Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativas de Gaps entre Autovalores Consecutivos do Laplaciano

Cristiano de Souza Silva

Manaus – AM
Agosto de 2018

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativas de Gaps entre Autovalores Consecutivos do Laplaciano

por

Cristiano de Souza Silva

sob a orientação da

Prof^{a}. Dr^{a}. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

Manaus – AM
Agosto de 2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586e

Silva, Cristiano de Souza
Estimativas de gaps entre autovalores consecutivos do laplaciano / Cristiano de Souza Silva. 2018
66 f.: 31 cm.

Orientadora: Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Laplaciano. 2. Problema de Dirichlet. 3. Estimativas de autovalores. 4. Variedades. I. Miranda, Juliana Ferreira Ribeiro de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Estimativas de Gaps entre Autovalores Consecutivos do Laplaciano

por

Cristiano de Souza Silva[1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 06 de Agosto de 2018.

Banca Examinadora:

Juliana F.R. de Miranda

Profª. Drª. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda – (Orientadora)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

José N. V. Gomes

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes – (Membro Interno)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Manoel Vieira de Matos Neto

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto – (Membro Externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

[1]O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho a minha mãe Maria Raimunda de Souza Silva e ao meu pai José Chaves da Silva que sempre foram os meus incentivadores.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

À CAPES, pelo apoio financeiro. Aos professores Nazareno Gomes e Manoel Vieira por aceitarem participar de minha banca avaliadora. À professora Juliana Miranda por aceitar ser minha orientadora em meu mestrado. Aos professores Thiago Rodrigo Alves e Mikhail Neklyudov pela grande ajuda nos momentos de dificuldade com o trabalho de dissertação. Aos meus colegas de Mestrado que estiveram sempre proporcionando trocas de conhecimentos e experiencias bem como aos Funcionários da UFAM, por toda a ajuda e prestações de serviço no decorrer de todo o mestrado.

Por fim, a minha familia por me apoiar em minhas decisões a cerca da vida acadêmica.

Resumo

Este trabalho é baseado no artigo *Estimates of the Gaps Between Consecutive Eigenvalues of Laplacian* de Daguang Chen, Tao Zheng e Hongcang Yang em que os autores obtiveram estimativas para o limite superior do *gap* entre autovalores consecutivos para o problema de autovalor de Dirichlet do Laplaciano em um domínio limitado no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Tais estimativas são as melhores possíveis em relação à fórmula de Weyl. Além disso, uma conjectura para o problema do autovalor em uma variedade Riemanniana foi proposta. Este sendo motivado por dois exemplos, um no contexto de um espaço hiperbólico e o outro no contexto de uma variedade Riemanniana completa, não compacta, simplesmente conexa, com curvatura seccional negativa limitada.

Palavras-chave: Laplaciano; Problema de Dirichlet; Estimativas de autovalores; Variedades.

Abstract

This work is based on the article *Estimates of the Gaps Between Consecutive Eigenvalues of Laplacian* by Daguang Chen, Tao Zheng and Hongcang Yang, in which were obtained estimates for the upper bound of the gap between consecutive eigenvalues for the eigenvalue problem of the Dirichlet Laplacian on a bounded domain in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Such estimates are the best possible in relation to the Weyl formula. Furthmore, a conjecture for the eigenvalue problem in a Riemannian manifold was proposed. The latter was motivaded by two examples, one in the context of a Hyperbolic space and the other in the context of simply connected complete noncompact Riemannian manifold with bounded negative sectional curvature.

Keywords: Laplacian; Dirichlet Problem; Estimates of the eigenvalue; Manifolds.

Sumário

Introdução

Em outubro de 1910, o físico holandês Hendrik Lorentz ministrou uma série de palestras sobre os velhos e novos problemas da física em que um dos tópicos discutidos envolvia as vibrações do tambor, que podem ser entendidas como soluções para a equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

em que u dá o deslocamento vertical do tambor na posição (x, y) no tempo t e c é uma constante. O método de solução envolve encontrar números e funções não nulas u tais que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda u.$$

Os números λ são chamados os autovalores da membrana do tambor e estão relacionados aos seus tons fundamentais. Em outros termos, Lorentz conjecturou que dado um tambor, ou uma forma com um fronteira apertada, pode-se ouvir sua área A. Matematicamente ele expressou isto como

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{2\pi D(\lambda)}{\lambda} = A,$$

onde $D(\lambda)$ é o número de autovalores menor que um dado autovalor λ. O matemático alemão Hermann Weyl, presente nas palestras, achou essa conjectura interessante, e mais tarde provou que na verdade

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{4\pi D(\lambda)}{\lambda} = A,$$

ou seja, Lorentz estava equivocado por um fator dois.

A maneira como Weyl provou esse teorema envolveu a descoberta explícita dos autovalores para domínios mais simples, como retângulos e círculos, e possibilitou a generalização para domínios arbitrários. A prova de Weyl para essa lei assimptótica levou à questão "Pode-se ouvir a forma de um tambor?", proposta por Mark Kac em 1966 [26] e respondida negativamente por Carolyn Gordon, David Webb e Scott Wolpert em 1992 [34].

Os estudos avançaram e pôde-se considerar o seguinte problema mais geral: seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa M n-dimensional com fronteira $\partial\Omega$ (possivelmente vazia). Então o problema de Dirichlet para autovalores do Laplaciano em Ω é dado por

$$\begin{cases} \Delta u &= -\lambda u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{no } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

em que Δ é o Laplaciano em M. É bem conhecido que o espectro de (1) possui um número infinito enumeravel de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \nearrow \infty, \tag{2}$$

em que cada λ_j tem multiplicidade finita e se repete de acordo com sua multiplicidade, e as autofunções $\{x_j\}_j = 1^\infty$ constituem um sistema ortonormal completo para o espaço $L_2(\Omega)$.

Um aspecto importante da estimativa de autovalores, é estimar, com a maior precisão possível, o *gap* entre autovalores consecutivos para o problema de Dirichlet. Nesse sentido, analisaremos alguns resultados importantes nas estimativas de limite superior de um autovalor e o limite superior para o *gap* entre autovalores consecutivos para o problema (1) que são o objetivo deste trabalho.

Primeiramente, para o limite superior do *gap* entre autovalores consecutivos do problema (1), quando Ω é um domínio limitado em um espaço Euclidiano 2-dimensional $\mathbb{R}^2$, Payne, Pólya e Weinberger [36, 37] provaram a seguinte estimativa

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i. \tag{3}$$

Mais adiante, C. J. Thompson em 1969 [40], estendeu a estimativa (3) para o caso n-dimensional e obteve

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{nk} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i. \tag{4}$$

Os matemáticos Hile e Protter em 1980 [24], melhoraram (4) para

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{nk}{4} \tag{5}$$

Yang em 1991 [42](veja também Cheng e Yang em 2007 [14]), obteve a seguinte inequação:

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\lambda_{k+1} - \left(1 + \frac{4}{n} \right) \lambda_i \right) \leq 0. \tag{6}$$

A inequação (6) também pode ser encontrada como a seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \lambda_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \lambda_i.$$

A partir de (6) podemos inferir

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \tag{7}$$

As inequações (6) e (7) são chamadas primeira e segunda inequação de Yang respectivamente (veja Ashbaugh [1, 2]; Ashbaugh e Benguria [8]; Harrell e Stubbe [23]). Observamos que Ashbaugh e Benguria deram uma estimativa ótima para $k = 1$ (veja Ashbaugh [3, 4, 5]).

Note que também é possível provar que valem as seguintes implicações

$$(6) \implies (7) \implies (5) \implies (4).$$

De fato, temos

- (6) $\Rightarrow$ (7): rescrevendo a inequação (6) na forma de uma equação quadrada em função de λ_{k+1}

$$k(\lambda_{k+1})^2 - \left(2 + \frac{4}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)\lambda_{k+1} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \leq 0$$

teremos que

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{2k}\left\{\left(2 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \left[\left(2 + \frac{4}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2 - 4k\left(1 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

como, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)^2 \leq k\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2$, ao substituirmos $k\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2$ por $(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)^2$ na inequação e observando em seguida que $\left(2 + \frac{4}{n}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{4}{n}\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} &\leq \frac{1}{2k}\left\{\left(2 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \left[\left(2 + \frac{4}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2 - 4\left(1 + \frac{4}{n}\right)k\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\leq \frac{1}{2k}\left\{\left(2 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \left[\left(2 + \frac{4}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2 - 4\left(1 + \frac{4}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \frac{1}{2k}\left\{\left(2 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \left[\left(\left(2 + \frac{4}{n}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{4}{n}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \frac{1}{2k}\left\{\left(2 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \left[\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \frac{1}{2k}\left\{\left(2 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \left(\frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right\} \\
&= \frac{1}{2k}\left\{2\left(1 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right\} \\
&= \frac{1}{k}\left(1 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i
\end{aligned}$$

- (7) $\Rightarrow$ (5): para esta demonstração necessitamos dos dois seguintes resultados

Teorema 0.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Para que f seja uma função convexa é necessário e suficiente que $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.*

Demonstração. veja [31]. $\square$

Teorema 0.2 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : D \to \mathbb{R}$ um função convexa em D. Então para quaisquer $k \in \mathbb{N}$, $x_j \in D$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \cdots, k$, tais que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$, tem-se que*

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(x_j).$$

Demonstração. veja [25]. $\square$

Agora, inicialmente observe que

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} &\leq \frac{1}{k}\left(1 + \frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \frac{4}{kn}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \\
\Rightarrow \lambda_{k+1} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i &\leq \frac{4}{kn}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \\
\Rightarrow \frac{nk}{4} &\leq \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\lambda_{k+1} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}.
\end{aligned}$$

Tomando o intervalo $I = (-\infty, \lambda_{k+1})$ podemos definir a função $f : I \to \mathbb{R}$, por $f(x) = \dfrac{x}{\lambda_{k+1} - x} = \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - x} - 1$, teremos que $f'(x) = \dfrac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_{k+1} - x)^2}$ e ainda $f''(x) = \dfrac{2\lambda_{k+1}}{(\lambda_{k+1} - x)^3} > 0$. Com isso, pelo teorema 0.1, terremos que f é uma função convexa. Usando a Desigualdade de Jensen para funções convexas, teorema 0.2, em f teremos que

$$\begin{aligned}
\frac{nk}{4} &\leq \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\lambda_{k+1} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} = k\frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\lambda_{k+1} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \\
&= kf\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \leq k\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i}.
\end{aligned}$$

- (5) $\Rightarrow$ (4): temos que

$$\frac{nk}{4} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}-\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$$
$$\Rightarrow \lambda_{k+1}-\lambda_k \leq \frac{4}{nk}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i,$$

provando a última implicação.

A partir da inequação (6), Cheng e Yang [12] obtiveram em 2005

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \leq 2\left[\left(\frac{2}{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

e em 2007 [14] os mesmos autores, usando sua fórmula recursiva, obtiveram

$$\lambda_{k+1} \leq C_0(n)k^{\frac{2}{n}}\lambda_1, \tag{9}$$

em que a constante $C_0(n) \leq 1+\dfrac{4}{n}$ conforme foi estimada em [11]. Da fórmula assintótica de Weyl (veja Weyl [41]), sabemos que o limite superior (9) é o melhor possível em termos da ordem em k.

Quando Ω é um domínio limitado de uma variedade Riemanniana completa M, Chen e Cheng em 2008 [11], utilizando o teorema de Nash [35], obtiveram

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\lambda_i+\frac{1}{4}n^2H_0^2\right), \tag{10}$$

em que

$$H_0^2 = \inf_{\psi\in\Phi}\sup_{\Omega}|H|^2, \tag{11}$$

com $\Phi = \{\psi \mid \psi$ é uma imersão isométrica de M em um espaço Euclidiano$\}$, H a curvatura média da imersão ψ e $|H|$ denotando sua norma. (Veja também El Soufi et al. [18]; Harrell [21].)

No mesmo trabalho, usando a fórmula recursiva de Cheng e Yang, Cheng e Chen também deduziram

$$\lambda_{k+1}+\frac{1}{4}n^2H_0^2 \leq C_0(n)k^{\frac{2}{n}}\left(\lambda_1+\frac{1}{4}n^2H_0^2\right), \tag{12}$$

em que H_0^2 e $C_0(n)$ são obtidos por (11) e (9), respectivamente. A partir de (10), pode-se obter o *gap* entre os autovalores consecutivos do Laplaciano por

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \leq 2\left[\left(\frac{2}{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\frac{1}{2}nH_0^2\right)^2 - \left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

Muitos matemáticos estudaram as desigualdades universais para autovalores e a diferença para autovalores consecutivos para os casos em que Ω é uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta homogênea; uma subvariedade mínima compacta sem fronteira; um domínio conexo limitado em uma esfera unitária padrão $\mathbb{S}^N(1)$; um domínio conexo limitado; uma hipersuperfície complexa compacta sem fronteira no espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n(4)$ com curvatura seccional holomórfica 4 (veja Cheng e Yang [12, 13, 15]; Harrell [20]; Harrell e Michel [22]; Harrell e Stubbe [23]; Li [30]; Yang e Yau [43]; Leung [29]; Sun et al. [39]; Chen et al.[16]).

Das expressões em (8) e (13), é possível ver que a estimativa de Yang para o *gap* entre autovalores consecutivos de (1), implícita em Yang de 1991 [42], e a estimativa de Chen e Cheng de 2008 [11] estão na ordem de $k^{\frac{3}{2n}}$. No entanto, pelo cálculo do *gap* entre os autovalores consecutivos de $\mathbb{S}^n$ com a métrica usual e a fórmula assintótica de Weyl, a ordem do limite superior desse *gap* é $k^{\frac{1}{n}}$, e isso fez com que Chen, Zheng e Yang concebecem a seguinte conjectura:

Conjectura 1. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa n-dimensional M. Para o problema de Dirichlet* (1)*, o limite superior para o gap entre autovalores consecutivos do Laplaciano deve ser*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{1}{n}}, \; k > 1, \tag{14}$$

onde $C_{n,\Omega}$ é uma constante dependente de Ω e da dimensão n.

Observação 1. A famosa conjectura de Payne-Pólya-Weinberger (veja Payne et al. [36, 37]; Thompson [40]; Ashbaugh e Benguria [6, 7]) afirma que, quando $M = \mathbb{R}^n$, para o problema do autovalor de Dirichlet (1), deve-se ter

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \leq \left.\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|_{\mathbb{B}^n} = \left(\frac{j_{\frac{n}{2},1}}{j_{\frac{n}{2}-1,1}}\right)^2 \tag{15}$$

em que $\mathbb{B}^n$ é a bola unitária n-dimensional em $\mathbb{R}^n$, e $j_{p,k}$ é o k-ésimo zero positivo da função de Bessel $J_p(t)$. A partir da fórmula assintótica de Weyl e de (15), a ordem do limite superior dos autovalores consecutivos de (1) é $k^{\frac{1}{2}}$. Portanto, a conjectura 1 se refere a distribuição dos autovalores de outro ponto de vista. Da ordem do limite superior do *gap* entre os autovalores consecutivo de $\mathbb{S}^n$, a estimativa em (14) é a melhor possível em termos da ordem em k.

Nos casos seguintes, as contantes $C_{n,\Omega}$ podem ser diferentes a depender do caso.

Quando Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, para o problema de autovalor de Dirichlet (1), eles obtiveram uma resposta afirmativa para a conjectura 1 que é o teorema principal do artigo.

Teorema. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e λ_k o k-ésimo $(k > 1)$ autovalor do problema de autovalor de Dirichlet* (1)*, então*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{1}{n}},$$

onde $C_{n,\Omega} = 4\lambda_1 \sqrt{C_0(n)/n}$ e $C_0(n)$ é dado por (9)*.*

Além disso, eles provaram os seguintes resultados em variedades

Corolário 1. *Se $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-1)$ é um domínio limitado no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$ e λ_k o k-ésimo $(k > 1)$ autovalor do problema de autovalor de Dirichlet (1), então*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{1}{n}}, \tag{16}$$

em que $C_{n,\Omega}$ depende de Ω e da dimensão n, sendo dado por

$$C_{n,\Omega} = 4\left[C_0(n)\left(\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\right)\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}n^2 H_0^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

onde $C_0(n)$ e H_0^2 são os mesmos conforme em (12).

De fato, pelo teorema da comparação para a função distância em variedade Riemanniana, temos

Corolário 2. *Seja M é uma variedade Riemanniana não compacta completa simplesmente conexa n-dimensional $(n \geq 3)$ com curvatura seccional Sec satisfazendo*

$$-a^2 \leq Sec \leq -b^2,$$

em que a e b são constantes com $0 < b \leq a$. Se $\Omega \subset M$ é um domínio limitado de M e λ_k o k-ésimo $(k > 1)$ autovalor de (1), então

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{1}{n}}, \tag{18}$$

onde $C_{n,\Omega}$ depende de Ω e da dimensão n, sendo dado por

$$C_{n,\Omega} = 4\left[C_0(n)\left(\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2 b^2 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2)\right)\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}n^2 H_0^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

com $C_0(n)$ e H_0^2 são os mesmos conforme em (12).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fixaremos a notação que será utilizada e destacaremos alguns resultados e conceitos básicos necessários ao desenvolvimento do trabalho. As principais referências aqui utilizadas são as seguintes: [9, 19, 32, 33].

1.1 Variedades Riemanniana

Seja $M = M^n$ uma variedade diferenciável de dimensão n, onde diferenciável sempre significará de classe C^∞. Denotaremos por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais diferenciáveis definidas em M e por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M. Se $p \in M$, então T_pM denotará o espaço tangente de M no ponto p e $TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$ denotará o fibrado tangente de M. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o colchete de X e Y é o campo de vetores $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ definido por $[X, Y] = XY - YX$. Por fim, identificaremos por ∂_i ou $\frac{\partial}{\partial x_i}$ os campos coordenados de M conforme seja conveniente.

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável M e uma escolha, para cada ponto $p \in M$, de um produto interno positivo definido $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM de M em p, que varia diferenciavelmente com p no seguinte sentido: se X e Y são campos diferenciáveis de vetores em M, então a função $p \mapsto \langle X, Y \rangle_p$ é diferenciável em M. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (ou simplesmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando não houver possibilidade de confusão) é usualmente chamado uma métrica riemanniana em M.

A noção natural de equivalência entre duas variedades Riemannianas é a noção de isometria: Sejam M_1^n e M_2^n duas variedades diferenciáveis. Um *difeomorfismo* $\varphi : M_1 \to M_2$ é um homeomorfismo diferenciável cujo a inversa também é diferenciável. Sejam X e Y campos de vetores em uma vizinhança U de M, então $d\varphi(X)$ e $d\varphi(Y)$ são campos de vetores definidos ao longo de $\varphi(U)$. Um difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ entre duas variedades Riemannianas M_1 e M_2 é uma *isometria* se para todo $p \in M_1$ e todo par $X, Y \in T_pM$, tem-se

$$\langle X, Y \rangle = \langle d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y) \rangle, \tag{1.1}$$

em que, por simplicidade, usamos o mesmo símbolo para indicar as métricas riemannianas de M_1 e M_2. Dizemos que φ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi : U \to \varphi(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1.1).

1.2 Imersões Isometricas

Definição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis.*

a) Uma aplicação diferenciável $\varphi : M_1 \to M_2$ é uma imersão se a diferencial $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ for injetiva para todo $p \in M_1$.

b) Se a imersão $\varphi : M_1 \to M_2$ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M_1) \subset M_2$, em que $\varphi(M_1)$ tem a topologia induzida por M_2, diz-se que φ é um mergulho.

c) Se $M_1 \subset M_2$ e a inclusão $i : M_1 \to M_2$ é um mergulho, diz-se que M_1 é uma subvariedade de M_2.

Observe que se $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ é uma imersão, então $n \leq m$ e a diferença $m - n$ é chamada a codimensão da imersão φ. No caso em que a codimensão é 1, ou seja, $\varphi : M_1^n \to M_2^{n+1}$, $\varphi(M_1) \subset M_2$ é então denominada uma hipersuperfície.

Um resultado interessante é o que mostra ser toda imersão localmente um mergulho, ou seja, se $\varphi : M_1 \to M_2$ uma imersão da variedade M_1 na variedade M_2, para todo $p \in M_1$ existe uma vizinhança $U \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi : U \to M_2$ é um mergulho. Uma demonstração para tal fato pode ser encontrada em [9].

Outro fato fundamental sobre imersões é o famoso Teorema de Whitney: dada uma variedade diferenciável M^n, existe sempre uma imersão $\varphi : M \to \mathbb{R}^{2n}$ e um mergulho $\varphi : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [33]. Um corolário do Teorema de Whitney é que toda variedade diferenciável M^n pode ser munida de uma métrica Riemanniana. Para mais detalhes, veja [32].

Seja M_1^n uma variedade Riemanniana e seja $\varphi : M_1^n \to M_2^{n+k}$ uma imersão de M_1 em uma variedade Riemanniana M_2. Dizemos que φ é uma imersão isométrica se a condição (1.1) for satisfeita. Em outras palavras, a imersão φ é isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original. Um resultado importante acerca de imersões isométricas é um famoso teorema devido a John Nash que garante que toda variedade Riemanniana pode ser imersa isometricamente em um espaço euclidiano.

A variedade Riemanniana M se torna um espaço métrico se a distância entre dois pontos p e q é definida como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por parte ligando p a q.

1.3 Curvaturas

Seja M uma variedade Riemanniana e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A seguinte aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ indicará a única conexão Riemanniana de M, conforme o teorema de Levi-Civita [9], determinada por

$$\begin{cases} X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \end{cases} \quad \text{em que } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.2}$$

Considere $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica, em que $\overline{M}$ é uma variedade Riemanniana com conexão $\overline{\nabla}$. Para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p, tal que $\varphi\big|_U$ é um mergulho de U sobre sua imagem $\varphi(U)$, ou seja, $\varphi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Faremos a convenção usual de identificar U com $\varphi(U)$.

O espaço tangente $T_{\varphi(p)}\overline{M}$ de $\overline{M}$ em $\varphi(p)$ se decompõe em uma soma direta

$$T_{\varphi(p)}M = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

em que identificamos $d\varphi(T_pM)$ com T_pM e denotamos por $T_pM^{\perp}$ o complemento ortogonal de T_pM em $T_{\varphi(p)}\overline{M}$. O subespaço $T_pM^{\perp}$ é chamado o espaço normal de M no ponto p.

Para X e Y campos de vetores em M, se $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são suas extensões em uma vizinhança de $\varphi(p)$ em $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}.$$

Em consequência do teorema de existência e unicidade de Levi-Civita, segue que

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla_X Y + (\nabla_X Y)^{\perp}.$$

Denotando por $\alpha(X,Y) = (\nabla_X Y)^{\perp}$ fica bem definida a aplicação bilinear e simétrica sobre $C^{\infty}(M)$

$$\begin{aligned} \alpha : T_pM \times T_pM &\to T_pM^{\perp} \\ (X,Y) \quad &\mapsto \alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, \end{aligned}$$

denominada a *Segunda Forma Fundamental* da imersão φ.

Um campo de vetores normal ξ é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor ξ_p em $T_pM^{\perp} \subset T_{\varphi(p)}\overline{M}$. Denotemos por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ o conjunto de todos os campos de vetores normais diferenciáveis da imersão φ. Por sua definição, segue que $\alpha(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \eta \rangle, \quad X, Y \in T_pM, \tag{1.3}$$

é uma forma bilinear simétrica. Em particular temos a aplicação

$$II_\eta(X) = H_\eta(X,X) = \langle \alpha(X,X), \eta \rangle.$$

Quando não houver possibilidade de confusão, diremos também que a aplicação II_η é a Segunda Forma Fundamental de φ em $p \in M$ segundo η e usaremos a notação $II_\eta(X,Y) = H_\eta(X,Y)$.

Sejam $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Consideremos $A_\eta(X) = (\overline{\nabla}_X \eta)^{\top}$ a componente tangente e $(\overline{\nabla}_X \eta)^{\perp}$ a componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$. Como para todo $Y \in T_pM$, $\langle Y, \eta \rangle = 0$ segue que

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \eta \rangle. \tag{1.4}$$

Assim, $A_\eta : T_pM \to T_pM$, definida acima, é um operador linear autoadjunto associado a H_η, chamado *Operador de forma* (ou Segunda Forma Fundamental quando não houver possibilidade de confusão).

Definição 1.2. *O tensor* ***curvatura de Riemann*** *R de uma variedade Riemanniana M é o $(1,3)$-tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

em que ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$-tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \times \mathfrak{X}(M)\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M), \tag{1.5}$$

dado por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle. \tag{1.6}$$

Proposição 1.1. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z)$;
2. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$;
3. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi).*

Demonstração. Vide [9] página 102. □

Definição 1.3. *A* ***curvatura seccional*** $K_p(\sigma)$ *no ponto* $p \in M$ *segundo um subespaço bidimensional* $\sigma \subset T_pM$*, é definida por*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

em que $X, Y \in \sigma$ *são vetores linearmente independentes. Convém considerarmos também a notação* $K_p(X, Y) = K_p(\sigma)$*.*

Segue-se da Álgebra Linear que esta definição não depende da escolha dos vetores X, Y que geram o plano σ.

Definimos o tensor de Ricci como o traço do tensor curvatura de Riemann, isto é, se $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset T_pM$ é uma base ortonormal de T_pM e $u, v \in T_pM$, então para cada $p \in M$ o tensor de Ricci é dado por

$$Ric(u, v) := \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, u)v, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, v)u, e_i\rangle = Ric(v, u),$$

onde a segunda igualdade segue da Proposição 1.1 e prova que o tensor de Ricci é simétrico.

Definição 1.4. *Sejam* α *a segunda forma fundamental da imersão* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ *e* $\{E_1, \cdots, E_n, \eta_1, \cdots, \eta_k\}$ *a extensão de um referencial móvel adaptado de* M*, ou seja, no ponto* $p \in M$ *os campos* $\{E_1, \cdots, E_n\}$ *formam uma base para* T_pM *e os campos* $\{\eta_1, \cdots, \eta_k\}$ *formam uma base para* $T_pM^\perp$*. Considere o campo*

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_i) \in \mathfrak{X}(M)^\perp. \tag{1.7}$$

Uma vez que

$$\alpha(E_i, E_i) = \sum_{j=1}^{k} \langle \alpha(E_i, E_i), \eta_j\rangle \eta_j = \sum_{j=1}^{k} \langle A_{\eta_j} E_i, E_i\rangle \eta_j,$$

substituindo em (1.7) *obtemos*

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \langle A_{\eta_j} E_i, E_i\rangle \eta_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} tr(A_{\eta_j})\eta_j. \tag{1.8}$$

O valor de $\boldsymbol{H}$ *em* $p \in M$ *é conhecido como o vetor curvatura média* $\boldsymbol{H}(p)$ *de* φ *em* p*.*

1.4 Operadores em Variedades

Definição 1.5. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de f é o campo vetorial diferenciável ∇f, definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f) = df(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Relembremos que todo campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito localmente, em termos dos campos coordenados $\partial_1, \cdots, \partial_n$, por

$$Y = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} y_i \partial_j,$$

em que $y_i := \langle Y, \partial_i\rangle$. De fato, primeiro escreva

$$Y = \sum_{k=1}^{n} a^k \partial_k,$$

em seguida note que

$$\langle Y, \partial_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a^k \partial_k, \partial_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a^k \langle \partial_k, \partial_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} a^k g_{kj} \implies a^k = \sum_{i=1}^{n} g^{ik}\langle Y, \partial_i\rangle.$$

Deste modo, obtemos que o gradiente de uma função f em coordenadas é dado por

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\langle \nabla f, \partial_i\rangle \partial_j = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i(f)\partial_j. \tag{1.9}$$

Em particular, para $\{e_1, \cdots, e_n\}$ um referencial ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$ em U, teremos que

$$\nabla f = \sum_{k=1}^{n} e_k(f) e_k$$

Ademais, o segundo membro da igualdade acima independente do referencial escolhido, pois se $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$ é outro referencial ortonormal em U, podemos reescrever localmente

$$\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} e_k,$$

em que a matriz $\left(a_{jk}\big|_p\right)$ é ortonormal para todo $p \in U$, e então teremos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \tilde{e}_j(f)\tilde{e}_j &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}e_k\right)(f)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}e_l\right) = \sum_{l,k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}a_{jl}\right) e_k(f)e_l \\ &= \sum_{l,k=1}^{n} \delta_{kl} e_k(f) e_l = \sum_{k=1}^{n} e_k(f)e_k.\end{aligned}$$

Além disso, das propriedades de derivação temos que, para $f, h \in C^\infty(M)$, vale

$$\nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h \quad \text{e} \quad \nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h. \tag{1.10}$$

Definição 1.6. *Seja M^n uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Podemos definir o operador $\nabla X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$ em que, no lado direito da igualdade, ∇ é a conexão Riemanniana em M.*

Definição 1.7. *Seja M^n uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos a divergência do campo X como a função $divX : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$divX = traço\{\nabla X\},$$

para cada $p \in M$, em que ∇X é o operador citado na definição 1.6.

Proposição 1.2. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave em M, então*

a) $div(X + Y) = divX + divY$

b) $div(fX) = fdivX + \langle \nabla f, X \rangle$

Demonstração. ver [19] □

Definição 1.8. *O Operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é definido por*

$$\Delta(f) = div(\nabla f). \tag{1.11}$$

Teremos então para $f, h \in C^\infty(M)$, a partir de (1.10) e da proposição 1.2, que

$$\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle.$$

Em particular, podemos representar o Laplaciano em coordenadas (veja [38] capítulo 2 pg. 57), por

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{\det(g_{ij})} \partial_j(f) \right). \tag{1.12}$$

Definição 1.9. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O Hessiano de f como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f, \tag{1.13}$$

ou como o $(0,2)$-tensor, dado por

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle. \tag{1.14}$$

Observe que, usando a definição de gradiente 1.5 e a conexão de Levi-Civita (1.2), segue que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X\langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f \\
&= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f + (\nabla_Y X)f - (\nabla_Y X)f \\
&= X(Y(f)) - [X, Y]f - (\nabla_Y X)f \\
&= X(Y(f)) - X(Y(f)) + Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f \\
&= Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f \\
&= Y\langle \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \nabla_Y \nabla f, X\rangle \\
&= \nabla^2 f(Y,X)
\end{aligned}
$$

ou seja, o $(0,2)$-tensor $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ é simétrico. Ademais, a partir de (1.13) temos

$$\Delta f = tr(\nabla^2 f).$$

Agora, considere $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a métrica Riemanniana em uma variedade Riemanniana M, ou seja, para cada $p\in M$ temos que

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_p : T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

é um produto interno definido no T_pM.

Para cada $p\in M$, o *Complexificado do espaço tangente* T_pM é o espaço vetorial complexo

$$T_p^{\mathbb{C}}M := \{X_p + iY_p;\ X_p, Y_p\in T_pM\}.$$

Podemos então definir em $T_p^{\mathbb{C}}M$ um produto interno hermitiano da seguinte forma. Primeiramente estendemos o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ bilinearmente ao $T_p^{\mathbb{C}}M$ sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ tomando

$$\langle iX, Y\rangle_p = \langle X, iY\rangle_p = i\langle X,Y\rangle_p, \quad \text{onde aqui } i=\sqrt{-1}$$

e então definimos

$$
\begin{aligned}
\langle\cdot,\cdot\rangle_p^{\mathbb{C}} : T_p^{\mathbb{C}}M\times T_p^{\mathbb{C}}M &\longrightarrow \quad \mathbb{C} \\
(Z,W) \quad &\longmapsto \langle Z,W\rangle_p^{\mathbb{C}} := \langle Z,\overline{W}\rangle_p,
\end{aligned}
$$

em que $\overline{W}$ é o conjugado de W.

Teremos então de forma análoga o complexificado do espaço dos campos de vetores diferenciáveis em M como

$$\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}} = \{X+iY;\ X,Y\in\mathfrak{X}(M)\}.$$

Para uma função complexa $f: M^n\to\mathbb{C}$ suave definida sobre a variedade M. O gradiente de f será o campo vetorial $\nabla f\in\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$, definida da sobre M por

$$\left\langle \nabla f, \overline{X}\right\rangle^{\mathbb{C}} = X(f) = df(X)$$

para todo $X\in\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$. E também, em coordenadas teremos que

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left\langle \partial_i, \overline{\nabla f}\right\rangle^{\mathbb{C}}\partial_j = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left\langle \nabla f, \partial_i\right\rangle^{\mathbb{C}}\partial_j = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\partial_j.$$

Visto que f seja uma função complexa podemos reescreve-la por $f = f_1 + if_2$ com $f_1, f_2\in C^\infty(M)$ e $i=\sqrt{-1}$, e pelas regras de derivação teremos

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i(f_1+if_2)\partial_j = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i(f_1)\partial_j + i\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i(f_2)\partial_j = \nabla f_1 + i\nabla f_2. \tag{1.15}$$

Além disso, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ e $f : M \to \mathbb{C}$ é uma função suave em M, utilizando a definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{C}}$ teremos que

$$div(X+Y) = divX + divY \quad \text{e} \quad div(fX) = f divX + \left\langle \nabla f, \overline{X} \right\rangle^{\mathbb{C}} \tag{1.16}$$

Teremos também para uma função complexa $f : M^n \to \mathbb{C}$ suave, que o Laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{C}$ que, a partir de (1.15) e (1.16), é dada por

$$\Delta f = div(\nabla f) = \Delta f_1 + i\Delta f_2$$

e em coordenadas, simplesmente por

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial_i \Big(g^{ij} \sqrt{\det(g_{ij})} \partial_j (f_1) \Big) + i \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial_i \Big(g^{ij} \sqrt{\det(g_{ij})} \partial_j (f_2) \Big).$$

Já que, para funções reais f definidas sobre M, temos que $\nabla f_p \in T_pM$ e para funções $h : M \to \mathbb{C}$ complexas, temos $\nabla h_p \in T_p^{\mathbb{C}}M$, então, utilizando a definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{C}}$ teremos

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla \overline{h}, \nabla f \right\rangle^{\mathbb{C}} &= \overline{\left\langle \nabla f, \nabla \overline{h} \right\rangle^{\mathbb{C}}} = \overline{\left\langle \nabla f, \overline{\nabla \overline{h}} \right\rangle} = \overline{\left\langle \nabla f, \nabla h \right\rangle} \\ &= \overline{\left\langle \nabla h, \nabla f \right\rangle} = \left\langle \nabla h, \overline{\nabla f} \right\rangle = \overline{\langle \nabla h, \nabla f \rangle^{\mathbb{C}}}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.5 Campos de Jacobi

Os Campos de Jacobi são campos de vetores ao longo de geodésicas, definidos por meio de uma equação diferencial que aparece naturalmente no estudo da aplicação exponencial.

Definição 1.10. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se*

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$. Em outras palavras, uma geodésica é uma curva cujo campo velocidade é paralelo ao longo da curva.

Para uma vizinhança coordenada U de M, considere o subconjunto $\mathcal{U}$ do fibrado tangente TM dado por

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V, v \in T_qM, \|v\| < \varepsilon\},$$

onde $V \subset U$ é uma vizinhança de p em M e TU o conjunto de todos os espaços tangentes T_pU, com $p \in U$.

Proposição 1.3. *Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞*

$$\begin{aligned} \gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} &\to M \\ (t, q, v) &\mapsto \gamma(t, q, v) \end{aligned}$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ é única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $(q, v) \in \mathcal{U}$.

Demonstração. vide [9] □

Além disso, pela homogeneidade de uma geodésica, para um $\alpha > 0$ real, tem-se que $\gamma(t, q, \alpha v) = \gamma(\alpha t, q, v)$. Assim, podemos definir a aplicação exponencial como segue

Definição 1.11. *Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto, então a aplicação*

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{U} &\rightarrow M \\ (q, v) &\mapsto \exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(\|v\|, q\frac{v}{\|v\|}\right) \end{aligned}$$

*é chamada uma **aplicação exponencial** em $\mathcal{U}$.*

Podemos também denotar $\exp(p, v) = \exp_p(v)$. Geometricamente, $\exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $\|v\|$, a partir de p, sobre a geodésica que passa por p com velocidade igual a $\frac{v}{\|v\|}$.

Proposição 1.4. *Dado $p \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M.*

Demonstração. vide [9] página 73. □

Definição 1.12. *Uma curva diferenciável por partes em M é uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tal que existe uma partição do intervalo [a,b]*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b,$$

tal que as restrições $\gamma\big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ são diferenciáveis para $i = 0, 1, \cdots, k$. Cada ponto $\gamma(t_i)$ é chamado um vértice da curva γ e o ângulo da curva no vértice $\gamma(t_i)$ é definido como sendo o ângulo entre os vetores

$$\lim_{t \to t_i^+} \gamma'(t) \quad e \quad \lim_{t \to t_i^-} \gamma'(t).$$

Definição 1.13. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes. Uma variação de γ é uma aplicação*

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

tal que

(*i*) *$F(0, t) = \gamma(t)$;*

(*ii*) *existe uma partição de $[a, b]$ por pontos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$, tal que*

$$F\big|_{(-\varepsilon,\varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$$

é diferenciável para $i = 1, 2, \cdots, k$.

Para cada s fixado, a curva $F_s(t) = F(s, t) : [a, b] \rightarrow M$ é chamada uma curva principal da variação, e para cada t fixado, a curva $F_t(s) = F(s, t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva transversal da variação.

Um campo vetorial ao longo de F é uma aplicação $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$ tal que $V(s, t) \in T_{F(s,t)}M$ para cada (s, t) e $V\big|_{(-\varepsilon,\varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$ é diferenciável para $i = 1, 2, \cdots, k$. Se F é uma variação de γ, então o campo variacional de F é o campo vetorial ao longo de γ dado por

$$V(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(0, t).$$

Lema 1.1 (Lema de Simetria). *Seja $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ uma variação. Então*

$$\frac{D}{ds}\frac{\partial F}{dt} = \frac{D}{dt}\frac{\partial F}{ds}.$$

Demonstração. vide [9] página 76. □

Lema 1.2 (Lema de Gauss). *Seja M uma variedade riemanniana, $p \in M$ e $v \in T_pM$ tal que $\exp_p(v)$ esteja definido. Então*

$$\left\langle d(\exp_p)_v v, d(\exp_p)_v w \right\rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo $w \in T_pM$.

Em particular, as geodésicas radiais que partem de p são ortogonais as esferas geodésicas centradas em p.

Demonstração. vide [9] página 77 □

Considere o raio geodésico $\gamma : [0, 1] \to M$

$$\gamma(t) = \exp_p(tv).$$

Definimos uma variação $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ de γ por

$$F(s, t) = \exp_p(tv(s)),$$

em que $v(s)$ é uma curva em T_pM com $v(0) = v$ e $\|v(s)\|$ é constante. Em particular, as curvas principais da variação $F_s(t)$ são geodésicas, mais especificamente, as geodésicas radiais $\gamma(1.p, tv(s)) = \gamma(t, p, v(s))$ que passam por p com velocidade $v(s)$. Uma variação F cujas curvas principais são geodésicas é chamada uma variação geodésica.

Proposição 1.5 (Equação de Jacobi). *Seja $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$ uma variação geodésica e denote*

$$J(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(0, t).$$

Então J satisfaz a equação diferencial linear

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \gamma')\gamma' = 0, \tag{1.18}$$

para todo $t \in [0, a]$.

Demonstração. vide [9] página 123. □

Definição 1.14. *Seja $\gamma : I \to M$ uma geodésica. Qualquer campo vetorial ao longo de γ que satisfaz a equação de Jacobi é chamado um **campo de Jacobi** ao longo de γ. Segue da Proposição 1.5 que o campo variacional de uma variação geodésica é um campo de Jacobi.*

Observação 2. *Um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $\dfrac{DJ}{dt}(0)$ (veja [9] capítulo V).*

Exemplo 1.1. *Considere M_k uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante K. Sejam $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica normalizada e J um campo de Jacobi ao longo de γ, normal a γ'.*

Uma vez que M tem curvatura seccional constante, teremos para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle R(J, \gamma')\gamma', X\rangle = K\{\langle \gamma', \gamma'\rangle\langle J, X\rangle - \langle \gamma', X\rangle\langle J, \gamma'\rangle\},$$

(ver [9] página 107). Como $|\gamma'| = 1$ e $\langle \gamma', J\rangle = 0$, segue da equação anterior que

$$\langle R(J, \gamma')\gamma', X\rangle = K\langle J, X\rangle$$

ou seja, $R(J, \gamma')\gamma' = KJ$. Com isso, a equação de Jacobi (1.18) em M_k é dada por

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0. \tag{1.19}$$

Então, considere um vetor $w \in T_{\gamma(0)}M_k$ unitário com $\langle w, \gamma(0)\rangle = 0$ e o seu transporte paralelo $t \mapsto w(t)$ ao longo de γ. Seja $s : [0, a] \to \mathbb{R}$ uma função de forma que o campo

$$J(t) := s(t)w(t) \tag{1.20}$$

satisfaça (1.19) e as condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = w(0)$. Para obter a expressão de $s(t)$, basta aplicar (1.20) em (1.19) e observar que, por $w(t)$ ser paralelo não nulo, obtemos a seguinte Equação Diferencial Parcial de segunda ordem

$$\begin{cases} s''(t) + Ks(t) = 0 \\ s(0) = 0, \quad s'(0) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo a E.D.O. acima com as condições iniciais dadas teremos então que a expressão de $s(t)$ é dada por

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(t\sqrt{-K}), & se\ K < 0, \\ t, & se\ K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(t\sqrt{K}), & se\ K > 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Definição 1.15. *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ, com $t_0 \in (0, a]$, se existe um campo de Jacobi J, não nulo, ao longo de γ tal que $J(t_0) = J(0) = 0$. O número máximo de tais campos linearmente independentes é a multiplicidade do ponto conjugado $\gamma(t_0)$.*

Observemos que se $\gamma(t_0)$ é ponto conjugado de $\gamma(0)$, então $\gamma(0)$ é ponto conjugado de $\gamma(t_0)$.

Definição 1.16. *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.17. *Seja M uma variedade riemanniana, $\gamma : [0; a] \to M$ uma geodésica e $\mathcal{V}$ o espaço vetorial dos campos diferenciáveis por partes ao longo de γ. A forma do índice ao longo de γ é a forma bilinear simétrica $I_a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$I_a(V, W) = \int_0^a \{\langle V', W'\rangle - \langle R(V, \gamma')\gamma', W\rangle\}dt \tag{1.22}$$

para todo $V, W \in \mathcal{V}$.

Nas notações da definição acima, se $J \in \mathcal{V}$ é um campo de Jacobi ao longo de γ, então utilizando a equação de Jacobi (1.18) em (1.22) obtemos

$$\begin{aligned} I_a(J,J) &= \int_0^a \{\langle J', J'\rangle - \langle R(J,\gamma')\gamma', J\rangle\}dt \\ &= \int_0^a \{\langle J', J'\rangle + \langle J'', J\rangle\}dt \\ &= \int_0^a \left\{\frac{d}{dt}\langle J', J\rangle\right\} dt \\ &= \langle J', J\rangle\Big|_0^a. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Definição 1.18. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$ unitário, seja $\gamma_v : [0,\infty) \to M$ o raio geodésico normalizado $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Se o conjunto dos pontos $t \in (0,\infty)$ tais que γ_v é minimizante em $[0,t]$ for um intervalo da forma $[0,t_0]$, dizemos que $\gamma_v(t_0)$ é o ponto de mínimo de p na direção de v. O Cut locus de p em M $Cut(p)$ é definido como o conjunto dos pontos mínimos de p em M (em alguma direção $v \in T_pM$).*

Seja M uma variedade Riemanniana. Defina o conjunto

$$E_p = \{v \in T_pM; \exp_p(tv) \in M\backslash Cut(p), \forall\ 0 \le t \le 1\}$$

Proposição 1.6. $\exp_p : E_p \to M\backslash Cut(p)$ *é um difeomorfismo.*

Demonstração. É claro que $\exp_p(E_p) = M\backslash Cut(p)$. Agora seja $q \in M\backslash Cut(p)$ e $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ a única geodésica normalizada e minimizante ligando $p = \gamma_v(0)$ a $q = \gamma_v(1)$. Então q não é conjugado a p ao longo de γ_v. Portanto $v \in T_pM$ não é ponto crítico de $\exp_p$, que é assim um difeomorfismo local. Basta então mostrar que $\exp_p$ é injetiva em E_p. Suponha que exista $v, w \in E_pM$ distintos, tais que

$$\gamma_v(t) = \exp_p(tv) \quad \text{e} \quad \alpha_w = \exp(tw)$$

ligam p a $q = \gamma_v(1) = \alpha_w(1)$. Segue de $q \notin Cut(p)$ que ao menos uma dentre γ_v e α_w, digamos γ_v, não é minimizante até q. Logo, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\exp_p(t_0 v) = \gamma_v(t_0) \in Cut(p)$$

contradizendo o fato de v, e portanto $t_0 v$, pertencer a E_p. □

Definição 1.19. *Fixado $p \in M$ denotaremos por $\rho : M\backslash(Cut(p) \cup \{p\}) \to \mathbb{R}_+^*$ a função distância a partir de p, isto é, $\rho(q) = d(p,q)$ é o ínfimo do comprimento das curvas que ligam q a p, para todo $q \in M\backslash(Cut(p) \cup \{p\})$.*

Proposição 1.7. *Seja $\gamma_v : [0,a] \to M\backslash Cut(p)$ uma geodésica normalizada partindo de p. Então:*

$$\nabla\rho(\gamma_v(t)) = \gamma_v'(t), \forall\ t \in [0,a]. \tag{1.24}$$

Em particular, $|\nabla\rho| = 1$.

Demonstração. Seja $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ com $t \in [0, a]$ e $q = \gamma_v(t_0)$. Se $w \in T_pM$, com w perpendicular a $\gamma_v'(t_0)$, segue da proposição anterior e do lema 1.2 (Lema de Gauss) a existência de $W \in T_v(T_pM)$ tal que

$$\langle W, v\rangle = 0 \quad \text{e} \quad (d\exp_p)_{t_0 v}(W) = w.$$

Tomando então $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E_p$ tal que $|a(s)| = t_0$, $a(0) = t_0 v$ e $a'(0) = W$. Segue da unicidade da geodésica minimizante que liga $\exp_p(a(s))$ a p que

$$\rho(\exp_p(\alpha(s))) = t_0$$

e derivando em $s = 0$ temos

$$0 = \langle \nabla\rho(q), (d\exp_p)_{t_0 v}(W)\rangle = \langle \nabla\rho(q), w\rangle.$$

Já que a igualdade acima é válida para todo $w \perp \gamma_v(t_0)$, segue que $\nabla\rho(q)$ é um múltiplo de $\gamma_v'(t_0)$. Mas desde que $\rho(\gamma_v(t)) = t$ para $0 \le t \le a$, temos

$$\langle \nabla\rho(\gamma_v(t)), \gamma_v'(t)\rangle = d\rho_{\gamma_v(t)}(\gamma_v'(t)) = \frac{d}{dt}\big(\rho(\gamma_v(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(t\big) = 1,$$

daí $\nabla\rho(\gamma_v(t)) = \gamma_v'(t)$, para todo $t \in [0, a]$. □

Agora fixemos um ponto $p \in M$. Seja $q \in M \backslash Cut(p)$ e consideremos γ_v uma geodésica minimizante $\gamma : [0, \rho(q)] \to M$ ligando p a q, parametrizada pela distância. Seja $X \in T_qM$ tal que $\langle X, \gamma'\rangle = 0$. Por q não é ponto conjugado de p, podemos estender X a um Campo de Jacobi J ao longo de γ satisfazendo

$$J(p) = 0, \quad J(q) = X \quad \text{e} \quad [J, \gamma'] = 0, \tag{1.25}$$

pois utilizando (1.2) e o Lema de Simetria 1.1 temos

$$[J, \gamma'] = \nabla_J \gamma' - \nabla_{\gamma'} J = \frac{D}{ds}\frac{\partial F}{dt} - \frac{D}{dt}\frac{\partial F}{ds} = 0$$

Pela proposição anterior temos que $\gamma' = \nabla\rho$ e também que $[J, \nabla\rho] = 0$, assim

$$\nabla_{\nabla\rho} J = \nabla_J \nabla\rho. \tag{1.26}$$

Logo, escrevendo $\rho(q) = \rho$ por conveniência, temos

$$\begin{aligned}
\nabla^2\rho(q)(X, X) &= \langle \nabla_{J(q)}\nabla\rho(q), J(q)\rangle \\
&= \langle \nabla_J \nabla\rho, J\rangle(q) \\
&= \langle \nabla_{\nabla\rho} J, J\rangle(\gamma(\rho)) \\
&= \langle \nabla_{\nabla\rho} J, J\rangle(\gamma(\rho)) - \langle \nabla_{\nabla\rho} J, J\rangle(\gamma(0)) \\
&= \int_0^\rho \frac{d}{dt}\{\langle \nabla_{\nabla\rho} J, J\rangle(\gamma(t))\}dt \\
&= \int_0^\rho (d\langle \nabla_{\nabla\rho} J, J\rangle)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\
&= \int_0^\rho \big(d\langle \nabla_{\nabla\rho} J, J\rangle\big)_{\gamma(t)}(\nabla\rho(t))dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\rho \big\{\nabla\rho\langle\nabla_{\nabla\rho}J, J\rangle\big\}(t)dt$$
$$= \int_0^\rho \big\{\langle\nabla_{\nabla\rho}J, \nabla_{\nabla\rho}J\rangle + \langle\nabla_{\nabla\rho}\nabla_{\nabla\rho}J, J\rangle\big\}(t)dt$$
$$= \int_0^\rho \big\{\langle\nabla_{\gamma'}J, \nabla_{\gamma'}J\rangle + \langle\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}J, J\rangle\big\}(t)dt.$$

Como J é um campo de Jacobi satisfazendo (1.25) e (1.26), temos

$$\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}J + R(J,\gamma')\gamma' = 0,$$

e portanto teremos que

$$\begin{aligned} \nabla^2\rho(X,X) &= \int_0^\rho \big\{\langle\nabla_{\gamma'}J, \nabla_{\gamma'}J\rangle - \langle R(J,\gamma')\gamma', J\rangle\big\}dt \\ &= \int_0^\rho \big\{\langle J', J'\rangle - \langle R(J,\gamma')\gamma', J\rangle\big\}dt = I_\rho(J,J). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Tome M_k uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante igual a k. Agora para calcular o Hessiano da função distância de M seja

$$s_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(t\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}, & \text{se} \quad k < 0 \\ t, & \text{se} \quad k = 0 \\ \dfrac{\sin(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}}, & \text{se} \quad k > 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

temos que

$$\frac{s_k'(t)}{s_k(t)} = \begin{cases} \sqrt{-k}\coth(t\sqrt{-k}), & \text{se} \quad k < 0 \\ \dfrac{1}{t}, & \text{se} \quad k = 0 \\ \sqrt{k}\cot(t\sqrt{k}), & \text{se} \quad k > 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

Defina $f(t) = \dfrac{s_k(t)}{s_k(\rho)}$, ou seja,

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(t\sqrt{-k})}{\sinh(\rho\sqrt{-k})}, & \text{se} \quad k < 0 \\ \dfrac{t}{\rho}, & \text{se} \quad k = 0 \\ \dfrac{\sin(t\sqrt{k})}{\sin(\rho\sqrt{k})}, & \text{se} \quad k > 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

e observe que f satisfaz a equação de Jacobi

$$\begin{cases} \dfrac{D^2 f}{dt^2}(t) + kf(t) = 0 \\ f(0) = 0, f(\rho) = 1 \end{cases} \tag{1.31}$$

Seja γ a geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco e $X \in T_pM$ tal que $\langle X, \gamma'(p)\rangle = 0$. Denote por $X(t)$, $t \in [0,\rho]$ o transporte paralelo de X ao longo de γ. Assim, o campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ e $J(\rho) = X$ é dado da forma

$$J(t) = f(t)X(t).$$

Seja $\{\gamma', E_1, \cdots, E_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_{\gamma(\rho)}M$, de campos paralelos ao longo de γ e $J_i(t) = f(t)E_i$, $i = 1, \cdots, n-1$, campos de Jacobi. Agora analisando os três casos para a curvatura seccional temos

1º Caso: Se $k < 0$, pela expressão (1.27) temos

$$\begin{aligned}
\nabla^2\rho(E_i, E_i) &= \int_0^\rho \{\langle J_i'(t), J_i'(t)\rangle - \langle R(J_i(t), \gamma'(t))\gamma'(t), J_i(t)\rangle\}dt \\
&= \int_0^\rho \{\langle f'(t)E_i, f'(t)E_i\rangle - \langle R(f(t)E_i, \gamma'(t))\gamma'(t), f(t)E_i\rangle\}dt \\
&= \int_0^\rho \{(f'(t))^2\langle E_i, E_i\rangle - (f(t))^2\langle R(E_i, \gamma'(t))\gamma'(t), E_i\rangle\}dt \\
&= \int_0^\rho \{(f'(t))^2 - k(f(t))^2\}dt \\
&= \int_0^\rho \left\{\frac{-k\cosh^2(t\sqrt{-k})}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})} - k\frac{\sinh^2(t\sqrt{-k})}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})}\right\}dt \\
&= \frac{-k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})}\int_0^\rho \left\{\cosh^2(t\sqrt{-k}) + \sinh^2(t\sqrt{-k})\right\}dt \\
&= \frac{-k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})}\int_0^\rho \left\{2\cosh^2(t\sqrt{-k}) - 1\right\}dt \\
&= \frac{-k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})}\int_0^\rho \left\{\cosh(2t\sqrt{-k})\right\}dt \\
&= \frac{-k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})}\left.\frac{\sinh(2t\sqrt{-k})}{2\sqrt{-k}}\right|_0^\rho \\
&= \frac{-k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})}\frac{2\sinh(\rho\sqrt{-k})\cosh(\rho\sqrt{-k})}{2\sqrt{-k}} \\
&= \sqrt{-k}\frac{\cosh(\rho\sqrt{-k})}{\sinh(\rho\sqrt{-k})} = \sqrt{-k}\coth(\rho\sqrt{-k}).
\end{aligned}$$

Logo, teremos que

$$\nabla^2\rho(E_i, E_i) = \sqrt{-k}\frac{\cosh(\rho\sqrt{-k})}{\sinh(\rho\sqrt{-k})} = \sqrt{-k}\coth(\rho\sqrt{-k}), \tag{1.32}$$

para todo $i = 1, \cdots, n-1$.

2º Caso: Se $k = 0$, repetindo o processo utilizado no 1º caso a partir da expressão (1.27), teremos

$$\nabla^2\rho(E_i, E_i) = \frac{1}{\rho}, \tag{1.33}$$

para todo $i = 1, \cdots, n-1$.

3º Caso: Se $k > 0$, repetindo novamente o processo utilizado no 1º caso a partir da expressão (1.27), teremos

$$\nabla^2\rho(E_i, E_i) = \sqrt{k}\frac{\cos(\rho\sqrt{k})}{\sin(\rho\sqrt{k})} = \sqrt{k}\cot(\rho\sqrt{k}), \tag{1.34}$$

para todo $i = 1, \cdots, n-1$.

Assim, o Hessiano da função distância em M_k satisfaz

$$\nabla^2\rho_{(t)}(E_i, E_i) = \frac{s_k'(t)}{s_k(t)}, \tag{1.35}$$

com $\frac{s_k'(t)}{s_k(t)}$ o sistema apresentado em (1.29).

Teorema 1.1 (**Teorema de Rauch**). *Sejam M^n e $\widetilde{M}^m$, $n \leq m$, variedades Riemannianas, $\gamma : [0, a] \to M$ e $\tilde{\gamma} : [0, a] \to \widetilde{M}$ geodésicas com mesma velocidade escalar e tais que*

i) *$\tilde{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\tilde{\gamma}(0)$ ao longo de $\tilde{\gamma}$, para todo $t \in (0, a]$;*

ii) *$K_M(\gamma'(t), X) \leq K_{\widetilde{M}}(\tilde{\gamma}'(t), \widetilde{X})$, $\forall\ X \in T_{\gamma(t)}M, \widetilde{X} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$, respectivamente perpendiculares a $\gamma'(t)$ e $\tilde{\gamma}'(t)$.*

Se J e $\tilde{J}$ são campos de Jacobi respectivamente ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, não identicamente nulos e tais que $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$, $\langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = \langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle$ e $|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|$, então

$$|J(t)| \geq |\tilde{J}(t)|, \quad t \in (0, a].$$

Em particular,

$$\langle J', J\rangle \geq \frac{|J|^2}{|\tilde{J}|^2}\langle \tilde{J}', \tilde{J}\rangle,$$

para todo $t \in (0, a]$.

Demonstração. Vide [9] capítulo 10. □

Teorema 1.2 (**Teorema da Comparação do Hessiano**). *Sejam M^n e $\widetilde{M}^n$ variedades Riemannianas completas e $\gamma : [0, a] \to M$ e $\tilde{\gamma} : [0, a] \to \widetilde{M}$ geodésicas normalizadas que não intersectam respectivamente $Cut(\gamma(0))$ e $Cut(\tilde{\gamma}(0))$. Se*

$$K_M(\gamma', X) \leq K_{\widetilde{M}}(\tilde{\gamma}', \widetilde{X})$$

para todos $t \in [0, a]$, $X \in T_{\gamma(t)}M$ e $\widetilde{X} \in T_{\gamma(t)}\widetilde{M}$, unitários e ortogonais respectivamente a $\gamma'(t)$ e $\tilde{\gamma}'(t)$, e ρ e $\tilde{\rho}$ denotando respectivamente as funções distância em M e em $\widetilde{M}$ a partir de $\gamma(0)$ e $\tilde{\gamma}(0)$, então, para $0 < t \leq a$, tem-se

$$(\nabla^2\rho)_{\gamma(t)}(X, X) \geq (\nabla^2\tilde{\rho})_{\tilde{\gamma}(t)}(\widetilde{X}, \widetilde{X}).$$

Demonstração. Fixe $t_0 \in (0, a]$, pelas equacões (1.23) e (1.27), temos

$$(\nabla^2\rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) = I_a(J, J) = \langle J', J\rangle(t_0),$$

em que J é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = X$. Note que em particular temos que $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ em $[0, t_0]$.

Analogamente,

$$(\nabla^2 \tilde{\rho})_{\tilde{\gamma}(t_0)}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) = \langle \tilde{J}', \tilde{J} \rangle (t_0),$$

em que $\tilde{J}$ é o campo de Jacobi ao longo de $\tilde{\gamma}$ tal que $\tilde{J}(0) = 0$ e $\tilde{J}(t_0) = \widetilde{X}$, com $\langle \tilde{J}, \tilde{\gamma}' \rangle = 0$ em $[0, t_0]$.

Agora, como $\tilde{\gamma}$ não encontra $Cut(\tilde{\gamma}(0))$ em $(0, t_0]$, ($\tilde{\gamma}$ não encontra o conjunto dos pontos mínimos de $\tilde{\gamma}$ em $(0, t_0]$), temos que $\tilde{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\tilde{\gamma}(0)$ ao longo de $\tilde{\gamma}$, para $0 < t \leq a$. Portanto, segue do Teorema de Rauch que

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) &= \langle J', J \rangle (t_0) \\
&\geq \frac{|J|^2}{|\tilde{J}|^2} \langle \tilde{J}', \tilde{J} \rangle (t_0) \\
&= \frac{|X|^2}{|\widetilde{X}|^2} (\nabla^2 \tilde{\rho})_{\tilde{\gamma}(t_0)}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) \\
&= (\nabla^2 \tilde{\rho})_{\tilde{\gamma}(t_0)}(\widetilde{X}, \widetilde{X}).
\end{aligned}$$

$\square$

1.6 Fórmulas de Green

Sejam M uma variedade Riemanniana e uma função f definida em M,

(i) a função f é mensurável se, para cada carta $x : U \to \mathbb{R}^n$ em M, $f \circ x^{-1}$ é mensurável na imagem de U em $\mathbb{R}^n$.

(ii) para cada cobertura $\{x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n; \alpha \in I\}$, onde I é algum conjunto, de M por cartas com partição da unidade subordinada $\{\phi_\alpha; \alpha \in I\}$, a medida Riemanniana em M é dada pela densidade

$$dV = \sum_\alpha \phi_\alpha \sqrt{g_\alpha} \; dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n,$$

em que $dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$ é a densidade da medida de Lebesgue em $x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, e g_α é o determinante da matriz da métrica para a carta $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. O ponto é que a densidade $\sqrt{g} \; dx^1 \cdots dx^n$ no domínio U independe da carta x escolhida. A partição da unidade é então o dispositivo com o qual a medida é definida globalmente em M.

Dado o campo vetorial X em M, denote por $\{\phi_t\}$ o fluxo induzido em M. Fixando qualquer conjunto compacto K em M, tome

$$v(t) = \int_{\phi_t(K)} dV$$

Disto, segue que

$$v'(0) = \int_K (divX) dV.$$

Assim, $divX$ mede a distorção infinitesimal do volume pelo fluxo gerado por X.

Teorema 1.3 (Teorema da Divergência)**.** *Se X é um campo vetorial de classe C^1 em M com suporte compacto, então*

$$\int_M (divX)dV = 0 \tag{1.36}$$

Demonstração. veja [28] página 424. □

Teorema 1.4 (Fórmula de Green)**.** *Seja $h \in C^1(M), f \in C^2(M)$ funções definidas em M tais que $h\nabla f$ tenha suporte compacto. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle\}\ dV = 0 \tag{1.37}$$

Se também assumirmos que $h \in C^2(M)$ e ambos f, h tem suporte compacto, então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\}\ dV = 0 \tag{1.38}$$

Demonstração. veja [38] página 382. □

Para obter a fórmula de Green a partir do teorema da divergência, apenas tome $X = h\nabla f$ e utilize a proposição (1.2) em (1.36). A equação (1.38) segue diretamente de (1.37).

Observação 3. *Para funções complexas f e h suaves com suporte compacto, a partir de (1.16) a fórmula de Green irá assumir a seguinte expressão*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla h, \overline{\nabla f}\rangle\}\ dV = 0. \tag{1.39}$$

1.7 Fatos Básicos para o Problema de Autovalor

Seja $L^2(M)$ o espaço de funções f mensuráveis em uma variedade Riemanniana M para as quais

$$\int_M |f|^2 dV < +\infty.$$

Em $L^2(M)$ temos o produto interno usual e a norma induzida, dados por

$$\langle f, h\rangle = \int_M fh\ dV, \quad \|f\|^2 = \langle f, f\rangle \tag{1.40}$$

para $f, h \in L^2(M)$. Com este produto interno, $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert. Para o operador Laplaciano podemos considerar os seguintes problemas.

Problema de autovalor fechado: Seja M compacta e conexa. Encontrar todos os números reais λ para os quais existe uma solução não trivial $u \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$ para

$$\Delta u + \lambda u = 0. \tag{1.41}$$

Problema do autovalor de Dirichlet: Para a $\partial M \neq 0$,com $\overline{M}$ compacto e conexo, encontrar todos os números reais λ para os quais existe uma solução não trivial $u \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$, satisfazendo a condição de fronteira

$$u\big|_{\partial M} = 0. \tag{1.42}$$

Os números λ são referidos como autovalores de Δ e o espaço vetorial de soluções de (1.41) para um dado autovalor λ seu autoespaço. Os elementos de cada *autoespaço* são chamados de *autofunções*.

Teorema 1.5. *Para cada um dos problemas de autovalor acima, o conjunto de autovalores consiste em uma sequência*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \longrightarrow +\infty \tag{1.43}$$

e cada autoespaço associado tem dimensão finita. Autoespaços pertencentes a autovalores distintos são ortogonais em $L^2(M)$, e $L^2(M)$ é a soma direta de todos os autoespaços. Além disso, cada autofunção é de classe C^∞ em M.

Primeiramente note que, uma vez que as autofunções $u \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$, então os autovalores λ devem ser não-negativos. De fato, tomando $f = h = u$ na fórmula de Green teremos

$$\lambda = \|u\|^{-2} \int_M |\nabla u|^2 \, dV \geq 0 \tag{1.44}$$

De (1.44) se tivermos $\lambda = 0$ implica que u é uma função constante. Portanto, no problema de autovalor fechado temos que $\lambda_1 = 0$, e no problema de Dirichlet temos $\lambda_1 > 0$.

Também notamos que a ortogonalidade dos autoespaços distintos é uma consequência direta da fórmula de Green (1.38). De fato, para ϕ, ψ autofunções dos respectivos autovalores λ, β. Então

$$0 = \int_M \{\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi\} \, dV = \int_M \{\phi\beta\psi - \psi\lambda\phi\} \, dV = (\beta - \lambda) \int_M \psi\phi \, dV$$

e a observação segue.

Se $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência ortonormal de autofunções em $L^2(M)$ tal que u_j é uma autofunção de λ_j para cada $j = 1, 2, \cdots$, então $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência ortonormal completa de $L^2(M)$. Em particular, para $f \in L^2(M)$ temos

$$f = \sum_{j=1}^\infty \langle f, u_j \rangle u_j, \tag{1.45}$$

em $L^2(M)$, e

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^\infty \langle f, u_j \rangle^2. \tag{1.46}$$

Essas duas fórmulas são chamadas de identidades de Parseval.

Uma formula bastante utilizada é a

Teorema 1.6 (Fórmula de Bochner)**.** *Seja uma função $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f), \tag{1.47}$$

em que Ric é o tensor de Ricci.

Demonstração. veja [19] página 32. □

Ela também é conhecida como fórmula de Bochner-Weitzenböck.

Uma ferramenta útil na busca de limites ótimos relacionados aos autovalores é a **Fórmula assintótica de Weyl** para o problema de autovalor de Dirichlet (1). Seja $N(\lambda)$ o número de autovalores menores que λ contando a multiplicidade, então

$$N(\lambda) \sim \omega_n vol(\Omega)\frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \tag{1.48}$$

quando $\lambda \longrightarrow +\infty$, em que ω_n é o volume da bola unitária no $\mathbb{R}^n$ e $vol\Omega$ é o volume de Ω. Em particular

$$(\lambda_k)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{(2\pi)^n}{\omega_n vol(\Omega)}k \tag{1.49}$$

quado $k \longrightarrow +\infty$.

Capítulo 2

Resultados Principais

Neste capítulo apresentaremos a demonstração do teorema principal e duas aplicações de estimativas de *gap* para autovalores no espaço Hiperbólico e em uma variedade de curvatura seccional negativa limitada. Para tal, iniciaremos com alguns resultados importantes.

Para o que segue necessitamos do seguinte teorema de multiplicadores de Lagrange para espaços de Banach reais.

Teorema 2.1. *Sejam X e Y espaços de Banach reais. Assuma que $F : U \subset X \to \mathbb{R}$ e $\Phi : U \subset X \to Y$ são continuamente diferenciáveis na vizinhança U de $x_0 \in X$, em que $x_0 \in \Phi^{-1}(0) = \{x \in U;\ \Phi(x) = 0 \in Y\}$. Se o conjunto $\left\{\Phi'_{(x_0)}(x) \in Y;\ x \in X\right\}$ é fechado e x_0 é um extremo (máximo ou mínimo) de F em $\Phi^{-1}(0)$, então existem $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e um funcional linear $y^* \in Y^*$, em que*

$$\lambda_0^2 + \|y^*\|^2 \neq 0$$

tal que

$$\lambda_0 F'(x_0) + (\Phi'_{(x_0)})^*(y^*) = \lambda_0 F'(x_0) + y^*(\Phi'_{(x_0)}) = 0 \tag{2.1}$$

em que $(\Phi'_{(x_0)})^*$ é o adjunto de $\Phi'_{(x_0)}$.

Além disso, se $\left\{\phi'_{(x_0)}(x);\ x \in X\right\} = Y$, então podemos tomar $\lambda_0 = 1$.

Demonstração. Veja na página 270 de Zeidler [44] ou no capítulo 10 de Kolmogorov and Fomin [27]. □

Teorema 2.2. *Assuma que $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência não-decrescente, ou seja,*

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \cdots \to +\infty$$

onde cada μ_i tem multiplicidade finita m_i e se repete de acordo com esta multiplicidade. Dado $r = (r_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$ tal que $r_{m_1} \neq 0$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2 < \sqrt{AB}$ com

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{\infty} r_j^2 \quad e \\ A &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 r_j^2 < +\infty\ , \end{aligned} \tag{2.2}$$

então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2 \leq \frac{A + \mu_{m_1}\mu_{m_1+1}B}{\mu_{m_1} + \mu_{m_1+1}}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Inicialmente, para a sequência $\{\mu_j\}_j$ dada no teorema, vamos considerar o seguinte subconjunto do espaço de Hilbert ℓ_2 das sequências de quadrado somável

$$\mathcal{H}_\mu^\infty = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^\infty;\ x_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2 < +\infty \right\}.$$

Teremos que $\mathcal{H}_\mu^\infty$ será um espaço vetorial real com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais para sequências. De fato, observando que se $(x_j)_j \in \mathcal{H}_\mu^\infty$, teremos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2 < +\infty \quad \Longrightarrow \quad (\mu_j x_j)_j \in \ell_2. \tag{2.4}$$

Assim, para $(x_j)_j, (y_j)_j \in \mathcal{H}_\mu^\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, utilizando (2.4) e as propriedades da norma $\|\cdot\|_2$ de ℓ_2, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 (x_j + \alpha y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\mu_j x_j + \alpha \mu_j y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|(\mu_j x_j)_j + \alpha(\mu_j y_j)_j\|_2 \\ &\leq \|(\mu_j x_j)_j\|_2 + |\alpha| \|(\mu_j y_j)_j\|_2 < +\infty, \end{aligned} \tag{2.5}$$

mostrando então que $\mathcal{H}_\mu^\infty$ é um espaço vetorial.

Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_\mu : \mathcal{H}_\mu^\infty &\to \mathbb{R} \\ (x_j)_j &\mapsto \|(x_j)_j\|_\mu = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Observando que, por

i) $\|(x_j)_j\|_\mu = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_j^2 = 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$, ou seja, $(x_j)_j = 0$;

ii) $\|\alpha(x_j)_j\|_\mu = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 (\alpha x_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|(x_j)_j\|_\mu, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

iii) de (2.5), $\|(x_j)_j + (y_j)_j\|_\mu \leq \|(\mu_j x_j)_j\|_2 + \|(\mu_j y_j)_j\|_2 = \|(x_j)_j\|_\mu + \|(y_j)_j\|_\mu$.

teremos que $\|\cdot\|_\mu$ é uma norma em $\mathcal{H}_\mu^\infty$.

Além disso, $(\mathcal{H}_\mu^\infty, \|\cdot\|_\mu)$ é um espaço de Banach. De fato, se $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy no espaço $\mathcal{H}_\mu^\infty$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n > n_0$, $\|x_m - x_n\|_\mu < \varepsilon$, então

$$\mu_j^2 |x_j^m - x_j^n|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 (x_j^m - x_j^n)^2 < \varepsilon^2 \tag{2.6}$$

para cada $j = 1, 2, \cdots$, assim

$$|x_j^m - x_j^n| \leq \frac{\varepsilon}{\mu_j}, \quad \forall m, n > n_0.$$

Como para cada j fixado, teremos que $(x_j^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, existe $x_j^0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_j^n \longrightarrow x_j^0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Seja $\overline{x} = (x_j^0)_j$, para cada $k \in \mathbb{N}$, de (2.6) teremos

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j^2 (x_j^m - x_j^n)^2 < \varepsilon^2,$$

e fazendo $n \longrightarrow \infty$, iremos obter

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j^2 (x_j^m - x_j^0)^2 < \varepsilon^2, \quad \forall m > n_0. \tag{2.7}$$

Já que (2.7) vale para todo $k \in \mathbb{N}$, quando $k \longrightarrow \infty$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 (x_j^m - x_j^0)^2 < \varepsilon^2, \tag{2.8}$$

com isso, teremos que a sequência $(x_n)_n$ converge para $\overline{x}$. De (2.8) teremos que $(x_m - \overline{x})$ pertence a $\mathcal{H}_\mu^\infty$ e como

$$\overline{x} = x_m - (x_m - \overline{x}),$$

então $\overline{x}$ pertence ao espaço $\mathcal{H}_\mu^\infty$, ou seja, $\mathcal{H}_\mu^\infty$ é espaço de Banach como afirmamos.

Por fim, ao considerar o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu : \mathcal{H}_\mu^\infty \times \mathcal{H}_\mu^\infty \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle x, y \rangle_\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j y_j, \quad \text{com} \quad x = (x_j)_j, y = (y_j)_j \in \mathcal{H}_\mu^\infty,$$

pelo fato de $\|\cdot\|_\mu^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$, teremos que $\mathcal{H}_\mu^\infty$ é um espaço de Hilbert.

Dado que $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2 < \sqrt{AB}$, tome $\delta' > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2 + \delta' < \sqrt{AB}. \tag{2.9}$$

Considerando a sequência $r = (r_j)_{j=1}^{\infty}$ com $r_{m_1} \neq 0$. Para $r_o = \max\{|r_j|; j = 1, \cdots, m_1\}$ e $\delta > 0$ satisfazendo

$$\begin{cases} i) \quad \delta < \dfrac{|r_{m_1}|}{2}\mu_{m_1} \quad \text{e} \\ ii) \quad m_1\delta\left[\dfrac{\delta}{\mu_{m_1}} + 2r_0\right] < \delta', \end{cases} \tag{2.10}$$

tome $V = B(r, \delta) \subset \mathcal{H}_\mu^\infty$. Então para todo $x = (x_j)_j \in V$ temos

$$\mu_{m_1}^2(x_{m_1} - r_{m_1})^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2(x_j - r_j)^2 < \delta^2 \tag{2.11}$$

e por (2.10)

$$|x_{m_1} - r_{m_1}| < \frac{\delta}{\mu_{m_1}} < \frac{|r_{m_1}|}{2}, \tag{2.12}$$

resultando que $x_{m_1} \neq 0$ para todo $x \in V$.

Defina então

$$\begin{aligned} F : V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j x_j^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi : V &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \Psi(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 - B, \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2 - A\right) \end{aligned}$$

com A, B conforme em (2.2).

Vejamos agora que F possui um ponto de máximo em $\Psi^{-1}(0,0)$. Para isso, considere o conjunto

$$C = \left\{x = (x_j)_j \in \overline{V}; \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2 \leq A \ \text{ e } \ \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 - B\right\}$$

e seja $x = (x_j)_j \in C$. Com isso temos que

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j x_j^2 &= \sum_{\mu_j \geq 1} \mu_j x_j^2 + \sum_{\mu_j < 1} \mu_j x_j^2 \\ &\leq \sum_{\mu_j \geq 1} \mu_j^2 x_j^2 + \sum_{\mu_j < 1} x_j^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 x_j^2 + \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \leq A + B, \end{aligned}$$

ou seja, $F(x)$ é limitada em C, e para $S = \sup\{F(x); x \in C\}$ podemos tomar uma sequência $(z^n)_n$ em C tal que $F(z^n) \longrightarrow S$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Uma vez que C é limitado em $\overline{V}$ e $z^n = (z_1^n, z_2^n, \cdots, z_k^n, \cdots)$ temos para cada $k \in \mathbb{N}$ que sequência coordenada $(z_k^n)_{n=1}^{\infty}$ é limitado na reta, então pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tomando subsequências se necessário, $z_k^n \longrightarrow z_k^0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e assim podemos definir $z = (z_1^0, z_2^0, \cdots, z_k^0, \cdots)$.

Agora para $\varepsilon > 0$ podemos tomar $n_0, m \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tenhamos

$$\frac{A}{\mu_{m+1}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} \mu_j[(z_j^n)^2 - (z_j^0)^2] < \frac{\varepsilon}{2},$$

e com isso teremos

$$\begin{aligned}
\left| F(z^n) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^0)^2 \right| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (z_j^n)^2 - \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^n)^2 + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^n)^2 - \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^0)^2 \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (z_j^n)^2 - \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^n)^2 \right| + \left| \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^n)^2 - \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^0)^2 \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu_j (z_j^n)^2 \right| + \left| \sum_{j=1}^{m} \mu_j [(z_j^n)^2 - (z_j^0)^2] \right| \\
&< \left| \frac{1}{\mu_{m+1}} \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu_j^2 (z_j^n)^2 \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\mu_{m+1}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 (z_j^n)^2 \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{A}{\mu_{m+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como isto é válido para todo $n > n_0$ temos

$$\left| S - \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^0)^2 \right| < \varepsilon,$$

consequentemente

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_j^0)^2 = S,$$

ou seja, $F(z) = S$.

Uma vez que C é convexo e fechado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\mu^\infty$, pelo Teorema de Mazur temos que C é fechado na topologia fraca e como $z^n \rightharpoonup z$ no sentido fraco, temos que $z \in C$. Vejamos então que $S = \sup\{F(x); x \in C\}$ é atingido em $\Psi^{-1}(0,0)$, ou seja, quando $\|z\|_\mu^2 = A$ e $\|z\|_2^2 = B$.

Primeiramente, se supormos que para $z = (z_i^0)_i$ temos $\|z\|_\mu^2 < A$ e $\|z\|_2^2 < B$, então podemos tomar $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $z_\delta = z + \varepsilon e_k$, onde $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, é tal que $\|z_\delta\|_\mu^2 < A$ e $\|z_\delta\|_2^2 < B$. Assim teriamos $z_\delta \in C$ e tomando $sgn(\varepsilon) = sgn(z_k^0)$ obtemos que

$$F(z_\delta) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (z_j^0)^2 + \mu_k (2 z_k^0 \varepsilon + \varepsilon^2) = F(z) + \mu_k (2 z_k^0 \varepsilon + \varepsilon^2) > F(z),$$

que é uma contradição com a maximalidade de $F(z)$ em C.

Supondo agora que $\|z\|_\mu^2 < A$ e $\|z\|_2^2 = B$, podemos tomar $\varepsilon, \eta \in (-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $z_\delta = z + \varepsilon e_k + \eta e_l$, para algum $k, l \in \mathbb{N}$, é tal que $\|z_\delta\|_\mu^2 < A$ e $\|z_\delta\|_2^2 = B$. Com isso teriamos $z_\varepsilon \in C$. Observando que

$$\begin{aligned}\|z_\delta\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}(z_j^0)^2 + (2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + (2z_l^0\eta + \eta^2)\\ &= \|z\|_2^2 + (2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + (2z_l^0\eta + \eta^2) = B\end{aligned}$$

obtemos de $\|z\|_2^2 = B$ que

$$(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + (2z_l^0\eta + \eta^2) = 0 \tag{2.13}$$

e como

$$\begin{aligned}\|z_\delta\|_\mu^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}\mu^2(z_j^0)^2 + \mu_k^2(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l^2(2z_l^0\eta + \eta^2)\\ &= \|z\|_\mu^2 + \mu_k^2(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l^2(2z_l^0\eta + \eta^2) < A\end{aligned}$$

obtemos de $\|z\|_\mu^2 < A$ que

$$\mu_k^2(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l^2(2z_l^0\eta + \eta^2) < A - \|z\|_\mu^2. \tag{2.14}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\mu_l > \mu_k$ e aplicando (2.13) na equação (2.14) temos

$$(\mu_l^2 - \mu_k^2)(2z_l^0\eta + \eta^2) < A - \|z\|_\mu^2$$

e assim

$$2z_l^0\eta + \eta^2 < \frac{A - \|z\|_\mu^2}{\mu_l^2 - \mu_k^2}$$

Vejamos que é possível tomar η de forma que $2z_l^0\eta + \eta^2 > 0$.
Suponha então

$$0 < 2z_l^0\eta + \eta^2 < \frac{A - \|z\|_\mu^2}{\mu_l^2 - \mu_k^2}. \tag{2.15}$$

Ao somarmos $(z_k^0)^2$ a equação (2.13), para $z_k^0 \neq 0$, temos

$$0 < 2z_l^0\eta + \eta^2 < (\varepsilon + z_k^0)^2 + 2z_l^0\eta + \eta^2 = (z_k^0)^2 \tag{2.16}$$

Das equações (2.15) e (2.16) obtemos

$$0 < 2z_l^0\eta + \eta^2 < \min\left\{\frac{A - \|z\|_\mu^2}{\mu_l^2 - \mu_k^2}, (z_k^0)^2\right\} := a \tag{2.17}$$

e a partir de (2.17) temos

$$(z_l^0)^2 < (\eta + z_l^0)^2 < a + (z_l^0)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \eta + z_l^0 \in \left(-\sqrt{a+(z_l^0)^2}, -|z_l^0|\right) \cup \left(|z_l^0|, \sqrt{a+(z_l^0)^2}\right)$$
$$\Longrightarrow \qquad \eta \in \left(-\sqrt{a+(z_l^0)^2} - z_l^0, -|z_l^0| - z_l^0\right) \cup \left(|z_l^0| - z_l^0, \sqrt{a+(z_l^0)^2} - z_l^0\right)$$

e com isso vemos que $0 < 2z_l^0\eta + \eta^2$ possui solução. Assim

$$\begin{aligned} F(z_\delta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (z_j^0)^2 + \mu_k(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l(2z_l^0\eta + \eta^2) \\ &= F(z) + (\mu_l - \mu_k)(2z_l^0\eta + \eta^2) > F(z) \end{aligned}$$

pois $(\mu_l - \mu_k)(2z_l^0\eta + \eta^2) > 0$ e isso é uma contradição com a maximalidade de $F(z)$.

Por fim, supondo que $\|z\|_\mu^2 = A$ e $\|z\|_2^2 < B$, podemos tomar $\varepsilon, \eta \in (-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $z_\delta = z + \varepsilon e_k + \eta e_l$, para algum $k, l \in \mathbb{N}$, é tal que $\|z_\delta\|_\mu^2 = A$ e $\|z_\delta\|_2^2 < B$. Com isso teriamos $z_\varepsilon \in C$. Observando que

$$\begin{aligned} \|z_\delta\|_\mu^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^2 (z_j^0)^2 + \mu_k^2(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l^2(2z_l^0\eta + \eta^2) \\ &= \|z\|_\mu^2 + \mu_k^2(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l^2(2z_l^0\eta + \eta^2) = A \end{aligned}$$

obtemos de $\|z\|_\mu^2 = A$ que

$$\begin{aligned} & \mu_k^2(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l^2(2z_l^0\eta + \eta^2) = 0 \qquad (2.18) \\ \Longrightarrow \quad & 2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2 = -\frac{\mu_l^2}{\mu_k^2}(2z_l^0\eta + \eta^2) \end{aligned}$$

e de

$$\begin{aligned} \|z_\delta\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} (z_j^0)^2 + (2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + (2z_l^0\eta + \eta^2) \\ &= \|z\|_2^2 + (2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + (2z_l^0\eta + \eta^2) < B \end{aligned}$$

temos

$$(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + (2z_l^0\eta + \eta^2) < B - \|z\|_2^2. \qquad (2.19)$$

Novamente, sem perda de generalidade, para $\mu_l > \mu_k$, aplicando (2.18) na equação (2.19) temos

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\mu_l^2}{\mu_k^2}\right](2z_l^0\eta + \eta^2) < B - \|z\|_2^2 \\ \Longrightarrow \qquad & 2z_l^0\eta + \eta^2 < \frac{B - \|z\|_2^2}{1 - \dfrac{\mu_l^2}{\mu_k^2}} < 0 \qquad (2.20) \end{aligned}$$

já que $B > \|z\|_2^2$ e $1 < \dfrac{\mu_l^2}{\mu_k^2}$.

Por fim, a partir da equação (2.18) e do que obtemos em (2.20) teremos a

$$
\begin{aligned}
F(z_\delta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (z_j^0)^2 + \mu_k(2z_k^0\varepsilon + \varepsilon^2) + \mu_l(2z_l^0\eta + \eta^2) \\
&= F(z) + \mu_k \left(-\frac{\mu_l^2}{\mu_k^2}(2z_l^0\eta + \eta^2) \right) + \mu_l(2z_l^0\eta + \eta^2) \\
&= F(z) + \mu_l \left(1 - \frac{\mu_l}{\mu_k} \right) (2z_l^0\eta + \eta^2) > F(z)
\end{aligned}
$$

pois $\left(1 - \frac{\mu_l}{\mu_k} \right) (2z_l^0\eta + \eta^2) > 0$ e isso é uma contradição com a maximalidade de $F(z)$. Portanto, concluimos que z é tal que $\|z\|_\mu^2 = A$ e $\|z\|_2^2 = B$, isto é, F possui um ponto de máximo em $\Psi^{-1}(0,0)$.

No que segue, seja $x_0 = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ um máximo de F em $\Psi^{-1}(0,0)$, teremos para todo $h = (h_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{H}_\mu^\infty$ que

$$
\begin{aligned}
F'_{(x_0)}(h) &= 2\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j a_j h_j, \\
\Psi'_{(x_0)}(h) &= \left(2\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j, 2\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 a_j h_j \right).
\end{aligned}
$$

Além disto, se supormos que x_0 possui as coordenadas $a_k = 0$ para todo $k > m_1$, e utilizando que $x_0 \in \Psi^{-1}(0,0)$, poderemos rescrever

$$
B = \sum_{j=1}^{m_1} a_j^2,
$$

$$
A = \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j^2 a_j^2 = \mu_{m_1}^2 \sum_{j=1}^{m_1} a_j^2 = \mu_{m_1}^2 B,
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
\sqrt{AB} = \sqrt{(\mu_{m_1}^2 B)B} &= \mu_{m_1} B = \mu_{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} a_j^2 = \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j a_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j(a_j^2 - r_j^2) + \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j r_j^2 \leq \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j(a_j^2 - r_j^2) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Uma vez que $x_0 \in V$, observe que

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j(a_j^2 - r_j^2) \right| \leq \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j \left| a_j^2 - r_j^2 \right| &= \sum_{j=1}^{m_1} \mu_{m_1} |a_j - r_j|\, |a_j + r_j| \\
&= \mu_{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_j - r_j|\, |a_j - r_j + 2r_j| \\
&\leq \mu_{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_j - r_j| \Big[|a_j - r_j| + 2|r_j| \Big],
\end{aligned}
$$

e como $|a_j - r_j| < \frac{\delta}{\mu_{m_1}}$ para todo $j = 1, \cdots, m_1$, conforme em (2.12), segue que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{m_1} \mu_j (a_j^2 - r_j^2)\right| &\leq \mu_{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_j - r_j| \Big[|a_j - r_j| + 2|r_j| \Big] \\
&< \mu_{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\delta}{\mu_{m_1}} \Big[\frac{\delta}{\mu_{m_1}} + 2|r_j| \Big] \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_1} \delta \Big[\frac{\delta}{\mu_{m_1}} + 2r_0 \Big] \\
&= m_1 \delta \Big[\frac{\delta}{\mu_{m_1}} + 2r_0 \Big] < \delta'. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

e de (2.22) e (2.21) teriamos

$$\sqrt{AB} \;\leq\; \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j (a_j^2 - r_j^2) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2 \;<\; \delta' + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2, \qquad (2.23)$$

uma contradição com o (2.9), portanto deve existir pelo menos uma componente $a_k \neq 0$ com $k > m_1$.

Como a_{m_1}, a_k são não nulos, tomando $v = (v_j)_j \in \mathcal{H}_\mu^\infty$ de forma que $v_{m_1} = a_k$, $v_k = -a_{m_1}$ e $v_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N} \backslash \{m_1, k\}$, temos

$$\Psi'_{(x_0)}(v) = \Big(\; 0 \;, \; 2a_{m_1} a_k (\mu_{m_1}^2 - \mu_k^2) \Big)$$

e para $w = (w_j)_j \in \mathcal{H}_\mu^\infty$ tal que $w_{m_1} = \mu_k^2 a_k$, $w_k = -\mu_{m_1}^2 a_{m_1}$ e $w_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N} \backslash \{m_1, k\}$, temos

$$\Psi'_{(x_0)}(w) = \Big(2a_{m_1} a_k (\mu_k^2 - \mu_{m_1}^2), \; 0 \; \Big).$$

Dado que $\Psi'_{(x_0)}(v)$ e $\Psi'_{(x_0)}(w)$ são vetores linearmente independentes teremos então que $\Psi'_{(x_0)}(\mathcal{H}_\mu^\infty) = \mathbb{R}^2$.

Com isto, pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange para Espaços de Banach reais, teremos a existência de $y^* \in (\mathbb{R}^2)^*$ tal que

$$F'_{(x_0)} h + (\Psi'(x_0))^*(y^*) h = F'_{(x_0)} h + y^*(\Psi'_{(x_0)} h) = 0. \qquad (2.24)$$

Visto que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao seu dual $(\mathbb{R}^2)^*$, pelo o Teorema da Representação de Riesz, existe um único vetor $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $y^*(v) = \langle v, y \rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Tomando $y = (\beta, \alpha)$ podemos reescrever (2.24) por

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j a_j h_j + \beta \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 a_j h_j = 0. \qquad (2.25)$$

Escolhendo de forma arbitrária, para cada $k \in \mathbb{N}$, o vetor $h^k = (h_j^k)_{j=1}^{\infty}$, em que $h_j^k = \delta_{jk}$, a partir do sistema (2.25), obtemos

$$\mu_k a_k + \beta a_k + \alpha \mu_k^2 a_k = a_k(\alpha \mu_k^2 + \mu_k + \beta) = 0, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \qquad (2.26)$$

Assumindo primeiramente que $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência estritamente crescente, ou seja, cada μ_j tem multiplicidade $m_j = 1$. De posse da unicidade dos termos α e β, obtemos que a equação do segundo grau $\alpha\mu_k^2 + \mu_k + \beta$ em função dos termos da sequência $\{\mu_j\}_j$ só pode se anular em no máximo dois termos desta sequência.

Consequentemente, como (2.26) é válido para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos que as componentes da sequência $x_0 = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ que serão diferentes de zero são apenas os termos a_1 e a_k, para um certo $k > 1$. Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} A &= \mu_1^2 a_1^2 + \mu_k^2 a_k^2 \\ B &= a_1^2 + a_k^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Assim, a partir de (2.27), obtemos

$$F(x_0) = \mu_1 a_1^2 + \mu_k a_k^2 = \frac{\mu_1^2 a_1^2 + \mu_k^2 a_k^2 + \mu_1\mu_k(a_1^2 + a_k^2)}{\mu_1 + \mu_k} = \frac{A + \mu_1\mu_k B}{\mu_1 + \mu_k}$$

Já que

$$\begin{aligned} & \mu_k^2 > \mu_1^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \mu_k^2 a_k^2 > \mu_1^2 a_k^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \mu_k^2 a_k^2 + \mu_1^2 a_1^2 > \mu_1^2 a_k^2 + \mu_1^2 a_1^2 = \mu_1^2(a_1^2 + a_k^2) \end{aligned}$$

obtemos que

$$A = \mu_1^2 a_1^2 + \mu_k^2 a_k^2 > \mu_1^2(a_1^2 + a_k^2) = \mu_1^2 B$$

e com isto

$$\mu_1 < \sqrt{\frac{A}{B}}. \tag{2.28}$$

Similarmente, também podemos deduzir que

$$\mu_k > \sqrt{\frac{A}{B}}, \tag{2.29}$$

e consequentemente obtemos

$$\begin{aligned} F(x_0) - \sqrt{AB} &= \frac{A + \mu_1\mu_k B - (\mu_1 + \mu_k)\sqrt{AB}}{\mu_1 + \mu_k} \\ &= \frac{B\left(\frac{A}{B} + \mu_1\mu_k - (\mu_1 + \mu_k)\sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_1 + \mu_k} \\ &= \frac{B\left(\frac{A}{B} + \mu_1\mu_k - \mu_1\sqrt{\frac{A}{B}} - \mu_k\sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_1 + \mu_k} \\ &= \frac{B\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(\mu_k - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_1 + \mu_k} < 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Como $\{\mu_j\}_j$ foi tomado estritamente crescente, fixando μ_1, a partir de (2.28) e (2.29) sabemos que a última linha em (2.30) é estritamente decrescente em μ_k, ou seja,

$$\frac{B\left(\mu_1-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(\mu_2-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_1+\mu_2} > \frac{B\left(\mu_1-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(\mu_3-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_1+\mu_3} > \cdots \tag{2.31}$$

De fato, basta observar que para $i > 1$ temos

$$\begin{aligned}
& \mu_i < \mu_{i+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \mu_i\left(\mu_1+\sqrt{\frac{A}{B}}\right) < \mu_{i+1}\left(\mu_1+\sqrt{\frac{A}{B}}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \mu_i\mu_1-\mu_{i+1}\sqrt{\frac{A}{B}} < \mu_{i+1}\mu_1-\mu_i\sqrt{\frac{A}{B}} \\
\Leftrightarrow \quad & \mu_i\mu_1-\mu_{i+1}\sqrt{\frac{A}{B}}+\mu_i\mu_{i+1}-\mu_1\sqrt{\frac{A}{B}} < \mu_{i+1}\mu_1-\mu_i\sqrt{\frac{A}{B}}+\mu_i\mu_{i+1}-\mu_1\sqrt{\frac{A}{B}} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\mu_i-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)(\mu_1+\mu_{i+1}) < \left(\mu_{i+1}-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)(\mu_1+\mu_i) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\mu_i-\sqrt{\frac{A}{B}}}{\mu_1+\mu_i} < \frac{\mu_{i+1}-\sqrt{\frac{A}{B}}}{\mu_1+\mu_{i+1}}
\end{aligned}$$

e visto que $B\left(\mu_1-\sqrt{\frac{A}{B}}\right) < 0$, vale 2.31 como afirmado.

Consequentemente, teremos que

$$\frac{A+\mu_1\mu_2 B}{\mu_1+\mu_2}$$

é um limite superior para os valores de F, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j r_j^2 \leq \frac{A+\mu_1\mu_2 B}{\mu_1+\mu_2}.$$

Agora, assuma que $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência não-decrescente, ou seja,

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \cdots \to \infty$$

onde cada μ_j tem multiplicidade finita m_j e se repete de acordo com esta multiplicidade.

Desde que $a_{m_1} \neq 0$ e $a_k \neq 0$, $k > m_1$ conforme concluimos anteriormente, teremos a partir de (2.26) que a equação $\alpha\mu_k^2+\mu_k+\beta$ deve se anular para μ_{m_1} e μ_k. supondo que μ_{n+1} seja primeiro termo da multiplicidade m_k do elementos μ_k, $n+1 \leq k \leq n+m_k$, reescrevemos (2.27) da seguinte forma

$$A = \sum_{j=1}^{m_1}\mu_j^2 a_j^2 + \sum_{j=n+1}^{n+m_k}\mu_j^2 a_j^2 = \mu_{m_1}^2\sum_{j=1}^{m_1}a_j^2 + \mu_k^2\sum_{j=n+1}^{n+m_k}a_j^2$$

$$B = \sum_{j=1}^{m_1}a_j^2 + \sum_{j=n+1}^{n+m_k}a_j^2 \tag{2.32}$$

e de maneira similar vemos que

$$
\begin{aligned}
F(x_0) &= \mu_{m_1} \sum_{j=1}^{m} a_{j_1}^2 + \mu_k \sum_{j=n+1}^{n+m_k} a_{j_k}^2 \\
&= \frac{\mu_{m_1}^2 \sum_{j=1}^{m} a_{j_1}^2 + \mu_k^2 \sum_{j=n+1}^{n+m_k} a_{j_k}^2 + \mu_{m_1}\mu_k \left(\sum_{j=1}^{m} a_{j_1}^2 + \sum_{j=n+1}^{n+m_k} a_{j_k}^2 \right)}{\mu_{m_1} + \mu_k} \\
&= \frac{A + \mu_{m_1}\mu_k B}{\mu_{m_1} + \mu_k}
\end{aligned}
$$

Analogamente conforme anteriormente, vamos obter que

$$
\mu_{m_1} \leq \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad \mu_{n_k} \geq \sqrt{\frac{A}{B}} \tag{2.33}
$$

e

$$
F(x_0) - \sqrt{AB} = \frac{B\left(\mu_{m_1} - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(\mu_k - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_{m_1} + \mu_k} < 0. \tag{2.34}
$$

Fixando desta vez, μ_{m_1} teremos analogamente a partir (2.33) que o lado direito da igualdade em (2.34) é decrescente em μ_k, ou seja,

$$
\frac{B\left(\mu_{m_1} - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(\mu_{m_1+1} - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_{m_1} + \mu_{m_1+1}} \geq \frac{B\left(\mu_{m_1} - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(\mu_{m_1+2} - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\mu_{m_1} + \mu_{m_1+2}} \geq \cdots
$$

Consequentemente, obtemos que

$$
\frac{A + \mu_{m_1}\mu_{m_1+1} B}{\mu_{m_1} + \mu_{m_1+1}}
$$

é um limite superior para os valores de F, e com isto

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j r_j^2 \leq \frac{A + \mu_{m_1}\mu_{m_1+1} B}{\mu_{m_1} + \mu_{m_1+1}}.
$$

$\square$

Lema 2.1. *Considerando os autovalores do Laplaciano para problema de Dirichlet* (1), *seja* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *o conjunto das autofunções ortonormais, em que cada autofunção* u_k *é associada ao* k*-ésimo autovalor* λ_k, *isto é,*

$$
\begin{cases}
\Delta u_k &= -\lambda_k u_k \quad \text{em } \Omega, \\
u_k &= 0 \quad \text{no } \partial\Omega, \\
\int_\Omega u_i u_j &= \delta_{ij}.
\end{cases}
$$

Então para qualquer função complexa $g \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ *tal que* gu_i *não é uma combinação* $\mathbb{C}$*-linear de* $u_1, u_2, \cdots, u_{k+1}$ *e tal que*

$$
\int_\Omega g u_i u_{k+1} \neq 0
$$

com $\lambda_i < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2}, \quad k, i \in \mathbb{Z}^+, \quad i \geq 1$, *temos que*

$$\begin{aligned}
&\big[(\lambda_{k+1} - \lambda_i) + (\lambda_{k+2} - \lambda_i)\big] \int_\Omega \|\nabla g\|^2 u_i^2 \\
&\qquad \leq \int_\Omega \left\|2 \left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} + u_i \Delta g\right\|^2 + (\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_{k+2} - \lambda_i) \int_\Omega \|g u_i\|^2 \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \int_\Omega g u_i u_j \\
b_{ij} &= \int_\Omega \left(\left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2} u_i \Delta g \right) u_i,
\end{aligned}$$

e com isso, teremos

$$a_{ij} = \int_\Omega g u_i u_j = \int_\Omega g u_j u_i = a_{ji}. \qquad (2.36)$$

Além disso,

$$\lambda_j a_{ij} = \lambda_j \int_\Omega g u_i u_j = \int_\Omega g u_i (\lambda_j u_j) = \int_\Omega g u_i (-\Delta u_j),$$

e utilizando a fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_j a_{ij} &= -\int_\Omega g u_i (\Delta u_j) = -\int_\Omega (\Delta g u_i)\, u_j \\
&= -\int_\Omega \Big(g \Delta u_i + u_i \Delta g + 2 \left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} \Big) u_j \\
&= -\int_\Omega \Big(-g \lambda_i u_i + u_i \Delta g + 2 \left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} \Big) u_j \\
&= \lambda_i \int_\Omega g u_i u_j - \int_\Omega \Big(u_i \Delta g + 2 \left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} \Big) u_j \\
&= \lambda_i a_{ij} - \int_\Omega \Big(u_i \Delta g + 2 \left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} \Big) u_j.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\lambda_j a_{ij} - \lambda_i a_{ij} = (\lambda_j - \lambda_i) a_{ij} &= -\int_\Omega \Big(2 \left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} + u_i \Delta g \Big) u_j \\
&= -2 \int_\Omega \left(\left\langle \nabla g, \nabla u_i \right\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2} u_i \Delta g \right) u_j = -2 b_{ij}. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Utilizando o fato de u_i ser uma função real para todo i e logo na sequência a fórmula de Green, teremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|\nabla g\|^2 u_i^2 &= \int_\Omega \left\langle \nabla g, \nabla g \right\rangle^{\mathbb{C}} u_i^2 = \int_\Omega \left\langle \nabla g, \overline{u}_i^2 \nabla g \right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= \int_\Omega \left\langle \nabla g, u_i^2 \nabla g \right\rangle^{\mathbb{C}} = -\int_\Omega g \left(div(u_i^2 \nabla \overline{g}) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_\Omega g\Big(u_i^2 div(\nabla \overline{g}) + \left\langle \nabla u_i^2, \overline{\overline{\nabla g}}\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big) \\
&= -\int_\Omega g\Big(u_i^2 \Delta \overline{g} + \langle 2u_i \nabla u_i, \nabla g\rangle^{\mathbb{C}}\Big) \\
&= -\int_\Omega g\Big(u_i^2 \Delta \overline{g} + 2u_i \left\langle \nabla \overline{g}, \nabla u_i\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big) \\
&= -\int_\Omega 2gu_i \left(\langle \nabla \overline{g}, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta \overline{g}\right) \\
&= -2\int_\Omega gu_i \left(\langle \nabla \overline{g}, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta \overline{g}\right).
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Sendo que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal completa de $L_2(\Omega)$, utilizando o produto interno de $L_2(\Omega)$, em seguida a identidade de Parseval, e por fim a definição de a_{ij}, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |gu_i|^2 = \left\|gu_i\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\langle gu_i, u_j\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\int_\Omega gu_i \overline{u_j}\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\int_\Omega gu_i u_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Agora, a partir da equação (2.38) e por g ser função complexa e u_i uma função real para cada $i \in \mathbb{N}$, utilizando (1.17), as propriedades do produto interno em L_2, em sequência a definição de a_{ij} e b_{ij}, e por fim (2.37), teremos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \|\nabla g\|^2 u_i^2 &= -2\int_\Omega gu_i \left(\langle \nabla \overline{g}, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta \overline{g}\right) \\
&= -2\int_\Omega gu_i \left(\overline{\langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}} + \frac{1}{2}\overline{u_i \Delta g}\right) \\
&= -2\int_\Omega gu_i \overline{\left(\langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta g\right)} \\
&= -2\left\langle gu_i, \langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta g\right\rangle \\
&= -2\left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle gu_i, u_j\rangle u_j, \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta g, u_k\right\rangle u_k\right\rangle \\
&= -2\sum_{j=1}^{\infty} \langle gu_i, u_j\rangle \left\langle u_j, \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta g, u_k\right\rangle u_k\right\rangle \\
&= -2\sum_{j=1}^{\infty} \langle gu_i, u_j\rangle \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta g, u_k\right\rangle} \langle u_j, u_k\rangle \\
&= -2\sum_{j,k=1}^{\infty} \langle gu_i, u_j\rangle \overline{\left\langle \langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta g, u_k\right\rangle}\delta_{jk} \\
&= -2\sum_{j=1}^{\infty} \langle gu_i, u_j\rangle \overline{\left\langle \langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}u_i \Delta g, u_j\right\rangle}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega} g u_i u_j \overline{\int_{\Omega}\left(\langle\nabla g,\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+\frac{1}{2}u_i\Delta g\right)u_j} \\
&= -2\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\overline{b_{ij}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\overline{(-2b_{ij})} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\overline{(\lambda_j-\lambda_i)a_{ij}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_i)a_{ij}\overline{a_{ij}} = \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2. \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

Novamente utilizando o produto interno de L_2 e (1.17), seguido da identidade de Parseval, e em sequência a definição de b_{ij} e a_{ij}, e por fim a equação (2.37), teremos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left|2\langle\nabla\overline{g},\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+u_i\Delta\overline{g}\right|^2 &= \left\|2\langle\nabla\overline{g},\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+u_i\Delta\overline{g}\right\|_{L_2}^2 \\
&= \left\|\overline{2\langle\nabla g,\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+u_i\Delta g}\right\|_{L_2}^2 \\
&= \left\|2\langle\nabla g,\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+u_i\Delta g\right\|_{L_2}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle 2\langle\nabla g,\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+u_i\Delta g, u_j\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_{\Omega}\left(2\langle\nabla g,\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+u_i\Delta g\right)\overline{u_j}\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left|2\int_{\Omega}\left(\langle\nabla g,\nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}}+\frac{1}{2}u_i\Delta g\right)u_j\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|2b_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}|(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|(\lambda_i-\lambda_j)|^2|a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_i)^2|a_{ij}|^2. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

A partir de equação (2.40), podemos deduzir que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega}\|\nabla g\|^2u_i^2-\sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2-\sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2\right)^2 \\
&= \left(\sum_{j=k+1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2\right)^2,
\end{aligned}
$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e também as identidades obtidas em (2.39), (2.41) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2\right)^2 &= \left(\sum_{j=k+1}^{\infty}\Big((\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|\Big)|a_{ij}|\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{j=k+1}^{\infty}(|a_{ij}|)^2\right)\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}\Big((\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|\Big)^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} (\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|^2\right) \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 - \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|^2 \right.\\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|^2\right) \\
&\leq \left(\int_\Omega |gu_i|^2 - \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|^2\right)\left(\int_\Omega \left|2\left\langle \nabla g, \nabla u_i\right\rangle^{\mathbb{C}} + u_i \Delta g\right|^2 \right.\\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|^2\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega \|\nabla g\|^2 u_i^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)|a_{ij}|^2\right)^2 \\
&\leq \left(\int_\Omega |gu_i|^2 - \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|^2\right)\left(\int_\Omega \left|2\left\langle \nabla g, \nabla u_i\right\rangle^{\mathbb{C}} + u_i \Delta g\right|^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|^2\right).
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

Agora, uma vez que $a_{ik+1} = \int_\Omega g u_i u_{k+1} \neq 0$, defina

$$
\tilde{A}(i) = \int_\Omega \left|2\left\langle \nabla g, \nabla u_i\right\rangle^{\mathbb{C}} + u_i \Delta g\right|^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} (\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|^2 > 0,
$$

$$
\tilde{B}(i) = \int_\Omega |gu_i|^2 - \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 > 0,
$$

$$
\tilde{C}(i) = \int_\Omega \|\nabla g\|^2 u_i^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)|a_{ij}|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} (\lambda_j - \lambda_i)|a_{ij}|^2 > 0.
$$

Uma vez que gu_i não é uma combinação $\mathbb{C}$-linear de $u_1, \cdots, u_{k+1}$ existe algum $l > k+1$ tal que

$$
a_{il} = \int_\Omega g u_i u_l \neq 0.
$$

Dado que $\lambda_i < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} \leq \lambda_l$, o vetor $(|a_{ij}|)_{j=k+1}^{\infty}$ não é proporcional a $((\lambda_j - \lambda_i)^2 |a_{ij}|)_{j=k+1}^{\infty}$, e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que (2.42) é equivalente a

$$
\tilde{C}(i) < \sqrt{\tilde{A}(i)\tilde{B}(i)}. \tag{2.43}
$$

Desde que $a_{ik+1} \neq 0$ e uma vez que valha (2.43) aplicamos o Teorema 2.2 para obter

$$
\tilde{C}(i) \leq \frac{\tilde{A}(i) + (\lambda_{k+2} - \lambda_i)(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\tilde{B}(i)}{(\lambda_{k+2} - \lambda_i) + (\lambda_{k+1} - \lambda_i)}. \tag{2.44}
$$

Como consequência de (2.44) e das definições de $\tilde{A}(i), \tilde{B}(i)$ e $\tilde{C}(i)$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
((\lambda_{k+2}-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i))&\left(\int_\Omega \|\nabla g\|^2 u_i^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2\right)\\
&\leq \int_\Omega \left|2\langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + u_i\Delta g\right|^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2\\
&\quad + (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\int_\Omega |gu_i|^2 - \sum_{j=1}^{k}|a_{ij}|^2\right),
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
&((\lambda_{k+2}-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i))\int_\Omega \|\nabla g\|^2 u_i^2\\
&\leq \int_\Omega \left|2\langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + u_i\Delta g\right|^2 + (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_\Omega |gu_i|^2\\
&\quad + \left[\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)\sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_i)|a_{ij}|^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_i)^2|a_{ij}|^2\right]\\
&\quad - (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\sum_{j=1}^{k}|a_{ij}|^2\\
&= \int_\Omega \left|2\langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + u_i\Delta g\right|^2 + (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_\Omega |gu_i|^2\\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\Big[(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_i)\\
&\quad - \quad (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)-(\lambda_j-\lambda_i)^2\Big]|a_{ij}|^2\\
&= \int_\Omega \left|2\langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + u_i\Delta g\right|^2 + (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_\Omega |gu_i|^2\\
&\quad - \sum_{j=1}^{k}\Big[(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big]|a_{ij}|^2\\
&= \int_\Omega \left|2\langle \nabla g, \nabla u_i\rangle^{\mathbb{C}} + u_i\Delta g\right|^2 + (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_\Omega |gu_i|^2 \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

□

Corolário 2.1. *Considerando os autovalores do Laplaciano para o problema de Dirichlet, seja $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ o conjunto das autofunções ortonormais, em que cada autofunção u_k é associada ao k-ésimo autovalor λ_k, então para qualquer função real não constante $f \in C^3(\Omega)\cap C^2(\overline{\Omega})$, temos*

$$
\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)\int_\Omega |\nabla f|^2 u_i^2
$$

$$\leq 2\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2 + \int_\Omega \Big(2\langle \nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2} \tag{2.46}$$

Demonstração. Consideremos $g = \exp(\sqrt{-1}\alpha f)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Então teremos

$$\nabla g = \nabla(\exp(\sqrt{-1}\alpha f)) = \exp(\sqrt{-1}\alpha f)(\sqrt{-1}\alpha\nabla f),$$

bem como

$$\begin{aligned} div(\nabla g) &= div[\exp(\sqrt{-1}\alpha f)(\sqrt{-1}\alpha \nabla f)] \\ &= \sqrt{-1}\alpha(\exp(\sqrt{-1}\alpha f))\Delta f + \big\langle \nabla(\sqrt{-1}\alpha(\exp(\sqrt{-1}\alpha f)), \nabla f\big\rangle^{\mathbb{C}} \\ &= \sqrt{-1}\alpha(\exp(\sqrt{-1}\alpha f))\Delta f - \alpha^2(\exp(\sqrt{-1}\alpha f))|\nabla f|^2, \end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega |g u_i|^2 = \int_\Omega \big|\exp(\sqrt{-1}\alpha f)u_i\big|^2 = \int_\Omega \big|\exp(\sqrt{-1}\alpha f)\big|^2 |u_i|^2 = \int_\Omega u_i^2 = 1. \tag{2.47}$$

Assim,

$$\int_\Omega \big\|\nabla g\big\|^2 u_i^2 = \int_\Omega \Big\|\sqrt{-1}\alpha(\exp(\sqrt{-1}\alpha f))\nabla f\Big\|^2 u_i^2 = \alpha^2 \int_\Omega \big|\nabla f\big|^2 u_i^2, \tag{2.48}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big|2\left\langle \nabla g, \nabla u_i\right\rangle^{\mathbb{C}} + u_i\Delta g\Big|^2 = & \int_\Omega \Big|2\sqrt{-1}\alpha(\exp(\sqrt{-1}\alpha f))\langle\nabla f, \nabla u_i\rangle \\ & + u_i\sqrt{-1}\alpha(\exp(\sqrt{-1}\alpha f))\Delta f \\ & - u_i\alpha^2(\exp(\sqrt{-1}\alpha f))|\nabla f|^2\Big|^2 \\ = & \int_\Omega \Big|\exp(\sqrt{-1}\alpha f)\Big(\sqrt{-1}\alpha(2\langle\nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f) \\ & - u_i\alpha^2|\nabla f|^2\Big)\Big|^2 \\ = & \int_\Omega \Big|\sqrt{-1}\alpha\big(2\langle\nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\big) - u_i\alpha^2|\nabla f|^2\Big|^2 \\ = & \ \alpha^2\int_\Omega \Big(2\langle\nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2 + \alpha^4\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Aplicando as equações (2.47), (2.48) e (2.49) a inequação obtida em (2.45), obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha^2\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i) + (\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)\int_\Omega |\nabla f|^2 u_i^2 \\ & \leq \alpha^4\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2 + \alpha^2\int_\Omega \Big(2\langle\nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2 + (\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dividindo (2.50) por α^2, conseguiremos

$$\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i) + (\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)\int_\Omega |\nabla f|^2 u_i^2$$

$$\leq \alpha^2 \int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2 + \frac{1}{\alpha^2}(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i) + \int_\Omega \Big(2\langle \nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i \Delta f\Big)^2 \quad (2.51)$$

Desde que a desigualdade (2.51) é valida para todo $\alpha \neq 0$,

$$(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i) \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2 \neq 0,$$

podemos escolher

$$\alpha^2 = \left(\frac{(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

em (2.51) e obter

$$\begin{aligned}
&\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)\int_\Omega |\nabla f|^2 u_i^2 \\
&\leq \left(\frac{(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2\right) + \int_\Omega \Big(2\langle \nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2}{(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}\right)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i) \\
&= \Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega \Big(2\langle \nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2 \\
&\quad + \left(\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\sqrt{\left(\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big)\int_\Omega |\nabla f|^4 u_i^2\right)} + \int_\Omega \Big(2\langle \nabla f, \nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2. *Considerando os autovalores do Laplaciano para o problema de Dirichlet, seja* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *o conjunto das autofunções ortonormais, em que cada autofunção* u_k *é associada ao* k*-ésimo autovalor* λ_k*, então para qualquer função real* $f \in C^3(\Omega)\cap C^2(\overline{\Omega})$ *com* $|\nabla f|^2 = 1$*, teremos*

$$(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \leq 16\left(\int_\Omega \langle \nabla f, \nabla u_i\rangle^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta f)^2 u_i^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle u_i^2\right)\lambda_{k+2}. \quad (2.52)$$

Além disso,

$$\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1} \leq 4\left(\lambda_i - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta f)^2 u_i^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}. \quad (2.53)$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.1 e usando que $|\nabla f|^2 = 1$, temos

$$((\lambda_{k+2}-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i))\int_\Omega u_i^2 \leq 2\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_\Omega u_i^2}$$

$$+\int_\Omega \Big(2\langle\nabla f,\nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2,$$

ou seja,

$$\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_i)+(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big) - 2\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)} \le \int_\Omega \Big(2\langle\nabla f,\nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2,$$

daí obtemos que

$$\begin{aligned}\Big(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}-\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_i}\Big)^2 &\le \int_\Omega \Big(2\langle\nabla f,\nabla u_i\rangle + u_i\Delta f\Big)^2\\ &= \int_\Omega \Big(4\langle\nabla f,\nabla u_i\rangle^2 + (\Delta f)^2u_i^2 + 4\langle\nabla f,\nabla u_i\rangle u_i\Delta f\Big)\\ &= 4\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle^2 + \int_\Omega (\Delta f)^2u_i^2 + 4\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle u_i\Delta f.\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Green e uma vez que f é uma função real, temos

$$\begin{aligned}4\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle u_i\Delta f = 2\int_\Omega \langle(\Delta f)\nabla f,\nabla u_i^2\rangle &= -2\int_\Omega u_i^2(div[(\Delta f)\nabla f])\\ &= -2\int_\Omega u_i^2\Big(\Delta f(div[\nabla f]) + \langle\nabla(\Delta f),\nabla f\rangle\Big)\\ &= -2\int_\Omega u_i^2(\Delta f)^2 - 2\int_\Omega u_i^2\langle\nabla(\Delta f),\nabla f\rangle.\end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}\Big(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}-\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_i}\Big)^2 &\le 4\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle^2 + \int_\Omega (\Delta f)^2u_i^2 + 4\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle u_i\Delta f\\ &= 4\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle^2 + \int_\Omega (\Delta f)^2u_i^2 - 2\int_\Omega (\Delta f)^2u_i^2\\ &\quad - 2\int_\Omega \langle\nabla(\Delta f),\nabla f\rangle u_i^2\\ &= 4\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle^2 - \int_\Omega (\Delta f)^2u_i^2 - 2\int_\Omega \langle\nabla(\Delta f),\nabla f\rangle u_i^2.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Multiplicando $\Big(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}+\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_i}\Big)^2$ em ambos os extremos da inequação (2.54), iremos obter

$$\begin{aligned}\Big(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1}\Big)^2 &\le 4\Bigg(\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta f)^2u_i^2\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega \langle\nabla(\Delta f),\nabla f\rangle u_i^2\Bigg)\Big(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}+\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_i}\Big)^2\\ &\le 16\Bigg(\int_\Omega \langle\nabla f,\nabla u_i\rangle^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta f)^2u_i^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle\nabla(\Delta f),\nabla f\rangle u_i^2\Bigg)\lambda_{k+2}\end{aligned}$$

visto que $\lambda_{k+1} \le \lambda_{k+2}$ implica em

$$\left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}+\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_i}\right)^2 \le \left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}+\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}\right)^2 = \left(2\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_i}\right)^2$$
$$= 4(\lambda_{k+2}-\lambda_i) \le 4\lambda_{k+2}.$$

E com isto, provamos a equação (2.52).

Desde que $|\nabla f|^2 = 1$ usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz teremos

$$\langle \nabla f, \nabla u_i\rangle^2 = |\langle \nabla f, \nabla u_i\rangle|^2 \le |\nabla f|^2 |\nabla u_i|^2 = |\nabla u_i|^2, \tag{2.55}$$

e pela fórmula de Green, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^2 = \int_\Omega \langle \nabla u_i, \nabla u_i\rangle = -\int_\Omega u_i \Delta u_i = -\int_\Omega u_i(-\lambda_i u_i) = \lambda_i \int_\Omega u_i u_i = \lambda_i. \tag{2.56}$$

Aplicando então (2.55) e (2.56) na desigualdade em (2.52) obtemos

$$(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \le 16\left(\int_\Omega |\nabla u_i|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta f)^2 u_i^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle u_i^2\right)\lambda_{k+2}$$
$$= 16\left(\lambda_i - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta f)^2 u_i^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle u_i^2\right)\lambda_{k+2}.$$

$\square$

Observação 4. *Se* $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2}$*,* (2.53) *ainda se mantem trivial. Consequentemente sob as condições no Corolário 2.2, quando* $i = 1$*,* (2.53) *se mantem para* $k > 1$*.*

Teorema. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio limitado no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *e* λ_k *o k-ésimo* $(k > 1)$ *autovalor do problema de autovalor de Dirichlet* (1)*, então*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \le C_{n,\Omega} k^{\frac{1}{n}}$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\lambda_1\sqrt{C_0(n)/n}$ *e* $C_0(n)$ *é dado por* (9)*.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos que $\lambda_{k+1} < \lambda_{k+2}$. Seja $\{x_1, \cdots, x_n\}$ a base de funções coordenadas em $\mathbb{R}^n$. Uma vez que $\nabla x_l = e_l$ para todo $l = 1, \cdots, n$, temos $|\nabla x_l| = 1$, tome $i = 1$ e $f = x_l$ em (2.52). Como os símbolos de Christoffel são nulos no espaço Euclidiano, teremos

$$(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \le 16\left(\int_\Omega \langle \nabla x_l, \nabla u_1\rangle^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta x_l)^2 u_1^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\Delta x_l), \nabla x_l\rangle u_1^2\right)\lambda_{k+2}$$
$$\le 16\left(\int_\Omega \langle e_l, \nabla u_1\rangle^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega \left(div[e_l]\right)^2 u_1^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla\left(div[e_l]\right), e_l\rangle u_1^2\right)\lambda_{k+2}$$
$$= 16\left(\int_\Omega \langle e_l, \nabla u_1\rangle^2\right)\lambda_{k+2}.$$

Consequentemente, variando l, temos

$$(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \le 16\lambda_{k+2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \leq 16\lambda_{k+2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2,$$
$$\vdots$$
$$(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \leq 16\lambda_{k+2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right)^2.$$

Somando as n inequações acima teremos

$$\begin{aligned} n(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 &\leq 16\lambda_{k+2}\int_\Omega \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\right)^2 \\ &= 16\lambda_{k+2}\int_\Omega |\nabla u_1|^2 \\ &= 16\lambda_1\lambda_{k+2}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

A partir da desigualdade em (9) (veja também Cheng e Yang 2007 [14]) e de (2.57) deduzimos

$$\begin{aligned} \lambda_{k+2}-\lambda_{k+1} &\leq 4\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_{k+2}}{n}} \leq 4\sqrt{\frac{\lambda_1 C_0(n)(k+1)^{\frac{2}{n}}\lambda_1}{n}} \\ &= 4\lambda_1\sqrt{\frac{C_o(n)}{n}}\sqrt{(k+1)^{\frac{2}{n}}} = C_{n,\Omega}(k+1)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \tag{2.58}$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\lambda_1\sqrt{\frac{C_o(n)}{n}}$ e $C_o(n) \leq (1+\frac{4}{n})$ conforme em (9). Portanto (2.58) vale para $k > 1$ arbitrário. □

Corolário 1. *Se $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-1)$ é um domínio limitado no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$ e λ_k o k-ésimo $(k > 1)$ autovalor do problema de autovalor de Dirichlet (1), então*

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \leq C_{n,\Omega}k^{\frac{1}{n}},$$

em que $C_{n,\Omega}$ depende de Ω e da dimensão n, sendo dado por

$$C_{n,\Omega} = 4\left[C_0(n)\left(\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\right)\left(\lambda_1+\frac{1}{4}n^2H_0^2\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

em que $C_0(n)$ e H_0^2 são os mesmos conforme em (12).

Demonstração. Por conveniência, vamos usar o modelo do semiplano superior do espaço hiperbólico, ou seja,

$$\mathbb{H}^n(-1) = \{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

com a métrica

$$g_{ij}(x_1,\cdots,x_n) = \langle\partial_i,\partial_i\rangle = \frac{1}{(x_n)^2}\delta_{ij}$$

em que $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é a base de campos coordenados de $\mathbb{H}^n$.

Observamos que os elementos g_{ij} acima são as componentes da matriz da métrica e por sua vez, as componentes da matriz inversa da matriz da métrica são dados por $g^{ij} = (x_n)^2\delta_{ij}$. Podemos obter o Laplaciano de uma função f em coordenadas por

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{\det(g_{ij})} \partial_j(f) \right) \tag{2.59}$$

Uma vez que em $\mathbb{H}^n$ temos $\det(g_{ij}) = \frac{1}{x_n^{2n}}$ e tomando $f = \log x_n$ em (2.59) teremos

$$\begin{aligned}
\Delta(\log x_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_n^{2n}}}} \partial_i \left(\delta_{ij}(x_n)^2 \sqrt{\frac{1}{x_n^{2n}}} \partial_j(\log x_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_n^n \partial_i \left((x_n)^2 \frac{1}{x_n^n} \partial_i(\log x_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_n^n \partial_i \left(\frac{1}{x_n^{n-2}} \delta_{in} \frac{1}{x_n} \right) \\
&= x_n^n \partial_n \left(\frac{1}{x_n^{n-1}} \right) \\
&= -x_n^n (n-1) \frac{1}{x_n^n} \\
&= -(n-1),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

e em coordenadas

$$\nabla(\log x_n) = x_n^2 \sum_{j=i}^{n} \partial_j(\log x_n)\partial_j = x_n^2 \sum_{j=i}^{n} \delta_{jn} \frac{1}{x_n} \partial_j = x_n \partial_n,$$

bem como,

$$|\nabla(\log x_n)| = |x_n\partial_n| = \Big(\langle x_n\partial_n, x_n\partial_n \rangle \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(x_n^2 \langle \partial_n, \partial_n \rangle \Big)^{\frac{1}{2}} = \left(x_n^2 \frac{1}{(x_n)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1. \tag{2.61}$$

Sem perda de generalidade, assumimos que $\lambda_{k+1} < \lambda_{k+2}$. Tomando $i = 1$ e aplicando (2.60) e (2.61) em (2.53) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1} &\leq 4 \left(\lambda_i - \frac{1}{4} \int_\Omega (\Delta(\log x_n))^2 u_i^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \nabla(\Delta(\log x_n)), \nabla(\log x_n) \rangle \, u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_{k+2}} \\
&= 4 \left(\lambda_i - \frac{1}{4} \int_\Omega (n-1)^2 u_i^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \nabla(1-n), \nabla(\log x_n) \rangle \, u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_{k+2}} \\
&= 4 \left(\lambda_i - \frac{1}{4} (n-1)^2 \int_\Omega u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_{k+2}} \\
&= 4 \left(\lambda_i - \frac{1}{4} (n-1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_{k+2}}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

A partir de (12), temos

$$\lambda_{k+2} \leq \lambda_{k+2} + \frac{1}{4} n^2 H_0^2 \leq C_0(n)(k+1)^{\frac{2}{n}} \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} n^2 H_0^2 \right), \tag{2.63}$$

e aplicando (2.63) a desigualdade (2.62), Obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1} &\le 4\left(\lambda_i-\frac{1}{4}(n-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{C_0(n)\Big(k+1\Big)^{\frac{2}{n}}\left(\lambda_1+\frac{1}{4}n^2H_0^2\right)}\\ &= 4\left(\lambda_i-\frac{1}{4}(n-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{C_0(n)\left(\lambda_1+\frac{1}{4}n^2H_0^2\right)}\Big(k+1\Big)^{\frac{1}{n}}\\ &= C_{n,\Omega}\Big(k+1\Big)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}\tag{2.64}$$

em que $C_{n,\Omega}$ está definido por (17). Consequentemente, podemos deduzir (2.64) para qualquer $k>1$. □

Corolário 2. *Seja M uma variedade Riemanniana não compacta completa simplesmente conexa n-dimensional $(n\ge 3)$ com curvatura seccional Sec satisfazendo*

$$-a^2\le Sec\le -b^2,$$

onde a e b são constantes com $0<b\le a$. Se $\Omega\subset M$ é um domínio limitado de M e λ_k o k-ésimo $(k>1)$ autovalor de (1), então

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k\le C_{n,\Omega}k^{\frac{1}{n}},$$

em que $C_{n,\Omega}$ depende de Ω e da dimensão n, sendo dado por

$$C_{n,\Omega}=4\left[C_0(n)\left(\lambda_1-\frac{1}{4}(n-1)^2b^2+\frac{1}{4}(a^2-b^2)\right)\left(\lambda_1+\frac{1}{4}n^2H_0^2\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

com $C_0(n)$ e H_0^2 são os mesmos conforme em (12).

Demonstração. Assuma que M é uma variedade Riemanniana completa não compacta n-dimensional com curvatura seccional Sec satisfazendo $-a^2\le Sec\le -b^2$, em que a e b são constantes com $0<b\le a$, e Ω um domínio limitado em M. Para um ponto $p\notin\overline{\Omega}$ fixado, a função distância $\rho(x)$ é definida por $\rho(x)=d(x,p)$. Como $|\nabla\rho|=1$ e utilizando a fórmula de Bochner (1.47), obtemos

$$0=\frac{1}{2}\Delta(|\nabla\rho|^2)=|\nabla^2\rho|^2+\langle\nabla\rho,\nabla(\Delta\rho)\rangle+Ric(\nabla\rho,\nabla\rho),$$

e consequentemente

$$\langle\nabla\rho,\nabla(\Delta\rho)\rangle=-|\nabla^2\rho|^2-Ric(\nabla\rho,\nabla\rho).\tag{2.65}$$

Assuma que $\nabla\rho,e_1,\cdots,e_{n-1}$ é a base ortonormal de autovetores do operador $\nabla^2\rho$ com respectivamente $0\le h_1\le\cdots\le h_{n-1}$ os autovalores associados. Usando a forma diagonalizada da matriz associada ao operador $\nabla^2\rho$ podemos calcular

$$\begin{aligned}2|\nabla^2\rho|^2-(\Delta\rho)^2 &= 2|\nabla^2\rho|^2-(tr[\nabla^2\rho])^2\\ &= 2\sum_{i=1}^{n-1}h_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}h_i\right)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n-1} h_i h_j \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 - \sum_{i\neq j} h_i h_j - \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 - \sum_{i\neq j} h_i h_j \\
&= h_{n-1}^2 + h_{n-2}^2 + \ldots + h_1^2 - 2\sum_{i<j} h_i h_j \\
&\leq h_{n-1}^2 + h_{n-2}h_{n-1} + \ldots + h_1 h_2 - 2\sum_{i<j} h_i h_j \\
&= h_{n-1}^2 - h_{n-2}h_{n-1} - \ldots - h_1 h_2 - 2\sum_{\substack{i<j\\ j\neq i+1}} h_i h_j \\
&\leq h_{n-1}^2 - (n-2)h_1^2 - 2\sum_{\substack{i<j\\ j\neq i+1}} h_1^2 \\
&= h_{n-1}^2 - (n-2)h_1^2 - [(n-2)^2 - (n-2)]h_1^2 \\
&= h_{n-1}^2 - (n-2)^2 h_1^2
\end{aligned} \tag{2.66}
$$

Sejam M_a e M_b variedade diferenciáveis com curvatura seccional constante iguais a $-a^2$ e $-b^2$ respectivamente. Uma vez que a curvatura seccional Sec de M é tal que $-a^2 \leq Sec \leq -b^2$, pelo Teorema da Comparação do Hessiano (Teorema 1.2) e utilizando a expressão (1.32) temos

$$
a\frac{\cosh(a\rho)}{\sinh(a\rho)} \geq h_{n-1} \geq \cdots \geq h_1 \geq b\frac{\cosh(b\rho)}{\sinh(b\rho)} \tag{2.67}
$$

Note que $\frac{x^2}{\sinh^2(x\rho)}$ é uma função decrescente em x. De fato, definindo a função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ por

$$
g(x) = \frac{x^2}{\sinh^2(x\rho)} \tag{2.68}
$$

com $\rho > 0$ uma constante fixa, basta verificar que a derivada de g é negativa para que ela seja decrescente. Como

$$
g'(x) = \frac{2x}{\sinh^3(\rho x)}[\sinh(\rho x) - \rho x\cosh(\rho x)],
$$

basta observar que $[\sinh(\rho x) - \rho x\cosh(\rho x)] < 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, uma vez que $\frac{2x}{\sinh^3(\rho x)}$ é sempre positivo para $x > 0$. Definindo então a função $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ por

$$
h(y) = \sinh(y) - y\cosh(y)
$$

termos que

$$
h'(y) = -y\sinh(y) \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+.
$$

Com isso h é decrescente para $y > 0$ e como $h(0) = 0$ teremos que h é estritamente negativa em $\mathbb{R}_+^*$. Com isso teremos que $g'(x)$ é estritamente negativa para todo $x > 0$, ou seja, $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma função decrescente.

Como $n \geq 3$, g é uma função decrescente em y, a partir de (2.66) e (2.67), temos

$$\begin{aligned}
2|\nabla^2\rho|^2 + 2Ric(\nabla\rho,\nabla\rho) - (\Delta\rho)^2 &\leq 2|\nabla^2\rho|^2 - (\Delta\rho)^2 - 2(n-1)b^2 \\
&\leq h_{n-1}^2 - (n-2)^2 h_1^2 - 2(n-1)b^2 \\
&\leq a^2\frac{\cosh^2(a\rho)}{\sinh^2(a\rho)} - (n-2)^2 b^2 \frac{\cosh^2(b\rho)}{\sinh^2(b\rho)} - 2(n-1)b^2 \\
&= a^2\frac{\sinh^2(a\rho)+1}{\sinh^2(a\rho)} - (n-2)^2 b^2 \frac{\sinh^2(b\rho)+1}{\sinh^2(b\rho)} - 2(n-1)b^2 \\
&= a^2 + \frac{a^2}{\sinh^2(a\rho)} - (n-2)^2 b^2 - (n-2)^2\frac{b^2}{\sinh^2(b\rho)} - 2(n-1)b^2 \\
&\leq a^2 - (n-2)^2 b^2 - 2(n-1)b^2 + \frac{b^2}{\sinh^2(b\rho)} - (n-2)^2\frac{b^2}{\sinh^2(b\rho)} \\
&= a^2 - b^2 - (n-1)^2 b^2 + \frac{b^2}{\sinh^2(b\rho)} - (n-2)^2\frac{b^2}{\sinh^2(b\rho)} \\
&\leq a^2 - b^2 - (n-1)^2 b^2
\end{aligned} \tag{2.69}$$

sendo

$$\begin{aligned}
-(n-2)^2 b^2 - 2(n-1)b^2 &= -b^2[(n-2)^2 + 2(n-1)] \\
&= -b^2(n^2 - 4n + 4 + 2n - 2) \\
&= -b^2(n^2 - 2n + 1 + 1) \\
&= -(n-1)^2 b^2 - b^2,
\end{aligned}$$

e como $\{\nabla\rho, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ é uma base ortonormal, obtemos

$$\begin{aligned}
2Ric(\nabla\rho,\nabla\rho) &= 2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(e_i,\nabla\rho)\nabla\rho, e_i\rangle + \langle R(\nabla\rho,\nabla\rho)\nabla\rho,\nabla\rho\rangle\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1} Sec(e_i,\nabla\rho) \leq 2\sum_{i=1}^{n-1}(-b^2) = -2(n-1)b^2
\end{aligned}$$

Novamente, sem perda de generalidade, assumimos $\lambda_{k+1} < \lambda_{k+2}$. Tomando $f = \rho$ e $i = 1$ em (2.53), temos de (2.65) e (2.69) que

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1} &\leq 4\left(\lambda_1 - \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta\rho)^2 u_1^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle\nabla(\Delta\rho),\nabla\rho\rangle u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}} \\
&= 4\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}\int_\Omega \Big(-2\langle\nabla(\Delta\rho),\nabla\rho\rangle - (\Delta\rho)^2\Big)u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}} \\
&= 4\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}\int_\Omega \Big(2|\nabla^2\rho|^2 + 2Ric(\nabla\rho,\nabla\rho) - (\Delta\rho)^2\Big)u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}} \\
&\leq 4\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}\int_\Omega \Big(a^2 - b^2 - (n-1)^2 b^2\Big)u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}
\end{aligned}$$

$$= 4\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}\Big(a^2 - b^2 - (n-1)^2b^2\Big)\int_\Omega u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}$$

$$= 4\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}\Big(a^2 - b^2 - (n-1)^2b^2\Big)\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}} \tag{2.70}$$

Aplicando (2.63) em (2.70), teremos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1} &\leq 4\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}\Big(a^2 - b^2 - (n-1)^2b^2\Big)\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}} \\ &\leq 4\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}\Big(a^2 - b^2 - (n-1)^2b^2\Big)\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{C_0(n)\left(\lambda_1 + \frac{1}{4}n^2H_0^2\right)}\Big(k+1\Big)^{\frac{1}{n}} \\ &= C_{n,\Omega}(k+1)^{\frac{1}{n}}\end{aligned} \tag{2.71}$$

em que $C_{n,\Omega}$ é definido por (19). Consequentemente, podemos deduzir (2.71) para qualquer $k > 1$. □

Referências Bibliográficas

[1] Ashbaugh, M.S., *Isoperimetric and Universal Inequalities for Eigenvalues*, Spectral theory and Geometry (Edinburgh, 1998) p. 95 – 139, London Math. Soc. Lecture Note Series vo. 273, Cambridge University Press, 1999.

[2] Ashbaugh, M.S., *The Universal Eigenvalue Bounds of Payne–Pólya–Weinberger, Hile–Protter, and H. C. Yang*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. vo. 112. no. 1. p. 3 – 30, 2002.

[3] Ashbaugh, M.S. and Benguria, R.D., *Proof of the Payne–Pólya–Weinberger Conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) vo. 25. no. 1. p. 19–29, 1991.

[4] Ashbaugh, M.S. and Benguria, R.D., *A Second Proof of the Payne–Pólya–Weinberger Conjecture*, Comm. Math. Phys. vo. 147. no. 1. p. 181 – 190, 1992.

[5] Ashbaugh, M.S. and Benguria, R.D., *A Sharp Bound for the Ratio of the first two Eigenvalues of Dirichlet Laplacians and Extensions*, Ann. of Math. vo. 135. no. 3. p. 601 – 628, 1992.

[6] Ashbaugh, M.S. and Benguria, R.D., *Isoperimetric Bounds for Higher Eigenvalue Ratios for the n-dimensional fixed Membrane Problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A vo. 123. no. 6. p. 977 – 985, 1993.

[7] Ashbaugh, M.S. and Benguria, R.D., *More bounds on Eigenvalue Ratios for Dirichlet Laplacians in n dimensions*, SIAM J. Math. Anal. vo. 24. no. 6. p. 1622 – 1651, 1993.

[8] Ashbaugh, M.S. and Benguria, R.D., *Bounds for Ratios of the first, second, and third Membrane Eigenvalues*, Nonlinear problems in applied mathematics, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.

[9] Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, 5 ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.(Projeto Euclides)

[10] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry. Pure and applied mathematics, 115*, New York, Academic Press, 1984.

[11] Chen, D. and Cheng, Q.-M., *Extrinsic Estimates for Eigenvalues of the Laplace Operator*, J. Math. Soc. Japan vo. 60. no. 2. p. 325 – 339, 2008.

[12] Cheng, Q.-M. and Yang, H., *Estimates on Eigenvalues of Laplacian*, Math. Ann. vo. 331. no. 2. p. 445 – 460, 2005.

[13] Cheng, Q.-M. and Yang, H., *Inequalities for Eigenvalues of Laplacian on Domains and Compact Complex Hypersurfaces in Complex Projective Spaces*, J. Math. Soc. Japan vo. 58. no. 2. p. 545 – 561, 2006.

[14] Cheng, Q.-M. and Yang, H., *Bounds on Eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. vo. 337. no. 1. p. 159 – 175, 2007.

[15] Cheng, Q.-M. and Yang, H., *Estimates for Eigenvalues on Riemannian Manifolds*, J. Differential Equations vo. 247. no. 8. p. 2270 – 2281, 2009.

[16] Chen, D., Zheng, T. and Lu, M., *Eigenvalue Estimates on Domains in Complete Noncompact Riemannian Manifolds*, Pacific J. Math. vo. 255. no. 1. p. 41 - 54, 2012.

[17] Chen, D., Zheng, T. and Yang, H., *Estimates of the Gaps Between Consecutive Eigenvalues of Laplacian*, Pacific J. Math. vo. 282. no. 2. p. 293 - 311, 2016.

[18] El Soufi, A., Harrell II, E.M. and Ilias, S., *Universal inequalities for the Eigenvalues of Laplace and Schrödinger Operators on Submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. vo. 361. no. 5. p. 2337 – 2350, 2009.

[19] Gomes, J.N.V., Pereira A.L., *Operadores Diferenciais em Variedades Riemannianas*, Notas de Aula. São Paulo, USP, 2015, disponível em `https://www.ime.usp.br/~alpereir/files/Oper_Dif_Var.pdf`

[20] Harrell II, E.M., *Some Geometric Bounds on Eigenvalue Gaps*, Comm. Partial Differential Equations vo. 18. no. 1-2. p. 179 – 198, 1993.

[21] Harrell II, E.M., *Commutators, Eigenvalue Gaps, and Mean Curvature in the Theory of Schrödinger Operators*, Comm. Partial Differential Equations vo. 32. no. 1-3. p. 401 – 413, 2007.

[22] Harrell II, E.M. and Michel, P.L., *Commutator Bounds for Eigenvalues, with Applications to Spectral Geometry*, Comm. Partial Differential Equations vo. 19. no. 11-12. p. 2037 – 2055, 1994.

[23] Harrell II, E.M. and Stubbe, J., *On Trace Identities and Universal Eigenvalue Estimates for some Partial Differential Operators*, Trans. Amer. Math. Soc. vo. 349. no. 5. p. 1797 – 1809, 1997.

[24] Hile, G.N. and Protter, M.H., *Inequalities for Eigenvalues of the Laplacian*, Indiana Univ. Math. J. vo. 29. no. 4. p. 523 – 538, 1980.

[25] Izmailov, A. Solodov, M., *Otimização Volume 1*. Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade. 3 ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

[26] Kac, M., *Can You Hear the Shape of a Drum?*, Amer. Math. Monthly. no. 4, part II, p. 1-23, 1966.

[27] Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, 2: Measure. The Lebesgue Integral. Hilbert space*, Moscow, Izdat. Moskov. Univ., 1960.

[28] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, 2 ed. New York, Springer, 2013.(Graduate Texts in Mathematics; 218)

[29] Leung, P.-F., *On the Consecutive Eigenvalues of the Laplacian of a Compact Minimal Submanifold in a Sphere*, Math. Soc. Ser. A vo. 50. no. 3. p. 409 – 416, 1991.

[30] Li, P., *Eigenvalue Estimates on Homogeneous Manifolds*, Comment. Math. Helv. vo. 55. no. 3. p. 347 – 363, 1980.

[31] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Vol.1, 14 ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.(Projeto Euclides)

[32] Lima, E.L., *Introdução à Topologia Diferencial.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1961.(Coleção Textos Universitário)

[33] Lima, E.L., *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

[34] Gordon, C., Webb, D. and Wolpert, S., *One Cannot Hear the Shape of a Drum*, Bull. of the AMS, 1992.

[35] Nash, J., *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds*, Ann. of Math. Japan vo. 63. no. 1. 241 p. 20 – 63, 1956.

[36] Payne, L.E., Pólya, G. and Weinberger, H.F., *Sur le Quotient de Deux Fréquences Propres Consécutives*, C. R. Acad. Sci. Paris vo. 241 p. 917 – 919, 1955.

[37] Payne, L.E., Pólya, G. and Weinberger, H.F., *On the Ratio of Consecutive Eigenvalues*, C. R. Acad. Sci. Paris vo. 241 p. 917 – 919, 1956.

[38] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, 2 ed. Los Angeles, Springer, 2006.(Graduate Texts in Mathematics; 171)

[39] Sun, H., Cheng, Q.-M. and Yang, H., *Lower order eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Manuscripta Math. vo. 125. no. 2. p. 139 – 156, 2008.

[40] Thompson, C.J., *On the Ratio of Consecutive Eigenvalues in N-dimensions*, Studies in Appl. Math. vo. 48. p. 281 – 283, 1969.

[41] Weyl, H., *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)*, German, Math. Ann. vo. 71. no. 4. p. 441 – 479, 1912.

[42] Yang, H., *An Estimate of the Difference Between Consecutive Eigenvalues*, preprint, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 1991, disponível em `https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:23015356`

[43] Yang, P.C., and Yau, S.-T., *Eigenvalues of the Laplacian of Compact Riemann Surfaces and Minimal Submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Sé. 4 vo. 7. no. 1. p. 55 – 63, 1980.

[44] Zeidler, E., *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*, Applied Mathematical Sciences vo.109, Springer, New York, 1995.