana, pode ter consequências desastrosas. Uma falha comum nas engrenagens são as fraturas em um de seus dentes, as quais podem ser causadas por altas cargas de serviço, condições severas de

operação ou simplesmente fadiga (LIANG et al., 2018). Entender o comportamento dinâmico da fratura em sistemas de engrenagens pode ser fundamental para implementação de um método de prognóstico eficiente na predição de falha nesse equipamento. Um modelo utilizado para descrever o comportamento dinâmico da fratura por fadiga em dentes de engrenagens é a lei de Paris, que quantifica a taxa de crescimento da fratura considerando parâmetros dos materiais e o Fator de Intensidade de Tensão (SIF – *Stress Intensity Factor*) (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b; LI & LEE, 2005; GUILBAULT et al., 2015). Esse modelo demonstrou em Li & Lee (2005) e Lewicki & Ballarini (1997) boa concordância entre os resultados obtidos pelo modelo e meios experimentais.

Diante desse contexto, o presente trabalho considera o problema da estimativa de RUL em uma caixa de engrenagens. Nesse propósito, um modelo de degradação baseado na lei de Paris é desenvolvido para uma caixa de redução composta por um par de engrenagens. Esse modelo de degradação é baseado em Zhao et al. (2013b), o qual é dividido em três etapas principais: cálculo analítico da rigidez de um dente saudável ou fraturado; cálculo da carga dinâmica aplicada ao dente, obtida por meio de um modelo de vibração com 8 graus de liberdade (GDL); por fim, a utilização de elementos finitos para determinar o SIF, que é um dos termos que compõem a lei de Paris (ANDERSON, 2017). Além disso, Zhao et al. (2013b) adiciona incertezas nesse modelo considerando, por exemplo, que há diferentes condições experimentais, mesmo em ambientes laboratoriais, para obtenção dos parâmetros do material, além de outros fatores que introduzem aleatoriedade no processo de degradação. Assim, são consideradas, como fontes de incertezas os parâmetros do material e o erro relacionado ao modelo propriamente dito. Ademais, nessa dissertação, diferentemente de Zhao et al. (2013b), o qual assume que o comprimento da fratura é obtido por medição direta, utiliza um modelo identificado para relacionar o sinal de vibração com comprimento de fratura. Na prática, a obtenção direta do comprimento da fratura é quase impossível, visto que as engrenagens estão em ambiente fechado (na “caixa”). Normalmente, tem-se somente acesso ao sinal de vibração ruidoso, através do qual, extrai-se alguma característica que indique um comportamento defeituoso. Aqui, essa característica é o *Root Mean Square* (RMS) bem como o índice de Kurtosis. Assim, o modelo, denominado aqui como modelo de medição, possibilita obter o comprimento da fratura por meio do valor RMS bem como do índice Kurtosis mensurado.

O algoritmo usado nesse trabalho para estimativa do comprimento de fratura e a RUL da caixa de engrenagens é o Filtro de Partículas (FP). O FP é uma ferramenta que realiza as estimativas dados os modelos de degradação e medição por meio de inferência bayesiana, considerando as incertezas adicionadas aos modelos. Esse filtro é uma solução aproximada do

problema de filtragem bayesiano para modelos não-lineares, caso do modelo de degradação descrito pela lei de Paris, e com possibilidade de tratar com ruídos não-gaussianos (JOUIN et al., 2016).

O FP quando trata com modelos que possuem parâmetros incertos, caso desse estudo, necessita de algoritmos próprios que possibilitem tratar desse problema. Nesse cenário, são utilizadas duas abordagens baseadas em FP com propósito inicial de estimação da fratura: a primeira, proposta por Kitagawa (1998), introduz uma dinâmica artificial para os parâmetros, expandido o espaço de estados do problema inicial, permitindo tratar os parâmetros como estado e, então, a estimativa simultânea do estado e dos parâmetros do material; a segunda utiliza uma combinação entre FP e Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), conhecida como PMCMC (*Particle Markov chain Monte Carlo*) (ANDRIEU et al., 2010). Ambas abordagens tratam na realidade do problema de estimação do estado e dos parâmetros dos modelos, ou seja, estimam o estado de degradação no instante em que uma medida fica disponível. Para o prognóstico da falha, que tem como objetivo estimar a RUL da caixa de engrenagens, os estados de degradação estimados pelas abordagens são propagados até que atinjam o limiar crítico estabelecido previamente. Assim, a RUL é obtida.

1.2 Justificativa

A implantação eficiente de um sistema PHM depende de um sistema de prognóstico com uma estimativa precisa (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b). A comunidade científica tem empregado um grande esforço para desenvolver métodos de prognóstico visando essa necessidade, além da tentativa de implementação desses métodos em sistemas industriais (KAN et al., 2015; SIKORSKA et al., 2011). Efetivamente, a tendência no estudo de métodos de prognósticos está não somente no desenvolvimento de novas técnicas, mas na comparação de métodos aplicados em sistemas específicos, na tentativa de realizar uma análise comparativa do método de prognóstico mais eficiente, visando uma determinada aplicação industrial (KAN et al., 2015; JOUIN et al., 2016).

Uma das aplicações industriais mais visadas em estudos tanto de diagnóstico quanto prognóstico são as caixas de engrenagens. Isso ocorre devido a importância desses sistemas, os quais estão presentes em uma grande variedade de máquinas rotativas, como em veículos automóveis, helicópteros, máquinas de usinagem, turbinas eólicas, turbinas utilizadas em aviões, dentre outras, e quando falham podem ter consequências graves, como perdas de vidas

humanas (LIANG et al., 2018; P. Association, 2011), além de grande prejuízo econômico como consequência do tempo de parada do sistema (LEITE et al., 2017; TAVNER, 2011).

Um trabalho importante voltado a prognóstico de caixas de engrenagens, Li & Lee (2005) toma em consideração a fratura do dente como falha. A metodologia para obtenção do modelo de degradação empregada neste presente estudo foi inicialmente desenvolvida por esse autor, na qual o modelo de degradação é composto por três partes principais: modelo dinâmico das engrenagens, elementos finitos aplicado na fratura e a lei de Paris na propagação da fratura. Em Zhao et al. (2013a) e Zhao et al. (2013b), a metodologia empregada é similar a apresentada em Li & Lee (2005), no entanto, faz-se uso de um modelo dinâmico mais completo, considerando o movimento rotacional e translacional, sendo essa passível de ser medida por acelerômetros comerciais, e calculando a rigidez por energia de deformação, obtendo um modelo de degradação mais preciso. Ademais, Zhao et al. (2013a) e Zhao et al. (2013b) propõe a adição de incertezas associadas tanto ao modelo, quanto aos parâmetros do material, que podem ter alguma variação relacionada as condições de operação da caixa de engrenagem. Para tratar tais incertezas, o autor utiliza inferência bayesiana. Em Zhao et al. (2013b), apenas uma das constantes do material é tratada como variável aleatória e o autor utiliza Simulação de Monte Carlo. Em Zhao et al. (2013a) é mostrado que ao tratar com mais variáveis aleatórias, o processamento pela Simulação de Monte Carlo se torna muito longo, e o autor utiliza a Expansão de Caos Polinomial Generalizado (gPC – *Generalized Polynomial Chaos*) como alternativa para quantificação de incertezas e avaliação da função de verossimilhança. No entanto, em ambos, o autor admite diretamente o conhecimento do comprimento atual da fratura. Porém, essa medida, na grande maioria das aplicações onde se encontram as caixas de engrenagens, é um estado não observado e normalmente obtido indiretamente pela medição de vibração. Nesse estudo, propõe-se o desenvolvimento de um modelo assumindo que o comprimento da fratura é obtido pelo valor RMS e valor de Kurtosis, ambos extraídos do sinal de vibração. Dessa forma, o modelo aproxima-se ainda mais a uma situação real, no qual mensura-se o sinal de vibração, de modo a obter os valores dos índices RMS e Kurtosis, possibilitando a estimativa do comprimento da fratura. Ao conhecer o estado de degradação atual, pode-se estimar a RUL do sistema.

Nesse trabalho são investigados dois modelos, sendo o modelo de degradação, que faz uso da lei de Paris, a qual descreve o comportamento dinâmico da propagação da fratura, e o segundo sendo o modelo de medição, o qual relaciona o valor RMS e o índice de Kurtosis, objetivando calcular o comprimento da fratura. Vislumbrando a utilização concomitante dos dois modelos investigados, o FP surge como alternativa viável, pois fornece uma ferramenta

matemática adequada para tratamento desses dois modelos de forma conjunta (LIAO & KÖTTIG, 2016), além de possibilitar a abordagem das incertezas dos modelos. No contexto de prognóstico, o FP se encaixa na categoria de métodos híbridos, por trabalhar com modelo do fenômeno físico da degradação e com dados medidos. A vantagem dessa integração em relação a métodos que consideram exclusivamente o modelo de degradação ou o modelo de medição, perdem desempenho quanto a medição mais precisa da RUL. Tal situação foi corroborada por meio de comparações nos trabalhos de Zhao et al. (2018) e Liao & Köttig (2016), em que a RUL é estimada de forma mais precisa pelo método híbrido.

São utilizadas duas abordagens com base em FP, visando o tratamento das incertezas relacionadas aos parâmetros. A primeira, que utiliza dinâmica artificial nos parâmetros, é um método simples e pragmático, mas utilizada com sucesso em algumas aplicações como mostrado em Kitagawa (1998), Liu & West (2001), Vavoulis et al. (2012) e Daigle & Goebel (2009). No entanto, é uma solução não satisfatória, pois os parâmetros somente são gerados no instante inicial e tendem a perder a diversidade com sucessivas reamostragens (KANTAS et al., 2009). Por conseguinte, a segunda abordagem faz uso do PMCMC que combina o FP com MCMC. Esse algoritmo é particularmente adequado para modelos em espaço de estados, incluído os não-lineares, o que é interessante visto os modelos de degradação e de medição enquadram-se nesse conjunto (ANDRIEU et al., 2010).

De posse do estado da arte previamente apresentado, pode-se sumarizar como principais contribuições deste estudo, como segue:

- Ampliação do modelo de degradação para uma caixa de engrenagens desenvolvido em Zhao et al. (2013b), considerando que o comprimento da fratura não pode ser obtido diretamente, todavia propõe-se o uso do valor RMS e Kurtosis do sinal de vibração, para auxiliar tal finalidade;
- Utilização de técnica de prognóstico baseada em PF com dinâmica artificial para os parâmetros, aplicada ao problema de estimação de RUL de uma caixa de engrenagens;
- Aplicação de PMCMC em problema de estimação de RUL de uma caixa de engrenagens com possibilidade de estimação simultânea dos parâmetros;
- Investigação de diversas técnicas de prognóstico, tomando como um estudo de caso a problemática da caixa de engrenagens, visto sua grande relevância na literatura.

1.3 Objetivos

O Objetivo geral desse trabalho é desenvolver estratégias híbridas de prognóstico baseadas em FP para estimar a RUL de uma caixa de engrenagens, a partir de um modelo de degradação descrita pela lei de Paris.

Visando atingir esse objetivo, propõe-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um modelo de medição para relacionar dados extraídos do sinal de vibração com comprimento da fratura no dente da engrenagem.
- Implementar modelo de degradação baseado na lei de Paris para uma caixa de engrenagens, considerando o modelo apresentado em Zhao et al. (2013b).
- Estimar a RUL de uma caixa de engrenagens através do uso da estratégia baseada em PF com dinâmica artificial dos parâmetros utilizando o modelo de degradação desenvolvido, juntamente com o modelo de medição;
- Estimar a RUL de uma caixa de engrenagens por meio de técnica PMCMC, utilizando os modelos de degradação e de medição implementados;
- Analisar e comparar os dois métodos de obtenção da RUL e indicar qual método melhor se comporta voltado ao problema da caixa de engrenagens.

1.4 Organização do Trabalho

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma:

Seção 2: uma visão geral do problema dessa dissertação é apresentada. Ao decorrer da seção também são introduzidos trabalhos relacionados, tanto no contexto geral de prognóstico, quanto especificamente ao problema de prognóstico voltada a caixas de engrenagens.

Seção 3: descrição da metodologia utilizada no trabalho. Nessa seção estão descritos em detalhes o desenvolvimento das estratégias de prognóstico utilizadas, bem como a descrição da aplicação ao estudo de caso das caixas de engrenagens, de modo a descrever o ambiente de simulação e um breve descritivo dos testes desenvolvidos;

Seção 4: o modelo de degradação é apresentado em mais detalhes. Inicialmente descrevendo as equações para cálculo da rigidez do engrenamento. Após, as equações diferenciais que representam a dinâmica da caixa de engrenagens são obtidas e então, a lei de Paris apresentada.

Seção 5: os métodos baseados em FP são apresentados. Primeiro, é apresentado o FP propriamente dito e, em seguida, detalhes das abordagens utilizadas para estimativa da RUL do sistema.

Seção 6: são apresentados os resultados obtidos nesse trabalho e suas devidas análises. No início mostrando a rigidez do dente da engrenagem para determinadas fraturas, os sinais de vibração provenientes da solução do modelo dinâmico e obtenção do SIF. Em seguida, como obter os modelos de medidas e os resultados obtidos aplicando as duas abordagens de prognóstico.

Seção 7: são apresentadas as considerações finais para o desenvolvimento deste estudo, bem como as principais conclusões. São ainda apresentadas propostas de continuidade desse estudo.

2. VISÃO GERAL E REVISÃO DA LITERATURA

O prognóstico de falha está inserido no contexto de manutenção de equipamentos. Nessa seção alguns conceitos relacionados à manutenção são apresentados, ressaltando a fase de prognóstico e como está inserido nesse contexto. Destaca-se ainda a sua importância para aumentar a efetividade de uma gestão de manutenção de equipamentos e sistemas. Além disso, são apresentados estudos recentes de diversas técnicas de prognóstico de falha classificados em técnicas baseada em modelos físicos de degradação, em dados ou híbridos. Ao final, alguns estudos de prognóstico, inclusive baseados em FP, voltados à problemática de caixas de engrenagens são analisados, expondo o atual estado da arte.

2.1 Manutenção Corretiva × Preventiva × Baseada na Condição

Os sistemas de engenharia em geral devem atender a dois requisitos fundamentais: segurança e minimização do uso de recursos. Ambos são almejados tanto na fase de elaboração de projeto, quanto diretamente no seu funcionamento, sendo a manutenção, nesse último, o fator crítico para que esses requisitos sejam atendidos.

Na prática são empregados três tipos de filosofias de manutenção: corretiva, preventiva e preditiva, também conhecida como CBM.

A manutenção corretiva executa as ações após a falha de seus equipamentos, maximizando o tempo de serviço do equipamento, mas gerando altos custos relacionados ao tempo de parada (BUTLER, 2012; ZHAO et al., 2013a). Tratando-se de equipamento críticos, como aqueles utilizados em aviação, unidades petrolíferas e usinas nucleares, o uso desse tipo é estritamente inadequado, visto que qualquer falha pode ter consequências catastróficas como perda de vidas humanas e severos impactos ambientais (SI et al., 2012).

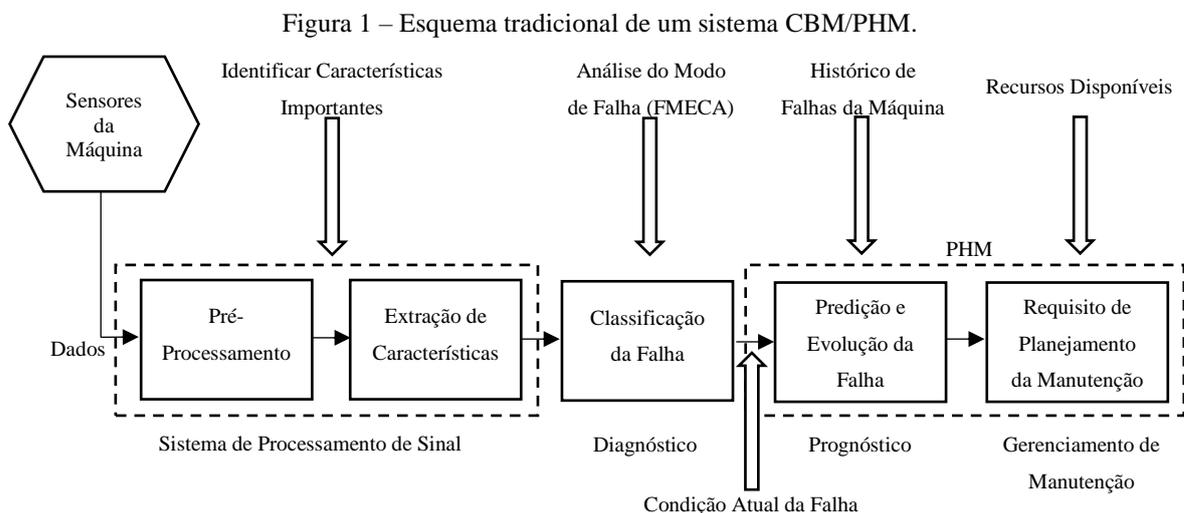
A manutenção preventiva envolve um escalonamento regular de ações para que o equipamento funcione adequadamente, minimizando a ocorrência de falhas durante o serviço. Sistemas de aviação empregam esse tipo de manutenção, nos quais componentes devem ser substituídos em uma quantidade de horas pré-estabelecida. Nem sempre os componentes apresentam condições que indiquem falha iminente, ainda assim são substituídos, o que gera um aumento de custo. Não há, portanto, uma maximização do uso de componentes e conseqüentemente do equipamento (BUTLER, 2012).

Na CBM, há o monitoramento de condição (CM – *Condition Monitoring*) do equipamento através de sensores, identificando o estado atual de degradação do componente.

Com base nessa informação, as decisões tomadas visam minimizar a ocorrência de falhas e maximizar o uso do equipamento, reduzindo custos devido ao tempo de parada e substituição inadequada de componentes e tornando, do ponto de vista econômico, o mais indicado para uma grande gama de aplicações (BUTLER, 2012; LEE et al., 2014). Porém, sua implementação requer disponibilidade de dados, pessoal qualificado e infraestrutura computacional, o que nem sempre configura um cenário viável (SIKORSKA et al., 2011).

2.2 Prognóstico e Gerenciamento de Saúde

No contexto da CBM, as tomadas de decisões devem ser embasadas principalmente no estado de degradação atual do componente. Porém, não somente nisso. Objetivando otimizar a tomada de decisão, a CBM pode ser empregada através da PHM (BUTLER, 2012). PHM é uma abordagem eficiente e sistemática para avaliação do sistema em condições atuais, previsão de progressão de falha e mitigação de riscos de operação via ações de gerenciamento (SI et al., 2013a). Um esquema de CBM/PHM pode ser visto na figura 1, na qual observa-se quatro fases distintas nessa metodologia: aquisição e processamento de sinais, diagnóstico, prognóstico e gestão.



Fonte: Adaptado de: (BUTLER, 2012; VATCHSEVANOS et al., 2006).

Para análise da condição do sistema, inicialmente é realizada a aquisição e o processamento de sinais mensurados a partir da máquina. Esses sinais podem ser de vibração, elétricos, sonoros, por imagens, etc., desde que possibilitem a extração de características que indiquem a sua atual condição. Com essas características, é efetuado o diagnóstico da falha, no

qual se detecta a existência ou não de falha e, se de fato o sistema possuir alguma, identifica o seu modo de falha. Caso o sistema esteja sob diversos modos de falha, é interessante aplicar ferramentas que identifiquem o caso mais crítico. Uma boa ferramenta com essa finalidade é a Análise do Modo de Falhas, Efeitos e Criticalidade (FMECA – *Failure modes, effects and critically analysis*) (VATCHSEVANOS et al., 2006). O prognóstico, que é o ponto primordial para uma implementação eficiente do PHM, pode ser definido como a tarefa de estimar a RUL, dado o estado de degradação atual e quantificar as incertezas associadas a essa estimativa. A RUL é a quantidade de tempo do instante atual até que seja atingida o fim da vida útil do equipamento, no qual normalmente se entende que o equipamento atingiu um nível de desempenho inadequado. Após o prognóstico, com base na informação de RUL e quantificação de incertezas, considerando os recursos financeiros, pessoais, estoque de peças sobressalentes, demanda operacional entre outros fatores, o gestor deve escalonar o processo de manutenção do equipamento, de tal maneira a atingir os objetivos da CBM.

2.3 Métodos de Prognóstico

Os métodos de prognóstico são comumente classificados em três tipos, sendo os métodos orientados à dados, métodos baseados em fenômenos físicos e métodos híbridos (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b; LEE et al., 2014; SI et al., 2013a). A adoção prática de um desses tipos de métodos de prognóstico deve considerar diferentes aspectos como a disponibilidade de dados históricos, a possibilidade de descrição da degradação do sistema por modelos físicos, dados monitorados e complexidade computacional (ZHAO et al., 2018).

2.3.1 Método de Prognóstico Orientados à Dados

Métodos orientados à dados são aqueles que visam obter a RUL exclusivamente a partir de dados monitorados diretamente do sistema ou dados históricos de falhas de equipamentos. No trabalho Zaidi et al. (2011), há o uso da Cadeia de Markov Escondida (HMM – *Hidden Markov Model*) para estimar a probabilidade de falha no próximo evento, nesse caso, o acionamento de um motor elétrico de partida. O método apresentado em Soualhi et al. (2014) também utiliza HMM, com a adição de um sistema de inferência Neuro-Fuzzy adaptativo (ANFIS). A indicação de iminência de mudança de estado (severidade de falha) é feita através do HMM, enquanto o ANFIS prediz o intervalo de tempo até que a mudança de estado ocorra de fato. O método é testado em falha de mancais. Há ainda métodos baseados em Redes Neurais

Artificiais (RNA) como os apresentados em Butler (2012), Simeón (2015) e Malhi et al. (2011). Em todos esses trabalhos são necessários dados históricos de falhas para treinamento dos modelos utilizados. Essa necessidade dificulta bastante o uso, em razão da escassez desses dados, normalmente obtidos por meio de testes *run-to-failure*, de difícil realização prática.

Há ainda os métodos que utilizam modelos de degradação estocásticos com formas padrões como modelos lineares, quadráticos, exponenciais, entre outros (SI et al., 2012; SI et al., 2013a; SI et al., 2013b; WANG et al., 2017; LI et al., 2017). Esses métodos utilizam inferência estatística como o algoritmo de máxima verossimilhança para estimar parâmetros que constituem os modelos, a partir de dados de medição que estão relacionados ao estado de degradação atual do sistema. Uma limitação desses métodos está relacionada a escolha prévia do modelo de degradação, que se escolhido de forma errada pode levar a resultados incorretos, o que leva a necessidade de um conhecimento *a priori* do comportamento dinâmico da degradação do sistema.

2.3.2 Métodos de Prognóstico Baseados em Fenômenos Físicos

Métodos baseados em fenômenos físicos são aqueles que utilizam modelos de degradação desenvolvidos a partir de leis físicas que descrevem a dinâmica do mecanismo de falha. Em Li & Lee (2005), um método baseado na lei de Paris – equação que quantifica a taxa de crescimento de uma fratura pelo número de ciclos de fadiga – é utilizado para obtenção da RUL de uma caixa de redução constituída de um par de engrenagens. Já em Zhao et al. (2018), o método de prognóstico utiliza o modelo de Archard para descrever o desgaste superficial. Esse modelo é explicado detalhadamente em Zhao (2015). O método é aplicado em uma caixa de redução planetária. O uso desse tipo de método de prognóstico é bastante restrito, visto que os mecanismos de degradação são bastante limitados quanto as condições da aplicação.

2.3.3 Método de Prognóstico Híbridos

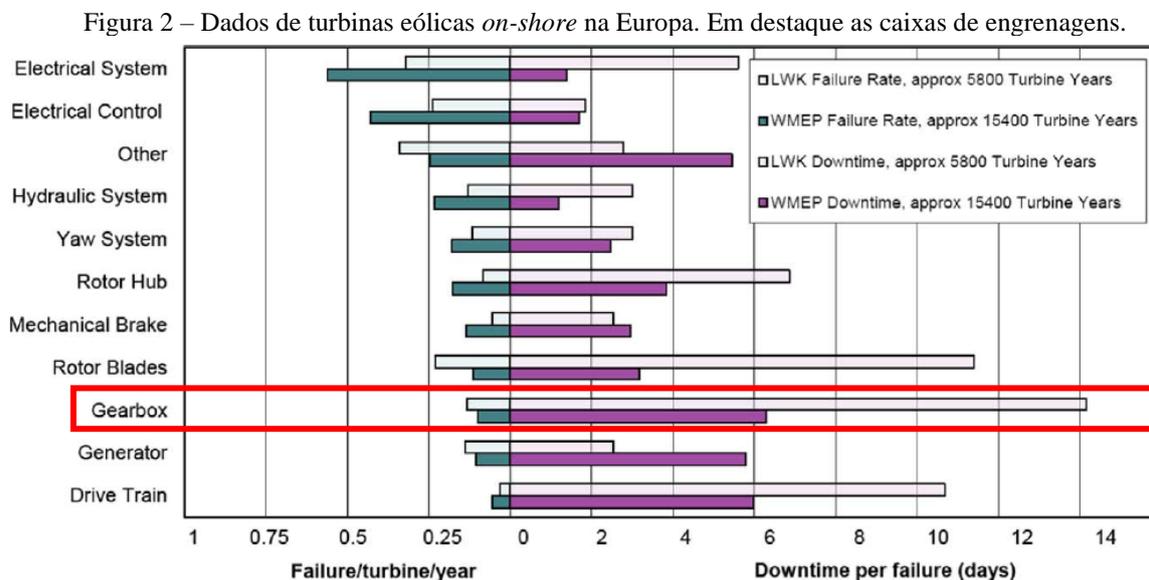
Os métodos híbridos visam combinar as vantagens dos modelos físicos de degradação com dados monitorados. Um método híbrido é utilizado em Liao & Köttig (2016) para prognóstico de uma bateria elétrica. O autor utiliza FP considerando um modelo dinâmico que representa o funcionamento de uma bateria elétrica. Os resultados mostram que a estimação de RUL por método híbrido é mais preciso que os métodos baseados somente no fenômeno físico ou somente orientado à dados. Em Zhao et al. (2013b), há a aplicação de um modelo físico com

adição de incertezas baseado na lei de Paris, no qual há a quantificação de incertezas por inferência bayesiana, sempre que um novo dado de degradação é obtido. O autor utiliza simulações de Monte Carlo para a inferência, porém apenas considerando um dos parâmetros do modelo como incerto. Caso quisesse considerar as incertezas dos outros parâmetros do modelo, utilizar a simulação de Monte Carlo seria bastante custoso computacionalmente. Zhao et al. (2018) realiza uma comparação entre o método híbrido, quando há a atualização a cada aquisição de dados, com um modelo puramente baseado nos fenômenos físicos. O modelo físico utilizado é o modelo de Archard, o qual descreve a progressão do desgaste em uma superfície. Os métodos são testados com dados de degradação reais de uma caixa de engrenagens planetária. Os resultados mostram que o modelo híbrido é mais preciso que métodos estritamente baseados ou em dados ou no modelo do fenômeno físico da degradação. Quando não há um modelo físico bem determinado, alguns trabalhos utilizam modelos aproximados como em Cosme et al. (2018a) e Cosme et al. (2015), com uso de modelo ANFIS aproximado e um modelo aproximado com base na forma da resposta, respectivamente. Assim, o método híbrido mostra-se uma alternativa precisa quando se tem conhecimento prévio do modelo de degradação de um sistema, ainda que este não represente idealmente o comportamento dinâmico da falha. Os métodos híbridos citados, consideram que os modelos são incertos, e aplicam métodos de inferência bayesiana como FP e método de Monte Carlo para quantificação de incertezas. O FP, como descrito em Liao & Köttig (2016), fornece uma abordagem matematicamente adequada para sistemas em que o estado de degradação não é medido diretamente. Ou seja, para o problema tratado nessa dissertação, no qual a medida de comprimento de fratura no dente de uma engrenagem será feita indiretamente pelo sinal de vibração, o FP é uma alternativa a ser investigada.

2.4 Métodos de Prognóstico aplicados em Caixa de Engrenagens

As caixas de engrenagens estão presentes, em geral, em todas as máquinas rotativas que visam a transferência de potência, mudança de velocidades e até direção, como por exemplo em veículos automóveis, helicópteros, máquinas de usinagem, turbinas eólicas, turbinas utilizadas em aviões, dentre outras. Devido a alta carga de serviço, condições severas de operação ou simplesmente fadiga, as engrenagens tendem a desenvolver fraturas (LIANG et al., 2018). A falha desse componente pode ter consequências graves, por exemplo, a queda de um helicóptero no ano de 2009 que matou dezesseis pessoas, causada pela fratura por fadiga em umas das engrenagens da caixa de redução (LIANG et al., 2018; P. Association, 2011).

Além disso, a falha desse componente tende a resultar em grande tempo parada dos equipamentos. A figura 2 ilustra esse fato para turbinas eólicas, mostrando a taxa de falhas por componentes e a quantidade de tempo de parada como consequência.



Fonte: (LEITE et al., 2017; TAVNER, 2011).

Métodos de prognóstico têm sido testado nesse sistema nos últimos anos, com o objetivo de evitar a ocorrência de falhas graves, através da detecção de falhas com antecedência e garantindo redução de custos e segurança na operação (LIANG et al., 2018).

Li & Lee (2005) considerou a falha de fratura do dente da engrenagem. O modelo de degradação considerado por esse autor é composto por três partes principais: modelo dinâmico das engrenagens, elementos finitos aplicado na fratura e a lei de Paris na propagação da fratura. O ponto fundamental desse modelo de degradação é a mudança de carga atuando no dente da engrenagem, devido a diminuição da rigidez do engrenamento causada pela fratura. Assim, para cada comprimento de fratura, a carga atuando no dente muda e essa mudança de carga, por sua vez, afeta o chamado SIF. O SIF é obtido por elementos finitos. A precisão do cálculo do SIF afeta consideravelmente a predição da RUL, visto que esse é um dos três fatores presentes na lei de Paris. Os outros dois fatores são constantes do material, obtidos por ensaios em condições controladas.

O modelo dinâmico em Li & Lee (2005) trata o sistema apenas pela vibração torcional e supondo que a rigidez de engrenamento é aproximada por uma série de Fourier truncada, na qual os coeficientes são aproximados pelo Método dos Mínimos Quadrados, após a medição do sinal de vibração. A vibração torcional é de difícil medição, requerendo sensores muito

específicos. Além disso, existem métodos mais precisos para cálculo da rigidez de engrenamento.

Zhao et al. (2013a) e Zhao et al. (2013b), o modelo dinâmico considera tanto o movimento rotacional, quanto movimento de translação. A rigidez é calculada por energia de deformação, sem restringir a fratura a uma trajetória retilínea, obtendo um modelo de degradação mais preciso. Ademais, esses trabalhos trouxeram ainda a adição de incertezas associadas tanto ao modelo, quanto as constantes do material, que podem ter alguma variação relacionada as condições de operação da caixa de engrenagem. Para tratar com essas incertezas, o autor utiliza inferência bayesiana. Em Zhao et al. (2013b), apenas uma das constantes é tratada como variável aleatória e o autor utiliza Simulação de Monte Carlo. Em Zhao et al. (2013a) é mostrado que ao tratar com mais variáveis aleatórias, o processamento pela Simulação de Monte Carlo se torna muito longo, e o autor utiliza como alternativa para quantificação de incertezas e avaliação da função de verossimilhança, a gPC. No entanto, em ambos, o autor admite diretamente o conhecimento do comprimento atual da fratura. Porém, essa medida, na grande maioria das aplicações onde se encontram as caixas de engrenagens, é um estado não observado e, normalmente, é obtido indiretamente pela medição de vibração. Assim, o FP surge como alternativa viável, pois é adequado para tratamento de sistema considerando dois modelos: de propagação de estado e modelo de medição.

O FP foi utilizado para prognóstico em caixas de engrenagens em Orchard et al. (2009), Liu et al. (2017a) e Liu et al. (2017b). Orchard et al. (2009) aplica o FP para estimar a RUL em uma caixa de engrenagens planetária, esta por sua vez falhou por fratura na placa que sustenta as engrenagens planetárias. Nesse trabalho, o SIF é calculado através de elementos finitos e os parâmetros dos materiais são mantidos constantes. O comprimento da fratura é estimado via dados provenientes de *strain gauges* (extensômetros) fixados na placa. No trabalho de Liu et al. (2017b), o autor utiliza a solução analítica para cálculo do SIF considerando o problema de uma placa “fina” tracionada, considerando um fator de correção. Para geometrias e carregamentos complexos como em sistemas engrenados, não há solução analítica, por isso, é utilizado aproximação numérica através de elementos finitos (ZHAO et al., 2013b; LI & LEE, 2005). Já em Liu et al. (2017a), o autor aproxima o modelo de degradação aproximado por um processo de Wiener com coeficientes obtidos a partir de dados reais. Nesse trabalho, o SIF é obtido por meio de elementos finitos, visando maior precisão quando comparado a esses dois modelos anteriores.

3. MODELO DE DEGRADAÇÃO

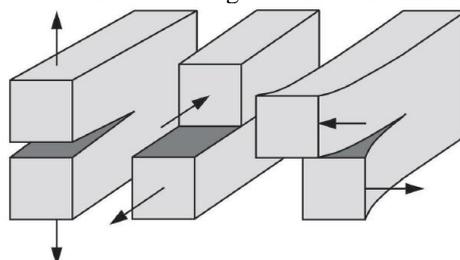
O modelo de degradação da caixa de engrenagens utilizado nesse trabalho é baseado na lei de Paris, a qual descreve o comportamento dinâmico da fratura. Essa seção é iniciada com uma descrição da lei de Paris, detalhando os seus parâmetros, a saber, dos materiais e o SIF, sendo esse dependente da carga atuando sobre o dente. Em seguida, é apresentado o modelo dinâmico do par de engrenagens e o cálculo analítico da rigidez do engrenamento para o caso de um par de engrenagens saudável e para engrenagens fraturadas. Ao final, é explicado sobre as fontes de incertezas no modelo e como essas três etapas são unidas para composição do modelo de degradação.

3.1 Modelo Físico da Falha por Fratura

O modo de falha considerado nesse trabalho é a fratura no dente de uma engrenagem, que se propaga devido a carga cíclica de tensão sob a qual a engrenagem está submetida. O caso de propagação de fratura em estruturas sob cargas cíclicas é bastante conhecida e é tratada na Mecânica da Fratura.

A análise da fratura tanto do ponto de vista do estado de tensões e deformações em sua extremidade, quanto da sua propagação por fadiga está diretamente relacionada aos SIF. Por sua vez, esses fatores estão relacionados ao tipo de carga e a geometria. Há basicamente três tipos de cargas que uma fratura pode experimentar conforme apresentado na figura 6. O modo I ocorre quando a carga principal é aplicada na direção normal ao plano da fratura e que tende a abrir a fratura. O Modo II corresponde ao cisalhamento no plano da fratura e que causa um deslizamento no plano e o Modo III, quando há cisalhamento da fratura fora do plano (LEWICKI & BALLARINI, 1997; ANDERSON, 2017). A cada modo de falha há um SIF relacionado nominado como K_I , K_{II} e K_{III} , nos quais o subscrito indica o modo.

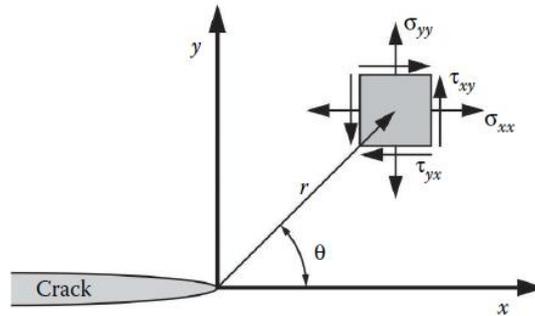
Figura 3 – Modos de carga atuantes em uma fratura.



Fonte: (ANDERSON, 2017).

Assumindo um corpo sob tensão composto de material isotrópico e comportamento linear elástico, esquematizando na figura 4, o seu estado de tensão localizado pelo vetor \mathbf{r} com origem na extremidade da fratura, é definido pelas equações (3.1) e (3.2) (ANDERSON, 2017)

Figura 4 – Estado de tensão localizado próximo a extremidade da fratura.



Fonte: (ANDERSON, 2017).

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)], \quad (3.1)$$

$$u_{ij} = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I g_{ij}^I(\theta) + K_{II} g_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} g_{ij}^{III}(\theta)], \quad (3.2)$$

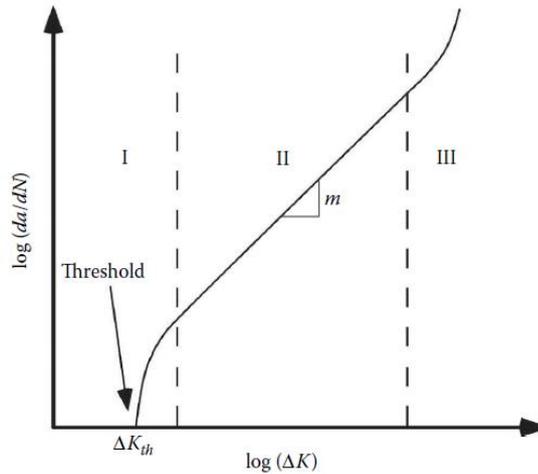
onde σ_{ij} é um componente do tensor de tensão, u_{ij} são as deformações, r e θ identificam a posição do estado, $f_{ij}^I, f_{ij}^{II}, f_{ij}^{III}, g_{ij}^I, g_{ij}^{II}, g_{ij}^{III}$ são funções universais de θ e podem ser obtidas em Anderson (2017). Pelas equações (3.1) e (3.2), definidos os SIF's, o estado de tensão é completamente determinado em função de r e θ .

Além da importância desses fatores no cálculo do estado de tensão e deformação, os SIF's estão ainda relacionados com a propagação da fratura. Muitos modelos foram desenvolvidos para descrever o comportamento dinâmico da propagação da fratura, em sua grande maioria de forma empírica, que é o caso da lei de Paris. A figura 5 mostra uma curva típica, em escala log-log, do crescimento da fratura em um material metálico, na qual estão relacionados a taxa de crescimento da fratura em relação ao número de ciclos de tensão (da/dN) com a variação do SIF na carga máxima e na carga mínima do carregamento cíclico (ΔK) (ANDERSON, 2017).

A curva contém três regiões distintas: iniciação da fratura, propagação da fratura e falha final (LEWICKI & BALLARINI, 1997). A região I mostra que a fratura se inicia somente quando ΔK é superior a um valor limite ΔK_{th} . Nessa fase, a trinca está em dimensões microscópicas e a sua formação está relacionada com deslizamentos de cristais que se estendem até grãos contíguos, inclusões e imperfeições superficiais. Na região II ocorre um crescimento

ordenado da trinca, com comportamento linear (em escala logarítmica), até que entre na região III, na qual ocorre a fratura total (BUDYNAS & NISBETH, 2016).

Figura 5 – Curva típica do crescimento de fratura em materiais metálicos.



Fonte: (ANDERSON, 2017).

A região central da curva é descrita pela lei de Paris (LEWICKI & BALLARINI, 1997; ANDERSON, 2017):

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (3.3)$$

onde da/dN é a taxa de crescimento da fratura em relação ao número de ciclos de carga, C e m são parâmetros do material obtidos experimentalmente e ΔK é a variação do SIF para as cargas máximas e mínimas do ciclo de carga.

A lei de Paris é empregada nesse trabalho para descrever a propagação de uma trinca em um dente de engrenagem, de forma similar aos trabalhos Zhao et al. (2013a), Zhao et al. (2013b), Li & Lee (2005) e Lewicki & Ballarini (1997), sendo apresentado em Li & Lee (2005) e Lewicki & Ballarini (1997) uma boa concordância entre o modelo e resultados experimentais. Como visto na equação (3.3), a propagação depende das duas constantes do material e do SIF, sendo esse último dependente da geometria e carga aplicada. Em geometrias e carregamentos simples existem soluções fechadas para cálculo do SIF, porém em casos com maior complexidade dificilmente há ou é possível obter essas soluções (LEWICKI & BALLARINI, 1997; ANDERSON, 2017). Esse último é o caso das engrenagens.

O cálculo do SIF em casos complexos, como em engrenagens, é viável através do uso de Elementos Finitos. Nesse trabalho, o FRANC2D é utilizado para essa finalidade. O

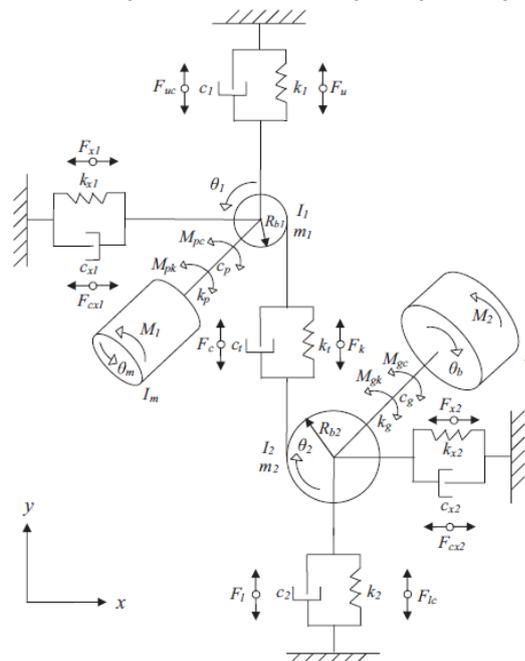
FRANC2D é um *software* gratuito baseado em elementos finitos dedicado a problemas bidimensionais de mecânica da fratura. Nele, ao adicionar a malha de elementos com a geometria da engrenagem, propriedades do material e condições de contorno (carga aplicada e fixação de nós), assim como o comprimento e local inicial da fratura, é possível propagar a trinca e obter o SIF.

O ponto chave na obtenção do SIF está na carga aplicada ao dente da engrenagem, a qual é influenciada pelo comprimento da fratura. Isso ocorre pela mudança de rigidez no engrenamento, que tende a diminuir com o aumento da fratura. Assim, para cada comprimento da fratura há uma rigidez diferente e, conseqüentemente, uma carga diferente sendo aplicada ao dente da engrenagem. A diminuição da rigidez influencia ainda no aumento da vibração do sistema. O cálculo da carga e da rigidez são apresentados nas próximas seções.

3.2 Modelo Dinâmico de um Par de Engrenagens

O modelo dinâmico empregado nesse trabalho foi desenvolvido em Baltermus (2001) e utilizado também em outros estudos como Zhao et al. (2013a), Zhao et al. (2013b), Wu et al. (2008) e Tian et al. (2012). Esse modelo, demonstrado esquematicamente na figura 6, representa um sistema composto por um par de engrenagens, uma engrenagem motora acoplada ao motor e a outra movida conectada a uma carga. Ambas são sustentadas por mancais.

Figura 6 – Modelo dinâmico para um sistema composto por um par de engrenagens.



Fonte: (WU et al., 2008).

Esse modelo de parâmetros concentrados possui 8 GLD, considerando movimentos de translação e rotação. O sistema de equações diferenciais obtido pelo método de Newton-Euler com base nesse modelo é apresentado a seguir:

$$m_1 \ddot{y}_1 = F_k + F_c - F_u - F_{uc} , \quad (3.4)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = F_k + F_c - F_l - F_{lc} , \quad (3.5)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F_{x1} - F_{c1} = -k_{x1}x_1 - c_{x1}\dot{x}_1 , \quad (3.6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -F_{x2} - F_{c2} = -k_{x2}x_2 - c_{x2}\dot{x}_2 , \quad (3.7)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = M_{pk} + M_{pc} - R_{b1}(F_k + F_c) , \quad (3.8)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = R_{b2}(F_k + F_c) - M_{gk} - M_{gc} , \quad (3.9)$$

$$I_m \ddot{\theta}_m = M_1 - M_{pk} - M_{pc} , \quad (3.10)$$

$$I_b \ddot{\theta}_b = -M_2 + M_{gk} + M_{gc} , \quad (3.11)$$

em que

$$F_k = k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) , \quad (3.12)$$

$$F_c = c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) , \quad (3.13)$$

$$F_u = k_1y_1 , \quad (3.14)$$

$$F_{uc} = c_1\dot{y}_1 , \quad (3.15)$$

$$F_l = k_2y_2 , \quad (3.16)$$

$$F_{lc} = c_2\dot{y}_2 , \quad (3.17)$$

$$M_{pk} = k_p(\theta_m - \theta_1) , \quad (3.18)$$

$$M_{pc} = c_p(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_1) , \quad (3.19)$$

$$M_{gk} = k_g(\theta_2 - \theta_b) , \quad (3.20)$$

$$M_{pc} = c_g(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_b) . \quad (3.21)$$

Os parâmetros presentes nas equações com seus respectivos significados físicos estão descritos na tabela 1.

Tabela 1: Descrição dos parâmetros físicos do modelo dinâmico da caixa de engrenagens.

y_1 / y_2	Deslocamento linear do pinhão/coroa na direção y
x_1 / x_2	Deslocamento linear do pinhão/coroa na direção x
θ_1 / θ_2	Deslocamento angular do pinhão/coroa
θ_m / θ_b	Deslocamento angular do motor/carga
m_1 / m_2	Massa do pinhão/coroa

I_1 / I_2	Momento de inércia de massa do pinhão/coroa
I_m / I_b	Momento de inércia de massa do motor/carga
M_1 / M_2	Torque de entrada/saída
R_{b1} / R_{b2}	Raio do círculo de base do pinhão/coroa
k_p / k_g	Rigidez torcional dos eixos acoplados na entrada/saída
c_p / c_g	Coefficiente de amortecimento torcional dos eixos acoplados na entrada/saída
k_1 / k_2	Rigidez radial dos mancais de entrada/saída
c_1 / c_2	Coefficiente de amortecimento radial dos mancais de entrada/saída
k_t	Rigidez total no engrenamento
c_t	Coefficiente de amortecimento total no engrenamento

As equações (3.6) e (3.7), que reproduzem o movimento de translação na direção x das engrenagens, são independentes das outras e entre si, e tem a forma de sistemas amortecidos livres, para os quais as respostas tendem a zero (WU et al., 2008; TIAN et al., 2012). Portanto, o movimento na direção x será desconsiderado nesse trabalho, reduzindo o sistema a 6 GDL.

Considera-se para esse modelo que os mancais de entrada/saída e eixos de entrada/saída são idênticos, ou seja, $k_1 = k_2 = k_r$, $c_1 = c_2 = c_r$, $k_p = k_g = k_c$ e $c_p = c_g = c_c$. Além disso, é assumido que o coeficiente de amortecimento total no engrenamento c_t é proporcional à rigidez total de engrenamento k_t , isto é, $c_t = \mu k_t$. Adota-se $\mu = 3,99 \times 10^{-6}$ (WU et al., 2008; TIAN et al., 2012).

A carga atuando no dente da engrenagem, assim como o sinal de vibração translacional do sistema são obtidos resolvendo o sistema de equações (3.4) à (3.21). Conhecida as soluções, a carga dinâmica, para o caso em que não há contato na parte traseira do dente, é a soma da força elástica $F_k = k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2)$ e força de amortecimento $F_c = c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2)$, deste modo pode-se escrever a seguinte relação (ZHAO et al., 2013b):

$$F = k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) + c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2). \quad (3.22)$$

A solução do sistema de equações que dão origem ao sinal de vibração e a carga dinâmica atuando no dente da engrenagem depende da rigidez total de engrenamento k_t . Como comentado anteriormente, a rigidez é afetada quando há o surgimento da fratura e vai se alterando com a sua propagação. Assim, é estritamente necessário calculá-la antes para cada comprimento de trinca e então, obter a solução do sistema de equações do modelo.

3.3 Cálculo da Rigidez de Engrenamento

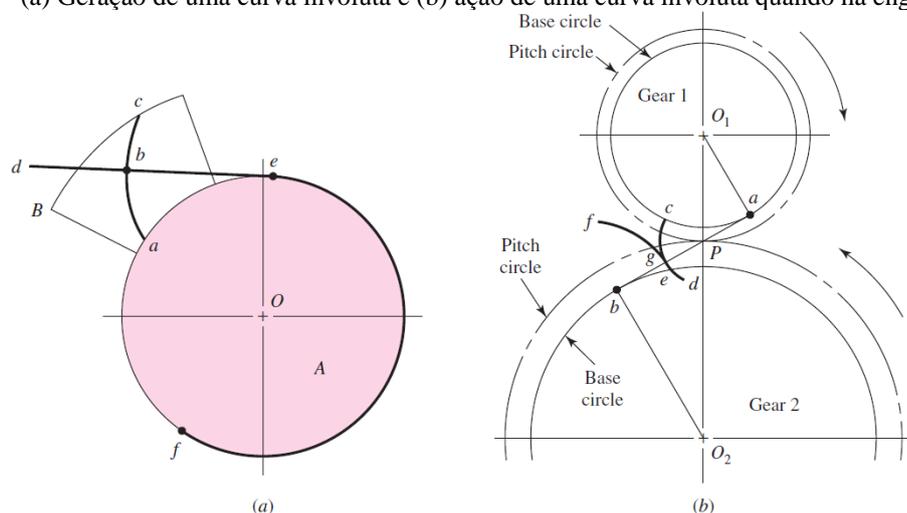
O cálculo da rigidez de engrenamento depende das propriedades do material, do qual a engrenagem é feita, e principalmente da geometria do dente da engrenagem, que influencia diretamente no processo e fases de engrenamento. Antes de demonstrar as equações para cálculo da rigidez, será apresentada uma breve seção sobre a geometria da engrenagem e o processo de engrenamento.

3.3.1 Geometria das Engrenagens

As engrenagens têm como principal função transmitir movimento de rotação (ou translação em alguns casos), de tal forma a manter a razão de transmissão de velocidades e torque constantes durante o contato. Para isso, é necessário que ocorra a chamada Ação Conjugada, a qual é mais comumente obtida através da fabricação do dente por uma curva involuta (ou evolvente) de uma circunferência (BUDYNAS & NISBETH, 2016).

Na figura 07 apresenta-se uma curva involuta. A curva involuta abc pode ser gerada pensando em uma corda def , com um traçador fixo em b , sendo tracionada tangencialmente em torno de um círculo (círculo de base) como mostra a figura 7a. Ao se utilizar essa curva para produção do perfil do dente da engrenagem, o ponto de contato entre as engrenagens, quando engrenadas, estará sempre na linha de ação ab (figura 7b). A linha de ação é sempre perpendicular à involuta e a força atuante estará sempre em sua direção (BUDYNAS & NISBETH, 2016).

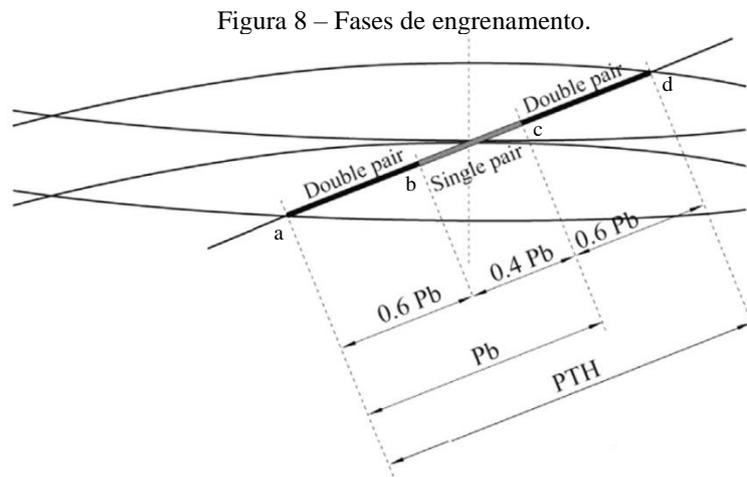
Figura 7 – (a) Geração de uma curva involuta e (b) ação de uma curva involuta quando há engrenamento.



Fonte: (BUDYNAS & NISBETH, 2016).

Outros parâmetros importantes na geometria de engrenagens são o Módulo/Passo diametral, número de dentes, ângulo de pressão, adendo, dedendo, que ao serem fixados, definem totalmente a geometria da engrenagem. Ângulo de pressão, adendo e dedendo são normalmente padronizados por normas. Número de dentes e Módulo/Passo diametral estão relacionados entre si e devem ser selecionados com base na relação de transmissão desejados. Em Budynas & Nisbeth (2016), todos esses parâmetros são explicados em mais detalhes.

A partir da geometria da engrenagem é possível avaliar a chamada Razão de Contato, que é a quantidade média de pares de dentes em contato durante o engrenamento (BUDYNAS & NISBETH, 2016). Para razão de contato entre 1 e 2, haverá durante o engrenamento no máximo dois pares de dentes em contato. Tomando como exemplo uma razão de contato de 1.6, isso significa dizer que em 60% do período de engrenamento dois pares de dentes estarão em contato, enquanto nos 40% restante, estará somente um par (MOHAMMED et al., 2013). Portanto, há durante o engrenamento, para razão de contato entre 1 e 2, três fases durante o processo de engrenamento. A figura 08 ilustra essas fases.



Fonte: (MOHAMMED et al., 2013).

No início do engrenamento de cada dente (ponto *a*), quando o pinhão entra em contato com um dente da coroa (par 1), outro par de dentes já está em contato (par 2). À medida que o pinhão rotaciona, o par 2 deixa de estar em contato (ponto *d*), e então, nessa segunda fase, há somente um par engrenado (par 1). Essa segunda fase inicia quando o par 1 atinge o ponto *b*. A terceira etapa do engrenamento inicia no momento em que o par 1 atinge o ponto *c*. Nesse ponto, um outro par de dente se encontra no ponto *a* (par 3), voltando a ter dois pares de dentes em contato. O engrenamento do par 1 é finalizado quando atinge o ponto *d*. De forma resumida:

- Do ponto *a* ao ponto *b*: dois pares de dentes em contato (par 1 e par 2);

- Do ponto *b* ao ponto *c*: um par de dentes em contato (par 1);
- Do ponto *c* ao ponto *d*: dois pares de dentes em contato (par 3 e par 1).

Durante o engrenamento, há sempre a alternância entre um par e dois pares em contato, sendo essa a principal fonte de vibração de uma caixa de engrenagens. Essa alternância de contato afeta o comportamento da força atuando sobre o dente, visto que ao estar nas fases 1 e 3, a força é distribuída entre dois pares de dentes, enquanto na fase 2, a força está concentrada somente em um par. Além disso, o comportamento da rigidez também é afetado como é visto na próxima seção.

3.3.2 Rigidez de Engrenamento – Método de Energia Potencial

O método de energia potencial assume o dente de engrenagem como sendo uma viga engastada com seção transversal não uniforme e, a partir dos esforços atuantes nessa viga, calcula-se a rigidez de engrenamento. Esse método foi inicialmente proposto em Yang & Lin (1987), no qual a energia total é composta pela energia de Hertzian, energia relacionada à Flexão e a energia relacionada a carga axial compressiva. Tian et al. (2004) adicionou um outro termo à energia total relacionada ao cisalhamento, a qual se mostrou de grande contribuição na energia total (LIANG et al., 2018; ZHAO, 2015). O exposto a seguir é baseado na referência Zhao (2015), explicitado caso contrário.

Considerando inicialmente um dente saudável, a energia de Hertzian, energia relacionadas à Flexão, ao cisalhamento e à carga axial, denotadas por U_h , U_b , U_s e U_a , respectivamente, são dadas por:

$$U_h = \frac{F^2}{2k_h}, \quad (3.23)$$

$$U_b = \frac{F^2}{2k_b}, \quad (3.24)$$

$$U_s = \frac{F^2}{2k_s}, \quad (3.25)$$

$$U_a = \frac{F^2}{2k_a}, \quad (3.26)$$

onde k_h , k_b , k_s e k_a são as rigidezes de Hertzian, flexão, cisalhamento e axial, respectivamente. F é a carga atuando no ponto de contato durante engrenamento.

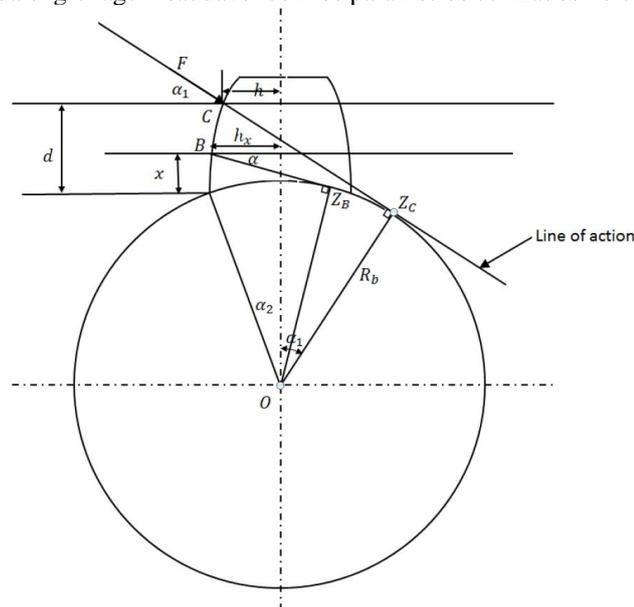
A rigidez de Hertzian está relacionada com a deformação do dente na vizinhança do contato (YANG & LIN, 1987). Para engrenagens fabricadas com mesmo material, essa rigidez independe do ponto de contato e pode ser expressa por:

$$k_h = \frac{\pi EW}{4(1 - \nu^2)}, \quad (3.27)$$

onde E é o módulo de Young, W é a largura da engrenagem e ν é o coeficiente de Poisson.

As rigidezes k_b , k_s e k_a dependem do ponto de contato. Assim, primeiro são introduzidos os parâmetros envolvidos nas equações para cálculo das rigidezes, ilustrados na figura 09. O ponto C é o ponto de contato entre as engrenagens, onde a força está aplicada. Da propriedade da curva involuta, a linha de ação é sempre perpendicular ao perfil do dente e tangente ao círculo de base. O ângulo α_1 localiza o ponto C e é utilizado para decompor a força F em $F_b = F \cos \alpha_1$, responsável pelo cisalhamento, e $F_a = F \sin \alpha_1$, que é a carga axial. Ambas F_a e F_b causam momento de flexão no dente. O ângulo α_2 é o ângulo da metade do dente, considerando o círculo de base. Qualquer ponto B pertencente ao perfil do dente, é localizado pela variável x ou pela variável α .

Figura 9 – Geometria da engrenagem saudável com os parâmetros utilizados no cálculo das rigidezes.



Fonte: (ZHAO, 2015).

A energia armazenada no dente devido ao momento de flexão, ao cisalhamento e carga axial são dadas pelas equações (3.28) à (3.30), respectivamente. Essas equações são provenientes da energia de deformação elástica. Mais detalhes são encontrados em Hibbeler

(2010). Nas equações, G é o módulo de elasticidade transversal e pode ser calculado por $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

$$U_b = \int_0^d \frac{M^2}{2EI_x} dx = \int_0^d \frac{[F_b(d-x) - F_a h]^2}{2EI_x} dx, \quad (3.28)$$

$$U_s = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_x} dx, \quad (3.29)$$

$$U_a = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_x} dx. \quad (3.30)$$

As quantidades I_x e A_x representam o momento de inércia de área e a área da seção transversal localizada a uma distância x da raiz do dente. Ambas podem ser calculadas por

$$I_x = \frac{1}{12} (2h_x)^3 W = \frac{2}{3} h_x^3 W, \quad (3.31)$$

$$A_x = 2h_x W, \quad (3.32)$$

em que h_x , distância horizontal até a linha central do dente, é calculado como

$$h_x = R_b [(\alpha + \alpha_2) \cos \alpha - \sin \alpha]. \quad (3.33)$$

Após algumas manipulações algébricas nas equações (3.24) à (3.26) e (3.28) à (3.33), as rigidezes k_b , k_s e k_a são dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EW[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha, \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2(1+\nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EW[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{k_a} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha_1}{2EW[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha. \quad (3.36)$$

Conhecidas as rigidezes, a rigidez total de engrenamento k_t de um par de dentes é:

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}}, \quad (3.37)$$

em que os subscritos 1 e 2 representam a rigidez do dente do pinhão e do dente da coroa, respectivamente. Das equações (3.34) à (3.36), observa-se que as rigidezes do dente dependem da posição da engrenagem, devido a posição da carga. Para um par é preciso saber exatamente os pontos de contato comuns para pinhão e coroa.

Outro fator importante está no fato da alternância entre um e dois pares de dentes em contato durante o engrenamento (se razão de contato está entre 1 e 2). Quando há um par de dentes em contato, a rigidez total é calculada por (3.37), no entanto, quando há dois pares, a rigidez total do engrenamento é a soma da rigidez total de cada par, ou seja:

$$\frac{1}{k_t} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{k_{h,j}} + \frac{1}{k_{b1,j}} + \frac{1}{k_{s1,j}} + \frac{1}{k_{a1,j}} + \frac{1}{k_{b2,j}} + \frac{1}{k_{s2,j}} + \frac{1}{k_{a2,j}}. \quad (3.38)$$

Nessa equação, j indica o par em contato.

Como comentando nas seções anteriores, a fratura em um dente afeta a rigidez. De fato, a fratura afeta o momento de inércia de área e a área efetiva da seção transversal do dente. Em alguns trabalhos como Wu et al. (2008), Tian et al. (2012), Tian et al. (2004) e Ma et al. (2014), a trajetória da fratura é assumida como uma reta até a linha central do dente e, após, é assumido uma trajetória simétrica em relação a essa linha. Esse trabalho, assim como em Zhao et al. (2013a), Zhao et al. (2013b) e Zhao (2015), não restringirá a trajetória reta, pelo contrário, a trajetória curva da fratura é obtida via elementos finitos.

A fratura é iniciada na raiz do dente do pinhão, em virtude desse ponto experimentar uma grande tensão, e ocorrer no pinhão devido a maior frequência de carga. A trajetória curva da fratura é formada por uma série de incrementos retilíneos, que tem sua angulação β variável (figura 10). Em um dente fraturado, o cálculo das rigidezes depende da posição da extremidade da fratura, da qual parte uma linha vertical. Dependendo de onde essa linha vertical intersecciona (ponto G), há uma forma de calcular a rigidez. Há 04 possíveis casos que surgem decorrente dessa posição: T_1 , quando intersecciona o perfil do dente (ponto G_1); T_2 , ocorre ao interseccionar a linha superior do dente, porém antes da linha central (ponto G_2); T_3 , similar a T_2 , mas após a linha central (ponto G_3); e T_4 , quando toca na parte posterior do dente (ponto G_4). Observe que a fratura, à medida que se propaga, vai recaindo em um desses casos.

Os ângulos α_1 e α_2 representam as mesmas quantidades referidas no cálculo para uma engrenagem saudável e são suficientes para calcular a rigidez nesse caso. No entanto, para a engrenagem fraturada, há outras duas, a saber: o ângulo α_{gi} , que é o ângulo formado pela linha que passa pelo ponto G_i e é tangente ao círculo de base; e a projeção horizontal de ST_i , denotada como u_i . O índice $i = 1, 2, 3, 4$ indica o caso que recai

Rigidez de flexão:

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EW \left[\sin \alpha_2 - \frac{u_1}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha. \quad (3.41)$$

Rigidez de cisalhamento:

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EW \left[\sin \alpha_2 - \frac{u_1}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]} d\alpha. \quad (3.42)$$

Caso 2: Extremidade T_2 :

Rigidez de flexão:

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EW \left[\sin \alpha_2 - \frac{u_2}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha. \quad (3.43)$$

Rigidez de cisalhamento:

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EW \left[\sin \alpha_2 - \frac{u_2}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]} d\alpha. \quad (3.44)$$

Caso 3: Extremidade T_3 :

Rigidez de flexão:

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EW \left[-\frac{u_3}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha. \quad (3.45)$$

Rigidez de cisalhamento:

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EW \left[-\frac{u_3}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]} d\alpha. \quad (3.46)$$

Caso 4: Extremidade T_4 :

Caso 4.1: Ponto de contato acima de G_4' ($\alpha_1 > \alpha_{g4}$):

Rigidez de flexão:

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_{g4}}^{\alpha_2} \frac{12\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EW \left[-\frac{u_4}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha. \quad (3.47)$$

Rigidez de cisalhamento:

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_{g4}}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EW \left[-\frac{u_4}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha. \quad (3.48)$$

Caso 4.2: Ponto de contato abaixo de G_4' ($\alpha_1 \leq \alpha_{g4}$):

Rigidez de flexão:

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EW \left[-\frac{u_4}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha. \quad (3.49)$$

Rigidez de cisalhamento:

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EW \left[-\frac{u_4}{R_b} + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha. \quad (3.50)$$

Para calcular a rigidez do par de dentes utilizam-se as equações (3.37) e (3.38). Para um dado comprimento da fratura, todos os parâmetros necessários para o cálculo da rigidez podem ser determinados e a rigidez total calculada. Com isso, substituindo a rigidez total de engrenamento nas equações dinâmicas do sistema de engrenagens, é possível obter o sinal de vibração e a carga dinâmica. A partir da carga dinâmica, pode-se finalmente obter o SIF. Esse processo é demonstrado a seguir.

3.4 Processo de Obtenção do SIF

Com base nos conceitos apresentados nas seções anteriores, o processo de obtenção do SIF para o par de engrenagens segue os seguintes passos (ZHAO et al., 2013b):

1. Defina a trinca inicial. Recomenda-se $\beta_0 = 45^\circ$ e comprimento inicial $a_0 = 0.1 \text{ mm}$.
2. Calcule a distância u entre S e a extremidade da fratura T , e então obtenha a rigidez total de engrenamento k_t .
3. Resolva o sistema de equações dinâmicas para o par de engrenagens para o valor de k_t calculado no passo 2. Retire da solução, a máxima carga atuando no dente fraturado.

4. Aplique a carga máxima no ponto correspondente ao HPSCT (*Highest Point Single Contact Tooth*) do pinhão no modelo em elementos finitos no *software* FRANC2D. Obtenha os SIF's do modo I e II, K_I e K_{II} .
5. Propague a fratura em $\Delta a = 0.1 \text{ mm}$ no FRANC2D. Volte ao passo 2, até que o comprimento da fratura atinja um valor crítico.

Ao final desse processo, os valores de K_I e K_{II} serão obtidos em função de cada comprimento de trinca, ou seja, $K_I(a)$ e $K_{II}(a)$. Na maioria dos problemas, a influência do termo K_I na propagação da fratura é muito superior à do termo K_{II} (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b; GUILBAULT et al., 2015). Portanto, somente o termo relacionado ao modo I de carga é utilizado no modelo de degradação. Além disso, como o valor da carga mínima do ciclo de carga é zero, quando o dente não está em contato, então ΔK somente é calculada para o SIF referente a carga máxima.

3.5 Lei de Paris – Fontes de Incertezas

A lei de Paris descreve a propagação de uma fratura qualquer considerando parâmetros dos materiais obtidos experimentalmente e o SIF, o qual depende da carga e geometria da estrutura avaliada. Nesse trabalho, assim como em Zhao et al. (2013a), Zhao et al. (2013b) e Zhao (2015), são adicionados ao modelo três fontes de incertezas: aos parâmetros do material, ao próprio modelo e às medidas, porém, nesse último ponto, esse trabalho tem uma abordagem diferente. As incertezas adicionadas ao modelo são responsáveis por produzirem resultados diferentes., mesmo em condições experimentais bem controladas.

Os parâmetros dos materiais são obtidos a partir de ensaios experimentais. Os ensaios tendem a produzir resultados diferentes que podem estar relacionados a sua execução, à condições do ambiente e operação, ao processo de fabricação, entre outros fatores. Assim, alguns trabalhos assumem os parâmetros m e C como tendo distribuições normal (ZHAO et al., 2013a; LIU et al., 2017a; LIU et al., 2017b; AN et al., 2012). Em relação à medição, o erro de medida e é modelado como sendo ruído branco.

À incerteza relacionada ao modelo ε está associada as suas limitações como na desconsideração da plasticidade e dureza na fratura, a natureza aleatória da microestrutura dos materiais, variações de carga, na modelagem da fratura, na aproximação numérica do SIF, dentre outros. Esse termo é adicionado de forma multiplicativa no modelo (ZHAO et al., 2013a;

ZHAO et al., 2013b; AN et al., 2012; YANG et al., 1985). Portanto, a lei de Paris é escrita como:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^{m\varepsilon}, \quad (3.51)$$

no qual, $m, C \sim \text{Normal}$ e $\varepsilon \sim \text{Log-Normal}$.

Nas abordagens utilizadas nesse trabalho, apenas as distribuições iniciais dos parâmetros são conhecidas e, com advento de novas medidas, objetiva-se obter os valores estimados mais condizentes com o experimento sendo realizado.

3.6 Índices de RMS e Kurtosis

Os índices de RMS e Kurtosis são utilizados nesse trabalho para aferição indireta do comprimento de fratura na caixa de engrenagens. Esses índices são extraídos a partir do sinal de vibração adquirido comumente por um acelerômetro. De acordo com Wu et al. (2008) e Tian et al. (2012), esses dois índices são bons indicadores da falha por fratura em sistemas de engrenagens por serem sensíveis a variação no comprimento da fratura, além de serem robustos.

Dado um sinal, o seu valor RMS e Kurtosis é calculado respectivamente por

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad (3.52)$$

$$\text{Kurtosis} = \frac{\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4}{\left[\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2\right]^2}, \quad (3.53)$$

em que \bar{x} é a média do sinal.

Importante destacar que apesar de Kurtosis indicar uma característica relacionada à distribuições de probabilidade, aqui ela é somente utilizada do ponto de vista de sua expressão matemática, portanto, não significando que o Kurtosis de um sinal esteja relacionada à determinada característica de sua distribuição de probabilidade.

4. FILTRO DE PARTÍCULAS

O prognóstico envolve a geração de previsões a longo prazo, descrevendo a evolução do indicador de falha com finalidade de estimar a RUL do sistema. Isso envolve a projeção do estado atual de degradação sem conhecimento de medidas futuras, o que inevitavelmente gera incertezas na previsão. Como descrito na seção anterior, é comum que as variáveis do sistema sejam tratadas como aleatórias. Nesse sentido, uma poderosa ferramenta de tratamento dessas incertezas são as técnicas de estimação bayesiana, sendo a sua principal vantagem a capacidade de combinar informações de um modelo dinâmico e dados coletados (BUTLER, 2012; ORCHARD et al., 2008).

Nessa seção é descrito inicialmente o problema de estimação bayesiano e sua solução através do FP. Ademais, considerando que a lei de Paris, usada como modelo de degradação, possui incertezas associadas aos parâmetros do material, é interessante apresentar métodos que possibilitem a estimação simultânea tanto do estado, quanto dos parâmetros do material. Portanto, são ainda descritos os métodos baseados em FP utilizados nesse trabalho, especificando a etapa de prognóstico. O primeiro método utiliza dinâmica artificial dos parâmetros, o que permite a estimação de estado e parâmetro simultaneamente. Para finalidade de prognóstico, esse método trabalha essencialmente em duas etapas principais. Ao receber uma medida, o FP realiza a primeira etapa que é a estimação de estado. Com o estado atual do sistema, o filtro gera uma previsão a longo prazo e, a partir disso, consegue estimar a RUL do sistema. Essas etapas serão explicadas em mais detalhes a seguir. No segundo, o algoritmo PMCMC, mais especificamente o PMH, permite a estimação simultânea do estado e dos parâmetros através de suas distribuições marginais *posterioris* obtidas pelo algoritmo de Metropolis-Hastings. Dados os parâmetros e o estado de degradação, esse é propagado pelo modelo de degradação e então é obtida a distribuição da RUL.

4.1 Problema de Estimação Bayesiano

Para introduzir o funcionamento da estimação bayesiana, primeiro considere um sistema dinâmico, no qual o estado no tempo t é representado pelo vetor x_t . A evolução do estado do sistema, quando considerado como processo Markoviano, é dada pelo seguinte modelo (ARULAMPALAM et al., 2002; JOUIN et al., 2016):

$$x_t = f_t(x_{t-1}, v_{t-1}) \leftrightarrow p(x_t | x_{t-1}), \quad (4.1)$$

$$z_t = h_t(x_t, n_t) \leftrightarrow p(z_t | x_t), \quad (4.2)$$

onde $t \in \mathbb{N}$ é o instante de tempo, $x_t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, f_t é uma função do estado x_{t-1} e $v_{t-1} \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ que é ruído do processo, h_t é uma função que representa a relação entre as medidas $z_t \in \mathbb{R}^m$, dependente dos estados x_t e $n_t \in \mathbb{R}^{m_\nu}$ que é uma sequência de medidas ruidosas.

Dado o sistema das equações (4.1) e (4.2), o problema de estimação (ou filtragem) é estimar um estado x_t , baseado no conjunto de todas as medidas $z_{1:t} = \{z_j, j = 1, 2, \dots, t\}$. Da perspectiva bayesiana, o objetivo é calcular recursivamente a função de densidade de probabilidade (fdp) de um estado x_t , dado um conjunto de observações $z_{1:t}$ no tempo t . Isto é, construir a fdp $p(x_t | z_{1:t})$, conhecida como fdp posterior do estado (BUTLER, 2012). Deve ser ainda assumido conhecida a distribuição inicial do estado $p(x_0)$ (ARULAMPALAM et al., 2002).

A obtenção da fdp posterior é feita através da seguinte sequência de passos (BUTLER, 2012; JOUIN et. al, 2016):

- Predição: usa o modelo de estado para obter a fdp *a priori* do estado no tempo t via Equação de Chapman-Kolmogorov, já considerando como processo Markoviano, dada pela seguinte equação

$$p(x_t | z_{1:t-1}) = \int p(x_t | x_{t-1}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}) dx_{t-1}. \quad (4.3)$$

- Atualização: no tempo t , obtém-se uma medida z_t e esta é utilizada na Regra de Bayes, para calcular a fdp posterior do estado $p(x_t | z_{1:t-1})$, sendo dado por

$$p(x_t | z_{1:t}) = \frac{p(z_t | x_t) p(x_t | z_{1:t-1})}{p(z_t | z_{1:t-1})}, \quad (4.4)$$

onde $p(z_t | x_t)$ é chamada função de verossimilhança, $p(x_t | z_{1:t-1})$ é a fdp *a priori* do estado e a constante de normalização $p(z_t | z_{1:t-1})$ é calculada conforme apresenta a seguinte relação

$$p(z_t | z_{1:t-1}) = \int p(z_t | x_t) p(x_t | z_{1:t-1}) dx_t. \quad (4.5)$$

Essa forma é chamada problema ótimo bayesiano. Para um sistema com modelo linear e ruído Gaussiano, a solução ótima dessas equações é dada pelo Filtro de Kalman. Mas em geral, para sistemas não lineares/não-Gaussianos, não há uma forma analítica para solução e

requerem soluções numéricas aproximadas (BUTLER, 2012; COSME et al., 2018a, JOUIN et al., 2016). O FP se encaixa em uma dessas soluções.

No problema de filtragem bayesiana, frequentemente, o principal objetivo é extrair informações acerca da distribuição posterior, do tipo:

$$E[g(x) | z_{1:t}] = \int g(x) p(x | z_{1:t}) dx, \quad (4.6)$$

onde $g(x)$ é uma função arbitrária. Por exemplo, se $g(x) = x$, então o resultado da equação (4.6) é a média μ da distribuição posterior e fazendo $g(x) = (x - \mu)^2$, o resultado é a variância dessa distribuição.

O Método de Monte Carlo fornece uma aproximação numérica para cálculo das integrais na forma da equação (4.6), normalmente intratáveis analiticamente. Para isso, considere que sejam extraídas N amostras aleatórias $x^i \sim p(x | z_{1:t})$, então a aproximação de Monte Carlo da integral da equação (4.6) é calculada pela relação (SÄRKKÄ, 2013):

$$E[g(x) | z_{1:t}] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x^i). \quad (4.7)$$

Contudo, a dificuldade da implementação prática dessa aproximação está na extração de amostras da distribuição posterior, devido à complexidade de sua forma funcional. Uma alternativa quanto a isso, é utilizar a amostragem por importância.

4.1.1 Amostragem por importância

No processo de amostragem por importância, utiliza-se a denominada distribuição de importância $q(x | z_{1:t})$, que deve possibilitar fácil extração de amostras aleatórias. Para utilizá-la, a equação (4.6) é reescrita como (SÄRKKÄ, 2013)

$$\int g(x) p(x | z_{1:t}) dx = \int \left[\frac{p(x | z_{1:t})}{q(x | z_{1:t})} g(x) \right] q(x | z_{1:t}) dx, \quad (4.8)$$

em que a densidade de importância $q(x | z_{1:t})$ deve ser não-nula quando $p(x | z_{1:t})$ é não-nula, ou seja, possuir suporte maior ou igual que o suporte da distribuição alvo $p(x | z_{1:t})$. Como é possível extrair N amostras $x^i \sim q(x | z_{1:t})$, então a integral em (4.8) pode ser aproximada por meio da equação (4.9) (SÄRKKÄ, 2013)

$$E[g(x) | z_{1:t}] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(x^i | z_{1:t})}{q(x^i | z_{1:t})} g(x^i) = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}^i g(x^i), \quad (4.9)$$

onde os pesos, que funcionam como fatores de correção, são definidos como

$$\tilde{\omega}^i = \frac{1}{N} \frac{p(x^i | z_{1:t})}{q(x^i | z_{1:t})}. \quad (4.10)$$

A desvantagem do uso direto da amostragem por importância é a necessidade de avaliar a forma funcional da distribuição posterior $p(x | z_{1:t})$. Lembrando que essa distribuição é obtida pela regra de Bayes, podendo, dessa forma, ser escrita pela expressão (SÄRKKÄ, 2013)

$$p(x | z_{1:t}) = \frac{p(z_{1:t} | x) p(x)}{\int p(z_{1:t} | x) p(x) dx}. \quad (4.11)$$

Os termos de verossimilhança $p(z_{1:t} | x)$ e distribuição *priori* $p(x)$ são normalmente fáceis de serem calculados, mas o termo do denominador não o é. No entanto, para tratar esse problema, a integral no denominador da equação (4.11) também pode ser aproximada por Monte Carlo, como mostrado na equação (4.12) (SÄRKKÄ, 2013)

$$E[g(x) | z_{1:t}] = \int g(x) p(x | z_{1:t}) dx = \int g(x) \frac{p(z_{1:t} | x) p(x)}{\int p(z_{1:t} | x) p(x) dx} dx. \quad (4.12)$$

Deve-se lembrar que o termo do denominador é uma constante e, portanto, pode ser obtido pela (4.13)

$$E[g(x) | z_{1:t}] = \frac{\int \left[\frac{p(z_{1:t} | x) p(x)}{q(x | z_{1:t})} g(x) \right] q(x | z_{1:t}) dx}{\int \left[\frac{p(z_{1:t} | x) p(x)}{q(x | z_{1:t})} \right] q(x | z_{1:t}) dx}$$

$$\approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(z_{1:t} | x^i) p(x^i)}{q(x^i | z_{1:t})} g(x^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{p(z_{1:t} | x^j) p(x^j)}{q(x^j | z_{1:t})}} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\frac{p(z_{1:t} | x^i) p(x^i)}{q(x^i | z_{1:t})}}{\sum_{j=1}^N \frac{p(z_{1:t} | x^j) p(x^j)}{q(x^j | z_{1:t})}} \right] g(x^i). \quad (4.13)$$

A somatória do denominador da equação (4.13) funciona como uma constante normalizadora do peso associado a cada amostra x^i . Assim, o termo entre colchetes da equação anterior pode ser reescrito como (SÄRKKÄ, 2013)

$$\frac{\frac{p(z_{1:t} | x^i) p(x^i)}{q(x^i | z_{1:t})}}{\sum_{j=1}^N \frac{p(z_{1:t} | x^j) p(x^j)}{q(x^j | z_{1:t})}} = \frac{\tilde{\omega}^i}{\sum_j^N \tilde{\omega}^j} = \omega^i, \quad (4.14)$$

onde $\tilde{\omega}^i$ e ω^i são os pesos não-normalizados e normalizados, respectivamente, da amostra x^i . Com isso, a aproximação da distribuição posterior é dada por (SÄRKKÄ, 2013)

$$p(x | z_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^N \omega^i \delta(x - x^i), \quad (4.15)$$

em que $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac, definido como

$$\delta(x - x^i) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x^i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.16)$$

Esse problema é tratado para um dado conjunto de medidas $z_{1:t}$. Porém, em modelos em espaço de estados é interessante aproximar a distribuição posterior a cada instante de tempo, de modo que ao ter uma nova medida disponível, o procedimento ocorra de forma sequencial. Para isso, utiliza-se a Amostragem por Importância Sequencial (SIS – *Sequential Importance Sampling*) ou ainda a Amostragem por Importância com Reamostragem (SIR – *Sequential Importance Resampling*), sendo esse último também conhecido como FP.

4.1.2 SIS e SIR

Os algoritmos SIS e SIR são usados em modelos em espaço de estados com propriedades Markovianas e considerando que as medidas são condicionalmente independentes, dado o modelo como o definido pelas equações (4.1) e (4.2). Ambos usam um conjunto de amostras, denominadas partículas, com pesos associados $\{(\omega^i, x^i) : i = 1, \dots, N\}$, que representam aproximadamente a distribuição $p(x_t | z_{1:t})$, analogamente a forma apresentada na equação (4.15), porém restrita ao instante t , de tal forma que em todo instante de tempo t , o valor de $E[g(x_t | z_{1:t})]$ é aproximado pela relação (4.17)

$$E[g(x_t | z_{1:t})] \approx \sum_{i=1}^N \omega_t^i g(x_t^i). \quad (4.17)$$

A diferença entre o algoritmo SIS e SIR é que esse último adiciona um passo de reamostragem das partículas, evitando o chamado problema de degeneração, no qual a maioria das partículas tem peso nulo ou valores próximos de zero. A derivação desses algoritmos é demonstrada em detalhes em Särkkä (2013). Aqui o algoritmo SIR (ou FP) é apresentado diretamente a seguir no Algoritmo 1:

Algoritmo 1 - SIR (ou também conhecido como FP)
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Amostrar N partículas da distribuição <i>priori</i> x_0^i $x_0^i \sim p(x_0), \quad i = 1, \dots, N.$ <p>e fazer $\omega_0^i = 1/N$ para todo $i = 1, \dots, N$.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Para cada $t = 1, \dots, T$, faça: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Amostrar x_t^i da distribuição de importância $x_t^i \sim q(x_t x_{t-1}^i, z_{1:t}), \quad i = 1, \dots, N.$ ▪ Calcular os pesos de acordo com $\tilde{\omega}_t^i \propto \omega_{t-1}^i \frac{p(z_t x_t^i) p(x_t^i x_{t-1}^i)}{q(x_t^i x_{t-1}^i, z_{1:t})}$ <p>e normalizar</p> $\omega_t^i = \frac{\tilde{\omega}_t^i}{\sum_{j=1}^N \tilde{\omega}_t^j}$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ Se o número de partículas efetiva é menor que um valor estipulado, realize a reamostragem.

Uma simplificação desse algoritmo proposta em Gordon et. al (1993) é o filtro *Bootstrap* (Algoritmo 2), no qual a distribuição de importância utilizada é o próprio modelo dinâmico, ou seja, $q(x_t | x_{t-1}^i, z_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}^i)$. Isso facilita a implementação, porém requer um grande número de partículas para uma boa estimativa. Fazendo essa escolha para a distribuição de importância, é necessário amostrar da distribuição $p(x_t | x_{t-1})$. A geração dessa amostra é feita inicialmente gerando o ruído do processo $v_{t-1}^i \sim p_v(v_{t-1})$ e calculando a amostra $x_t^i = f_t(x_{t-1}^i, v_{t-1}^i)$, em que $p_v(\cdot)$ é a distribuição de v_{t-1} . Para essa escolha particular de densidade de importância, a expressão para cálculo do peso se torna (ARULAMPALAM et al., 2002)

$$\tilde{\omega}_t^i \sim \omega_{t-1}^i p(z_t | x_t^i). \quad (4.18)$$

Além disso, nesse filtro, a reamostragem é feita a cada iteração, isto é, $\omega_{t-1}^i = 1/N$ para todo i , portanto (ARULAMPALAM et al., 2002)

$$\tilde{\omega}_t^i \sim p(z_t | x_t^i). \quad (4.19)$$

É interessante destacar que os pesos podem ter valores muito pequenos, sendo indicado trabalhar com o logaritmo dos pesos e, ainda, deslocados. Isso evita problemas de precisão numérica e é feito aplicando a transformação

$$W_t^i = \log \tilde{\omega}_t^i - \tilde{\omega}_{max} , \quad (4.20)$$

em que $\tilde{\omega}_{max}$ é o maior elemento em $\{\log \tilde{\omega}_t^i\}_{i=1}^N$. Então, os pesos são normalizados pela expressão

$$\omega_t^i = \frac{\exp(W_t^i)}{\sum_{j=1}^N \exp(W_t^j)} = \frac{\exp(-\tilde{\omega}_{max}) \exp(\log \tilde{\omega}_t^i)}{\exp(-\tilde{\omega}_{max}) \sum_{j=1}^N \exp(\log \tilde{\omega}_t^j)} = \frac{\tilde{\omega}_t^i}{\sum_{j=1}^N \tilde{\omega}_t^j} . \quad (4.21)$$

Então, a relação se mantém, porém evita problemas numéricos de precisão.

Algoritmo 2 – Filtro *Bootstrap*

- Uma amostra x_t^i é gerada pela propagação da partícula x_{t-1}^i pelo modelo dinâmico:

$$x_t^i \sim p(x_t | x_{t-1}^i), \quad i = 1, \dots, N$$

- Calcule os pesos

$$\omega_t^i \sim p(y_t | x_t^i), \quad i = 1, \dots, N$$

e normalize, tal que $\sum \omega_t^i = 1$.

- Faça a reamostragem.

O método de reamostragem utilizado nesse trabalho foi o multinomial, que é realizado amostrando aleatoriamente u_i a partir de uma distribuição uniforme sobre (0,1] e identificando o valor de M que satisfaça a seguinte relação

$$\sum_{j=0}^{M-1} Q_j < u_i \leq \sum_{j=0}^M Q_j , \quad (4.22)$$

onde Q é a soma acumulada dos pesos normalizados. A partícula selecionada é localizada na posição M . Esse procedimento é realizado para $i = 1, \dots, N$, ou seja, um novo conjunto de partículas é selecionado a partir do conjunto das partículas filtradas (GORDON et al., 1993).

4.2 Filtro de Partículas – Predição a Longo Prazo

Para que o FP seja aplicado com finalidade de prognóstico é necessário fazer uma predição a longo prazo. Predições a longo prazo são geradas utilizando o estado estimado atual

como condição inicial. Conhecido o valor limite para o estado de degradação do sistema e considerando as previsões geradas, a RUL do sistema pode ser calculada (BUTLER, 2012).

A geração de previsões futuras é feita considerando o conjunto de partículas e pesos atuais $\{x_t^i, \omega_t^i\}_{i=1}^N$ que definem a fdp posterior. Para geração de previsões, considere que a fdp de estado condicional predita $\hat{p}(x_{t+k}^i | \hat{x}_{t+k-1}^i)$, que descreve a distribuição do estado em um instante futuro $t+k$ ($k = 1, \dots, p$) quando a partícula \hat{x}_{t+k-1}^i é utilizada como condição inicial. Supondo que os pesos atuais $\{\omega_t^i\}_{i=1}^N$ fornecem uma boa aproximação da fdp do estado no instante t , então, usando a lei da probabilidade total, é possível estimar a fdp do estado no instante $t+p$ a partir dos pesos no instante $t+k-1$, através da seguinte equação (ORCHARD & VACHTSEVANOS, 2009)

$$\hat{p}(x_{t+k}^i | \hat{x}_{1:t+k-1}^i) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{t+k-1}^i p(x_{t+k}^i | \hat{x}_{t+k-1}^i); \quad \hat{x}_t^i = \tilde{x}_t^i; \quad k = 1, \dots, p. \quad (4.23)$$

No cálculo da equação (4.23), é necessário avaliar os pesos das partículas a cada instante, ou seja, a cada etapa de previsão. No entanto, em cada nova execução da etapa de previsão, não há novas medidas disponíveis e, logo, não é possível atualizar os pesos a partir dos pesos do instante imediatamente anterior. Uma abordagem simples, que tem demonstrado resultados satisfatórios (BUTLER, 2012; COSME et al., 2018a; YANG, et al., 2017; CHEN et al., 2012), usada para superar essa dificuldade é considerar que os pesos das partículas permanecem constante nos instantes futuros. Assim, a trajetória das partículas $x_{t:t+p}^i$ são simplesmente propagadas no tempo, através do modelo de transição do estado (equação (4.1)), mantendo constante os pesos. A propagação no tempo de cada partícula, é feita tomando sucessivamente o valor esperado como condição inicial aplicada no modelo de transição de estado, como mostra a equação (4.24) (ORCHARD & VACHTSEVANOS, 2009)

$$\hat{x}_{t+p}^i = E[f_{t+p}(\tilde{x}_{t+p-1}^i, \omega_t)]; \quad \hat{x}_t^i = \tilde{x}_t^i. \quad (4.24)$$

Para cálculo da RUL, é necessário o conhecimento do valor limite do estado que indica um limite para a falha. Conhecido esse valor, cada partícula é propagada até que atinja esse limiar e a RUL para essa partícula é calculada. O valor esperado para a RUL do sistema é (COSME et al., 2018a; CHEN et al., 2012):

$$RUL = \sum_{i=1}^{N_s} l^i \omega_t^i, \quad (4.25)$$

onde l^i é a RUL da i -ésima partícula e ω_t^i é o peso da i -ésima partícula no tempo t .

4.3 Filtro de Partículas e Estimação de Parâmetros

Modelos que possuem um vetor de parâmetros θ conhecido podem estimar os estados x , a partir das medidas z , através, por exemplo, do FP implementado pelos algoritmos apresentados anteriormente, indicados para modelos não lineares e/ou com ruídos não-gaussianos (KANTAS et al., 2009). Contudo, há modelos que possuem o vetor de parâmetros θ desconhecido e necessitam serem estimados, assim como os estados. Esse é o caso do modelo de degradação utilizado nesse trabalho, no qual os parâmetros do material são tratados com incertezas associadas.

Na abordagem bayesiana, considera-se que os parâmetros são considerados aleatórios e possuem uma distribuição *priori*. Dessa forma, esse problema de estimação pode ser escrito como (SÄRKKÄ, 2013)

$$\begin{aligned} \theta &\sim p(\theta), \\ x_0 &\sim p(x_0 | \theta), \\ x_t &= f_t(x_{t-1}, \theta, v_{t-1}) \leftrightarrow p(x_t | x_{t-1}, \theta), \\ z_t &= h_t(x_t, \theta, n_t) \leftrightarrow p(z_t | x_t, \theta). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como dito anteriormente, o tratamento desse problema nesse trabalho foi feito em duas abordagens distintas, as quais são detalhadas a seguir.

4.3.1 Abordagem por Dinâmica Artificial (ou Espaço Aumentado)

Uma forma simples e pragmática para tratar com parâmetros incertos é pela expansão do estado do modelo dinâmico, no qual os parâmetros são redefinidos como estados do sistema, aumentando sua dimensão. Isso é feito criando uma dinâmica artificial ao parâmetro conforme a seguinte equação (KITAGAWA, 1998; KANTAS et al., 2009; DAIGLE & GOEBEL, 2009; SÄRKKÄ, 2013)

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \varepsilon_{t-1}, \quad (4.27)$$

onde ε_{t-1} é normalmente um ruído branco e no qual a variância deve ter valores com amplitude que garantam que a convergência ocorra em um tempo razoável (DAIGLE & GOEBEL, 2009).

Dessa forma, o modelo pode ser reescrito pela equação (4.28) (suprimindo alguns termos por simplificação de notação)

$$\begin{aligned}\theta_t &= \theta_{t-1} + \varepsilon_{t-1}, \\ x_t &= f_t(x_{t-1}, \theta_{t-1}, v_{t-1}), \\ z_t &= h_t(x_t, \theta_t, n_t).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Definindo o vetor de estado aumentado $\tilde{x}_t = [x_t \ \theta_t]'$, então pode-se tratar com a seguinte configuração:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_t &= \tilde{f}_t(\tilde{x}_{t-1}, \tilde{v}_{t-1}), \\ z_t &= h_t(\tilde{x}_t, n_t),\end{aligned}\tag{4.29}$$

em que $\tilde{v}_{t-1} = [v_{t-1} \ \varepsilon_{t-1}]'$.

Dado o modelo da equação (4.29), conhecido como modelo em espaço aumentado, o FP pode ser implementado normalmente e os estados e parâmetros estimados. A ideia básica por trás dessa abordagem (a dinâmica artificial) foi utilizada com sucesso em alguns trabalhos, a citar Kitagawa (1998), Liu & West (2001), Vavoulis et al. (2012) e Daigle & Goebel (2009), esse último, inclusive, para fins de prognóstico. Para tal finalidade, essa forma de realizar a estimativa continua fornecendo uma estimação *on-line*, sendo característica essencial no sucesso do prognóstico. Para estimação da RUL, utiliza-se a estratégia de predição a longo prazo como descrita na seção 4.2.

O problema dessa abordagem é que não mais está sendo tratado o problema original, mas sim um, no qual os parâmetros são variantes no tempo, podendo gerar complicações em alguns tipos de sistemas (SÄRKKÄ, 2013). Além da dificuldade de estimar parâmetros com essa abordagem, visto que os parâmetros são gerados apenas no início da simulação, o que, após sucessivos processos de reamostragem, pode fazer com apenas restem poucos ou um único valor para os parâmetros (KANTAS et al., 2009).

4.3.2 Abordagem por *Particle Metropolis-Hastings* (PMH)

Uma forma alternativa de estimar os parâmetros é utilizando o PMH. Dado o problema da equação (4.26), a distribuição posterior total via Regra de Bayes é dada por (SÄRKKÄ, 2013):

$$p(x_{0:T}, \theta | z_{1:T}) = \frac{p(z_{1:T} | x_{0:T}, \theta) p(x_{0:T} | \theta) p(\theta)}{p(z_{1:T})}. \quad (4.30)$$

Se há interesse somente na estimativa do vetor de parâmetros, basta obter a distribuição marginal posterior dos parâmetros pela integração dos estados fora

$$p(\theta | z_{1:T}) = \int p(x_{0:T}, \theta | z_{1:T}) dx_{0:T}. \quad (4.31)$$

Contudo, calcular essa integral de alta dimensão torna-se cada vez mais difícil quanto maior a quantidade de medidas e com alto esforço computacional. Lembrando que essa é a vantagem de tratar esse problema de forma sequencial como no FP.

O PMH estima os parâmetros a partir da distribuição marginal $p(\theta | z_{1:T})$, porém, sem necessidade de conhecer a distribuição conjunta $p(x_{0:T}, \theta | z_{1:T})$. Para isso, baseia-se na seguinte aproximação, obtida pela regra de Bayes, da distribuição marginal posterior (DAHLIN & SCHÖN, 2017)

$$p(\theta | z_{1:T}) \propto p(z_{1:T} | \theta) p(\theta), \quad (4.32)$$

onde $p(\theta)$ e $p(z_{1:T} | \theta)$ são a distribuição *priori* dos parâmetros e distribuição de dados, respectivamente. A dificuldade de cálculo da equação (4.32) é a distribuição de dados, intratáveis para a grande maioria de modelos em espaço de estado. A distribuição *priori* é normalmente conhecida, enquanto a constante de normalização (suprimida da equação (4.32)) é frequentemente evitada em métodos bayesianos computacionais (SÄRKKÄ, 2013).

A estimativa dos parâmetros baseada na expressão contida em (4.32) é feita inicialmente com emprego do FP, o qual possibilita a estimativa pontual de $p(z_{1:T} | \theta)$, em sequência do algoritmo MCMC, que usa a estimativa fornecida pelo FP, para gerar amostras de $p(\theta | z_{1:T})$. Da união desses dois algoritmos, surge o PMH, que tem como resultado a geração de K amostras que aproximam a distribuição $p(\theta | z_{1:T})$, a partir da qual, estima-se os parâmetros (DAHLIN & SCHÖN, 2017).

A construção da cadeia de Markov com PMH é realizada em dois passos. Primeiro, um parâmetro candidato θ' é gerado por uma distribuição proposta $q(\theta' | \theta^{(k-1)})$, condicionada ao estado anterior da cadeia denotado por $\theta^{(k-1)}$ e que deve possuir suporte maior ou igual que o da distribuição alvo. Segundo, determinar se o estado atual da cadeia de Markov é mantido pelo estado anterior $\theta^{(k-1)}$ ou alterado para o parâmetro candidato θ' . O parâmetro candidato é

aceito como estado atual, ou seja $\{\theta^{(k)} \leftarrow \theta'\}$, com a denominada probabilidade de aceitação calculada pela equação (4.33) (DAHLIN & SCHÖN, 2017)

$$\alpha(\theta', \theta^{(k-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{p(\theta' | z_{1:T})}{p(\theta^{(k-1)} | z_{1:T})} \frac{q(\theta' | \theta^{(k-1)})}{q(\theta^{(k-1)} | \theta')} \right\}. \quad (4.33)$$

Assim, a probabilidade de aceitação somente pode ser calculada se $p(\theta | z_{1:T})$ é conhecida, e conseqüentemente $p(z_{1:T} | \theta)$. A distribuição de dados $p(z_{1:T} | \theta)$ pode ser calculada recursivamente em modelos em espaço de estados com a decomposição (DAHLIN & SCHÖN, 2017)

$$p(z_{1:T} | \theta) = p(z_1 | \theta) \prod_{k=2}^T p(z_k | z_{1:k-1}, \theta), \quad (4.34)$$

onde, esta pode ser aproximada com auxílio do FP, utilizando, para isso, os pesos das amostras. Baseado nisso, o estimador para a distribuição de dados é

$$p(z_{1:T} | \theta) \approx \hat{p}(z_{1:T} | \theta) = \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_t^i \right], \quad (4.35)$$

em que ω^{*i} é o peso não normalizado da i -ésima partícula. Mais detalhes dessa aproximação são demonstrados em Särkkä (2013) e Dahlin & Schön (2017).

Aplicando o logaritmo na equação (4.35) e a transformação nos pesos descrita na equação (4.20), visando estabilidade numérica, obtém-se a seguinte relação

$$\log \hat{p}(z_{1:T} | \theta) = \log \hat{p}(z_{1:T-1} | \theta) + \left\{ \tilde{\omega}_{max} + \log \left[\sum_{i=1}^N \exp(W_t^i) \right] - \log N \right\}, \quad (4.36)$$

que possibilita calcular a cada nova iteração do FP com uso dos pesos no instante atual da simulação e a estimação anterior para $\hat{p}(z_{1:T-1} | \theta)$.

A aproximação da distribuição de dados dada pela equação (5.35) e o conhecimento da distribuição *priori*, permitem a estimação da distribuição marginal do parâmetro

$$\hat{p}(\theta | z_{1:T}) \propto \hat{p}(z_{1:T} | \theta) p(\theta), \quad (4.37)$$

e, por conseguinte, a probabilidade de aceitação

$$\begin{aligned}
\alpha(\theta', \theta^{(k-1)}) &= \min \left\{ 1, \frac{\hat{p}(\theta' | z_{1:T})}{\hat{p}(\theta^{(k-1)} | z_{1:T})} \frac{q(\theta' | \theta^{(k-1)})}{q(\theta^{(k-1)} | \theta')} \right\} \\
&= \min \left\{ 1, \frac{p(\theta')}{p(\theta^{(k-1)})} \frac{\hat{p}(\theta' | z_{1:T})}{\hat{p}(\theta^{(k-1)} | z_{1:T})} \frac{q(\theta' | \theta^{(k-1)})}{q(\theta^{(k-1)} | \theta')} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Caso a distribuição proposta seja simétrica, então $q(\theta' | \theta^{(k-1)}) = q(\theta^{(k-1)} | \theta')$ e a probabilidade de aceitação pode ser simplificada para a equação (4.39)

$$\alpha(\theta', \theta^{(k-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{p(\theta')}{p(\theta^{(k-1)})} \frac{\hat{p}(\theta' | z_{1:T})}{\hat{p}(\theta^{(k-1)} | z_{1:T})} \right\}. \tag{4.39}$$

Um exemplo de distribuição simétrica é a distribuição gaussiana. Nesse trabalho, essa foi a distribuição utilizada como distribuição proposta, resultando no algoritmo denominado *random walk* Metropolis-Hastings (SÄRKKÄ, 2013).

O algoritmo PMH é descrito resumidamente, a seguir, no Algoritmo 3.

Algoritmo 3 – *Particle Metropolis-Hastings* (PMH)

- **Dados de entrada:** conjunto de medição $z_{1:T}$; N partículas amostradas da distribuição inicial $x_0^i \sim p(x_0)$, $i = 1, \dots, N$; parâmetro inicial $\theta^{(0)}$; número de iterações do algoritmo Metropolis-Hastings (N_{iter}); matriz de covariância Σ para a distribuição gaussiana (distribuição proposta).
- Para cada $k = 1, \dots, N_{iter}$, faça:

- Amostrar um parâmetro candidato

$$\theta' \sim N(\theta' | \theta^{(k-1)}, \Sigma)$$

- Para $t = 1, \dots, T$, execute o FP *Bootstrap* (Algoritmo 2) adicionando a estimativa de $\hat{p}(\theta' | z_{1:T})$:

- Uma amostra x_t^i é gerada pela propagação da partícula x_{t-1}^i pelo modelo dinâmico:

$$x_t^i \sim p(x_t | x_{t-1}^i), \quad i = 1, \dots, N$$

- Calcule os pesos

$$\tilde{\omega}_t^i \sim p(z_t | x_t^i), \quad i = 1, \dots, N$$

- Calcule o logaritmo de $\hat{p}(z_{1:T} | \theta')$

$$\log \hat{p}(z_{1:T} | \theta') = \log \hat{p}(z_{1:T-1} | \theta') + \left\{ \tilde{\omega}_{max} + \log \left[\sum_{i=1}^N \exp(W_t^i) \right] - \log N \right\}$$

- Normalize os pesos e faça a reamostragem.

- A estimativa do estado na iteração k considerando todas as medidas até o instante T

$$\hat{x}_T' = \sum_{i=1}^N \omega_T^i x_T^i$$

em que ω_T^i é o peso normalizado da i -ésima partícula.

- Calcule a probabilidade de aceitação

$$\alpha(\theta', \theta^{(k-1)}) = \min \left\{ 1, \exp \left(\log \left[\frac{p(\theta')}{p(\theta^{(k-1)})} \right] + \log \hat{p}(\theta' | z_{1:T}) - \log \hat{p}(\theta^{(k-1)} | z_{1:T}) \right) \right\}$$

- Gere uma variável u uniformemente distribuída entre $[0, 1]$

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> ○ Se $u < \alpha(\theta', \theta^{(k-1)})$ ○ Caso contrário | $\theta^{(k)} = \theta'$ $\hat{x}_T^{(k)} = \hat{x}_T'$ $\log \hat{p}(z_{1:T} \theta^{(k)}) = \log \hat{p}(z_{1:T} \theta')$ |
| | $\theta^{(k)} = \theta^{(k-1)}$ $\hat{x}_T^{(k)} = \hat{x}_T^{(k-1)}$ $\log \hat{p}(z_{1:T} \theta^{(k)}) = \log \hat{p}(z_{1:T} \theta^{(k-1)})$ |
| <ul style="list-style-type: none"> • O conjunto $\{\theta\}_{k=1}^{N_{iter}}$ e $\{\hat{x}_T\}_{k=1}^{N_{iter}}$ são aproximações das distribuições $p(\theta z_{1:T})$ e $p(x_T z_{1:T})$, respectivamente. | |

Esse algoritmo deve ser utilizado com cuidado na finalidade de prognóstico, visto que é necessário utilizar todas as medidas disponíveis até o momento da estimativa. Quanto maior o número de medidas, maior será o tempo de processamento, sendo muitas vezes indicado apenas em aplicações *off-line* (KANTAS et al., 2009). Nesse trabalho, para estimar a RUL, utilizou-se o conjunto da estimativa atual do estado $\{\hat{x}_T\}_{k=1}^{N_{iter}}$ e seus respectivos parâmetros $\{\theta\}_{k=1}^{N_{iter}}$. Através da propagação pelo modelo de degradação até o valor limite do estado que indica a falha, obteve-se a RUL para cada partícula, ou seja, uma aproximação da RUL descrita pelo conjunto $\{RUL\}_{k=1}^{N_{iter}}$, do qual extrai-se a estimativa da RUL.

4.4 Métricas de Desempenho

A avaliação de desempenho nesse trabalho é feita do ponto de vista da estimativa do estado e da estimativa da RUL do sistema. Para fins de estimativa do estado são utilizados os índices de erro absoluto (EA) e a raiz do quadrado médio do erro (RMSE). O EA é definido como (COSME, 2018b)

$$e_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |x_t - \hat{x}_t|, \quad (4.40)$$

em que e_j é o erro absoluto no j -ésimo experimento, T é o número de instantes de tempo (número de medições), x_t é o estado verdadeiro e \hat{x}_t é o estado estimado pelo filtro no instante t . O RMSE é calculado por

$$RMSE_j = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{x}_t)^2}, \quad (4.41)$$

em que $RMSE_j$ é a raiz do quadrado médio do erro no j -ésimo experimento.

A estimativa de RUL é avaliada pelo índice de acurácia (AC), que possibilita avaliar o quão próximo a estimativa do tempo até a falha está do tempo real. Em um tempo de t_p , no qual o algoritmo de prognóstico é executado, a AC é dada por (VACTHSEVANOS et al., 2006; COSME, 2018b)

$$AC_j(t_p) = \exp \left\{ - \frac{|RUL_j(t_p) - \widehat{RUL}_j(t_p)|}{RUL_j(t_p)} \right\}, \quad (4.42)$$

onde $AC_j(t_p)$ é a acurácia no instante t_p no j -ésimo experimento, $RUL_j(t_p)$ é a verdadeira RUL no instante t_p e $\widehat{RUL}_j(t_p)$ é a estimativa da RUL no instante t_p para o j -ésimo experimento. Dada essa expressão, a AC é mais próxima de 1 quando a diferença entre o valor real e o estimado da RUL for menor. Logo, para AC mais próximo de 1, melhor o desempenho do algoritmo de prognóstico. Em contrapartida, com AC mais próximo de 0, o desempenho do algoritmo não é boa.

Além da acurácia, outros três índices são usados para avaliar o prognóstico de falha, a saber: número de acerto da estimativa da ocorrência de falha (AOF), número de erros de estimativa com falso alarme (FAR) e número de erros de estimativa em que a falha não foi detectada. Esses três índices são contabilizados verificando se a estimativa de RUL está dentro do intervalo de confiança ou não. O AOF é calculado pela seguinte expressão

$$AOF = \frac{\#RUL_c}{\#cenários}, \quad (4.43)$$

em que $\#RUL_c$ é o número de estimativas de RUL dentro do intervalo de confiança e $\#cenários$ é, nesse trabalho, o número de experimentos. Analogamente,

$$FAR = \frac{\#RUL_{far}}{\#cenários}, \quad (4.44)$$

$$PER = \frac{\#RUL_{per}}{\#cenários}, \quad (4.45)$$

onde RUL_{far} e RUL_{per} é o número de estimativas de RUL acima do intervalo de confiança e abaixo do intervalo de confiança, respectivamente. Para estimativas acima do intervalo de confiança entende-se que a falha não foi detectada, pois uma falha repentina pode acontecer antes da RUL estimada, enquanto para estimativas abaixo, são tratados como falsos alarmes (COSME, 2018b).

Nesse trabalho são realizados 10 experimentos independentes, dos quais se calculam o EA médio e RMSE médio, assim como os respectivos desvios padrão, para avaliação da estimativa do estado. Similarmente calcula-se a AC médio dos experimentos e o desvio padrão para avaliação da estimativa da RUL. O AC é calculado nos instantes de tempo correspondentes a 25%, 50% e 75% de cada experimento.

5. METODOLOGIA

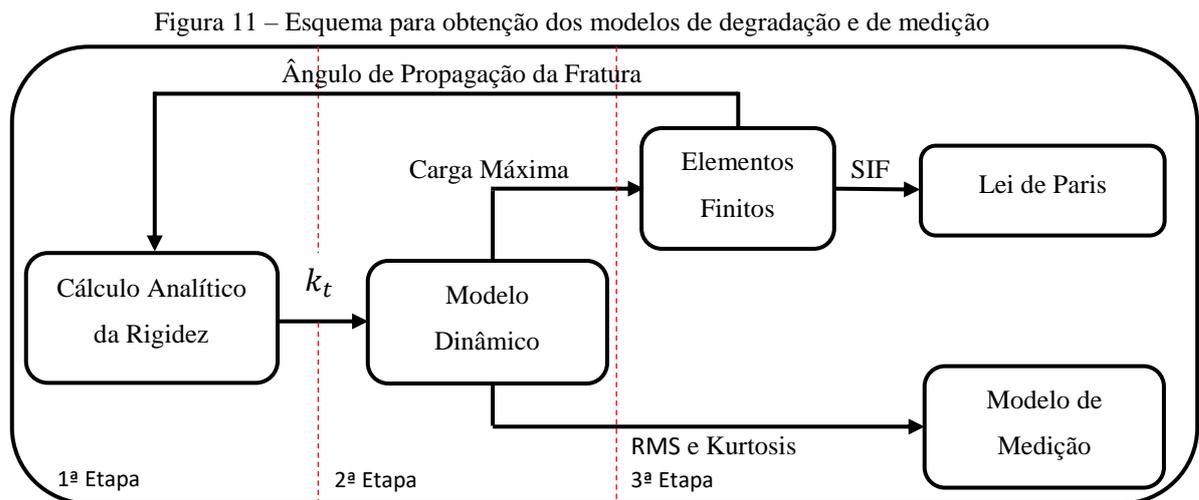
As abordagens de prognóstico propostas nesse estudo baseiam-se no PF, necessitando de um modelo de degradação e de um modelo de medição. Nessa seção é descrito o procedimento de obtenção de cada um desses modelos, apresentando também os valores dos parâmetros do sistema dinâmico implementado.

Inicialmente é mostrado como obter o modelo de degradação, baseado na lei de Paris, e, em seguida, o modelo de medição, o qual visa relacionar os índices de RMS e Kurtosis com comprimento da fratura.

Posteriormente, as abordagens de prognóstico são descritas detalhadamente através de fluxogramas, tanto na etapa de estimativa de comprimento de fratura e parâmetros do material, quanto na etapa de estimativa da RUL da caixa de engrenagens.

5.1 Modelo de Degradação

De início, o modelo de degradação por fratura de um par de engrenagens deve ser implementado. Especificamente para esse modelo, o que interessa é a obtenção do SIF. Isso é feito pelo procedimento representado esquematicamente na figura 11, sendo dividido em três etapas.



Fonte: Autor

5.1.1 Cálculo Analítico da Rigidez

A primeira etapa é o cálculo da rigidez de engrenamento. Para o caso das engrenagens saudáveis, são utilizadas as equações (3.27) e (3.34) à (3.36), enquanto para a engrenagem fraturada, o cálculo da rigidez é feito através das equações (3.39) à (3.50), dependendo do comprimento da fratura e em que caso recai. É importante destacar que o cálculo da rigidez para a engrenagem fraturada depende da projeção da fratura na direção horizontal. Nesse estudo, a fratura não se propaga de forma retilínea, ou seja, é necessário saber a direção de sua propagação para então calcular a rigidez. Essa informação é obtida por elementos finitos.

A rigidez de engrenamento é função do ângulo de rotação da engrenagem (θ_1 para o pinhão) e é descontínua. A descontinuidade se deve aos saltos que surgem devido a alternância entre um par de dentes e dois pares de dentes em contato durante o engrenamento. Nesse estudo, a rigidez k_t é implementada através de aproximações polinomiais de θ_1 nas regiões contínuas, diferentemente do que fazem Li et al. (2005) e Wu et al. (2008), os quais aproximam a função da rigidez por uma série de Fourier truncada, gerando erros consideráveis, como mostrado em Tian et al. (2012). A ideia da aproximação é similar a Tian et al. (2012) que utiliza pontos discretos e interpola dado uma posição θ_1 angular do pinhão. Com isso, é possível incorporar a rigidez no modelo dinâmico do par de engrenagens.

5.1.2 Obtenção do Sinal de Vibração e Carga Dinâmica pelo Modelo Dinâmico

A segunda etapa é a obtenção do sinal de vibração das engrenagens e a determinação da carga dinâmica aplicada ao dente da engrenagem. Para isso, obtém-se a solução do sistema de equações diferenciais dada pelo conjunto de equações (3.4) à (3.21), que representam a dinâmica do sistema composto por um par de engrenagens. A solução desse sistema de equações depende dos valores dos parâmetros físicos e da rigidez de engrenamento calculada na primeira etapa. A solução, para um dado comprimento de fratura, fornece o sinal de vibração da engrenagem, além de possibilitar o cálculo da carga atuando no dente fraturado da engrenagem pela equação (3.22).

Após a incorporação da rigidez nas equações dinâmicas do par de engrenagens, esse sistema é resolvido utilizando-se a função do Matlab **ode15s**, apropriada para sistemas com descontinuidades, visto que a rigidez de engrenamento possui essa característica. Na simulação foi considerado que o sistema parte do repouso (com condições iniciais nulas), um torque de entrada M_1 e o torque de carga na forma de $M = 0.0075\dot{\theta}_b^2$ (HOWARD et al., 2001). Após a

estabilização do sistema, foi adicionado um torque M_2 , simulando a aplicação de uma carga no sistema.

Assim como a rigidez, a carga atuante no engrenamento é dependente do número de pares de dente em contato. De fato, a carga atuante em um único par de dentes é diretamente proporcional a rigidez do par de dentes na posição e inversamente proporcional a soma da rigidez de todos os pares de dentes em contato na mesma posição (SÁNCHEZ et al., 2017)

$$R_i = \frac{F_i}{F} = \frac{k_{ti}}{\sum_{i=1}^2 k_{ti}}, \quad (5.1)$$

onde R_i é a razão de transmissão de carga do par i , F é a força de transmissão total, F_i é a força atuando somente no par i , k_{ti} é a rigidez do par i . A equação (5.1) é válida para pares com razão de contato entre 1 e 2. Assim, para obter a carga atuando no dente do pinhão é necessário calcular a razão de transmissão R e multiplicá-la pela carga para cada posição angular do engrenamento.

A carga máxima atuando sobre o dente fraturado é utilizada para determinar o SIF e para qual direção a fratura será propagada. Já o sinal de vibração é usado para extrair as características de RMS e Kurtosis, por meio das equações (3.52) e (3.53), respectivamente. Ambos são úteis na elaboração do modelo de medição.

5.1.3 Obtenção do SIF e Direção da Propagação da Fratura por Elementos Finitos

A terceira etapa refere-se à obtenção do SIF e da direção para a qual a fratura é propagada. Esse procedimento é realizado através de elementos finitos, sendo implementado neste estudo através do *software* FRANC2D. Esse *software*, desenvolvido com finalidade científica (CORNELL FRACTURE GROUP SOFTWARE, 2018), fornece o SIF após a aplicação da carga atuando sobre o dente fraturado da engrenagem obtida na segunda etapa.

O FRANC2D deve ser alimentado com a geometria da engrenagem e a malha de elementos finitos, definida pelo tipo e números de elementos, assim como número de nós e suas posições. O *software* CASCA, com mesmos desenvolvedores e compatível com o FRANC2D, tem como finalidade a construção das geometrias e malhas. Porém, suas ferramentas são limitadas, o que impossibilita o trabalho com geometrias mais complexas como a de uma engrenagem. Portanto, foi empregado um *software* CAD/CAE mais específico para isso, o qual possibilitou o desenho da geometria da engrenagem e geração automática da malha, tomando o cuidado para deixá-la mais refinada na localização em que está a fratura. Os próprios

desenvolvedores, em seu *site*, disponibilizam conversores de arquivo desses *softwares* para arquivos do FRANC2D.

Com isso, a fratura é iniciada na raiz do dente com comprimento de 0.1 mm e direção definida por $\beta = 45^\circ$. O SIF é calculado após a aplicação do valor máximo da carga dinâmica obtido na segunda etapa. A carga é posicionada no modelo em elementos finitos correspondendo ao HPSCT, conforme fazem Li & Lee (2005) e Lewicki & Ballarini (1997). Nesse ponto, de acordo com Kuria & Kihui (2008), ocorre a máxima tensão de flexão na raiz do dente, onde se encontra a fratura. Portanto, essa é a representação do caso crítico. Posterior ao cálculo do SIF, propaga-se a fratura em incrementos de 0.1 mm . A vantagem de se trabalhar com o FRANC2D é a facilidade de propagar a fratura, pois o *software* possibilita o rearranjo automático da malha a cada incremento, o que aumenta a precisão do cálculo do SIF e facilita esse processo, além de fornecer a direção para a qual a fratura evolui. Com isso, a direção é realimentada e utilizada para calcular a rigidez de engrenamento.

Dessa forma, o processo de propagação de fratura é realizado de forma iterativa, pois a carga que atua sobre o dente da engrenagem é dependente da rigidez de engrenamento, que por sua vez é influenciada pela direção da propagação da fratura. Esse processo é repetido até que o comprimento da fratura atinja um valor crítico estabelecido inicialmente. Normalmente, ocorre em um comprimento da fratura entre 60% à 80% do comprimento da largura total do dente, quando o dente pode quebrar-se repentinamente (WU et al., 2008; TIAN et al., 2012).

Como resultado da execução dessas três etapas, obtém-se o SIF para cada comprimento da fratura, sendo esse um fator fundamental no modelo de degradação descrito pela lei de Paris. O SIF, obtido para incrementos de comprimento de fratura de 0.1 mm , é aproximado por um polinômio, o que facilita sua utilização na simulação. No modelo de degradação existem, além do SIF, dois parâmetros do material e o erro do modelo. Esses três parâmetros são considerados incertos com distribuições conhecidas da literatura. Ademais, são obtidos os índices de RMS e Kurtosis para cada comprimento de fratura até o limite crítico, sendo utilizados na elaboração do modelo de medição.

Ao trabalhar com o FP, é interessante reescrever o modelo de degradação em uma forma discreta. Para isso, utilizou-se o método de Euler de 1ª ordem.

5.2 Modelo de Medição

O modelo de medição foi obtido com base nos sinais de vibração simulados, dos quais foram extraídos os índices RMS e Kurtosis. Para cada comprimento de fratura, o sinal de

vibração foi simulado e, posteriormente, esses dois índices extraídos. Nesse estudo, o modelo de medição toma como indicadores, não diretamente os índices, mas sim suas variações percentuais calculadas em relação ao sistema saudável (WU et al., 2008; TIAN et al., 2012)

$$I(\%) = \frac{I_q - I_0}{I_0} \times 100\%, \quad (5.2)$$

em que I é a variação percentual do índice, I_q denota um dos índices para o comprimento de fratura q e I_0 para o sistema saudável.

Com isso, os índices de variação percentual de RMS e Kurtosis, podem ser aproximados por uma curva que relaciona ambos com comprimento de fratura, aproximando uma função que se ajuste a esse formato. As relações obtidas por essas funções desconsideram os fatores de incertezas, como o erro aleatório de medição. Como essa é uma das fontes de incerteza consideradas nesse trabalho, é fundamental entender a sua influência nesses índices e como isso afeta o modelo de medição. Nesse trabalho, o erro de medição é modelado como ruído branco (seção 3.7). Como a obtenção de uma relação analítica entre a variação percentual dos índices e o erro de medição é não trivial, nesse trabalho essa influência foi estudada por simulação.

Na simulação são gerados ruídos brancos e esses ruídos são somados aos sinais de vibração para cada comprimento de fratura. A partir desse sinal de vibração ruidoso calculam-se as variações percentuais dos índices de RMS e Kurtosis. Os ruídos brancos foram gerados aleatoriamente com amplitudes variadas, baseados no conceito da razão Sinal-Ruído (SNR), definido como o quadrado da razão entre as amplitudes do sinal e ruído (TIAN et al., 2012). Os ruídos foram amostrados com amplitudes para SNR de 1000, 100, 50 e 10 (quanto menor valor de SNR, maior a amplitude do ruído).

Além disso, dado o valor de SNR, a simulação foi realizada repetidas vezes para todos os comprimentos de fraturas, o que possibilita a visualização da distribuição, aproximada por um histograma, da variação de cada um dos índices. Esse procedimento é mais facilmente visualizado no Algoritmo 4. Dessa maneira, o modelo de medição é elaborado considerando as incertezas relacionadas ao erro de medição

Algoritmo 4 – Geração do Histograma da Variação dos Índices

- **Entrada:** valor de SNR, sinais de vibração para o sistema saudável e para cada comprimento de fratura, obtidos pela simulação do modelo dinâmico.
- Para o sistema saudável e cada comprimento de fratura:
 - Gere aleatoriamente o erro de medição e como ruído branco com amplitude igual ao desvio padrão σ

$e \sim N(0, \sigma^2)$

em que σ é calculado por*

$$\sigma = \frac{A_{\text{signal}}}{\sqrt{SNR}}$$

- Some o erro de medição e ao sinal de vibração, gerando o sinal de vibração ruidoso.
- Extraia o RMS e Kurtosis de cada sinal de vibração ruidoso.
- Calcule a variação percentual desses índices

$$I(\%) = \frac{I_q - I_0}{I_0} \times 100\%$$

- Repita esse processo n vezes para um grande valor de n .

*Advindo da definição de SNR: $SNR = \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{ruído}}}\right)^2$. A amplitude do sinal é dada pelo seu valor RMS, enquanto do ruído branco é o próprio desvio padrão σ .

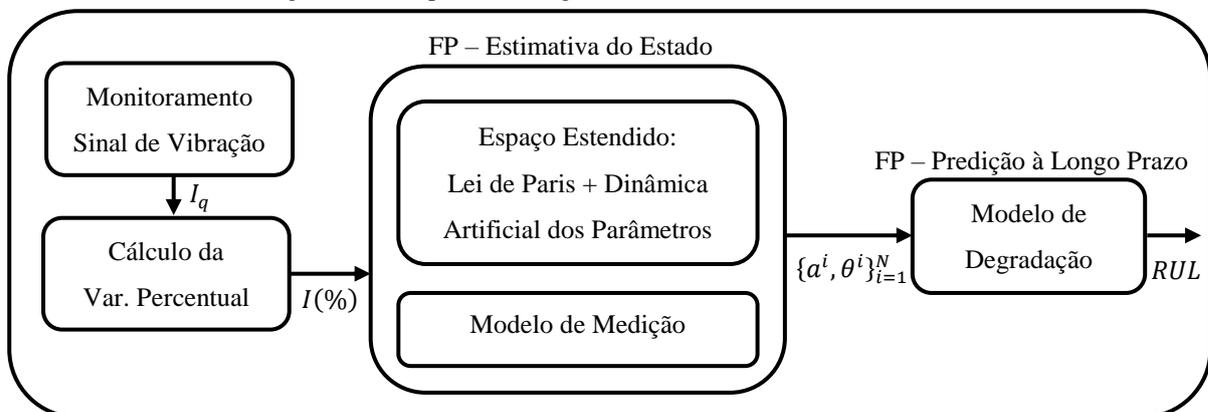
5.3 Prognóstico com FP

Com posse do modelo de degradação (lei de Paris) e o modelo de medição, o PF pode ser implementado. Nesse sentido, duas abordagens são utilizadas para estimar o comprimento da fratura, a RUL do sistema e ainda os parâmetros dos materiais. O erro de medição é considerado conhecido. A primeira utiliza o FP com dinâmica artificial nos parâmetros (seção 4.3.1) e a segunda o PMCMC, implementado pelo *Particle* Metropolis-Hastings (PMH) (seção 4.3.2).

5.3.1 FP com Dinâmica Artificial

O esquema para prognóstico da caixa de engrenagens utilizando a abordagem por FP com dinâmica artificial é exibido na figura 12.

Figura 12 – Esquema do Algoritmo do PF com Dinâmica Artificial



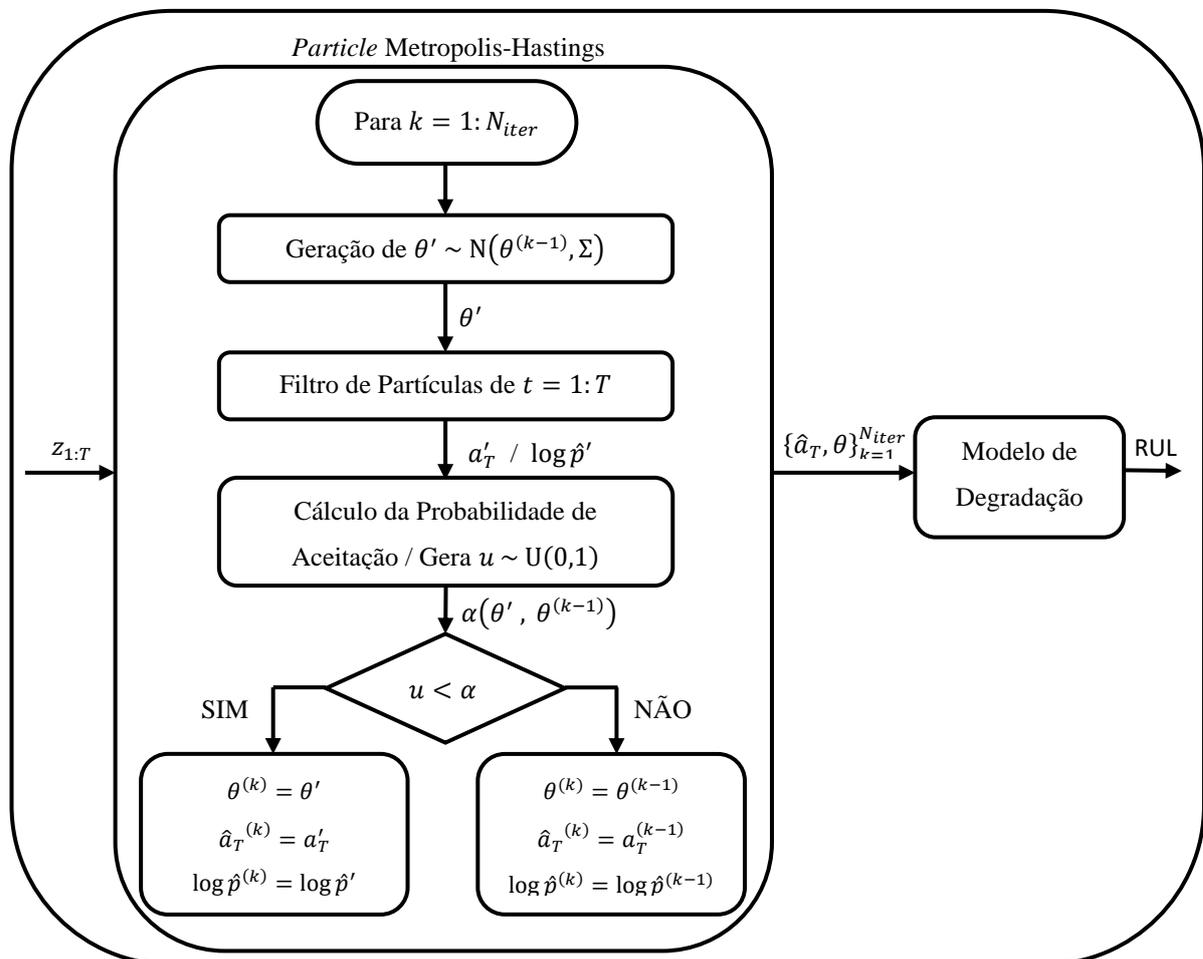
Fonte: Autor

A cada nova medida, o FP atua em duas etapas. A primeira tem a função de estimar o estado atual de degradação, ou seja, o comprimento de fratura atual. Nessa etapa é filtrado um conjunto de partículas e seus respectivos pesos pela utilização do Algoritmo 2 (*Bootstrap*). Na segunda etapa, o conjunto de partículas filtradas $\{a^i, \theta^i\}_{i=1}^N$ (θ são os parâmetros do material) é propagado pelo modelo de degradação (lei de Paris) até que todas atinjam o comprimento de fratura crítico. A RUL da caixa de engrenagens, calculada pela equação (4.25), leva em consideração o peso das partículas no instante de medição e o tempo que cada uma levou até atingir o comprimento limite.

5.3.2 PMH

O FP, na abordagem do PMH, tem como principal função a de estimar a verossimilhança, dado um parâmetro. O prognóstico é realizado pelo algoritmo PMH através do esquema representado na figura 13.

Figura 13 – Esquema do Algoritmo PMH



Fonte: Autor

Diferentemente da abordagem anterior, o PMH utiliza o conjunto de todas as medidas $z_{1:T}$ disponíveis até o instante de tempo T . No algoritmo PMH, a cada iteração k , um parâmetro candidato θ' é gerado. Nesse estudo, o parâmetro é amostrado de uma distribuição gaussiana com média $\theta^{(k-1)}$. Esse parâmetro é introduzido ao FP, que é executado do instante 1 ao T , tendo como resultado a estimativa de comprimento de fratura $\hat{a}_T^{(k)}$ e o logaritmo da verossimilhança $\log \hat{p}'$ dado o parâmetro candidato. Calculada a verossimilhança aproximada, a probabilidade de aceitação é obtida pela equação (4.39) e comparada a um valor u amostrado de uma distribuição $U(0,1)$. Caso $u < \alpha$, isso implica que o parâmetro candidato é uma amostra de $p(\theta | z_{1:T})$ e a estimativa $\hat{a}_T^{(k)}$ é uma amostra de $p(a_T | z_{1:T})$.

O PMH deve ser executado para uma grande quantidade de iterações e, as amostras iniciais, serem descartadas. Esse processo denomina-se *Burn in*. Isso é feito para eliminar as amostras até que a distribuição se estabilize, mantendo as amostras aceitas próximas do valor real.

O prognóstico nessa etapa é feito de forma similar a abordagem anterior. As amostras $\{\hat{a}_T, \theta\}_{k=1}^{N_{iter}}$ são propagadas pelo modelo de degradação até o comprimento crítico, gerando um conjunto de amostras que aproxima a distribuição de RUL da caixa de engrenagens.

5.4 Procedimento Experimental

As duas abordagens descritas anteriormente são testadas com dados simulados computacionalmente. Inicialmente, o crescimento da fratura é simulado até o comprimento crítico pelo uso da lei de Paris. Nessa simulação, os valores considerados verdadeiros dos parâmetros do material m e C são utilizados. Com isso, obtém-se o comprimento da fratura a ser estimado e, conhecido o número de ciclos até que a fratura atinja o comprimento crítico, a RUL do sistema. Em seguida, as medições RMS e Kurtosis são geradas pelo modelo de medição para um erro de medição aleatório com amplitude conhecida. As medidas são espaçadas em intervalos de ciclos determinados, simulando, por exemplo, sinais obtidos semanalmente, ou para qualquer outro intervalo.

São realizados 10 experimentos independentes, nos quais a fratura é gerada aleatoriamente, devido ao erro do modelo de degradação, assim como os dados de medições de RMS e Kurtosis, tanto pela propagação da fratura diferente em cada experimento, quanto pela geração aleatória do erro do modelo de medição. As abordagens são aplicadas para estimar o estado de degradação do sistema no instante de medição, isto é, o comprimento da fratura, e,

em seguida, a RUL do sistema. Além do mais, tenta-se estimar os parâmetros do material m e C .

A avaliação das abordagens, em cada experimento, é feita observando a sua capacidade de estimar o comprimento da fratura e a RUL. A estimativa do comprimento da fratura é avaliada pelos índices EA e RMSE, ao passo que para a estimativa da RUL, utiliza-se o AC para 25%, 50% e 75% da extensão total experimento, além dos índices relacionados a contagem de estimativas dentro ou fora do intervalo de confiança (AOF, FAR e PER), sendo utilizado um intervalo de confiança de 99%. São avaliadas as médias e desvio padrão dos valores desses índices para o conjunto dos 10 experimentos. Ao final, as abordagens são comparadas.

Os valores dos parâmetros utilizados para as simulações são apresentados nas tabelas a seguir. Primeiramente, os valores referentes à geometria da engrenagem, os quais estão descritos na tabela 2. Essas informações possibilitam determinar integralmente todas as dimensões das engrenagens como os diâmetros e os ângulos de rotação em que há ou um par de dentes ou dois pares de dentes em contato. Os ângulos são primordiais no cálculo da rigidez e na resolução das equações do modelo dinâmico.

Tabela 2 – Parâmetros das engrenagens utilizadas para simulação.

Parâmetro	Pinhão	Coroa
Número de dentes	19	48
Passo Diametral (in^{-1})	8	
Largura do Dente (mm)	16	
Ângulo de Pressão (graus)	20	
Razão de Contato	1.64	
Módulo de Young (GPa)	206.8	
Coefficiente de Poisson	0.3	

Fonte: (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b, WU et al., 2008; TIAN et al., 2012).

As equações que representam o modelo dinâmico do par de engrenagens são resolvidas para os dados apresentados na tabela 3. Esses dados também foram utilizados nos estudos de Zhao et al. (2013a), Zhao et al. (2013b), Wu et al. (2008) e Tian et al. (2012). Isso possibilita a comparação dos resultados obtidos nesse presente estudo. O torque de entrada utilizado é de $M_1 = 12 Nm$ e o torque de carga, após a estabilização do sistema, tem valor de $M_2 = 20 Nm$, o que representa cerca de 65% do torque total transmitido ao eixo de saída.

Tabela 3 - Parâmetros físicos do sistema dinâmico do par de engrenagens.

Massa do pinhão (<i>kg</i>)	$m_1 = 0.96$
Massa da coroa (<i>kg</i>)	$m_2 = 2.88$
Momento de inércia de massa do pinhão (kgm^2)	$I_1 = 4.3659 \times 10^{-4}$
Momento de inércia de massa da coroa (kgm^2)	$I_2 = 8.3602 \times 10^{-3}$
Momento de inércia de massa do motor (kgm^2)	$I_m = 0.0021$
Momento de inércia de massa da carga (kgm^2)	$I_b = 0.0105$
Rigidez torcional dos eixos de acoplamento (<i>Nm/rad</i>)	$k_c = 4.4 \times 10^4$
Coef. de amortecimento torcional dos eixos de acoplamento (<i>Nms/rad</i>)	$c_c = 5.0 \times 10^5$
Rigidez radial dos mancais (<i>N/m</i>)	$k_r = 6.56 \times 10^7$
Coef. de amortecimento radial dos mancais (<i>Ns/m</i>)	$c_r = 1.8 \times 10^5$
Raio de base do pinhão (<i>m</i>)	$R_{b1} = 28.3 \times 10^{-3}$
Raio de base da coroa (<i>m</i>)	$R_{b2} = 71.6 \times 10^{-3}$
Torque do Motor (<i>Nm</i>)	$M_1 = 12$
Torque da Carga (<i>Nm</i>)	$M_2 = 20$

Fonte: (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b, WU et al., 2008; TIAN et al., 2012).

Os dados de degradação foram gerados a partir do modelo de degradação com comprimento de fratura inicial de 0.1 mm , utilizando o erro do modelo $\varepsilon \sim \text{Ln}(0.8924; 0.2128^2)$ amostrado a cada incremento ΔN , e para os parâmetros verdadeiros $m = 1.5328$ e $C = 9.5 \times 10^{-11}$. As distribuições iniciais dos parâmetros são $m \sim N(1.4354; 0.2^2)$ e $C \sim N(9.12 \times 10^{-11}; (1 \times 10^{-12})^2)$ (ZHAO et al., 2013a).

Os resultados e análises, após a realização do procedimento aqui descrito, estão apresentados na próxima seção.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção são apresentados os resultados e discussões. Inicialmente, resultados referentes ao modelo dinâmico da caixa de engrenagens como os sinais de vibração, índices extraídos e propagação da fratura pelo FRANC2D. Ao final, obtém-se o modelo dinâmico e modelo de medidas utilizados no FP. Em seguida, os resultados da aplicação do FP, com finalidade de prognóstico, utilizando as abordagens da dinâmica artificial e do PMH.

6.1 Modelo de Degradação

Os resultados apresentados aqui decorrem da implementação dos passos descritos na seção 5.1. Os valores dos parâmetros das engrenagens considerados nessa simulação são resumidos na tabela 2, a partir dos quais, calculam-se as dimensões das engrenagens. As principais dimensões das engrenagens, úteis para o cálculo da rigidez, são apresentadas na tabela 4. Os ângulos de rotação ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 das engrenagens são referentes as fases 1 (dois pares), 2 (um par) e 3 (dois pares) do engrenamento

Tabela 4 - Dimensões das engrenagens obtidos a partir dos parâmetros da tabela 2.

Parâmetro	Pinhão	Coroa
Número de dentes	19	48
Diâmetro Primitivo (<i>mm</i>)	60.32	152.4
Diâmetro de Base (<i>mm</i>)	56.69	143.21
Diâmetro de Adendo (<i>mm</i>)	66.67	158.75
Ângulo ϕ_1	12.32	4.87
Ângulo ϕ_2	18.95	7.5
Ângulo ϕ_3	31.18	12.34

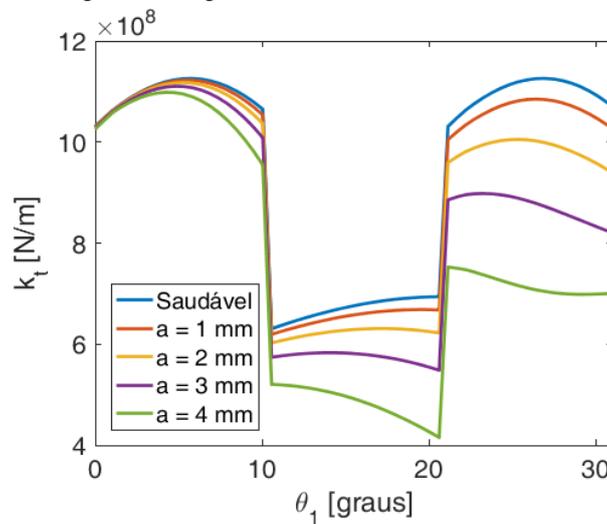
Fonte: Autor.

A fratura foi iniciada na raiz de um dos dentes do pinhão com comprimento de 0.1 *mm* e direção dada por $\beta = 45^\circ$. A rigidez de engrenamento k_t foi calculada através da implementação em Matlab das equações (3.27), (3.34) à (3.50).

Após a propagação total da fratura seguindo o procedimento iterativo descrito na seção 5.1, foi possível obter a rigidez de engrenamento. A figura 14 mostra a rigidez de engrenamento para um par de engrenagens saudáveis e para alguns níveis de fratura. Como se observa na figura, a rigidez tende a decrescer com o aumento da fratura. Fica evidente as descontinuidades

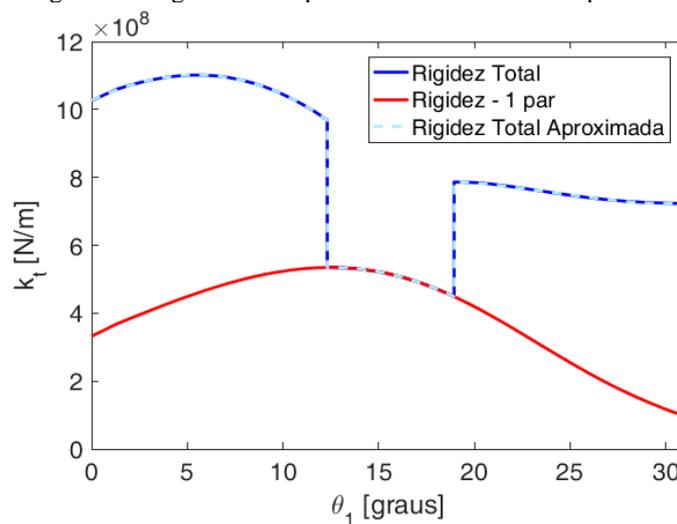
que ocorrem devido a alternância entre o contato de 1 par de dentes ou 2 pares de dentes. Na fase 1, o dente fraturado iniciou o engrenamento. Nesse início, o dente está em contato próximo de sua base e a fratura não tem muita influência sobre a rigidez. Na fase 2, somente há um par de dentes engrenado, sendo o fraturado um deles. É nessa fase em que está a carga máxima atuando sobre o dente. A rigidez sofre maior decréscimo da rigidez nas fases 2 e 3, quando a parte superior do dente fraturado está em contato e, conseqüentemente, a raiz do dente está sobre maior tensão em razão do aumento da carga de flexão.

Figura 14 – Rigidez de engrenamento: saudável, 1 mm, 2 mm, 3 mm e 4 mm.



Fonte: Autor.

Figura 15 – Rigidez de engrenamento para uma fratura com comprimento de 3,7 mm.



Fonte: Autor.

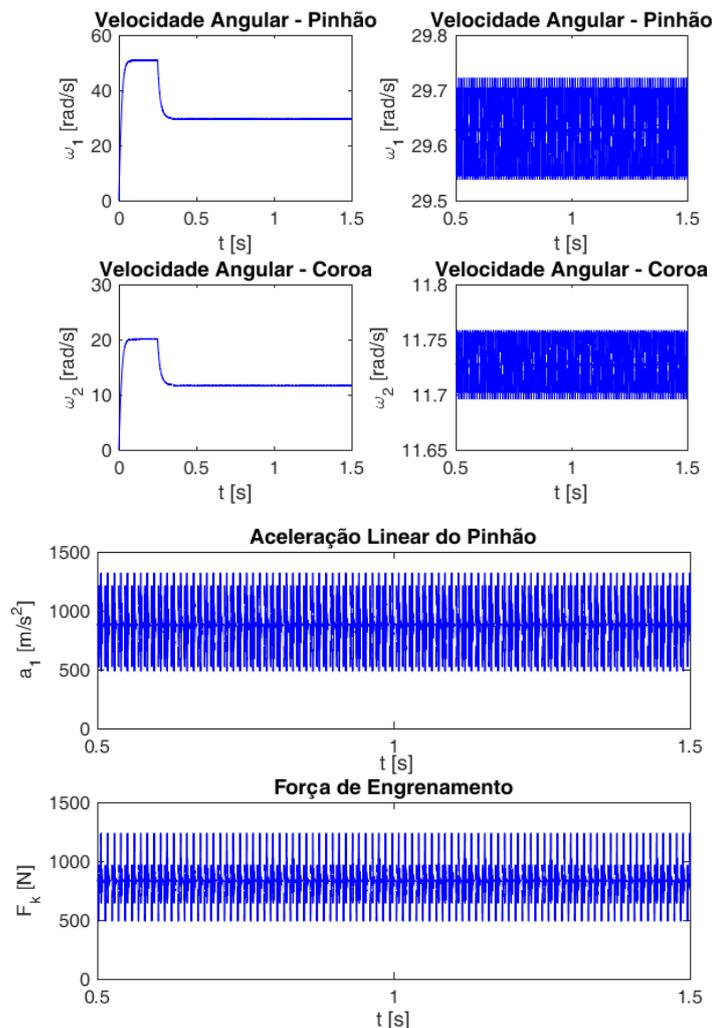
A figura 15 mostra a rigidez de engrenamento para uma fratura de $3,7$ mm. Essa figura ilustra a aproximação polinomial nas regiões contínuas da rigidez, que ficam quase sobrepostas.

Ademais, em vermelho está a rigidez de um único par de dentes, a qual será útil na obtenção da razão de transmissão de carga.

Após a incorporação da aproximação polinomial da rigidez de engrenamento, assim como os parâmetros do modelo dinâmico dados na tabela 3, finalmente as equações do modelo dinâmico do par de engrenagens podem ser resolvidas. Na simulação, aplicou-se um torque de entrada de $M_1 = 12 Nm$. Posterior a estabilização, no instante $t = 0.25 s$, foi aplicado um torque de carga com valor de $M_2 = 20 Nm$.

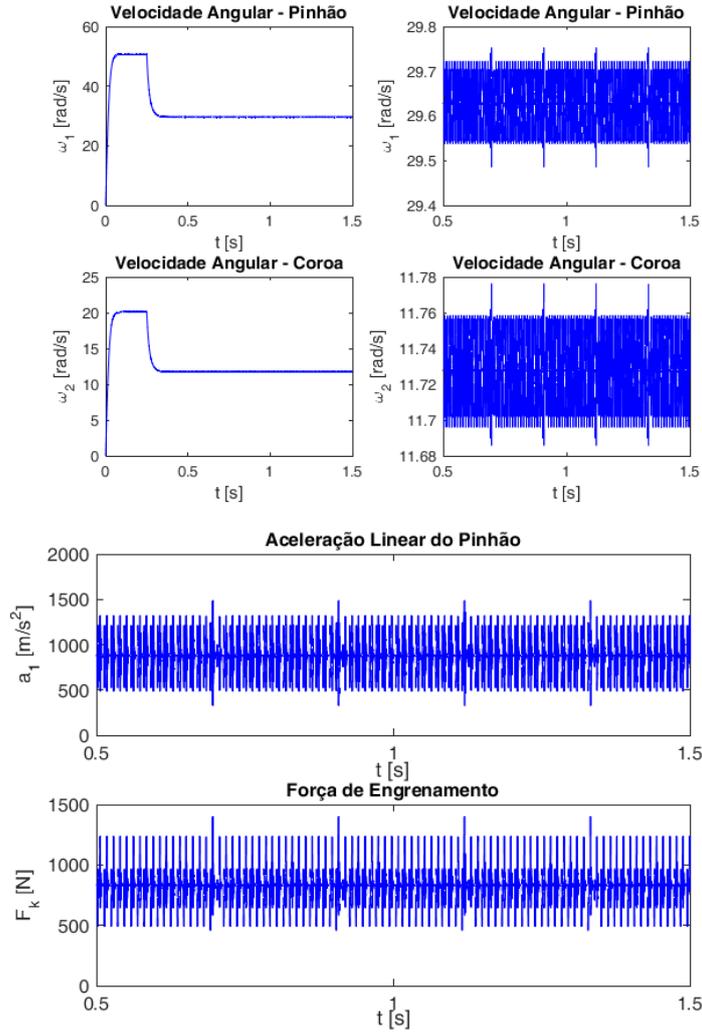
A solução desse sistema fornece a carga dinâmica e o sinal de vibração que é obtido pela própria solução do sistema. A solução do sistema é mostrada nas figuras 16 e 17, em que estão os sinais que representam a aceleração do pinhão (\ddot{y}_1), as velocidades angulares (ω_1 e ω_2) e a carga dinâmica (F_k). Na figura 16 estão os sinais para um sistema saudável, enquanto na figura 17 estão os sinais para um pinhão com fratura de 3.7 mm em um de seus dentes.

Figura 16 – Velocidades angulares, aceleração do pinhão e força de engrenamento para engrenagens saudáveis.



Fonte: Autor.

Figura 17 – Velocidade angulares, aceleração do pinhão e força de engrenamento para um pinhão com fratura de 3.7 mm.

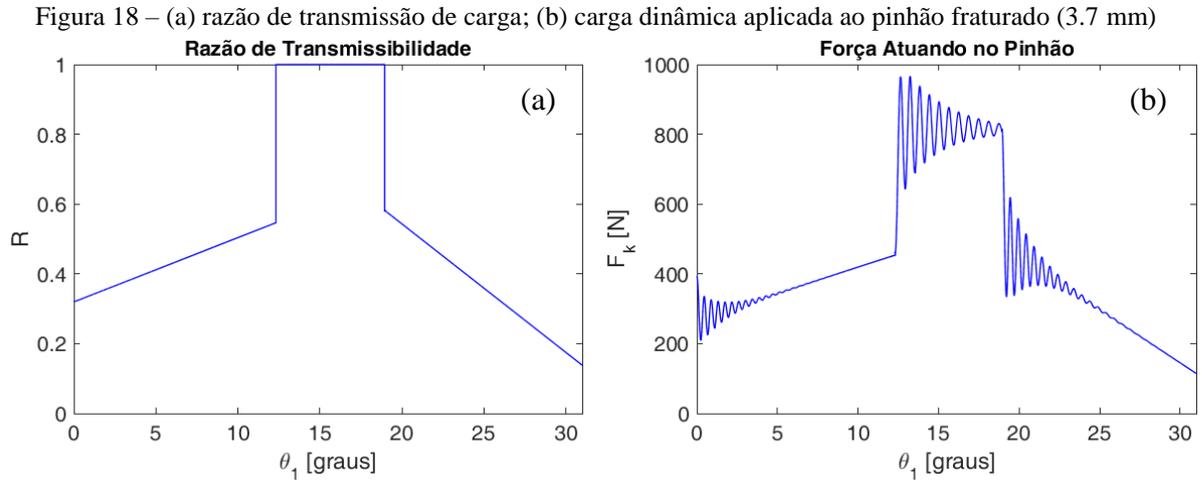


Fonte: Autor.

Ao analisar a figura 16 e 17, observa-se que a velocidade angular do pinhão se acomoda em aproximadamente 30 *rad/s*. No caso saudável não há nenhum pico destacando-se nos sinais, porém, quando há a presença da fratura, os sinais tendem a apresentar um pico com uma frequência fixa. Essa frequência é a mesma frequência de rotação, ou seja, o pico ocorre quando o pinhão dá uma volta completa e o dente fraturado entra em contato. Isso mostra que a diminuição da rigidez, em virtude da fratura, provoca um aumento na carga atuando sobre o dente, e é isso que acentua a vibração.

A carga dinâmica F_k é a carga total atuando sobre a engrenagem, independentemente do número de pares engrenados. A carga dinâmica atuando somente sobre o dente fraturado é obtida pelo produto da razão de transmissão de carga R , calculada por meio da equação (5.1), pela carga dinâmica total F_k . A razão R é o quociente entre a rigidez de um par pela rigidez total. Na figura 15, estão destacadas a rigidez total e a rigidez de um par. A figura 18a mostra

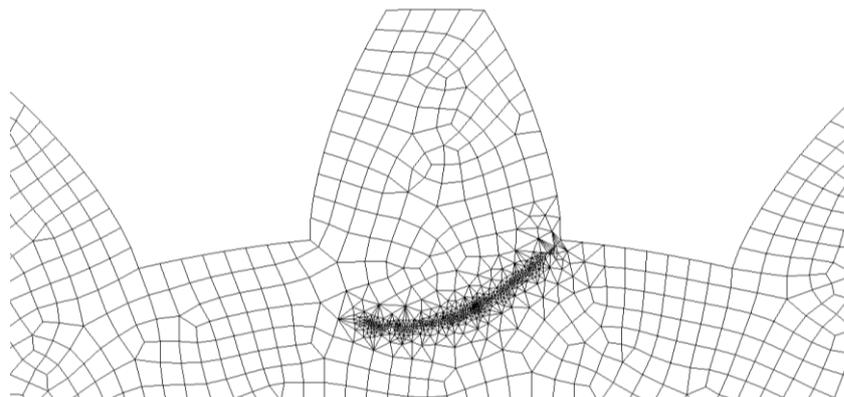
a razão de transmissão de carga para uma fratura de 3.7 mm, e a figura 18b, a carga dinâmica atuando sobre o dente fraturado.



Fonte: Autor

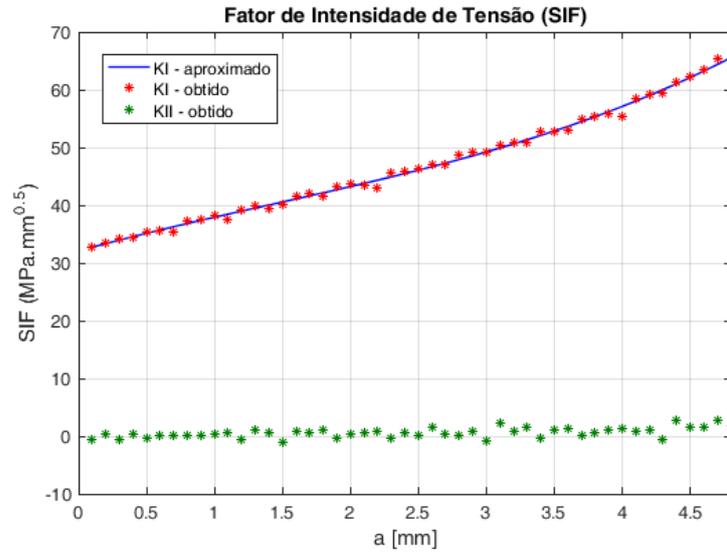
O valor máximo da carga dinâmica é utilizado no FRANC2D, posicionado no HPSCT, para calcular o SIF e obter a direção de propagação da fratura. O processo iterativo de propagação da fratura para obtenção do SIF é repetido até o valor crítico de 4.8 mm, o qual corresponde a uma projeção horizontal em aproximadamente 75% do comprimento total da base. A partir desse valor, o dente pode quebrar-se repentinamente. A figura 19 mostra a configuração final da fratura obtida no FRANC2D e a figura 20 mostra a curva do SIF para os modos I e II (K_I e K_{II}).

Figura 19 – Fratura obtida no FRANC2D após o procedimento de propagação



Fonte: Autor

Figura 20 – Curva dos fatores SIF K_I e K_{II} para cada comprimento de fratura a



Fonte: Autor

O fator K_I é aproximado por um polinômio de terceira ordem em função do comprimento da fratura. Isso facilitará, posteriormente, no estudo do modelo em FP. O fator K_{II} , como mostrado na figura 20, tem valores bem inferiores ao fator K_I , sendo esse último preponderante na forma como a fratura se propaga. Com isso, a fratura propaga-se principalmente sob efeito da carga normal, enquanto que a carga de cisalhamento no plano pouca influência nessa propagação. Dessa forma, a lei de Paris, sendo essa o modelo de degradação do sistema, será implementada somente para $K_I = K_I(a)$.

Para discretização do modelo de degradação, baseado na lei de Paris, utilizou-se o método de Euler de 1ª ordem. O modelo em sua forma discreta para um comprimento inicial a_0 e incremento de ciclos de carga ΔN é dada pela equação (6.1) (ZHAO et al., 2013a; ZHAO et al., 2013b; ZHAO, 2015).

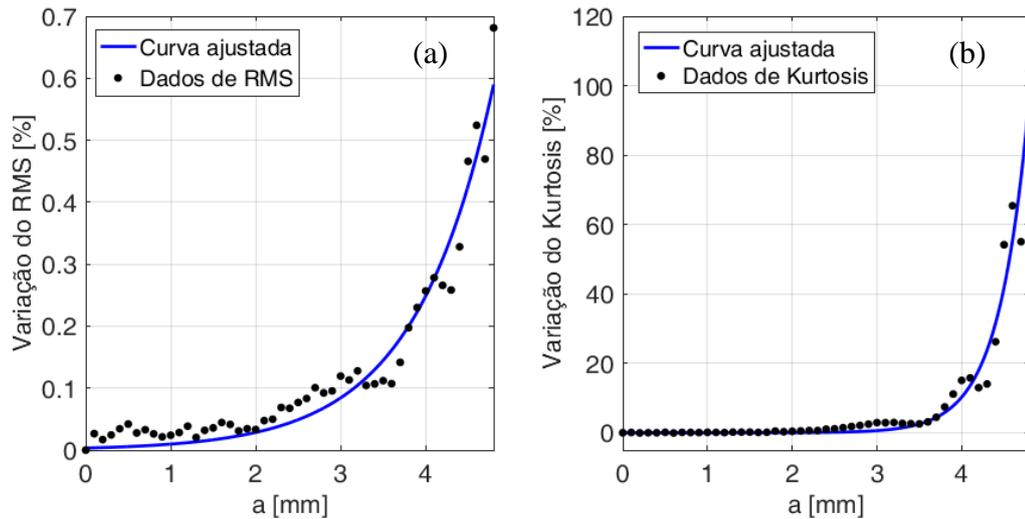
$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i + \Delta N C(K_I(a_i))^m \varepsilon \\ a(0) = a_0 \end{cases}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Para simulação, o erro do modelo ε é amostrado de uma distribuição conhecida a cada passo da iteração e as medições são realizadas em um número de ciclos específicos. Esse é o modelo utilizado no FP, quantificando a degradação do sistema por meio do comprimento da fratura. Porém, como já dito, esse comprimento é um estado não observável e obtido por meio indireto. No FP, para a estimativa do comprimento da fratura é necessário um modelo de medição, o qual terá seu desenvolvimento descrito a seguir.

6.2 Modelo de Medição

Após as simulações dos sinais de vibração para cada comprimento de fratura, as variações percentuais dos índices de RMS e Kurtosis extraídos desses sinais são apresentados na figura 21. As curvas possuem comportamento similar aos apresentados nos resultados de Wu et al. (2008) e Tian et al. (2012).

Figura 21 – (a) Variação do de RMS e (b) Variação do Kurtosis em função do comprimento da fratura.



Fonte: Autor.

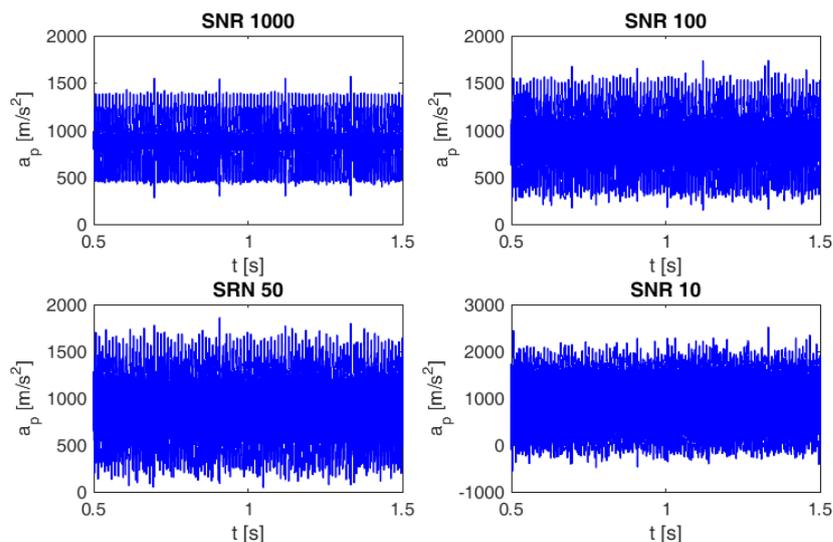
Na figura 21 estão ainda as curvas que foram ajustadas para os dados de RMS e Kurtosis simulados. São curvas do tipo exponenciais de 1ª ordem, que apresentaram melhores índices de erro quando comparadas a curvas de outros tipos, por exemplo, polinomiais. Para o RMS e Kurtosis, as funções são, respectivamente

$$g_1(a) = 0,003291 e^{1,081a} , \quad (6.2)$$

$$g_2(a) = 0,0001343 e^{2,811a} . \quad (6.3)$$

Uma das fontes de incerteza considerada nesse trabalho é o erro de medição, sendo fundamental entender a sua influência nesses índices e como isso afeta o modelo de medição. Na simulação foram gerados ruídos brancos com amplitudes relativas a SNR de 1000, 100, 50 e 10, seguindo o procedimento descrito no algoritmo 4 para $n = 5000$. Isso possibilitou a visualização da distribuição, aproximada por um histograma, da variação dos índices de variação percentual de RMS e Kurtosis. Na figura 22, estão alguns dos sinais de vibração ruidosos para cada SNR gerados, considerando um comprimento de fratura de 3.7 mm.

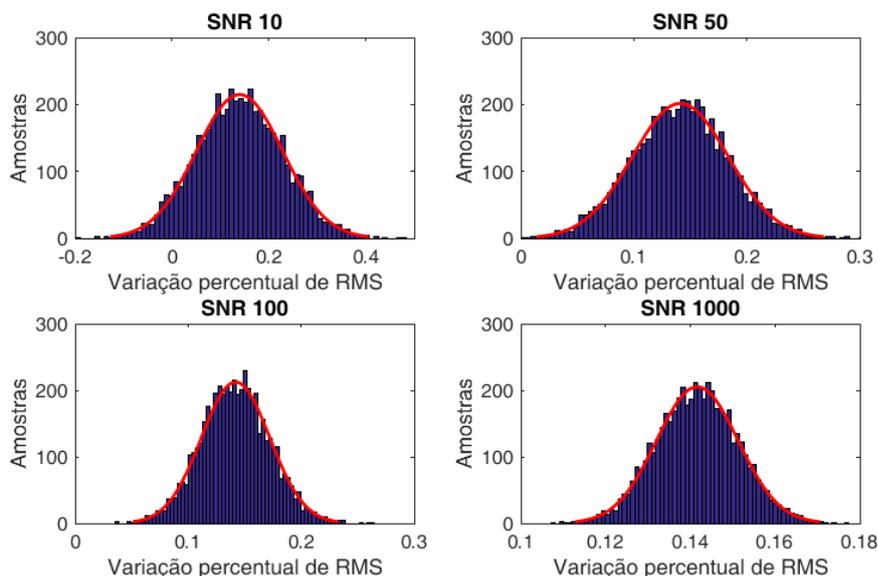
Figura 22 – Sinal de vibração ruidoso para SNR 1000, 100, 50 e 10 gerados para o comprimento de fratura de 3,7 mm.



Fonte: Autor.

Os histogramas para as variações percentuais dos índices de RMS e Kurtosis obtidos são apresentados a seguir. Primeiramente, na figura 23, estão os histogramas para a variação percentual do RMS para o comprimento de 3.7 mm e SNR 1000, 100, 50 e 10. Observa-se que as distribuições obtidas, quando o sinal está sob influência de erro de medição modelado como ruído branco, é aproximadamente gaussiana. Além disso, verifica-se que média da distribuição permanece a mesma, independente da amplitude do ruído e que a variância aumenta com o aumento de sua amplitude.

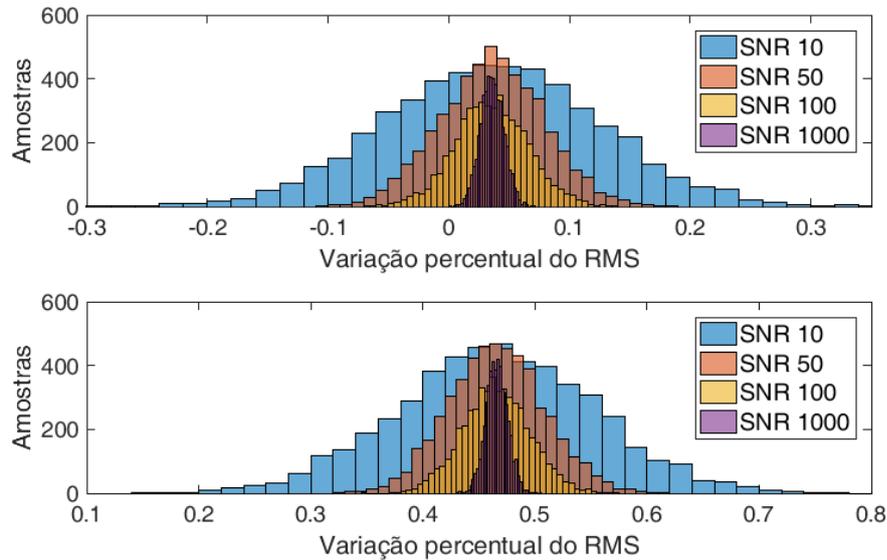
Figura 23 – Histograma e distribuição gaussiana aproximada para o comprimento de 3,7 e SNR 1000, 100, 50 e 10 (RMS).



Fonte: Autor.

A figura 24 mostra esse mesmo comportamento para outros comprimentos de fratura, exemplificados pelos comprimentos de 1.5 mm e 4.5 mm, destacando o aumento da variância para cada nível de SNR, enquanto a média mantém-se igual.

Figura 24 – Histogramas para os comprimentos de 1,5 mm e 4,5 mm para SNR 1000, 100, 50 e 10 (RMS).



Fonte: Autor.

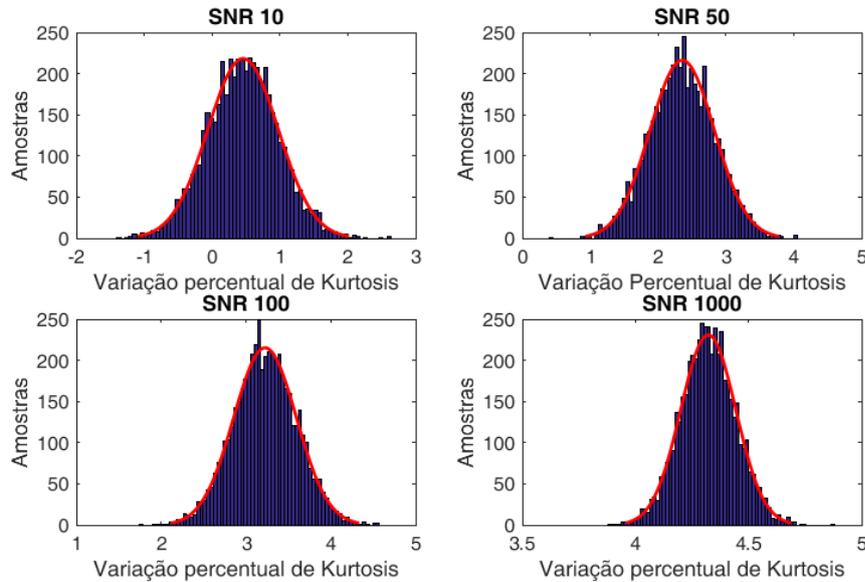
Ao se retirar os valores médios para as distribuições aproximadas para cada comprimento de fratura, obtém-se os mesmos valores da variação percentual do sinal de vibração sem ruído (figura 21). Logo, é possível modelar a equação de medição para variação percentual do RMS por um erro aditivo na forma

$$\Delta_{RMS}(a) = g_1(a) + e_{RMS}, \quad (6.4)$$

onde $g_1(a)$ é a variação da média em função do comprimento de fratura e é dado pela equação (6.2) e $e_{RMS} \sim N(0, \sigma_{RMS}^2)$, no qual o desvio padrão σ_{RMS} depende do valor da amplitude do ruído. O modelo da equação (6.4) fornece resultados compatíveis aos obtidos na simulação do Algoritmo 4.

Similarmente, a distribuição da variação percentual do índice de Kurtosis, dado a adição de ruídos brancos ao sinal de vibração, também pode ser aproximada por uma distribuição gaussiana, como pode ser visualizado na figura 25. Contudo, diferentemente do caso anterior, há influência tanto sobre a média da distribuição quanto sob a variância. Isso implica em dizer que o modelo de medição para a variação percentual de Kurtosis, depende totalmente do conhecimento do ruído de medição da vibração.

Figura 25 – Histograma e distribuição gaussiana aproximada para o comprimento de 3,7 e SNR 1000, 100, 50 e 10 (Kurtosis).



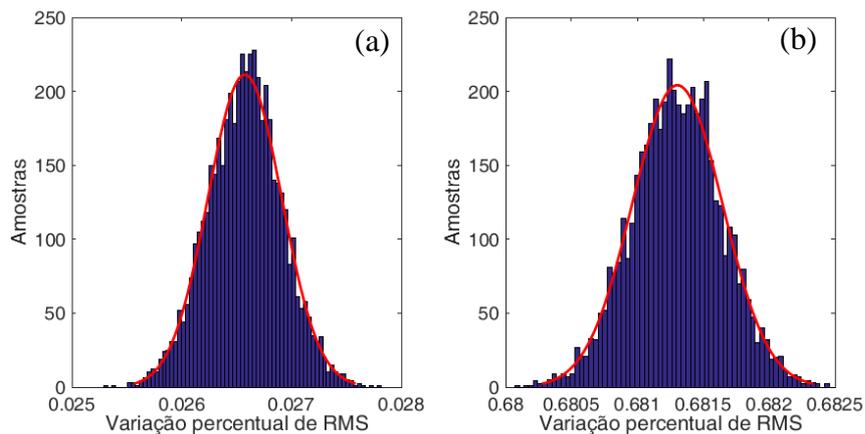
Fonte: Autor.

Esses resultados mostram que as variações percentuais de RMS e Kurtosis dependem do conhecimento da amplitude do ruído de medição. Porém, a variação percentual de RMS é afetada apenas na variância de sua distribuição, podendo ser modelado pela equação (6.4). Assim, caso não se tenha certeza sobre a amplitude do erro de medição do sinal adquirido, a variância (ou desvio padrão) pode ser modelada como parâmetro a ser determinado, enquanto a média é conhecida e confunde-se com os valores demonstrados na figura 21 e equacionados por $g_1(a)$, dependendo exclusivamente do comprimento de fratura. O mesmo não pode ser dito para a variação percentual de Kurtosis, visto que o seu modelo é influenciado pela amplitude do ruído em todos os aspectos, o que não permite modelar através da curva $g_2(a)$. Para cada amplitude do ruído, uma curva diferente é gerada, o que dificulta sua utilização em casos em que o SNR do sinal medido seja desconhecido.

Na simulação dos métodos de prognóstico é considerada a situação, na qual há conhecimento da amplitude do ruído de medição. Na situação com conhecimento da amplitude do ruído de medição, os modelos de variação percentual de RMS e Kurtosis podem ser usados em conjunto. É interessante utilizá-los dessa forma, pois a variação percentual de RMS é mais sensível nos níveis iniciais de fratura, apesar de ter variação máxima de apenas 0.7% para o seu nível máximo, enquanto a variação percentual de Kurtosis é quase constante no nível inicial da fratura, mas com maior sensibilidade para estados de degradação avançados. Em conjunto, os índices se complementam. Nessa situação, para a variação percentual de RMS é necessário

conhecer o desvio padrão do erro do modelo e_{RMS} da equação (6.4), e para a variação percentual de Kurtosis, a média e desvio padrão para cada comprimento de fratura. Para finalidade de simulação, utilizou-se um erro de medição com desvio padrão de $1 m/s^2$, valor acima dos frequentemente encontrados em acelerômetros comerciais. Na figura 26 estão as distribuições da variação do RMS para o comprimento de $0.1 mm$ e $4.8 mm$, das quais se observa um desvio padrão constante de aproximadamente 0.00035 .

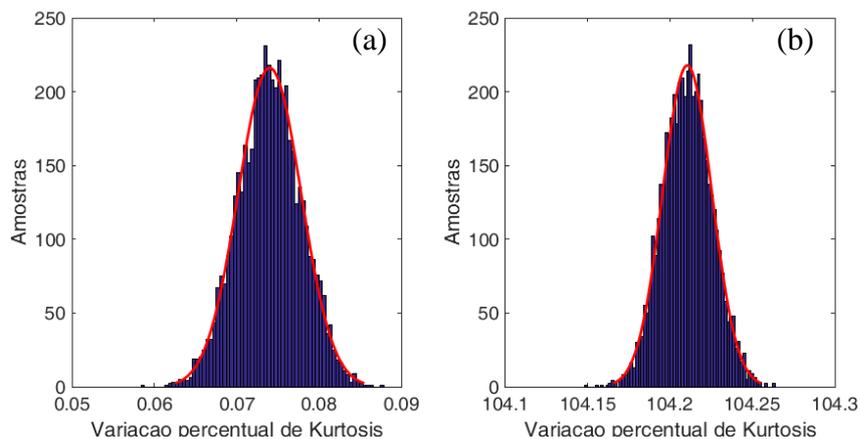
Figura 26 – Distribuições gaussianas aproximadas para a variação percentual de RMS nos comprimentos (a) $0,1 mm$ e (b) $4,8 mm$.



Fonte: Autor.

As distribuições das variações de Kurtosis para os comprimentos de fratura de $0.1 mm$ e $4.8 mm$ estão representadas na figura 27. Para esse índice, o desvio padrão da distribuição sofre um aumento significativo, porém, por simplificação, no modelo de medição é considerado constante utilizando o seu maior valor, que é 0.015 .

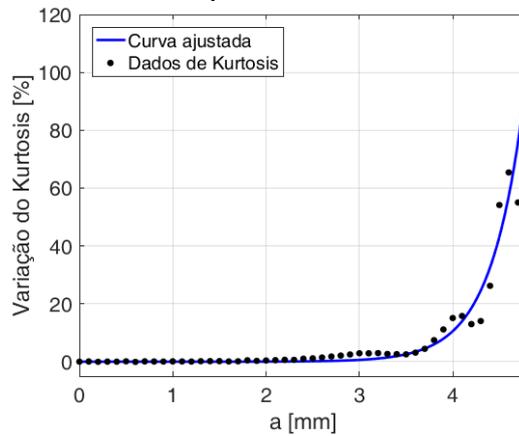
Figura 27 – Distribuições gaussianas aproximadas para a variação percentual de Kurtosis nos comprimentos (a) $0,1 mm$ e (b) $4,8 mm$.



Fonte: Autor.

Na figura 28 está a evolução da média das distribuições da variação de Kurtosis para cada comprimento da fratura, assim como a curva que foi ajustada. Para o nível de erro de medição com desvio padrão de $1 m/s^2$, a curva obtida é similar à da apresentada na figura 21 (obtida sem erro de medição). Isso ocorre, pois, a amplitude do erro é pequena quando comparada à amplitude do sinal, o que significa um SNR elevado. Contudo, para níveis de ruído de medição maiores, a curva tende a manter o padrão da exponencial, porém com valores bem divergentes dos encontrados no modelo sem ruído.

Figura 28 – Curva ajustada para as médias das distribuições da variação percentual de Kurtosis em função do comprimento de fratura.



Fonte: Autor.

Finalmente, o modelo de medição para as variações percentuais de RMS e Kurtosis é

$$\Delta_{RMS}(a) = g_1(a) + e_{RMS} = 0.003291 e^{1,081a} + e_{RMS} , \quad (6.5)$$

$$\Delta_{KURT}(a) = 0.0001343 e^{2,818a} + e_{KURT} , \quad (6.6)$$

em que $e_{RMS} \sim N(0, 0.00035^2)$ e $e_{KURT} \sim N(0, 0.015^2)$.

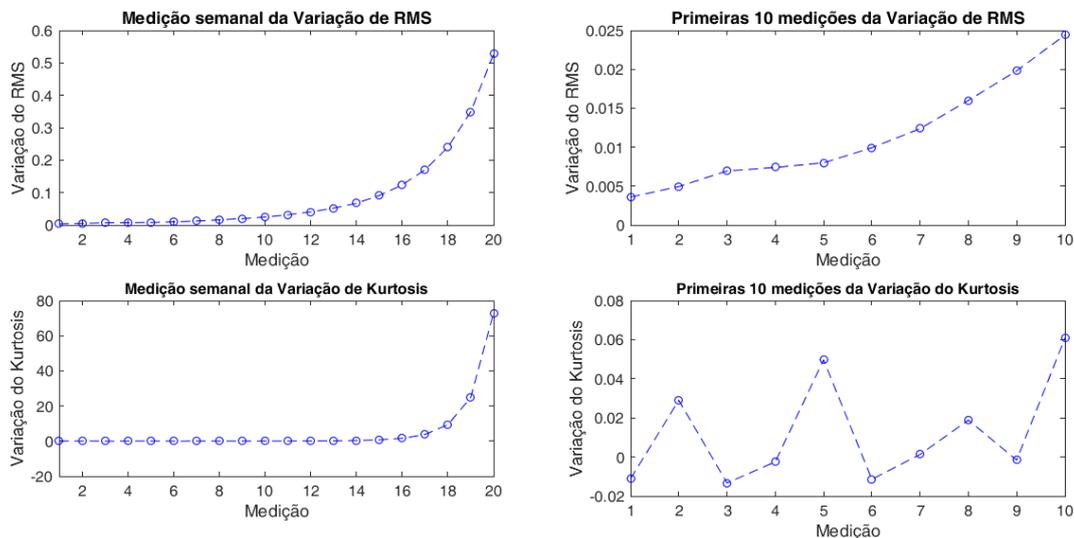
6.3 Prognóstico utilizando FP

Como já dito anteriormente, o prognóstico aplicado a caixa de engrenagens utilizando o FP é realizado em duas abordagens (FP com Dinâmica Artificial e PMH), as quais são aplicadas na situação em que se considera o conhecimento da amplitude do ruído de medição. Em ambas abordagens, os parâmetros dos materiais são tratados como incertezas associadas e que possuem somente a distribuição inicial conhecida. Para tais situações, os algoritmos devem estimar a RUL do sistema.

As medições foram geradas utilizando as equações (6.5) e (6.6), porém, utilizando $e_{RMS} \sim N(0, (0.00035 \times 2)^2)$ e $e_{KURT} \sim N(0, (0.015 \times 2)^2)$, com desvio padrão 2 vezes maiores do que o obtido nas simulações, afim de avaliar a capacidade dos algoritmos mesmo com amplitudes de erro acima do esperado.

Os instantes de medição foram extraídos em intervalos de 2.88×10^6 ciclos. Um ciclo equivale a uma rotação do pinhão e pode, com isso, ser relacionado a sua velocidade de rotação. Esse valor de número de ciclos corresponde a medições realizadas semanalmente. A figura 30 demonstra as medições de variação de RMS e Kurtosis, em um total de 20 medições até atingir o nível máximo de 4.8 mm . À direita da figura 29, as 10 primeiras medições estão destacadas. Nelas, fica evidente que ambos índices não fornecem boas indicações do comportamento de crescimento da fratura na fase inicial, sendo basicamente influenciados apenas pelo erro de medição. Isso pode dificultar com que os algoritmos estimem tanto os estados quanto a RUL com precisão adequada. Nas medições finais, o erro de medição pouco influencia, visto que os índices medidos possuem variações com crescimento exponencial mais acentuado quando a fratura está atingindo o seu limite.

Figura 29 – Medições geradas e utilizadas para teste das abordagens de prognóstico.



Fonte: Autor.

Foram realizados 10 experimentos, dos quais se extraíram métricas para avaliação dos algoritmos. As métricas utilizadas foram o EA e RMSE para a estimação do estado de degradação e a AC, AOF, FAR e PER para a fase de prognóstico, obtidas para cada experimento.

6.3.1 Abordagem com FP com Dinâmica Artificial

Nessa abordagem, o modelo dinâmico é estendido, adicionando uma dinâmica artificial nos parâmetros m e C , modelados comumente, como dito na seção 4.3.1, como ruído branco. Esse modelo estendido é então escrito pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} a_t &= a_{t-1} + \Delta N C(K_I(a_{t-1}))^m \varepsilon, \\ m_t &= m_{t-1} + \epsilon_{m_{t-1}}, \\ C_t &= C_{t-1} + \epsilon_{C_{t-1}}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

em que t é o instante de inspeção, no qual se extraem os índices a partir do sinal de vibração. Definindo o estado com $\tilde{x}_t = [x_t \ m_t \ C_t]'$, é então possível aplicar o FP normalmente. Utilizou-se o Filtro *Bootstrap* (Algoritmo 2) para estimativa do estado \tilde{x}_t .

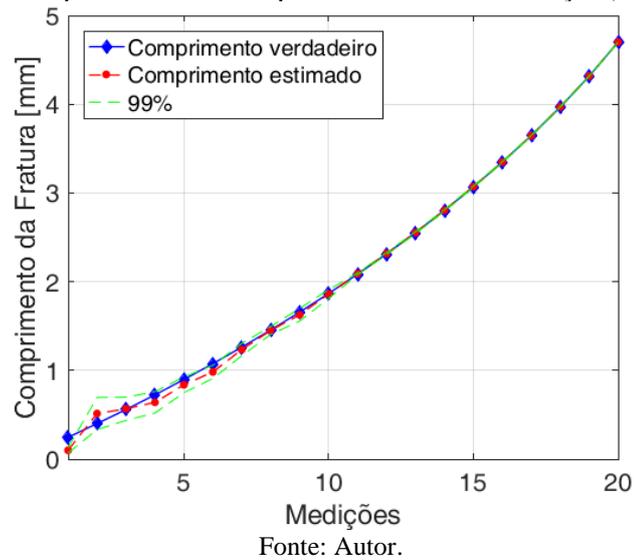
Os parâmetros do FP são dados na tabela 05.

Tabela 5 – Valores dos parâmetros utilizados no PF na abordagem por Dinâmica Artificial.

Parâmetro	Valor
Número de Experimentos	10
Incremento de ciclos ΔN	5000
Número de Partículas	1000
Distribuição inicial das partículas	$N(0,1; 0,01^2)$
Distribuição inicial de m	$N(1,4354; 0,2^2)$
Distribuição inicial de C	$N(9,12 \times 10^{-11}; (1 \times 10^{-12})^2)$
Distribuição para ϵ_{m_t}	$N(0; (10^{-6})^2)$
Distribuição para ϵ_{C_t}	$N(0; (10^{-15})^2)$

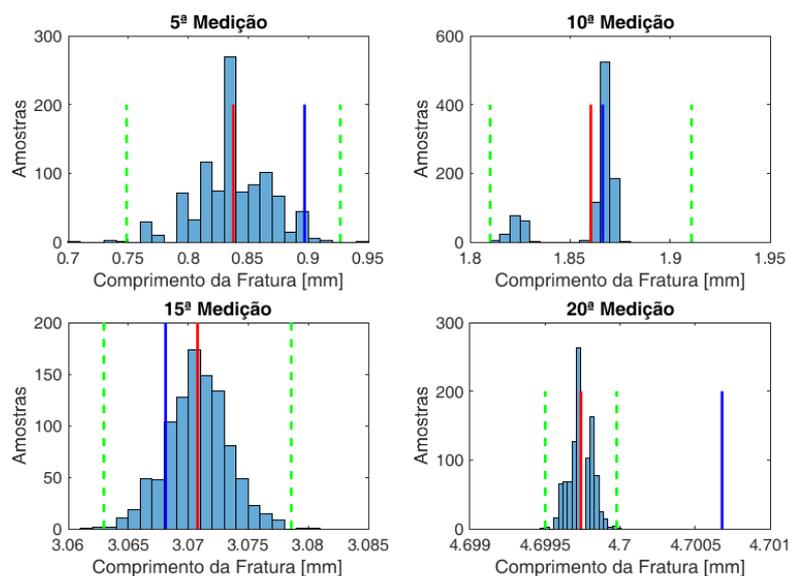
A estimativa do comprimento de fratura para o experimento 05 é apresentada na figura 30. Visualmente, a estimativa do comprimento do estado está próxima do valor real do comprimento de fratura, com maiores erros nas medições iniciais, assim como alta dispersão da distribuição. Nas medições intermediárias para as finais, o comprimento converge ao valor real e a dispersão da distribuição tende a diminuir. A figura 31 mostra as distribuições para as medições 5, 10, 15 e 20. Nela estão indicados a média da distribuição (aquele marcado na figura 30 como o estimado), o valor real do comprimento e os intervalos de confiança para 99%.

Figura 30 – Estimativa do comprimento de fratura para cada instante de medição (PF com Dinâmica Artificial).



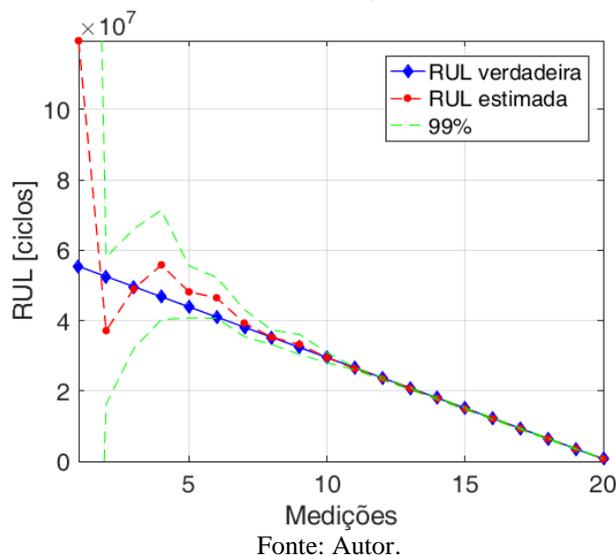
Nas distribuições dos comprimentos de fratura filtrados é possível observar que as distribuições vão se estreitando, tendo distribuições mais dispersas nas medições iniciais e afunilando-se conforme o número de medições aumenta. Algumas estimativas estão fora do intervalo de confiança, como, por exemplo, a estimativa na medição 20 (figura 32). Porém, a estimativa tem valor muito próximo do real, tendo erros inferiores a centésimos de milímetros, o que não representa uma falha grave da abordagem.

Figura 31 – Aproximação das distribuições do comprimento de fratura filtrado para as medições 5, 10, 15 e 20. Em azul: comprimento verdadeiro; em vermelho: o comprimento estimado; em verde: o intervalo de confiança para 99%.



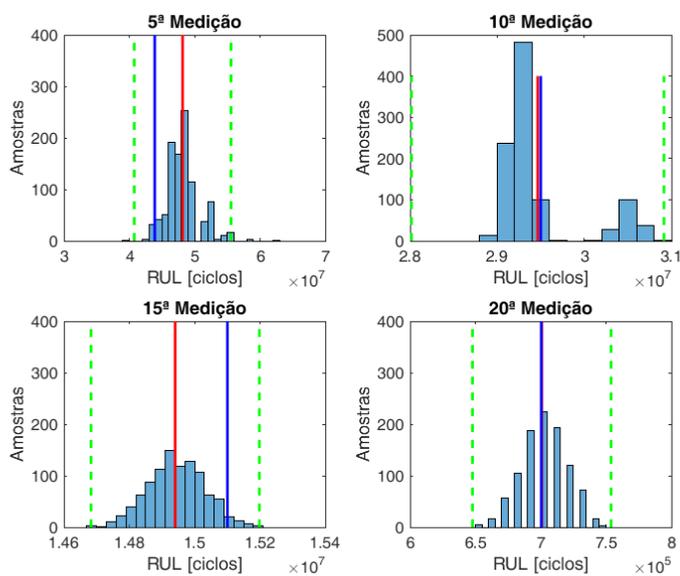
De forma similar, as figuras 32 e 33 representam respectivamente a estimativa de RUL da caixa de engrenagens para cada medição e as distribuições da RUL para as medições 5, 10, 15 e 20.

Figura 32 – Estimativa da RUL da caixa de engrenagens para cada instante de medição (PF por Dinâmica Artificial).



Há um comportamento semelhante para a estimativa de RUL. Nas medições iniciais há um erro considerável, além de uma grande dispersão da distribuição. A estimativa da RUL melhora com o aumento de medidas, assim como a dispersão da distribuição diminui.

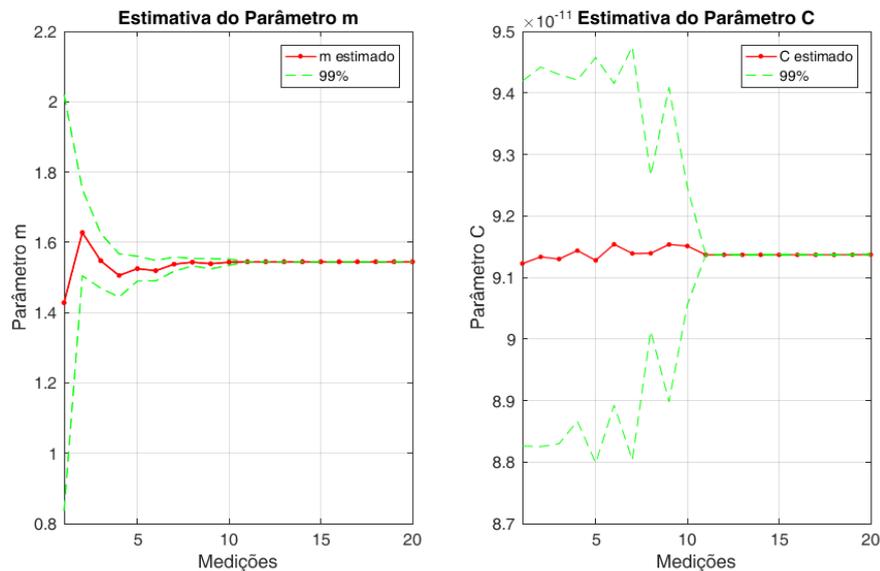
Figura 33 – Aproximação da distribuição da RUL estimada para as medições 5, 10, 15 e 20. Em azul: RUL verdadeira; em vermelho: a RUL estimada; em verde: o intervalo de confiança para 99%.



Para a RUL, foi feita a contagem de estimativas dentro e fora do intervalo de confiança, visto que são necessárias para cálculo de AOF, FAR e PER. Para esse experimento específico, todas as estimativas estiveram dentro do intervalo de confiança, sendo consideradas como previsões corretas. Portanto, apesar da estimativa do comprimento de fratura estar fora do intervalo de confiança, a estimativa da RUL, a qual é finalidade do prognóstico, encontra-se dentro do intervalo.

Outro ponto a ser avaliado é a estimativa dos parâmetros. Os parâmetros do material m e C são tratados nessa abordagem como estados e suas estimativas são apresentadas na figura 34. É observado que o parâmetro m converge a um valor muito próximo do real, enquanto o parâmetro C converge a aproximadamente 9.14×10^{-11} , sendo o valor real igual a 9.5×10^{-11} . A partir de determinada medida, as distribuições dos parâmetros tendem a diminuir a sua dispersão. Se convergissem aos valores corretos, seria uma indicação de maior certeza sobre o valor dos parâmetros. Para esse experimento (05), o EA e RMSE são 0.0294 e 0.0528 (em azul na tabela 06).

Figura 34 – Estimativas dos parâmetros m e C para cada instantes de medição (PF por Dinâmica Artificial).



Fonte: Autor.

É importante salientar que em geral, os parâmetros convergiram a valores próximos dos reais, tendendo a valores que possibilitam, quando aplicados em conjunto no modelo de degradação, uma boa estimativa do comprimento de fratura e RUL.

Os valores de EA e RMSE da estimativa do comprimento da fratura para cada experimento, assim como suas médias e desvios padrão, são apresentados na tabela 06. Os

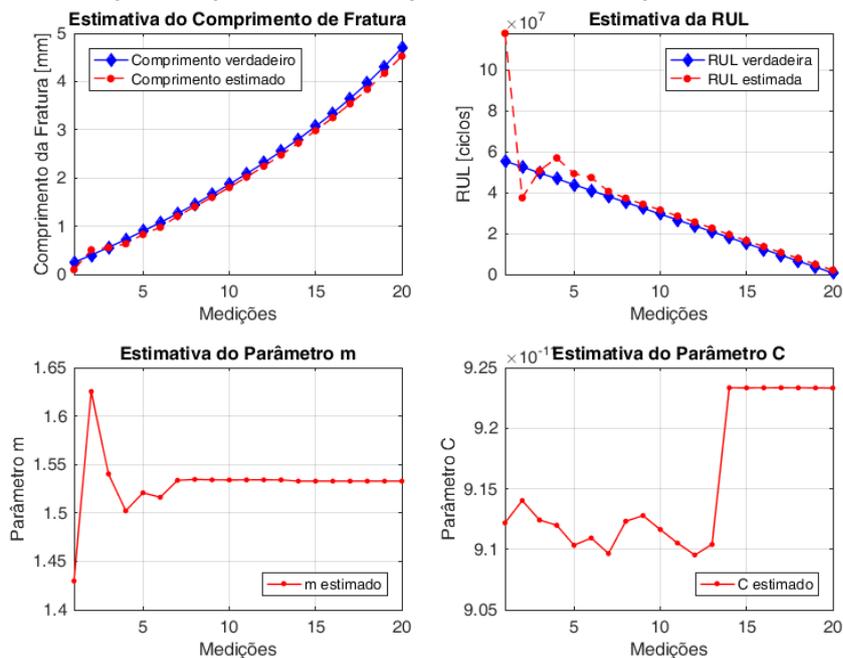
valores de desvio padrão indicam que os resultados não tendem a divergir do encontrado nas simulações, mantendo boas estimativas de comprimento de fratura em maioria dos experimentos, com erros da ordem de centésimos de milímetros.

Tabela 6 – Índices de erro EA e RMSE da estimativa do comprimento da fratura para os experimentos realizados.

Experimento	EA	RMSE
1	0,0317	0,0540
2	0,0318	0,0553
3	0,0884	0,0963
4	0,0553	0,0638
5	0,0294	0,0528
6	0,0352	0,0558
7	0,0342	0,0540
8	0,0318	0,0536
9	0,0321	0,0522
10	0,0387	0,0557
Média	0,0409	0,0594
Desvio Padrão	0,0183	0,0134

No experimento 03 ocorreu o pior resultado (destacado em vermelho). Os gráficos de suas estimativas são mostrados na figura 35.

Figura 35 – Estimativas para o experimento 03, no qual foram obtidos os piores índices de erro EA e RMSE.



Fonte: Autor.

Os índices de AC, AOF, FAR e PER para todos os experimentos são apresentados na tabela 07. A AC foi calculada em 25%, 50% e 75% do total das medições. A partir do primeiro quarto do experimento, a AC média é de aproximadamente 0.90 e sobe para acima de 0.98 desde a metade do experimento, mantendo esse valor até o fim. Isso indica que as estimativas de RUL estão bem próximas dos valores reais, desde o início de cada simulação.

Tabela 7 – Índices AC, AOF, FAR e PER da estimativa da RUL do sistema para os experimentos realizados.

Experimento	AC-25%	AC-50%	AC-75%	AOF	FAR	PER
1	0,8986	0,9873	0,9846	1	0	0
2	0,8830	0,9970	0,9925	0,95	0	0,05
3	0,8855	0,9356	0,9138	0,3	0	0,70
4	0,9027	0,9658	0,9618	0,3	0	0,70
5	0,9072	0,999	0,9899	1	0	0
6	0,8814	0,9856	0,9943	0,95	0	0,05
7	0,8968	0,9886	0,9973	0,95	0	0,05
8	0,9045	0,9961	0,9863	0,95	0	0,05
9	0,9039	0,9939	0,9959	1	0	0
10	0,8838	0,9782	0,9821	0,65	0	0,35
Média	0,8948	0,9827	0,9799	0,8050	0	0,195
Desvio Padrão	0,0102	0,0193	0,0254	0,2852	0	0,2852

A média do índice de AOF mostra que cerca de 80,5% das estimativas de RUL estão corretas, enquanto 19,5% estão indicando não detecção de falha no tempo correto (PER). As falhas não detectadas podem ser prejudiciais ao gerenciamento de manutenção, podendo causar paradas não planejadas no sistema. Contudo, os erros entre estimados e reais são pequenos e uma ação mais conservadora pelo gestor pode superar esse erro na previsão. Nos experimentos 3 e 4, nos quais foram indicados os menores índices de EA e RMSE, o índice de previsão correta caiu para 30%, indicando que o problema de estimação de estado relacionados ao empobrecimento das partículas influencia também na estimativa adequada da RUL do sistema. Os experimentos 5 e 9, com melhores índices de EA e RMSE, respectivamente, mostraram excelentes índices de desempenho para estimativa da RUL, destacado o 100% de acerto na previsão da RUL.

É importante destacar que essa abordagem possui um rápido processamento, o que permite utilizá-la várias vezes dado uma medida, podendo fornecer resultados que melhor embasem a tomada de decisão do gestor em relação ao escalonamento da manutenção do equipamento.

6.3.2 Abordagem com PMH

A abordagem PMH funciona a partir de um conjunto de medições disponíveis, a partir das quais busca obter as distribuições posteriores do estado e dos parâmetros. Nesse trabalho, foi utilizado o *random walk* Metropolis-Hastings, no qual a distribuição proposta para geração dos parâmetros candidatos é a distribuição gaussiana. Os valores dos parâmetros utilizados na implementação do algoritmo nas simulações são dados na tabela 8.

Tabela 8 – Valores dos parâmetros utilizados na abordagem PMH.

Parâmetro	Valor
Número de Experimentos	10
Número de Iterações	20000
Número de <i>Burn in</i>	10000
Incremento de ciclos ΔN	5000
Número de Partículas	100
Distribuição inicial das partículas	$N(0,1; 0,01^2)$
Distribuição inicial de m	$N(1,4354; 0,2^2)$
Distribuição inicial de C	$N(9,12 \times 10^{-11}; (1 \times 10^{-12})^2)$
Distribuição proposta para m e C	$N(\theta^{(k-1)}; 0,005^2)^*$
Parâmetro m inicial	$m^{(0)} = 1.4354$
Parâmetro C inicial	$C^{(0)} = 9,12 \times 10^{-11}$

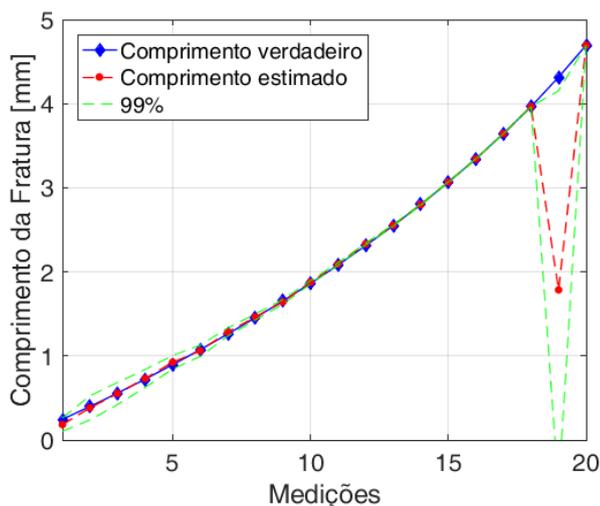
* $\theta^{(k-1)}$ é o parâmetro m ou C na iteração anterior.

Os índices EA e RMSE das estimativas do comprimento da fratura, para os 10 experimentos, são apresentadas na tabela 9. Em comparação a abordagem anterior, os índices de erro do PMH para estimativa do comprimento de fratura tiveram valor médio mais elevado, assim como o desvio padrão. Contudo, o comportamento das estimativas para os experimentos com valores elevados de erro é diferente daquele observado para a abordagem anterior. Por exemplo, no experimento 1 (figura 36), a estimativa do comprimento na medida 19 tem comportamento dissonante das estimativas anteriores, com a presença de um salto brusco no comprimento. Assim, fica evidente a discrepância de comportamento entre a estimativa nessa medida e o comportamento observado nas estimativas anteriores, o que pode ser analisado como uma estimação inadequada realizada pelo algoritmo. Dessa forma, o algoritmo pode ser executado novamente, no qual é provável que seja a fratura seja estimada corretamente.

Tabela 9 – Índices de erro EA e RMSE para a estimativa do comprimento da fratura para os experimentos realizados com PMH.

Experimento	EA	RMSE
1	0,1382	0,5659
2	0,0439	0,1485
3	0,0118	0,0176
4	0,1324	0,5420
5	0,0110	0,0173
6	0,0110	0,0149
7	0,0340	0,1001
8	0,0411	0,1193
9	0,1317	0,5348
10	0,0127	0,0190
Média	0,0568	0,2079
Desvio Padrão	0,0548	0,2393

Figura 36 – Estimativa do comprimento da fratura realizada no experimento 1 (PMH).



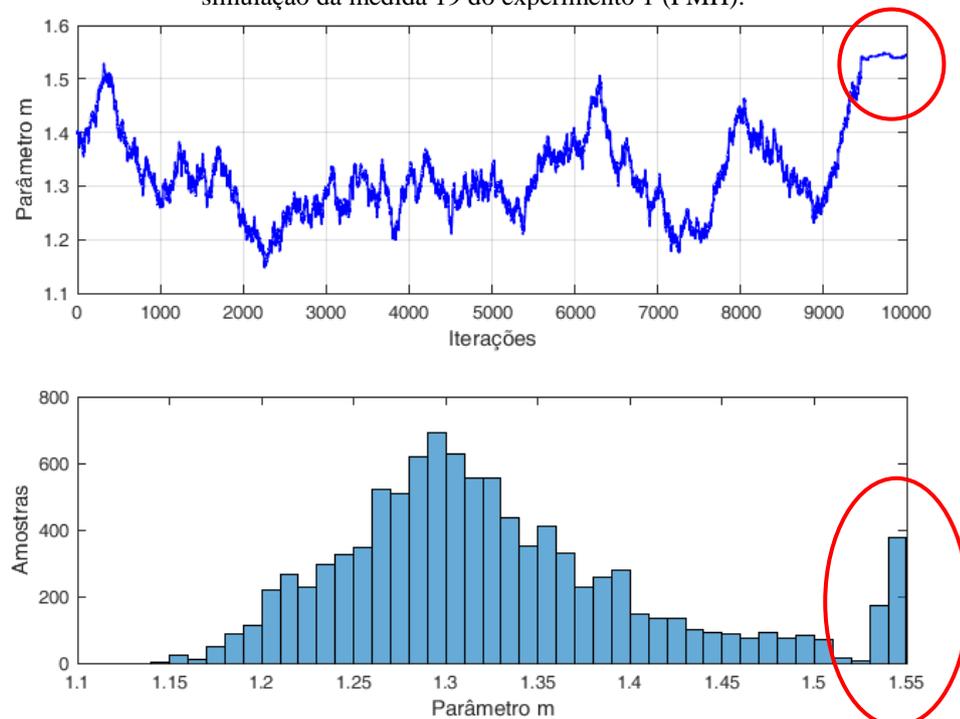
Fonte: Autor.

O erro de estimativa nessa medida é elevado, o que contribui para o aumento do EA e RMSE. Esse comportamento é similar para os experimentos 1, 4 e 9 (destacados em vermelho na tabela 9), nos quais esses saltos surgem, mas uma análise similar quanto a um comportamento inadequado do algoritmo pode ser feita. Em alguns experimentos, as estimativas de comprimento têm melhores índices de EA e RMSE quando comparado à abordagem anterior, como nos experimentos 5, 6 e 10 (destacados em azul na tabela 9). Em todos os casos, nas medidas iniciais, semelhante a abordagem anterior, há pequenos erros de estimativa, porém, à medida que a fratura cresce, o erro tende a diminuir.

Na abordagem anterior, apesar de menores índices de erro, as estimativas continuam apresentando um crescimento suave da fratura (vide figura 35), e o EA e RMSE cresce sucessivamente a cada nova estimativa. Assim, é difícil perceber que a estimativa esteja inadequada, levando a ações erradas quanto a manutenção do sistema.

O erro de estimativa como mostrado na figura 36 está diretamente relacionado a estimativa do parâmetro do material m . A figura 37 ilustra o porquê de a estimativa não ocorrer adequadamente. Nela estão as amostras do parâmetro m geradas pelo Metropolis-Hastings no experimento 1. A distribuição converge apenas nas iterações finais (destacado na figura 37). Caso houvesse um maior número de iterações, o parâmetro convergiria ao valor real, contudo, o aumento de iterações eleva o tempo de processamento, tornando-o inviável. Como o modelo de degradação é bastante sensível ao parâmetro m , no qual pequenas variações nesse parâmetro mudam completamente o crescimento da fratura, então os parâmetros gerados longe do valor real produzem valores de probabilidade de aceitação altos e, por isso, a taxa de aceite do parâmetro m é tão elevada. Esse comportamento tende a gerar distribuições dispersas e inconclusivas sobre o parâmetro. Nesse caso, a estimativa do comprimento da fratura fica afastada do valor real.

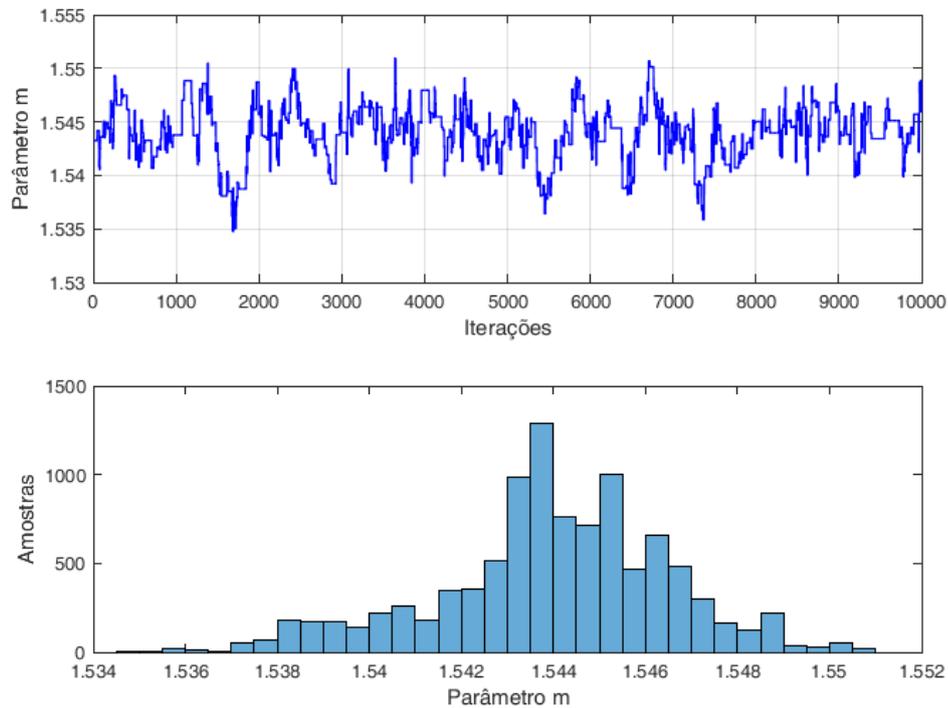
Figura 37 – Amostras aceitas do parâmetro m no Algoritmo de Metropolis-Hastings e a distribuição gerada na simulação da medida 19 do experimento 1 (PMH).



Fonte: Autor.

A título de comparação, a figura 38 mostra o comportamento quando a distribuição está estabilizada (medida 20 do experimento 1). Observa-se partes planas no gráfico que indicam que os parâmetros candidatos não foram aceitos, e assim, a taxa de aceite diminui. A distribuição estabiliza em valores próximos do valor real do parâmetro, fornecendo uma distribuição posterior do parâmetro m mais concentrada em torno do valor real desse parâmetro. Com isso, a estimativa da fratura aproxima-se do valor real.

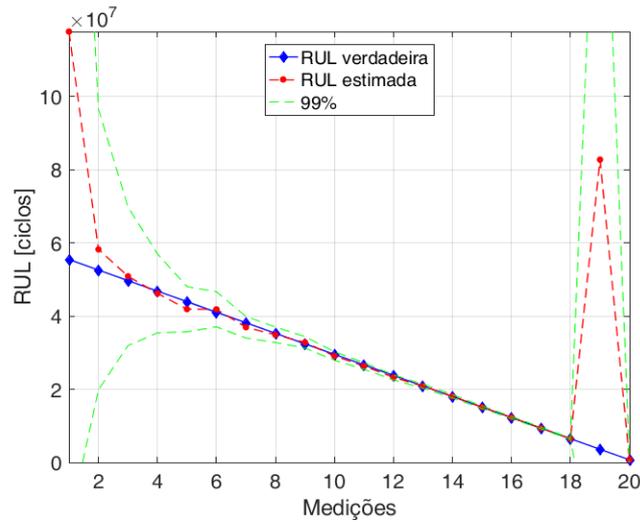
Figura 38 – Amostras aceitas do parâmetro m no Algoritmo de Metropolis-Hastings e a distribuição gerada na simulação da medida 20 do experimento 1 (PMH).



Fonte: Autor.

Na estimativa da RUL, o comportamento é similar ao da estimativa do comprimento da fratura como pode ser visto na figura 39, que retrata a estimativa para o experimento 1. Na medição 19, um comportamento destoante do restante das estimativas. Destaca-se também os erros na fase inicial, assim como aconteceu com a estimativa produzida pela abordagem anterior. Isso ocorre pela limitação do modelo de medida. Os índices de variação de RMS e Kurtosis são pouco sensíveis na fase inicial da fratura. Isso é destacado na figura 26, na qual pode ser visto que nas primeiras 10 medições, há mais influência do ruído do que efetivamente uma variação de um dos índices. Com isso, na fase inicial, o filtro não consegue perceber quais partículas devem ter maior peso, dado aquela medição. Na fase intermediária e final da fratura, a variação dos índices é mais acentuada e o filtro consegue identificar melhor quais partículas tem maior probabilidade de acerto, produzindo assim melhores estimativas.

Figura 39 – Estimativa da RUL no experimento 1 (PMH).



Fonte: Autor.

Mais uma vez, um comportamento discrepante como o na medida 13, fornece um indicativo de algum erro na estimacão e ´ recomendado que o algoritmo seja executado novamente, a fim de validar a estimativa obtida inicialmente ou refutá-la.

A avaliao dos ´ndices de acurácia, AOF, FAR e PER, para os 10 experimentos realizados com PMH são apresentados na tabela 10. A acurácia para 25% do experimento chega em m´dia a 0,9532 e cresce, na parte final do experimento, a aproximadamente 0,99, o que representam boas aproximaes das estimativas, principalmente, em estágios avançados da fratura. O desvio padrão mostra que a abordagem deve manter esse comportamento.

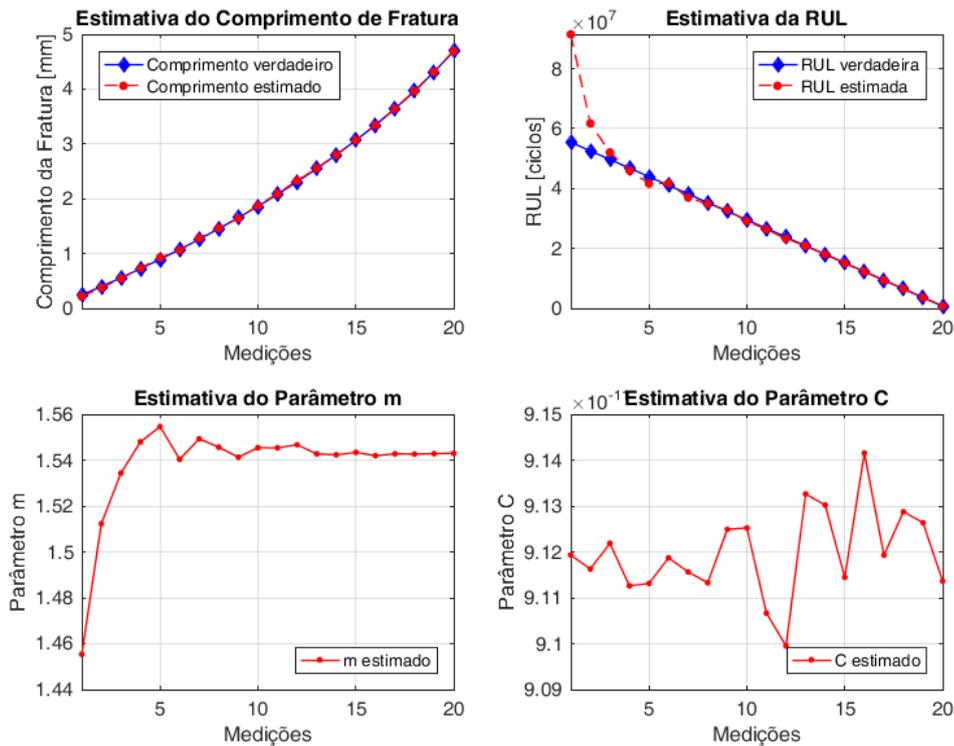
Tabela 10 – ´ndices AC, AOF, FAR e PER para a estimativa da RUL do sistema utilizando PMH.

Experimento	AC-25%	AC-50%	AC-75%	AOF	FAR	PER
1	0,9545	0,9849	0,9977	1	0	0
2	0,9584	0,9851	0,9976	1	0	0
3	0,9566	0,9860	0,9975	1	0	0
4	0,9523	0,9852	0,9968	1	0	0
5	0,9514	0,9859	0,9978	1	0	0
6	0,9493	0,9856	0,9975	1	0	0
7	0,9537	0,9858	0,9979	1	0	0
8	0,9497	0,9855	0,9971	1	0	0
9	0,9531	0,9858	0,9975	1	0	0
10	0,9535	0,9852	0,9975	1	0	0
M´dia	0,9532	0,9855	0,9975	1	0	0
Desvio Padrão	0,0028	0,0004	0,0003	0	0	0

Em todos os experimentos, a RUL verdadeiro esteve dentro do intervalo de confiança, mesmo nas medições em que há claramente erro na estimativa. Nesse último caso, a distribuição da RUL é bastante dispersa e, logo, o intervalo de confiança tende a ser grande o suficiente para abranger o seu valor real. Na figura 39, é possível visualizar esse comportamento na estimativa relativa a medição 19. Exceto nesses casos, em que o AOF pouco indica sobre o real desempenho do algoritmo, o restante das estimativas estiveram 100% correspondendo a estimativas corretas. Com isso, não há falhas não detectadas e falsos alarmes.

Nos experimentos em que não houve o problema quanto a não estabilização da distribuição do parâmetro m , as estimativas de comprimento de fratura e RUL são próximas dos resultados reais. A figura 41 mostra os resultados das estimativas para o experimento 6, o qual possui menores índices de EA e RMSE.

Figura 40 – Estimativas para o experimento 06, no qual foram obtidos melhores índices de erro EA e RMSE utilizando PMH.



Fonte: Autor.

Semelhante a primeira abordagem, os parâmetros m e C não convergem aos seus valores reais. Efetivamente, o parâmetro m converge à aproximadamente 1.54 e o parâmetro C à 9.12×10^{-11} . Dessa forma, nenhum das duas abordagens conseguiu estimar os parâmetros do material com precisão. Entretanto, foram capazes de atingir valores próximos, que ao serem

utilizados em conjunto no modelo de degradação, possibilitam boas estimativas de comprimento de fratura, e, com finalidade de prognóstico, a RUL da caixa de engrenagens.

O PMH deve ser utilizado com cuidado quando em finalidade de prognóstico de falha, pois para cada nova medida disponível, o algoritmo processa novamente para todo o conjunto. Por exemplo, quando disponível 10 medidas, o PMH estima para cada medida o comprimento de fratura, parâmetros e RUL do sistema. Isso torna o processamento cada vez mais lento. Por outro lado, as estimativas de medidas anteriores são corrigidas. Então, no caso do erro na medida 19 do experimento 1, pode ser que na medida seguinte esse erro tenha sido corrigido.

A tabela 11 resume os resultados obtidos para as duas abordagens. Nessa tabela estão indicados os índices médios e desvio padrão referentes aos 10 experimentos realizados.

Tabela 11 – Resumo dos índices de desempenho obtidos nas abordagens. Em parênteses está o desvio padrão.

Índice de Desempenho	PF com Dinâmica Artificial	PMH
EA	0,0409 (0,0183)	0,0568 (0,0548)
RMSE	0,0594 (0,0134)	0,2079 (0,2393)
AC-25	0,8948 (0,0102)	0,9532 (0,0028)
AC-50	0,9827 (0,0193)	0,9855 (0,0004)
AC-75	0,9799 (0,0254)	0,9975 (0,0003)
AOF	0,8050 (0,2852)	1 (0)
PER	0 (0)	0 (0)
FAR	0,195 (0,2852)	0 (0)

A abordagem do FP com dinâmica artificial possui índices de erro inferiores para estimativa da fratura. Entretanto, como discutido anteriormente, os valores mínimos de erro EA e RMSE ocorreram em alguns experimentos da abordagem PMH, sendo a média elevada devido a ocorrência da não estabilização das distribuições dos parâmetros do material. Além disso, o erro da estimativa do comprimento da fratura nessa abordagem é visível, ao contrário da abordagem do FP com dinâmica artificial, na qual o erro é imperceptível ao gestor.

Quanto a RUL, a abordagem PMH é superior, apresentando índices médio de AC maiores e 100% de acerto nas estimativas (AOF). Deve-se destacar o cuidado quanto ao 100% de acerto, pois isso ocorre mesmo nas estimativas erradas.

7. CONCLUSÕES

Nesse trabalho foram implementadas duas abordagens baseadas em FP com finalidade de prognóstico, aplicadas em um sistema de uma caixa redutora composta por um par de engrenagens. A falha analisada trata-se de uma fratura em um dos dentes do pinhão e o prognóstico é utilizado com finalidade de determinar a RUL desse componente, aqui quantificada em ciclos, até que a fratura atinja um comprimento crítico estabelecido inicialmente.

No primeiro momento desse trabalho foi realizada a implementação do modelo de degradação do sistema, baseado na lei de Paris, no qual foi determinado o SIF com uso de elementos finitos, visando maior fidelidade do modelo em relação a sistemas reais. A partir do modelo dinâmico do par de engrenagens, usado também no cálculo do SIF, foi feito um estudo sobre os sinais de vibração, a fim de obter um modelo que possibilitasse a relação entre o comprimento de fratura e esse sinal. Foram utilizados os índices de variação percentual de RMS e variação percentual de Kurtosis, os quais, usados em conjunto, deram origem ao modelo de medição. Ambos se mostraram sensíveis a fratura, principalmente quando essa já possui um comprimento razoável. A partir de simulações, foi possível identificar que a distribuição da variação percentual de RMS e Kurtosis, dado um erro de medição modelado como um ruído branco, é aproximadamente gaussiana e que a influência na variação percentual do RMS está apenas na sua variância. Em contraponto, o efeito do erro de medição na variação percentual de Kurtosis está tanto na média da distribuição, quanto na sua variância. Isso pode complicar o uso desse índice caso o erro de medição tenha amplitude desconhecida.

Com base nos modelos de degradação e medição implementados, as duas abordagens baseadas em FP foram testadas utilizando dados simulados. A primeira abordagem, que utiliza o FP com adição de dinâmica artificial nos parâmetros, mostrou-se eficiente nas finalidades de estimação do comprimento de fratura e da RUL do sistema. Para estimação dos parâmetros do material, a abordagem foi capaz de estima-los a valores próximos dos reais. Apesar de ter apresentado índices médios de EA e RMSE superiores à segunda abordagem, em alguns experimentos a resposta teve erros que dificilmente podem ser percebidos pelo seu usuário, além de ter estimado a RUL do sistema com atraso, ou seja, o que causaria falhas não previstas. Um problema que surgiu em alguns experimentos é o empobrecimento das partículas. No geral, a abordagem teve bons resultados, além de ter um rápido processamento. Na segunda abordagem foi utilizado o PMH, que utiliza em conjunto o FP e MCMC (por Metropolis-Hastings). Esse método também forneceu boas estimativas de comprimento de fratura e da RUL

do componente. Assim como na abordagem anterior, o algoritmo estimou os parâmetros bem próximos dos seus valores verdadeiros. Uma falha importante nessa abordagem ocorre quando a distribuição do parâmetro m não converge, e quando isso ocorre, estimativas do comprimento de fratura e RUL são afetadas apresentando valores distantes do real. Devido a essa falha, as estimativas apresentam saltos bruscos, por isso, os índices EA e RMSE médios são inferiores à primeira abordagem. Contudo, essas disparidades apresentadas pelos saltos repentinos são bons indicativos de que o algoritmo não funcionou adequadamente. O AOF indicou que em 100% dos casos, a RUL estimada foi considerada correta, visto que estava dentro do intervalo de confiança.

Ambas abordagens funcionaram adequadamente com finalidade de prognóstico. Na fase inicial apresentaram erros consideráveis, causados pela limitação do modelo de medição, porém convergem aos valores reais com AC média superior a 0,9 a partir do primeiro quarto dos experimentos, estando em torno de 0,99 logo a partir de sua metade, evidenciando o sucesso das duas abordagens utilizadas. Em comparação na finalidade de prognóstico, o algoritmo PMH é superior à abordagem de PF com dinâmica artificial, apresentando melhores índices de desempenho.

7.1 Trabalhos Futuros

Com base nos resultados e observações obtidos nesse trabalho, surgem as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Validação do modelo de medição em experimentações reais, verificando se o comportamento obtido em simulação nesse trabalho condiz com um sistema real, incluindo um estudo mais aprofundado dos ruídos do modelo de medição;
- Experimentação real das abordagens de prognóstico baseadas em FP utilizadas nesse trabalho;
- Teste de novos índices que sejam mais sensíveis na fase inicial da fratura, visto que os a variação percentual do RMS e variação percentual de Kurtosis são pouco sensíveis nessa fase, contribuindo para estimativas ruins do comprimento da fratura, assim como da RUL do sistema;
- Utilização de outros métodos de reamostragem no FP, visando evitar problemas de empobrecimento das partículas percebido na primeira abordagem.

REFERÊNCIAS

AN, D.; CHOI, J-H.; KIM, N. H. **A tutorial for model-based prognostics algorithms based on matlab code**. In: Annual Conference of Prognostics and Health Management Society. 2012.

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. CRC press, 2017.

ANDRIEU, C.; DOUCET, A.; HOLENSTEIN, R. **Particle markov chain monte carlo methods**. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), v. 72, n. 3, p. 269-342, 2010.

ARULAMPALAM, M. S.; MASKELL, S.; GORDON, N.; CLAPP, T. **A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking**. IEEE Transactions on signal processing, v. 50, n. 2, p. 174-188, 2002.

BARTELMUS, W. **Mathematical modelling and computer simulations as an aid to gearbox diagnostics**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 15, n. 5, p. 855-871, 2001.

BUDYNAS, R. G.; NISBETH, J. K. **Elementos de Máquinas de Shigley**. 10ª Edição. McGraw Hill Brasil, 2016.

BUTLER, S. **Prognostic algorithms for condition monitoring and remaining useful life estimation**. Tese de Doutorado. National University of Ireland Maynooth. 2012.

CHEN, C.; VACHTSEVANOS, G.; ORCHARD, M. E. **Machine remaining useful life prediction: An integrated adaptive neuro-fuzzy and high-order particle filtering approach**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 28, p. 597-607, 2012.

CORNELL FRACTURE GROUP SOFTWARE, **POLICY STATEMENT REGARDING ACESS AND USE**. ACESSO EM 24/07/2018 < [HTTP://CFG.CORNELL.EDU/SOFTWARE/](http://CFG.CORNELL.EDU/SOFTWARE/) >.

COSME, L. B. **Propostas de novas técnicas para o problema de prognóstico de falhas em sistemas dinâmicos**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais. 2018b.

COSME, L. B.; D'ANGELO, M. F. S. V.; CAMINHAS, W. M.; CAMARGOS FILHO, M. C. O.; MESQUITA, A. R.; PALHARES, R. M. **Uma abordagem baseada em filtros de partículas para prognóstico de falhas**. XXII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. 2015.

COSME, L. B.; D'ANGELO, M. F. S. V.; CAMINHAS, W. M.; YIN, S.; PALHARES, R. M. **A novel fault prognostic approach based on particle filters and differential evolution.** Applied Intelligence, v. 48, n. 4, p. 834-853, 2018a.

DAIGLE, M.; GOEBEL, K. **Model-based prognostics with fixed-lag particle filters.** In: Proceedings of the Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society. 2009. p. 249-261.

GUILBAULT, R.; LALONDE, S.; THOMAS, M. **Modeling and monitoring of tooth fillet crack growth in dynamic simulation of spur gear set.** Journal of Sound and Vibration, v. 343, p. 144-165, 2015.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais.** Pearson Educacional, 2010.

HOWARD, I.; JIA, S.; WANG, J. **The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack.** Mechanical systems and signal processing, v. 15, n. 5, p. 831-853, 2001.

JOUIN, M.; GOURIVEAU, R.; HISSEL, D. PÉRA, M-C.; ZERHOUNI, N. **Particle filter-based prognostics: Review, discussion and perspectives.** Mechanical Systems and Signal Processing, v. 72, p. 2-31, 2016.

JUVINALL, R. C.; MARSHEK, K. M. **Projeto de Componentes de Máquinas.** Grupo Gen-LTC, 2000.

KAN, M. S.; TAN, A. C. C.; MATHEW, J. **A review on prognostic techniques for non-stationary and non-linear rotating systems.** Mechanical Systems and Signal Processing, v. 62, p. 1-20, 2015.

KURIA, J.; KIHU, J. **Modeling parametric vibration of multistage gear systems as a tool for design optimization.** International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering, v. 2, n. 3, p. 159-166, 2008.

LEE, J.; WU, F.; ZHAO, W.; GHAFARI, M.; LIAO, L.; SIEGEL, D. **Prognostics and health management design for rotary machinery systems—Reviews, methodology and applications.** Mechanical systems and signal processing, v. 42, n. 1-2, p. 314-334, 2014.

LEITE, G. N. P.; ARAÚJO, A. M.; ROSAS, P. A. C. **Prognostic techniques applied to maintenance of wind turbines: A concise and specific review.** Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2017.

LEWICKI, D. G.; BALLARINI, R. **Rim thickness effects on gear crack propagation life.** International journal of fracture, v. 87, n. 1, p. 59-86, 1997.

LI, C. J.; LEE, H. **Gear fatigue crack prognosis using embedded model, gear dynamic model and fracture mechanics.** Mechanical systems and signal processing, v. 19, n. 4, p. 836-846, 2005.

LI, N.; YAGUO, L.; GUO, L.; YAN, T.; LIN, J. **Remaining useful life prediction based on a general expression of stochastic process models.** IEEE Trans Ind Electron, v. 64, n. 7, p. 5709-5718, 2017.

LIANG, X.; ZUO, M. J.; FENG, Z. **Dynamic modeling of gearbox faults: a review.** Mechanical Systems and Signal Processing, v. 98, p. 852-876, 2018.

LIAO, L.; KÖTTIG, F. **A hybrid framework combining data-driven and model-based methods for system remaining useful life prediction.** Applied Soft Computing, v. 44, p. 191-199, 2016.

LIU, J.; WEST, M. **Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering.** In: Sequential Monte Carlo methods in practice. Springer, New York, NY, 2001. p. 197-223.

LIU, X.; JIA, Y.; HE, Z.; SUN, L. **Hybrid residual fatigue life prediction approach for gear based on Paris law and particle filter with prior crack growth information.** Journal of Vibroengineering, v. 19, n. 8, 2017b.

LIU, X.; JIA, Y.; HE, Z.; ZHOU, J. **Application of EMD-WVD and particle filter for gearbox fault feature extraction and remaining useful life prediction.** Journal of Vibroengineering, v. 19, n. 3, 2017a.

MA, H.; SONG, R.; PANG, X.; WEN, B. **Time-varying mesh stiffness calculation of cracked spur gears.** Engineering Failure Analysis, v. 44, p. 179-194, 2014.

MALHI, A.; YAN, R.; GAO, R. X. **Prognosis of defect propagation based on recurrent neural networks.** IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, v. 60, n. 3, p. 703-711, 2011.

MOHAMMED, O. D.; RANTATALO, M.; AIDANPÄÄ, J-O.; KUMAR, U. **Vibration signal analysis for gear fault diagnosis with various crack progression scenarios.** Mechanical systems and signal processing, v. 41, n. 1-2, p. 176-195, 2013.

ORCHARD, M. E.; VACHTSEVANOS, G. J. **A particle-filtering approach for on-line fault diagnosis and failure prognosis**. Transactions of the Institute of Measurement and Control, v. 31, n. 3-4, p. 221-246, 2009.

ORCHARD, M.; KACPRZYNSKI, G.; GOEBEL, K.; SAHA, B.; VACHTSEVANOS, G. **Advances in uncertainty representation and management for particle filtering applied to prognostics**. In: Prognostics and health management. International Conference on PHM. IEEE, p. 1-6, 2008

P. ASSOCIATION. **NORTH SEA HELICOPTER CRASH REPORT SAYS GEARBOX FAILED AFTER MAINTENANCE ERROR**. THE GUARDIAN. 2011. ACESSO EM 01/04/2018 < [HTTPS://WWW.THEGUARDIAN.COM/UK/2011/NOV/24/NORTH-SEA-HELICOPTER-CRASH-REPORT](https://www.theguardian.com/uk/2011/nov/24/north-sea-helicopter-crash-report) >.

SÁNCHEZ, M. B.; PLEGUEZUELOS, M.; PEDRERO, J. I. **Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects**. Mechanism and Machine Theory, v. 109, p. 231-249, 2017.

SÄRKKÄ, S. **Bayesian filtering and smoothing**. Cambridge University Press, 2013.

SI, X-S.; WANG, W.; CHEN, M-Y.; HU, C-H.; ZHOU, D-H. **A degradation path-dependent approach for remaining useful life estimation with an exact and closed-form solution**. European Journal of Operational Research, v. 226, n. 1, p. 53-66, 2013.

SI, X-S.; WANG, W.; HU, C-H.; CHEN, M-Y.; ZHOU, D-H. **A Wiener-process-based degradation model with a recursive filter algorithm for remaining useful life estimation**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 35, n. 1-2, p. 219-237, 2013.

SI, X-S.; WANG, W.; HU, C-H.; ZHOU, D-H. **Remaining useful life estimation based on a nonlinear diffusion degradation process**. IEEE Transactions on Reliability, v. 61, n. 1, p. 50-67, 2012.

SIKORSKA, J. Z.; HODKIEWICZ, M.; MA, L. **Prognostic modelling options for remaining useful life estimation by industry**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 25, n. 5, p. 1803-1836, 2011.

SIMEÓN, E. J. A. **Prognóstico de falhas baseado em redes neurais artificiais com estado de ECO**. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília. 2015.

SOUALHI, A.; RAZIK, H.; CLERC, G.; DOAN, D. D. **Prognosis of bearing failures using hidden Markov models and the adaptive neuro-fuzzy inference system.** IEEE Transactions on Industrial Electronics, v. 61, n. 6, p. 2864-2874, 2014.

TAVNER, P. **How are we going to make offshore wind farms more reliable?.** Supergen Wind, 2011.

TIAN, X.; ZUO, M. J.; FYFE, K. R. **Analysis of the vibration response of a gearbox with gear tooth faults.** In: ASME 2004 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers, 2004. p. 785-793.

TIAN, Z.; ZUO, M. J.; WU, S. **Crack propagation assessment for spur gears using model-based analysis and simulation.** Journal of Intelligent Manufacturing, v. 23, n. 2, p. 239-253, 2012.

VACHTSEVANOS, G. J.; LEWIS, F. L.; ROEMER, M.; HESS, A.; WU, B. **Intelligent fault diagnosis and prognosis for engineering systems.** Hoboken: Wiley, 2006.

VAVOULIS, D. V.; STRAUB, V. A.; ASTON, J. A. D. **A self-organizing state-space-model approach for parameter estimation in Hodgkin-Huxley-type models of single neurons.** PLoS computational biology, v. 8, n. 3, p. e1002401, 2012.

WANG, D.; ZHAO, Y.; YANG, F.; TSUI, K-L. **Nonlinear-drifted Brownian motion with multiple hidden states for remaining useful life prediction of rechargeable batteries.** Mechanical Systems and Signal Processing, v. 93, p. 531-544, 2017.

WU, S.; ZUO, M. J.; PAREY, A. **Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth.** Journal of Sound and Vibration, v. 317, n. 3-5, p. 608-624, 2008.

YANG, C.; LOU, Q.; LIU, J.; YANG, Y.; CHENG, Q. **Particle filtering-based methods for time to failure estimation with a real-world prognostic application.** Applied Intelligence, p. 1-11, 2017.

YANG, C.; LOU, Q.; LIU, J.; YANG, Y.; CHENG, Q. **Particle filtering-based methods for time to failure estimation with a real-world prognostic application.** Applied Intelligence, p. 1-11, 2017.

YANG, D. C. H.; LIN, J. Y. **Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics.** Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design, v. 109, n. 2, p. 189-196, 1987.

YANG, J. N.; HSI, W.H.; MANNING, S.D.; RUDD, J. L. **Stochastic crack propagation in fastener holes**. Journal of Aircraft, v. 22, n. 9, p. 810-817, 1985.

ZAIDI, S. S. H.; AVIYENTE, S.; SALMAN, M.; SHIN, K-K.; STRANGAS, E. G. **Prognosis of gear failures in DC starter motors using hidden Markov models**. IEEE Transactions on industrial Electronics, v. 58, n. 5, p. 1695-1706, 2011.

ZHAO, F. **Integrated Prognostics for Component Health Management**. Tese de Doutorado. University of Alberta. 2015.

ZHAO, F.; TIAN, Z.; LIANG, X.; XIE, M. **An Integrated Prognostics Method for Failure Time Prediction of Gears Subject to the Surface Wear Failure Mode**. IEEE Transactions on Reliability, v. 67, n. 1, p. 316-327, 2018.

ZHAO, F.; TIAN, Z.; ZENG, Y. **A stochastic collocation approach for efficient integrated gear health prognosis**. Mechanical systems and signal processing, v. 39, n. 1-2, p. 372-387, 2013.

ZHAO, F.; TIAN, Z.; ZENG, Y. **Uncertainty quantification in gear remaining useful life prediction through an integrated prognostics method**. IEEE Transactions on Reliability, v. 62, n. 1, p. 146-159, 2013.