Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações de Navier-Stokes não-homogêneas

Ayana Pinheiro de Castro Santana

Manaus - AM
Dezembro de 2019

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações de Navier-Stokes não-homogêneas

por

Ayana Pinheiro de Castro Santana

sob a orientação do

Prof. Dr. Nikolai Vasilievich Chemetov

Manaus - AM
Dezembro de 2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S232e

Santana, Ayana Pinheiro de Castro

Equações de Navier-Stokes não-homogêneas / Ayana Pinheiro de Castro Santana. 2019

68 f.: 31 cm.

Orientador: Nikolai Vasilievich Chemetov

Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Equação de Navier-Stokes. 2. métodos de ponto fixo e aplicações. 3. existência. 4. solução fraca. I. Chemetov, Nikolai Vasilievich II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Equações de Navier-Stokes não-homogêneas

por

Ayana Pinheiro de Castro Santana

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em 06 de Dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Nikolai Vasilievich Chemetov - (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Mikhail Neklyudov - (Membro Interno)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof^{a}. Dr^{a}. Gabriela Del Valle Planas - (Membro Externo)
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Esta dissertação é dedicada aos meus avós Adamor da Silva Santana e Maria de Fátima de Lima Santana.

Agradecimentos

Aos meus Avós, Adamor da Silva Santana e Maria de Fátima de Lima Santana e minha tia Aldenora de Lima Santana, Meu alicerce, os responsáveis por quem sou e pelo que busco ser e conquistar, pois nada disso teria sentido sem eles ao meu lado. Obrigada por tudo, o apoio e amor de vocês me fizeram chegar até aqui e a seguir em frente sempre.

Ao meu esposo e companheiro Aírton Freitas Filho, meu eterno agradecimento, seu apoio foi importantíssimo nessa jornada. Obrigada por está ao meu lado sempre. Te amo!

Aos professores do mestrado pelos ensinamentos. Especialmente, ao meu orientador, Nikolai Vasilievich Chemetov, pela paciência e dedicação ao me orientar. Aos membros da banca Gabriela Del Valle Planas e Mikhail Neklyudov. Aos professores da graduação, em especial aos professores Domingos Anselmo, Flávia Morgana e Karla Tribuzy. Muito obrigado por fazerem parte da minha formação acadêmica.

Aos colegas de mestrado: Maristela Barbosa Cardoso, Flávia Elisandra Magalhães Furtado, Fernando Soares, Daniele Alencar, Téo Felipe, Cristiano Silva, Jão Raimundo Ferreira, Wanessa Ferreiras. Obrigado pelos momentos de aprendizado e diversão. Com certeza vocês ajudaram essa caminhada a ser mais prazerosa. As minhas amigas: Marian Barros, Dasyane Cunha e Gisele Melo. Obrigada por todo o apoio.

À minha amiga Tayse Serrão, agradeço pela disponibilidade em me ajudar, com a estrutura gramatical da dissertação. Obrigada por todas as vírgulas e acentos corridos e acrescentados.

“Run, live to fly, fly to live..."

Iron Maiden.

Resumo

Neste trabalho consideramos o fluxo de um fluido viscoso, incompressível e não-homogêneo, istó é, com densidade variável, descrito pelas equações de Navier-Stokes não homogêneas. O teorema principal tem como objetivo determinar as soluções u (velocidade), ρ (densidade) e p (pressão). Tal demonstração será abordada em três etapas: construção de soluções aproximadas, prova de compacidade e convergência para a solução.

Palavras-chave: Equação de Navier-Stokes, métodos de ponto fixo e aplicações, existência, solução fraca.

Abstract

In this work we consider the flow of a viscous, incompressible and nonhomogeneous fluid, that is, with variable density, described by the nonhomogeneous Navier-Stokes equations. The main theorem aims to determine the solutions u (velocity), ρ (density) e p (pressure). Such a demonstration will be covered in three steps: construction of approximate solutions, compactness proof and convergence to the solution.

Key-words: Navier-Stokes Equation, fixed point and application methods, existence, weak solution.

Sumário

Introdução

Deduzidas de forma independente por Claude Louis Marie Henri Navier (1785 - 1836) e Sir George. G. Stokes (1819 - 1903), as equações de Navier-Stokes é um grupo de equações diferenciais parciais não lineares de segunda ordem, que descrevem o escoamento de fluidos incompressíveis. Nessa dissertação dedicaremos o estudo de tais equações para o fluxo de um fluido (líquido) viscoso e não-homogêneo, que ocupa um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira Γ ao longo do intervalo de tempo $[0, T]$, descrito por

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \Delta u = \rho f - \nabla p \qquad (\star)\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0\\
&\nabla \cdot u = 0,
\end{aligned}$$

com condição de fronteira

$$u = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times]0, T[$$

e condição inicial

$$\rho(0) = \rho_0, \quad (\rho u)(0) = \rho_0 u_0.$$

Um modelo reduzido é obtido eliminando a pressão. Mas precisamente, a equação ($\star$) junto com a condição inicial podem ser substituídas pela seguinte equação variacional

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(-\rho u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho u \otimes u \cdot \nabla \varphi + \mu \nabla u \cdot \nabla \varphi - \rho f \cdot \varphi \right) dxdt = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot \varphi(0) dx, \qquad (\star\star)\\
&\forall \ \varphi \in C^1([0, T]; (H_0^1(\Omega))^3) \quad \text{tal que} \quad \nabla \cdot \varphi = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(T) = 0.
\end{aligned}$$

Uma solução ρ, u de ($\star\star$) foi obtida por Antonzev e Kajikov [1] e por Kajikov [10], considerando $u_0 \in H$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ e supondo que ρ_0 tem limite inferior > 0. Tal resultado foi estendido por Simon [18] sem restrição sobre ρ_0.

A existência local, isto é, para $T = T_*$ onde $T_* > 0$ depende do dado, de uma solução mais regular deste modelo reduzido obtida por Kim [12], para u_0, f e Ω mais regulares.

Em todas esses trabalhos, a t-continuidade de u, ou de ρu, não foi provada; portanto a condição inicial em ρu incluída na equação variacional era satisfeita em sentido mais fraco.

Antonzev e Kajikov [1], Lions[14] e Simon [18] suporão que $f \in L^2(0,T;H)$. Suas provas também se tornam válidas para $f \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, isto é, eles não exigem que f tenha divergente nulo. Aqui, assumimos que $f \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ ao invés de $L^2(0,T;H)$ e não exigimos que ρ_0 tem um limite inferior positivo.

O objetivo principal desse trabalho é mostrar o Teorema 4.4, o qual tem como finalidade encontrar as soluções fraca para o modelo de Navier-Stokes descrito acima. Isto é, determinar a velocidade $u = (u_1, u_2, u_3)$, a densidade ρ e a pressão p, retirando a condição inicial estabelecida sobre ρu, a qual será substituida pela condição inicial fraca

$$\left(\int_\Omega \rho u \cdot v dx\right)(0) = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot v dx,$$

para uma determinada classe de funções teste v. A integral acima é t-contínua para cada v, apesar de ρu não necessariamente ser t-contínua.

Com intuito de obter o resultado principal, essa dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1, estabelecemos alguns resultados preliminares, que serão utilizados nos capítulos posteriores. Iniciaremos a primeira seção deste capítulo com uma breve descrição da teoria de Medida e Integração. Na segunda seção, definimos o espaço L^p e listamos algumas de suas principais propriedades, bem como alguns resultados de convergências fraca e fraca $\star$, compacidade fraca em L^1 e aplicações de convergências fracas e fortes.

No Capítulo 2, apresentamos alguns teoremas do ponto fixo, a saber os Teoremas do ponto fixo de Banach, Brouwer, Schauder e Schaeffer. Tais resultados serão utilizados para mostrar os Teoremas de Picard-Lindelöf e Cauchy-Peano, cuja finalidade é garantir a existência e unicidades de soluções aproximadas. Na Seção 1.3, introduzimos os espaços de Sobolev e elencamos suas principais propriedades. E, na última seção, daremos algumas aplicações na análise não-linear.

No Capítulo 3, utilizaremos o Teorema do Transporte, na formulação das leis básicas da dinâmica dos fluidos, dadas pelas equações da conservação de massa e movimento, Equações de Euler e Equações de Navier-Stokes.

O Capítulo 4 tem por finalidade mostrar o teorema principal, cuja prova encontra-se em [17]. Com esse propósito iniciaremos tal capítulo considerando o conjunto $\mathscr{V}$ dos campos vetoriais com divergência nula, com suporte compacto, com intuito de definir os seguintes espaços fundamentais: V o fecho de $\mathscr{V}$ em $(H_0^1(\Omega))^3$ e H o fecho de $\mathscr{V}$ em $(L^2(\Omega))^3$. Esses dois espaços são de Hilbert, equipados com os produtos escalares induzidos respectivamente por $(H_0^1(\Omega))^3$ e $(L^2(\Omega))^3$, em seguida daremos alguns resultados utilizados na demonstração do teorema, cuja prova será obtida em três etapas: construção de soluções aproximadas, prova de compacidade e convergência para a solução.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, admitiremos alguns conceitos básicos da teoria de análise funcional bem como as definições de espaços de Banach e Hilbert. Tais assuntos podem ser encontrados nos livros [5, 3, 16]. O capítulo tem como objetivo central caracterizar os tipos de convergências fraca e fraca $\star$ definidos nos espaços L^p. Começaremos com algumas definições e resultados da teoria de medida.

1.1 Breve Descrição da Teoria de Medida

1.1.1 Espaço Mensurável

Nessa seção introduziremos definições e propriedades básicas da teoria de medida. As demonstrações e resultados aqui omitidos poderão ser encontrados em [2]

Definição 1.1. *Uma σ-álgebra no conjunto Ω é uma família Σ de subconjuntos de Ω que satisfaz as seguintes propriedades:*

(I) $\emptyset$, $\Omega \in \Sigma$.

(II) Se $A \in \Sigma$, *então* $A^C := \Omega - A \in \Sigma$.

(III) Se $A_n \in \Sigma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Sendo assim, o par (Ω, Σ) é chamado espaço mensurável.

Exemplo 1.1. *Fixado um conjunto X, as famílias abaixo são σ-álgebras sobre X.*

(a) o conjunto das partes $\mathcal{P}(X)$ de X e $\{\emptyset, X\}$.

(b) A interseção de qualquer família de σ-álgebras sobre X.

Definição 1.2. *A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_\Omega$ de um espaço métrico ou topológico Ω é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em Ω (ou, equivalentemente, pelos fechados em Ω). Os conjuntos pertencentes a $\mathcal{B}_\Omega$ são chamados conjuntos de Borel de Ω ou, simplesmente, borelianos de Ω.*

Exemplo 1.2. *Seja $X = \mathbb{R}$. A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de $\mathbb{R}$ gerada pelos intervalos abertos, que também pode ser gerada pelos intervalos fechados.*

1.1.2 Funções Mensuráveis

Definição 1.3. *Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável e $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a reta estendida. Uma função $f : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, é Σ-mensurável ou simplesmente mensuráveis se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) > \alpha\}$ está em Σ. Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ o espaço das funções mensuráveis.*

Observação 1.1. *Na definição de função mensurável poderíamos utilizar qualquer um dos conjuntos abaixo:*

(i) $\{x \in \Omega; f(x) \geq \alpha\}$,

(ii) $\{x \in \Omega; f(x) \leq \alpha\}$,

(iii) $\{x \in \Omega; f(x) < \alpha\}$.

Observação 1.2. *Sejam f, g funções em $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções $f + g$, cf, $f \cdot g$ e $|f|$ são mensuráveis.*

O Lema a seguir vai garantir que se uma sequência de funções mensuráveis converge pontualmente para uma função f, então f é mensurável.

Lema 1.1. *Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$. Então as funções definidas abaixo são mensuráveis.*

(I) $f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$,

(II) $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$,

(III) $f^*(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$,

(IV) $F^*(x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.

1.1.3 Medida

Dado um espaço mensurável (Ω, Σ), vamos considerar as funções definidas sobre Σ e que assumem $\overline{\mathbb{R}}$, tais funções, com certas propriedades, serão chamadas medidas.

Definição 1.4. *Uma medida no espaço mensurável (Ω, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(I) $\mu(\emptyset) = 0$.

(II) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ, então

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ é dita finita se $\mu(\Omega) < \infty$, é dita σ-finita se existem conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$ tais que $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. O termo (Ω, Σ, μ) é chamado espaço de medida.

Exemplo 1.3 (Medida da Contagem)**.** *Dado espaço de medida (X, Σ, μ) onde $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. A medida da contagem $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dada por*

$$\mu(E) = \begin{cases} \infty, & \text{se } E \text{ tem infinitos elementos,} \\ n, & \text{se } E \text{ tem } n \text{ elementos.} \end{cases}$$

Exemplo 1.4 (Medida de Dirac)**.** *Seja $\Omega \neq \emptyset$ um conjunto qualquer, e tome $\Sigma := \mathcal{P}(\Omega)$. Fixado um ponto $x_0 \in \Omega$, definimos a medida de Dirac $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty)$ por:*

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in E, \\ 0, & \text{se } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Definição 1.5. *Uma medida de Borel é uma medida definida sobre uma σ-álgebra de Borel.*

Definição 1.6. *Sejam μ uma medida de Borel e E um boreliano de $\mathcal{B}_\Omega$. Então*

(a) μ é regular exterior em E se $\mu(E) = \inf\{\mu(O);\ O \supset E$ e O é aberto$\}$.

(b) μ é regular interior em E se $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ E \supset K$ e K é compacto$\}$.

Definição 1.7. *Uma medida de Radon é uma medida de Borel que satisfaz o item (b) da Definição 1.6 e, além disso, é finita sobre todos os conjuntos compactos (cf. Definition R3 em [19]).*

Notação 1.1. *Denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço das medidas de Radon.*

1.1.4 Funções Integráveis

As demonstrações omitidas aqui podem ser encontradas em [2].

Definição 1.8. *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a parte positiva f^+ e a parte negativa f^- de f são definidas por*

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\};$$
$$f^-(x) = \min\{0, f(x)\}.$$

Definição 1.9. *O conjunto $L = L(\Omega, \Sigma, \mu)$ das funções integráveis em Ω com respeito a medida μ consiste no conjunto de todas as funções mensuráveis f tais que suas partes positiva e negativa possuem integral finita, isto é,*

$$L = L(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma); \int f^+ d\mu < \infty \text{ e } \int f^- d\mu < \infty\}.$$

Se $f \in L$ então sua integral com respeito a medida μ é definida por:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Se $E \in \Sigma$, então a integral de f sobre E é definida por:

$$\int_E f d\mu = \int f \mathcal{X}_E d\mu = \int f^+_{\mathcal{X}_E} d\mu - \int f^-_{\mathcal{X}_E} d\mu,$$

onde $\mathcal{X}_E$ é a função característica do conjunto $E \in \Sigma$.

Lema 1.2 (Lema de Fatou)**.** *Se (f_n) é uma sequência que pertence a $\mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$, então*

$$\int \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf f_n d\mu \ \leq \ \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Onde $\mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ é o conjunto das funções mensuráveis não negativas.

Teorema 1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ uma sequência de funções integráveis tal que*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ μ-q.t.p $x \in \Omega$ (istó é, $\forall x \in \Omega \setminus A$, onde A é um subconjunto de Ω, tal que $\mu(A) = 0$), em que f é uma função mensurável;

(ii) existe $g \in L$ tal que para todo n,

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \mu - q.t.p \ x \in \Omega$$

Então f é integrável e, além disso,

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

1.2 Os Espaços L^p

1.2.1 Definições dos Espaços L^p

Definição 1.10. *Definimos $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, com $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis cuja potência $|f|^p$ é integrável em Ω, munido com a norma $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$, isto é,*

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \textit{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\}.$$

Para simplificar a notação escreveremos $L^p(\Omega)$ para denotar o espaço $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ sempre que não houver perigo de confusão.

No caso que $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)d\mu.$$

Definição 1.11. *Para o caso $p = \infty$ definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \textit{ é mensurável e, } \|f\|_\infty < \infty\}$$

onde

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf\{C \in \mathbb{R};\ \mu(f > C) = 0\}.$$

Definição 1.12 (Função Localmente Integrável)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Dizemos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, se f for uma função mensurável tal que*

$$\int_K |f(x)|^p d\mu < \infty, \quad \forall\ K \subset \Omega \textit{ compacto.}$$

Denotaremos o espaços das função localmente integráveis em Ω por $L^p_{Loc}(\Omega)$.

Uma importante consequência do Teorema 1.1 é o seguinte corolário abaixo.

Corolário 1.1. *Dada $f \in C(\mathbb{R})$ tal que $|f(t)| \leq a(1 + |t|)$ onde $a > 0$, a aplicação $u \longmapsto f(\Omega)$ é contínua de $L^2(\Omega)$ para $L^2(\Omega)$.*

1.2.2 O Dual de L^p

Definição 1.13. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que o funcional linear $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo, ou limitado, se:*

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)|;\ \|x\| = 1\} < \infty.$$

Definição 1.14. *O espaço dual de X é o espaço vetorial normado dado por*

$$X^* = \{\phi : X \longrightarrow \mathbb{R};\ \phi \text{ linear e contínuo}\}.$$

Notação 1.2. *Denotaremos por $(L^p(\Omega))^*$ o dual do espaço $L^p(\Omega)$.*

1.2.3 Teorema da Representação de Riesz para os espaços L^p

Enunciaremos abaixo o Teorema de Representação de Riesz para espaços L^p. Este teorema será de muita utilidade para encontrar uma condição necessária e suficiente para que uma sequência tenha convergência fraca nos espaços L^p.

Notação 1.3. *Seja $1 \leq p \leq \infty$; denotamos por p' o expoente conjugado de p, isto é,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Teorema 1.2 (Representação de Riesz)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\phi \in (L^p(\Omega))^*$. Então existe uma única função $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf\ d\mu, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, temos

$$\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*},$$

onde

$$\|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*} = \sup\{|\langle \phi, f \rangle|;\ \|f\|_{L^p(\Omega)} = 1\}.$$

Observação 1.3. *O Teorema 1.2 diz que cada funcional linear contínuo em $L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, pode ser representado "concretamente" por uma integral. A aplicação $\phi \longmapsto u$, sendo uma isometria linear sobrejetiva, nos permite identificar o $(L^p(\Omega))^*$ com $L^{p'}(\Omega)$.*

Teorema 1.3. *Seja $\phi \in (L^1(\Omega))^*$. Então existe uma única função $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf\ d\mu, \quad \forall\ f \in L^1(\Omega).$$

Além disso, temos

$$\|u\|_\infty = \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*}.$$

Observação 1.4. *O Teorema 1.3 afirma que todo funcional linear contínuo sobre $L^1(\Omega)$ pode ser representado por uma integral. A aplicação $\phi \longmapsto u$, sendo uma isometria linear sobrejetiva, nos permite identificar o $(L^1(\Omega))^*$ com $L^\infty(\Omega)$.*

1.2.4 Convergências Fraca e Fraca $\star$

Esta subseção está baseada nas notas de aula de Karlsen em [11].
Seja X um espaço normado. Sabemos que se uma sequência x_n converge e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a sequência $\varphi(x_n)$ também é convergente. Definiremos uma condição mais fraca, exigimos que a convergência seja válida apenas para as funções lineares e contínuas.

Definição 1.15. *Seja X um espaço de Banach e X^* seu espaço dual.*

- *Dizemos que uma sequência $(u_n)_n$ de elementos de X converge fracamente para u em X, se para qualquer $\varphi \in X^*$ temos*

$$\varphi(u_n) = \langle \varphi, u_n \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \varphi, u \rangle = \varphi(u).$$

- *Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_n$ de elementos de X^* converge fraco $\star$ para φ em X^*, se para qualquer $u \in X$ temos*

$$\varphi_n(u) = \langle \varphi_n, u \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \varphi, u \rangle = \varphi(u).$$

Assim, de acordo com o Teorema 1.2, podemos considerar as Definições 1.16 e 1.17 abaixo.

Definição 1.16. *Seja Ω um subconjunto de que $\mathbb{R}^N$, aberto e limitado e $1 \le p < \infty$. A sequência $\{u_n\}_{n\ge 1} \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente para $u \in L^p(\Omega)$, isto é,*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad L^p(\Omega)$$

se

$$\int_\Omega u_n v \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega uv \, d\mu \qquad \forall\ v \in L^{p'}(\Omega).$$

Definição 1.17. *Quando $p = \infty$ dizemos que a sequência $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$, converge fracamente $\star$ para $u \in L^\infty(\Omega)$, e escrevemos*

$$u_n \overset{\star}{\rightharpoonup} u \quad em \quad L^\infty(\Omega)$$

se

$$\int_\Omega u_n v \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega uv \, d\mu \qquad \forall\ v \in L^1(\Omega).$$

É fácil mostrar que quando Ω é limitado

$$u_n \overset{\star}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } L^\infty(\Omega) \implies u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } L^p(\Omega) \ \text{ com } \ 1 \leq p < \infty.$$

Teorema 1.4 (Limitação de Sequências Fracamente Convergentes)**.** *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^p(\Omega)$ ($\overset{\star}{\rightharpoonup}$ *em* $L^\infty(\Omega)$ *se* $p = \infty$)*. Então,* u_n *é limitada em* $L^p(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_p \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|u_n\|_p.$$

Sabemos que em espaços de dimensão infinita, a bola unitária fechada não é compacta, o teorema abaixo garante que em L^p a bola unitária é compacta na topologia fraca.

Teorema 1.5 (Compacidade fraca e fraca $\star$ em L^p)**.** *Sejam* $1 < p < \infty$ *e uma sequência* u_n *limitada em* $L^p(\Omega)$*. Então existe uma subsequência* u_{n_k} *e uma função* $u \in L^p(\Omega)$ *tal que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad em \quad L^p(\Omega).$$

Observação 1.5. *Se* $p = \infty$ *o resultado ainda se mantém substituindo* $\rightharpoonup$ *por* $\overset{\star}{\rightharpoonup}$*.*

Observação 1.6. *Para* $p = 1$ *o Teorema 1.5 é falso, pois* L^1 *não é reflexivo, isto é, a limitação de uma sequência em* L^1 *não é suficiente para garantir a existência de uma subsequência convergente. Nesse caso estabelecemos uma relação entre* $L^1(\Omega)$ *e o espaço de medida de Radon* $\mathcal{M}(\Omega)$*, dada no seguinte teorema*

Teorema 1.6. *Seja* φ *um funcional linear contínuo sobre* $C_c(\Omega)$*. Então existe uma medida de Radon* μ *sobre* Ω *tal que*

$$\varphi(v) := \langle \mu, v \rangle = \int_\Omega v \, d\mu, \quad \forall \ v \in C_c(\Omega).$$

Sendo assim podemos estabelecer a seguinte relação.

$$\begin{array}{lllll} L^1(\Omega) \longrightarrow (C_c(\Omega))' \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) & & & & \\ u \quad \longmapsto \quad \varphi_u \quad \longmapsto \quad \varphi_u(v) \ := \ \langle \varphi_u, v \rangle \ = \ \displaystyle\int_\Omega uv \, d\mu \ = \displaystyle\int_\Omega v \, d\mu_u, \ \ \forall \ v \in C_c(\Omega). \end{array}$$

Como consequência imediata do Teorema 1.6 podemos concluir

$$\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \iff \exists \ c > 0 \ ; \ |\langle \mu, v \rangle| \ \leq \ c \, \| v \|_\infty \quad \forall \ v \in C_c(\Omega).$$

Definição 1.18.

$$\| \mu \|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \sup\{|\langle \mu, v \rangle|; \ v \in C_c(\Omega), \ \| v \|_\infty \leq 1\}.$$

O espaço $(\mathcal{M}(\Omega), \| \; . \; \|_{\mathcal{M}(\Omega)})$ munido com a norma definida acima, é um espaço de Banach e é isometricamente isomorfo ao dual de $(C_c(\Omega), \| \; . \; \|_{L^\infty(\Omega)})$.

Como consequência do teorema 1.6 podemos definir convergência fraca $\star$ no espaço de medida de Radon.

Definição 1.19. *Uma sequência $\mu_n \in \mathcal{M}(\Omega)$ converge fracamente $\star$ para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e escrevemos*

$$\mu_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \mu \quad em \quad \mathcal{M}(\Omega)$$

se

$$\int_\Omega v \, d\mu_n \;\longrightarrow\; \int_\Omega v \, d\mu \qquad \forall \; v \in C_c(\Omega).$$

Teorema 1.7. *Seja $\mu_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então $\limsup \; \mu_n(K) \leq \mu(K)$ para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, e $\mu(O) \leq \liminf \mu_n(O)$ para cada conjunto aberto $O \subset \Omega$.*

Teorema 1.8 (Compacidade Fraca em $\mathcal{M}(\Omega)$)**.** *Seja $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então existe uma subsequência μ_{n_k} e uma função $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que*

$$\mu_{n_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} \mu \quad em \quad \mathcal{M}(\Omega).$$

Teorema 1.9 (Caracterização da Convergência Fraca em L^p)**.** *Seja $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Suponha que a sequência u_n é limitada em $L^p(\Omega)$. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $u_n \rightharpoonup u \quad em \quad L^p(\Omega)$, *isto é,* $\int_\Omega u_n v \, d\mu \;\longrightarrow\; \int_\Omega uv \, d\mu \qquad \forall \; v \in L^{p'}(\Omega)$.

2. $u_n \overset{\star}{\rightharpoonup} u \quad em \quad \mathcal{M}(\Omega)$, *isto é,* $\int_\Omega v \, d\mu_n \;\longrightarrow\; \int_\Omega v \, d\mu \qquad \forall \; v \in C_c(\Omega)$.

3. $u_n \longrightarrow u \quad em \quad D'(\Omega)$, *istó é,* $\langle u_n, v\rangle \;\longrightarrow\; \langle u, v\rangle \;\; \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$.

4. *Para qualquer conjunto de Borel $E \subset \Omega$, $|E| > 0$,*

$$(u_n)_E := 1/|E| \int_E u_n \, dx \longrightarrow (\Omega)_E := 1/|E| \int_E u \; dx.$$

5. *Para qualquer cubo $Q \subset \Omega$, $|Q| > 0$,*

$$(u_n)_Q := 1/|Q| \int_Q u_n \; dx \longrightarrow (\Omega)_Q := 1/|Q| \int_Q u \; dx.$$

Apesar de simples, o próximo lema é muito útil.

Lema 1.3 (Produtos de sequências convergentes fraco e forte)**.** *Seja* $1 < p < \infty$*,* $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $u \in L^p(\Omega)$*. Seja* $v_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência em* $L^{p'}(\Omega)$ *e* $v \in L^{p'}(\Omega)$*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*. Se*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad em \quad L^p(\Omega), \\ v_n &\longrightarrow v \quad em \quad L^{p'}(\Omega), \end{aligned}$$

então

$$u_n v_n \rightharpoonup uv \quad em \quad L^1(\Omega).$$

1.2.5 Compacidade Fraca em L^1

Esta subseção está baseada nas notas de aula de Karlsen [11]. Vamos agora nos voltar para a questão mais delicada da compacidade fraca em L^1. Pelo Teorema 1.5 vimos que toda sequência de funções limitadas em $L^p(\Omega)$ possui uma subsequência que converge fracamente em $L^p(\Omega)$ para $1 < p \leq \infty$, também notamos na Observação 1.6 que esse resultado não é válido para uma sequência limitada em L^1, pois L^1 não é reflexivo. Isto é, a limitação em L^1 não é suficiente para garantir a existência de uma subsequência fracamente convergente. Começamos com uma definição.

Definição 1.20 (Equiintegrabilidade)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $\mathcal{U} \subset L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *uma família de funções integráveis. Dizemos que* $\mathcal{U}$ *é uma família equiintegrável se as duas condições a seguir forem satisfeitas:*

1. *Para qualquer* $\varepsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável* A *com* $\mu(A) < \infty$ *tal que*

$$\int_{\Omega \setminus A} |u| \; d\mu < \varepsilon, \quad \forall \; u \in \mathcal{U}.$$

Esta condição é trivialmente satisfeita se $\mu(\Omega) < \infty$*, desde que, basta tomar* $A = \Omega$*.*

2. $\forall \; \varepsilon > 0$*,* $\exists \; \delta > 0$ *tal que para cada conjunto mensurável* E *com* $\mu(E) < \delta$ *tem-se*

$$\int_E |u| \; d\mu < \varepsilon, \quad \forall \; u \in \mathcal{U}.$$

Temos três formulações equivalentes da propriedade de equiintegrabilidade.

Lema 1.4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $\mathcal{U} \subset L^1(\Omega)$ *uma família de funções integráveis.*

1. *Então* $\mathcal{U}$ *é equiintegravél se, e somente se, para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis* E_n *com* $\mu(E_n) \longrightarrow 0$ *tem-se*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_{E_n} |u| \, d\mu = 0.$$

2. Se $\mu(\Omega) < \infty$, então $\mathcal{U}$ é equiintegrável se, e somente se,

$$\mathcal{U} \subset \left\{ u \in L^1(\Omega) : \int_\Omega \Psi(|u|)\, dx \ \leq \ 1 \right\},$$

para alguma função crescente $\Psi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ satisfazendo

$$\lim_{\xi \longrightarrow \infty} \frac{\Psi(\xi)}{\xi} = \infty.$$

3. Se $\mu(\Omega) < \infty$ e $\mathcal{U}$ é limitado em $L^1(\Omega)$, então $\mathcal{U}$ é equiintegrável se, e somente se,

$$\lim_{\xi \longrightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_{\{|u| > \xi\}} |u|\, d\mu = 0.$$

Como consequência do item 2., o seguinte exemplo ilustra como falar de equiintegrabilidade no contexto das sequências. Sejam $\mu(\Omega) < \infty$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma sequência de funções limitada em $L^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega |u_n| d\mu \leq C, \ \forall\ n.$$

Uma condição suficiente para que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja equiintegrável é que exista uma constante C, independente de n, tal que

$$\int_\Omega |u_n|^{1+\theta} d\mu \leq C,$$

para algum $\theta > 0$.

O próximo teorema dá uma condição necessária e suficiente para a compacidade com respeito a convergência fraca em L^1.

Teorema 1.10. *(Dunford-Pettis) Seja $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$. Suponha que:*

1. a sequência u_n é limitada em $L^1(\Omega)$, isto é, $\sup\limits_n \| u_n \|_1 < \infty$.

2. a sequência u_n é equiintegrável.

Então existe uma subsequência de u_n que converge fracamente em $L^1(\Omega)$. Reciprocamente, se u_n converge fracamente em $L^1(\Omega)$, então 1 e 2 valem.

O teorema a seguir é análogo ao Teorema 1.9 considerando o caso que $p = 1$.

Teorema 1.11 (Caracterização de Convergência Fraca em L^1)**.** *Sejam $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ e $u \in L^1(\Omega)$. Suponha que a sequência u_n é limitada em $L^1(\Omega)$ e equiintegrável. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^1(\Omega)$.

2. $u_n \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$.

3. $u_n \longrightarrow u$ *em* $D'(\Omega)$.

4. Para qualquer conjunto de Borel $E \subset \Omega,\ |E| > 0$,

$$(u_n)_E = \int_{|E|} u_n \, dx \longrightarrow (\Omega)_E := \int_{|E|} u \, dx.$$

1.2.6 Aplicações de Convergências Fraca e Forte

Concluímos a apresentação da teoria de integral por várias aplicações das convergências fracas e fortes, estudadas nos parágrafos anteriores.

Lema 1.5 (Vitali)**.** *Seja* (u_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Suponha que*

(I). $\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ *tal que* $\int_A |u_n|^p < \epsilon\ \ \forall\ n$ *e* $\forall A \subset \Omega$ *com* $\mu(A) < \delta$.

(II). $f_n \longrightarrow f$ *em quase todo* Ω.

Então $f \in L^p(\Omega)$ *e* $f_n \longrightarrow f$ *em* $L^p(\Omega)$.

Lema 1.6 (Semicontinuidade Fraca de Funções Convexas)**.** *Se* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é convexa e* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^1(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega F(u) \, dx \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega F(u_n) \, dx.$$

Se $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é concava e* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^1(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega F(u) \, dx \geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega F(u_n) \, dx.$$

Estabeleceremos a seguir resultados mais profundos, mostrando que sob premissas adicionais a convergência de uma sequência em L^p pode ser melhorada. O primeiro resultado diz que a convergência em quase todo Ω ou em medida implica convergência fraca se as normas são uniformemente limitadas. Antes de listarmos tais resultados daremos a seguinte definição.

Definição 1.21. *Uma sequência* (u_n) *de funções reais mensuráveis converge em medida para uma função real mensurável* u *se*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega; |u_n(x) - u(x)| > \epsilon\}) = 0 \quad \forall\ \epsilon > 0.$$

Teorema 1.12. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$, convergindo em quase todo Ω ou em medida para função mensurável u, com $\| u_n \|_p \leq C, \; \forall \; n$. Então $u \in L^p(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$.*

O lema a seguir explora a convergência da norma em L^p para obter uma convergência forte a partir da convergência em quase todo Ω.

Lema 1.7. *Seja $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência em $L^p(\Omega), \; 1 \leq p < \infty$. Suponha que*

1. *$u_n \longrightarrow u$ q.t.p de Ω,*

2. *$\| u_n \|_p \longrightarrow \| u \|_p$.*

Então

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Vamos agora olhar para um refinamento do Lema de Fatou 1.2.

Teorema 1.13 (Brezis-Lieb)**.** *Sejam Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$ e $p > 0$. Se uma sequência (u_n) em $L^p(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em quase todo Ω. Então $u \in L^p(\Omega)$ e*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \Big(\| u_n \|_p^p - \| u_n - u \|_p^p \Big) = \| u \|_p^p \, .$$

Teorema 1.14 (Egoroff)**.** *Suponha que $|\Omega| < \infty$ e que uma seqüência de funções mensuráveis $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ converge para u q.t.p em Ω. Então $\forall \; \varepsilon > 0$ existe um conjunto mensurável Ω_ε tal que $|\Omega \backslash \Omega_\varepsilon| < \varepsilon$ e $u_n \longrightarrow u$ uniformente em Ω_ε.*

Teorema 1.15 (Radon-Riesz)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$, (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ convergindo fracamente para $u \in L^p(\Omega)$ e $\| u_n \|_p \longrightarrow \| u \|_p$. Então*

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega).$$

1.3 Espaço de Sobolev

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Nesta seção definiremos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e daremos algumas propriedades elementares desse espaço.

1.3.1 Derivada Fraca

Notação 1.4. *Denotaremos por $C^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis.*

As funções trigonométricas, exponencias, polinomiais são exemplos funções infinitamente diferenciáveis, porém tais funções com essa propriedade e que se anulam fora de um conjunto compacto não são elementares.

Exemplo 1.5.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} \ \ se \ |x| < 1 \\ 0, \ \ se \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

A função f é infinitamente diferenciável em todo $\mathbb{R}$ e se anula fora do intervalo $[0,1]$. Sendo assim é conveniente introduzir o conceito de suporte de uma função.

Definição 1.22. *O suporte da função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por*

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

A função f é dita ter suporte compacto se seu suporte é compacto; para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, o suporte é compacto se, e somente se, for limitado.

Notação 1.5. *Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto.*

Definição 1.23. *. Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\phi(x)dx, \quad \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

E escrevemos $v = D^\alpha u$. Denominamos uma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ de função teste.

Observação 1.7. *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

1.3.2 Definição do Espaço de Sobolev

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e seja k um inteiro não negativo.

Definição 1.24. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$.*
O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço normado com a seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Em particular, o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Notação 1.6.

(I) *Se $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$;*

(II) *Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$;*

(III) *$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,p}(\Omega)$ para $p = 2$;*

(IV) *$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.*

1.3.3 Propriedades

Teorema 1.16. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $N \geq 1, k \geq 1$. Então*
1. $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;
2. $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.

Teorema 1.17. *(Desigualdade de Poincaré) Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Corolário 1.2. *Uma norma pode ser definida em $H_0^1(\Omega)$ por*

$$\| u \|_{H_0^1(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Esta norma é equivalente à norma padrão sobre H^1.

Proposição 1.1. *$H^1(\Omega)$ é espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dx + \int_\Omega fg \, dx.$$

1.3.4 Dual do Espaço de Sobolev

Consideramos a partir de agora $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto, e $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições.

Definição 1.25. *Para todo $p \in [1, +\infty]$ e $k \leq 1$ definimos o seguinte espaço*

$$W^{-k,p'}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), u = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha w_\alpha, \text{ com } w_\alpha \in L^{p'}(\Omega)\}$$

equipado com com a norma

$$\begin{cases} ||u||_{W^{-k,p'}(\Omega)} = \inf\Big(\sum_{|\alpha|\leq k} ||w_\alpha||^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\Big)^{1/p'}, \ \textit{para } p' < \infty, \\ ||u||_{W^{-k,\infty}(\Omega)} = \inf\Big(\sup_{|\alpha|\leq k} ||w_\alpha||_{L^\infty(\Omega)}\Big), \ \textit{para } p' = +\infty \end{cases}$$

Notação 1.7. *Denotaremos o dual do espaço de Sobolev* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *por* $W^{-k,p}(\Omega)$ *e escrevemos*

$$(W_0^{k,p}(\Omega))^* = W^{-k,p'}(\Omega).$$

Teorema 1.18. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado e seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Para qualquer* $\varphi \in (W_0^{k,p}(\Omega))^*$ *temos a seguinte representação*

$$< \varphi, v >_{(W_0^{k,p}(\Omega))^*;W_0^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} w_\alpha \partial^\alpha v \ dx,$$

onde $w_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Definição 1.26. *No caso particular em que* $p = 2$ *e* $k = 1$ *temos que* $(H_0^1(\Omega))^* = (W_0^{1,2}(\Omega))^* = W^{-1,2}(\Omega) = H^{-1}(\Omega)$. *Isto é,* $H^{-1}(\Omega)$ *é o espaço dos funcionais lineares limitados* $\phi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, *com a seguinte norma*

$$||\phi||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{< \phi, u >; u \in H_0^1(\Omega), \ ||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}$$

A demonstração do resultado a seguir encontra - se em [6].

Teorema 1.19 (Caracterização de H^{-1}).

(i) Seja $\phi \in H^{-1}$. *Então existe uma funções* $\phi^0, \phi^1, ..., \phi^n$ *em* $L^2(\Omega)$ *tal que*

$$< \phi, u > = \int_\Omega \phi^0 u \ + \ \sum_{i=1}^n \phi^i u_{x_i} \ dx \qquad (u \in H_0^1(\Omega)). \tag{1.1}$$

(ii) Além disso temos

$$\|\phi\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\Big\{\Big(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |\phi^i|^2 dx\Big)^{1/2}; \quad \phi \textit{ satisfaz } (1.1) \textit{ para } \phi^0, \ldots, \phi^n \in L^2(\Omega)\Big\}.$$

(iii) Em particular, temos que

$$(v, u)_{L^2(\Omega)} = < v, u > \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \ v \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

1.3.5 Imersões de Sobolev

Definição 1.27. *Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está compactamente imerso em Y, e escrevemos*

$$X \subset\subset Y,$$

quando:

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ $(u \in X)$ *para alguma constante C;*

(ii) *Cada sequencia limitada em X é pré-compacta em Y.*

Mais precisamente, a condição (ii) significa que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequencia em X com $\sup_k \|u_k\|_X < \infty$, então alguma subsequencia $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge em Y para algum limite u :

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{k_j} - u\|_Y = 0.$$

Definição 1.28. *Para todo $1 \leq p \leq \infty$, definimos p^*, o expoente crítico associado a p, por*

$$\begin{cases} \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, & \textit{para } p < N, \\ \textit{qualquer } p^*;\ 1 \leq p^* < \infty, & \textit{para } p = N, \\ p^* = +\infty, & \textit{para } p > N, \end{cases}$$

onde N é a dimensão do espaço.

A demonstração do teorema a seguir pode ser vista em [4] (capitulo III) .

Teorema 1.20 (Teorema de Imersões de Sobolev.)**.** *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1.*

(1) Se $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq p \leq p^*$, então

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \tag{1.2}$$

com imersão compacta se $1 \leq p < p^*$. Além disso para $N < p \leq +\infty$ e $0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{N}{p}$ temos que

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega), \tag{1.3}$$

com imersão compacta para $0 \leq \alpha < 1 - \frac{N}{p}$.

(2) Para todo $q \in [1, N[$, temos que

$$L^1(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega).$$

- *Para todo $p \in]1, N[$ temos que*

$$L^p(\Omega) \subset W^{-1,p^*}(\Omega).$$

- *Para todo $p \leq N$ temos*

$$L^p(\Omega) \subset W^{-1,\infty}(\Omega).$$

1.4 Espaços $L^p(0,T;X)$ e $W^{1,p}(0,T;X)$

Seja X um espaço de Banach com norma $||\cdot||_X$. Definiremos a seguir os espaços $L^p(0,T;X)$ e $W^{1,p}(0,T;X)$.

Definição 1.29. *O espaço $L^p(0,T;X)$ consiste de todas as funções mensuráveis $u : [0,T] \longrightarrow X$ com norma*

(i) $||u||_{L^p}(0,T;X) := \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p dt \right)^{1/p} < \infty$ *para* $1 \leq p \leq \infty$,

(ii) $||u||_{L^\infty(0,T;X)} := ess \sup\limits_{0 \leq t \leq T} ||u(t)||_X < \infty$.

Definição 1.30. *O espaço*

$$C([0,T];X)$$

consiste de todas as funções continuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ com norma

$$||u||_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} ||u(t)||_X < \infty. \tag{1.4}$$

Teorema 1.21. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e separável, X^* o seu espaço dual e $1 \leq p < \infty$. Então dada qualquer funcional linear $\xi \in (L^p(0,T;X))^*$ existe uma única representação $w_\xi \in L^{p'}(0,T;X^*)$, tal que*

$$< \xi, v >_{L^{p'}(0,T;X^*);L^p(0,T;X)} = \int_0^T < w_\xi(y); v(y) >_{X^*,X} dy \quad \forall v \in L^p(0,T;X).$$

Onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Além disso a norma do espaço dual é dada por

$$||\xi||_{(L^p(0,T;X))^*} = ||w_\xi||_{L^{p'}(0,T;X^*)}.$$

Observação 1.8. *Se X é uma espaço de Banach e separável como no teorema anterior, temos que*

$$(L^p(0,T;X))^* = L^{p'}_{fraco\ \star}(0,T;X^*)$$

onde $L^p_{fraco\ \star}(0,T;X^*) := \{\xi : [0,T] \longrightarrow X^*;\ y \in [0,T] \longmapsto < \xi(y), v >_{X^*,X}$ *é mensurável para qualquer v fixo em X,* $y \longmapsto ||\xi(y)||_{X^*} \in L^{p'}([0,T])\}$.

Definição 1.31. *Seja X um espaço de Banach. O espaço de Sobolev*

$$W^{1,p}(0,T;X)$$

consiste de todas as funções $u \in L^p(0,T;X)$ tal que a derivada fraca u' existe e pertence a $L^p(0,T;X)$. Com norma dada por

$$||u||_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \Big(\int_0^T ||u(t)||_X^p + ||u'(t)||_X^p \ dt \Big)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ ess \sup\limits_{0 \le t \le T} (||u(t)||_X + ||u'(t)||_X), & p = \infty. \end{cases}$$

Além disso para $p = 2$ escrevemos $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.

Capítulo 2

Métodos do Ponto Fixo em Análise não Linear

Alguns resultados sobre os métodos do ponto fixo em análise não linear. Começamos com o teorema do ponto fixo de Banach, que usaremos para mostrar o teorema de existência de Picard-Lindelof.

2.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 2.1. *Sejam X um espaço topológico e $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação. Um ponto $x \in X$ é ponto fixo de T se $T(x) = x$.*

Exemplo 2.1. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ tem dois pontos fixos, $x = 0$ e $x = 1$.*

Definição 2.2. *Seja (X, d) um espaço métrico e $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que T é uma contração se $\forall\ x, y \in X$ com $x \neq y$ existe $K \in [0, 1)$ tal que*

$$d(T(x) - T(y)) \leq Kd(x, y).$$

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $M \subseteq X$ não vazio e fechado. Se $T : M \longrightarrow M$ é uma contração, então T tem um único ponto fixo $x \in M$.*

Observação 2.1. *A completude de (X, d) garante a existência do ponto fixo, e a hipótese de T ser contração nós dá a unicidade.*

Definição 2.3. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. A função $f : X \longrightarrow Y$ é dita Lipschitz (ou Lipschitziana) em $U \subseteq X$ aberto, se $\exists\ L \geq 0$ real tal que $\forall\ x_1, x_2\ \in U$*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld_X(x_1, x_2).$$

Para o próximo teorema, adotamos a notação $C(I,X)$ para denotar o conjunto das funções $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow X$ contínuas.

Teorema 2.2 (Picard-Lindelöf). *Sejam X um espaço de Banach com norma $\| \, . \, \|_X$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in X$. Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Suponha que $f : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ é contínua e limitada na região

$$Q = \{(x,y); |x - x_0| \leq a, \| \, y - y_0 \, \| \leq b\} \quad (a, b > 0)$$

e que f é Lipschitz em relação ao parâmetro $y \in Q$ para todo $(x,y) \in Q$. Então existe $\delta > 0$ e uma função $\phi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow X$ tal que $y = \phi(x)$ é a única solução do problema com valor inicial.

Demonstração. Temos que f é limitada em Q, então existe $K > 0$ tal que $\sup\limits_{(x,y)\in Q} \|f(x,y)\|_X \leq K$. Defina $\delta := \min(a, b/K)$ e $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e escreva $Z := C(I,X)$, temos que Z é um espaço de Banach com a norma

$$\|y\|_Z = \max_{x\in I} \|y(x)\|_X.$$

Definamos a norma $\|y\|_{Z'} = \max\limits_{x\in I} e^{-L|x-x_0|}\|y(x)\|_X$.
Observe que para todo $y \in Z$, temos que

$$e^{-L\delta}\|y\|_Z \leq \|y\|_{Z'} \leq \|y\|_Z,$$

logo as normas $\|.\|_Z$ e $\|.\|_{Z'}$ são equivalentes, segue que $(Z, \|y\|_{Z'})$ é espaço de Banach.
Defina $M := \{y \in Z; \|y - y_0\|_Z \leq b\}$ e a aplicação $T : M \subseteq (Z, \|.\|_{Z'}) \longrightarrow (Z, \|.\|_{Z'})$ dada por

$$T(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, dt$$

O objetivo é mostrar que T e M satisfazem o Teorema do ponto fixo de Banach. Vamos mostrar primeiro que M é fechado. Seja $\{y_n\} \subset M$ tal que $y_n \longrightarrow y$ em $(Z, \|.\|_{Z'})$, como as normas são equivalentes temos que $y_n \longrightarrow y$ em $(Z, \|.\|_Z)$. Como $\{y_n\} \subset M$ temos que $\|y_n - y_0\| \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ fazendo $n \longrightarrow \infty$ segue que $\|y - y_0\| \leq b$. Portanto $y \in M$ e M é fechado.

Note que $T : M \longrightarrow M$ está bem definida, pois para cada $y \in M$ temos que

$$\|T(y) - y_0\|_Z = \max_{x\in I} \| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, dt\|_X$$

$$\leq \max_{x\in I} \int_{x_0}^{x} \|f(t,y(t))\|_X \ dt$$

$$\leq K\delta \leq K(\frac{b}{K}) = b.$$

Concluímos que $T(y) \in M \Rightarrow T(M) \subset M$.

Finalmente vamos mostrar que T é contração. Como f é lipschitz com relação a variável y em Q, temos que existe $L > 0$ tal que

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\|_X \leq L\|y_1 - y_2\|_X \text{ para todo } (x,y_1) \text{ e } (x,y_2) \text{ em } Q.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\|T(y_1) - T(y_2)\|_{Z'} &= \max_{x\in I} e^{-L|x-x_0|} \| \int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t)) \ dt\|_X \\
&\leq \max_{x\in I} e^{-L|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} L\|y_1(t) - y_2(t)\|_X \ dt. \\
&\leq L \max_{x\in I} e^{-L|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} 1.\|y_1(t) - y_2(t)\|_X \ dt.
\end{aligned}$$

Escrevendo $1 = e^{-L|t-x_0|}e^{L|t-x_0|}$. Obtemos

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_X e^{-L|t-x_0|} \leq \|y_1 - y_2\|_{Z'} \ \forall \ t \in I,$$

a desigualdade anterior torna-se

$$\begin{aligned}
\|T(y_1) - T(y_2)\|_{Z'} &\leq L\|y_1 - y_2\|_{Z'} \max_{x\in I} e^{-L|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} e^{L|t-x_0|} dt \\
&= L\|y_1 - y_2\|_{Z'} \max_{x\in I} e^{-L|x-x_0|} \frac{1}{L} \left(e^{L|x-x_0|} - 1\right) \\
&\leq \left(1 - e^{-L\delta}\right) \|y_1 - y_2\|_{Z'}.
\end{aligned}$$

Portanto, T é uma contração sobre M em $(Z, \|\cdot\|_{Z'})$ com fator de contração $1 - e^{-L\delta}$. Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Banach existe um único ponto fixo $\phi \in C(I,X)$, o qual, é a única solução do problema de valor inicial. □

Nas situações em que um processo físico é modelado por um sistema de equações diferencias ordinárias com condição inicial, é desejável que quaisquer erros cometidos na medição de qualquer um dos dados ou o campo vetorial, não influenciam muito a solução. Em termos matemáticos, isso é conhecido como dependência contínua da solução de um problema com condição inicial (PCI), o resultado a seguir afirma que a solução para um PCI não depende apenas continuamente de dados iniciais, mas também do campo vetorial f.

Teorema 2.3 (Dependência Contínua)**.** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo contendo o ponto t_0. Seja J um subintervalo limitado de I, tal que $t_0 \in J$. Seja $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Seja $y(t; t_0, x_0)$ uma solução sobre J do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Denote por S_α a $\alpha-$vizinhança do gráfico de y, isto é,

$$S_\alpha := \{(t, y) \ : \ \|y - y(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha, \ t \in J\}. \tag{2.2}$$

Suponha que exista um $\alpha > 0$, tal que f satisfaz a condição de Lipschitz com respeito a variável y sobre S_α. Então a solução $y(t; t_0, x_0)$ depende continuamente dos valores iniciais e do campo vetorial f.

2.2 Teoria do Ponto Fixo de Brouwer

Notação 2.1. *Denote a bola unitária em $\mathbb{R}^n$ por $B^n := \overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$ e a esfera unitária (a fronteira da bola unitária) por $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\} = \partial B^n$.*

Definição 2.4. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Uma retração de X para A é uma aplicação $r : X \longrightarrow A$ tal que $r(x) = x$ para todo x em A. Se existe uma retração de X para A dizemos que A é um retrato de X.*

Lema 2.1 (Teorema da Não-Retração)**.** *Não há retração contínua $r : B^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$.*

Teorema 2.4 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer's)**.** *Toda aplicação $T : B^n \longrightarrow B^n$ tem um ponto fixo.*

Lema 2.2. *Seja K um subconjunto compacto, convexo e não-vazio de $\mathbb{R}^n$. Então, toda aplicação contínua $T : K \longrightarrow K$ tem um ponto fixo.*

2.3 Teorema do Ponto Fixo Schauder

Definição 2.5. *Seja $\varepsilon > 0$. Um subconjunto S do espaço métrico X é um ε-rede se*

$$X \subseteq \bigcup_{x \in S} B(x; \varepsilon).$$

Um espaço métrico X é dito ser totalmente limitado se existe uma ε-rede finita $\forall \varepsilon > 0$.

Definição 2.6. *Um subespaço S de um espaço métrico X é pré-compacto se $\overline{S}$ é compacto.*

Definição 2.7. *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é compacta se $f(S)$ é pré-compacto em Y sempre que $S \subseteq X$ é limitado.*

Teorema 2.5 (Heine-Borel)**.** *Um subconjunto S de um espaço métrico X é compacto se e, somente se, é completo e totalmente limitado.*

Corolário 2.1. *Um subespaço S totalmente limitado de um espaço métrico completo X é pré-compacto.*

Definição 2.8. *Um subconjunto $A \subseteq C(X)$ é equicontínuo em X se dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ δ_x tal que $\forall x, y \in X$ tem-se*

$$d(x,y) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall f \in A.$$

Teorema 2.6 (Ascoli-Arzelà)**.** *Seja X um espaço métrico compacto. Se A é um subespaço limitado equicontínuo de $C(X)$, então A é pré-compacto.*

Teorema 2.7 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $M \subseteq X$ um subconjunto não-vazio, limitado, convexo e fechado. Se $T : M \longrightarrow M$ é compacta, então T tem um ponto fixo.*

Teorema 2.8 (Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e compacta. Se o conjunto*

$$\{x \in X : x = \lambda T(x) \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\}.$$

é limitado, então T tem ponto fixo.

Munidos do Teorema do ponto fixo de Schauder, podemos relaxar a suposição da função f ser Lipschitz, e supormos apenas contínua e limitada em uma determinada região.

Teorema 2.9 (Cauchy-Peano)**.** *Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\,.\,\|_X$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in X$. Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Suponha que $f : Q \subseteq \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ é contínua e limitada em alguma região

$$Q = \{(x,y); |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \quad (a, b > 0).$$

Então existe $\delta > 0$ e uma função contínua $\phi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow X$ tal que $y = \phi(x)$ é uma (não necessariamente única) solução do problema de valor inicial.

Demonstração. Seja $K := \max_{(x,y)\in Q} \|f(x,y)\|_X$ e defina $\delta := \min(a, \frac{b}{K})$. Nós também definimos os conjuntos

$$I := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \text{ e } M := \{y \in Z; \|y - y_0\| \leq b\},$$

onde $Z = C(I, X)$ é um espaço de Banach com norma $\|y\|_Z = \max_{x\in I} \|y(x)\|_X$. O conjunto M é não-vazio, convexo, fechado e limitado; se definimos a aplicação $T : M \longrightarrow Z$ por

$$T(y(x)) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

temos que

$$\|T(y) - y_0\|_Z \leq \max_{x\in I} \| \int_{x_o}^{x} f(t, y(t))dt\|_X \leq \delta K \leq b.$$

Portanto $T(M) \subseteq M$.

Em seguida, mostramos que T é contínua. Seja $\{y_n\} \subseteq M$ tal que $y_n \longrightarrow y$ em M. Então

$$\begin{aligned} \|T(y_n) - T(y)\|_Z &= \max_{x\in I} \|T(y_n(x)) - T(y(x))\|_X \\ &= \max_{x\in I} \| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))]dt\|_X \\ &\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))\|_X dt. \end{aligned}$$

Observe que f é uniformemente contínua desde que f seja contínuo em um intervalo compacto, então podemos passar ao limite com $n \longrightarrow \infty$ para obter

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|T(y_n) - T(y)\|_Z \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))\|_X dt = 0.$$

Quando $T(y_n) \longrightarrow T(y)$ em $T(M)$, assim T é de fato contínua. $T(S)$ é equicontínuo para todos os conjuntos limitados $S \subseteq M$ porque

$$\sup_{y\in S} \|T(y(x_1)) - T(y(x_2)\|_X \leq LK|x_1 - x_2| \longrightarrow 0 \textit{ quando } |x_1 - x_2| \longrightarrow 0.$$

Além disso, $T(S)$ é limitado desde que

$$\sup_{y\in S} \|T(y(x))\|_X = \sup_{y\in S} \|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\|_X \leq \|y_0\|_x + b.$$

Logo T é uma aplicação compacta. Sendo assim pelo teorema 2.7 temos que existe solução do problema de valor inicial. $\square$

2.4 Aplicações na Análise não Linear

Definição 2.9. *Defina o gradiente* ∇f *da função* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

desde que todas as derivadas parciais de f *existam.*

Definição 2.10. *O Laplaciano* Δ *da função* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dado por*

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

desde que todas as derivadas parciais não mistas de segunda ordem existam.

No livro do Evans [6] foi provado seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Sejam* $g \in H^{-1}(\Omega)$ *e* $\mu \in [0, \infty)$. *Então existe uma única solução fraca* $v \in H_0^1(\Omega)$ *do problema*

$$\begin{aligned} -\Delta v + \mu v = g \quad &\text{em } \Omega \\ v = 0 \quad &\text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Isto é, v *é a única solução para o problema*

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \mu \int_\Omega vw \, dx \ = \ \langle g, w \rangle \ \ \forall \ w \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, a aplicação $g \mapsto (-\Delta + \mu I_d)^{-1} g = v$ *é contínua de* $H^{-1}(\Omega)$ *para* $H_0^1(\Omega)$, *isto é,*

$$\| u \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \, \| g \|_{H^{-1}(\Omega)} \, .$$

onde C *é uma constante dependente de* Ω.

Equações elípticas semilineares

Considere a equação diferenciais parciais semilineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ em } \Omega & (I) \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função.

O teorema a seguir garante a existência de solução fraca para este problema, cuja prova é baseada na construção de um espaço M e uma aplicação $T : M \longrightarrow M$ que satisfazem as hipóteses do teorema 2.7. Para mais detalhes veja [20]

Teorema 2.10. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ um domínio suave, aberto e limitado e $f \in C(\mathbb{R})$ função limitada. Então, o problema (I) tem uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$, isto é, a seguinte formulação vale:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f(u)\phi \, dx, \quad \forall \; \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Equações elípticas quase-lineares

Por fim, consideramos uma equação diferencial parcial quase-linear da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + g(\nabla u) + \mu u = 0 \quad in \ \Omega \\ u = 0 \quad on \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad (II)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio suave, aberto e limitado e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave e Lipschitz contínua.

Teorema 2.11. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aberto, limitado e suave e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave e lipschitz contínua. Se $\mu > 0$ é suficientemente grande, então existe uma função $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que u é uma solução fraca do problema (II).*

A demonstração tem como ferramenta principal o Teorema 2.8, e pode ser vista em [20].

Capítulo 3

Dedução das Equações de Navier-Stokes

Esse capítulo está baseado nos livros [15] e [4].

A mecânica dos fluidos é a área da física que estuda o efeito de forças em fluidos, que são conceituados como gases ou líquidos. Daremos uma breve descrição de dois modos de analisar os problemas da mecânica dos fluidos.

O **método Lagrangeano** consiste em seguir as partículas fluidas e determinar como as propriedades da partícula variam em função do tempo, ou seja, suas propriedades são determinadas durante o movimento.

Do **método Euleriano** obtemos informações do escoamento em função do que acontece em pontos fixos do espaço enquanto o fluido escoa por estes pontos.

Se dispusermos das informações suficiente para obter descrição Euleriana é possível determinar todas as informações Lagrangeanas do escoamento em questão e vice e versa. Por exemplo, se consideramos uma porção de fluido que, no instante $t = 0$, ocupa uma região do espaço $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$. Uma maneira de descrever seu movimento é por meio da *função fluxo* $\phi(\mathbf{a}, t)$ tal que, para cada $\mathbf{a} \in \Omega_0$, a curva $t \longmapsto \phi(\mathbf{a}, t)$ descreve a trajetória da partícula que ocupa a posição $\mathbf{a}$ no instante $t = 0$, essa consiste na descrição Lagrageana. Se em vez de acompanhar o movimento de cada partícula, podemos dar a velocidade $v(\mathbf{x}, t)$ da partícula que, no instante t, ocupa a posição $\mathbf{x}$, esta será a descrição Euleriana. Assim podemos estabelecer a seguinte relação

$$v(\phi(\mathbf{a}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{a}, t), \quad \mathbf{a} \in \Omega_0. \tag{3.1}$$

Se Ω_t é uma região do espaço ocupada pelo fluido no instante t, admitindo que a função

$$\begin{aligned} \phi_t : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_t \\ \mathbf{x} &\longmapsto \phi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

é um difeomorfismo definido por $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t)$, obtemos $v(\mathbf{x}, t)$ pela fórmula

$$v(\mathbf{x}, t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}), t)].$$

Reciprocamente, se o campo de velocidades $v(\mathbf{x}, t)$ for conhecido, obtemos $\phi(\mathbf{a}, t)$ resolvendo-se, para cada $\mathbf{a} \in \Omega_0$, a equação difencial ordinária com condição inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma(t) \;=\; v(\gamma, t) \\ \gamma(0) \;=\; \mathbf{a} \end{cases} \tag{3.3}$$

o qual, pelo Teorema 2.2, tem uma única solução $\gamma(t)$ com fluxo associado $\phi(\mathbf{a}, t)$ no instante t.

3.1 Derivada Material

Dada uma função $f(x, t)$, $x \in \Omega_t$, e uma trajetória $\gamma(t)$ que satisfaz (3.3), calculemos a derivada em relação ao tempo da função composta

$$f_\gamma(t) = f(\gamma(t), t),$$

usando a regra da cadeia, obtemos a derivada de f ao longo de γ dada por

$$\begin{aligned} f'_\gamma(t) &= \nabla f(\gamma(t), t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) \;+\; \frac{\partial f}{\partial t}(\gamma(t), t) \\ &= \left(v \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\gamma(t), t). \end{aligned}$$

(Denotamos por $\cdot$ o produto interno). Definimos a *derivada material* da função f pela fórmula:

$$\frac{Df}{Dt} \;=\; v \cdot \nabla f \;+\; \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3.4}$$

A derivada material de f, nós dá o valor, no instante t, da derivada de f ao longo da trajetória da partícula que, no instante t, ocupa a posição $x \in \Omega_t$. A seguir o papel de f será desempenhado pela função densidade de massa. O operador $\frac{D}{Dt}$ pode ser aplicado a uma função cujos valores são matrizes ou vetores, fazendo-o atuar em cada componente. Por exemplo:

$$\frac{Dv}{Dt} = \left(\frac{Dv_1}{Dt}, \frac{Dv_2}{Dt}, \frac{Dv_3}{Dt}\right)^T.$$

Utilizaremos nas próximas subseções o Teorema do Transporte, que será fundamental na formulação das leis básicas da dinâmica dos fluidos, dadas pelas equações da conservação de massa e movimento, as equações de Euler e equação de Navier-Stokes.

Teorema 3.1 (Teorema do Transporte)**.** *Sejam ϕ a função fluxo e Ω_t uma região do $\mathbb{R}^3$ limitada com bordo $\partial\Omega_t$ de classe C^1 relacionadas pelas fórmulas (3.2). Se ϕ é um difeomorfismo, então vale a seguinte fórmula:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)\ dx \ = \int_{\Omega_t}\Big(\frac{Df}{Dt} + f\nabla\cdot v\Big)(x,t)\ dx\ . \tag{3.5}$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [15]. □

Observação 3.1. *Esse resultado pode generalizado para equações vetoriais, na qual $F(x,t)$ representa uma quantidade vetorial, a equação (3.4) se escreve como:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} F(x,t)\ dx \ = \int_{\Omega_t}\Big(\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\otimes v)\ \Big)(x,t)\ dx\ .$$

Onde $\operatorname{div}(F\otimes v) = (\nabla\cdot v)F + (v\cdot\nabla)F$ *e* $(F\otimes v)_{i,j} = F_i v_j$.

3.2 Equação da Conservação da Massa

Vamos denotar por $\rho = \rho(x,t)$ a densidade de massa do fluido. Por definição a função ρ é tal que a massa da porção de fluido que ocupa uma região Ω no instante t é dada por

$$\int_{\Omega}\rho(x,t)\ dx\ .$$

Se Ω é um aberto qualquer ocupado pelo fluido no instante t, então existe um aberto Ω_0 tal que $\phi_t(\Omega_0) = \Omega$, já que estamos supondo que ϕ_t é um difeomorfismo. Assim, a hipótese que a massa se conserva se traduz na equação

$$\int_{\Omega_0}\rho(x,0)\ dx \ = \ \int_{\Omega_t}\rho(x,t)\ dx\ ,$$

válida para $t \geq 0$. Assumindo como hipótese que ρ tem derivadas contínuas, e aplicando o Teorema 3.1, temos:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0}\rho(x,0)\ dx \ = \frac{d}{dt}\ \int_{\Omega_t}\rho(x,t)\ dx \ = \ \int_{\Omega_t}\Big(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\ \nabla\cdot v\Big)(x,t).$$

Sendo assim a função contínua

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\ \nabla\cdot v$$

é tal que sua integral, num instante de tempo arbitrário, sobre qualquer aberto do espaço é nula. Isto é possível, se a função for identicamente nula. Obtemos assim a *equação da conservação* da massa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \nabla \cdot v = 0. \tag{3.6}$$

Usando a definição da derivada material (3.4) e a identidade

$$\nabla \cdot (\rho v) = \nabla \rho \cdot v + \rho \, \nabla \cdot v,$$

a equação (3.6) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Observação 3.2. *A condição sobre o volume de qualquer porção de fluido ser preservado pelo fluxo é descrita pela equação*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx \; = \; 0. \tag{3.7}$$

Se esta condição for satisfeita, o Teorema do Transporte 3.1 aplicado a função constante $f \equiv 1$ implica que a equação

$$\int_{\Omega_t} \nabla \cdot v \; dx \; = \; 0.$$

é válida para todo aberto Ω_t. Por isso o divergente da velocidade é nulo em todos os pontos:

$$\nabla \cdot v \; = \; 0, \tag{3.8}$$

A recíproca também é verdadeira, ou seja, as equações (3.8) e (3.7) são equivalentes.

Se um fluxo tem densidade constante, independente do tempo e do espaço, a equação em (3.6) implica que o fluido satisfaz (3.8), portanto, também a condição de incompressibilidade (3.7). Em virtude do foi discutido acima, daremos a seguinte definição

Definição 3.1. *Diz-se que o fluxo de fluido é incompressível se uma das seguintes propriedades equivalentes forem satisfeitas*

I O volume de qualquer elemento fluido é constante ao longo do tempo;

II O campo velocidade com divergência nula. Isto é $(\nabla \cdot v)(x,t) = 0 \quad \forall \; (x,t)$;

III A densidade ρ é constante ao longo das trajetórias associadas à velocidade v.

3.3 Equação da Conservação do Momento

O momento linear é uma grandeza física determinada pela equação

$$P \;=\; mv$$

que indica o movimento linear de um objeto, onde $\vec{v}$ é a velocidade, que nos dá a taxa de movimento do objeto e m é a massa. Derivando a equação acima com relação ao tempo, obtemos a segunda lei de Newton.

$$F \;=\; \frac{dP}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}(mv).$$

Se a massa é constante temos

$$F \;=\; m\frac{d}{dt}(v) \;=\; ma,$$

onde a é a aceleração. Sendo assim o momento linear de uma porção de fluido que ocupe, no instante t a região Ω_t é dado pela integral

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)v(x,t)\; dx.$$

Pela segunda lei de Newton, a derivada em relação ao tempo desta quantidade é igual à força total atuando em Ω_t. Essa força total é igual à soma das *forças externas* que atuam no fluido (forças da gravidade, forças de Coriolis ou mesmo forças eletromagnéticas) e das *forças internas*, exercidas sobre Ω_t pelo restante do fluido. Suponhamos que seja conhecido o somatório das forças externas por unidade de massa, que será denotado por $f(x,t)$. Isto é, a força externa total atuando na porção de fluido que, no instante t, ocupa a região Ω_t é denotada por

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)f(x,t)\; dx.$$

Quanto às forças internas, suponhamos serem *forças de contato* ou *tensões*. Desprezamos então ações da distância entre as partículas do fluido e supomos existir um *campo de tensões* $\tau(x,t,\mathbf{n})$ que dê a força de contato por unidade de área atuando numa superfície perpendicular a $\mathbf{n}$ no ponto x, no instante t.

A força exercida pelo resto do fluido na porção de fluido que, no instante t, ocupa a região fechada Ω_t, delimitada pela superfície $\partial\Omega_t$, é dada por

$$\int_{\partial\Omega_t} \tau(x,t,\mathbf{n})\; dS_x \;,$$

em que $\mathbf{n}$ denota o vetor unitário normal a $\partial\Omega_t$, apontando para fora. O campo de tensões não é independente das outras grandezas físicas do problema. Na verdade, vamos obter uma equação diferencial envolvendo τ, ρ, v e f. O Teorema de Cauchy (veja [9], parágrafo 7) garante que, se o fluido satisfaz a segunda lei de Newton, então τ depende linearmente de $\mathbf{n}$, ou seja, existe uma função matricial $S(x,t)$ tal que

$$\tau(x,t,\mathbf{n}) \ = S(x,t)\mathbf{n}$$

Observação 3.3. *Em particular, $\tau(x,t,-\boldsymbol{n}) = -\tau(x,t,\boldsymbol{n})$, o que é consequência da terceira lei de Newton*

A segunda lei de Newton então fica expressa pela seguinte integral, de onde omitimos os argumentos (x,t) das funções que aparecem nos integrandos:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho v \ dx \ = \ \int_{\Omega_t} \rho f \ dx \ + \ \int_{\partial\Omega_t} S\mathbf{n} \ dS_x \ .$$

Podemos calcular a derivada do lado esquerdo desta equação aplicando o Teorema do Transporte 3.1 a cada componente. Quanto a integral sobre a superfície, ela pode ser transformada numa integral de volume usando o Teorema da Divergência. Obtemos então:

$$\int_{\Omega_t} \Big[\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v \ \nabla \cdot v - \rho f - DivS\Big] \ dx \ = \ 0, \tag{3.9}$$

onde $DivS$ denota o vetor que tem a i-ésima componente igual ao divergente do i-ésimo vetor-linha de S. Usando (3.6) temos a igualdade

$$\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v \nabla \cdot v \ = \ \rho \frac{Dv}{Dt} \ ,$$

de onde, usamos a equação (3.9) e o fato do seu integrando ser contínuo e Ω_t arbitrário a *Equação da Conservação do Momento*:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} \ = \ \rho f + DivS. \tag{3.10}$$

3.4 Equações de Euler

As equações de conservação da massa (3.6) e do momento (3.10) são insuficientes para descrever o fluido. Para complementar a descrição precisamos relacionar S com as outras variáveis. Supomos que as forças internas perpendiculares à superfície Ω_t (ausência de atrito ou viscosidade), $S\mathbf{n}$ deve ser sempre paralelo a $\mathbf{n}$ ou, equivalentemente, existe uma função $p(x,t)$ tal que

$$S(x,t) = -p(x,t)\mathbf{I}$$

onde $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade. A função p é chamada *pressão* e

$$DivS = -\nabla p\ .$$

Esta hipótese ainda é insuficiente, (3.6) e (3.10) consistem agora de quatro equações escalares para cinco incógnitas v_1, v_2, v_3, ρ e p. Uma saída é supor que fluido é incompressível, isto é, a densidade é constante. Usando (3.6) e (3.10), obtemos então as **Equações de Euler** para fluido não-viscoso e incompressível, onde ρ ainda denotará a valor constante da densidade de massa:

$$\begin{cases} \rho\frac{\partial v}{\partial t} \ + \ \rho(v\cdot\nabla)v \ = \ -\nabla p \ + \ \rho f \\ v \ = \ 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Observação 3.4. *O operador $v\cdot\nabla$ é aplicado em (3.11) a cada componente de v, isto é:*

$$[(v\cdot\nabla)v]_i = \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

A equação (3.11) pode ser lida como a segunda lei de Newton, o lado esquerdo correspondendo ao termo massa vezes aceleração e o direito à força, ambos por unidade de volume. O aparecimento do termo não-linear deve-se à própria descrição euleriana: $\frac{\partial}{\partial t}v$ não representa a variação da velocidade no ponto $\mathbf{x}$, que é ocupado por partículas possivelmente diferente a cada instante. A variação da velocidade de uma partícula é igual a $\frac{D}{Dt}v$, como visto anteriormente com a definição de derivada material.

3.5 Equações de Navier-Stokes

Ao tentarmos obter formas para a matriz S que incluam forças de viscosidades, argumentos físicos e matemáticos (veja [13, 8] e [9], parágrafo 16), nos permitem concluir que, a primeira aproximação, S deve ser dada por

$$S = -pI + \mu'(\nabla\cdot v)I + \mu(\nabla v), \tag{3.12}$$

onde, μ e μ' são constante, e a matriz ∇v é denotada por:

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Para complementar o sistema formado pelas equações em (3.6), (3.10) e (3.12), supomos que o fluido é incompressível, neste caso, temos que o divergente de v é nulo. Isso nós permite obter duas simplificações: O termo $\mu'\nabla \cdot v$ desaparece e vale a igualdade

$$Div(\nabla v) \ = \Delta v.$$

A equação de conservação do momento (3.10) se escreve então como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} \ = \ \rho f \ - \ \nabla p \ + \ \mu \Delta v, \tag{3.14}$$

conhecida como *equações* de *Navier-Stokes*. A constante μ é chamada de coeficiente de *viscosidade*, que tem como propriedade física caracterizar a resistência de um fluido ao londo do escoamento. Um fluido viscoso e incompressível com a densidade ρ não constante fica então descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \rho \frac{Dv}{Dt} \ = \ \rho f \ - \ \nabla p \ + \ \mu \Delta v, \\ \ \nabla \cdot v \ = \ 0. \end{cases}$$

As equações de *Euler* (com densidade ρ constante) e de *Navier-Stokes* (com desidade não-constante), para a conservação do momento, são descritas por:

Euler

$$\begin{cases} \rho \frac{Dv}{Dt} + \rho (v \cdot \nabla) v \ = \ \rho f - \ \nabla p, \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases}$$

Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) \ = \ \rho f - \ \nabla p \ + \ \mu \Delta v, & (3.15) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, & (3.16) \\ \nabla \cdot v = 0. & (3.17) \end{cases}$$

3.6 Formas conservativas e não-conservativas das equações de Navier-Stokes

Nas contas a seguir admite-se que u, ρ e p são funções diferenciáveis.

Notação 3.1. *Denotaremos por* $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, *onde* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, *é o operador gradiente e* $\cdot$ *o produto escalar em* $\mathbb{R}^3$. *Sendo assim temos* $\nabla \cdot u = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$ *e*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho u \otimes u) &= \partial_1(u_1 \rho u) + \partial_2(u_2 \rho u) + \partial_3(u_3 \rho u) \\
&= (\partial_1 u_1)\rho u + u_1 u \partial_1 \rho + u_1 \rho \partial_1 u + (\partial_2 u_2)\rho u + u_2 u \partial_2 \rho + u_2 \rho \partial_2 u \\
&\quad + (\partial_3 u_3)\rho u + u_3 u \partial_3 \rho + u_3 \rho \partial_3 u \\
&= (\nabla \cdot u)\rho u + (u \cdot \nabla \rho) u + \rho (u \cdot \nabla) u.
\end{aligned}$$

Observação 3.5. *A equação (3.15) está na forma conservativa, agora desenvolvendo seus termos*

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot u) u + (u \cdot \nabla \rho) u + \rho (u \cdot \nabla) u - \mu \Delta u = \rho f - \nabla p \\
&\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot u) \Big) u + \rho (u \cdot \nabla) u - \mu \Delta u = \rho f - \nabla p,
\end{aligned}$$

e usando a equação (3.16)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \cancelto{0}{\Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \Big)} u + \rho (u \cdot \nabla) u - \mu \Delta u = \rho f - \nabla p,$$

obtemos a equação na forma não-conservativa

$$\rho \Big(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \Big) - \mu \Delta u = \rho f - \nabla p.$$

Além disso, também temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cancelto{0}{\nabla \cdot u} + u \cdot \nabla \rho = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0.$$

Sendo assim as equações (3.15) e (3.16) tem a forma não-conservativa, dada como

$$\begin{cases} \rho\Big(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\Big) - \mu\Delta u = \rho f - \nabla p & \text{(3.15')} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0. & \text{(3.16')} \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{(3.17')} \end{cases}$$

Capítulo 4

Existência de Solução Fraca

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ suave, e seja $T > 0$. O movimento do fluido é descrito por sua velocidade $u = (u_1, u_2, u_3)$, densidade ρ, e pressão p, as quais são funções do ponto $x \in \Omega$ e tempo $t \in [0, T]$, istó é, $u(x, t),\ \rho(x, t),\ p(x, t)$. As equações abaixo estão definidas sobre o cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$ e acopladas às condições de fronteira e inicial para $t = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \Delta u = \rho f - \nabla p & (4.1) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 & (4.2) \\ \nabla \cdot u = 0 & (4.3) \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times]0, T[& (4.4) \\ \rho(0) = \rho_0, \quad (\rho u)(0) = \rho_0 u_0. & (4.5) \end{cases}$$

Onde a densidade deve satisfazer

$$\rho \geq 0, \quad \rho_0 \geq 0$$

Observação 4.1. *Quando comparado com o modelo homogêneo, vide [4] (capítulo V), encontramos novas dificuldades visto que agora a função densidade não é mais constante, e além disso, se consideramos situações em que existem regiões de vácuo (ou seja, que a densidade é zero) então o problema descrito acima degenera, por isso a condição inicial deve ser aplicada ao par densidade de massa e densidade de momento* $(\rho, \rho u)$ *ao invés do par* (ρ, u).

4.1 Espaços de Funções e Lemas

Definição 4.1. *Para $1 \leq r \leq \infty$ os espaços de Sobolev são definidos por*

$$
\begin{aligned}
& W^{1,r}(\Omega) = \{v \in L^r(\Omega); \nabla v \in (L^r(\Omega))^3\}, \\
& W_0^{1,r}(\Omega) \textit{ o fecho de } \mathcal{D}(\Omega) \textit{ em } W^{1,r}(\Omega), \\
& W^{-1,r}(\Omega) = \{v = v_0 + \sum_{i=1}^{3} \partial_i v_i : v_i \in L^r(\Omega), i = 0, ..., 3\}, \\
& H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega), \quad H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) = W^{-1,2}(\Omega).
\end{aligned}
$$

todos esses espaços estão equipados com suas normas usuais. A seguir definiremos alguns espaços fundamentais, utilizados no estudos das equações de Navier-Stokes.

Definição 4.2.

$$
\begin{aligned}
& \mathscr{V} = \{v \in (\mathcal{D}(\Omega))^3; \ \nabla \cdot v = 0\} \\
& V = \textit{ fecho de } \mathscr{V} \textit{ em } (H^1(\Omega))^3, \textit{ equipado com a norma } \ \|u\|_V = \sum_{j,i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& H = \textit{ fecho de } \mathscr{V} \textit{ em } (L^2(\Omega))^3 \textit{ equipado com a norma } \|u\|_H = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Observação 4.2. *Desde que a fronteira Γ de Ω é Lipschitz nós temos*

$$
\begin{aligned}
V =& \{v, v \in (H^1(\Omega))^3, \ \nabla \cdot v = 0, \ v|\Gamma = 0\} \\
H =& \{v, v \in (L^2(\Omega))^3, \ \nabla \cdot v = 0, \ v|\Gamma \cdot n = 0\}
\end{aligned}
$$

Onde $v|\Gamma$ é o traço de v sobre Γ e n é um campo vetorial normal sobre Γ. Ver Proposições 1 e 2 em [21] (pp. 25, 26), ou Corolário 2.5 e Teorema 2.8 de [7].

Notação 4.1. *Nós denotamos por $(\ ,\ )_\Omega$ o produto de dualidade em todos os espaços de funções em Ω. Em particular*

$$
(v, w)_\Omega = \int_\Omega v(x)w(x)\ dx, \ \textit{se } v \in L^r(\Omega), \ w \in L^{r'}(\Omega), \ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1,
$$

onde $v(x)w(x)$ é substituído por $v(x) \cdot w(x)$ se v e w forem funções vetoriais.

E escrevemos

$$
(v, w)_\Omega = w(v) \textit{ quando } v \in \mathcal{D} \textit{ e } w \in \mathcal{D}'.
$$

A demonstração do lema abaixo pode ser vista em [21] (Lema 9, p. 30), ou ainda, em [7] (Teorema 2.3, p. 2.5.).

Lema 4.1. *Seja $w \in (H^{-1}(\Omega))^3$ satisfazendo $(v, w)_\Omega = 0$ para todo $v \in \mathscr{V}$. Então existe $q \in L^2(\Omega)$ tal que $w = \nabla q$. Além disso, q pode ser escolhido de tal forma que a aplicação $L : w \longrightarrow q$ é linear e contínua de $(H^{-1}(\Omega))^3$ em $L^2(\Omega)$.*

A generalização do Lema 4.1 para distribuições que dependem do tempo é obtida pelo lema abaixo.

Lema 4.2. *Seja $h \in \mathcal{D}'(]0, T[; (H^{-1}(\Omega))^3)$ satisfazendo $(h, v)_\Omega = 0$, para todo $v \in \mathscr{V}$. Então existe $g \in \mathcal{D}'(]0, T[; L^2(\Omega))$ tal que $h = \nabla g$. Além disso, g pode ser escolhido de tal forma que a aplicação $h \longrightarrow g$ é linear e contínua de $W^{s,r}(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$ em $W^{s,r}(0, T; (L^2(\Omega)))$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq r \leq \infty$.*

Demonstração. O espaço

$$E = \{w \in (H^{-1}(\Omega))^3 : (w, v)_\Omega = 0, \forall v \in V\}$$

equipado com a norma de $(H^{-1}(\Omega))^3$ é um espaço de Banach.

A distribuição $(h, v) \in \mathcal{D}'(]0, T[)$ é definida por $((h, v)_\Omega, \varphi)_{]0,T[} = ((h, \varphi)_{]0,T[}, v)_\Omega$, e, portanto, a suposição sobre h implica que $h \in \mathcal{D}'(]0, T[; E)$. A aplicação L definida no Lema 4.1 é linear e contínua de E em L^2; portanto $Lh \in \mathcal{D}'(]0, T[; L^2(\Omega))$, e $g = Lh$ tem as propriedades necessárias. □

Os seguintes lemas 4.3 e 4.4 foram provados no artigo do Simon [18] com demonstrações bastante técnicas. Por essa razão omitiremos suas provas.

Lema 4.3.

(i) Para $1 \leq r \leq \infty$, $W^{1,r}(\Omega) \subset L^{r_*}(\Omega)$ com imersão contínua, onde $\frac{1}{r_*} = \frac{1}{r} - \frac{1}{3}$, r_* é qualquer real finito se $r = 3, r_* = \infty$ se $r > 3$.

A imersão $W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ é compacta se $s < r_*$.

(ii) Para $1 \leq s \leq r \leq \infty$ o produto é contínuo, se $l \geq 1$, em

$$W^{1,r}(\Omega) \times W^{1,s}(\Omega) \longrightarrow W^{1,l}(\Omega), \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{r_*} + \frac{1}{s}.$$

(iii) Para $1 \leq r \leq \infty, 1 \leq s \leq \infty$ o produto é contínuo, se $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leq 1$ em

$$W^{1,r}(\Omega) \times W^{-1,s}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,l}(\Omega), \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{r_*} + \frac{1}{s}.$$

Notação 4.2. *Denotamos por $\tau_h f$ a função translação de f, isto é, $\tau_h f(t) = f(t + h)$. Espaços Nikolskii são definidos para $1 \leq q \leq \infty$, $0 < s < 1$, por*

$$N^{s,q}(0, T; E) = \{f \in L^q(0, T; E) : \sup_{h>0} h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^q(0,T-h;E)} < \infty\}.$$

O lema a seguir determina propriedades de compacidade para funções que dependem do tempo e pode ser visto em [17].

Lema 4.4. *Sejam $X \subset E \subset Y$ espaços de Banach e $X \hookrightarrow E$ sendo uma imersão compacta. Então os seguintes imersões são compactas:*

(i) $L^q(0,T;X) \cap \{\varphi : \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^1(0,T;Y)\} \hookrightarrow L^1(0,T;E)$ *se* $1 \leq q \leq \infty$;

(ii) $L^\infty(0,T;X) \cap \{\varphi : \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^r(0,T;Y)\} \hookrightarrow C([0,T];E)$ *se* $1 < r \leq \infty$;

(iii) Para qualquer função $k \in L^1(0,T),\ k \geq 0$ *e* $1 < r \leq \infty$

$$L^\infty(0,T;X) \cap \{\varphi : |\frac{\partial \varphi}{\partial t}| - k \in L^r(0,T)\} \hookrightarrow C([0,T];E) \quad se\ 1 < r \leq \infty;$$

(iv) $L^q(0,T;X) \cap N^{s,q}(0,T;Y) \hookrightarrow L^q(0,T;E)$ *se* $s > 0,\ 1 \leq q \leq \infty$.

Agora relembramos dois lemas do tipo Gronwall que são uma ferramenta útil para obter estimativas a priori para as soluções aproximadas.(Veja os livros [1], [4] e [6]).

Lema 4.5. *Sejam* $g \in W^{1,1}(0,T), g \geq 0$ *e* $k \in L^1(0,T),\ k \geq 0$, *satisfazendo*

$$\frac{d}{dt} g^2 \leq gk, \quad g(0) \leq g_0.$$

Então

$$g(t) \leq g_0 + \frac{1}{2} \int_0^T k(s)ds \qquad \forall t \leq T.$$

Lema 4.6. *Sejam* $g \in W^{1,1}(0,T),\ g \geq 0$ *e* $k \in L^1(0,T),\ k \geq 0$, *satisfazendo*

$$\frac{dg}{dt} \leq F(g) + k, \ \ em\ [0,T],\ g(0) \leq g_0,$$

onde F é limitado em conjuntos limitados de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\forall a > 0,\ \exists A > 0 \ tal\ que\ |x| \leq a \Rightarrow |F(x)| \leq A.$$

Então para cada $\varepsilon > 0$ existe T_ε independente de g, tal que

$$g(t) \leq g_0 + \varepsilon \quad \forall\ t \leq T_\varepsilon.$$

4.2 t- Suavidade Fraca de qualquer solução

A condição (4.6) estabelecida pela Proposição 4.2 implicará que ρ e $\int_\Omega \rho u \cdot v$ tem integral t-derivável e, portanto, são contínuas. Esta continuidade será usada como hipótese do Teorema 4.4. Durante a demonstração da Proposição 4.2 utilizaremos alguns resultados, que podem ser visto em [4].

Definição 4.3. *[4] Sejam X e Y espaços de Banach tal que $X \subset Y$ é uma imersão continua e X é denso Y. Seja $T > 0$ e p, q satisfazem $1 \leq p, q \leq +\infty$. Definimos o espaço de Banach*

$$E_{p,q} = \{u \in L^p(]0,T[;X);\ \frac{du}{dt} \in L^q(]0,T[;Y)\},$$

com norma dada por

$$||u||_{E_{p,q}} = ||u||_{L^p(]0,T[,X)} + \Big|\Big|\frac{du}{dt}\Big|\Big|_{L^q(]0,T[,Y)}.$$

Além disso, se p, q são finitos então $C^\infty([0,T],X)$ é denso em $E_{p,q}$.

Proposição 4.1. *[4] Para qualquer elemento $u \in E_{p,q}$ (definido em quase todo lugar) possuir uma representação continua em $[0,T]$ com valores em Y e uma imersão continua de $E_{p,q}$ em $C^0([0,T],Y)$. Além disso, $\forall t_1, t_2 \in [0,T]$ temos que*

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t^2} \frac{du}{dt} dt,$$

onde identificamos u e sua representação continua.

Proposição 4.2. *Assumimos que Ω é limitado e com fronteira Lipschitz,*

$$\begin{aligned} &u \in L^2(0,T;V),\ \rho \in L^\infty(Q),\ p \in \mathcal{D}'(Q),\ f \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3),\ \rho \geq 0, \\ &\rho^{1/2}u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3) \end{aligned} \tag{4.6}$$

e que (4.1) e (4.2) sejam satisfeitas, em $\mathcal{D}'(]0,T[;\Omega)$.

(i) Então

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\ &\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho u \cdot v dx \in L^1(0,T) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Mais precisamente, seja $g = |\rho f|_{L^2} + |\rho u \otimes u - \mu \nabla u|_{L^2}$; então $g \in L^1(0,T)$ e

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho u \cdot v dx\Big| \leq g|v|_V. \tag{4.7}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} &\rho \in C(0,T;W^{-1,\infty}(\Omega)), \\ &\int_\Omega \rho u \cdot v\ dx \in C([0,T]) \qquad \forall v \in V. \end{aligned}$$

(ii) Além do que,

$$
\begin{aligned}
\rho u \in & L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3) \cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3), \\
\rho u u \in & \ L^{4/3}(0,T;(L^2(\Omega))^9), \\
\frac{\partial \rho u}{\partial t} & + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - \rho f \in W^{-1,\infty}(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Demonstração. **Prova do item (ii):** Por hipótese temos que $u \in L^2(0,T;V)$, segue do Lema 4.3 que $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ é uma imersão contínua, visto que $r^* = 6$, logo $u \in L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)$. Como $\rho \in L^\infty(Q)$ temos que $\rho u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ pois

$$
\|\rho u\|_{(L^6(\Omega))^3} \leq K \sum_{i=1}^{3} \left(\int_\Omega |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{6}}
$$

Desde que $\rho^{1/2} u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\rho u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} &= \text{ess} \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^{3} \left(\int_\Omega |\rho^{1/2} \rho^{1/2} u_i(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K \text{ess} \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^{3} \left(\int_\Omega |\rho^{1/2} u_i(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= K \text{ess} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\rho^{1/2} u(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} < \infty.
\end{aligned}
$$

Agora vamos mostrar que $\rho |u|^2 \in L^{4/3}(0,T;L^2(\Omega))$. Note que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \rho^2 |u|^4 dx &= \int_\Omega \underbrace{|\rho^{3/2}|}_{\leq C,\ \rho \in L^\infty(Q)} |\rho^{1/2}||u||u|^3 dx \\
&\leq C \int_\Omega |\rho^{1/2}||u||u|^3 dx.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \rho^2 |u|^4 dx &\leq C \left(\int_\Omega \rho |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_\Omega |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}
$$

devido ao mergulho de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ e a estimativa (proveniente da formulação variacional, que obteremos durante a demonstração do Teorema 4.4)

$$\int_\Omega \rho|u|^2 dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\ dt \leq C. \tag{4.9}$$

Logo temos que

$$\int_0^T \left(\left(\int_\Omega \left(\rho|u|^2\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} dt = \int_0^T \left(\int_\Omega \rho^2|u|^4 dx\right)^{\frac{2}{3}} dt \leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\ dt \leq C.$$

Portanto $\rho|u|^2 \in L^{4/3}(0,T;L^2(\Omega))$, consequentemente, $\rho u u \in L^{4/3}(0,T;(L^2(\Omega))^9)$.
Agora usando que

- $\dfrac{\partial \rho u}{\partial t} \in W^{-1,\infty}(0,T;(L^2(\Omega))^3)$,

- $\nabla \cdot (\rho u \otimes u),\ \mu\Delta u, \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$

- $\rho f \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, e que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ é uma imersão continua temos que

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - \rho f \in W^{-1,\infty}(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3).$$

Prova do item (i):

a) Pelo item (ii) temos que $\rho u \in L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)$, segue que

$$\Big(\int_\Omega \rho u \cdot \nabla\varphi\ dx\Big)(t) = F(t) \in L^2(0,T),$$

onde $\varphi \in W_0^{1,6/5}(\Omega)$. Considerando o funcional

$$\langle -\nabla \cdot (\rho u), \varphi\rangle_{(W_0^{1,6/5}(\Omega))^*, W_0^{1,6/5}(\Omega)} = \int_\Omega -\nabla \cdot (\rho u) \cdot \varphi\ dx.$$

Obtemos que

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega -\nabla \cdot (\rho u) \cdot \varphi\ dx\Big| &\leq \int_\Omega |\rho u \cdot \nabla\varphi| dx \\
&\leq \|\rho u\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^{6/5}(\Omega)} \\
&\leq C\|u\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{1;6/5}(\Omega)} \\
&\Downarrow (\circledast) \\
&\leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{1,6/5}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$((\circledast)\ H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega) \ \Rightarrow\ ||u||_{L^6(\Omega)} \leq C||u||_{H^1(\Omega)} = C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}\ )$. Segue que

$$|\langle -\nabla \cdot (\rho u), \varphi \rangle_{(W_0^{1,6/5}(\Omega))^*, W_0^{1,6/5}(\Omega)}| \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}(t)\|\varphi\|_{W^{1,6/5}(\Omega)} \quad \text{q.t.p} \quad t \in [0,T].$$

Tomando o supremo sobre todas as funções φ com $\|\varphi\|_{W^{1,6/5}(\Omega)} \leq 1$, concluímos que

$$\| -\nabla \cdot (\rho u)\|_{(W_0^{1,6/5}(\Omega))^*} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}(t) < \infty \quad \text{q.t.p} \quad t \in [0,T].$$

O que implica que $-\nabla \cdot (\rho u) \in (W_0^{1,6/5}(\Omega))^* = W^{-1,6}(\Omega)$ q.t.p $t \in [0,T]$. Além disso,

$$\| -\nabla \cdot (\rho u)\|^2_{L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega))} = \int_0^T \| -\nabla \cdot (\rho u)\|^2_{W^{-1,6}(\Omega)} dt \leq C.$$

Portanto $-\nabla \cdot (\rho u) \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega))$. Assim pela equação (4.2) que é válida em $\mathcal{D}'(]0,T[\Omega)$ obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)).$$

b) Então pela Proposição 4.1 ρ é contínua em $[0,T]$ sobre $W^{-1,6}(\Omega)$.
c) Para cada $v \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho u, v\Big) = \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}, v\right)_\Omega &= (\rho f - \nabla p - \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \mu \Delta u, v)_\Omega \\ &= (\rho f, v)_\Omega + (p, \nabla \cdot v)_\Omega + \big(\rho u \otimes u - \mu \nabla u, \nabla v\big)_\Omega, \ \ em\ \mathcal{D}'(]0,T[).\end{aligned}$$

Se $\nabla \cdot v = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho u \cdot v dx = \int_\Omega \big(\rho f \cdot v + \rho u \otimes u \cdot \nabla v - \mu \nabla u \cdot \nabla v\big) dx, \quad em\ \mathcal{D}'(]0,T[).$$

Por continuidade essa equação vale para $v \in V$. Além disso, o lado direito é limitado por $g|v|_V$, com

$$g = |\rho f|_{(L^2(\Omega))^3} + |\rho u \otimes u - \mu \nabla u|_{(L^2(\Omega))^9}.$$

Por (ii) segue que $g \in L^1(0,T)$. Logo $\int_\Omega \rho u.v\ dx \in W^{1,1}(0,T) \subset C([0,T])$. $\square$

4.3 t-Suavidade Fracionária de qualquer solução

Nesta seção enunciaremos uma proposição cuja demonstração pode ser vista em [17], a qual garantirá que ρu possui suavidade t-fracionária e, mais precisamente que, se encontra em um espaço de Nikolskii definido na Notação 4.2. Esse fato será usado posteriormente para obter compacidade na prova de existência.

Proposição 4.3.

(i) Assumindo que a Proposição 4.2 é satisfeita. Então

$$\rho u \in N^{1/4,2}(0,T;(W^{-1,3/2}(\Omega))^3).$$

(ii) Se além disso ρ tem limite inferior $\alpha > 0$ em Q, então

$$u \in N^{1/4,2}(0,T;(L^2(\Omega))^3).$$

Demonstração. Nesta prova c indicará várias constantes reais independentes de h.
1º Passo. Para $h > 0$, $v \in V$, e quase todo $t \in]0, T-h[$, segue que

$$\left(\int_\Omega \rho u \cdot v dx\right)(t+h) - \left(\int_\Omega \rho u \cdot v dx\right)(t) = \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho u \cdot v dx\right)(s) ds.$$

Por (4.7) na Proposição 4.2, o lado direito é limitado por

$$\left(\int_t^{t+h} g(s)ds\right)|v|_V.$$

Escolhendo $v = u(t+h) - u(t)$ e integrando em t, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h}\int_\Omega (\rho(t+h)u(t+h) - \rho(t)u(t))\cdot(u(t+h)-u(t))dxdt \\ \leq \int_0^{T-h} |u(t+h)-u(t)|_V \int_t^{t+h} g(s)ds\ dt.\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini o lado direito da equação é igual a

$$= \int_0^T g(s)\int_{\overline{s-h}}^{\overline{s}} |u(t+h)-u(t)|_V dt\ ds$$

onde $\overline{s} = 0$ para $s \leq 0$, $\overline{s} = s$ para $0 \leq s \leq T-h$, $\overline{s} = T-h$ para $s \geq T-h$. Neste termo vamos limitar

$$\int_{\overline{s-h}}^{\overline{s}} |u(t+h)-u(t)|_V dt \leq \left(\int_{\overline{s-h}}^{\overline{s}} 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\overline{s-h}}^{\overline{s}} |u(t+h)-u(t)|_V^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq 2h^{1/2}|u|_{L^2(0,T;V)}.$$

Retornando esta estimativa, obtemos

$$\int_0^{T-h}\int_\Omega (\rho(t+h)u(t+h)-\rho(t)u(t))\cdot(u(t+h)-u(t)dx\ dt \leq ch^{1/2}. \tag{4.10}$$

2º Passo. Para todo $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, (4.2) dá

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}, w\right)_\Omega = -(\nabla\cdot(\rho u), w)_\Omega = (\rho u, \nabla w)_\Omega,$$

a qual produz

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho w dx = \int_\Omega \rho u\cdot\nabla w\ dx, \quad em \quad \mathcal{D}'(]0,T[).$$

Integrando encontramos para $h > 0$ e para quase todo $t \in]0,T[$,

$$\int_\Omega (\rho(t+h)-\rho(t))w dx = \int_t^{t+h}\left(\int_\Omega (\rho u)(s)\cdot\nabla w dx\right) ds. \tag{4.11}$$

O lado direito é limitado (usando a desigualdade de Hölder com $1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$) por

$$\begin{aligned}
&\leq |\Omega|^{1/6}\left(\int_t^{t+h} |\rho(s)|_{L^\infty(\Omega)}|u(s)|_{(L^6(\Omega))^3} ds\right)|\nabla w|_{(L^{3/2}(\Omega))^3}\\
&\leq |\Omega|^{1/6}h^{1/2}\left(\int_t^{t+h} (|\rho(s)|_{L^\infty(\Omega)}|u(s)|_{(L^6(\Omega))^3})^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}|\nabla w|_{(L^{3/2}(\Omega))^3}\\
&\leq |\Omega|^{1/6}h^{1/2}c|\rho|_{L^\infty(Q)}|u|_{L^{3/2}(0,T;V)}|\nabla w|_{(L^{3/2}(\Omega))^3}.
\end{aligned}$$

Por continuidade esta desigualdade é satisfeita para $w \in W^{1.3/2}(\Omega)$. Tendo em conta que $u(t) \in H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ pelo Lema 4.3 (ii) com $s = 2$, $r^* = 6$ e $l = 3/2$. Escolhendo $w = -u(t)\cdot(u(t+h)-u(t))$, obtemos que

$$|\nabla w|_{(L^{3/2}(\Omega))^3} \leq c|u(t)|_V|u(t+h)-u(t)|_V.$$

Substituindo estes cálculos em (4.11), e integrando em t, encontramos

$$\int_0^{T-h}\int_\Omega -(\rho(t+h)-\rho(t))u(t)\cdot(u(t+h)-u(t))dx\ dt \le ch^{1/2}. \tag{4.12}$$

3º Passo. Adicionando (4.10) e (4.12) obtemos

$$\int_0^{T-h}\int_\Omega \rho(t+h)(u(t+h)-u(t))\cdot(u(t+h)-u(t))dx\ dt \le ch^{1/2}.$$

Como ρ é limitado em $L^\infty(Q)$, segue que

$$\int_0^{T-h}\int_\Omega |\rho(t+h)(u(t+h)-u(t))|^2 dx\ dt \le c|\rho|_{L^\infty(Q)}h^{1/2}.$$

Portanto

$$\|(\tau_h\rho)(\tau_h u-u)\|_{L^2(0,T-h;(L^2(\Omega))^3)} \le ch^{1/4}. \tag{4.13}$$

Se $\rho \ge \alpha$, então $\tau_h\rho \ge \alpha$ e isso dá

$$\|\tau_h u-u\|_{L^2(0,T-h;(L^2(\Omega))^3)} \le \left(\frac{c}{\alpha}\right)h^{1/4},$$

o que prova (ii).

4º Passo. A equação (4.2) e a Proposição 4.2 (i) implicam que

$$\rho(t+h)-\rho(t) = -\int_t^{t+h}(\nabla\cdot(\rho u))(s)ds;\ em\ H^{-1}(\Omega)$$

assim

$$\|\rho(t+h)-\rho(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le h\sup_{0\le s\le T}\|\nabla\cdot(\rho u)(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

e

$$\|\tau_h\rho-\rho\|_{L^\infty(0,T-h;H^{-1}(\Omega))} \le ch\|\rho u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)}.$$

O produto é contínuo de $H^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ sobre $W^{-1,3/2}(\Omega)$ pelo Lema 4.3 (iii) com $s=2, r^*=6$ e $l=3/2$. Portanto

$$\|(\tau_h\rho-\rho)u\|_{L^2(0,T-h;(W^{-1,3/2})^3)} \le c\|\tau_h\rho-\rho\|_{L^\infty(0,T-h;H^{-1}(\Omega))}\|u\|_{L^2(0,T;V)} \le ch.$$

Adicionando esta desigualdade a (4.13), obtemos finalmente

$$\|\tau_h \rho \tau_h u - \rho u\|_{L^2(0,T-h;(W^{-1,3/2}(\Omega))^3)} \leq c h^{1/4},$$

o que prova o item (i). $\square$

4.4 O Termo de Inércia

Nessa seção apresentaremos um lema relativo ao termo não linear $(u \cdot \nabla)u$, chamado o termo de inércia.

Definição 4.4. *$\forall\ u, v, w \in (H_0^1(\Omega))^3$, definimos*

$$b(u, v, w) = ((u \cdot \nabla)v, w)_\Omega = \int_\Omega ((u \cdot \nabla)v) \cdot w\ dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx.$$

A demonstração do resultado a seguir encontra- se em [4] (página 347).

Lema 4.7. *A forma trilinear b é contínua em $(H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3$ e satisfaz*

$$b(u, v, w) = -b(u, v, w) \quad \forall u \in V \quad e \quad \forall v, w \in (H_0^1(\Omega))^3, \tag{4.14}$$

$$b(u, v, v) = 0, \quad \forall u \in V, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3. \tag{4.15}$$

Além disso, para todos $u \in V$ e $v, w \in (H_0^1(\Omega))^3$ temos

$$|b(u, v, w)| \leq C\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|u\|_{H^1}^{\frac{3}{4}} \|v\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|v\|_{H^1}^{\frac{3}{4}} \|w\|_{H^1}. \tag{4.16}$$

Observação 4.3. *$\forall u, v \in V$ denotamos por $B(u, v) \in V$, a forma bilinear contínua em V dada por*

$$\Big(B(u, v), w\Big)_{V', V} = b(u, v, w). \tag{4.17}$$

A estimativa obtida em (4.16) mostra que a aplicação B é contínua em $V \times V$ e temos que

$$\|B(u, u)\|_{V'} \leq C\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \quad \forall u \in V. \tag{4.18}$$

4.5 Formulação Fraca das Equações de Navier-Stokes

Conforme apresentamos na introdução, Antonzev e Kajikov [1], Lions [14] e Simon [18] resolveram, ao em vez de

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \Delta u = \rho f - \nabla p, \tag{4.19}$$

com a **condição inicial fraca**

$$\rho(0) = \rho_0$$
$$\left(\int_\Omega \rho u \cdot v dx\right)(0) = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot v dx,\ \forall\ v \in V,$$

o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned}&\int_Q \left(-\rho u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho u \otimes u \cdot \nabla \varphi + \mu \nabla u \cdot \nabla \varphi - \rho f \cdot \varphi\right) dxdt = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot \varphi(0) dx,\\ &\forall\ \varphi \in C^1([0,T];V)\end{aligned} \tag{4.20}$$

Agora faremos o cálculo para obter o **problema variacional**. Dada $\varphi \in C^1([0,T];(D(\Omega))^3)$, tal que $\nabla \cdot \varphi = 0$ e $\varphi(T) = 0$. Temos que a multiplicação da equação (4.19) pela função φ e a integração por partes implicam

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}, \varphi\right)_\Omega + (\nabla \cdot (\rho u \otimes u), \varphi)_\Omega - (\mu \Delta u, \varphi)_\Omega - (\rho f, \varphi)_\Omega = -(\varphi, \nabla \rho)_\Omega = 0.$$

Usando a integração por partes, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u, \varphi)_\Omega - \left(\rho u, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_\Omega - (\rho u \otimes u, \nabla \varphi)_\Omega + (\mu \nabla u, \nabla \varphi)_\Omega - (\rho f, \varphi)_\Omega = 0,$$

isto é

$$\int_\Omega \left(-\rho u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho u \otimes u \cdot \nabla \varphi + \mu \nabla u \cdot \nabla \varphi - \rho f \cdot \varphi\right) dx = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega \rho u \cdot \varphi dx\right).$$

Integrando sobre o intervalo $[0,T]$ deduzimos

$$\int_{\Omega \times]0,T[} \left(-\rho u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho u \otimes u \cdot \nabla \varphi + \mu \nabla u \cdot \nabla \varphi - \rho f \cdot \varphi\right) dxdt = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot \varphi(0) dx.$$

A equação acima é válida $\forall\ \varphi \in C^1([0,T];(D(\Omega)^3)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{1,2}(\Omega)$, isto é, dada $v \in H_0^1(\Omega)$ existe uma sequência φ_m em $D(\Omega)$ tal que $\|\varphi_m - v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \longrightarrow 0$, sendo assim chegamos em (4.20), como queríamos.

4.6 Decomposição Espectral para o Operador de Stokes

Com o objetivo de determinar a solução aproximada u^m, apresentaremos a seguir alguns resultados, bem como o teorema espectral para o operador de Stokes, que garantirá a existência de uma base $w^1, ..., w^m, ...$ Posteriormente enunciaremos um lema que concluirá que cada w^m é de classe C^1, possibilitando escrever u^m como decomposição dos elementos dessa base.

Os resultados bem como suas demonstrações podem ser visto no livro do Boyer [4].

Definição 4.5. *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$. Definimos o espaço quociente*

$$L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R},$$

com a norma $\|u\|_{L_0^2} = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \|u+\alpha\|^{L^2}$.

Teorema 4.1. *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado e Lipschitz. Seja $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$, $v_b \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^N$ e $g \in L^2(\Omega)$ satisfazendo a condição de compatibilidade*

$$\int_\Gamma v_b.\nu \; d\sigma = \int_\Omega g \; dx, \tag{4.21}$$

então existe um único par (u,p) em $(H^1(\Omega))^N \times (L^2(\Omega))$ que é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & em \;\; \Omega, \\ \nabla \cdot u = g & em \;\; \Omega, \\ u = v_b & sobre \;\; \Gamma. \end{cases} \tag{4.22}$$

Além disso existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de Ω tal que

$$\|u\|_{H^1} + \|p\|_{L_0^2} \leq C(\|f\|_{H^{-1}} + \|g\|_{L^2} + \|v_b\|_{H^{1/2}}).$$

Definição 4.6. *Seja V' o dual do espaço V. O operador $A : V \longrightarrow V'$ definido por*

$$\langle Av, u\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx, \quad \forall u, v \in V,$$

é chamado de operador de Stokes. Pelo Teorema de Lax-Milgram em [3] este operador é um isomorfismo de V em V'. Considerando A como um operador ilimitado em H definimos o domínio $D(A)$ por

$$D(A) = \{u \in V; Au \in H\}.$$

Lema 4.8. *Seja $A : D(A) \subset V \longrightarrow V'$ o operador de Stokes. Então* *a) A tem gráfico fechado em $H \times H$.*

b) A é auto-adjunto em H.

Sendo assim através do teorema a seguir podemos construir uma decomposição espectral do operador de Stokes.

Teorema 4.2. *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado e Lipschitz. Então existem uma sequência crescente de números reais positivos $(\lambda^k)_{k\geq 1}$, a qual tende a $+\infty$, e uma sequência de funções $(w^k)_{k\geq 1}$, a qual é ortonormal em H, ortogonal em V e em $D(A)$, formando uma família completa em H, V e $D(A)$, e uma sequência de funções $(p^k)_{k\geq 1}$ em $L^2_0(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \mu\Delta w^k - \nabla p^k = \lambda^k w^k & \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot w^k = 0 & \text{em } \Omega, \\ w^k|_\Gamma = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

O operador Stokes satisfaz as propriedades de regularidade elíptica que são semelhantes àquelas do operador de Laplace. Mais precisamente, podemos afirmar o seguinte resultado.

Teorema 4.3 (Regularidade do Problema de Stokes)**.** *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado, conexo e de classe $C^{k+1,1}$, com $k \geq 0$. Então, para qualquer $f \in (H^k(\Omega))^N, g \in H^{k+1}(\Omega)$ e $v_b \in (H^{k+3/2}(\Gamma))^N$ satisfazendo (4.21), a única solução de (4.22) em $V \times L^2_0(\Omega)$ satisfaz*

$$(u,p) \in (H^{k+2}(\Omega))^N \times H^{k+1}(\Omega))$$

e temos que

$$\|u\|_{H^{k+2}} + \|p\|_{H^{k+1}} \leq C(\|f\|_{H^k} + \|g\|_{H^{k+1}} + \|v_b\|_{H^{k+3/2}}),$$

onde $C > 0$ depende somente de Ω.

4.7 Existência de Solução Fraca

Teorema 4.4. *Sejam Ω um aberto limitado com fronteira Γ suave,*

$$f \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3), \quad u_0 \in H, \quad \rho_0 \in L^\infty(\Omega), \quad e \quad \rho_0 \geq 0.$$

(i) Existem

$$u \in L^2(0,T;V), \quad \rho \in L^\infty(Q), \quad p \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$$

tais que

$$\inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho \leq \sup_{\Omega} \rho_0,$$
$$\rho u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3) \cap N^{1/4,2}(0,T;(W^{-1,3/2}(\Omega))^3)$$
$$\rho \in C([0,T];W^{-1,\infty}(\Omega)), \quad \int_\Omega \rho u \cdot v dx \in C([0,T]) \ \ \forall\, v \in V,$$

as quais satisfazem as equações (4.1)-(4.3) *no sentido variacional e as condições iniciais*

$$\begin{aligned} \rho(0) = \rho_0, \quad \textit{em} \ \ W^{-1,6}(\Omega), \\ \left(\int_\Omega \rho u \cdot v dx\right)(0) = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot v dx \quad v \in V. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Além disso, u, ρ, p satisfazem todas as propriedades dadas nas Proposições 4.2 e *4.3*.

(ii) Se vale ainda

$$\inf_{\Omega} \rho_0 > 0,$$

então

$$u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3) \cap N^{1/4,2}(0,T;(L^2(\Omega))^3).$$

Demonstração. **Definição de soluções aproximadas** u^m e ρ^m.
Pelo Teorema 4.2 existe uma base $w^1, ..., w^m, ...$ do espaço de Hilber V tal que

$$\begin{cases} \mu\Delta w^m - \nabla p^m = \lambda^m w^m & \textit{em} \ \ \Omega, \\ \nabla \cdot w^m = 0 & \textit{em} \ \ \Omega, \\ w^m|_\Gamma = 0 & \textit{sobre} \ \ \Gamma. \end{cases}$$

Além disso pelo Teorema 4.3 temos que

$$w^m \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{4.24}$$

Seja V^m = subespaço de V gerado por $w^1, ..., w^m$. Queremos encontrar u^m, ρ^m tais que, para algum $T_m > 0$,

$$u^m \in C^1([0,T_m],V^m), \quad \rho^m \in C^1([0,T_m],C^1(\overline{\Omega})),$$

$$\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \rho^m u^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m u^m \otimes u^m) - \rho^m f \right) \cdot v + \mu \nabla u^m \cdot \nabla v \right) dx = 0, \quad \forall v \in V^m, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m u^m) = 0, \qquad (4.26)$$

$$u^m(0) = u_0^m, \quad \rho^m(0) = \rho_0^m, \qquad (4.27)$$

onde u_0^m e ρ_0^m são funções quaisquer em H e $L^\infty(\Omega)$ respectivamente, satisfazendo

$$\begin{aligned} &u_0^m \in V^m, \quad u_0^m \to u_0 \ \text{ em } (L^2(\Omega))^3, \\ &\rho_0^m \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \rho_0^m \overset{\star}{\rightharpoonup} \rho_0 \ \text{ em } \ L^\infty(\Omega) \ \text{ quando } \ m \to \infty, \\ &\frac{1}{m} + \inf_\Omega \rho_0 \leq \rho_0^m \leq \frac{1}{m} + \sup_\Omega \rho_0. \end{aligned} \qquad (4.28)$$

Como bem observamos em 3.5 as equações (4.25) e (4.26) são equivalentes as equações não-conservativas

$$\int_\Omega \left(\rho^m \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} + (u^m \cdot \nabla) u^m - f \right) \cdot v + \mu \nabla u^m \cdot \nabla v \right) dx = 0 \ \ \forall \ v \in V^m, \qquad (4.29)$$

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + u^m \cdot \nabla \rho^m = 0. \qquad (4.30)$$

Existência local *de* u^m, ρ^m.
Supondo que $u^m \in C^1([0,T], V^m) \subset C^1([0,T], C^1(\overline{\Omega}))$ existe, temos que:

(I) Pelo Teorema de Picard-Lindelöf 2.2 o problema com condição inicial

$$\begin{cases} \frac{dy^m}{ds}(s) = u^m(y^m(s), s) \quad \forall s \geq 0, \\ y^m(t) = x, \end{cases}$$

possui uma única solução global, isto é, existe uma única trajetória $y^m = y^m_{x,t}(s)$ de uma partícula que no instante t ocupa a posição x. Além disso pelo Teorema 2.3 temos que y^m depende continuamente da condição inicial e u^m.

(II) Como consequência do item (I) para todo $x \in \overline{\Omega}$ existe uma única $y^m_{x,t}(s) = y^m(x,t,s)$, além disso tomando em conta que $u^m|_{\partial\overline{\Omega}} = 0$ tem - se que a aplicação $y^m(\cdot\ ,t,s) : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ é bijetiva, com inversa $y^m(t,s,\cdot) : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$.

(III) Fixando u^m em (4.30) temos que

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t}(x,t) + \ u^m(x,t)\cdot\nabla\rho^m(x,t) \ = 0, \qquad \forall\ (x,t).$$

De onde segue que

$$\frac{\partial}{\partial s}\rho^m(\overline{x},s) + u^m(\overline{x},s)\cdot\nabla\rho^m(\overline{x},s) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\rho^m(y^m_{x,t}(s),s) + u^m(y^m_{x,t}(s),s)\cdot\nabla\rho^m(y^m_{x,t}(s),s) = 0 \qquad onde\ \overline{x} = y^m_{x,t}(s),$$

logo $\frac{D}{Ds}\rho^m(y^m_{x,t}(s),s) = 0 \implies \rho^m$ é constante ao longo da trajetória $y^m_{x,t}(s)$, além disso temos que

$$\rho^m(x,t) = \rho^m(y^m_{x,t}(t),t) = \rho^m(y^m_{x,t}(0),0) = \rho^m_0(y^m_{x,t}(0)). \tag{4.31}$$

Portanto existe uma única ρ^m tal que $\rho^m(0) = \rho^m_0$.
Pelo que foi feito em (I),(II) e (III), concluirmos que dada $u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m C^m_k(t)w^k$ é possível obter uma única ρ^m solução da equação (4.30). A partir de u^m e ρ^m queremos construir uma função vetorial $\tilde{u}^m(x,t) = \sum_{k=1}^m \tilde{C}^m_k(t)w^k$ solução da seguinte equação

$$\left(\rho^m\left[\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}^m + (u^m\cdot\nabla)\tilde{u}^m\right], w^j\right)_\Omega + \mu(\tilde{u}^m, w^j)_V = (\rho^m f, w^j)_\Omega, \qquad j = 1,2...,m. \tag{4.32}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{d}{dt}\tilde{C}^m_k\alpha^j_{m_k} + \sum_{i,k=1}\beta^j_{m_{i,k}}C^m_i\tilde{C}^m_k + \sum_{k=1}^m\gamma^j_k\tilde{C}^m_k = f^i_m \qquad j = 1,...,m. \tag{4.33}$$

O qual é um sistema de m equações diferenciais para as funções $\tilde{C}^m_k(t)$, onde

- $\alpha^j_{m_k}(t) = (\rho^m w^k, w^j)_\Omega$
- $\beta^j_m(t) = (\rho^m(w^j\cdot\nabla)w^k, w^j)_\Omega$
- $\gamma^j_k = \mu(w^k, w^j)_V$
- $f^j_m(t) = (\rho^m f, w^j)_\Omega$

A condição inicial para a equação (4.33) pode ser extraída expandindo a velocidade inicial u_0 com respeito a base $\{w^k\}$ da seguinte forma

$$u^0 = \sum_{k=1}^\infty C_k w^k, \quad C_k \equiv (u^0, w^k),$$

obtendo que

$$C^m_k(0) = C_k, \qquad k = 1,2,...,m. \tag{4.34}$$

A solução do problema (4.33) - (4.34) resulta da teoria de equações diferencias, se tivermos que a matriz $\alpha_m(t)$ cujas entradas é α_k^j é não degenerada. Provaremos esse fato observando que por definição as entradas da matriz $\alpha_m(t)$ são dados por

$$\alpha_k^j(t) = (\rho^m w^j, w^k)_\Omega = \int_\Omega \rho^m(t,x) w^j(x) w^k(x)\ dx \quad \forall j,k \in \{1,...,m\}.$$

Portanto, para qualquer $t \in [0,T]$, $\alpha(t)$ é a matriz de Gram na base w^j em relação ao produto interno definido por

$$(f,g) \longrightarrow \langle f,g\rangle_{\rho^m} = \int_\Omega \rho^m(t,x) f(x) g(x)\ dx,$$

resultando que $\alpha_m(t)$ é invertível $\forall\ t$. Logo pelo Teorema de Cauchy-Peano 2.9 o sistema de equações diferencias ordinárias não linear (4.33) com condição inicial (4.34) tem solução local para algum $[0,T_m)$ onde $0 < T_m < T$. Além disso pelo Teorema 2.3 a solução depende continuamente dos dados do problema (4.33)-(4.34).

Se $T_m < T$, então $|\tilde{u}^m|$ tende para $+\infty$ quando $t \longrightarrow T_m$. A seguir deduziremos umas estimativas que vão garantir que isso não ocorre, isto é, que $T_m = T$.

Existência global e estimativas sobre u^m e ρ^m.

As expressões anteriores garantidas pela existência de ρ^m e a escolha de ρ_0^m produzem, sobre $[0,T_m]$ (ver (4.31) e (4.27)), a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{m} + \inf_\Omega \rho_0 \le \rho^m \le \frac{1}{m} + \sup_\Omega \rho_0. \tag{4.35}$$

Para qualquer tempo $t \in [0,T_m]$ multiplique a equação (4.26) por $-|u^m(t)|^2$ e integre sobre Ω, obteremos a seguinte expressão

$$\int_\Omega \Big(-|u^m|^2 \frac{\partial \rho^m}{\partial t} - |u^m|^2 \rho^m (\nabla \cdot u^m) - |u^m|^2 u^m \cdot \nabla \rho^m \Big) dx = 0. \tag{4.36}$$

Agora tomando $v = 2u^m$. (Isto é, escolhendo sucessivamente $v = w^1, w^2, ..., w^m$, multiplicando por C_j^m e somando por $k = 1,...,m$) na equação (4.25) temos que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \rho^m u^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m u^m \otimes u^m) - \rho^m f \right) \cdot 2u^m + 2\mu |\nabla u^m|^2 \right) dx = 0 \\ &\int_\Omega \Big(\rho^m \frac{\partial}{\partial t} |u^m|^2 + 2|u^m|^2 \frac{\partial \rho^m}{\partial t} + 2(\nabla \cdot u^m) \rho^m |u^m|^2 + 2u^m \cdot \nabla \rho^m |u^m|^2 \\ &\qquad + 2\rho^m (u^m \cdot \nabla) u^m \cdot u^m - 2\rho^m f u^m + 2\mu |\nabla u^m|^2 \Big) dx = 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Somando as equações (4.36) e (4.37) obtemos

$$\int_\Omega \Big(\rho^m \frac{\partial}{\partial t}|u^m|^2 + |u^m|^2 \frac{\partial \rho^m}{\partial t} + (\nabla \cdot u^m)\rho^m |u^m|^2 + u^m \cdot \nabla \rho^m |u^m|^2 + \rho^m (u^m \cdot \nabla)|u^m|^2$$
$$- 2\rho^m f u^m + 2\mu |\nabla u^m|^2\Big) dx = 0.$$
$$\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(\rho^m |u^m|^2) + \nabla \cdot (\rho^m u^m |u^m|^2) - 2\rho^m f \cdot u^m + 2\mu |\nabla u^m|^2 \right) dx = 0,$$

visto que

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho^m |u^m|^2) = \rho^m \frac{\partial}{\partial t}|u^m|^2 + |u^m|^2 \frac{\partial \rho^m}{\partial t}$
- $\nabla \cdot (\rho^m u^m |u^m|^2) = |u^m|^2 \rho^m (\nabla \cdot u^m) + |u^m|^2 u^m \cdot \nabla \rho^m + \rho^m u^m \cdot \nabla |u^m|^2.$
- $$\begin{aligned} 2(u^m \cdot \nabla)u^m \cdot u^m &= 2\Big[\sum_{i=1}^3 [(u^m \cdot \nabla)u^m] \cdot u^m\Big] = 2\Big[\sum_{i=1}^3 \Big(\sum_{j=1}^3 u_j^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x_j}\Big) \cdot u_i^m\Big] \\ &= 2\sum_{i,j=1}^3 u_j^m \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial (u_i^m)^2}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 u_j^m \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^3 (u_i^m)^2\Big) \\ &= \sum_{j=1}^3 u_j^m \cdot \frac{\partial}{\partial t}|u^m|^2 = u^m \cdot \nabla |u^m|^2. \end{aligned}$$
- $2\rho^m (u^m \cdot \nabla)u^m \cdot u^m = \rho^m (u^m \cdot \nabla)|u^m|^2$

Aplicando o Teorema da Divergência no segundo termo e usando que $u^m|_\Gamma = 0$, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\rho^m u^m |u^m|^2) dx = \int_\Gamma n \cdot \rho^m u^m |u^m|^2 dx = 0.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(\rho^m |u^m|^2) + 2\mu |\nabla u^m|^2 \right) dx &= 2\int_\Omega \rho^m f \cdot u^m dx \\ &\leq 2\Big(\int_\Omega |\rho^m u^m|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |f|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\Big(\int_\Omega \rho^m . \rho^m |u^m|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |f|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

como $\rho^m \leq b = 1 + \sup \rho_0$ encontramos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx + 2\mu \int_\Omega |\nabla u^m|^2 dx \leq 2b^{1/2} \left(\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2}. \quad (4.38)$$

Visto que ρ_0^m e u_0^m satisfazem (4.28) existe uma constante d independente de m tal que

$$\left(\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx\right)(0) = \int_\Omega \rho_0^m |u_0^m|^2 dx \leq d.$$

Logo pelo Lema 4.5 tem - se

$$\left(\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx\right)^{1/2}(t) \leq d + b^{1/2}\int_0^T \left(\int_\Omega |f(x,s)|^2 dx\right)^{1/2} ds \quad \forall t \leq T_m. \tag{4.39}$$
$$\|(\rho^m)^{1/2} u^m(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq d + C(T).$$

Segue que

$$\|(\rho^m)^{1/2} u^m\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega)))^3} = \text{ess} \sup_{1 \leq t \leq T} \|(\rho^m)^{1/2} u^m(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq d + C(T) < \infty.$$

Portanto $(\rho^m)^{1/2} u^m$ é limitada em $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$. Além disso pela estimativa (4.39) e usando que $\rho^m \geq \inf_\Omega \rho_0 + \frac{1}{m} > \inf_\Omega \rho_0 = C > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
C\int_\Omega |u^m|^2 \; dx &\leq \left(\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx\right)^{1/2}(t) \leq d + C(T) \\
\int_\Omega \sum_{j,k=1}^m (C_k^m w^k)\cdot(C_j^m w^j) \; dx &\leq (d + C(T))/C \\
\sum_{j=1}^m (C_j^m)^2 = \sum_{j,k=1}^m C_k^m \cdot C_j^m \int_\Omega w^k \cdot w^j dx &\leq C_1.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Consequentemente de (4.38) e (4.40) segue que $T_m = T$. Integrando (4.38) sobre $[0,T]$, temos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx\Big) dt + 2\mu \int_0^T \Big(\int_\Omega |\nabla u^m|^2 dx\Big) dt \leq 2b^{1/2}\int_0^T M \; dt,$$

pois

$$\Big(\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |f|^2 dx\Big)^{1/2} \leq M.$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo na primeira integral tem-se

$$\Big(\int_\Omega \rho^m |u^m|^2 dx\Big)(T) + 2\mu \int_0^T \Big(\int_\Omega |\nabla u^m|^2 dx\Big) dt \leq MT + \Big(\rho^m |u^m|^2 dx\Big)(0) \leq MT + d.$$

isto é,

$$\|u^m\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{MT + d}{2\mu}.$$

Logo

$$u^m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;V).$$

Além disso, por (4.35)

$$\rho^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)).$$

Portanto

$$\rho^m u^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3).$$

Observe ainda que, nas Proposições 4.2, e 4.3, tendo que as soluções aproximadas u^m, ρ^m com normas independentes de m, satisfazem as condições dadas para u, ρ. Em particular,

$$\begin{aligned}
&\rho^m u^m \otimes u^m \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}(0,T;(L^2(\Omega))^9),\\
&\frac{\partial \rho^m}{\partial t} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)),\\
&\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho^m u^m \cdot v dx\right| \leq \left(\|\rho^m f\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\rho^m u^m \otimes u^m - \mu\nabla u^m\|_{(L^2(\Omega))^9}\right)\|v\|_V,\\
&\rho^m u^m \quad \text{é limitada em} \quad N^{1/4,2}(0,T;(W^{-1,3/2}(\Omega))^3).
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{C}_m[0,T] = \{(C_k^m)_{k=1}^m : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m;$ para cada $k = 1,\dots,m$ a função $C_k^m : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua$\}$. Considere o conjunto limitado, fechado e convexo $\mathcal{K}_m$ definido por

$$\mathcal{K}_m = \{(C_k^m)_{k=1}^m \in \mathcal{C}_m([0,t]); \sum_{k=1}^m |C_k^m(t)|^2 \leq C^1\},$$

onde C^1 é a constante obtida na estimativa (4.40).

Como o problema (4.33)-(4.34) é solúvel, construímos uma aplicação $\Lambda_m : \mathcal{K}_m \longrightarrow \mathcal{C}_m([0,T])$ tal que dado $(C_k^m)_{k=1}^m \in \mathcal{K}_m$ existe um $(\tilde{C}_k^m)_{k=1}^m \in \mathcal{C}_m([0,t])$ com $\Lambda((C_k^m)_{k=1}^m) = (\tilde{C}_k^m)_{k=1}^m$. Queremos mostrar que a aplicação Λ_m satisfaz a hipótese do Teorema do ponto fixo de Schauder 2.7, isto é, que Λ_m é uma aplicação compacta de $\mathcal{K}_m$ sobre $\mathcal{K}_m$, o que implicará que Λ_m tem ponto fixo. Note que $(\tilde{C}_k^m)_{k=1}^m \in \mathcal{K}_m$, pois escolhendo sucessivamente $v = w^1, w^2, ..., w^m$, multiplicando por $\tilde{C}_k^m$ e somando por $k = 1, ..., m)$ na equação (4.25), obtemos de forma análoga a estimativa encontrada em (4.40), para função $(\tilde{C}_k^m)_{k=1}^m$, isto é, $\displaystyle\sum_{k=1}^m (\tilde{C}_k^m)^2(t) \leq C^1 \;\Rightarrow\; (\tilde{C}_k^m)_{k=1}^m \in \mathcal{K}_m$. Portanto a aplicação $\Lambda_m : \mathcal{K}_m \longrightarrow \mathcal{K}_m$ está bem definida.

Finalmente vamos mostrar que Λ_m é compacta. Multiplicando a j-ésima equação (4.32) por $\frac{\partial \tilde{C}_j^m}{\partial t}$ e somando com respeito $j = 1, ..., m$, obtemos

$$\Big(\rho^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\Big)_\Omega + \Big(\rho^m (u^m \cdot \nabla)\tilde{u}^m, \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\Big)_\Omega + \mu\Big(\tilde{u}^m, \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\Big)_V = \Big(\rho^m f, \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\Big)_\Omega.$$

De onde segue a relação

$$\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}^m\|_V^2 + a\left\|\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\right\|_H^2 \leq A\|f\|_H\left\|\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\right\|_H + A\|u^m\|_{C(\Omega)}\|\tilde{u}^m\|_V\left\|\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\right\|_H.$$

Visto que $a = \inf_\Omega \rho_0 < \frac{1}{m} + \inf_\Omega \rho_0 \leq \rho^m \leq \frac{1}{m} + \sup_\Omega \rho_0 < 1 + \sup_\Omega \rho_0 = A$.

Visto que as funções da base w^m são suaves, temos $\|u^m\|_{C(\Omega)} \leq C(m)$, então, aplicando a desigualdade de Young e integrando com respeito a t temos a estimativa

$$\int_0^T \|\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}\|_H^2 dt \leq C(m), \tag{4.41}$$

a qual denota que $\|(\tilde{C}_k^m)_{k=1}^m\|^2_{W^{1,2}(0,T)} \leq C(m)$. Portanto, $(\tilde{C}_k^m)_{k=1}^m = \Lambda_m (C_k^m)_{k=1}^m \in W^{1,2}(0,T;H)$ e, de acordo com o Teorema 1.20 imersão de Sobolev (1.3), mostra que a imagem do conjunto $\mathcal{K}_m$ é compacta em $\mathcal{C}_m([0,T])$. Além disso, a continuidade do operador Λ_m resulta do Teorema de Dependência Contínua 2.3.

Logo, o operador Λ_m satisfaz todas as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Schauder 2.7, e assim tem um ponto fixo $(C_k^m)_{k=1}^m$ no conjunto $\mathcal{K}_m$. A unicidade da solução é provada de modo clássico: Dada duas possíveis soluções considere a diferença entre elas, assim formula-se um problema homogêneo e, em seguida, deduz-se de estimativas do tipo (4.40) que está solução é nula.

Propriedades de convergência.
As estimativas obtidas anteriormente sobre ρ^m implicam que

$$\begin{aligned} &\rho^m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)) \; e \\ &\frac{\partial \rho^m}{\partial t} \text{ é limitada em } L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Sendo assim escrevendo $X = L^\infty(\Omega)$, $E = W^{-1,6}(\Omega)$, $Y = W^{-1,6}(\Omega)$ e $r = 2$, pelo Lema 4.4 item (ii) temos que

$$\{\rho^m\}_{m\in\mathbb{N}} \;\text{ é relativamente compacta em }\; C([0,T];W^{-1,6}(\Omega)). \tag{4.43}$$

Usando o Lema 4.4 item (iv) com $X = (L^2(\Omega))^3$, $E = (H^{-1}(\Omega))^3$, $Y = (W^{-1,3/2}(\Omega))^3$,

$s = \frac{1}{4}$, e $q = 2$, as estimativas sobre $\rho^m u^m$ implicam que

$$\{\rho^m u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ é relativamente compacta em } L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3). \tag{4.44}$$

Portanto como u^m, ρ^m, $\rho^m u^m$ e $\rho^m u^m u^m$ são limitadas em $L^2(0,T;V)$, $L^\infty(Q)$, $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ e $L^{4/3}(0,T;(L^2(\Omega))^9)$ respectivamente, e valem (4.43) e (4.44), existem subsequências de u^m, ρ^m, $\rho^m u^m$ e $\rho^m u^m u^m$ tais que

(I) $u^m \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$.

(II) $\rho^m \overset{\star}{\rightharpoonup} \rho$ em $L^\infty(Q)$.

(III) $\rho^m \to \rho$ em $C([0,T];W^{-1,6}(\Omega))$.

(IV) $\rho^m u^m \overset{\star}{\rightharpoonup} g$ em $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$.

(VI) $\rho^m u^m \to g$ em $L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$.

(VII) $\rho^m u^m \otimes u^m \rightharpoonup k$ em $L^{4/3}(0,T;(L^2(\Omega))^9)$.

Pelo Lema 4.3 item (iii) o produto cartesiano de $H_0^1(\Omega) \times W^{-1,6}(\Omega)$ em $W^{-1,3}(\Omega)$ é contínuo. Portanto as propriedades (I) e (III) implicam que

$$\rho^m u^m \rightharpoonup \rho u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;(W^{-1,3}(\Omega))^3), \tag{4.45}$$

e assim $g = \rho u$ na (IV) e (V) propriedade.

A partir da primeira e quarta propriedades seguem, usando o Lema 4.3 item (iii), que o produto cartesiano de $H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ é continuo e que

$$\rho^m u^m \otimes u^m \rightharpoonup gu \quad \text{em} \quad L^1(0,T;(W^{-1,3/2}(\Omega))^9),$$

e assim $k = \rho u \otimes u$ na (VII) propriedade.

Equações limites e condições iniciais.

(i) Valem $\rho^m(0) \to \rho(0)$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e $\rho^m u^m \longrightarrow \rho u$ em $(\mathcal{D}'(Q))^3$. Assim, passando ao limite em $\mathcal{D}'(Q)$ em (4.26), encontramos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \;\; em \;\; \mathcal{D}'(Q).$$

(ii) Pelo item (III) $\rho^m(0) \to \rho(0)$ em $W^{-1,6}(\Omega)$. Então passando ao limite na condição inicial $\rho^m(0) = \rho_0^m$ obtemos

$$\rho(0) = \rho_0, \;\; em \;\; W^{-1,6}(\Omega).$$

(iii) Desde que $u \in L^2(0,T;V)$, a seguinte equação vale:

$$\nabla \cdot u = 0.$$

(iv) A equação (4.25) pode ser escrita para todo $w \in V^m$,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho^m u^m \cdot w dx + \int_\Omega \Big((-\rho^m u^m \otimes u^m + \mu\nabla u^m)\cdot \nabla w - \rho^m f \cdot w\Big)dx = 0.$$

Seja $v \in V$ e escolha $w = v^m$ onde $v^m \to v$ em V. Logo, podemos passar ao limite em cada termo em $\mathcal{D}'(]0,T[)$. O que implica

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \cdot v dx + \int_\Omega \Big((-\rho u \otimes u + \mu\nabla u)\cdot \nabla v - \rho f \cdot v\Big)dx = 0, \quad em \quad \mathcal{D}'(]0;T[).$$

Isso produz

$$\Big\langle \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - \rho f, v\Big\rangle_\Omega = 0, \quad \forall v \in V, \quad em \quad \mathcal{D}'(]0;T[).$$

Além disso, pela Proposição 3.8 item (ii) temos

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - \rho f \in W^{-1,\infty}(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3).$$

Então, pelo Lema 4.2 existe $p \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - \rho f = \nabla p, \; em \; \mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$$

(v) Sejam $v \in V$ e $v^m \in V^m$ satisfazendo $v^m \to v$ em V. Pelas estimativas anteriores

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho^m u^m \cdot v^m dx\right| \le k + \psi^m,$$
$$k = b\sup_m |v^m|_V, \quad \psi^m = \|\rho^m u^m \otimes u^m - \mu\nabla u^m\|_{(L^2(\Omega))^9}\|v^m\|_V.$$

Temos $k \in L^1(0,T)$ e ψ^m é limitado em $L^{4/3}(0,T)$ (veja a prova da estimativa (4.8) na Proposição 4.2). Portanto, do Lema 4.4 item (iii) com $X = E = Y = \mathbb{R}$ e $r = 4/3$ implica

$$\int_\Omega \rho^m u^m \cdot v^m dx \quad \text{é relativamente compacta em} \quad C([0,T]).$$

De fato, aqui foi aplicado que $W^{1,4/3}(0,T) \subset C([0,T])$. Por outro lado, esta sequência converge fracamente para $\int_\Omega \rho u \cdot v dx$ em $L^2(0,T)$, pelas propriedades de convergência.

Assim, a convergência vale em $C([0,T])$ e

$$\left(\int_\Omega \rho^m u^m \cdot v^m dx\right)(0) \to \left(\int_\Omega \rho u \cdot v dx\right)(0).$$

Para o lado esquerdo temos a convergência

$$\int_\Omega \rho_0^m u_0^m \cdot v^m dx \to \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot v dx.$$

Portanto

$$\left(\int_\Omega \rho u \cdot v \; dx\right)(0) = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot v \; dx, \quad \forall v \in V.$$

(vi) Passando ao limite em (4.35), obtemos

$$\inf_\Omega \rho_0 \leq \rho \leq \sup_\Omega \rho_0.$$

(vii) A Proposição 4.3 item (i) nos dá

$$\rho u \in N^{1/4,2}(0,T;(W^{-1,3/2}(\Omega))^3), \tag{4.46}$$

o que finaliza a prova de (i) do Teorema 4.4.

(viii) Se $\inf_\Omega \rho_0 > 0$, desde por (vi) desta prova $\rho \geq \inf_\Omega \rho_0$, então $1/\rho \in L^\infty(Q)$. Por (i) do Teorema 4.4, $\rho u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$. Protanto $u = \rho u \times 1/\rho$ satisfaz

$$u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3).$$

Além disso, pela Proposição 4.3 item (ii)

$$u \in N^{1/4,2}(0,T;(L^2(\Omega))^3),$$

o que finaliza a prova da parte (ii) do Teorema 4.4. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ANTONZEV, S. A. and KAJIKOV, A. V. *Mathematical study of flows of nonhomogeneous fluids*, Lectures at the University of Novosibirsk, Novosibirsk, U.S.S.R, 1973. (In Russia).

[2] BARTLE, R.G. *The Elements of Integration*, John Wiley Sons; 1966.

[3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D. e TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, SBM, 2012.

[4] BOYER, F. and FABRIE, P. *Mathematical Tools for the Navier-Stokes Equations and Related Models Study of the Incompressible*, Springer, 2012.

[5] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[6] EVANS, L. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2ª Ed., 2010.

[7] GIRAULT, V. and RAVIART, P. A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.

[8] GURTIN, M. and MARTINS L. *Cauchy's theorem in classical physics*, Arch. Rat. Mech. Anal. 60, (305-324), 1976.

[9] HUGHES, T. and MARSDEN, J. *A Short Course in Fluid Mechanics*, Publish or Perish, 1976.

[10] KAJIKOV, A. V. Resolution of boundary value problems for non homogeneous viscous fluids, Dokl. Akad. Nauk., 216 (1974), pp. 1008-1010.

[11] KARLSEN, K. H. *Notes on weak convergence*, (Notas de Aula), 2006.

[12] KIM, U. J. Weak solutions of an initial boundary value problem for an incompressible viscous fluid with nonnegative density, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987), pp. 89-96.

[13] KREISS, H. and LORENZ, J. *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*, Academic-Press, 1989.

[14] LIONS, J. L. *On some problems connected with Navier-Stokes equations in nonlinear evolution equations*, M. C. Crandall, ed., Academic Press, New York, 1978.

[15] MELO, S. T. e NETO F. M. *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.

[16] OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional*, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[17] SIMON, J. *Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids: Existence of Veolcity, Density, and Pressure*, SIAM J. MATH. ANAL, Vol. 21, No. 5, pp. 1093-1117, September 1990.

[18] SIMON, J. *Ecoulement d'un fluide non homogène avec une densité intiale s'annulant*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 15 (1978), pp. 1009-1012.

[19] SCHWARTZ, L. *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, OUP, Tata Institute Monographs on Mathematics, 1973.

[20] SMITH, Z. *Fixed Point Methods in Nonlinear Analysis*, (Notas de Aula)

[21] TARTAR, L. *Topics in nonlinear analysis*, Publ. Math. Orsay, Orsay, France, 1978.