Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Aplicações dos Teoremas de Ponto Fixo para Equações Diferenciais Parciais

Sabrina de Souza Rodrigues

Manaus/Am - 2018

Sabrina de Souza Rodrigues

Dissertação de Mestrado:

Aplicações dos Teoremas de Ponto Fixo para Equações Diferenciais Parciais

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Mikhail Neklyudov

Manaus/Am - 2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R696a

Rodrigues, Sabrina de Souza
Aplicações dos teoremas de ponto fixo para equações diferenciais parciais / Sabrina de Souza Rodrigues. 2018
70 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Mikhail Neklyudov
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Espaço de Sobolev. 2. Teoremas do Ponto Fixo. 3. Aplicações. 4. Contração. 5. Compacidade. I. Neklyudov, Mikhail II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedicatória. (In memoriam Raimunda de Souza Rodrigues, minha mãe).

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pelas alegrias e tristezas, por me levantar cada vez que caio, por guiar meus passos, a Ti meu Deus toda honra e toda glória! Tu és minha força, meu rochedo.

Agradeço a minha filha Anna Valentina, minha inspiração diária, meu jardim, minha vida e ao meu esposo Marcos Araújo por todo amor, apoio incondicional, obrigada pela compreensão a cada ausência para que eu pudesse concluir mais uma etapa de minha formação. Essa conquista só foi possível porque vocês estavam sempre ao meu lado. Amo muito vocês!

Agradeço a minha mãe Dona Raimunda (*in memoriam*), ao meu pai José Alfredo, aos meus irmãos Raianne, Dinho e Luana e a toda a minha família pelos incentivos dados. A vocês muito obrigada.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas por possibilitar o acesso a mais conhecimentos e pesquisa, aos professores do Programa em especial a meu orientador Prof. Mikhail que muito contribuiu para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço aos colegas de mestrado por toda a ajuda, aos funcionários que sempre me ajudaram e deram suporte no decorrer desses dois anos.

Agradeço a Universidade do Estado do Amazonas da qual faço parte, em especial ao Centro de Estudos Superiores de Tefé - Curso de Matemática, obrigada aos meus alunos e alunas e colegas de trabalho que contribuíram para minha qualificação.

"Todos estes que aí estão atravancando o meu caminho, eles passarão, eu passarinho".

Mário Quintana.

Resumo

Neste trabalho apresentamos e provamos os teoremas do ponto fixo de Banach, Schauder e Schaefer e a posterior aplicamos na resolução de três problemas não-lineares, estudamos ainda os Espaços de Sobolev, fundamentais para testar a existência e unicidade de soluções em Equações Diferenciais Parciais. O Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações é aplicado para provar a existência de solução em um sistema de difusão e reação, já os teoremas do ponto fixo de Schauder e Schaefer são usados na resolução de dois problemas de equações elípticas, respectivamente, semi-linear e quase-linear.

Palavras-chave: Espaço de Sobolev; Teoremas do Ponto Fixo; Aplicações; contração; compacidade.

Abstract

In this work, we present and prove the fixed-point theorems of Banach, Schauder, and Schaefer, and the later we applied in the resolution of three nonlinear problems, we also study the Sobolev Spaces, fundamental for testing the existence and uniqueness of solutions in Partial Differential Equations. The Banach Fixed-Point Theorem for contractions is applied to prove the existence of a solution in a diffusion and reaction system, whereas the fixed-point theorems of Schauder and Schaefer are used to solve two problems of elliptic equations, respectively, semilinear and quasilinear.

Keywords: Sobolev Spaces; Fixed Point Theorems; Applications; contractions; compactness.

Sumário

Introdução

Essa dissertação foi baseada nos trabalhos e estudos publicados por Barbara Niethammer [12] e Zachary Smith [15], tendo como aporte o autor Lawrence C. Evans [10] com seu livro Partial Differential Equations .

No primeiro capítulo apresentamos definições e resultados de medida e integração, resultados de análise funcional, convergência e compacidade e concluímos enunciando algumas desigualdades como por exemplo, Young, Holder, Gronwall, Poincaré, dentre outros.

No segundo capítulo, estudamos os Espaços de Sobolev, que aqui denotamos por $W^{k,p}$. Estes espaços são ideais pelas estruturas que apresentam, principalmente no que tange a resolução de problemas elípticos sob certas condições de crescimento. Ainda neste capítulo, exemplificamos e definimos derivadas fracas, cuja finalidade se assenta nas restrições de regularidade que são menores que as das derivadas usuais. Mostramos que o espaço $W^{k,p}$ com a norma $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$ é um espaço de Banach. Na sequência, prosseguimos com o tópico de aproximação por funções suaves e desigualdades de Sobolev na qual destaco a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, esta desigualdade implica na imersão de $W^{1,p}$ em L^{p^*} para $1 \leqslant p < n$ e $p^* = \dfrac{pn}{n-p}$.

Concluímos o capítulo 2 com o Teorema de Rellich-Kondrachov que nos mostra que $W^{1,p}$ está compactamente imerso em L^q para $1 \leqslant q < p^*$.

No capítulo 3 discorremos sobre os teoremas de ponto fixo, respectivamente de Banach, Schauder e Schaefer. O Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações é provado em 3 passos: primeiro mostramos que a sucessão iterada (u_n) é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach X, depois prova-se que u é ponto fixo de $A : X \to X$, A contração, e por fim mostra-se que u é único.

Para provar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder definimos envoltória convexa e enunciamos e provamos o Lema da Projeção de Schauder. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder prova-se o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer.

Se compararmos os dois últimos teoremas do ponto fixo, estes distinguem-se pelo fato de que no Teorema do Ponto Fixo de Schaefer não há necessidade do conjunto ser convexo e compacto.

Concluímos nosso estudo com o capítulo 4, no qual aplicamos os Teoremas de Ponto Fixo estudados para resolver problemas do tipo:

$$\begin{cases} u_t - \Delta(u) = f(u) \quad \text{em} \quad U_T \\ \qquad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial U \times [0, T] \\ \qquad u = g \qquad \text{sobre} \quad U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^m), \mathbf{g} = (g^1, \ldots, g^m); U_T = U \times (0, T]$, $U \subset \mathbb{R}^n$ denota um aberto, limitado e com fronteira suave. O tempo $T > 0$ é fixo.

Para este sistema de Difusão e Reação usamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para investigar a existência de solução do problema. Mostramos ainda, resultados fundamentais sobre equações parabólicas lineares.

Nossa segunda aplicação, diz respeito a equação elíptica semi-linear apresentada da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \quad \text{em} \quad U \\ \qquad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{2}$$

Para resolver (2) usamos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, mas antes apresentamos uma revisão sobre a teoria linear. Usando ainda os teoremas de Lax-Milgram, Rellich e o Teorema da Convergência Dominada.

Por fim, apresenta-se nossa terceira aplicação: um problema elíptico quase-linear, este dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u + g(\nabla u) + \mu u = 0 \quad \text{em} \quad U \\ \qquad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{3}$$

onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto, limitado com fronteira suave e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave, lipschitz contínua.

Para resolver (3) fazemos uso do Teorema do Ponto Fixo de Schaefer.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Nosso objetivo aqui é abordar definições e teoremas utilizados em Equações Diferenciais Parciais, essenciais para a apresentação dos resultados preliminares desta dissertação. Primeiramente está descrito definições sobre Medida e Integração, na sequência resultados de análise funcional, são enunciados ainda resultados de convergência e compacidade e por fim as desigualdades utilizadas nos capítulos posteriores.

1.1 Definições e Alguns Resultados de Medida e Integração

No texto μ é uma família de subconjuntos de X contendo o conjunto $\emptyset$ e o próprio conjunto X. Ademais, X é fechado sob uniões contáveis e complementares.

Definição 1. *Seja X conjunto qualquer e seja* $\mu \subset P(X)$. *Dizemos que* μ *é uma* σ*-álgebra se satisfaz:*

i) $\emptyset \in \mu$

ii) $A \in \mu \Rightarrow A^c \in \mu$

iii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mu \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mu$

Definição 2. *Seja X um conjunto munido de uma* σ *-álgebra* μ. *Uma medida em M é uma função* μ*: M$\rightarrow$ [0,+∞] que satisfaz:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) *Se A é uma coleção enumerável disjunta*

$$\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset M \to \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Em consequência da propriedade ii) chamada de aditividade enumerável temos a aditividade finita (tome $A_j = \emptyset$ *para* $j > n$*), se* $(A_1, A_2, \ldots, A_n \in M)$ *são disjuntos, então* $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ *Chamamos de medida finitamente aditiva a função que satisfaz a aditividade finita e a propriedade* $\mu(\emptyset) = 0$.

Definição 3. *Chamamos de semi-anel em* σ *a uma família* δ *de subconjuntos de* σ *quando:*

i) $\emptyset \in \delta$

ii) $S_1, S_2 \in \delta \Longrightarrow S_1 \cap S_2 \in \delta$

iii) *Se*

$$S_1, S_2 \in \delta \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \bigcup_{j=1}^{m} S_{j,m} \in \delta; S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$$

A dupla (X, μ) é chamada de espaço mensurável.

Os conjuntos em M são chamados conjuntos mensuráveis.

A tripla (X, M, μ) é chamado de espaço de medida.

Lema 1. ***(Propriedades Elementares de medida)****: Seja* (X, M, μ) *um espaço de medida. Então:*

a) Se $E, F \in M$ *e* $E \cap F = \emptyset$ *então* $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$

b) Se $E, F \in M$ *e* $E \subset F$ *então* $\mu(E) \leqslant \mu(F)$

c) $\mu(E \cap F) \leqslant \mu(E) + \mu(F) \quad \forall \quad E, F \in M$

d) Se $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em M, então*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j)$$

e) Se $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente em M, tal que* $E_j \subset E_{j+1}$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$, *então,*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j)$$

f) Se $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência decrescente em M, tal que* $E_j \subset E_{j+1}$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$, *e se para algum* $\mu(E_j)$ *é finito então,*

$$\mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j)$$

Para ver a prova do Lema 1 consultar [8].

1.2 Resultados de Análise Funcional

Definição 4. *Seja X um espaço vetorial sobre* $k := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. *Uma função* $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma norma se satisfaz:*

i) $\| x \| = 0 \Longrightarrow x = 0$;

ii) $\| \lambda\, x \| = |\lambda| \ \| x \|,\ \forall\, \lambda \in K, \forall\, x \in X$;

iii) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \| \quad \forall x, y \in X$ *(Desigualdade Triangular)*

Ao par $(X, \|\cdot\|)$ *chamamos de espaço normado.*

Definição 5. *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado. Dizemos que uma sequência* $(x_m)_{n=1}^{\infty}$ *em X converge para* $x \in X$ *se:*

$$\lim_{n\to\infty} \| x_m - x \| = 0$$

ou seja, para cada $\epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; n \geqslant n_0 \Rightarrow \| x_m - x \| < \epsilon$.
Assim, dizemos que uma sequência $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ *em X é de Cauchy se para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$m, l \geqslant n_0 \Rightarrow \| x_m - x_l \| < \epsilon$$

Definição 6. *Um espaço normado X é dito espaço de Banach se toda sequência de Cauchy converge em X.*

Definição 7. *Um conjunto P é parcialmente ordenado quando existe uma relação de ordem* $\leqslant$ *tal que:*

i) $x \leqslant x \quad \forall \quad x \in P$

ii) $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant x \Rightarrow x = y$

iii) $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$

Se para todo $x, y \in P$ tivermos $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ então P é totalmente ordenado.

Lema 2. ***(Zorn):*** *Seja P um conjunto parcialmente ordenado não-vazio. Se todo subconjunto totalmente ordenado τ de P tem cota superior, então P tem um elemento maximal.*

Para consultar essa demonstração ver [14].

Definição 8. *Cota Superior: Seja $\tau \subset P$. Um elemento $x \in P$ é cota superior para τ se $y \leqslant x, \quad \forall y \in \tau$. Se $\tau \subset P$. Um elemento x$\in \tau$ é maximal se $x \leqslant y, y \in \tau \Rightarrow x = y$.*

Teorema 1. ***(Hahn-Banach - forma analítica):*** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : E \to R$ uma aplicação tal que:*

i)

$$p(\lambda x) = \lambda \, p(x) \quad \forall x \in E \quad e \quad \forall \quad \lambda > 0$$

ii)

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$$

Se G é um subespaço vetorial de E e $\varphi : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $| \varphi(x) | \leqslant p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ que estende φ a E tal que $| \varphi\tilde{(x)} | \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$

Para consultar demonstração do Teorema 1) ver [1].

Teorema 2. ***(Lax-Milgram)****: Seja H um espaço de Hilbert e uma forma bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que:*
$|B[u, v]| \leqslant k_1 \parallel u \parallel_H \parallel v \parallel_H \quad \forall \, u, v \in H$ *(B é limitada)*
$B[u, u] \geqslant k_2 \parallel u \parallel_H^2 \; \forall \, u \in H$ *(B é definida positivamente)*
Seja $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado de H.
Então existe um único elemento $u \in H$ tal que: $B[u, v] = \langle f, v \rangle$ para todo $v \in H$.

Ademais,

$$\parallel u \parallel_H \leqslant \frac{1}{K_2} \parallel f \parallel_{H^*} = \frac{1}{k_2} \sup_{v \in H} |\langle f, v \rangle|, \quad \parallel v \parallel = 1$$

Para ver a demonstração do Teorema de Lax-Milgram consultar [10].

Teorema 3. ***(da Representação de Riez)****: Seja H um espaço de Hilbert e seja* $\varphi \in H^*$ *um funcional linear contínuo. Então existe um único elemento* $y \in H$ *tal que:*

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall\, x \in H$$

Ademais, a aplicação $\varphi \longrightarrow y$ *é uma isometria.*

Ver demonstração em [11].

1.3 Resultados de Convergência e Compacidade

Definição 9. *Dizemos que um conjunto Y do espaço topológico X é pré-compacto se seu fecho for compacto.*

Teorema 4. ***(Mazur)****: Seja X um espaço de Banach e* $M \subseteq X$ *é pré-compacto. Então conv(M) é pré-compacto.*

Ver prova deste teorema em [12].

Teorema 5. ***(Teorema de Riesz-Fréchet)****: Seja H um espaço de Hilbert e seja* $\varphi \in H'$*. Então existe um único* $y_0 \in H$ *tal que:*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \ \ \forall\, x \in H.$$

Neste caso, $\| \varphi \| = \| \varphi_0 \|$.

Consultar demonstração em [1].

Lema 3. ***(Fatou)****: Para qualquer sequência de funções* Λ*-mensuráveis* $f_n : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ *temos:*

i) $\int (\liminf f_n) \leqslant \liminf \int (f_n)$

ii) *Se* $f_n \to f$ *q.t.p, então* $\int (f) \leqslant \liminf \int (f_n)$

Consultar prova do lema acima em [8].

Observação 1.3.1. *Vale lembrar que dadas sequências* $a_n \leqslant a'_n \in \mathbb{R} \cup [-\infty, +\infty]$ *então é verdadeira a desigualdade* $\liminf a_n \leqslant \liminf a'_n$.

Teorema 6. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em*** L_p***)****: Seja* (f_n) *uma sequência em* L_p *tal que* f_n *converge q.t.p para uma função mensurável f. Caso exista* $g \in L_p$ *tal que* $g(x) \geqslant |f_n(x)| \ \forall\, x \in X$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$*, então existe* $f \in L_p$ *e* $f_n \to f$ *em* L_p.

Observação 1.3.2. *Quando* $g \geqslant| f_n |$ *dizemos que g domina* f_n.

Teorema 7. ***(Convergência Monótona)****: Seja* $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma sequência de funções que satisfaz:*

i) $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots$ *q.t.p em* Ω

ii) $\sup \int_n f_n < \infty$.

Então, $f_n(x)$ *converge q.t.p em* Ω *para um limite finito, a função* f_n *e f são integráveis e* $\int(f_n) \to \int(f)$.

Para consultar as demonstrações dos teoremas 5, 6 e 7 ver [8]. Abaixo, seguem definições e alguns resultados de compacidade.

Definição 10. *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação* $A : X \longrightarrow Y$ *é compacta se* $A(K)$ *é pré-compacta em Y sempre que* $K \subseteq X$ *é limitado. Isto é, se as imagens de conjuntos limitados for pré-compacta.*

Definição 11. *Seja* $A : M \subseteq X \longrightarrow Y$*, A é um operador compacto se:*

a) A é contínua;

b) $\overline{A(B)}$ *é compacto em Y para todo subconjunto limitado* $B \subseteq M$.

Proposição 1. *(Aproximação de operadores compactos por operadores de dimensão finita): Seja* $M \subset X$ *um subconjunto limitado e* $A : \overline{M} \subset X \longrightarrow Y$*. Então, são equivalentes:*

i) *A é um operador compacto;*

ii) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existe um operador compacto* $A_n : M \longrightarrow Y$ *tal que* $A_n(\overline{M}) \subset Y_n$ *com* $\dim Y_n < \infty$ *e* A_n *converge uniformemente para A em M.*

Ver demonstração em [11].

1.4 Desigualdades

Lema 4. ***Desigualdade de Young:***
Sejam $a, b \geqslant 0$*;* $\epsilon > 0$ *e* $p, q > 1$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, então:*

$$a.b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

e a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$,

$$a.b \leqslant \varepsilon a^p + \varepsilon^{\frac{-2}{p}} b^q$$

Lema 5. ***Desigualdade de Holder para integrais:***
Sejam $p, q \geqslant 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in \mathcal{L}_2(C, T, \mu)$ *e* $g \in \mathcal{L}_q(C, T, \mu)$, *então:*

$$f.g \in \mathcal{L}(C, T, \mu) \quad e \quad \int_X \mid f.g \mid d\mu \leqslant \left(\int_X \mid f \mid^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X \mid g \mid^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lema 6. ***Desigualdade de Minkowshi para integrais:***

Sejam $f, g \in \mathcal{L}_p(C, T, \mu)$ *onde* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *então,* $f + g \in \mathcal{L}(C, T, \mu)$, *com*

$$\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p$$

Lema 7. ***Desigualdade de Cauchy-Schwarz:***

Seja X um espaço vetorial com produto interno $(\cdot, \cdot)$ *e norma* $\| \cdot \|$. *Então, para todo* $u, v \in X$ *tem-se:*

$$|(u, v)| \leqslant \| u \| \, \| v \|$$

As demonstrações dos Lemas 4,5,6 e 7 podem ser encontradas em [10],[4],[13] e [1].

Lema 8. ***Desigualdade de Grönwall:***

Seja $u : [t_0, T] \to [0, \infty)$ *uma função contínua, não negativa, definida no intervalo* $[t_0, T]$ *com* $T > t_0$, *suponhamos que existam duas constantes* $c, d \geqslant 0$ *tais que satisfaçam:*

$$u(t) \leqslant c + d \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \tag{1.1}$$

para todo $t \in [t_0, T]$ *e então,*

$$u(t) \leqslant c e^{d(t - t_0)} \tag{1.2}$$

Observação: *No caso em que c=0, 1.2) implica que u é identicamente nula.*

Ver prova em [10].

Lema 9. ***(Desigualdade da Interpolação entre espaços*** $L^p(U)$***):*** *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ *tal que:*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1 - \theta}{q}$$

onde $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. *Se* $u \in L^p(U) \cap L^q(U)$, *então* $u \in L^r(U)$ *para todo* $p \leqslant r \leqslant q$ *e*

$$\| u \|_{L^r(U)} \leqslant \| u \|^{\theta}_{L^p(U)} \, \| u \|^{1-\theta}_{L^q(U)}$$

Para consultar a prova do lema 9 ver [5].

Capítulo 2

Espaços de Sobolev

Neste capítulo estudaremos o espaço de Sobolev que aqui será denotado por $W^{k,p}(U)$. Estes espaços são fundamentais para o estudo da existência e unicidade de soluções das equações diferenciais parciais com condições de contorno. O espaço de Sobolev é um espaço de Banach e é destacado por Brezis como uma extensão dos espaços L^p. Inicialmente será abordado o conceito de derivadas fracas, pois este espaço pode ser representado como as classes de funções que tem derivadas fracas. Finalizaremos este capítulo demonstrando um de seus principais teoremas o Teorema de Rellich - Kondrachov.

2.1 Derivadas Fracas

Uma das principais finalidades de se definir derivadas fracas consiste nas restrições de suas regularidades que são menores do que as da derivada usual e no fato de que qualquer função, se localmente integrável, torna-se viável de ser derivada inúmeras vezes, agindo como as funções de classe C^∞. Aqui estamos considerando $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}$ é uma função com suporte compacto em U. Introduzimos então algumas notações:

- $C(U) = \{\phi : \phi$ é contínua em U$\}$;
- $C^k(U) = \{\phi \in C(U) : \phi$ é k vezes contínua e diferenciável$\}$;
- $C_0(U) = \{\phi \in C(U) :$ *supp* ϕ é um subconjunto compacto de U$\}$;
- $C^\infty(U) = \left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U) = \text{funções suaves}\right\}$
- $C_0^\infty(U) = C^\infty(U) \cap C_0(U)$

A função $\phi \in C_0^\infty(U)$ denominaremos de função teste.

Definição 12. ***(Função localmente integrável):*** *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e seja* $1 \leqslant p < +\infty$. *Se* $u : U \to \mathbb{C}$ *for uma função mensurável e para qualquer* $K \subset U$ *compacto,*

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty,$$

diremos que $u \in L^p_{loc}(U)$.

Definição 13. *Seja* $u \in L^1_{loc}(U)$ *e* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ *é um multi-índice. Dizemos que existe a derivada*

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u$$

da função u, se existe uma função $v \in L^1_{loc}(U)$, *tal que:*

$$\int_U u D^\alpha \phi \ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \ \phi \ dx \tag{2.1}$$

Em outras palavras, se temos **u** e se existir uma função **v** que satisfaça 2.1) para todo ϕ, dizemos que $D^\alpha u = v$, onde v é $D^\alpha = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$ derivada parcial fraca de u de ordem $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

Lema 10. *Caso exista, a derivada fraca, de qualquer ordem* (α^n) *de uma função localmente integrável* $u \in L^1_{loc}(U)$, *esta é definida de forma única a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Assumimos que $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ e mais, são derivadas fracas de u. Assim,

$$\int_U u D^\alpha \phi \ dx = \underbrace{(-1)^{|\alpha|} \int_U v \ \phi \ dx}_{\text{I}} = \underbrace{(-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v} \ \phi \ dx}_{\text{II}} \ \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(U) \tag{2.2}$$

Fazendo I) - II) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_U u D^\alpha \phi \ dx &= (-1)^{|\alpha|} \left[\int_U v \ \phi \ dx - \int_U \tilde{v} \ \phi \ dx \right] = 0 & (2.3) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left[\int_U (v - \tilde{v}) \ \phi \ dx \right] = 0 & (2.4) \\ &= \int_U (v - \tilde{v}) \ \phi \ dx = 0 \ \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(U), & (2.5) \end{aligned}$$

com $v - \tilde{v} = 0$ q.t.p em U. $\square$

Lema 11. ***(Linearidade):*** *Se* $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(U)$ *e existem derivadas fracas de modo que* $v_1 = D^\alpha u_1,\ v_2 = D^\alpha u_2 \in L^1_{loc}(U)$ *então:*

$$D^\alpha(c_1u_1 + c_2u_2) \ \ e \ \ D^\alpha(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1D^\alpha u_1 + c_2D^\alpha u_2$$

Demonstração. Sabemos que:

$$\int_U uD^\alpha\phi \ dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U v \ \phi \ dx.$$

Assim, façamos:

$$\begin{aligned}
\int_U (c_1u_1 + c_2u_2)D^\alpha\phi \ dx &= c_1\int_U u_1D^\alpha\phi \ dx + c_2\int_U u_2D^\alpha\phi \ dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}c_1\int_U v_1\phi \ dx + (-1)^{|\alpha|}c_2\int_U v_2\phi \ dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\left[c_1\int_U v_1\phi \ dx + c_2\int_U v_2\phi \ dx\right] \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int_U (c_1v_1 + c_2v_2)\phi \ dx \\
&= D^\alpha(c_1v_1 + c_2v_2)
\end{aligned}$$

□

Lema 12. ***(Fundamental do Cálculo de Variações)*** *Se* $f \in L^1_{loc}(U)$ *satisfaz*

$$\int_U f\phi dx = 0$$

para cada $\phi \in C_0^\infty(U)$ *então* $f = 0$ *quase sempre em U.*

Ver prova do lema 12 em [7].

Exemplo 2.1.1. *Sejam* $n = 1$, $U = (0, 2)$, $u : U \to \mathbb{R}$ *e,*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se \ \ 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & se \ \ 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

Definimos:

$$v(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & se \ \ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Neste exemplo ***u*** *é fracamente derivável.*

Temos que $u, v \in L^1_{loc}(0, 2)$*. Assim, precisamos mostrar conforme Definição 12 que:*

$$\int_0^2 u\phi'(x) \ dx = -\int_0^2 v \ \phi(x) \ dx$$

Assim,

$$\int_0^2 u\phi'(x)\ dx = \int_0^1 x\phi'(x)\ dx + \int_1^2 \phi'(x)\ dx \tag{2.6}$$

Integrando por partes o lado direito de (2.6) e pelo Lema 12 obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 u\phi'(x)\ dx &= x\phi(x)\ |_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \phi(x)\ dx + \phi(x)\ |_{x=1}^{x=2} \\
&= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)\ dx + (\underbrace{\phi(2)}_{=0} - \phi(1)) \\
&= -\int_0^1 \phi(x)\ dx \\
&= -\int_0^2 v\ \phi(x)\ dx
\end{aligned}$$

como queríamos.

Exemplo 2.1.2. *Sejam* $n = 1$, $U = (0, 2)$ *e,*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se\ \ 0 < x \leqslant 1 \\ 2, & se\ \ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Neste exemplo mostraremos que não existe uma função $v \in L^1_{loc}(U)$ *que satisfaz:*

$$\int_0^2 u\phi'(x)\ dx = -\int_0^2 v\ \phi(x)\ dx \quad \textit{para todo } \phi \in C_0^\infty(0, 2) \tag{2.7}$$

Isto é, $D^\alpha u$ *não existe no sentido fraco.*

Para mostrar isso, suponhamos que (2.7) seja verdadeiro para algum v *e para todo* $\phi \in C_0^\infty(0, 2)$ *e então,*

$$-\int_0^2 v\ \phi(x)\ dx = \int_0^2 u\phi'(x)\ dx = \int_0^1 x\phi'(x)\ dx + 2\int_1^2 \phi'(x)\ dx \tag{2.8}$$

Integrando por partes obtemos:

$$\begin{aligned}
-\int_0^2 v\ \phi(x)\ dx &= x\phi(x)\ |_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \phi(x)\ dx + 2\phi(x)\ |_{x=0}^{x=1} \\
&= \phi(1) + 2(\underbrace{\phi(2)}_{=0} - \phi(1)) - \int_0^1 \phi(x)\ dx \\
&= -\phi(1) - \int_0^1 \phi(x)\ dx
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Continuando, tome uma sequência $(\phi_m)_{m=1}^\infty$ *de tal forma que* $\forall\ m \in \mathbb{N}$ *valem:*

i) $0 \leqslant \phi_m \leqslant 1$;

ii) $\phi_m(1) = 1$;

iii)$\phi_m(x) \to 0 \ \ \forall \, x \neq 1$;

iv) supp $(\phi_m) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

Substituindo agora ϕ *por* (ϕ_m) *em (2.9) obtemos:*

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v \, \phi_m \, dx &= -\phi_m(1) - \int_0^1 \phi_m(x) \, dx \\ &= -1 - \int_0^1 \phi_m(x) \, dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ou ainda,

$$1 = \int_0^2 v \, \phi_m \, dx - \int_0^1 \phi_m(x) \, dx$$

Tomando o limite na igualdade acima e fazendo $m \to \infty$ *obtemos o seguinte:*

$$\begin{aligned} \underbrace{1 = \lim_{m \to \infty} \phi_m(1)}_{\text{Por ii)}} &= \lim_{m \to \infty} \left[\int_0^2 v \, \phi_m \, dx - \int_0^1 \phi_m(x) \, dx \right] \\ &= \lim_{m \to \infty} \left[\int_{\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right)} v \, \phi_m \, dx - \int_0^1 \phi_m(x) \, dx \right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Veja que:

a))$\phi_m(x) \to 0$; $\phi_m \subset C_0^\infty(0, 2)$;

b) $v \, \phi_m(x) \longrightarrow 0$ *q.t.p em* $(\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$, *isto porque* $\phi_m(x)$ *se anula fora do supp* $\phi_m(x)$;

c) $|v \, \phi_m(x)| \leqslant |v|$ *q.t.p em* $(\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$;

d) Como $v \in L^1_{loc}(0, 2)$ *segue que* $|v| \in L^1_{loc}(\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$.

Por a),b),c) e d) podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e assim obter:

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right)} v\phi_m = 0 \tag{2.12}$$

Utilizamos do mesmo argumento para concluir que $\lim\limits_{m \to \infty} \int \phi_m = 0$. *Para tanto, observe que:*

e) $\phi_m(x) \longrightarrow 0$ *q.t.p;*

f) $|\phi_m(x)| \leqslant 1$ *q.t.p.*

E portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que:

$$\lim_{m\to\infty}\int \phi_m = 0 \qquad \forall\, x \neq 1 \tag{2.13}$$

Agora, temos:

$$1 = \underbrace{\lim_{m\to\infty}\int_{(\frac{1}{5},\frac{9}{5})} \nu\ \phi_m\ dx}_{=0} - \underbrace{\lim_{m\to\infty}\int \phi_m(x)\ dx}_{=0} = 0, \tag{2.14}$$

uma contradição.

Obs 1. *A construção do exemplo 2.1.2 foi baseada em [6], página 71.*

2.2 Definição de Espaços de Sobolev

Definição 14. *Fixe* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*. Seja* k *um número inteiro não-negativo,* $u \in L^p$ *e existe a derivada no sentido fraco* $D^\alpha(u)$ *para cada multi-índice* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ *com* $|\alpha| \leqslant k$*,* $D^\alpha(u) \in L^p(U)$*. Dizemos então, que* $u \in W^{k,p}(U)$ *.*
Ao espaço $W^{k,p}(U)$ *que consiste em todas as funções localmente integráveis denominaremos de* ***Espaço de Sobolev*** *sobre* U *.*

$$W^{k,p}\,(U) = \left\{u \in W^k(U); D^\alpha(u) \in L^p(U) \quad \forall \quad |\alpha| \leqslant k\right\}$$

O espaço $W^{k,p}\,(U)$ está munido na seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_U |D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{, se } 1 \leqslant p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha u\|_{L_\infty}\ , & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

Obs 2. *No caso em que* $p = 2$ *denotaremos esses espaços por* $H^k(U)$ *e escrevemos:*

$$H^k(U) = W^{k,2}(U); \quad k = 0, 1, \cdots$$

O espaço $H^k(U)$ *é munido por um produto interno, definido por:*

$$\langle u, v\rangle_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(U)} \tag{2.15}$$

$H^k(U)$ *é um espaço de Hilbert. A norma correspondente ao produto interno definido em (2.15) é:*

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_U |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Definição 15. *a) Considere* $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ *com* $u \in W^{k,p}(U)$*. Dizemos que:*

$$u_m \to u \textit{ em } W^{k,p}(U),$$

se,

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$$

b) Ao escrever,

$$u_m \to u \textit{ em } W^{k,p}_{loc}(U),$$

estamos dizendo que:

$$u_m \to u \textit{ em } W^{k,p}(V), \textit{ para cada } V \subset\subset U$$

Obs 3. *U, V são subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}^n$*. Escrevemos* $V \subset\subset U$ *se,* $V \subset \bar{V} \subset U$*.*

Agora, como já definimos o espaço $W^{k,p}(U)$ enunciaremos nosso próximo teorema que trata sobre propriedades importantes de derivadas fracas.

Teorema 8. ***(Propriedades de Derivadas Fracas)****: Sejam* $u, v \in W^{k,p}(U)$ *com* $|\alpha| \leqslant K$*. Então:*

i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ *e* $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u \ \forall\ \alpha, \beta$ *com* $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$*;*

ii) *Se V é um subconjunto aberto de U, então* $u \in W^{k,p}(V)$*;*

iii) *Se* $\zeta \in C_0^\infty(U)$*, então* $\zeta \in W^{k,p}(U)$ *e mais,*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta(\alpha-\beta)!} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$$

A demonstração do Teorema 8 pode ser vista em [10].

Definição 16. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Denotemos o espaço* $W_0^{k,p}(U)$ *como o fecho de* $C_0^\infty(U)$ *em* $W^{k,p}(U)$ *na norma* $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$*. Simbolicamente,*

$$W_0^{k,p}(U) := \overline{C_0^\infty(U)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}$$

Portanto, $u \in W_0^{k,p}(U)$ *se e somente se, existem funções* $u_m \in C_0^\infty(U)$ *tal que* $u_m \to u$ *em* $W^{k,p}(U)$*.*

Obs 4. *A caracterização do espaço de Sobolev* $W_0^{1,p}(U)$ *é fortemente delineada no Teorema do Traço, entretanto em nosso trabalho não será destacado tal teorema. Este pode ser facilmente encontrado em [5].*

Obs 5. *Denotaremos nesta seção p' como sendo o expoente conjungado de p.*

Teorema 9. *O espaço* $W^{k,p}$ *com a norma* $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Antes de provarmos a completude do espaço $W^{k,p}(U)$, mostraremos que $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$ é uma norma em $W^{k,p}(U)$. De fato sejam $u, v \in W^{k,p}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então devem ser satisfeitas as condições já citadas na Definição 4, estas são:

a) $\|u\|_{W^{k,p}(U)} \geqslant 0$ e $\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \quad \text{q.t.p};$

b) $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}$

c) Desigualdade do triângulo:

$\|u + v\|_{W^{k,p}(U)} \leqslant \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)} \ \forall\, u, v \in W^{k,p}(U)$

a)

$\Rightarrow$) Como $\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$ temos que $\|u\|_{L^p(U)} = 0$ e portanto $u = 0$ *q.t.p* em U.

$\Leftarrow$) $u = 0$ *q.t.p* em U implica que:

$$\int_U D^\alpha u \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^\alpha \phi dx = 0$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(U)$ e pelo Lema 12 segue que $D^\alpha u = 0$ *q.t.p* em U e para todo $|\alpha| \leqslant k$.
Assim como em a), claramente b) decorre da definição $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$.
Resta mostrar que para $1 \leqslant p < \infty$ a desigualdade triangular é válida.
Assumimos $u, v \in W^{k,p}(U)$. Então, se $1 \leqslant p < \infty$, pela desigualdade triangular em $L^p(U)$ e usando o resultado do Lema 11 de que D^α é linear, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_{W^{k,p}(U)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Minkowski obtemos:

$$\|u + v\|_{W^{k,p}(U)} \leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.16}$$

$$= \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int |D^\alpha v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.17}$$

$$= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)} \tag{2.18}$$

No caso em que $p = \infty$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,\infty}(U)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^\infty(U)} \\
&\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^\infty(U)}\right) \\
&= \|u\|_{W^{k,\infty}(U)} + \|v\|_{W^{k,\infty}(U)}
\end{aligned}$$

Logo, como a), b) e c) são satisfeitas, concluímos a prova de que $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$ é uma norma em $W^{k,p}(U)$. Agora, podemos mostrar que $W^{k,p}(U)$ é completo. Para tanto, suponhamos $1 \leqslant p < \infty$ e tomamos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(U)$. Logo,para dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que:

$$\| u_n - u_m \|_{W^{k,p}(U)} < \epsilon \qquad m, n > M$$

Fixe α tal que $|\alpha| \leqslant k$. Então, para cada α, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(U), |\alpha| \leqslant k$.

Assim, para todo $|\alpha| \leqslant k$ temos:

$$\| D^\alpha u_n - D^\alpha u_m \|_{L^p(U)} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \| D^\alpha u_n - D^\alpha u_m \|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

onde $m, n > M$. Portanto, segue que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em L^p. Sabemos, que o espaço L^p é completo, logo existe $u_\alpha \in L^p$ tal que:

$$D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha \quad \text{em } L^p(U) \quad \text{para cada } |\alpha| \leqslant k$$

Em particular, quando $u := u_{(0,0,\cdots,0)}$ obtemos $u_\alpha = u$ e $u_n \to u$ em $L^p(U)$. Basta então, mostrarmos que $u \in W^{k,p}(U)$.

Para $\phi \in C_0^\infty(U)$ fixo temos que $D^\alpha \phi \in L^{p'}(U)$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Daí, integrando por partes e usando a Desigualdade de Holder temos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_U (u_n D^\alpha \phi) - u D^\alpha \phi \right| &\leqslant \int_U |u_n - u|\, |D^\alpha \phi| \\
&\leqslant \| u_n - u \|_{L^p(U)} \| \, \| D^\alpha \phi \|_{L^{p'}(U)}
\end{aligned}$$

E portanto,

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = \lim_{n\to\infty} \int_U u_n D^\alpha \phi dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_n \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi dx$$

Segue, que $u \in W^{k,p}(U)$ desde que $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ em $L^p(U)$ para todo $|\alpha| \leqslant k$, como queríamos. $\square$

Teorema 10. *Seja* $u \in L^p$ *com* $1 < p < \infty$. *São equivalentes:*

a) $u \in W^{k,p}(U)$;

b) *Existe uma constante C tal que:*

$$\left|\int_U uD^{\alpha}\phi dx\right| \leqslant C \parallel \phi \parallel_{L^{p'}(U)} \qquad (\forall\ \phi \in C_0^{\infty}(U), \forall\ |\alpha| \leqslant k)$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $a) \to b)$

Fixemos α de modo que $|\alpha| \leqslant k$. Como $u \in W^{k,p}(U)$, logo existe uma função u' em $L^p(U)$ que satisfaz:

$$\int_U uD^{\alpha}\phi\ dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U u'\phi\ dx \qquad (\forall\ \phi \in C_0^{\infty}(U))$$

De onde,

$$\begin{aligned}
\left|\int_U uD^{\alpha}\phi\ dx\right| &= \left|\int_U u'\phi\ dx\right| \\
&\leqslant \left(\int_U |u'|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_U |\phi|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \parallel u' \parallel_{L^p(U)} \parallel \phi \parallel_{L^{p'}(U)}
\end{aligned}$$

Chamando de $C = \parallel u' \parallel_{L^p(U)}$ obtemos o resultado.

Nos resta ainda, mostrar que $b) \to a)$. Para tanto, definimos o seguinte operador:

$$A(\phi) := \phi \longrightarrow \int_U uD^{\alpha}\phi\ dx$$

A é um operador linear e contínuo, A é contínuo em relação a norma de $L^{p'}(U)$.

De fato, para dado $\epsilon > 0$, tomemos $\dfrac{\epsilon}{C} > 0$, então:

$$\begin{aligned}
|A(\phi) - A(\psi)| &= \left|\int_U u\phi' - \int_U u\psi'\right| \\
&= \left|\int_U u(\phi - \psi)'\right| \\
&\leqslant C \parallel \phi - \psi \parallel_{p'} < \epsilon
\end{aligned}$$

sempre que $\parallel \phi - \psi \parallel < \delta$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach podemos estendê-lo a um funcional linear limitado sobre $L^{p'}(U)$ e pelo Teorema da Representação de Riez, existe $v \in L^p$ tal que:

$$\int_U v\phi\ dx = A(\phi) = \int_U uD^{\alpha}\phi dx$$

E portanto, $u \in W^{k,p}(U)$.

□

2.3 Aproximação por funções suaves

Nem sempre os espaços de Sobolev possuem funções comportadas, mas conseguimos entretanto, obter uma função regular que se aproxime do que queremos. Para estudarmos algumas propriedades dos Espaços de Sobolev, é necessário desenvolver alguns procedimentos para aproximar uma função do espaço de Sobolev por funções suaves.

Definição 17. *Dado* $\epsilon > 0$ *definimos* $\eta_\epsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $\eta_\epsilon(x) := \dfrac{1}{\epsilon^\eta}\eta\left(\dfrac{|x|}{\epsilon}\right)$, *onde* η_ϵ *satisfaz:*

a) $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

b) $\int_{\mathbb{R}^n}^{\epsilon} \eta_\epsilon(x)\ dx = 1$;

c) *supp* $\eta_\epsilon \subset B(0,\epsilon)$

Agora suponha que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua e para* $\epsilon > 0$ *lembremos que:*

$$U_\epsilon := \{x \in U / \operatorname{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$$

Defina por $f^\epsilon := (\eta_\epsilon * f)$ *a convulação de* η_ϵ *por f. Isto é,*

$$f^\epsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y)\ f(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y)\ dy$$

onde $y \in B_{x,\epsilon}$ *e* $(x-y) \in U$ *sempre que* $x \in U_\epsilon$.

Aqui, fixemos um número inteiro positivo k e $1 \leqslant p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ denota um conjunto aberto arbitrário.

Teorema 11. *Assuma* $u \in W^{k,p}(U)$ *para algum* $1 \leqslant p < \infty$ *e defina* $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$ *em* U_ϵ. *Então:*

i) $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$ *para cada* $\epsilon > 0$, *e*

ii) $u^\epsilon \longrightarrow u$ *em* $W^{k,p}_{loc}(U)$, *quando* $\epsilon \to 0^+$.

Demonstração. Afirmamos que se $|\alpha| \leqslant k$, então $D^\alpha u^\epsilon = \eta_\epsilon * D^\alpha u$.
De fato, para $x \in U_\epsilon$, temos:

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\epsilon(x) &= D^\alpha \int_U \eta_\epsilon(x-y)\ u(y)dy \\ &= \int_U D^\alpha_x \eta_\epsilon(x-y)\ u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_U D^\alpha_y \eta_\epsilon(x-y)\ u(y)dy \end{aligned}$$

Fixando $x \in U_\epsilon$ a função $\phi(y) := \eta_\epsilon(x-y) \in C_0^\infty$ e usando a Regra da Cadeia obtemos:

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\epsilon(x) &= (-1)^{|\alpha|}\int_U D_y^\alpha \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}\,(-1)^{|\alpha|}\int_U \eta_\epsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy \\ &= (\eta_\epsilon * D^\alpha u)(x) \end{aligned}$$

Agora, escolhemos um conjunto compacto V tal que $V \subset\subset U$.

Temos que $D^\alpha u^\epsilon \longrightarrow D^\alpha u$ em $L^p_{loc}(U)$. Veja que para cada $|\alpha| \leqslant k$ como $\epsilon \to 0$ segue:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \| u^\epsilon - u \|^p_{W^{k,p}(V)} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{|\alpha|\leqslant k} \| D^\alpha u^\epsilon - D^\alpha u \|^p_{L^p(V)} = 0$$

Assim, concluímos que $u^\epsilon \longrightarrow u$ em $W^{k,p}_{loc}(U)$, quando $\epsilon \to 0^+$, como queríamos.

□

Podemos ainda, encontrar funções suaves que se aproximam de $W^{k,p}(U)$ e não somente em $W^{k,p}_{loc}(U)$. Adiante, apresentaremos o Teorema Global por funções suaves e o provamos usando partição de unidade. No que segue, definimos primeiramente partição de unidade como sendo:

Proposição 2. ***(Partição da Unidade)***: *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto tal que:*

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i \quad \textit{com } U_i \textit{ abertos}$$

Então, existem funções $\zeta_i \in C^\infty$*, definidas sobre U tais que:*

a) *supp* $\zeta_i \subset U_i$*;*

b) $\sum_{i\in I} \zeta_i = 1$*;*

c) *para cada* $\zeta_i \in U$ *existe um conjunto aberto V que contém* ζ_i *tal que todos, exceto para um número finito de* ζ_i *são 0 em V;*

d) $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$

De posse desta proposição podemos então mostrar que as funções de $W^{k,p}(U)$ podem ser aproximadas por funções suaves de classe C^∞ em U. No caso em que se queira consultar a demonstração da proposição acima ver [10].

Teorema 12. ***(Aproximação global por funções suaves)***: *Suponhamos* ***U*** *limitado e* $u \in W^{k,p}(U)$ *para algum* $1 \leqslant p < \infty$*. Então, existem funções* u_m *com* $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ *tal que:*

$$u_m \longrightarrow u \qquad \textit{em} \qquad W^{k,p}(U)$$

Demonstração. Para demonstrarmos tal teorema, basta verificar que se $u \in W^{k,p}(U)$ e $\delta > 0$, então existe $v \in C^{\infty}(U)$ tal que:

$$\| v - u \|_{W^{k,p}(U)} \leqslant \delta.$$

De fato, seja $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ onde $U_i = \left\{ x \in U / \mathrm{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{i} \right\}$ $(i = 1, 2, \cdots)$.
Note que $U_i \subset U_{i+1}$. É fácil observar ainda que quando i cresce, U_i vai se aproximando de U.

Escrevemos:

$$V_i := U_{i+3} - \overline{U_{i-1}}$$

Agora, escolhemos um conjunto aberto tal que $V_0 \subset\subset U$ para que $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$. Seja $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos abertos $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$. Em outras palavras, estamos supondo o seguinte:

i) $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$, $\psi_i \in C_0^{\infty}(V_i)$;

ii) $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i = 1$ em U;

iii) *supp* $\psi_i \subset (V_i)$

Seja $u \in W^{k,p}(U)$ uma função qualquer. Pela propriedade de derivadas fracas segue que $\psi_i u \in W^{k,p}(U)$. Fixemos agora $\delta > 0$ e usando o fato que $\psi_i u$ tem suporte compacto em U, segue pelo Teorema 11 item ii) que existe um $\epsilon_i > 0$ tão pequeno quanto se queira tal que:

$$u^i = \eta_{\epsilon_i} * (\psi_i u)$$

satisfazendo

$$\| u^i - \psi_i u \|_{W^{k,p}(W_i)} \leqslant \frac{\delta}{2^{i+1}} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\textit{supp}\, u^i \subset W_i \qquad \text{onde} \quad W_i := U_{i+4} - \overline{U}_{i-1} \supset V_i \;\; (i = 1, 2, \cdots)$$

Denotemos

$$v := \sum_{i=0}^{\infty} u^i$$

Como ψ_i é uma partição da unidade, $V \subset\subset U$ é um conjunto aberto qualquer, compacto, segue que para cada aberto $V \subset\subset U$ há no máximo finitos termos não-nulos na soma de funções $u^i \in C^{\infty}(V)$. Lembrando que escolhemos V um compacto arbitrário, segue portanto que $v \in C^\infty(U)$. Ademais, $u = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i u$ e temos para cada $V \subset\subset U$

$$
\begin{aligned}
\| v - u \|_{W^{k,p}(V)} &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} u^i - \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i u \right\|_{W^{k,p}(U)} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \left\| u^i - \psi_i u \right\|_{W^{k,p}(W_i)} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \delta
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

Tomamos o supremo dos conjuntos abertos $V \subset\subset U$ e usamos o teorema da sucessão monótona para concluir a prova. □

Abaixo apresentamos o Teorema da Extensão, cujo objetivo é estender funções do espaço de Sobolev $u \in W^{1,p}(U)$ para o espaço de Sobolev $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, de forma que u "preserve"as derivadas fracas de ∂U.

Teorema 13. ***(Extensão)****: Seja* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Assumimos* $U \subset \mathbb{R}^n$ *limitado e* ∂U *de classe* C^1*. Se V é um conjunto limitado onde* $U \subset\subset V$ *então existe um operador linear limitado* $E : W^{1,p}(U) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *de modo que para cada* $u \in W^{1,p}(U)$ *são satisfeitas:*

i) *Eu=u q.t.p em U;*

ii) *Eu tem suporte dentro de V;*

iii) $\| Eu \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| u \|_{W^{1,p}(U)}$ *onde a contante C depende apenas de p,U e V.*

Assim, dizemos que Eu é uma extensão de u a $\mathbb{R}^n$*. Ao operador E denominamos de operador de prolongamento.*

A prova deste teorema pode facilmente ser encontrada em [4].

2.4 Desigualdade de Sobolev

Ao estudarmos os espaços de Sobolev, talvez seja comum surgir o seguinte questionamento: se $u \in W^{1,p}(U)$, poderia este mesmo u pertencer a um outro espaço? Afirmamos que u pode sim pertencer a outro espaço e isto depende apenas de p. Através da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev mostraremos que isso é possível. Aqui assumimos $1 \leqslant p < n$. Nosso intuito é estudar se é correto estabelecer uma estimativa da forma

$$\| u \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| Du \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.20}$$

para certas constantes $C > 0$, $1 \leqslant q < \infty$ e todas as funções $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

As constantes C e q não devem depender de u.

Nossa motivação é mostrarmos inicialmente que se qualquer desigualdade da forma (2.20) é válida, então o número q não pode ser arbitrário.

De fato, se consideramos $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ com $\| Du \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \neq 0$ e definirmos para $\lambda > 0$ a função:

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x) \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^n$$

Aplicando nossa desigualdade (2.20) em u_λ temos:

$$\| u_\lambda \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| Du_\lambda \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.21}$$

Agora,

$$\| u_\lambda \|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy$$

E,

$$\begin{aligned}
\| Du_\lambda(x) \|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda(x)\ \lambda|^p dx \\
&= \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p dx \\
&= \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy
\end{aligned}$$

Supondo que a estimativa (2.21) é válida para alguma constante $C > 0$, segue:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} &\leqslant C \left(\frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \| u \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leqslant C\, \lambda^{\frac{p-n}{p}} \| Du \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

ou,

$$\| u \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \| Du \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Se entretanto, $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} > 0$ esta desigualdade é uma contradição quando $\lambda \to 0^+$.

Analogamente, $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} < 0$, fazendo $\lambda \to \infty$, a desigualdade também nos dá uma contradição.

Assim, podemos ter apenas $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} = 0$ de onde segue que,

$$\frac{p-n}{p} = -\frac{n}{q} \Rightarrow p^* = q = \frac{np}{n-p}$$

como queríamos.

Definição 18. *Se $1 \leqslant p < n$, o conjugado Sobolev de p é:*

$$p^* := \frac{np}{n-p}$$

Note que:

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{\dfrac{np}{n-p}} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p.$$

Isto nos mostra que a estimativa (2.20) só pode ser verdadeira para $q = p^*$.

Teorema 14. ***(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg - Sobolev)****: Assumimos $1 \leqslant p < n$. Então, existe uma constante C, dependendo somente de p e n tal que:*

$$\| u \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| Du \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Aqui p* é o mesmo da definição 18.

Seja $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ e suponhamos inicialmente p=1, $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Temos que u tem suporte compacto, então para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ temos:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\, dy_i$$

Segue que,

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)|\, dy_i$$

com $i = (1, \cdots, n)$. Agora, elevamos ao expoente $\dfrac{1}{n-1}$ e multiplicamos n vezes. Daí obtemos:

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integramos com respeito a x_1. Notemos que o primeiro termo do produto não depende da primeira variável. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \quad &\leqslant \quad \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Resulta da desigualdade de Holder Generalizada:

$$\int \prod |f_i| \leqslant \prod \parallel f_i \parallel_{p_i}, \sum \frac{1}{p_i} \leqslant 1.$$

Aqui tomamos,

$$f_i := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \text{ e } p_i := n-1 \; \forall \, i$$

Novamente integramos, agora com respeito a x_2

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \, dx_2 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \, dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_2 \, dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \, dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_2 \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_2 \, dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \\
&\quad \times \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Continuamos o processo, agora com respeito a $x_3, \cdots, x_n$ e obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} \, dx &\leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx_1, \cdots, dy_i, \cdots, dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| \, dx \right)^{\frac{n}{n-1}} \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Na sequência, consideramos a hipótese que $1 < p < n$. Aplicamos (2.22) em $|u|^{\gamma}$ com $\gamma > 1$. Mais adiante, escolheremos γ. Agora, note que:

$$D\left(|u|^{\gamma}\right) = \begin{cases} \gamma \, |u|^{\gamma-1} \, Du, & \text{se } u \geqslant 0 \\ -\gamma \, |u|^{\gamma-1} \, Du, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (2.23)$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} D\left(|u|^{\gamma} dx\right) \leqslant \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx$$

Usando Holder, segue:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p-1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Precisamos agora escolher γ de modo que:

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1} \Rightarrow \gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > p > 1.$$

Desse modo,

$$\left(\int |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}-\frac{p-1}{p}} \leqslant \gamma \left(\int |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.24}$$

Note que:

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{p(n-1)}{n-p}\frac{n}{n-1} = \frac{np(n-1)}{(n-1)(n-p)} = \frac{np}{n-p} = p^* \text{ e} \tag{2.25}$$

$$\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{p(n-1)-n(p-1)}{np} = \frac{pn-p-np+n}{np} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*} \tag{2.26}$$

Substituindo (2.25) e (2.26) em (2.24) concluímos que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant \frac{p(n-1)}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Teorema 15. ***(Estimativas para*** $W^{1,p}, 1 \leqslant p < n$***):*** *Seja U um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* ∂U *é de classe* C^1*. Assumimos,* $1 \leqslant p < n$ *e* $u \in W^{1,p}(U)$*. Então,* $u \in L^{p^*}(U)$ *com a estimativa:*

$$\| u \|_{L^{p^*}(U)} \leqslant C \| u \|_{W^{1,p}(U)}$$

sendo a constante C dependente de p, n e U.

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(U)$. Pelo Teorema 13 (Extensão) existe $Eu := \bar{u} \in W^{1,p}(U)$ com *supp* $\bar{u}$ compacto tal que $\bar{u}|_U = u$ e mais,

$$\| \bar{u} \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| u \|_{W^{1,p}(U)}$$

Como $\bar{u}$ tem suporte compacto, logo existe uma sequência $(u_m) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \longrightarrow \bar{u}$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 14 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) temos:

$$\| u_m - u_l \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| Du_m - Du_l \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

isso para todo $l, m \geqslant 1$.

Fazemos $m, l \longrightarrow \infty$ para concluir que u_m converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\| Du_m - Du_l \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$$

e portanto, $u_m \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ é de Cauchy. E daí, segue que:

$$u_m \longrightarrow \bar{u} \text{ em } L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

Note que existe um u tal que $u_m \longrightarrow u$ *q.t.p.*

Por outro lado, mostramos que $u_m \longrightarrow \bar{u}$ *q.t.p.* Logo, $u = \bar{u}$ *q.t.p.*

Ademais,

$$\| \bar{u} \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| D\bar{u} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.27}$$

Juntamos (2.27) ao Teorema 13 (Extensão) para obter:

$$\| u \|_{L^{p^*}(U)} \leqslant \| \bar{u} \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| D\bar{u} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| \bar{u} \|_{W^{1,p}(U)} \leqslant C \| u \|_{W^{1,p}(U)}$$

onde C depende apenas de p, n e U. Provando assim, que a desigualdade é válida para p^*.

Agora resta provar que vale para $1 \leqslant q < p^*$.

De fato, lembremos que $L^{p^*}(U) \hookrightarrow L^q(U)$, de onde segue que:

$$W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U) \hookrightarrow L^q(U)$$

□

2.5 Compacidade

Uma das propriedade fundamentais no que se refere as imersões de Sobolev é que estas são compactas em domínios de medida finita. O Teorema de Rellich-Kondrachov nos diz de forma geral que qualquer sequência uniformemente limitada em $W^{1,p}(U)$ tem uma subsequência que converge em $L^q(U)$.

Teorema 16. ***(Rellich - Kondrachov)****: Assuma* $U \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado e* ∂U *é de classe* C^1 *e* $1 \leqslant p < n$*. Então:*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

para todo $1 \leqslant q < p^* = \dfrac{np}{n-p}$.

Demonstração. Fixemos $1 \leqslant q < p^*$. Como U é um aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, segue do Teorema (Estimativas para $W^{1,p}, 1 \leqslant p < n$) que:

$$W^{1,p}(U) \subset L^q(U) \quad \text{com} \quad \| u \|_{L^q(U)} \leqslant C \| u \|_{W^{1,p}(U)}$$

Agora, seja $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em $W^{1,p}(U)$. Precisamos encontrar uma subsequência $(u_{m_j})_{j=1}^{\infty}$ que converge em $L^q(U)$.

Pelo Teorema 13 (Extensão), podemos sem perda de generalidade assumir que $U = \mathbb{R}^n$ e estender (u_m) para algum conjunto aberto, limitado $V \subset \mathbb{R}^n$, ou seja, $u_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ onde $\mathrm{supp}\, u_m \subset V_\epsilon$ para todo $1 \leqslant n < \infty$.

Aqui, $V_\epsilon = \{x \in V / \mathrm{dist}(x, \partial V) > \epsilon\}$.

Podemos assumir ainda que:

$$\sup_m \| u_m \|_{W^{1,p}(V)} < \infty$$

Para $\epsilon > 0$, consideremos $u_m^\epsilon := \eta_\epsilon * u_m$ $(m = 1, 2, ...)$ onde η_ϵ denota a molificação usual:

$$\begin{aligned} u_m^\epsilon &= \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) u_m(y) dy \\ &= \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(z) u_m(x-z) dz \end{aligned}$$

Substituindo $z = y\epsilon$, $dz = \epsilon^\eta dy$ tem-se:

$$u_m^\epsilon = \int_{B(0,1)} \epsilon^\eta \eta_\epsilon(y\epsilon) u_m(x - y\epsilon) dy$$

mas lembre que $\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^\eta}\eta\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)$ de onde obtemos:

$$\begin{aligned} u_m^\epsilon &= \int_{B(0,1)} \epsilon^\eta \frac{1}{\epsilon^\eta}\eta\left(\frac{|y\epsilon|}{\epsilon}\right) u_m(x - y\epsilon) dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) u_m(x - y\epsilon) dy \end{aligned}$$

Se u_m é suave, então:

$$u_m^\epsilon(x) - u_m(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y) u_m(x - y\epsilon) dy - u_m(x)$$

Note que $\int_{B(0,1)} \eta(y) dy = 1$ assim,

$$\begin{aligned} u_m^\epsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(u_m(x - y\epsilon) - u_m(x)\right) dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(u_m(x - ty\epsilon)\right) dt dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 -\epsilon D u_m(x - ty\epsilon) y dt dy \\ |u_m^\epsilon(x) - u_m(x)| &\leqslant \epsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 |\langle D u_m(x - \epsilon t y), y\rangle_{\mathbb{R}^n}| dt dy \\ &\leqslant \epsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \| D u_m(x - \epsilon t y) \|_{\mathbb{R}^n} dt dy \\ \int_V |u_m^\epsilon(x) - u_m(x)| dx &\leqslant \epsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \| D u_m(x - \epsilon t y) \|_{\mathbb{R}^n} dx dt dy \end{aligned}$$

Uma vez que o suporte da função estendida (u_m) está estritamente dentro de V, podemos descartar o pequeno deslocamento $\epsilon t y$ na integral $\int_V \| Du_m(x-\epsilon t y) \|_{\mathbb{R}^n} dx$ sem alterar a integral. De onde, segue:

$$\begin{aligned}\int_V |u_m^\epsilon(x) - u_m(x)| dx &\leqslant \epsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \| Du_m(x) \|_{\mathbb{R}^n} dx dt dy \\ &= \epsilon \int_V \| Du_m(x) \| dx\end{aligned}$$

Pela aproximação por funções suaves esta estimativa também é válida se $u_m \in W^{1,p}(V)$. Usando o fato que V é limitado e $(u_m)_{m=1}^\infty$ é limitada em $W^{1,p}(V)$ segue da desigualdade de Holder com $\nu = 1$ que:

$$\| u \|_{L^1(V)} = \int_V |u(x)| dx \leqslant |V| \left(\int_V |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Isto nos dá:

$$\begin{aligned}\| u_m^\epsilon(x) - u_m(x) \|_{L^1(V)} &\leqslant \epsilon \| Du_m \|_{L^1(V)} \\ &\leqslant \epsilon C \| Du_m \|_{L^p(V)} \\ &\leqslant \epsilon C \underbrace{\sup_m \| u_m \|_{W^{1,p}(V)}}_{<\infty}\end{aligned}$$

E portanto, $u_m^\epsilon \longrightarrow u_m$ em $L^1(V)$ uniformemente em m.

Para mostramos que é válido para $1 \leqslant q < p^*$ usamos a desigualdade da interpolação para normas L^p. Logo para $\theta \in (0,1)$ temos:

$$\| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^q(V)} \leqslant \| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^1(V)}^\theta \| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

onde $\dfrac{1}{q} = \theta + \dfrac{(1-\theta)}{p^*}$.

Como as sequências (u_m) e (u_m^ϵ) são limitadas em $W^{1,p}(U)$ e usando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, segue (u_m) e (u_m^ϵ) são limitadas em $L^{p^*}(V)$.Assim,

$$\| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^q(V)} \leqslant \| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^1(V)}^\theta \| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta} \leqslant C_1 \| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^1(V)}^\theta$$

De onde concluímos que $u_m^\epsilon \longrightarrow u_m$ em $L^q(V)$ uniformemente em m.

Afirmamos que para cada $\epsilon > 0$ fixo a sequência $(u_m^\epsilon)_{m=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua.

De fato, se $x \in \mathbb{R}^n$, então:

$$\begin{aligned}|u_m^\epsilon(x)| &\leqslant \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) \, |u_m(y)| \, dy \\ &\leqslant \| \eta_\epsilon \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \| u_m \|_{l^1(V)} \leqslant \frac{C_1}{\epsilon^\eta} < \infty\end{aligned}$$

onde C_1 não depende de m.

Analogamente,

$$|Du_m^\epsilon(x)| \leqslant \int_{B(x,\epsilon)} |D\eta_\epsilon(x-y)|\, |u_m(y)|dy \leqslant \| D\eta_\epsilon \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \| u_m \|_{L^1(V)} \leqslant \frac{C_1}{\epsilon^{\eta+1}} < \infty$$

De onde, segue que $(u_m^\epsilon)_{m=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua.

Fixemos agora $\delta > 0$. Precisamos mostrar que existe uma subsequência $(u_{m_j})_{j=1}^\infty$ tal que:

$$\limsup_{j,k\to\infty} \| u_{m_j} - u_{m_k} \|_{L^q(V)} \leqslant \delta$$

Para tanto, usaremos o fato da convergência uniforme em $L^q(V)$, isto é,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} u_m^\epsilon = u_m \quad \text{uniformemente em } L^q(V)$$

Daí, obtemos $\epsilon > 0$ pequeno tal que:

$$\| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^q(V)} < \frac{\delta}{2} \quad \text{para m=1,2,}\cdots \tag{2.28}$$

Como $(u_m^\epsilon)_{m=1}^\infty$ é equicontínua e limitada e usando o Teorema de Arzelá-Ascoli obtemos uma subsequência $(u_{m_j}^\epsilon)_{j=1}^\infty$ que converge uniformemente em V.

Em particular,

$$\limsup_{j,k\to\infty} \| u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k} \|_{L^q(V)} = 0 \tag{2.29}$$

De 2.28) e 2.29) segue:

$$\begin{aligned}
\| u_{m_j} - u_{m_k} \|_{L^q(V)} &= \| u_{m_j} - u_{m_j}^\epsilon + u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon + u_{m_k}^\epsilon - u_{m_k} \|_{L^q(V)} \\
&\leqslant \| u_{m_j} - u_{m_j}^\epsilon \|_{L^q(V)} + \| u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon \|_{L^q(V)} + \\
&\quad + \| u_{m_k}^\epsilon - u_{m_k} \|_{L^q(V)} \\
\limsup_{j,k\to\infty} \| u_{m_j} - u_{m_k} \|_{L^q(V)} &\leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta
\end{aligned}$$

Agora podemos usar uma sequência diagonal, para cada $\delta = 1, \cdots$ escolhemos $\delta_l = \dfrac{1}{l}$ e uma subsequência $(u_{m_{l,j}}^\epsilon)_{j=1}^\infty$ tal que:

$$\limsup_{j,k\to\infty} \| u_{m_{l,j}} - u_{m_{l,k}} \|_{L^p(V)} \leqslant \delta_l = \frac{1}{l}$$

E por fim, a sequência diagonal $(u_{m_l} = u_{m_{l,l}})_{l=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(V)$.

$\square$

Teorema 17. ***(Estimativas para*** $W_0^{1,p}; 1 \leqslant p < n$***):*** *Assumimos que U seja um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$*. Suponhamos* $u \in W_0^{1,p}(U)$ *para* $1 \leqslant p < n$*. Então, para todo* $q \in [1, p^*]$ *temos a estimativa:*

$$\| u \|_{L^q}(U) \leqslant C \| Du \|_{L^p(U)}$$

onde C depende apenas de p, q, n *e U e* Du *denota o vetor de derivadas parciais* $Du = (D_1 u, D_2 u, \ldots, D_n u)$

Demonstração. Temos que $u \in W_0^{1,p}(U)$, então existe uma subsequência em $C_c^\infty(U)$, seja $(u_m)_{m=1}^\infty$ esta subsequência, de modo que u_m converge para u em $W^{1,p}(U)$. Consideremos agora, $(\bar{u}_m) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de u_m, $\forall\, m \in \mathbb{N}$.
Quando $x \in U^c$ então $\bar{u}_m(x) = 0$.
Usando o Teorema da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev obtemos:

$$\| \bar{u}_m \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| D\bar{u}_m \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

De onde segue que,

$$\| u \|_{L^{p^*}(U)} \leqslant C \| Du \|_{L^p(U} \tag{2.30}$$

Por hipótese, temos que U é limitado, então para todo $q \in [1, p^*]$,

$$\| u \|_{L^q(U)} \leqslant C \| u \|_{L^{p^*}(U)} \tag{2.31}$$

Segue de (2.30) e (2.31) que:

$$\| u \|_{L^q(U)} \leqslant C \| u \|_{L^{p^*}(U)} \leqslant C \| Du \|_{L^p(U)}$$

como queríamos. □

Obs 6. *Vale ressaltar que* $\| Du \|_{L^p(U)}$ *é uma norma no espaço* $W_0^{1,p}(U)$ *e é equivalente a norma* $\| u \|_{W^{1,p}(U)}$ *sempre que U for limitado.*

Do Teorema 17 segue como consequência a Desigualdade de Poincaré (prova vide [10]).

Corolário 2.5.1. ***(Desigualdade de Poincaré):****Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e limitado, com* ∂U *de classe* C^1*. Assumimos* $1 \leqslant p < \infty$*. Então existe uma constante positiva* $C = C(n, p, U)$ *tal que:*

$$\| u \|_{L^p(U)} \leqslant C \| Du \|_{L^p(U)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(U)$$

Capítulo 3

Teoremas de Ponto Fixo

Neste capítulo abordaremos os Teoremas do Ponto Fixo de Banach, Teorema do Ponto Fixo de Schauder e Teorema do Ponto Fixo de Schaefer. No Teorema do Ponto Fixo de Banach a palavra-chave a considerar é contrações, já o Teoremas do Ponto Fixo de Schauder abrangem casos de compacidade e o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer em suas hipóteses nos indicam que não há necessidade do conjunto ser convexo.

3.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Antes de enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, precisamos definir alguns pontos.

Definição 19. ***(Espaço Métrico)***: *Seja X um conjunto não-vazio. A função* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma métrica em X se satisfizer:*

i) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ *para todo* $u, v \in X$*;*

ii) $d(u, v) > 0$ *para todo* $u, v \in X$ *com* $u \neq v$*;*

iii) $d(u, v) = d(v, u)$ *para todo* $u, v \in X$ *(Propriedade de Simetria)*

iv) $d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v)$ *para todo* $u, v, w \in X$ *(Desigualdade Triangular)*

A dupla (X,d) chamamos de espaço métrico.

Definição 20. ***(Ponto Fixo)***: *Um ponto fixo de uma aplicação* $A : X \to X$*, onde X é um conjunto não-vazio, é um elemento* $u \in X$ *tal que A(u)=u, isto é, u se mantém fixo por A.*

Definição 21. *Uma sequência* (u_n) *em um espaço métrico (X,d) é dita convergente em X, se existir* $u \in X$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$*, isto é,* $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0\ ; n \geqslant n_0\ \Rightarrow d(u_n, u) < \varepsilon$*.*

Teorema 18. *(Teorema do Ponto Fixo de Banach): Seja X=(X,d) um espaço métrico completo e não-vazio e assumimos que* $A : X \longrightarrow X$ *é uma contração, isto é,*

$$d(A(u), A(\tilde{u}) \leqslant \gamma d(u, \tilde{u}) \quad \textit{com} \quad u, \tilde{u} \in X \quad \textit{para alguma constante } \gamma < 1.$$

Então A tem um único ponto fixo, tal que $A(u) = u$*.*

Observação 3.1.1. *Note que uma contração é uma função uniformemente contínua e portanto contínua pelo fato de ser lipschitziana.*

Demonstração. Provaremos inicialmente que para qualquer u_0 fixado em X, a sucessão iterada $(u_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequência de Cauchy.
Considere para tanto, a sucessão iterada $(u_n)_{n\geqslant 1}$, definida por $u_n = Au_{n-1}$ com $n = 1, 2, \cdots$. Fazendo:

$$u_1 = A(u_0),\ u_2 = A(u_1) = A(A(u_0)) = A^2(u_0), \cdots, u_n = A^n(u_0),\ n = 1, 2, \cdots \quad (3.1)$$

Esta é uma sucessão de imagens de u_0 de repetidas aplicações de A. Observe ainda que:

$$d(u_1, u_2) = d(A(u_0), A(u_1)) \leqslant \gamma d(u_0, u_1) \quad (3.2)$$

$$d(u_2, u_3) = d(A(u_1), A(u_2)) \leqslant \gamma d(u_1, u_2) = \gamma\gamma d(u_0, u_1) \quad (3.3)$$

$$d(u_3, u_4) = d(A(u_2), A(u_3)) \leqslant \gamma d(u_2, u_3) = \gamma\gamma^2 d(u_0, u_1) \quad (3.4)$$

isto é,

$$d(u_n, u_{n+1}) \leqslant \gamma^n d(u_0, u_1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

A afirmação 3.5) pode ser provada usando o Princípio de Indução Finita sobre n. Para facilitar a escrita denotaremos m=n+p e assim, para $n, m \geqslant 1$,temos:

$$d(u_n, u_m) \leqslant d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + d(u_{m-1}, u_m) \quad (3.6)$$

Agora, usaremos (3.5) repetidas vezes, obtemos:

$$\begin{aligned} d(u_n, u_m) &\leqslant \gamma^n d(u_0, u_1) + \gamma^{n+1} d(u_0, u_1) + \cdots + \gamma^{m-1} d(u_0, u_1) && (3.7) \\ &= [\gamma^n + \gamma^{n+1} + \cdots + \gamma^{m-1}] d(u_0, u_1) && (3.8) \\ &= \gamma^n [1 + \gamma + \cdots + \gamma^{m-1-n}] d(u_0, u_1) && (3.9) \\ &= \gamma^n \frac{1}{1-\gamma} d(u_0, u_1) && (3.10) \end{aligned}$$

A passagem de (3.9) para (3.10) se justifica pelo fato de que $[1+\gamma+\cdots+\gamma^{m-1-n}]$ representa uma progressão geométrica de razão γ, cuja soma é expressa por $\frac{1}{1-\gamma}$.
Ademais, como $0 \leqslant \gamma < 1$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma^n = 0$ e portanto, de 3.10) segue que:

$$\lim_{n,m\to\infty} d(u_n, u_m) = 0 \tag{3.11}$$

isto é, $d(u_n, u_m) \leqslant \varepsilon$, $\forall\ n \geqslant n_o$, tomando $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, de onde concluímos que a sequência $(u_n)_{n\geqslant 1}$ é de Cauchy em X.
Falta provar ainda que u é ponto fixo de A e mais, é único.
Temos que X é completo, logo $(u_n)_{n\geqslant 1}$ é convergente e portanto converge para um ponto de X, digamos que converge para u, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.
Vamos mostrar que u é um ponto fixo de A. Com efeito pela desigualdade triangular, temos:

$$d(A(u), u) \leqslant d(A(u), u_n) + d(u_n, u) \tag{3.12}$$

mas sabemos que a sucessão iterada $(u_n)_{n\geqslant 1}$ foi definida por $u_n = Au_{n-1}$ com $n = 1, 2, \cdots$, então:

$$\begin{aligned} d(A(u), u) &\leqslant d(A(u), A(u_{n-1})) + d(u_n, u) \quad (3.13)\\ &\leqslant \gamma d(u, u_{n-1}) + d(u_n, u) \quad (3.14) \end{aligned}$$

Veja que os fatores do segundo membro de (3.14) tendem a 0, o que implica que A(u)=u, provando que o ponto fixo de A existe.
Agora para mostrar a unicidade do ponto fixo, faremos por absurdo. Desta forma, suponhamos que existe $\tilde{u} \in X$ outro ponto fixo de A com $u \neq \tilde{u}$.
Temos que $A(u) = u$ e $A(\tilde{u}) = \tilde{u}$ e como A é uma contração temos também que:

$$0 < d(u, \tilde{u}) = d(A(u), A(\tilde{u})) \leqslant \gamma d(u, \tilde{u}) \tag{3.15}$$

logo $\gamma \geqslant 1$. Absurdo, visto que $\gamma < 1$. $\square$

3.2 Teorema do Ponto Fixo de Schauder

Antes de demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder precisamos definir e enunciar alguns resultados importantes, necessários para a prova do Teorema.

Definição 22. *Seja X um espaço vetorial normado e seja W um subconjunto finito de X onde* $W = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Então, a envoltória convexa de W, aqui representaremos por conv(W), é definida por:*

$$conv(W) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1 \right\}$$

Definição 23. *Seja* $\epsilon > 0$ *fixo. Um subconjunto M de um espaço métrico X é uma* $\epsilon-\mathrm{net}$ *de X se:*

$$X \subseteq \bigcup_{x \in M} B(x; \epsilon)$$

Dizemos que um espaço métrico X é totalmente limitado se houver uma $\epsilon - \mathrm{net}$ *finita para todo* $\epsilon > 0$.

Proposição 3. *Um subconjunto A de um espaço de Banach X é relativamente compacto se e somente se, para cada* $\epsilon > 0$ *existe uma* ϵ*-net finita.*

Para consultar a demonstração da Proposição 3 consultar [15].

Teorema 19. ***(Ascoli-Arzelà)****: Seja X um espaço métrico compacto. Se* $A \subset C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ contínua}\}$, *com* $\| f \|_{C(X)} = \| f \|_{L^\infty(X)} := \sup_{x \in X} |f(x)|$. *Então:*
A é limitado e equicontínuo em C(X) se e só se A é relativamente compacto em C(X) onde:

$$A \text{ é limitado em } C(X) \Longleftrightarrow \sup\{|f(x)| : f \in A\} < \infty$$

$$A \text{ é equicontínuo em } C(X) \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \ \ \forall\ f \in A.$$

Consultar demonstração em [15].

Teorema 20. ***(Ponto Fixo de Brouwer)****: Suponha* $u : \overline{B(0;1)} \to \overline{B(0;1)}$ *contínua, onde* $\overline{B(0;1)}$ *denota a bola unitária fechada em* $\mathbb{R}^n$. *Então, u tem um ponto fixo, ou seja, existe um ponto* $x \in \overline{B(0;1)})$ *com* $u(x) = x$.

Não será feita a prova deste teorema pois não o abordamos em nossas aplicações. Entretanto, sua demonstração pode ser facilmente consultada em [12].

Corolário 3.2.1. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um homeomorfismo na bola unitária fechada* $\overline{B(0;1)}$ *e* $A : X \longrightarrow X$ *uma aplicação contínua. Então, A tem um ponto fixo.*

Demonstração. Para provarmos este corolário faremos uso do Teorema 20 para então afirmar que A possui ponto fixo. Para tanto, seja $u : \overline{B(0;1)} \longrightarrow X$ um homeomorfismo. Definimos agora $T : u^{-1} \circ A \circ u : \overline{B(0;1)} \longrightarrow \overline{B(0;1)}$.

Afirmamos que T é contínua. De fato, como u é um homeomorfismo e portanto é uma bijeção contínua, então u, u^{-1} são contínuas e mais A é contínua por hipótese. Note que T é uma composição de funções contínuas, logo T é contínua. O Teorema 20 nos assegura então que existe um $\overline{x}$ em $\overline{B(0;1)}$ tal que $T(\overline{x}) = \overline{x}$. Assim, $A(u(\overline{x}) = u(\overline{x})$, de onde obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (u^{-1} \circ A \circ u)(\overline{x}) \\
&= u^{-1} \circ (A(u(\overline{x}))) \\
&= u^{-1}(A(u(\overline{x}))) \\
u(\overline{x}) &= u(u^{-1}(A(u(\overline{x})))) = A(u(\overline{x}))
\end{aligned}$$

e portanto $u(\overline{x})$ é um ponto fixo de A. □

Lema 13. ***(Projeção de Schauder)****: Seja X um espaço vetorial normado e* $K \subset X$ *compacto, com a métrica* ***d*** *induzida pela norma* $\| \cdot \|$*. Dado* $\epsilon > 0$*, existe um subconjunto finito* $W \subseteq X$ *e uma aplicação* $P : K \longrightarrow$ *conv(W), tal que:*

$$d(P(x), x) < \epsilon \quad \forall\, x \in K$$

A esta aplicação denominamos de Projeção de Schauder.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, tomemos uma $\epsilon - \mathrm{net}$ finita para K compacto de forma a obter um conjunto $W = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Para $i = 1, 2, \ldots, n$ definimos funções $\phi_i : K \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \epsilon - d(x, x_i), & \text{se} \quad x \in B(x_i; \epsilon) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $0 < \epsilon - d(x, x_i)$, segue que $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) > 0 \quad \forall \quad x \in K$, implicando que ϕ_i é estritamente positiva na bola $B(x_i; \epsilon)$.

A projeção de Schauder é a aplicação $P : K \to$ *conv(W)*, definida por:

$$P(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x) x_i}{\phi(x)}, \text{onde} \quad \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)$$

Como cada ϕ_i é contínua, segue que P é contínua.

Para cada $x \in K$ temos:

$$\begin{aligned}
d(P(x),x) &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)x_i}{\phi(x)} - \frac{\phi(x)x}{\phi(x)} \right\| \\
&= \frac{1}{\phi(x)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)x_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)x \right\| \\
&= \frac{1}{\phi(x)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(x_i - x) \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{\phi(x)} \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) \parallel (x_i - x) \parallel \\
&< \frac{1}{\phi(x)} \phi(x) \cdot \epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

Note que se $\parallel (x_i - x) \parallel \geqslant \epsilon \Rightarrow \phi_i(x) = 0$. □

Definição 24. *Dizemos que uma aplicação não-linear* $A : X \longrightarrow X$ *é compacta se para cada sequência limitada* $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *em X, a sequência* $(A(x_k))_{k=1}^{\infty}$ *é pré-compacta, isto é, existe uma subsequência* $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ *tal que* $(A(x_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$ *converge em X.*

Teorema 21. ***(Teorema do Ponto Fixo de Schauder)****: Seja X um espaço de Banach, suponha* $M \subseteq X$ *não-vazio, convexo e fechado. Se* $A : M \to M$ *é contínua, então A tem um ponto fixo.*

Demonstração. Temos que A é compacto, pois $\overline{A(M)} \subset M$ é compacto, ademais temos por hipótese que A é contínua. Denotemos por $K = \overline{A(M)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja W_n uma $\frac{1}{n} - net$ finita para K.

Considere agora, a correspondente Projeção de Schauder $P_n : K \longrightarrow conv(W_n)$.

A convexidade de M implica que $conv(W_n) \subseteq K$.

Definimos o seguinte operador:

$$A_n : conv(W_n) \longrightarrow conv(W_n)$$

$$A_n(x) := P_n(A(x))_{|_{conv(W_n)}}.$$

Veja que A_n é contínua. Isto, se deve ao fato de que P_n e A são contínuas. Como $conv(W_n) \subseteq K$ e K é compacto, segue que $conv(W_n)$ é limitado.

Temos então que $conv(W_n)$ é um subconjunto limitado, fechado e convexo. Como $conv(W_n)$ é homeomorfa a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^{M_\epsilon}$ para algum $M_\epsilon \leqslant N_\epsilon$, segue do Corolário 3.2.1 que a aplicação contínua $A_n : conv(W_n) \longrightarrow conv(W_n)$ tem um ponto fixo.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos um desses pontos fixos e denotemos por x_n, ou seja, $A(x_n) = x_n$. Novamente usando o fato que K é compacto, temos que toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$ possui uma subsequência convergente $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$. Esta sequência $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ converge para algum ponto $x \in K$, quando $n_i \to \infty$.

Pelo Lema 13 (Projeção de Schauder), obtemos:

$$d(A(x), x_{n_i}) \leqslant d(A(x), A(x_{n_i})) + d(A(x_{n_i}), A_{n_i}(x_{n_i})) \longrightarrow 0 \text{ quando } n_i \to \infty$$

A é contínua e $d(A(x_{n_i}), A_{n_i}(x_{n_i})) = d(A(x_{n_i}), P_{n_i}A(x_{n_i})) < \dfrac{1}{x_{n_i}}$.

Consequentemente, $x_{n_i} \to x$ e $x_{n_i} \to A(x)$,logo pela Unicidade do Limite, devemos ter $A(x) = x$. □

3.3 Teorema do Ponto Fixo de Schaefer

Agora, apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer que é uma versão do Teorema do ponto fixo de Schauder, o que muda mais precisamente é que aqui não temos por hipótese a convexidade do conjunto. Este teorema é usado para provar a existência de soluções para equações diferenciais parciais não-lineares.

Teorema 3.3.1. ***(Teorema do Ponto Fixo de Schaefer)****:Seja* $(X, \| \cdot \|)$ *um espaço de Banach e* $A : X \longrightarrow X$ *uma aplicação contínua e compacta. Se o conjunto:*

$$S = \{x \in X : x = \lambda A(x) \textit{ para algum } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

é limitado, então A tem um ponto fixo.

Demonstração. Por hipótese, temos que o conjunto S é limitado, logo existe algum $M > 0$ tal que $\| x \| < M$, se $x = \lambda A(x)$ para algum $\lambda \in [0, 1]$.

Definimos agora, a aplicação $\tilde{A} : X \longrightarrow X$ da seguinte forma:

$$\tilde{A}(x) := \begin{cases} A(x), & \text{se } \quad \| A(x) \| \leqslant M \\ \dfrac{M}{\| A(x) \|} A(x), & \text{se } \| A(x) \| \geqslant M \end{cases}$$

Veja que $\tilde{A} : B(0; M) \longrightarrow B(0; M)$ é uma aplicação compacta, pois A é compacta. De fato, tomemos uma sequência limitada $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ em X, logo existe uma subsequência $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$

tal que $\| A(x_{k_j}) \| < M$ para todo j ou $\| A(x_{k_j}) \| > M$ para todo j. Observe que no caso em que $\| A(x_{k_j}) \| < M$, a sequência $(A(x_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$ tem uma subsequência convergente pois, $\tilde{A}(x_{k_j}) = A(x_{k_j})$ e mais A é uma aplicação compacta. Agora, consideremos o caso em que $\| A(x_{k_j}) \| > M$, temos que $(A(x_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, que aqui vamos denotar por $(A(x_l))_{l=1}^{\infty}$. Assim, $(\| A(x_l) \|)_{l=1}^{\infty}$ também converge, com $\| A(x_l) \| \geqslant M$ para todo l. Dessa forma, temos que:

$$\tilde{A}(x_l) = \frac{M}{\| A(x_l) \|} A(x_l) \tag{3.16}$$

Denotemos por $K = \overline{conv(\tilde{A}(B(0;M)))}$, onde $\tilde{A} : B(0;M) \longrightarrow B(0;M)$.

Observemos que K é convexo, isto se deve, pelo fato que K é o fecho de um conjunto convexo, K é também compacto. De fato, temos que $\tilde{A}$ é uma aplicação compacta, logo pela Definição 24, para cada sequência em $\tilde{A}(B(0;M))$ existe uma subsequência convergente em $\tilde{A}(B(0;M))$, isto é, $\tilde{A}(B(0;M))$ é pré-compacto e portanto $\overline{\tilde{A}(B(0;M))}$ é compacto, como a envoltória convexa de um conjunto compacto é um compacto, segue que K é compacto. Ademais, $K \subset X$ tal que $\tilde{A}|_K : K \longrightarrow K$.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, segue que $\tilde{A}$ tem um ponto fixo e digamos que este ponto fixo seja $x_0 \in K$. Se x_0 não é ponto fixo de A, então $\| A(x_0) \| > M$, caso contrário A e $\tilde{A}$ coincidem, isto é, x_0 é ponto fixo de A se $\| A(x_0) \| \leqslant M$.

Usamos agora a definição de $\tilde{A}$ e o fato de que x_0 é um ponto fixo e obtemos:

$$x_0 = \tilde{A}(x_0) = \lambda A(x_0) \quad \text{com} \quad \lambda = \frac{M}{\| A(x_0) \|},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \ \text{ e } x_0 \in S \tag{3.17}$$

Por outro lado:

$$\| x_0 \| = \left\| \frac{M}{\| A(x_0) \|} A(x_0) \right\| = M \tag{3.18}$$

Temos uma contradição, pois em nossa hipótese $\| x_0 \| < M$. Provando assim o teorema.

□

Capítulo 4

Aplicações dos Teoremas de Ponto Fixo para EDP

As aplicações discutidas nesta seção foram retiradas do Livro **Partial Differential Equations** de Lawrence C. Evans. A aplicação 01 pode ser encontrada na página 499, a aplicação 02 na página 507 e por fim a aplicação 03 página 505 do citado livro. As aplicações 02 e 03 também podem ser consultadas no artigo **Fixed Point Methods for Nonlinear PDEs** da autora Barbara Niethammer.

4.1 Aplicação 01: O problema da Equação de Difusão e Reação:

Nossa primeira aplicação consiste em um problema de valor inicial com fronteira, quase-linear, como segue abaixo:

$$\begin{cases} u_t - \Delta(u) = f(u) & \text{em} \quad U_T = U \times (0, T] \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{sobre} \quad U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^m), \mathbf{g} = (g^1, \ldots, g^m)$; $U \subset \mathbb{R}^n$ denota um aberto, limitado e com fronteira suave. O tempo $T > 0$ é fixo.

Aqui,o objetivo principal aqui é investigar a existência de solução para o sistema (4.1) usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach. No que segue, mostraremos inicialmente resultados fundamentais sobre equações parabólicas lineares para então retornar a este problema.

Definição 25. *(Equação Parabólica): Considere o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f(u) \quad \text{em} \quad U_T = U \times (0,T], \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial U \times [0,T] \\ u = g \quad \text{sobre} \quad U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{4.2}$$

Assumimos $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira suave, $T > 0$ é fixo, $f : U_T \to \mathbb{R}$ e $g : U \to \mathbb{R}$ são dadas,u=u(x,t) é desconhecida com $u : \overline{U}_T \to \mathbb{R}$. E ainda, L é o operador diferencial de segunda ordem, definido em sua forma usual não-divergente:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \tag{4.3}$$

para dados coeficientes $a^{ij}, b^i, c \ (i, j = \ldots, n)$.

Para tornar plausível a posterior definição de solução fraca, vamos supor temporariamente que $u = u(x,t)$ é de fato uma solução suave do problema (4.2). Para tanto, associe a u, a aplicação:

$$u : [0,T] \longrightarrow H_0^1(U)$$

$$[u(t)](x) := u(x,t) \quad (x \in U, 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{4.4}$$

Note que estamos considerando **u** não como uma função de **x** e **t** juntos, mas como uma aplicação de **t** para o espaço $H_0^1(\boldsymbol{U})$.Voltemos ao problema parabólico dado em (4.2) e analogamente definiremos:

$$f : [0,T] \longrightarrow L^2(U)$$

$$[f(t)](x) := f(x,t) \quad (x \in U, 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{4.5}$$

Agora, fixando $v \in H_0^1(U)$, multiplicamos a equação diferencial parcial $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ por essa função v e em seguida integrando por partes, resulta que:

$$(u', v) + B[u, v; t] = (f, v) \qquad \left(' = \frac{d}{dt} \right) \tag{4.6}$$

para cada $0 \leqslant t \leqslant T$, onde (,) é o produto interno em $L^2(U)$, B[u,v;t] é uma forma bilinear expressa por:

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\cdot, t)u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\cdot, t)u_{x_i} v + c(\cdot, t)uv \, dx \tag{4.7}$$

com $u, v \in H_0^1(U)$.

Observe ainda que,

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^{n} g^j x_j \text{ em } U_T, \tag{4.8}$$

onde $g^0 := f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu$ e $g^j := \sum_{i=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} (j = 1, \ldots, n)$.

Definição 26. *Denotemos por* $H^{-1}(U)$ *o espaço dual de* $H_0^1(U)$. *Em outras palavras,* $\boldsymbol{f}$ *pertence a* $H^{-1}(U)$ *desde que* $\boldsymbol{f}$ *seja um funcional linear limitado de* $H_0^1(U)$.

Notação: *Utilizaremos* $\langle , \rangle$ *para representar o dual de* $H^{-1}(U)$ *e* $H_0^1(U)$.

Definição 27. *Se* $f \in H^{-1}(U)$, *definimos a norma:*

$$\| f \|_{H^{-1}(U)} = \left\{ \sup \langle f, u \rangle \ \mid u \in H_0^1(U), \| u \|_{H_0^1(U)} \leqslant 1 \right\}$$

Teorema 22. *Caracterização de* H^{-1}:

1. *Assumimos* $f \in H^{-1}(U)$. *Então, existem funções* $f^0, f^1, \ldots, f^n$ *em* $L^2(U)$ *tal que:*

   i) $\langle f, v \rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx \quad (v \in H_0^1(U))$

2. *Além disso,*

   ii) $\| f \|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \mid f \text{ satisfaz (i) para } f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(U) \right\}$

Notação: *Podemos sempre escrever* $f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i x_i$ *desde que i) seja válido. Ver prova em [10] página 284.*

Como consequência de (4.8),das definições 26 e 27 e do Teorema 22, segue que u_t pertence ao Espaço de Sobolev $H^{-1}(U)$ com:

$$\| u_t \|_{H^{-1}(U)} \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n} \| g^j \|_{L^2(U)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C \left(\| u \|_{H_0^1(U)} + \| f \|_{L^2(U)} \right) \tag{4.9}$$

Tal estimativa sugere ser razoável pensarmos em uma solução fraca com $u' \in H^{-1}(U)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, assim podemos reescrever o primeiro termo de (4.6) como $\langle u', v \rangle$.

As considerações feitas até agora motivam as seguintes definições:

Definição 28. *O espaço* $L^p(0, T; X)$ *consiste de todas as funções mensuráveis* $u : [0, T] \longrightarrow X$ *com:*

i)

$$\| u \|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \| u(t) \|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para $1 \leqslant p < \infty$ *e,*

ii)

$$\| u \|_{L^\infty(0,T;X)} := \text{ess} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u(t) \| < \infty$$

.

Definição 29. *O espaço* $C([0,T];X)$ *consiste de todas as funções contínuas* $u:[0,T] \longrightarrow X$ *tal que:*

i) $\| u \|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u(t) \| < \infty.$

Definição 30. *Dizemos que uma função:*

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(U)), \text{ com } u' \in L^2(0,T;H^{-1}(U)),$$

é uma solução fraca do problema parabólico de valor inicial (4.2) se:

i) $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$ *para todo* $v \in H_0^1(U)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *e*

ii) $u(0) = g$.

Teorema 23. *Suponhamos que* $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

i) Então $u \in C([0,T];L^2(U))$ *(depois de uma possível redefinição em um conjunto de medida nula).*

ii) A aplicação $t \mapsto \| u(t) \|^2_{L^2(U)}$ *é absolutamente contínua, com*

$$\frac{d}{dt} \| u(t) \|^2_{L^2(U)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle \text{ q.t.p } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

iii) Além disso, temos a estimativa

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u(t) \|_{L^2(U)} = c(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))})$$

onde a constante c depende apenas de T.

Obs 7. *Ver prova em [10] página 287.*

Nestas condições, pelo Teorema 23, temos que $\mathbf{u} \in C([0,T];L^2(U))$ e assim $u(0) = g$ da definição 25 faz sentido.

Teorema 24. (***Existência de Solução Fraca***)*: Existe uma única solução fraca para o problema parabólico (4.2).*

Para mostrar que existe uma solução fraca para o problema da equação definida em (4.1), iremos admitir inicialmente que $\mathbf{g} \in H_0^1(U;\mathbb{R}^m)$ e supondo:

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \text{ Lipschitz contínua}$$

Temos para todo $z \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |f(z) + f(e_1) - f(e_1)| \\
&\leqslant |f(z) - f(e_1)| + |f(e_1)| \\
&\leqslant C_1 \parallel z - e_1 \parallel + |f(e_1)| \\
&\leqslant C_1 \parallel z \parallel + (C_1 + |f(e_1)|) \\
&\leqslant C(\parallel z \parallel + 1) \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

com a constante $C = (C_1 + |f(e_1)|)$.

Adaptando a terminologia 23, dizemos que uma função:

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(U; \mathbb{R}^m)), \text{ com } u' \in L^2(0, T; H^{-1}(U; \mathbb{R}^m)),$$

é uma solução fraca do problema de valor de contorno, quase-linear dado em 4.1) se:

$$\langle u', v \rangle + B[u, v] = (f(u), v) \text{ q.t.p, } 0 \leqslant t \leqslant T, \text{para todo } v \in H_0^1(U; \mathbb{R}^m) \text{ e} \qquad (4.11)$$

$$u(0) = g \qquad (4.12)$$

Notação: $\langle , \rangle$ e $(,)$ em (4.11) indicam respectivamente o dual de $H^{-1}(U; \mathbb{R}^m)$ e $H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$ e o produto interno em $L^2(U; \mathbb{R}^m)$.Denotamos ainda por B[,] a forma bilinear associada com $-\Delta$ em $H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$.

A norma em $H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$ é definida como:

$$\parallel u \parallel_{H_0^1(U;\mathbb{R}^m)} = \left(\int_U \parallel Du \parallel^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.13)$$

Recaímos novamente $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(U; \mathbb{R}^m))$, depois de uma redefinição de u em um conjunto de medida nula.

Teorema 25. ***(Existência)****: Existe uma única solução fraca de (4.1).*

Demonstração. Aplicaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach no espaço:

$$X = C([0, T]; L^2(U; \mathbb{R}^m)),$$

com a norma definida como segue:

$$\parallel v \parallel = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} (\parallel v(t) \parallel)_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}$$

Dada $\mathbf{u} \in X$ e seja $h(t) := f(u(t))$ com $0 \leqslant t \leqslant T$. Além disso, definimos o operador A como sendo:

$$A : X \longrightarrow X \ \ tal\ que\ A[u] = w$$

w é solução do problema a seguir:

$$\begin{cases} w_t - \Delta(w) = h & em \quad U_T \\ w = 0 & sobre \quad \partial U \times [0, T] \\ w = g & sobre \quad U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{4.14}$$

Considerando a hipótese de $\mathbf{f}$ ser lipschitziana contínua vista em (4.10), então $h \in L^2(0, T; L^2(U; \mathbb{R}^m))$.

Consequentemente, o Teorema 25 nos garante que (4.14) tem uma única solução fraca.

Note que,

$$w \in L^2(0, T; H_0^1(U; \mathbb{R}^m)), \text{ com } w' \in L^2(0, T; H^{-1}(U; \mathbb{R}^m)),$$

logo $w \in X$, ademais, w satisfaz:

$$\langle w', v\rangle + B[w, v] = (h, v) \text{ q.t.p, } 0 \leqslant t \leqslant T, para\ todo\ v \in H_0^1(U; \mathbb{R}^m)\ e \tag{4.15}$$

$$w(0) = g \tag{4.16}$$

Afirmamos agora que:

$$\begin{cases} \text{Se } T > 0 \text{ é suficientemente pequeno, então} \\ \text{A é uma contração.} \end{cases} \tag{4.17}$$

Para provarmos esta afirmação, escolhemos $u, \tilde{u} \in X$ e definimos $w = A[u]$ e $\tilde{w} = A[\tilde{u}]$, $h = f(u)$ e mais w satisfaz (4.15). Similar para $\tilde{w}$;$\tilde{h} = f(\tilde{u})$ e satisfazendo:

$$\langle \tilde{w}', v\rangle + B[\tilde{w}, v] = (f(\tilde{u}), v) \text{ q.t.p, } 0 \leqslant t \leqslant T, v \in H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$$

Veja que de $w - \tilde{w}$ obtemos:

$$\langle (w - \tilde{w})', v\rangle + B[w - \tilde{w}, v] = (f(u) - f(\tilde{u}), v) \text{ q.t.p, } 0 \leqslant t \leqslant T, v \in H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$$

Integrando por partes temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} &= \frac{d}{dt}\int_U (w-\tilde{w}, w-\tilde{w})_{\mathbb{R}^m}\,dx \\
&= \int_U 2\,(w_t-\tilde{w}_t, w-\tilde{w})_{\mathbb{R}^m}\,dx \\
&= 2\int_U \left(\Delta w + h - \Delta\tilde{w} - \tilde{h}, w-\tilde{w}\right)_{\mathbb{R}^m} dx \\
&= 2\int_U (\Delta w - \Delta\tilde{w}, w-\tilde{w})_{\mathbb{R}^m}\,dx + 2\int_U \left(h-\tilde{h}, w-\tilde{w}\right)_{\mathbb{R}^m} dx \\
&= 2\int_U \left[\sum_{i=1}^m \Delta(w^i-\tilde{w^i})(w^i-\tilde{w^i})\right] dx + 2\left(h-\tilde{h}, w-\tilde{w}\right) \\
&= -2\int_U \left[\sum_{i=1}^m \nabla(w^i-\tilde{w^i})\nabla(w^i-\tilde{w^i})\right] dx + 2\left(h-\tilde{h}, w-\tilde{w}\right) \\
&= -2\int_U \parallel \nabla(w-\tilde{w})\parallel^2\,dx + 2\left(h-\tilde{h}, w-\tilde{w}\right) \\
&= -2\parallel (w-\tilde{w})\parallel^2_{H^1_0(U;\mathbb{R}^m)} + 2\left(h-\tilde{h}, w-\tilde{w}\right)
\end{aligned}$$

Na passagem da 2^a para 3^a igualdade usamos o fato que $w_t - \Delta w = h$ e assim, $w_t = \Delta w + h$. Da 3^a para 4^a usamos o fato que o produto interno tem a propriedade de ser bilinear.

De onde segue,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} &+ 2\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{H^1_0(U;\mathbb{R}^m)} = 2\left(h-\tilde{h}, w-\tilde{w}\right) \\
&= 2\,(f(u)-f(\tilde{u}), w-\tilde{w}) \\
&\leqslant 2\left[\parallel w-\tilde{w}\parallel_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\parallel f(u)-f(\tilde{u})\parallel_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\right] \\
&\leqslant 2\left[\frac{\varepsilon}{2}\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + \frac{1}{2\varepsilon}\parallel f(u)-f(\tilde{u})\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\right] \\
&\leqslant \varepsilon\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + \frac{1}{\varepsilon}\parallel f(u)-f(\tilde{u})\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \\
&\leqslant K\varepsilon\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{H^1_0(U;\mathbb{R}^m)} + \frac{1}{\varepsilon}\parallel f(u)-f(\tilde{u})\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Justificando as passagens: para obter a 1^a desigualdade usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz, da 3^a para 4^a a desigualdade de Young ($a = \parallel f(u)-f(\tilde{u})\parallel$ e $b = \parallel w-\tilde{w}\parallel$) e por fim da 5^a para 6^a utilizamos a desigualdade de Poincaré.

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + (2-\varepsilon K)\parallel w-\tilde{w}\parallel^2_{H^1_0(U;\mathbb{R}^m)} &= \qquad (4.19) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\parallel f(u)-f(\tilde{u})\parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}
\end{aligned}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e tal que $\varepsilon k < 2$ de onde deduzimos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \parallel w - \tilde{w} \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} &\leqslant \frac{d}{dt} \parallel w - \tilde{w} \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + (2 - \varepsilon K) \parallel w - \tilde{w} \parallel^2_{H^1_0(U;\mathbb{R}^m)} \quad (2 - \varepsilon k) > 0 \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \parallel f(u) - f(\tilde{u}) \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \qquad \text{(resulta de 4.19)} \end{aligned}$$

Temos ainda que $\mathbf{f}$ é Lipschitz. Assim, fazendo $C = \frac{1}{\epsilon}$, resulta:

$$\frac{d}{dt} \parallel w - \tilde{w} \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \leqslant C \parallel u - \tilde{u} \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \tag{4.20}$$

Integrando de 0 até s e usando o fato que $w(0) - \tilde{w}(0) = g - g = 0$ segue:

$$\begin{aligned} \parallel w(s) - \tilde{w}(s) \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} &= \int_0^s \frac{d}{dt} \parallel w(t) - \tilde{w}(t) \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} dt \quad \text{(por 4.20 segue que)} \\ &\leqslant C \int_0^s \parallel u(t) - \tilde{u}(t) \parallel^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} dt \qquad (4.21) \\ &\leqslant CT \parallel u - \tilde{u} \parallel^2_{C(0;T;L^2(U;\mathbb{R}^m))} \qquad (4.22) \end{aligned}$$

para cada $0 \leqslant s \leqslant T$.

Temos que $w = A[u]$ e $\tilde{w} = A[\tilde{u}]$, assim, maximizando o lado esquerdo com relação à s, obtemos:

$$\begin{aligned} \parallel A[u] - A[\tilde{u}] \parallel^2_{C(0;T;L^2(U;\mathbb{R}^m))} &= \parallel w - \tilde{w} \parallel^2_{C(0;T;L^2(U;\mathbb{R}^m))} \\ &= \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} \parallel w(s) - \tilde{w}(s) \parallel^2 \\ &\leqslant CT \parallel u - \tilde{u} \parallel^2_{C(0;T;L^2(U;\mathbb{R}^m))} \end{aligned}$$

Segue portanto que,

$$\parallel A[u] - A[\tilde{u}] \parallel^2 \leqslant CT \parallel u - \tilde{u} \parallel^2$$
$$\parallel A[u] - A[\tilde{u}] \parallel \leqslant (CT)^{\frac{1}{2}} \parallel u - \tilde{u} \parallel \tag{4.23}$$

resultando assim, que A é uma contração se $T > 0$ é tão pequeno de forma que $(CT)^{\frac{1}{2}} = \gamma < 1$.

Dado qualquer $T > 0$, escolhemos $T_1 > 0$ tão pequeno tal que $(CT_1)^{\frac{1}{2}} < 1$.

Feito isto, agora podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para encontrar uma solução fraca $\mathbf{u}$ do problema (4.14), isto é, estamos encontrando uma solução fraca para (4.1) existente no intervalo de tempo $[0, T_1]$.

Como $u(t) \in H^1_0(U;\mathbb{R}^m)$ q.t.p; $0 \leqslant t \leqslant T_1$, podemos redefinir T_1 se necessário, assumindo $u(T_1) \in H^1_0(U;\mathbb{R}^m)$. Para estender a solução ao intervalo de tempo $[T_1, 2T_1]$ é necessário apenas usarmos o mesmo argumento. Continuando este processo, estaremos então, construindo uma solução fraca no intervalo de tempo $[0, T]$.

Nos resta agora, mostrar que o operador A tem um único ponto fixo. Para tanto, suponhamos que u e $\tilde{u}$ sejam duas soluções de (4.1). Sabendo que $w = u$ e $\tilde{w} = \tilde{u}$ e usando a desigualdade (4.21) temos:

$$\| u(s) - \tilde{u}(s) \|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \leqslant C \int_0^s \| u(t) - \tilde{u}(t) \|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \, dt \tag{4.24}$$

para $0 \leqslant s \leqslant T$.

Aplicando a desigualdade de Grönwall em (4.24) concluímos que $u - \tilde{u} = 0$ em [0,T], isto é, $u \equiv \tilde{u}$ e portanto a solução é única. □

4.2 Aplicação 02: Equação Elíptica Semi-Linear

Nosso objetivo no problema a seguir consiste em usar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para provar a existência de soluções de equações da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{4.25}$$

Para simplificar nos restringimos aqui a equações escalares e condições de contorno zero. Resultados similares podem ser obtidos para sistemas e para condições de contorno mais gerais. Antes entretanto de resolver o problema (4.25), precisamos compreender a teoria linear. Assim, encontre uma solução $u : U \to \mathbb{R}$ de:

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{em} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{4.26}$$

aqui, consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e suave, sob certas condições de $g : U \to \mathbb{R}$. Precisamos encontrar uma solução fraca, para tanto assumimos que $\mathbf{u}$ é uma solução (suave) de (4.26). Para $\phi \in C_0^\infty(U)$ obtemos:

$$\int_U g\phi dx = \int_U -\triangle u\phi dx = \int_U \nabla u \nabla \phi dx \tag{4.27}$$

Para garantirmos a existência de uma solução fraca basta que a forma integral mais fraca seja satisfeita. Neste sentido, dizemos que $\mathbf{u}$ é uma solução fraca de (4.26) se

$u \in H_0^1(U)$ e se:

$$\int_U \nabla u \nabla \phi dx = \int_U g\phi dx \quad \forall \ \phi \in C_0^\infty(U) \tag{4.28}$$

Teorema 26. *Para* $g \in L^2(U)$ $[g \in H^{-1}(U) = H_0^1(U)^*]$ *então existe um único* $u \in H_0^1(U)$ *que satisfaz (4.28). E*

$$\| \nabla u \|_{L^2(U)} \leqslant C \| g \|_{L^2(U)} \quad com \ C = C(U) \tag{4.29}$$

Demonstração. Iniciamos aplicando o Teorema de Lax-Milgram, com:
$H = H_0^1(U)$ e $\| u \|_{H_0^1(U)} := \| \nabla u \|_{L^2(U)}$, onde esta norma é definida devido a Desigualdade de Poincaré.

$$B[u, v] := \int_U \nabla u \nabla v dx$$

$$|B[u, v]| \leqslant \| \nabla u \|_{L^2(U)} \| \nabla v \|_{L^2(U)} = \| u \|_{H_0^1(U)} \| v \|_{H_0^1(U)}$$

$$B[u, u] = \| u \|^2_{H_0^1(U)}$$

$$\langle F, v \rangle := \int_U g v dx$$

$$|\langle F, v \rangle| \leqslant \| g \|_{L^2(U)} \| v \|_{L^2(U)}$$

Por Poincaré, temos:

$$|\langle F, v \rangle| \leqslant \| g \|_{L^2(U)} \| v \|_{L^2(U)} \leqslant C \| g \|_{L^2(U)} \| v \|_{H_0^1(U)}$$

Logo, existe um único $u \in H_0^1(U)$ que satisfaz (4.28) e (4.29) □

Da desigualdade de Poincaré também obtemos a seguinte:

$$\| u \|_{L^2(U)} \leqslant C \| g \|_{L^2(U)} \tag{4.30}$$

Voltando ao nosso problema, estamos à procura de uma solução fraca de:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em} \quad U \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases}$$

sob certas condições em $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema 27. *Seja* $f \in C(\mathbb{R})$ *e* $\| f \|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$. *Então (4.25) tem uma solução fraca* $u \in H_0^1(U)$. *Isto é,*

$$\int_U \nabla u \nabla \phi dx = \int_U f(u)\phi dx \quad \forall \ \phi \in C_0^\infty(U)$$

Demonstração. Para demonstrarmos este teorema usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder na aplicação:

$$A : L^2(U) \to L^2(U) \text{ definida por:}$$

$$u \to (-\Delta)^{-1}(f(u)) := A(f(u))$$

onde $u = (-\Delta)^{-1}g$ com $u \in H_0^1(U)$ sendo solução fraca de $-\Delta u = g$ em U, u=0 sobre ∂U.

Primeiramente precisamos mostrar que A está bem definido.

Se $u \in L^2(U)$, então $f(u) \in L^\infty(U)$ e usando o fato que U é limitado, segue que $f(u) \in L^2(U)$. Daí, segue $A[f(u)] \in H_0^1(U) \subset L^2(U)$.

Agora mostraremos que $A : \overline{B(0;R)} \subset L^2(U) \longrightarrow \overline{B(0;R)}$ se R é suficientemente grande.

Para provar isto tome $u \in L^2(U)$, então:

$$\begin{aligned} \| A[u] \|_{L^2(U)} &= \| A[f(u)] \|_{L^2(U)} \\ &\leqslant C \| f(u) \|_{L^2(U)} && \text{de (4.30)} \\ &\leqslant C \| f \|_\infty |U|^{\frac{1}{2}} := R && \text{para alguma constante C} \end{aligned}$$

Assim, $A : L^2(U) \longrightarrow \overline{B(0;R)}$. Em particular, $A : \overline{B(0;R)} \longrightarrow \overline{B(0;R)}$.

Nosso próximo passo é mostrar que $\overline{A(B(0;R))}$ é compacto.

Vimos que $A : L^2(U) \longrightarrow H_0^1(U)$. Temos ainda,

$$\begin{aligned} \| A[u] \|_{H_0^1(U)} &= \| A[f(u)] \|_{H_0^1(U)} \\ &\leqslant C \| f(u) \|_{L^2(U)} && \text{de (4.29)} \\ &\leqslant C \| f \|_\infty |U|^{\frac{1}{2}} := K && \text{para alguma constante C} \end{aligned}$$

E portanto A[u] é limitada em $H_0^1(U)$.

Temos $A : L^2(U) \longrightarrow \overline{B(0;K)} \subset H_0^1(U)$. Segue do Teorema de Rellich que A é compacto (a imersão de $H_0^1(U)$ em $L^2(U)$ está contida em algum compacto).

Para que A satisfaça as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Schauder, precisamos mostrar ainda que A é contínua.

De fato, seja (u_n) uma sequência em $L^2(U)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(U)$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que $u_{n_k} \longrightarrow u$ quando $k \to \infty$ q.t.p em U.

Desde que f é contínua, segue $f(u_{n_k}) \longrightarrow f(u)$ q.t.p em U. E mais,

$$|f(u_{n_k})| \leqslant \| f \|_\infty$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos $f(u_{n_k}) \longrightarrow f(u)$ em $L^p(U)$ para todo $p < \infty$.Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\| A[u_{n_k}] - A[u] \|_{L^2(U)} &= \| A[f(u_{n_k})] - A[f(u_n)] \|_{L^2(U)} \\
&= \| A[(f(u_{n_k})) - (f(u))] \|_{L^2(U)} \qquad \text{(A é linear)} \\
&\leqslant C \| (f(u_{n_k})) - (f(u)) \|_{L^2(U)} \qquad \text{(Por Poincaré)} \\
&\to 0 \qquad \text{quando} \qquad k \to \infty \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Da mesma maneira podemos fazer isso para qualquer subsequência e finalmente encontramos $A[u_n] \longrightarrow A[u]$ em $L^2(U)$. Então, A é uma aplicação contínua.
Agora, todas as hipóteses que precisávamos para aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder estão satisfeitas, $A : \overline{B(0;R)} \subset L^2(U) \longrightarrow \overline{B(0;R)}$ é um operador compacto, segue portanto do Teorema do Ponto Fixo de Schauder que existe $u \in \overline{B(0;R)} \subset L^2(U)$ tal que A[u]=u. E mais, como $A : \overline{B(0;R)} \subset L^2(U) \longrightarrow \overline{B(0;k)} \subset H^1_0(U)$ segue que u é uma solução fraca de (4.25). □

4.3 Aplicação 03: Equação Elíptica Quase-Linear

Antes de adentrar no problema da Equação Elíptica Quase-Linear, vamos brevemente abordar a teoria mais linear. Considere o problema a seguir:

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = g \quad \text{em} \quad U \\ \quad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{4.32}$$

com $\mu \in \mathbb{R}_+$.

Lema 14. *Para* $g \in L^2(U)$ *existe um único* $u \in H^1_0(U)$ *tal que u é a solução fraca do problema (4.32), isto é:*

$$\int_U \nabla u \nabla \phi dx + \int \mu u \phi dx = \int_U g \phi dx \;\; \forall \, \phi \in C^\infty_0(U)$$

Além disso,

$$\| u \|_{H^1_0(U)} \leqslant C \| g \|_{L^2(U)} \quad \textit{onde } C = C(U, \mu)$$

Demonstração. Para provar isto, usaremos Lax-Milgram com $H = H^1_0(U)$, defina

$$\| u \|_{H^1} = (\| u \|^2_{L^2} + \| \nabla u \|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}} \quad \text{e}$$

$$B[u,v] := \int_U \nabla u \nabla v + \mu u v dx$$

De onde, temos:

$$\begin{aligned} |B[u,v]| &\leqslant \| \nabla u \|_{L^2} \| \nabla v \|_{L^2} + \mu \| u \|_{L^2} \| v \|_{L^2} \\ &\leqslant \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1} (1+\mu) \end{aligned}$$

E,

$$B[u,u] \geqslant \min(1,\mu) \| u \|_{H^1}^2$$

Logo, existe um único $u \in H_0^1(U)$ tal que $B[u,v] = \langle F, v \rangle$ para todo $v \in H_0^1(U)$,

$$\langle F, v \rangle := \int_U g v dx \Longrightarrow \| F \|_{H^*} \leqslant \| g \|_{L^2(U)}$$

□

Lema 15. ***(Regularidade de Soluções)****: A solução u do lema anterior satisfaz* $u \in H^2(U)$ *e,*

$$\| u \|_{H^2(U)} \leqslant C \| g \|_{L^2(U)} \quad \textit{com} \quad C = C(U, \mu)$$

A prova do Lema 15 pode ser vista em [10]. Agora, considere a equação diferencial parcial quase-linear abaixo:

$$\begin{cases} -\Delta u + g(\nabla u) + \mu u = 0 & \text{em} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{4.33}$$

onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto, limitado com fronteira suave, $\mu \in \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave, contínua, lipschitziana e satisfaz a condição de crescimento:

$$|g(t)| \leqslant M(|t| + 1)$$

para alguma constante M e para todo $t \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 28. *Seja* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto, limitado, suave e* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, com fronteira suave e Lipschitz contínua. Se* $\mu > 0$ *é suficientemente grande, então existe uma solução fraca* $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ *de (4.33), em outras palavras,*

$$\int_U \nabla u \nabla \phi + g(\nabla u)\phi + \mu u \phi dx = 0 \quad \forall \, \phi \in C_0^\infty(U) \tag{4.34}$$

Demonstração. Dados $u \in H^1_0(U)$ e $f(u) := -g(\nabla u)$. Por hipótese, temos que g é Lipschitz contínua, logo existe $M > 0$ tal que:

$$|g(t)| \leqslant M(1+|t|) \quad \text{para alguma constante M e} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^n \tag{4.35}$$

Ademais, $f(u) \in L^2(U)$. Do Lema 14, temos a existência de um único $w \in H^1_0(U)$ que é solução fraca do problema linear:

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f(u) & em \quad U \\ \qquad w = 0 & sobre \quad \partial U \end{cases} \tag{4.36}$$

E pelo Lema 15 temos $w \in H^2(U)$ com a estimativa:

$$\| w \|_{H^2(U)} \leqslant K \| f \|_{L^2(U)} \tag{4.37}$$

para alguma constante $K > 0$ sendo K independente de f. Definimos agora,

$$A : H^1_0(U) \longrightarrow H^1_0(U) \text{ e escrevemos } A[u] = w$$

Precisamos mostrar que A está bem definido.
Seja $u \in H^1_0(U)$ então $g(\nabla u) \in L^2(U)$, pois:

$$|g(\nabla u)|^2 \leqslant M^2(1+|\nabla u|)^2 \quad \text{e} \quad |U| < \infty.$$

Do Lema 14, temos:

$$\begin{aligned} \| A[u] \|_{H^2(U)} &= \| w \|_{H^2(U)} \\ &\leqslant K \| f \|_{L^2(U)} && \text{(Por 4.38)} \\ &\leqslant K \| -g(\nabla u) \|_{L^2(U)} && (\text{onde } f = -g(\nabla u)) \\ &\leqslant KM\,(1+ \| \nabla u \|_{L^2(U)}) && \text{(Por 4.36)} \\ &\leqslant C\,(1+ \| \nabla u \|_{L^2(U)}) && \text{C=KM} \\ &\leqslant C\,(1+ \| u \|_{H^1_0(U)}) \end{aligned} \tag{4.38}$$

Para obter a desigualdade (4.38) basta lembrarmos que $\| \nabla u \|_{L^2(U)} = \| u \|_{H^1_0(U)}$.
Precisamos mostrar que $A : H^1_0(U) \longrightarrow H^1_0(U)$ é contínua. De fato, tome $(u_n) \longrightarrow u$ em $H^1_0(U)$ e façamos $A[u_n] := w_n$.

Nossa condição de crescimento nos dá que u_n é limitada por uma constante $L > 0$, isto é, $\| u_n \| \leqslant L$ e portanto de (4.38) obtemos:

$$\begin{aligned} \| A[u_n] \|_{H^2(U)} &= \| w_n \|_{H^2(U)} \\ &\leqslant C\,(1+ \| u_n \|_{H_0^1(U)}) \\ &\leqslant C(1+L) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Daí resulta que $\sup_n \| w_n \|_{H^2(U)} < \infty$.

Logo, existe uma subsequência (w_{n_k}) e uma função $w \in H_0^1(U)$ tal que $w_{n_k} \longrightarrow w$ em $H^2(U)$. Pelo Teorema de Rellich segue que (w_{n_k}) converge fortemente em $H_0^1(U)$.

Note por uma subsequência (u_{n_k}) temos $\nabla u_{n_k} \longrightarrow \nabla u$ q.t.p e portanto $g(\nabla u_{n_k}) \longrightarrow g(\nabla u)$ q.t.p. Segue do Teorema da Convergência Dominada Generalizada e da condição de crescimento satisfeita por g que:

$$g(\nabla u_{n_k}) \longrightarrow g(\nabla u) \text{ em } L^2(U)$$

Dessa forma, podemos argumentar para qualquer subsequência e assim obter:

$$g(\nabla u_n) \longrightarrow g(\nabla u) \text{ em } L^2(U)$$

Passando o limite na equação apresentada no Lema 14, satisfeita por w_n e usando o fato que $w_{n_k} = 0$ em ∂U obtemos:

$$\int_U (\nabla w_{n_k} \nabla \phi + \mu w_{n_k} \phi) dx = -\int_U g(\nabla u_{n_k}) \phi dx \;\; \forall\, \phi \in H_0^1(U) \tag{4.40}$$

Consequentemente, usando nossa hipótese que g é contínua, $u_{n_k} \longrightarrow u$ em $H_0^1(U)$ e $w_{n_k} \longrightarrow w$ em $H_0^1(U)$ quando $k \to \infty$ obtemos:

$$\int_U (\nabla w \nabla \phi + \mu w \phi) dx = -\int_U g(\nabla u) \phi dx \;\; \forall\, \phi \in H_0^1(U) \tag{4.41}$$

Isto nos dá que w é solução fraca de (4.36) e então, A[u]=w. Ademais,$w_n \to w$ em $H_0^1(U)$:

$$A[u_n] = w_n \text{ implica que } -\Delta w_n + \mu w_n = -g(\nabla u_n) \quad \text{e}$$

$$A[u] = w \text{ implica que } -\Delta w + \mu w = -g(\nabla u)$$

Como consequência resulta:

$$-\Delta(w_n - w) + \mu(w_n - w) = -g(\nabla u_n) + g(\nabla u)$$

Multiplicando a última igualdade por w e em seguida integrando em U, segue que:

$$\begin{aligned}
\| w_n - w \|^2_{H^1_0(U)} + \mu \| w_n - w \|^2_{L^2(U)} &\leqslant \int_U \| -g(\nabla u_n) + g(\nabla u) \| \, \| w_n - w \| \\
&\leqslant K_1 \| \nabla u_n - \nabla u \| \| w_n - w \| \\
&\leqslant K_1 \| u_n - u \|_{H^1_0(U)} \| w_n - w \|_{L^2(U)} \\
&\leqslant \frac{K_1^2}{2\mu} \| u_n - u \|^2_{H^1_0(U)} + \frac{\mu}{2} \| w_n - w \|^2_{L^2(U)}
\end{aligned}$$

A última desigualdade, obtemos usando Young $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2\mu} + \dfrac{\mu b^2}{2}$ com $\mu > 0$, onde consideramos $a = K_1 \| u_n - u \|_{H^1_0(U)}$ e $b = \| w_n - w \|_{L^2(U)}$. Chame $K_2 = K_1^2$

De $u_n \to u$ em $H^1_0(U)$, segue que:

$$\| w_n - w \|^2_{H^1_0(U)} \leqslant \frac{K_2}{2\mu} \| u_n - u \|^2_{H^1_0(U)} \longrightarrow 0$$

E, como $u_n \to u$ segue $A[u_n] = w_n$, mas acabamos de provar que $w_n \to w$, logo $w = A[u]$, o que nos faz concluir que A é contínua.

Para mostrar que A é compacto, usaremos um argumento análogo. Tomemos para tanto uma sequência (u_n) limitada em $H^1_0(U)$. Mais uma vez, nossa condição de crescimento nos dá que $A[u_n]$ é limitada em $H^2(U)$.

O espaço $H^2(U)$ está compactamente imerso em $H^1_0(U)$ e como A é contínua, então $A[u_n]$ possui uma subsequência convergente em $H^1_0(U)$.

Nos resta mostrar que para $\mu > 0$ suficientemente grande o conjunto:

$$M := \left\{ u \in H^1_0(U) : \; u = \lambda A[u] \; \text{ para algum } \; \lambda \in [0,1] \right\} \; \text{ é limitado em } \; H^1_0(U)$$

Seja $u \in H^1_0(U)$ e tal que $u = \lambda A[u]$, então $\dfrac{u}{\lambda} = A[u]$. Em outras palavras, temos que:

$$u \in H^2(U) \cap H^1_0(U) \quad \text{e} \quad -\Delta u + \mu u = -\lambda g(\nabla u) \;\; \text{em} \;\; U$$

no sentido fraco, ou seja,

$$\int_U (\nabla u \nabla \phi + \mu u \phi) dx = -\lambda \int_U g(\nabla u) \phi dx \quad \forall \, \phi \in C^\infty_0(U) \tag{4.42}$$

A aproximação (4.42) também é válida $\forall \, \phi \in H^1_0(U)$. Façamos agora, $\phi = u$ e então:

$$
\begin{aligned}
\int_U \| \nabla u \|^2 \, dx + \mu \int_U \| u \|^2 \, dx &= -\lambda \int_U g(\nabla u) u dx \\
&\leqslant -\lambda \int_U \| g(\nabla u) \| \, \| u \| \, dx \qquad \text{(Por Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant -\lambda M \int_U (1 + \| \nabla u \|) \| u \| \, dx \quad \text{(Pela condição de crescimento)} \\
&= M_1 \int_U (\| u \| + \| u \| \, \| \nabla u \|) \, dx
\end{aligned}
$$

Da desigualdade de Young: $ab \leqslant \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}$ com $\epsilon > 0$, chamando $a = \| \nabla u \|, b = \| u \|$ e $M_2 = \epsilon$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_U \| \nabla u \|^2 \, dx + \mu \int_U \| u \|^2 \, dx &\leqslant M_1 \int_U \left(\| u \| + \frac{\| \nabla u \|^2}{2M_2} + M_2 \frac{\| u \|^2}{2} \right) dx \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_U \| \nabla u \|^2 \, dx + \int_U M_1 \left[\frac{M_2 \| u \|^2}{2} + \frac{\| u \|^2 + 1}{2} \right] dx \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_U \| \nabla u \|^2 \, dx + \int_U M_1 \left[\frac{(M_2 + 1) \| u \|^2 + 1}{2} \right] dx \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_U \| \nabla u \|^2 \, dx + \int_U M_3 (\| u \|^2 + 1) dx,
\end{aligned}
$$

onde $M_3 = \frac{M_1(M_2 + 1)}{2}$. Isto nos dá:

$$
\int_U \| \nabla u \|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_U \| \nabla u \|^2 \, dx + (\mu - M_3) \int_U \| u \|^2 \, dx \leqslant M_3 \int_U dx
$$

E assim,

$$
\frac{1}{2} \int_U \| \nabla u \|^2 \, dx + (\mu - M_3) \int_U \| u \|^2 \, dx \leqslant M_3 |U| \tag{4.43}
$$

Veja que o primeiro lado da desigualdade (4.43) é da mesma forma que a norma em $H_0^1(U)$. Logo, para $\mu > 0$ suficientemente grande, temos que:

$$
\| u \|_{H_0^1(U)} \leqslant R,
$$

para alguma constante R, que não depende de $\lambda \in [0, 1]$. Segue que nosso conjunto M é limitado em $H_0^1(U)$.

Notemos que todas as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Schaefer estão satisfeitas, e portanto, aplicando o teorema no espaço $\mathsf{X} = \mathsf{H}_0^1(U)$ concluímos que A tem um ponto fixo $u \in \mathsf{H}_0^1(U) \cap \mathsf{H}^2(U)$, que é justamente a solução fraca de nosso problema (4.33). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Botelho, G. - *Fundamentos de Análise Funcional*. Coleção Textos Universitários, SBM, 2015.

[2] Brezis, H. - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2010.

[3] Castelli, M. - *Teoremas de ponto fixo*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, 72 f., 2016.

[4] Eberhard, Z. - *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theorems*. Springer-Verlag, 1985.

[5] Furtado, M. - *Notas de EDP2 (versão 1.2)*. Universidade de Brasília, 2012.

[6] Gilbarg, T.; Trudinger, N. S. -*Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order*. New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1977.

[7] Griffel, D.H. - *Applied Functional Analysis*. Reprint Edition, 2002.

[8] Isnard, C. - *Introdução à medida e integração*. Projeto Euclides, IMPA, 2013.

[9] Kaufmann, U. - *Introducción a los problemas elípticos lineales y no lineales*. Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, 2016, http://www.ocw.unc.edu.ar/facultad-de-matematica-astronomia-y-fisica/introduccion-a-problemas-elipticos-lineales-y-no-lineales.

[10] Lawrence, C.E - *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997.

[11] Lima, E. L. - *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[12] Niethammer, B. - *Fixed Point Methods for Nonlinear PDEs.* Online lecture notes, https://wwww.maths.ox.ac.uk/system/files/coursematerial/2010/2048/1/script.pdf.

[13] Nirenberg, L.- *Topics on Nonlinear Functional Analysis.*Courant Inst. of Math. Sc., N.Y. University, N-Y, 1974.

[14] Rudin, W. - *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw Hill, 1976.

[15] Smith, Z. - *Fixed Point Methods in Nonlinear Analysis.* Online lecture notes, math.uchicago.edu/ may/REU2014/REUPapers/Smith,Z.pdf