Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações Elípticas Assintoticamente Lineares com Potencial que Muda de Sinal

Maristela Barbosa Cardoso

Manaus - AM
Janeiro de 2020

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações Elípticas Assintoticamente Lineares com Potencial que Muda de Sinal

por

Maristela Barbosa Cardoso

sob a orientação do

Prof. Dr. Alireza Khatib

Manaus - AM
Janeiro de 2020

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C268e

Cardoso, Maristela Barbosa
   Equações elípticas assintoticamente lineares com potencial que muda de sinal / Maristela Barbosa Cardoso. 2020
   73 f.: 31 cm.

   Orientador: Alireza Khatib
   Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

   1. Linking. 2. Sequência de Cerami. 3. Equação de Schrödinger. 4. solução fraca. I. Khatib, Alireza II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Poder Executivo
Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ata de Defesa Pública de Dissertação da aluna **Maristela Barbosa Cardoso** do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática – PPGM/UFAM.

Às 10:00 horas do dia 18 de fevereiro de 2020, foi realizada no Auditório Professor José Henrique de Sá Mesquita do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas, a Defesa Pública de Dissertação da discente **Maristela Barbosa Cardoso, Matrícula: 2180360,** Intitulada: **"Equações Elípticas Assintoticamente Lineares com Potencial que Muda de Sinal"** como parte final de seu trabalho para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**. A Banca Examinadora, instituída pela Portaria Nº 03/2019 – PPGM/UFAM, constituiu-se dos seguintes Professores Doutores: **Alireza Kathib - UFAM (Orientador); Somayeh Mousavinasr - UFAM (Membro Externo); José Carlos de Oliveira Júnior - UFT (Membro Externo).** Após a apresentação do trabalho, os examinadores fizeram as perguntas concernentes e em seguida, a Banca Examinadora reuniu-se para deliberar e considerou a discente APROVADA. Nada mais havendo a tratar, a reunião foi encerrada e lavrou-se a ata que vai assinada por todos os membros.

Alireza Khatib

Prof. Dr. Alireza Kathib (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

Somayeh Mousavinasr

Profa. Dra. Somayeh Mousavinasr (Membro Externo)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Júnior (Membro Externo)
Universidade Federal de Tocantins - UFT

Av. Gen. Rodrigo Octávio, 6.200 – Coroado – Setor Norte do Campus Universitário Arthur Virgílio Filho.
69080-900 – Manaus-AM – Fone (92) 3305-1181 – Ramal 2405 – E-mail: pos-matematica@ufam.edu.br

Esta dissertação é dedicada aos meus pais Marinete Freitas Barbosa e Arsenio Oliveira Cardoso.

Agradecimentos

A Deus, por me acompanhar durante toda vida mostrando sua presença nas mais diversas situações de minha vida, me dando forças para prosseguir nessa jornada.

Aos meus queridos pais Marinete Freitas Barbosa e Arsenio Oliveira Cardoso pelo apoio, incentivo, carinho, confiança, conversas diárias e por todo o esforço para eu estar aqui. A minha amada irmã Marcela Barbosa Cardoso por me acompanhar, incentivar, inspirar e pelas longas conversas que foram importantíssimas para tornar mais leve a jornada. A minha madrinha Rosineide Freitas Barbosa por sempre estar presente em minha vida.

Ao meu orientador Alireza Khatib por me aceitar como orientanda, pela confiança, paciência, atenção e dedicação.

Aos professores Thiago Rodrigo Alves e Airton Freitas pela disponibilidade de tempo para ajudar em diversas situações, pelas palavras de incentivo e apoio. Aos professores da Graduação Edilson Carvalho e Edfram Pereira por fazerem parte da minha formação e por serem responsáveis de me fazer continuar na matemática.

Aos meus colegas de mestrado e doutorado: Ayana Santana, Flávia Elisandra, Wanessa Ferreira, Cristiano Silva, Leonardo Brito, Claudeilsio Nascimento, André Matos, Clebes Brandão, Matheus Hudson pela relação mútua de respeito e companheirismo, pelos momentos de aprendizado, diversão e conversas aleatórias tornando a caminhada mais leve e prazerosa.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta e indireta que contribuíram para esta conquista.

Resumo

Neste trabalho, consideramos a equação não linear de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

com $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ em que $N \geq 3$, V é uma função não periódica que muda de sinal e f é uma função assintoticamente linear no infinito. Além disso, V possui um limite positivo no infinito e o espectro do operador $L = -\Delta + V$ tem ínfimo negativo. A existência de solução fraca é estabelecida empregando a teoria espectral, o teorema de Linking sob a condição de Cerami e a iteração ente soluções transladadas do problema no infinito associado.

Palavras-chave: Linking, sequência de Cerami, equação de Schrödinger.

Abstract

In this work, we consider the nonlinear Schrödinger equation

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \; em \; \mathbb{R}^N$$

with $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ where $N \geq 3$, V is a non-periodic function that changes sign and f is a asymptocally linear function at the infinity and the spectrum of the operator $L = -\Delta + V$ has negative infimum. The existence of a weak solution is established by employing spectral theory, the Linking theorem under the condition of Cerami and the iteration between traslated solutions of the problem at infinity.

Keywords: Linkig, Cerami sequence, Schrödinger equation.

Sumário

Introdução

Este trabalho está baseado no trabalho de Maia, Junior e Ruviaro [14] e tem como objetivo principal resolver e mostrar a existência de uma solução fraca não-trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema

$$(\mathrm{P}) \qquad -\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

em que $N \geq 3$, V é um potencial contínuo e não periódico que muda de sinal, com limite assintótico V_∞ e f uma função assintoticamente linear no infinito.

Para encontrar a solução fraca de (P) utilizaremos o método variacional que consiste em associar o problema (P) ao funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

em que F é a primitiva de f. Entende-se como solução fraca do problema (P) uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que é ponto crítico do funcional energia, definido acima. Ou seja,

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi\ dx = 0\ \forall\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para isto, aplicaremos o teorema de Linking [17] com condição de Cerami como em [15] e [16]. Isso será possível usando uma solução *ground state* positiva u_0 do problema limite

$$(P_\infty) \qquad -\Delta u + V_\infty u = f(u) \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

projetado em um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ de dimensão infinita com codimensão finita. Ademais, é importante estimar as iterações das translações de u_0 para obter a geometria de linking (Lema 4.1).

Nessa linha de trabalho, Kryszew e Szulkin em [21] e Pankov [22] provaram a existência de uma solução não trivial para o problema não autônomo com $f(x,u)$ em (P), admitindo $f(x,s)$ superquadrática em s com hipóteses de periodicidade. Szulkin e Weth em [23] estudaram a existência e multiplicidade de soluções para o caso não autônomo com V e f periódicas em x e $s \mapsto f(x,s)/|s|$ estritamente crescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$.

Jenjean e Tanaka em [24] estabeleceram a existência de uma solução positiva para (P) no caso definido, $V(x) \geq \alpha > 0$ e f assintoticamente linear no infinito, $f(s)/s \to a > 0$ quando $s \to \infty$ com $a > \inf \sigma(-\Delta + V)$, em que $\sigma(-\Delta + V)$ denota o espectro do operador autoadjunto $-\Delta + V$.

Vamos decompor o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ em uma soma direta de dois espaços E^+ e E^-, em que um deles tem dimensão finita, e assumiremos uma condição de não quadriticidade (hipótese (f_3)). Admitiremos que a função $s \mapsto f(s)/s$ é crescente para $s > 0$ e a partir disso será possível comparar os níveis de energia c e c_∞, o primeiro dado pela estrutura de minimax, e o segundo é o nível de energia do problema limite e com isso aplicaremos o Lema de Splitting.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos de forma breve resultados de Análise Funcional, Espaços L^p, Convergência Fraca, Espaços de Sobolev, Teoria Espectral e o Princípio de Compacidade de Lions que serão ferramentas necessárias nos capítulos posteriores.

No Capítulo 2, apresentaremos o problema variacional indefinido não periódico e assintoticamente linear com as condições estabelecidas para o potencial V e para a não linearidade de f. E também a abordagem variacional utilizada.

O Capítulo 3 é dedicado a provar a limitação da sequência de Cerami para o funcional I associado ao problema (P), que será de grande importância para a demonstração do resultado principal.

No Capítulo 4, abordaremos a geometria de Linking e apresentaremos as estimativas para as translações de u_0, provaremos o lema de Splitting e por fim demonstraremos o teorema principal, que garante a existência de solução fraca para o problema (P).

No Apêndice A, enunciremos e demonstraremos o Teorema de Linking sob a condição de Cerami. E no Apêndice B apresentaremos a prova de um resultado técnico.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Breve Descrição da Teoria de Medida

1.1.1 Espaço Mensurável

Definição 1.1. *Uma σ-álgebra no conjunto U é uma família Σ de subconjuntos de U que satisfaz as seguintes propriedades:*

(I) $\emptyset$*,* $U \in \Sigma$.

(II) Se $A \in \Sigma$*, então* $A^C := U \setminus A \in \Sigma$.

(III) Se $A_n \in \Sigma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Sendo assim, os elementos de Σ são chamados de conjuntos mensuráveis e o par (U, Σ) é chamado de espaço mensurável.

Exemplo 1.1. *Fixado um conjunto X, as famílias abaixo são σ-álgebras sobre X:*

(a) o conjunto das partes $\mathcal{P}(X)$ de X e $\{\emptyset, X\}$;

(b) A interseção de qualquer família de σ-álgebras sobre X.

Definição 1.2. *A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_U$ de um espaço métrico ou topológico U é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em U (ou, equivalentemente, pelos fechados em U). Os conjuntos pertencentes a $\mathcal{B}_U$ são chamados conjuntos de Borel de U ou, simplesmente, borelianos de U.*

Exemplo 1.2. *Seja $X = \mathbb{R}$. A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de $\mathbb{R}$ gerada pelos intervalos abertos, que também pode ser gerada pelos intervalos fechados.*

1.1.2 Funções Mensuráveis

Notação 1.1. *Denotaremos a reta estendida por* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definição 1.3. *Seja* (U, Σ) *um espaço mensurável. Uma função* $f : (U, \Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *é* Σ*-mensurável se, para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *o conjunto* $\{x \in U;\ f(x) > \alpha\}$ *está em* Σ.

Observação 1.1. *Os conjuntos abaixo também podem ser utilizados na definição de função mensurável:*

(i) $\{x \in U; f(x) \geq \alpha\}$;

(ii) $\{x \in U; f(x) \leqslant \alpha\}$;

(iii) $\{x \in U; f(x) < \alpha\}$.

Notação 1.2. *Denotamos por* $\mathcal{M}(U, \Sigma)$ *o espaço das funções mensuráveis.*

Observação 1.2. *Sejam* $f,\ g$ *funções em* $\mathcal{M}(U, \Sigma)$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Então as funções* $f + g,\ cf,\ f \cdot g$ *e* $|f|$ *são mensuráveis.*

O Lema a seguir nos mostra que, se uma sequência de funções mensuráveis converge pontualmente para uma função f, então f é mensurável.

Lema 1.1. *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $\mathcal{M}(U, \Sigma)$. *Então as funções definidas abaixo são mensuráveis.*

(I) $f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$;

(II) $F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$;

(III) $f^*(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$;

(IV) $F^*(x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.

Demonstração. Veja Lema 2.9 em [5]. □

1.1.3 Medida

Dado um espaço mensurável (U, Σ), vamos considerar as funções definidas sobre Σ e que assumem valores no conjunto dos reais extendido $\overline{\mathbb{R}}$, as quais, munidas de certas propriedades, serão chamadas de medidas.

Definição 1.4. *Uma medida no espaço mensurável* (U, Σ) *é uma função* $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *que satisfaz as seguintes condições:*

(I) $\mu(\emptyset) = 0$;

(II) $\mu(A) \geq 0$ *para todo* $A \in \Sigma$.

(III) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos de* Σ*, então*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ *é dita finita se* $\mu(U) < \infty$*, é dita* σ*-finita se existem conjuntos* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$ *tais que* $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *e* $\mu(A_n) < \infty$ *para todo* n*. O termo* (U, Σ, μ) *é chamado espaço de medida.*

Exemplo 1.3 (Medida de Dirac)**.** *Seja* $U \neq \emptyset$ *um conjunto qualquer, e tome* $\Sigma := \mathcal{P}(U)$*. Fixado um ponto* $x_0 \in U$*, definimos a medida de Dirac* $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow [0, +\infty)$ *por:*

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & se\ x_0 \in E, \\ 0, & se\ x_0 \notin E. \end{cases}$$

Notação 1.3. *Os conjuntos* $X \in \Sigma$ *com a propriedade* $\mu(X) = 0$ *são chamados de conjuntos de medida nula. Diremos que uma propriedade é* $\mu - q.t.p.$ *se tal propriedade vale em* U *exceto em um conjunto de medida nula.*

1.1.4 Integral

Nesta seção, vamos considerar um espaço de medida fixo (U, Σ, μ), denotaremos a coleção das funções Σ-mensuráveis não negativas de U por $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(U, \Sigma)$.

Definição 1.5. *Uma função* $\varphi \in \mathcal{M}(U, \Sigma)$ *é simples se a imagem de* φ *é finita.*

Proposição 1.1. *Uma função* $\varphi \in \mathcal{M}(U, \Sigma)$ *é simples se, e somente se, pode ser unicamente escrita na forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{E_j} \tag{1.1}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *são distintas,* $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \Sigma$*,* $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$ *e* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *se* $m \neq n$*. A relação* (1.1) *é chamada de representação canônica de* φ*.*

Definição 1.6. *Se* φ *é uma função simples em* $\mathcal{M}^+(U, \Sigma)$ *com a representação canônica* (1.1)*, defina a integral de* φ *com respeito a* μ *por*

$$\int \varphi \; d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j). \tag{1.2}$$

Definição 1.7. *Seja $f \in \mathcal{M}^+(U, \Sigma)$. A integral de f com respeito a μ é por definição,*

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu : \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Se $E \in \mu$, a integral de f sobre E com relação a μ é

$$\int_E f \, d\mu = \int f \mathcal{X}_E \, d\mu.$$

1.1.5 Funções Integráveis

Notação 1.4. *Dada uma função $f : U \to \mathbb{R}$, em que $U \neq \emptyset$ é um conjunto qualquer, denotaremos por f^+ a parte positiva de f e por f^- a parte negativa de f, e serão definidas por*

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}.$$

Além disso, temos que

$$f = f^+ - f^- \text{ e } |f| = f^+ + f^-.$$

Definição 1.8. *O conjunto $L = L(U, \Sigma, \mu)$ das funções integráveis a Lebesgue com respeito a medida μ consiste no conjunto de todas as funções mensuráveis f tais que as suas partes positiva e negativa possuem integral finita, isto é,*

$$L = L(U, \Sigma, \mu) = \left\{ f \in \mathcal{M}(U, \Sigma); \int_U f^+ d\mu < \infty \text{ e } \int_U f^- d\mu < \infty \right\}.$$

Se $f \in L$, então sua integral com respeito a medida μ é definida por:

$$\int_U f d\mu = \int_U f^+ d\mu - \int_U f^- d\mu.$$

Se $E \in \Sigma$, então a integral de f sobre E é definida por:

$$\int_E f d\mu = \int_U f \mathcal{X}_E d\mu = \int_U f^+_{\mathcal{X}_E} d\mu - \int_U f^-_{\mathcal{X}_E} d\mu,$$

em que $\mathcal{X}_E$ é a função característica do conjunto $E \in \Sigma$, definida por $\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in E \\ 0 \text{ se } x \notin E. \end{cases}$

Enunciaremos agora o Teorema da Convergência Dominada Monotona, Lema de Fatou e Teorema da Convergência Dominada, que possuem uma grande utilidade no decorrer deste trabalho. Suas demonstrações podem ser encontradas em [5].

Teorema 1.1 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ uma sequência de funções integráveis tal que* *(a)* $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$ *μ-q.t.p em U;*

(b) $\sup\limits_{\mathbb{N}} \int_U f_n < \infty$;

então $f_n(x)$ converge em U (μ-q.t.p) para um limite finito que denotaremos por $f(x)$, onde $f \in L$ e

$$\int_U f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_U f_n d\mu.$$

Lema 1.2 (Lema de Fatou)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L$ uma sequência de funções integráveis tais que*

(a) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ μ-q.t.p;*

(b) $\sup\limits_{\mathbb{N}} \int f_n < \infty$

Então,

$$\int_U \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_U f_n d\mu$$

Teorema 1.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L$ uma sequência de funções integráveis tal que*

(i) *$f_n(x) \to f(x)$ μ-q.t.p, em que f é uma função mensurável;*

(ii) *existe $g \in L$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \;\; \mu - q.t.p \;\; x \in U.$$

Então, f é integrável e, além disso,

$$\int_U f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_U f_n d\mu.$$

1.2 Espaços L^p

Nesta seção, apresentaremos a definição de espaços L^p, algumas propriedades e teoremas importantes que podem ser encontrados em [4], [5] e [6].

Definição 1.9. *Sejam U um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(U, \Sigma, \mu)$ é definido como o espaço das funções $f : U \to \mathbb{R}$ mensuráveis cuja potência $|f|^p$ é integrável em U, munido com a seguinte norma:*

$$\|f\|_{L^p} := \|f\|_p = \left(\int_U |u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Isto é,

$$L^p(U, \Sigma, \mu) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ mensurável e } \|f\|_p < \infty\}.$$

Para simplificar a notação, escreveremos $L^p(U)$ para denotar o espaço $L^p(U, \Sigma, \mu)$ sempre que não houver perigo de confusão. Vale ressaltar que o espaço $L^p(U)$, $1 \leq p < +\infty$, é um espaço vetorial de Banach.

Observação 1.3. *Quando $p = 2$, $L^2(U)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(U)} = \int_U f(x)\overline{g(x)} d\mu.$$

Definição 1.10. *Para o caso $p = \infty$, definimos*

$$L^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\}$$

em que

$$\|f\|_\infty := \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p em } U\}.$$

Definição 1.11 (Função Localmente Integrável). *Seja $1 \leq p < \infty$ e U um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em $L^p(U)$, se f for uma função mensurável tal que*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty,$$

para todo conjunto compacto $K \subset U$.

Denotaremos o espaço das funções localmente integráveis em U por $L^p_{loc}(U)$.

Notação 1.5. *Dado $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por p' o expoente conjugado de p dado por*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Além disso, consideraremos $\frac{1}{\infty} = 0$.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (U, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in {}^p(U)$ e $g \in L^q(U)$. Então*

$$fg \in L^1(U) \text{ e } \int_U |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Teorema 1.4 (Desigualdade de Interpolação para normas L^p). *Supoha que $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ e*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}.$$

Suponha também que $u \in L^s(U) \cap L^t(U)$. Então, $u \in L^r(U)$ e

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|^\theta_{L^s(U)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(U)}.$$

Demonstração. Podemos reescrever r como $r = \theta r + (1-\theta)r$ com $\theta \in [0,1]$. Assim

$$\int_U |u|^r dx = \int_U |u|^{\theta r} |u|^{(1-\theta)r} dx.$$

Considere $p = \dfrac{s}{\theta r}$ e $q = \dfrac{t}{(1-\theta)r}$. Observe que $p \geq 1$ *e* $q = p'$, e isso implica que $\theta \leq \frac{s}{r}$. Como por hipótese, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{s} + \dfrac{(1-\theta)}{t}$, temos $\dfrac{s}{r} = \theta + \dfrac{s}{t}(1-\theta) \geq \theta$. Logo, $p \geq 1$. Da mesma forma, mostra-se que $q \geq 1$. Além disso,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\theta . r}{s} + (1-\theta)\frac{r}{t} = \left[\frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}\right].r = \frac{1}{r}.r = 1$$

.

Dessa forma, $|u|^{\theta r} \in L^p(U)$ e $|u|^{(1-\theta)r} \in L^q(U)$, e pela desigualdade de Hölder 1.3, temos

$$\begin{aligned}\int_U |u|^{\theta r}|u|^{(1-\theta)r} dx &\leq \left(\int_U (|u|^{\theta r})^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_U (|u|^{(1-\theta)r})^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_U (|u|^{\theta r})^{\frac{s}{\theta r}} dx\right)^{\frac{\theta r}{s}} \left(\int_U (|u|^{(1-\theta)r})^{\frac{t}{(1-\theta)r}} dx\right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}}\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^s(U)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(U)}.$$

□

Teorema 1.5. *Sejam $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(U)$ e $u \in L^p(U)$ tais que $u_m \to u$. Então, existe uma subsequência $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e existe $h \in L^p(U)$ tais que*

(i) $u_{m_k}(x) \to u(x)$ q.t.p em U.

(ii) $|u_{m_k}(x)| \leq h(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p em U.

Definição 1.12. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que o funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ é contínuo, ou limitado, se:*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ \|x\| = 1\} < \infty.$$

Definição 1.13. *O conjunto formado por todos os funcionais contínuos definidos por $f : X \to \mathbb{R}$ será chamado de dual do espaço X e representado por X^*.*

Notação 1.6. *O dual do espaço $L^p(U)$ será denotado por $(L^p(U))^*$.*

Teorema 1.6 (Representaçã de Riesz)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p(U))^*$. Então, existe* *uma única função* $u \in L^{p'}(U)$ *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_U uf d\mu, \ \forall f \in L^p(U).$$

Além disso, temos

$$\|u\|_{p'} = \|\varphi\|_{(L^p(U))^*},$$

em que

$$\|\varphi\|_{(L^p(U))^*} = \sup \left\{ \left| \int_U uf d\mu \right| ; \|f\|_{L^p(U)} = 1 \right\}.$$

Agora apresentaremos a versão do Teorema de Representação de Riesz para o caso em que $p = \infty$.

Teorema 1.7. *Seja* $\varphi \in (L^1(U))^*$. *Então existe uma única função* $u \in L^\infty(U)$ *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_U uf \ d\mu \quad \forall f \in L^1(U).$$

Além disso,

$$\|u\|_\infty = \|\varphi\|_{(L^1(U))^*}.$$

1.3 Convergência Fraca

Nesta seção, abordaremos de forma breve uma noção de convergência fraca, que será baseada em Botelho [6].

Definição 1.14. *A topologia fraca no espaço normado* X *é a topologia gerada pelos funcionais contínuos* $\varphi \in X^*$, *e será denotada por* $\sigma(X, X^*)$.

Definição 1.15. *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* X *converge fracamente para* x *quando* $\varphi(x_n)$ *converge para* $\varphi(x)$ *para todo* $\varphi \in X^*$. *Além disso, denotaremos essa convergência da seguinte forma* $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema 1.8. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.*

Exemplo 1.4. *São exemplos de espaços reflexivos: espaços normados de dimensão finita, o espaço* $H^1(\mathbb{R}^N)$, *entre outros.*

1.4 Espaço de Sobolev

Nesta seção, será abordada o espaço no qual este trabalho será desenvolvido, o Espaço de Sobolev, assim como algumas propriedades. Os resultados e demonstrações omitidas podem ser encontrados em [18].

1.4.1 Derivada Fraca

Notação 1.7. *Denotaremos por $C^\infty(U)$ o conjunto das funções reais diferenciáveis.*

Definição 1.16. *O suporte da função $f : U \to \mathbb{R}$ é dado por*

$$supp(f) := \overline{\{x \in U; f(x) \neq 0\}}.$$

Uma função f é dita ter suporte compacto se seu suporte é compacto em $\mathbb{R}^N$, e o suporte é compacto se, e somente se, for limitado, pois já é fechado.

Definição 1.17. *Definimos por $C_0^\infty(U)$ o conjunto das funções $u : U \to \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de todos as ordens são contínua e cujo suporte é compacto. Denominamos a função $\varphi \in C_0^\infty(U)$ de função teste.*

Definição 1.18. *Seja um vetor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ com α_i um número inteiro não-negativo. Então, α é chamado de multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Dados um multi-índice α e uma função $u \in C_0^\infty(U)$, definimos*

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Se $|\alpha| = 0$, definimos $D^\alpha(u) = u$.

Definição 1.19. *Dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^N$, uma função $u \in L^1_{loc}(U)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(U)$ é uma α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_U u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v(x)\phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(U).$$

Denotaremos $D^\alpha u := v$.

Observação 1.4. *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(U)$, quando existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

1.4.2 Espaço de Sobolev

Definição 1.20. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$, como sendo o espaço das funções $u \in L^p(U)$ tais que qualquer derivada fraca de u, até a ordem k, é uma função de $L^p(U)$, isto é,*

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U) : D^\alpha u \in L^p(U), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ é um espaço normado com a seguinte norma:

$$||u||_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{L^p(U)}, \; se \;\; 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{L^\infty(U)}, \; se \;\; p = \infty. \end{cases}$$

Teorema 1.9. *Se $u, v \in W^{k,p}(U)$ então*

(a) *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ sempre que $|\beta| + |\alpha| \leq k$;*

(b) *$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\beta v, \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;*

(c) *Se $\tilde{U} \subseteq U$ é um aberto, então $u \in W^{k,p}(\tilde{U})$;*

(d) *Se $\varphi \in C_0^\infty(U)$, então $\varphi u \in W^{k,p}(U)$ e para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que $|\alpha| \leq k$, vale*

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta(\alpha - \beta)!} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u,$$

em que $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \beta < \alpha$ significa $\beta_i < \alpha_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Observação 1.5. *(i) Valem as seguintes inclusões*

$$C_0^\infty(U) \subset W^{k,p}(U) \subset L^p(U).$$

(ii) Se $k = 0$ para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$, temos que

$$W^{0,p}(U) = L^p(U).$$

(iii) Quando $p = 2$, denotaremos $W^{k,p}(U)$ por $H^k(U)$, isto é, $H^k(U) = W^{k,2}(U)$. Para $k = 1$, temos

$$H^1(U) = W^{1,2}(U) = \left\{ u \in L^2(U); \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(U) \; para \; i = 1, \cdots, n \right\}.$$

Além disso, o $H^1(U)$ é um espaço de Hilbert e tem o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + uv] dx.$$

Definição 1.21. *O espaço $W_0^{k,p}(U)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(U)$ na norma $\| \cdot \|_{W^{k,p}}$, isto é,*

$$W_0^{k,p}(U) := \overline{C_0^\infty(U)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}.$$

Analogamente, o espaço $H_0^k(U)$ é o fecho de $C_0^\infty(U)$ em $H^k(U)$.

Definição 1.22. *Se $1 \leq p < n$, o expoente crítico de Sobolev é dado por*

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Teorema 1.10. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ limitado, $N \geq 1$, $k \geq 1$ então*

(i) $W^{k,p}(U)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

(ii) $W^{k,p}(U)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$

1.4.3 Imersões de Sobolev

Definição 1.23. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall\ x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Diremos que a imersão de X em Y é contínua é equivalente a dizer que a aplicação identidade $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x,\ x \in X$, é contínua.

Teorema 1.11. *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \qquad 2 \leq p < \infty, \quad N = 1, 2,$$
$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \qquad 2 \leq p \leq 2^*, \quad N \geq 3.$$

Definição 1.24. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach, $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso compactamente em Y, escrevemos $X \subset\subset Y$, se:*

(a) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X,\ u \in X$ para alguma constante $C > 0$;

(b) Cada sequência limitada em X é pré-compacta em Y.

Mais precisamente, a condição (b) significa que, se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X com $\sup\limits_n \|u_n\|_X < \infty$, então alguma subsequência $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em Y para algum limite u.

Teorema 1.12. *Se $U \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1, então a seguinte imersão é compacta:*

$$H^1(U) \subset\subset L^p(U), \qquad 1 \leq p < 2^*.$$

Teorema 1.13 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $U \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado. Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(U)} \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(U).$$

Em particular, o espaço de Sobolev $W^{1,p}(U)$ *possui a seguinte norma:*

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} = \|\nabla u\|_{L^p(U)}.$$

1.5 Breve Descrição de Funcionais Diferenciáveis

Nesta seção, apresentaremos propriedades e teoremas importantes sobre funcionais diferenciais e está baseado nos livros [19] e [20].

Definição 1.25. *Sejam* X *um espaço de Banach,* $U \subset X$ *aberto e* $\varphi : U \to \mathbb{R}$ *um funcional. Dizemos que* φ *tem derivada de Gatêaux em* $x \in U$*, se para todo* $h \in X$ *existe um funcional linear* $T : U \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x) - Th}{t} = 0. \tag{1.3}$$

Quando a derivada de Gatêaux existe, ela é o único funcional linear que satisfaz (1.3).

Notação 1.8. *Denotaremos a derivada de Gatêaux por* $D\varphi(x)$.

Definição 1.26. *Sejam* X *um espaço de Banach,* $U \subset X$ *aberto e* $\varphi : U \to \mathbb{R}$ *um funcional. Dizemos que* φ *tem derivada de Fréchet em* $x \in U$*, se para todo* $h \in X$ *existe um funcional* $T \in X^*$ *tal que*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x) - Th}{\|h\|} = 0. \tag{1.4}$$

Quando a derivada de Fréchet existe, ela é o único funcional linear que satisfaz (1.4).

Notação 1.9. *Denotaremos a derivada de Fréchet por* $\varphi'(x)$.

Observação 1.6. (i) *Toda função constante em um aberto de um espaço de Banach é Fréchet-diferenciável e tem derivada nula.*
(ii) *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $\varphi : H \to \mathbb{R}$ *com* $\varphi(x) = \|x\|^2$*. Então,* φ *é Fréchet-diferenciável e* $\varphi'(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$ *para todos* $x, h \in H$.

Para o próximo lema, considere inicialmente os seguintes espaços normados $L^p(U) \cap L^q(U)$ e $L^p(U) + L^q(U)$. Estes espaços são munidos com as seguintes normas respectivamente

$$\|u\|_{p \bigwedge q} := \|u\|_p + \|u\|_q$$

e

$$\|u\|_{p\vee q} := \inf\{\|v\|_p + \|w\|_q : v \in L^p(U), w \in L^q(U), u = v + w\}.$$

Lema 1.3. *Suponhamos que* $1 \leq p,\ q, r, s < \infty$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e* $|f(u)| \leq c(|u|^{p/r} + |u|^{q/s})$. *Então, para todo* $u \in L^p(U) \cap L^q(U)$, $f(u) \in L^r(U) + L^s(U)$, *o operador*

$$\begin{aligned} A : L^p(U) \cap L^q(U) &\to L^r(U) + L^s(U) \\ u &\mapsto f(u) \end{aligned}$$

é contínuo.

Lema 1.4. *Considere*

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

em que

$$F(u) = \int_0^s f(t)dt.$$

Suponhamos que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $|f(u)| \leq c(|u|^{p_1-1} + |u|^{p_2-1})$ *com* $1 < p_1 - 1 \leq p_2 - 1 < 2^* - 1$ *e* $N \geq 3$. *Então, o funcional* ψ *é de classe* $\mathcal{C}^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *e*

$$\langle \psi'(u), h \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx, \quad \forall\ h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Vamos mostrar a existência e continuidade da derivada de Gatêaux. Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in [0, 1]$. Considere

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(s) = F(u(x) + sth(x)).$$

Note que

$$g(0) = F(u(x)),$$

$$g(1) = F(u(x) + th(x))$$

e

$$g'(s) = f(u(x) + sth(x))th(x).$$

Segue do Teorema do Valor Médio que existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{g(1) - g(0)}{t} &= \frac{F(u(x) + th(x)) - F(u(x))}{t} \\ &= \frac{f(u(x) + \lambda sth(x))th(x)}{t} \\ &= f(u(x) + \lambda sth(x))h(x). \end{aligned}$$

Assim, como $s, \lambda, t \in [0,1]$ e vale $1 < p_1 - 1 \leq p_2 - 1 < 2^* - 1$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{|F(u(x)+th(x)) - F(u(x))|}{t} &= |f(u(x)+\lambda sth(x))h(x)| \\
&= |f(u(x)+\lambda sth(x))||h(x)| \\
&\leq c(|u(x)+\lambda sth(x)|^{p_1-1} + |u(x)+\lambda sth(x)|^{p_2-1})|h(x)| \\
&\leq c[2^{p_1-1}(|u(x)|^{p_1-1} + |\lambda th(x)|^{p_1-1}) \\
&\quad + 2^{p_2-1}(|u(x)|^{p_2-1} + |\lambda th(x)|^{p_2-1})]|h(x)| \\
&\leq c[2^{p_1-1}(|u(x)|^{p_1-1} + |h(x)|^{p_1-1}) \\
&\quad + 2^{p_2-1}(|u(x)|^{p_2-1} + |h(x)|^{p_2-1})]|h(x)| \\
&\leq c[|u(x)|^{p_1-1}|h(x)| + |h(x)|^{p_1} \\
&\quad + |u(x)|^{p_2-1}|h(x)| + |h(x)|^{p_2}].
\end{aligned}$$

Considere

$$p(x) = c(|u(x)|^{p_1-1}|h(x)| + |h(x)|^{p_1} + |u(x)|^{p_2-1}|h(x)| + |h(x)|^{p_2}).$$

Pela Desigualdade de Hölder, Teorema 1.3, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_1-1}|h(x)|dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u(x)|^{p_1-1})^{\frac{p_1}{p_1-1}} dx\right)^{\frac{p_1-1}{p_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_1} dx\right)^{\frac{p_1-1}{p_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \|u\|_{p_1}^{p_1-1}\|h\|_{p_1}. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_2-1}|h(x)|dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u(x)|^{p_2-1})^{\frac{p_2}{p_2-1}} dx\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \|u\|_{p_2}^{p_2-1}\|h\|_{p_2}. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Então, usando as desigualdades (1.5), (1.6) e a imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} p(x)dx &= c\int_{\mathbb{R}^N} (|u(x)|^{p_1-1}|h(x)| + |h(x)|^{p_1} + |u(x)|^{p_2-1}|h(x)| + |h(x)|^{p_2})dx \\
&\leq c(\|u\|_{p_1}^{p_1-1}\|h\|_{p_1} + \|h\|_{p_1}^{p_1} + \|u\|_{p_2}^{p_2-1}\|h\|_{p_2} + \|h\|_{p_2}^{p_2}) < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $p(x) \in L^1$. Pelos teoremas do Valor Médio e Convergência Dominada, Teorema 1.2, temos

$$\begin{aligned}
\langle \psi'(u), h\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi(u+th(x))-\psi(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\int_{\mathbb{R}^N} F(u+th)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(F(u+th)-F(u))}{t}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u+0.h)hdx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx.
\end{aligned}$$

Agora provaremos a continuidade de ψ'. Seja $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ quando $p \in [2, 2^*]$, então $u_n \to u$ em $L^{p_1} \cap L^{p_2}$. Usando o Lema 1.3, com $p = p_1$, $r = \frac{p_1}{p_1-1}$, $q = p_2$ e $s = \frac{p_2}{p_2-1}$, concluímos que $f(u)$ é contínua em $L^{\frac{p_1}{p_1-1}} + L^{\frac{p_2}{p_2-1}}$. Usando a Desigualdade de Hölder, Teorema 1.3, e a imersão de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), h\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)hdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n)-f(u))hdx\right|\\
&\leq C\|f(u_n)-f(u)\|_{p\bigvee q}\|h\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$|\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), h\rangle| \to 0 \quad \text{uniformemente em } \|h\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1.$$

Portanto, ψ' é contínua e ψ é de classe C^1. □

1.6 Teoria Espectral

1.6.1 Espectro de um operador autoadjunto

Definição 1.27. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear com domínio $D(A)$ denso em H. O operador $A^* : D(A^*) \subset H \to H$ é definido por*

$$v \in D(A^*) \Leftrightarrow \begin{cases} v \in H \text{ e existe um elemento } w \in H\\ \text{tal que } \langle Au, v\rangle = \langle u, w\rangle \ \forall u \in D(A)\end{cases}$$

e

$$A^*v = w \ \ \forall\ v \in D(A^*)$$

de forma que, pela densidade de $D(A)$ em H, w é único elemento associado a v pela definição de $D(A^*)$.

Vamos mostrar a unicidade de w. Suponha que exista outro $\overline{w}$ tal que $\langle Au, v\rangle = \langle u, \overline{w}\rangle$ para todo $u \in D(A)$. Então

$$\begin{aligned} \langle u, w\rangle - \langle u, \overline{w}\rangle &= 0 \\ \langle u, w - \overline{w}\rangle &= 0 \ \forall \ u \in D(A). \end{aligned}$$

Pela densidade de $D(A)$ em H existe uma subsequência $\{u_m\} \in D(A)$ tal que $u_m \to w - \overline{w}$. Dessa forma,

$$\langle u_m, w - \overline{w}\rangle = 0 \ \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos

$$\begin{aligned} \langle w - \overline{w}, w - \overline{w}\rangle &= 0 \\ \|w - \overline{w}\|^2 = 0 \Rightarrow w - \overline{w} &= 0, \end{aligned}$$

o que prova a unicidade de w.

Dizemos que o operador é autoadjunto quando $A = A^*$. Note que, se $A = A^*$, então $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ para todos $u, v \in D(A)$. Porém, essa equação não é o bastante para dizer que o operador é autoadjunto, pois podemos ter $D(A) \subset D(A^*)$. Segue disso que, se $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ para todos $u, v \in D(A)$ dizemos que o operador é simétrico, e se além disso $D(A) = D(A^*)$ o operador é chamado de autoajdunto.

Definição 1.28. *Dizemos que o operador B é uma extensão do operador A quando $D(A) \subset D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$. E quando a extensão é única, o operador é dito autoadjunto essencial.*

O operador A^* é fechado, pois dados $v_n \in D(A^*)$ tal que $v_n \to v$ em H e $A^* v_n \to f$ em H. Temos que

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^* v_n, u\rangle \ \ \forall \ u \in D(A).$$

Passando o limite, temos que

$$\langle v, Au\rangle = \langle f, u\rangle \ \ \forall \ u \in D(A).$$

Assim $v \in D(A^*)$ e $A^* v = f$. Isso mostra que A^* é contínua e pelo Teorema do Gráfico Fechado em Botelho [6], teremos que A^* é fechado. Além disso, temos que $\ker(A^*) = Im(A)^{\perp}$.

Lema 1.5. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador autoadjunto definido em um espaço de Hilbert real. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $A - \lambda I : D(A) \subset H \to H$ é um isomorfismo se, e somente se, existe $c > 0$ tal que $\|(A - \lambda I)u\| \geq c\|u\|$ para todo $u \in D(A)$.*

Demonstração. Se $A - \lambda I : D(A) \subset H \to H$ é um isomorfismo, temos que $(A - \lambda I)^{-1}$ é definido em H e é um operador fechado, pois $A : D(A) \subset H \to H$ é fechado e inversa de operador fechado é sempre fechado. Do Teorema do Gráfico Fechado, mostramos que $(A - \lambda I)^{-1} : H \to H$ é limitado e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|(A - \lambda I)^{-1} v\| \leq M\|v\| \ \forall \ v \in H.$$

Considere $v = (A - \lambda I)u$ para todo $v \in D(A)$, isso significa que $\|(A - \lambda I)u\| \geq \frac{1}{M}\|u\|$.

Por outro lado, se existe $c > 0$ tal que $\|(A - \lambda I)u\| \geq c\|u\|$ para todo $u \in D(A)$ teremos que $A - \lambda I : D(A) \subset H \to H$ é injetiva e que $(A - \lambda I)^{-1} : R(A - \lambda I) \to D(A - \lambda I) = D(A)$ é limitado. Visto que esse operador é fechado e limitado em seu domínio, então $R(A - \lambda I)$ deve ser um subespaço fechado de H. Temos que

$$[R(A - \lambda I)]^{\perp} = \ker(A - \lambda I)^{*}$$

em que $\ker(A - \lambda I)^{*} = \ker(A - \lambda I) = \{0\}$, pois $A - \lambda I$ é autoadjunto e injetivo. Portanto $R(A - \lambda I) = H$ pois $D(A)$ é denso e fechado. O que prova que $A - \lambda I : D(A) \subset H \to H$ é um isomorfismo. □

Definição 1.29. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador autoadjunto. Definimos o resolvente de A como o conjunto*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; A - \lambda I : D(A) \to H \ \textit{é um isomorfismo}\ \}$$

e o espectro de A como o conjunto

$$\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A).$$

Os elementos de $\rho(A)$ são chamados regulares de A. O especto pontual é dado pelo conjunto

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; \ \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

e seus elementos são chamados de autovalores de A. O espectro discreto de A é o conjunto

$$\sigma_d = \{\lambda \in \sigma_p(A); \dim \ker(A - \lambda I) < \infty \ \textit{e}\ \lambda \ \textit{é um ponto isolado de}\ \sigma_p(A)\}$$

e seu complemento em $\sigma(A)$ é chamado de espectro essencial de A, e denotador por

$$\sigma_e(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d(A).$$

1.6.2 Operador de Schrödinger

Nesta seção, apresentaremos o operador de Shcrödinger, suas propriedades e alguns resultados importantes. A íntegra dos resultados pode ser encontrada em [1] e [2].

Definição 1.30 (Operador de Schrödinger). *Dado $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, definimos o operador de Schrödinger $L : D(L) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ gerado pelo potencial V por*

$$D(L) = H^2(\mathbb{R}^N) \text{ e } Lu = -\Delta u + V(x)u \text{ para todo } u \in H^2(\mathbb{R}^N).$$

Agora, enunciaremos um lema que será utilizado na demonstração do próximo teorema.

Lema 1.6. *Sejam $v, w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$\int v\Delta z dx = \int wz dx \ \forall \ z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Então, $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$ e $\Delta v = w$.

Teorema 1.14. *Para $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, o operador de Schrödinger $L : D(L) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ gerado pelo potencial V é autoadjunto.*

Demonstração. Afirmamos que $H^2(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Para provar isso, devemos mostrar que para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ existe uma sequência $u_n \in H^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \overset{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\longrightarrow} u$. Temos que $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{L^2(\mathbb{R}^N)} = L^2(\mathbb{R}^N)$. Dessa igualdade, temos que para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Por outro lado, $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset H^2(\mathbb{R}^N)$ e então $u_n \in H^2(\mathbb{R}^N)$. E assim, provamos nossa afirmação. Dessa forma, o operador de Schrödinger $L^* : D(L^*) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ está bem definido. Além disso, para todo $u, v \in H^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (Lu)v \ dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u + Vu)v \ dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta uv + Vuv) \ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta vu + Vvu) \ dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta v + Vv)u \ dx \end{aligned}$$

onde $-\Delta v + Vv \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Isso mostra que $H^2(\mathbb{R}^N) \subset D(L^*)$ e que $L^*v = -\Delta v + Vv = Lv$ para todo $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, se $v \in D(L^*)$, então $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e existe um elemento $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (Lu)v \ dx = \int_{\mathbb{R}^N} uw \ dx \ \forall u \in D(L) = H^2(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u + Vu)v \ dx = \int_{\mathbb{R}^N} uw \ dx \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(\Delta u)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} (Vv - w)u\,dx \;\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

onde v e $(Vv - w) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 1.6, $\Delta v = Vv - w$. E isso mostra que $D(L^*) \subset H^2(\mathbb{R}^N)$. O que completa a prova. □

Definiremos, agora, o número Λ que desempenha um papel fundamental, pois caracteriza o menor valor do espectro de L. Para qualquer $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, considere

$$\Lambda = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx : u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx = 1\right\}.$$

O próximo resultado mostra que o espectro do operador L nunca é vazio e, além disso, caracteriza seu ínfimo, relacionando com o número Λ.

Teorema 1.15. *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então,*

(i) $\sigma(L) \subset [\Lambda, +\infty)$*;*

(ii) $\Lambda \in \sigma(L)$*;*

Em particular $\Lambda = \inf \sigma(L)$.

Lema 1.7. *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então,*

(1) $\Lambda \geq -\|V\|_\infty > -\infty$.

(2)

$$\Lambda = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx = 1\right\}$$

e também temos

$$\Lambda = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} (Lu)u\,dx : u \in H^2(\mathbb{R}^N) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx = 1\right\}.$$

(3) Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *com* $\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx = 1$ *e* $\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx = \Lambda$*, então* $u \in H^2(\mathbb{R}^N), u \in \ker(L - \Lambda I)$ *e* $\Lambda \in \sigma_p(L)$.

Lema 1.8. *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para $\varepsilon > 0$, seja X um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx \leq (l - \varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx \;\forall\, u \in X. \tag{1.7}$$

Então, $\dim X < \infty$.

Definição 1.31 (Supremo e Ínfimo Essencial)**.** *Seja f um funcional, definimos supremo essencial como*

$$ess\sup f := \inf\{a \in \mathbb{R};\ \mu(x : f(x) > a) = 0\}.$$

E o ínfimo essencial como

$$ess\inf f := \sup\{b \in \mathbb{R};\ \mu(x : f(x) < b) = 0\}.$$

Teorema 1.16. *Seja $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$*

(i) Então $\sigma_e(L) \subset [l, \infty)$;

(ii) Se $\lim\limits_{R\to\infty} ess \sup\limits_{|x|\geq R} |V(x) - l| = 0$, então $\sigma_e(L) = [l, \infty)$.

Teorema 1.17. *Seja $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ e considere $\xi < l$ em que $l = \lim\limits_{R\to\infty} ess \inf\limits_{|x|\geq R} V(x)$. Para cada $\mu \in (0, \sqrt{l-\xi})$, existe uma constante C, dependendo de ξ e de μ, tal que*

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{\infty} e^{-\mu|x|}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ desde que $u \in \ker(L - \lambda I)$ para algum $\lambda \leq \xi$.

Teorema 1.18. *Se uma função mensurável localmente limitada $V(x)$ é tal que $\liminf\limits_{|x|\to\infty} V(x) \geq l$, então o operador $L = -\Delta + V(x)$ é semi-limitado inferiormente e tem um espectro discreto em $(-\infty, l)$, de modo que para qualquer $\varepsilon > 0$ o espectro de L em $(-\infty, l-\varepsilon)$ consiste num número finito de autovalores de multiplicidade finita.*

Para demonstrar esse teorema se faz necessário enunciar o seguinte Lema:

Lema 1.9. *Se $\liminf\limits_{|x|\to\infty} V(x) \geq a$ e $u \in D(L)$, então*

$$\langle Lu, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)\ dx < \infty.$$

Demonstração do Teorema 1.18. Vamos provar que, para $\varepsilon > 0$, a dimensão do subespaço

$$S := \{u \in D(L); \langle Lu, u\rangle \leq (l-\varepsilon)\|u\|^2\}$$

é finita. Pelo Lema 1.9, esta desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx &\leq (l-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \\
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx - (l-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}}^{N} |u|^2 dx &\leq 0 \\
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + (V(x) - l + \varepsilon)|u|^2)dx &\leq 0, \quad u \in S.
\end{aligned}$$

Sejam $R > 0$ tal que $V(x) \geq l - \frac{\varepsilon}{2}$ para $|x| \geq R$ e $V(x) \geq m$ para todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Então,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{|x|\leq R} (|\nabla u|^2 + (V(x) - l - \varepsilon)|u|^2)dx + \int_{|x|>R} (|\nabla u|^2 + (V(x) - l - \varepsilon)|u|^2)dx \\
&\geq \int_{|x|\leq R} (|\nabla u|^2 + (m - l + \varepsilon)|u|^2)dx + \int_{|x|>R} (|\nabla u|^2 + (l - \frac{\varepsilon}{2} - l + \varepsilon)|u|^2)dx \\
&= \int_{|x|\leq R} (|\nabla u|^2 + (m - l + \varepsilon)|u|^2)dx + \int_{|x|>R} (|\nabla u|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|u|^2)dx
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^2 dx + \int_{|x|>R} [|\nabla u|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|u|^2]dx \leq C \int_{|x|\leq R} |u|^2 dx, \quad u \in S,$$

se $C \geq 0$ e $C \geq l - m - \varepsilon$. Seja B o operador restrição da função de S na bola $K_R = \{x : |x| \leq R\}$, ou seja $B : S \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(K_R)$. Esse operador é contínuo em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e injetivo pela última estimativa. Para provar que S tem dimensão finita, vamos mostrar que o subconjunto BS, que é o operador B aplicado no conjunto S, tem dimensão finita. Segue da última estimativa que $\|u\|_{H^1(K_R)} \leq C\|u\|_{L^2(K_R)}, u \in BS$. Além disso, $H^1 \subset\subset L^2(K_R)$. Dessa forma, a bola unitária no espaço $BS \cap L^2(K_R)$ é compacta. Portanto, BS tem dimensão finita e, como B é injetivo, podemos concluir que S tem dimensão finita.

□

1.7 Princípio de Concentração-Compacidade de Lions

O objetivo desta seção é enunciar e provar o Lema de Lions que será utilizado em alguns teoremas importantes no decorrer do trabalho. Além deste, ainda teremos mais dois lemas que completam o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions. Entre eles, o Lema Splliting que tem uma grande importância na demonstração do teorema principal.

Lema 1.10 (Lema de Lions)**.** *Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, \quad n \to \infty$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Consideremos o caso $N \geq 3$. Seja $q < s < 2^*$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela

Desigualdade de Interpolação, Teorema 1.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{B(y,r)} |u|^s dx &= \int_{B(y,r)} |u|^{(1-\lambda)s}|u|^{\lambda s} dx \\
&\leq \left(\int_{B(y,r)} (|u|^{(1-\lambda)s})^{\frac{q}{(1-\lambda)s}} dx\right)^{\frac{(1-\lambda)s}{q}} \left(\int_{B(y,r)} (|u|^{\lambda s})^{\frac{2^*}{\lambda s}} dx\right)^{\frac{\lambda s}{2^*}} \\
&= \left(\int_{B(y,r)} |u|^q dx\right)^{\frac{(1-\lambda)s}{q}} \left(\int_{B(y,r)} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{\lambda s}{2^*}} \\
&= \|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B(y,r))} \|u\|^{\lambda s}_{L^{2^*}(B(y,r))}
\end{aligned}
$$

em que $\dfrac{1}{\frac{q}{(1-\lambda)s}} + \dfrac{1}{\frac{2^*}{\lambda s}} = 1$. Segue dessa igualdade que

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-\lambda)s}{q} + \frac{\lambda s}{2^*} = 1 &\Rightarrow \frac{2^*(s-\lambda s) + q\lambda s}{q.2^*} = 1 \\
2^*s - 2^*\lambda s + q\lambda s = q.2^* &\Rightarrow \lambda(qs - 2^*s) = q.2^* - 2^*s \\
\lambda = \frac{q-s}{q-2^*}.\frac{2^*}{s}
\end{aligned}
$$

Agora, usando a desigualdade de Sobolev, temos que

$$
\int_{B(y,r)} |u|^s dx \leq C\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B(y,r))} \left(\int_{B(y,r)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx\right)^{\frac{\lambda}{2}s}.
$$

Fazendo $\lambda = \frac{2}{s}$, obtemos

$$
\int_{B(y,r)} |u|^s dx \leq C\|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B(y,r))} \int_{B(y,r)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx.
$$

Cobrindo $\mathbb{R}^N$ por bolas de raio r, de modo que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ está contido no máximo em $N+1$ bolas, tem-se

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \leq (N+1)C \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u|^q\right]^{\frac{(1-\lambda)s}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx.
$$

Segue disso que, dada uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^s dx \leq (N+1)C \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u_n|^q\right]^{\frac{(1-\lambda)s}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dx
$$

e fazendo $n \to \infty$, teremos que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. A prova quando $2 < s < q$ é feita de forma análoga. Dessa forma, como $2 < s < 2^*$, pelas desigualdades de Hölder, Teorema

1.3, e Sobolev temos que $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$. $\square$

1.8 Existência de Solução *Ground States*

Nesta seção, apresentaremos um resultado de grande importância apresentado por Berestycki e Lions em [7] e que será utilizado para garantir a existência de uma solução com propriedades boas para o problema limite ainda a ser enunciado.

Considere o problema

$$-\Delta u = g(u) \text{ } em \text{ } \mathbb{R}^N, \; u \in H^1(\mathbb{R}^N), \; u \neq 0. \tag{1.8}$$

A função g satisfaz as seguintes condições:

(i) $-\infty < \liminf\limits_{s\to 0^+} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup\limits_{s\to 0^+} \dfrac{g(s)}{s} = -m < 0$;

(ii) $-\infty \leq \limsup\limits_{s\to 0^+} \dfrac{g(s)}{s^l} \leq 0$, em que $l = \dfrac{N+2}{N-2}$;

(iii) Existe $\varsigma > 0$ tal que $G(\varsigma) = \displaystyle\int_0^{\varsigma} g(s)ds > 0$.

Teorema 1.19. *Suponhamos que $N \geq 3$ e que g satisfaz as condições de (i) a (iii). Então o problema (1.8) tem uma solução u tal que*

(a) $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$;

(b) u é radial, isto é, $u(x) = u(r)$ em que $r = |x|$ e u é decrescente com respeito a r;

(c) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$;

d u e a derivada de ordem 2 tem decaimento exponencial no infinito:

$$|D^\alpha u(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, x \in \mathbb{R}^N$$

para algum $C, \delta > 0$ e $|\alpha| \leq 2$.

Capítulo 2

Problema Variacional Indefinido Não Periódico e Assintoticamente Linear

Vamos considerar o problema elíptico

$$(\mathrm{P}) \qquad -\Delta u + V(x)u = f(u) \quad x \in \mathbb{R}^N$$

com um potencial V contínuo, não-periódico que muda de sinal, com um limite assintótico V_∞ no infinito e uma função f assintoticamente linear no infinito. Com o intuito de aplicarmos o Teorema de Linking sob a condição de Cerami, abordado no Apêndice A, usaremos uma solução de energia mínima positiva u_0 do problema limite

$$(P_\infty) \qquad -\Delta u + V_\infty u = f(u) \quad x \in \mathbb{R}^N$$

projetada em um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ de dimensão infinita com codimensão finita. Para o problema (P), consideraremos $N \geq 3, u \in E := H^1(\mathbb{R}^N)$ e o potencial V satisfazendo as seguintes condições:

$$(V_1) \qquad V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \; e \; -V_0 \leq V(x) < V_\infty, \; com \; V_0, V_\infty > 0;$$

$$(V_2) \qquad \lim_{|x| \to \infty} V(x) = V_\infty;$$

$$(V_3) \qquad 0 \notin \sigma(L) \; e \; \inf \sigma(L) < 0, \text{ em que } \sigma(L) \text{ é o espectro do operador } L = -\Delta + V$$

$$(V_4) \qquad V(x) \leq V_\infty - C_1 e^{-\gamma|x|}, \text{ em que } C_1 > 0 \; e \; 0 < \gamma < \sqrt{V_\infty}.$$

As condições que consideramos na não-linearidade de f são as seguintes:

$$(f_1) \qquad f \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ e \ \lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s} = 0;$$

$$(f_2) \qquad \lim_{|s|\to\infty}\frac{|f(s)|}{|s|} = m > V_\infty \ e \ |f(s)|/|s| < m \ \forall s \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$$

$$(f_3) \qquad Se \ F(s) := \int_0^s f(t)dt \ e \ Q(s) := \frac{1}{2}f(s)s - F(s); \text{ então, para todo } s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$F(s) \geq 0, \quad Q(s) > 0 \ e \ \lim_{s\to\infty} Q(s) = +\infty$$

(f_4) *Existem* $C_2 > 0$ *e* $1 < p_1 \leq p_2$ tais que $p_1, p_2 < 2^* - 1$ *e* $|f^{(k)}(s)| \leq C_2(|s|^{p_1-k} + |s|^{p_2-k})$

para $k \in \{0,1,2,3\}$ e $s \in \mathbb{R}$;

(f_5) A função $s \mapsto f(s)/s$ é crescente em $s \in (0,+\infty)$.

Observação 2.1. *A função $f \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ na condição (**??**) pode ser utilizada quando $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e a condição (**??**) pode ser considerada apenas para $k \in \{0,1\}$ como feitos nos artigos de Elson-Maia e Katib-Maia.*

Exemplo 2.1. *Considere $f(s) = \frac{ms^3}{1+s^2}, s \in \mathbb{R}$ com $m > V_\infty$. Vamos mostrar que f satisfaz as hipóteses (f_1) - (f_5).*

Note que $\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{ms^3}{1+s^2}.\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{ms^2}{1+s^2} = 0$, ou seja, a condição (f_1) é satisfeita. Também temos que

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{|f(s)|}{|s|} = \lim_{|s|\to\infty}\left|\frac{ms^3}{1+s^2}\right|\frac{1}{|s|} = \lim_{|s|\to\infty} m\frac{|s|^3}{|1+s^2|}.\frac{1}{|s|} = m$$

e

$$\frac{|f(s)|}{|s|} = \left|\frac{ms^3}{1+s^2}\right|\frac{1}{|s|} = \frac{m|s|^3}{|1+s^2|}.\frac{1}{|s|} = m\frac{|s|^2}{|1+s^2|} < m, \ pois \ \frac{|s|^2}{|1+s^2|} < 1, \forall \ s \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

então, a condição (f_2) é satisfeita.

Para mostrar a condição (f_3), devemos determinar $F(s)$ e $Q(s)$. Note que

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt = \int_0^s \frac{mt^3}{1+t^2}dt = \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1)),$$

$$Q(s) = \frac{1}{2}f(s)s + F(s) = \frac{1}{2}(\frac{ms^3}{1+s^2})s + \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1))$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{ms^4}{1+s^2}) + \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1))$$

passando $Q(s)$ ao limite quando $s \to \infty$ temos

$$\lim_{s\to\infty} Q(s) = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{2}(\frac{ms^4}{1+s^2}) + \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1))\right] = \infty.$$

Temos que $\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s} = 0$. Assim, se $3 - p_1 > 0$ temos que $\lim_{s\to 0}\frac{|f(s)|}{|s|^{p_1}} = 0$. Também temos que $\lim_{|s|\to\infty}\frac{|f(s)|}{|s|} = m$. Dessa forma, para $1 \leq p_2 \leq 2^* - 1, p_2 > 3$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $|f(s)| \leq \varepsilon|s|^{p_1} + C_\varepsilon|s|^{p_2}$. Faça $C = \max\{\varepsilon, C_\varepsilon\}$ e então

$$|f(s)| \leq C(|s|^{p_1} + |s|^{p_2}).$$

Para $k = 1$ teremos que

$$|f^{(1)}(s)| = |f'(s)| \leq C(|s|^{p_1-1} + |s|^{p_2-1}),$$

e de forma análoga, quando $k = 2, 3$ tem-se

$$|f^{(2)}(s)| \leq C(|s|^{p_1-2} + |s|^{p_2-2})$$
$$|f^{(3)}(s)| \leq C(|s|^{p_1-3} + |s|^{p_2-3})$$

2.1 Abordagem Variacional

Voltando ao problema (P). Considere uma sequência $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_k \to v \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e seja $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ uma solução clássica, temos

$$-\Delta u v_k + V(x)uv_k = f(u)v_k$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N}\Delta u v_k dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv_k dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v_k dx$$

Aplicando a fórmula de Green ([18], Theorem 3, Appendix C) resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v_k dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv_k dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v_k dx. \tag{2.1}$$

Quando $k \to \infty$, temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v_k\, dx - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v\, dx\right| \to 0.$$

Com efeito, segue da desigualdade de Hölder, Teorema 1.3, que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v_k dx - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla v_k - \nabla u\nabla v)dx\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla v_k - \nabla u \nabla v| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u (\nabla v_k - \nabla v)| dx \\
&\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v_k - \nabla v\|_2 \\
&\leq \|\nabla u\|_2 \|v_k - v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Também temos $\left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u v_k \; dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u v \; dx \right| \to 0$ quando $k \to \infty$. Usando mais uma vez a desigualdade de Hölder, Teorema 1.3, e imersão de Sobolev, resulta que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u v_k \; dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u v \; dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |V(x) u v_k - V(x) u v| dx \\
&\leq \|V(x) u\|_2 \|v_k - v\|_2 \\
&\leq \|V(x) u\|_2 \|v_k - v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $k \to \infty$ na equação (2.1) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \; dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u v \; dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u) v \; dx \\
\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x) u v) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u) v \; dx
\end{aligned}
$$

Esta última igualdade representa a formulação fraca para o problema (P). Associaremos à equação (P) um funcional energia $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$
I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx
$$

com $u \in E$. A solução fraca do problema (P) será uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que é ponto crítico do funcional energia definido acima.

Segue das condições (V_2) e (V_3) que os autovalores do problema de autovalor

$$
-\Delta u + V(x) u = \lambda u, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N) \tag{2.2}
$$

tem uma sequência de autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$. Fazendo $\varepsilon = V_\infty > 0$ no Teorema 1.18 temos que o espectro de $-\Delta + V(x)$ em $(-\infty, 0)$ possui uma quantidade finita de autovalores. Ou seja, o problema de autovalor (2.2) possui uma sequência finita de autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_k < 0$, com multiplicidade finita.

Denote por ϕ_i a autofunção correspondente a λ_i, $i = \{1, 2, \ldots, k\}$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Considere $E^- := span\{\phi_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$ e $E^+ := (E^-)^\perp$, podemos ver que $E = E^+ \oplus E^-$. Pelo Teorema 1.16, o espectro essencial de $-\Delta + V(x)$ está contido no intervalo $[V_\infty, +\infty)$. Logo $\dim E^- < \infty$, pois para cada $\lambda_i < 0$ tem multiplicidade finita.

Agora apresentaremos outra forma de provar essa mesma afirmação. Vamos supor que $\dim E^- = \infty$. Dado $\xi < V_\infty$, então podemos escolher uma sequência de autofunções $\{\phi_{i_n}; n \in \mathbb{N}\}$

tal que

$$\phi_{i_n} \in \ker(-\Delta + V(x) - \lambda_n I);\ \|\phi_{i_n}\|_2 = 1 \ e \ \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{i_n}\phi_{i_m}\ dx = 0 \ \ \forall\ m,n \in \mathbb{N}\ com\ m \neq n.$$

Teremos que $\{\phi_{i_n}; n \in \mathbb{N}\}$ são linearmente independente, pois $\dim E^- = \infty$. Por outro lado, para cada $g \in E^-$, existe um número finito de números reais $c_1, \cdots, c_k$ tal que

$$g = \sum_{n=1}^{k} c_n \phi_{i_n}.$$

Portanto, $\phi_{i_n} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla g|^2 + Vg^2)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta g + Vg)g dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{m=1}^{k} c_m \lambda_m \phi_{i_m}\right)\left(\sum_{n=1}^{k} c_n \phi_{i_n}\right) dx \\
&= \sum_{m,n=1}^{k} c_m c_n \lambda_m \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{i_m}\phi_{i_n} dx \\
&= \sum_{n=1}^{k} \lambda_n c_n^2 \leq \xi \sum_{n=1}^{k} c_n^2 = \xi \int_{\mathbb{R}^N} g^2 dx.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.8, temos que $\dim E^- < \infty$. O que é uma contradição.

Tendo feito essas considerações, toda função $u \in E$ pode ser escrita como $u = u^+ + u^-$ de forma única, onde $u^+ \in E^+ \ e \ u^- \in E^-$. Pela condição (V_3) temos que $0 \notin \sigma(\Delta + V)$, assim, pelo Lema 1.2 de Costa-Tehrani [3], podemos introduzir um novo produto interno em E,

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx & se\ u, v \in E^+ \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx & se\ u, v \in E^- \\ 0 & se\ u \in E^+\ e\ v \in E^- \end{cases}$$

tal que a norma correspondente $\|\cdot\|$ é equivalente a $\|\cdot\|_E$ norma usual em $E = H^1(\mathbb{R}^n)$, $\|u\|_E = (|u|_2^2 + |\nabla u|_2^2)^{1/2}$. Além do mais, o funcional I pode ser escrito como

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \tag{2.3}$$

para toda função $u = u^+ + u^- \in E$. Quando estivermos considerando V_∞, denotaremos a norma da seguinte maneira:

$$\|u\|_{V_\infty} = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)dx \tag{2.4}$$

de tal forma que é equivalente a norma $\|\cdot\|$. Chamamos a atenção para o fato de que, como

$\lambda_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ segue de (P) e pela definição de ϕ_i que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^+(x)v^-(x)dx = 0$$

para toda função $u^+ \in E^+$ e $v^- \in E^-$. De fato, para todo $u \in E^+$ e $v \in E^-$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv)dx = 0,$$

pois $E^+ = (E^-)^\perp$. Por Costa-Tehrani [3], se $u \in E^+$ e $v \in E^-$ tem-se

$$\begin{aligned} \|u\|^2 - \|v\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u+v)|^2 + V(x)(u+v)^2)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)dx. \end{aligned}$$

E isso implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx = 0 \tag{2.5}$$

Da equação (2.2) temos que

$$-\Delta\phi_i + V(x)\phi_i = \lambda_i\phi_i \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\phi_i \nabla u + V(x)\phi_i u)dx = \lambda_i \int_{\mathbb{R}^N} \phi_i u \; dx, \quad \forall\; u \in E^+.$$

Pela igualdade (2.5), para $\lambda_i \neq 0$ temos $\int_{\mathbb{R}^N} \phi_i u \; dx = 0$ e assim, por linearidade, $\int_{\mathbb{R}^N} uv \; dx = 0,\; u \in E^+,\; v \in E^-$.

Com isso, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} uv \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \; dx = 0.$$

Capítulo 3

Limitação da Sequência de Cerami

Nesta seção, apresentaremos de forma breve a definição de Sequência de Cerami, que será abordada com mais detalhes no Apêndice A, também enunciaremos e provaremos o Lema que garante a limitação dessa sequência em E, o que será de grande importância para a demonstração do resultado principal desse trabalho.

Dado $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, dizemos que um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami (C) se cada sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $|I(u_n)| < M$ para alguma constante $M > 0$, e $\|I'(u_n)\|_{E^*}(1 + \|u_n\|) \to 0$ tem uma subsequência $u_{n_k} \to u$ em X.

Como consequência das hipóteses (f_1) - (f_3) temos que, dado $\varepsilon > 0$ e $2 \leq p \leq 2^*$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq \varepsilon|s|^2 + C_\varepsilon|s|^p \quad e \quad |f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1}. \tag{3.1}$$

De fato, de (f_1) existe $0 < r < 1$ tal que, para $|s| < r$ temos

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0 \Rightarrow \left|\frac{f(s)}{s}\right| < \varepsilon \Rightarrow |f(s)| < \varepsilon|s|.$$

Para $|s| > r$, de (f_2) temos que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{|f(s)|}{|s|} = m \Rightarrow \left|\frac{f(s)}{s}\right| < m \Rightarrow |f(s)| < m|s|.$$

Note que,

$$|s| = \frac{1}{|s|^{p-2}}|s|^{p-1} \leq \overline{C}_\varepsilon|s|^{p-1} \text{ em que } \overline{C}_\varepsilon = \max_{r\leq s\leq 1}\left\{\frac{1}{|s|^{p-2}}\right\}.$$

Assim, temos

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + m|s| \leq \varepsilon|s| + m\overline{C}_\varepsilon|s|^{p-1} = \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1}.$$

Segue de (f_3) que,

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \Rightarrow |F(s)| \leq \int_0^s |f(t)|dt = \int_0^s (\varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1})dt$$

$$\leq \varepsilon|s|^2 + C_\varepsilon|s|^p.$$

Antes de enunciarmos o próximo resultado enunciaremos o seguinte Lema, que é um dos resultados do Princípio de Compacidade de Lions.

Lema 3.1. *Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em E, então $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz um dos seguintes casos:*

(i) Vanishing: para todo $r > 0$, $\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx = 0$.

ou

(ii) Nonvanishing: existem $r, \eta > 0$ e uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ tais que $\limsup_{n\to\infty} \int_{B(y_n,r)} |v_n|^2 dx > \eta$.

Demonstração. Mostraremos que, se o primeiro item não for satisfeito, então, consequentemente, o segundo item será válido. Para tanto, suponhamos que exista $r > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx \neq 0.$$

Então, pelas propriedades de limite superior, existe $M > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ tem-se

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx \geq M.$$

Isso implica que existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$M - \frac{1}{n} < \int_{B(y_n,r)} |v_n|^2 dx.$$

Considerando $\eta = \frac{M}{2} > 0$ e tomando o $\limsup$ acima, obtemos

$$\eta < \limsup_{n\to\infty} \int_{B(y_n,r)} |v_n|^2 dx.$$

Como queríamos. □

Lema 3.2. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência tal que*

$$I(u_n) \to c > 0 \text{ e } \|I'(u_n)\|_{E^*}(1 + \|u_n\|) \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência limitada.

Demonstração. Suponha por contradição que $\|u_n\| \to \infty$. Considere $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, logo $\|v_n\| = 1$. A sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, contudo, vamos mostrar que tanto (i) quanto (ii), do Lema 3.1, não serão válidas. Primeiro suponha que o item (ii) seja válido. Escreva $f(s) = ms + (f(s) - ms) = ms + f_\infty(s)$. Pela equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_E$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|w\| \leq C_1\|w\|_E \leq C_2\|w\| \text{ para toda função } w \in E. \tag{3.2}$$

Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ a sequência dada pelo item (ii) do Lema 3.1. Como a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami, e considerando $\phi_n = \phi(x - y_n)$ para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, segue da estimativa (3.2) que

$$
\begin{aligned}
|I'(u_n)\phi_n| &\leq \|I'(u_n)\|_{E^*}\|\phi_n\| \leq C_1\|I'(u_n)\|_{E^*}\|\phi_n\|_E \\
&= C_1\|I'(u_n)\|_{E^*}\|\phi\|_E \to 0.
\end{aligned}
$$

De $\|u_n\| \to \infty$, a medida do conjunto $\Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^N; |u_n(x)| \neq 0\}$ é positiva para n suficientemente granfe. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
o_n(1) &= \frac{1}{\|u_n\|}I'(u_n)\phi_n = \frac{1}{\|u_n\|}\left(\langle u_n^+ - u_n^-, \phi_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\phi_n dx\right) \\
&= \langle v_n^+ - v_n^-, \phi_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{\|u_n\|}\phi_n dx = \langle v_n^+ - v_n^-, \phi_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{mu_n + f_\infty(u_n)}{\|u_n\|}\phi_n dx \\
&= \langle v_n^+ - v_n^-, \phi_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} mv_n\phi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_\infty(u_n)}{\|u_n\|}\phi_n dx \\
&= \langle v_n^+ - v_n^-, \phi_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} mv_n\phi_n dx - \int_{\Omega_n} \frac{f_\infty(u_n)}{\|u_n\|}\phi_n dx - \int_{\Omega_n^c} \frac{f_\infty(u_n)}{\|u_n\|}\phi_n dx \\
&= \langle v_n^+ - v_n^-, \phi_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} mv_n\phi_n dx - \int_{\Omega_n} \frac{f_\infty(u_n)}{u_n}v_n\phi_n dx.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Considere $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$ e $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$. Note que $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E. De fato, de (3.2) segue que

$$
\|\tilde{v}_n\| \leq C_1\|\tilde{v}_n\|_E = C_1\|v_n\|_E \leq C_2\|v_n\| = C_2.
$$

Passando a uma subsequência, temos que

$$
\begin{cases}
\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v} \ em \ E \\
\tilde{v}_n \to \tilde{v} \ em \ L^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \\
\tilde{v}_n(x) \to \ \tilde{v}(x) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.
\end{cases} \tag{3.4}
$$

Seja $K = supp(\phi)$. Pelas hipóteses (f_1) e (f_2), $|f(\cdot)|/|\cdot|$ é uma função limitada em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ com $|f(s)/|s| \leq m, \forall\ s \neq 0$. De (3.4) e pelo Teorema 1.5, existe uma função $h \in L^1(K)$ tal que $|\tilde{v}_n(x)| \leq h(x)$ em quase todo ponto em K. Relembrando que $f_\infty(s) = f(s) - ms$, obtemos

$$
\left|\frac{f_\infty(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n}\tilde{v}_n\phi\right| = \frac{|f_\infty(\tilde{u}_n)|}{|\tilde{u}_n|}||\tilde{v}_n||\phi| \leq 2mh(x)\phi \in L^1(K). \tag{3.5}
$$

Notemos que $\tilde{v} \neq 0$, do item (ii) do Lema 3.1 e das estimativas (3.4)

$$
\int_{B(0,r)} \tilde{v}^2 dx = \lim_{n\to\infty}\int_{B(0,r)} \tilde{v}_n^2 dx = \limsup_{n\to\infty}\int_{B(0,r)} \tilde{v}_n^2 dx = \limsup_{n\to\infty}\int_{B(y_n,r)} v_n^2 dx > \eta > 0.
$$

Pela hipótese (f_1), $f_\infty(s)/s \to 0$ se $|s| \to \infty$, da desigualdade (3.5) e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue 1.2, segue que

$$\begin{aligned} \text{(3.6)} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_\infty(u_n)}{u_n} v_n \phi_n dx &= \int_K \frac{f_\infty(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n} \tilde{v}_n \phi dx \\ &= \int_K \frac{f_\infty(\tilde{v}_n \|\tilde{u}_n\|)}{\tilde{v}_n \|\tilde{u}_n\|} \tilde{v}_n \phi dx \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Assim, das estimativas (3.3), (3.4), (3.6) e do Teorema de Mudança de Variável, temos

$$\begin{aligned} \text{(3.7)} \qquad o_n(1) &= \frac{1}{\|u_n\|} I'(u_n)\phi_n \\ &= \langle v_n^+ - v_n^-, \phi_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \phi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_\infty(u_n)}{\|u_n\|} \phi_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n^+ \nabla \phi_n + V(x) v_n^+ \phi_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n^- \nabla \phi_n + V(x) v_n^- \phi_n) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \phi_n dx + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n^+ \nabla \phi(x-y_n) + V(x) v_n^+ \phi(x-y_n)) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n^- \nabla \phi(x-y_n) + V(x) v_n^- \phi(x-y_n)) dx - \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \phi(x-y_n) dx + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n^+(x+y_n) \nabla \phi(x) + V(x+y_n) v_n^+(x+y_n) \phi(x) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n^-(x+y_n) \nabla \phi(x) + V(x+y_n) v_n^-(x+y_n) \phi(x)) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} m v_n(x+y_n) \phi(x) dx + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \tilde{v}_n^+ \nabla \phi + V(x+y_n) \tilde{v}_n^+ \phi) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \tilde{v}_n^- \nabla \phi + V(x+y_n) \tilde{v}_n^- \phi) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} m \tilde{v}_n \phi dx \end{aligned}$$

Agora vamos analisar os possíveis casos para a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Caso 1: $|y_n| \to \infty$.

Nesse caso, a hipótese (V_2) garante que $V(x+y_n)$ converge para V_∞ em quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$. Da igualdade (3.7) temos

$$\begin{aligned} \text{(3.8)} \qquad o_n(1) &= \int_K (\nabla \tilde{v}_n^+ \nabla \phi + (V_\infty + o_n(1)) \tilde{v}_n^+ \phi) dx \\ &+ \int_K (\nabla \tilde{v}_n^- \nabla \phi + (V_\infty + o_n(1)) \tilde{v}_n^- \phi) dx - \int_K m \tilde{v}_n \phi dx \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ em $o_n(1)$ e relembrando as estimativas (3.4), então para cada função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(\tilde{v}^+ - \tilde{v}^-) \nabla \phi + V_\infty(\tilde{v}^+ - \tilde{v}^-)\phi) dx - \int_{\mathbb{R}^N} m \tilde{v} \phi dx = 0$$

isto é, $\tilde{v} \neq 0$ é uma solução fraca do problema $-\Delta \tilde{v} + V_\infty \tilde{v} = m\tilde{v}$ em $\mathbb{R}^N$. Como $V_\infty \neq m$ e não existe uma autofunção do Laplaciano em $\mathbb{R}^N$, isso é uma contradição. Portanto, o item (ii) do Lema 3.1 não é verdade neste caso.

Caso 2: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Pela estimativa (3.2), temos

$$\|\tilde{u}_n\| \geq \frac{C_1}{C_2}\|\tilde{u}_n\|_E = \frac{C_1}{C_2}\|u_n\|_E \geq \frac{1}{C_2}\|u_n\|,$$

que tende para o infinito quando $n \to \infty$. Segue das estimativas (3.4) que

$$0 \neq |\tilde{v}(x)| = \lim_{n\to\infty} |\tilde{v}_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{u}_n(x)|}{\|\tilde{u}_n\|} \text{ em quase todo ponto em } \Omega$$

com $\mu(\Omega) > 0$ e $\Omega \subset B(0,r)$. Como $\|\tilde{u}_n\| \to \infty$, temos que $\tilde{u}_n(x) \to \infty$ em quase todo ponto em Ω. Então, o Lema de Fatou 1.2 e a hipótese (f_3) nos dão

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx \\
&\quad = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - F(\tilde{u}_n)\right) dx \\
&\quad \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - F(\tilde{u}_n)\right) dx \\
&\quad \geq \int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - F(\tilde{u}_n)\right) dx \\
&\quad = +\infty
\end{aligned}$$

No entanto, isso contradiz o fato de que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n = c + o_n(1).$$

Importante ressaltar que, essa igualdade é válida pois estamos considerando $(u_n)_{u\in\mathbb{N}}$ como uma sequência de Cerami. Caso estivéssemos considerando como uma sequência de Palais-Smale essa igualdade não seria verdadeira. Portanto, o Caso 2, não é válido para a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implicando que o item (ii) do Lema 3.1 não se aplica à sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por outro lado, suponha que o item (i) do Lema 3.1 seja satisfeito para a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami, temos que $I'(u_n)u_n^- \to 0$ e $I'(u_n)u_n^+ \to 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= I'(u_n)\frac{u_n^+}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{\|u_n\|}I'(u_n)v_n^+ \\
&= \frac{1}{\|u_n\|}(\langle u_n^+ - u_n^-, v_n^+\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^+ dx) \\
&= \|v_n^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n v_n^+\right) dx
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e, de forma análoga,

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} o_n(1) = I'(u_n)\frac{u_n^-}{\|u_n\|^2} &= \frac{1}{\|u_n\|}I'(u_n)v_n^- \\ &= -\|v_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_nv_n^-\right)dx. \end{aligned}$$

Subtraindo a equação (3.10) de (3.9), temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \|v_n^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_nv_n^+\right)dx + \|v_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_nv_n^-\right)dx \\ &= \|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx \\ &= \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx \\ &= 1 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(3.11) \qquad \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx \to 1.$$

Pela imersão de Sobolev, existe uma constante $\mu_0 > 0$ tal que

$$(3.12) \qquad \|w\|^2 \geq \mu_0\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

para qualquer $w \in E$. Dado $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\mu_0$, pela hipótese (f_1), existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(s)|}{|s|} < \varepsilon \ para \ 0 \neq |s| < \delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $\tilde{\Omega}_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| < \delta\}$. Então, da estimativa (3.12) e pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.3,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}_n}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx &\leq \varepsilon\int_{\tilde{\Omega}_n}|v_n||v_n^+ - v_n^-|dx \\ &\leq \varepsilon(\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_n^+\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_n^-\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}) \\ &\leq 2\varepsilon\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{2\varepsilon}{\mu_0}\|v_n\|^2 = \frac{2\varepsilon}{\mu_0} < 1. \end{aligned}$$

Da convergência dada em (3.11), concluímos que

$$(3.13) \qquad \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx > 0.$$

Como a função $|f(\cdot)|/|\cdot|$ é limitada, pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.3, com expoente

$p/2 > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx &\le \int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}\left|\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right|dx\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}|v_n||v_n^+ - v_n^-|dx\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}|v_n|^2dx \le C\mu(\mathbb{R}^N/\tilde{\Omega}_n)^{(p-2)/p}\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2/p}.\end{aligned}$$

Assumindo o item (i) do Lema 3.1 e usando o Lema de Lions 1.10 garantimos que $\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Sendo assim, passando a uma subsequência, de (3.13) obtemos

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega}_n) \to \infty. \tag{3.14}$$

Agora, consideramos dois subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega}_n$. A hipótese (f_3) implica que existe $R > 0$ tal que, se $|s| > R$, então

$$\frac{1}{2}f(s)s - F(s) > 1.$$

Sem perda de generalidade, assumimos que $0 < \delta < R$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $A_n := \{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| > R\}$ tal que

$$c + o_n(1) = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n \ge \int_{A_n}\left(\frac{1}{2}f(u_n(x))u_n(x) - F(u_n(x))\right)dx > \mu(A_n),$$

que implica que a sequência $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Consideremos também $B_n := \{x \in \mathbb{R}^N : \delta \le |u_n(x)| \le R\}$. Como $B_n = (\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega}_n) \setminus A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$, temos

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega}_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n).$$

Segue das estimativas em (3.14) e da limitação da sequência $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que

$$\mu(B_n) \to \infty. \tag{3.15}$$

Como o intervalo $[\delta, R]$ é compacto e as funções f e F são contínuas, pela hipótese (f_3) temos que $\bar{\delta} := \inf\limits_{s\in[\delta,R]}\left(\frac{1}{2}f(s)s - F(s)\right) > 0$. Portanto, da convergência dada em (3.15),

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)dx \ge \int_{B_n}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)dx \ge \bar{\delta}\mu(B_n) \to \infty.$$

Novamente, temos uma contradição com o fato de que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)dx = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n = c + o_n(1).$$

Dessa forma, o item (i) do Lema 3.1 não é válido para a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Concluímos que, passando a uma subsequência, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Capítulo 4

Ponto Crítico Não Trivial

Teorema 4.1 (Teorema de Linking). *Seja $E = E^+ \oplus E^-$ um espaço de Banach com* $\dim E^- < \infty$. *Sejam $R > \rho > 0$ e $u \in E^+$ um elemento fixo tal que $\|u\| = \rho$. Defina os seguintes conjuntos:*

$$
\begin{aligned}
M &:= \{w = tu + v^-;\ \|w\| \leq R;\ t \geq 0,\ v^- \in E^-\} \\
M_0 &:= \{w = tu + v^-;\ v^- \in E^-;\ \|w\| = R;\ t \geq 0 \text{ ou } \|w\| \leq R, t = 0\} \\
N_\rho &:= \{w \in E^+;\ \|w\| = \rho\}
\end{aligned}
$$

Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ tal que

$$b := \inf_{N_\rho} I > a := \max_{M_0} I.$$

Então, $c \geq b$ e existe uma sequência de Cerami de nível c para o funcional I, no qual

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{w \in M} I(\gamma(w)), \qquad \Gamma := \{\gamma \in C(M, E);\ \gamma|_{M_0} = Id\}.$$

Para aplicar o Teorema de Linking, vamos considerar o problema limite (P_∞), citado anteriormente, e o funcional energia I_∞, associado a (P_∞), dado por

$$I_\infty(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + V_\infty w^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dx$$

para todo $w \in E$. Seja $u_0 \in E$ uma solução positiva, contínua e radial da equação (P_∞) tal que $I_\infty(u_0) = c_\infty > 0$. Como $V_\infty < m$ a existência de u_0 é provada por Berestycki e Lions em ([7], Theorem 1.1).

Para simplificar notação, dado $w \in E$ e $y \in \mathbb{R}^N$, escrevemos $w^+(\cdot - y)$ (ou $w^-(\cdot - y)$) para denotar a projeção em E^+ (respec. E^-) da translação $w(\cdot - y)$.

Observação 4.1. *Se w e v são funções em $L^2(\mathbb{R}^N)$ é válido que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(x-y)v(x)dx \to 0 \text{ se } |y| \to \infty.$$

De fato, dados $\varepsilon > 0$ e v, w funções em $L^2(\mathbb{R}^N)$ temos que existem $C, k > 0$ tais que $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < C$, $\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \infty$ o que implica $\int_{B_k(0)^c} w^2(x)dx < \varepsilon/2C$. Podemos reescrever a integral inicial como

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(x-y)v(x)dx = \int_{B_k(0)^c} w(x-y)v(x)dx + \int_{B_k(0)} w(x-y)v(x)dx.$$

Analisando cada integral, pelas estimativas acima e pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.3, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_k(0)^c} w(x-y)v(x)dx &\leq \|w(x-y)\|_{L^2(B_k(0)^c)}\|v\|_{L^2(B_k(0)^c)} \\ &= \|w\|_{L^2(B_k(0)^c)}\|v\|_{L^2(B_k(0)^c)} < \frac{\varepsilon}{2C}.C = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

e

$$\int_{B_k(0)} w(x-y)v(x)dx \leq \|w(x-y)\|_{L^2(B_k(0))}\|v\|_{L^2(B_k(0))}$$

Note que, para y suficientemente grande, obtemos $\|w(x-y)\|_{L^2(B_k(0))} < \varepsilon/2C$. Com efeito, para y suficientemente grande temos que $B_k(y) \subset B_k(0)^c$. Segue que

$$\begin{aligned}\|w(x-y)\|^2_{L^2(B_k(0))} &= \int_{B_k(0)} w^2(x-y)dx \\ &= \int_{B_k(y)} w^2(x)dx \\ &\leq \int_{B_k(0)^c} w^2(x)dx < \frac{\varepsilon}{2C}.\end{aligned}$$

Dessa forma, $\int_{B_k(0)} w(x-y)v(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$. E portanto $\int_{\mathbb{R}^N} w(x-y)v(x)dx < \varepsilon$, para $|y|$ suficientemente grande.

Daqui por diante, para $R > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$ vamos considerar os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}M &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ \|w\| \leq R,\ t \geq 0,\ v^- \in E^-\}\ e \\ M_0 &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^- \in E^-,\ \|w\| = R,\ t \geq 0\ ou\ \|w\| \leq R,\ t = 0\}\end{aligned}$$

Lema 4.1. *Existem $R > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$ com R e $|y|$ suficientemente grandes tais que $I|_{M_0} \leq 0$.*

Demonstração. O subespaço M_0 é igual a união disjunta de M_1 e M_2 no qual

$$\begin{aligned}M_1 &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^- \in E^-;\ \|w\| \leq R,\ t = 0\}\ e \\ M_2 &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^- \in E^-;\ \|w\| = R,\ t > 0\}.\end{aligned}$$

Como $M_1 \subset E^-$, segue que $I(w) \leq 0$ para cada $w \in M_1$. De fato, como $w \in E^-$, temos que

$$I(w) = -\frac{1}{2}\|v^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dx \leq 0.$$

Agora, vamos mostrar que, dados $R > 0$ e $w \in M_2$ com $\|w\| = R$, teremos que $I(w) \leq 0$, quando

$R > 0$ for suficientemente grande. Escreva

$$w = \|w\|\frac{w}{\|w\|} = \|w\|\overline{u}(x) = \|w\|(\lambda(w)u_0^+(\cdot - y) + v^-(w)).$$

Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned} I(w) &= I(\|w\|\overline{u}(w)) \\ &= \frac{1}{2}\|\|w\|\lambda(w)u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \frac{1}{2}\|\|w\|v^-(w)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(\|w\|\overline{u}(w))dx \\ &= \|w\|^2\left[\frac{1}{2}\lambda^2(w)\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \frac{1}{2}\|v^-(w)\|^2\right] - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(\|w\|\overline{u}(w))}{\overline{u}(w)^2}\overline{u}(w)^2dx \\ &= \frac{1}{2}\|w\|^2\left[\lambda^2(w)\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-(w)\|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(R\overline{u}(w))}{(R\overline{u}(w))^2}\overline{u}(w)^2dx\right] \end{aligned}$$

Para simplificar notação, escreva $\lambda, \overline{u}$ *e* v^- no lugar de $\lambda(w), \overline{u}(w)$ *e* $v^-(w)$, respectivamente.

Afirmação 4.1. $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{F(s)}{s^2} = \dfrac{1}{2}m$ *e* $\left|\dfrac{F(s)}{s^2}\right| \leq \dfrac{m}{2}$.

Demonstração. De fato, pela regra de L'Hopital e pela hipótese (f_2) temos que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{F'(s)}{(s^2)'} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{2s} = \frac{1}{2}\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \frac{m}{2}.$$

Segue da hipótese (f_2) que $|f(s)|/|s| < m \Rightarrow |f(s)| < m|s|$. Assim

$$\left|\frac{F(s)}{s^2}\right| = \left|\frac{1}{s^2}\int_0^s f(t)dt\right| \leq \frac{1}{|s|^2}\int_0^s |f(t)|dt < \frac{1}{|s|^2}\int_0^s m|t|dt = \frac{1}{|s|^2}\left[m|s|^2\right] = \frac{m}{2}.$$

□

Da Afirmação 4.1, temos a seguinte desigualdade

$$\left|\frac{F(R\overline{u})}{(R\overline{u})^2}\right|\overline{u}^2 \leq \frac{m}{2}\overline{u}^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 1.2,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{F(R\overline{u})}{(R\overline{u})^2} - \frac{m}{2}\right)\overline{u}^2dx = 0 \tag{4.1}$$

para todo $\overline{u} \in E$ tal que $\|\overline{u}\| = 1$.

Como M_2 está contido em subespaço de dimensão finita E, $w = \|w\|\overline{u} \in M_2$ com $\|\overline{u}\| = 1$, é provado no Apêndice B que o limite (4.1) é uniforme em $\overline{u}$. Além disso, relembrando que $\int_{\mathbb{R}^N} u_0^+(x - y)v^-dx = 0$, temos que

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N}\overline{u}^2dx + o_R(1)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda u_0^+(x - y) + v^-)^2dx + o_R(1)\right\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$= \frac{1}{2}\|w\|^2\{\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^2(u_0^+)^2(x-y)dx$$
$$- m\int_{\mathbb{R}^N}(v^-)^2dx + o_R(1)\}$$
$$\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^2(u_0^+)^2(x-y)dx + o_R(1)\right\}$$

Pela hipótese (V_1), $V(x) \leq V_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0^+(x-y)|^2 + V(x)(u_0^+)^2(x-y))dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0^+(x-y)|^2 + V_\infty(u_0^+)^2(x-y))dx \\
&= \|u_0^+(\cdot - y)\|^2_{V_\infty} \leq \|u_0(\cdot - y)\|^2_{V_\infty}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Como I_∞ é invariante por translação, então u_0 e $u_0(\cdot - y)$ são pontos críticos do funcional I_∞. Portanto, $I'_\infty(u_0(\cdot - y))u_0(\cdot - y) = 0$, isto é,

$$\|u_0(\cdot - y)\|^2_{V_\infty} = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y)dx. \tag{4.4}$$

Das estimativas (4.3) e (4.4), segue que

$$\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y)dx. \tag{4.5}$$

Substituindo a desigualdade (4.5) em (4.2), somando e subtraindo a integral $m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(x-y)dx$, obtemos

$$\begin{aligned}
I(w) &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\left[\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N}(u_0^+)^2(x-y)dx\right] + o_R(1)\right\} \\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y)dx - m\int_{\mathbb{R}^N}(u_0^+)^2(x-y)dx\right] + o_R(1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2\{\lambda^2[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y)dx - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(x-y)dx \\
&+ m\int_{\mathbb{R}^N}[u_0^2(x-y) - (u_0^+)^2(x-y)]dx] + o_R(1)\} \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2\{\lambda^2[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz \\
&+ m\int_{\mathbb{R}^N}[u_0^2(z) - (u_0^+)^2(z)]dz] + o_R(1)\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Vamos estimar as seguintes integrais:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz \qquad e \tag{4.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} [u_0^2(x-y) - (u_0^+)^2(x-y)]dx. \tag{4.8}$$

Temos que u_0 é radial e contínua, segue que a função $f(u_0(\cdot))/u_0(\cdot)$ assume um máximo, digamos em $x_0 \in \mathbb{R}^N$. E como $|f(s)/s| < m$ para todo $s > 0$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(u_0(z))}{u_0(z)} - m\right) u_0^2(z)dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(u_0(x_0))}{u_0(x_0)} - m\right) u_0^2(z)dz \\
&= \left(\frac{f(u_0(x_0))}{u_0(x_0)} - m\right) \int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz \\
&= \left(\frac{f(u_0(x_0))}{u_0(x_0)} - m\right) \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} < -\gamma
\end{aligned}$$

no qual $\gamma = \frac{1}{2}\left(m - \frac{f(u_0(x_0))}{u_0(x_0)}\right)\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} > 0$. Em outras palavras, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz < -\gamma. \tag{4.9}$$

Para estimar a integral (4.8) serão necessárias algumas afirmações. Antes disso, sabendo que $\int_{\mathbb{R}^N} u_0^+(x-y)u_0^-(x-y)dx = 0$ e que $u_0 = u_0^+ + u_0^-$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} [u_0^2(x-y) - (u_0^+)^2(x-y)]dx &= \int_{\mathbb{R}^N} [(u_0^+(x-y) + u_0^-(x-y))^2 - (u_0^+)^2(x-y)]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [(u_0^+)^2(x-y) + (u_0^-)^2(x-y) - (u_0^+)^2(x-y)]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (u_0^-)^2(x-y)dx. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Afirmação 4.2. *A integral* $\int_{\mathbb{R}^N} (u_0^-)^2(x-y)dx \to 0$ *quando* $|y| \to \infty$.

Demonstração. De fato, como $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ é uma base de autofunções do subespaço E^-, a Observação 4.1 e a hipótese (V_1) nos garantem que, dado $\varepsilon > 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $M_i > 0$ tal que se $|y| \geq M_i$, então

$$\langle u_0(x-y), \phi_i \rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0(x-y)\nabla\phi_i(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_0(x-y)\phi_i(x)dx < \varepsilon.$$

Fazendo $\overline{M} = \max\{M_1, \ldots, M_k\}$ segue que

$$\langle u_0(x-y), \phi_i \rangle < \varepsilon \; \forall \; i \in \{1, \ldots, n\} \; se \; |y| \geq \overline{M}. \tag{4.11}$$

Como $u_0^-(\cdot - y) \in E^-$ é uma combinação linear dos vetores $\phi_1, \ldots, \phi_k$, digamos

$$u_0^-(x-y) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(y)\phi_i(x),$$

segue de (4.11) que existe $\tilde{M} > 0$ tal que, se $|y| \geq \tilde{M}$, então

$$\begin{aligned} \|u_0^-(\cdot - y)\|^2 &= \langle u_0^-(\cdot - y), u_0^-(\cdot - y)\rangle \\ &= \langle u_0(\cdot - y), u_0^-(\cdot - y)\rangle \\ &= \langle u_0(\cdot - y), \sum_{i=1}^{k} \xi_i(y)\phi_i(\cdot)\rangle \\ &< \varepsilon k(\max\{|\xi_1(y)|, \ldots, |\xi_k(y)|\}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Afirmação 4.3. *Existe uma constante $C > 0$ que não depende de y tal que*

$$\max\{|\xi_1(y)|, \cdots, |\xi_n(y)|\} < C \textit{ para todo } y \in \mathbb{R}^N. \tag{4.13}$$

Demonstração. Dado que $\dim E^- < \infty$, pela equivalência de normas em espaços de dimensão finita, existe $D > 0$, que não depende de y tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i(y)\phi_i(x) \right\|_{V_\infty}^2 \geq D(\max\{|\xi_1(y)|, \ldots, |\xi_n(y)|\})^2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{V_\infty}^2 \geq \|u_0^-(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{k} \xi_i(y)\phi_i(x) \right\|_{V_\infty}^2 \\ &\geq D(\max\{|\xi_i(y)|, \ldots, |\xi_k(y)|\})^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Escolhendo $C = \|u_0\|_{V_\infty}^2/\sqrt{D} > 0$, chegamos no resultado esperado. □

Agora, substituindo (4.13) em (4.12), obtemos

$$\|u_0^-(\cdot - y)\|^2 < \varepsilon k C \textit{ para } |y| \geq \tilde{M}.$$

Como as normas $\|\cdot\|_{V_\infty}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em E, segue que $\|u_0^-(\cdot - y)\|_{V_\infty} \to 0$ quando $|y| \to \infty$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_0^-)^2(x - y)dx \leq \frac{1}{V_\infty}\|u_0^-(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2 \to 0 \textit{ quando } |y| \to \infty. \tag{4.15}$$

O que conclui a Afirmação 4.2. □

Substituindo as estimativas (4.9), (4.10) e (4.15) em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} I(w) &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\{\lambda^2[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz \\ &\quad + m\int_{\mathbb{R}^N} (u_0^-)^2(x - y)dx] + o_R(1)\} \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\{\lambda^2[-\gamma + o_{|y|}(1)] + o_R(1)\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

para R suficientemente grande.

Para concluir a prova deste lema vamos analisar os seguintes casos para os valores de λ:

Caso 1: Consideraremos $\lambda^2 < 1/(C\|u_0\|^2_{V_\infty})$, em que $C > 0$ é uma constante que não depende de y;

Note que $w = \|w\|(\lambda u_0^+(\cdot - y) + v^-)$ e F é uma função não negativa, pela hipótese (f_3), temos

$$
\begin{aligned}
I(w) &= \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2) - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2).
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Uma vez que $\|\lambda u_0^+(\cdot - y) + v^-\|^2 = 1$, segue $\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 + \|v^-\|^2 = 1$. Então, a desigualdade (4.17) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
I(w) &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 + \lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\| - \|v^-\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2(2\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - 1).
\end{aligned}
$$

Pela equivalência de normas e pela invariância da norma $\|\cdot\|_{V_\infty}$ por uma translação, existe $C > 0$ que não depende de y, tal que

$$2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \leq C\|u_0(\cdot - y)\|^2_{V_\infty} = C\|u_0\|^2_{V_\infty}.$$

Assim, para

$$\lambda^2 < \frac{1}{C\|u_0\|^2_{V_\infty}} \leq \frac{1}{2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2}$$

temos que $I(w) < 0$ e o lema está provado para esses valores de λ.

Caso 2: $\lambda^2 \geq 1/(C\|u_0\|^2_{V_\infty})$;

Denotaremos por $k_0 := \lambda^2 \geq 1/(C\|u_0\|^2_{V_\infty}) > 0$. Escolha $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y|$ suficientemente grande tal que $-\gamma + o_{|y|}(1) < -\frac{\gamma}{2}$. Então, podemos reescrever a desigualdade (4.16) como

$$I(w) \leq \frac{1}{2}\|w\|^2[-\lambda^2\frac{\gamma}{2} + o_R(1)].$$

Como $-\lambda^2 \leq -k_0$, então escolhendo R suficientemente grande tal que $-k_0\frac{\gamma}{2} + o_R(1) \leq 0$, obtemos

$$I(w) \leq \frac{1}{2}\|w\|^2[-\lambda^2\frac{\gamma}{2} + o_R(1)] \leq \frac{1}{2}\|w\|^2[-k_0\frac{\gamma}{2} + o_R(1)] \leq 0$$

e o lema está provado para λ tal que $\lambda^2 \geq k_0$. E, com isso, concluímos a prova do Lema. □

Lema 4.2. *É válida a seguinte desigualdade:*

$$c < c_\infty := \inf\{I_\infty(w) : w \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I'_\infty(w) = 0\}.$$

Para provar este lema, precisamos de alguns lemas auxiliares, que serão enunciados e provados a seguir.

Lema 4.3. *Existe $\mu \in (1, 2]$ com a seguinte propriedade: Para qualquer $C_3 \geq 1$ existe uma constante $C_4 > 0$ tal que a desigualdade*

$$|F(u+v) - F(u) - F(v) - f(u)v - f(v)u| \leq C_4|uv|^{\mu}$$

é válida para todo $u, v \in \mathbb{R}$ com $|u|, |v| \leq C_3$.

Demonstração. Seja $p = p_1$ e $\mu := \min\{\frac{1}{2}(p+1), 2\}$. Note que (f_4) implica que $|f^{(k)}(u)| \leq C|u|^{p-k}$ se $0 < |u| < C_3$. Provaremos esse lema para o caso que $u, v > 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
|F(u+v)-&F(u) - F(v) - f(u)v - f(v)u| \\
&= \left|\int_0^u (f(s+v) - f(v) - f'(s)v - f(s))ds\right| \\
&= \left|\int_0^u \int_0^v (f'(s+r) - f'(r) - f'(s))drds\right| \\
&= \left|\int_0^u \int_0^v \int_0^r (f''(s+t) - f''(t))dtdrds\right| \\
&= \left|\int_0^u \int_0^v \int_0^r \int_t^{s+t} f'''(w)dwdtdrds\right| \\
&\leq \left|\tilde{C} \int_0^u \int_0^v \int_0^r \int_t^{s+t} w^{p-3}dwdtdrds\right| \\
&\leq \left|\tilde{C}_1 \int_0^u \int_0^v \int_0^r [(s+t)^{p-2} - t^{p-2}]dtdrds\right| \\
&\leq \left|\tilde{C}_2 \int_0^u \int_0^v [(s+r)^{p-1} - r^{p-1} - s^{p-1}]drds\right| \\
&\leq \left|\tilde{C}_3 \int_0^u [(s+v)^p - v^p - vs^{p-1} - s^p]ds\right| \\
&\leq |\tilde{C}_4[(u+v)^{p+1} - u^{p+1} - v^{p+1} - uv^p - u^p v]| \\
&= \left|\tilde{C}_4\left[\tilde{C}_5 u^{p+1}\left(1 + \frac{v}{u} + \frac{v^2}{u^2} + \ldots + \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} + \frac{u^p}{v^p} + \frac{v^{p+1}}{u^{p+1}}\right) - u^{p+1} - v^{p+1} - u^p v - uv^p\right]\right| \\
&\leq \left|C_4\left(u^{p+1} + u^p v + u^{p-1}v^2 + \ldots + u^2 v^{p-1} + uv^p + v^{p+1} - u^{p+1} - v^{p+1} - u^p v - uv^p\right)\right| \\
&\leq C_4|uv|^{\mu},
\end{aligned}$$

em que $C_4 := \max\{\tilde{C}_j\}, j = 1, \ldots, 5.$ □

Lema 4.4. *Se $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$, então existe $C > 0$ tal que todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}dx \leq Ce^{-\mu_1|x_1-x_2|}.$$

Demonstração. Observe que

$$\mu_1|x_1 - x_2| + (\mu_2 - \mu_1)|x - x_2|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mu_1(|x-x_1|+|x-x_2|)+\mu_2|x-x_1|+\mu_1|x-x_2| \\
&= \mu_1|x-x_1|+\mu_2|x-x_2|.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x_1-x_2|}e^{(\mu_2-\mu_1)|x-x_2|}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x_1-x_2|}\frac{1}{e^{(\mu_2-\mu_1)|x-x_2|}}dx \\
&\leq Ce^{\mu_1|x_1-x_2|}.
\end{aligned}
$$

□

Notemos que o conjunto M definido no Teorema 4.1 é fechado, limitado e está contido em um conjunto de dimensão finita, a saber, no espaço $\mathbb{R}u_0^+(\cdot - y)\oplus E^-$. Portanto, M é um conjunto compacto, o que implica que, para todo $y\in\mathbb{R}^N$, existe $w_y = v_y^- + t_y u_0^+(\cdot - y)\in M$ satisfazendo

$$
\max_{w\in M} I(w) = I(v_y^- + t_y u_0^+(\cdot - y)),
$$

pois I é um funcional contínuo.

O resultado a seguir mostra que os valores t_y são uniformemente limitados em y por constantes positivas se $|y|$ é suficientemente grande.

Lema 4.5. *Existem $A, B\in\mathbb{R}$ que não dependem de y, tais que $0 < A \leq t_y \leq B$ para $|y|$ suficientemente grande.*

Demonstração. Como $w_y = v_y^- + t_y u_0^+(\cdot - y)\in M$, e o número R dado pelo Lema 4.1 é maior que 0 e não depende de y, temos

$$
\begin{aligned}
R^2 \geq \|w_y\|^2 &= \|v_y^-\|^2 + t_y^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \\
&\geq t_y^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 + t_y^2\|u_0^-(\cdot - y)\|^2 - t_y^2\|u_0^-(\cdot - y)\|^2 \\
&= t_y^2(\|u_0(\cdot - y)\|^2 - \|u_0^-(\cdot - y)\|^2).
\end{aligned}
$$

Conforme provado na Afirmação 4.15, podemos tomar $|y|$ suficientemente grande para garantir que

$$
\|u_0^-(\cdot - y)\|^2 \leq \frac{C}{2}\|u_0\|_{V_\infty}^2
$$

em que $C > 0$ não depende de y e satisfaz $\|u_0(\cdot - y)\|^2 \geq C\|u_0\|_{V_\infty}^2$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
R^2 &\geq t_y^2(\|u_0(\cdot - y)\|^2 - \|u_0^-(\cdot - y)\|^2) \\
&\geq t_y^2(C\|u_0\|_{V_\infty}^2 - \frac{C}{2}\|u_0\|_{V_\infty}^2) = \frac{t_y^2 C}{2}\|u_0\|_{V_\infty}^2,
\end{aligned}
$$

isto é, temos $t_y^2 \leq 2R^2/(C\|u_0\|_{V_\infty}^2) := B^2$.

Por outro lado, pelas estimativas dadas em (3.1) com $2 < p < 2^*$, para $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$

tal que, se $u \in E^+$ com $\|u\| = \rho > 0$, então

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - C_\varepsilon\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.18}$$

Pela Imersão de Sobolev e pela equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_E$, existem constantes $C_5, C_6 > 0$ em que a equação (4.18) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon C_5\|u\|^2 - C_6\|u\|^p = \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon C_5\rho^2 - C_6\rho^p \\ &= (\frac{1}{2} - \varepsilon C_5)\rho^2 - C_6\rho^p. \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon := \frac{1}{2} - \varepsilon C_5 > 0$. Escolhendo $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que $D_\varepsilon\rho^2 - C_6\rho^p > 0$, isto é, $0 < \rho < (D_\varepsilon/C_6)^{1/(p-2)}$, obtemos

$$I(u) \geq D_\varepsilon\rho^2 - C_6\rho^p := \rho_0 > 0 \tag{4.19}$$

em que ρ_0 não depende de y e $\|u\| = \rho$ para todo $u \in E^+$. Portanto, tome $t_0 > 0$ tal que $\|t_0u_0^+(\cdot - y)\| \leq \rho < R$ para concluir que $I(t_0u_0^+(\cdot - y)) \geq \rho_0 > 0$. Consequentemente,

$$I(v_y^- + t_yu_0^+(\cdot - y)) = \max_{w\in M} I(w) \geq I(t_0u_0^+(\cdot - y)) \geq \rho_0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\frac{t_y^2}{2}\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \frac{1}{2}\|v_y^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(v_y^- + t_yu_0^+(x - y))dx \\ &\quad = I(v_y^- + t_yu_0^+(\cdot - y)) \geq \rho_0. \end{aligned}$$

Uma vez que F é não negativa, temos

$$\frac{t_y^2}{2}\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \geq \rho_0.$$

Isso mostra que

$$t_y^2 \geq \frac{2\rho_0}{C\|u_0\|^2_{V_\infty}} := A^2$$

em que $C > 0$ não depende de $|y|$ e satisfaz $\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \leq C\|u_0\|^2_{V_\infty}$. O lema está, portanto, provado. □

Agora vamos apresentar a prova do Lema 4.2.

Demonstração do Lema 4.2. Para simplificar notação, denotaremos $u_{0,y}(x) = u_0(x - y)$, C uma constante positiva que não é necessariamente a mesma em todas as situações. Pelas definições dos funcionais I, I_∞ e das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{V_\infty}$, temos

$$I(v_y^- + t_yu_{0,y}^+) = \frac{t_y^2}{2}\|u_{0,y}^+\|^2 - \frac{1}{2}\|v_y^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(v_y^- + t_yu_{0,y}^+)dx \tag{4.20}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{t_y^2}{2}\|u_{0,y}^+\|_{V_\infty}^2 + \frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x)-V_\infty)(u_{0,y}^+)^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(t_yu_{0,y})dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}(F(t_yu_{0,y}) - F(v_y^- + t_yu_{0,y}^+))dx\\
&\leq \frac{t_y^2}{2}\|u_{0,y}\|_{V_\infty}^2 - \int_{\mathbb{R}^N}F(t_yu_{0,y})dx + \frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x)-(V_\infty)u_{0,y}^2dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}(F(t_yu_{0,y}) - F(v_y^- + t_yu_{0,y}^+))dx\\
&\leq I_\infty(t_yu_{0,y}) + \frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x)-V_\infty)u_{0,y}^2dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}[F(t_yu_{0,y}) - F(v_y^- + t_yu_{0,y}^+) + F(v_y^- - t_yu_{0,y}^-)]dx.
\end{aligned}
$$

Agora vamos analisar a última integral desta desigualdade. Fazendo $w_y^- = v_y^- - t_yu_{0,y}^-$, queremos estimar $\mathcal{I}_y$ definido a seguir

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{R}^N}(F(v_y^- - t_yu_{0,y}^-) + F(t_yu_{0,y}) - F(v_y^- + t_yu_{0,y}^+))dx|\\
&\quad= \left|\int_{\mathbb{R}^N}(F(v_y^- - t_yu_{0,y}^-) + F(t_yu_{0,y}) - F(v_y^- - t_yu_{0,y}^- + t_yu_{0,y}^- + t_yu_{0,y}^+))dx\right|\\
&\quad= \left|\int_{\mathbb{R}^N}(F(w_y^-) + F(t_yu_{0,y}) - F(w_y^- + t_yu_{0,y}))dx\right| := \mathcal{I}_y.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_y &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|(F(w_y^-) + F(t_yu_{0,y}) - F(w_y^- + t_yu_{0,y}))|dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|(F(w_y^- + t_yu_{0,y}) - F(w_y^-) - F(t_yu_{0,y}))|dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|F(w_y^- + t_yu_{0,y}) - F(w_y^-) - F(t_yu_{0,y}) - f(w_y^-)t_yu_{0,y} - f(t_yu_{0,y})w_y^-\\
&+ f(w_y^-)t_yu_{0,y} + f(t_yu_{0,y})w_y^-|dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}|F(w_y^- + t_yu_{0,y}) - F(w_y^-) - F(t_yu_{0,y}) - f(w_y^-)t_yu_{0,y} - f(t_yu_{0,y})w_y^-|dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}|f(w_y^-)||t_yu_{0,y}|dx + \int_{\mathbb{R}^n}|f(t_yu_{0,y})||w_y^-|dx.
\end{aligned}
$$

Temos que $w_y^- = v_y^- - t_yu_{0,y}^- \in M$ e podemos reescrever w_y^- como combinação linear das autofunções $\phi_1, \ldots, \phi_k$, pois $v_y^-, u_{0,y}^- \in E^-$. Como $\dim E^- < \infty$, podemos repetir a estimativa feita em (4.14) usando w_y^- no lugar de $u_{0,y}^-$, e o Lema 4.5 para mostrar que existe $C > 0$ que não depende de y tal que

$$
\begin{aligned}
|w_y^-(x)| = |v_y^-(x) - t_yu_{0,y}^-(x)| &= \left|\sum_{i=1}^k \eta_i(y)\phi_i(x) - t_y\sum_{i=1}^k \zeta_i(y)\phi_i(x)\right|\\
&\leq \left|\sum_{i=1}^k(\eta_i(y) - B\zeta_i(y))\phi_i(x)\right| \leq \sum_{i=1}^k|\eta_i(y) - B\zeta_i(y)||\phi_i(x)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{k}(|\eta_i(y)| + |-B\zeta_i(y)|)|\phi_i(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}(\max\{|\eta_i(y)|\} + B\max\{|\zeta_i(y)|\})|\phi_i(x)| \\
&= C\sum_{i=1}^{k}|\phi_i(x)| \leq C\sum_{i=1}^{k}\sup_{\mathbb{R}^N}|\phi_i(x)| := D,
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Visto que $u_{0,y} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e supondo, sem perda de generalidade, que $D > 1$, temos $|u_{0,y}(x)| \leq D$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Agora, podemos usar a hipótese (f_2) e aplicar o Lema 4.3 para obter uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_y &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|F(w_y^- + t_y u_{0,y}) - F(w_y^-) - F(t_y u_{0,y}) - f(w_y^-)t_y u_{0,y} - f(t_y u_{0,y})w_y^-|dx \\
&+ t_y\int_{\mathbb{R}^N}|f(w_y^-)||u_{0,y}|dx + \int_{\mathbb{R}^N}|f(t_y u_{0,y})||w_y^-|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}C|w_y^-|^\mu|t_y u_{0,y}|^\mu dx + mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx + m\int_{\mathbb{R}^N}|t_y u_{0,y}||w_y^-|dx \\
&= Ct_y^\mu\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-|^\mu|u_{0,y}|^\mu dx + mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx + mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx \\
&= Ct_y^\mu\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-|^\mu|u_{0,y}|^\mu dx + 2mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

com $\mu > 1$ dado pelo Lema 4.3. Vamos considerar $\xi = \lambda_1 < 0 < V_\infty$ no Teorema 1.17, desse modo é válido que qualquer autofunção $\phi_i, i = 1, \ldots, k$, satisfaz

$$
|\phi_i(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para algum $\sqrt{V_\infty} < \delta < \sqrt{V_\infty - \xi}$. Portanto, da primeira desigualdade de (4.21), para um $|y|$ suficientemente grande, temos

$$
|w_y^-(x)| \leq Ce^{-\delta|x|} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.
$$

Como u_0 é uma solução radial do problema (P_∞) dado por Berestycki e Lions [7], temos que $|u_0(x)| \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Segue do Lema 4.4 que

$$
\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N}e^{-\delta|x|}e^{-\sqrt{V_\infty}|x-y|}dx \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|}. \tag{4.23}
$$

Analogamente, pelo Lema 4.4, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-|^\mu|u_{0,y}|^\mu dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}e^{-\delta\mu|x|}e^{-\mu\sqrt{V_\infty}|x-y|}dx \\
&\leq Ce^{-\mu\sqrt{V_\infty}|y|} \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|}, \text{ pois } \mu > 1.
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Aplicando as estimativas (4.23) e (4.24) em (4.22) temos

$$\mathcal{I}_y \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|} \tag{4.25}$$

em que a constante $C > 0$ não depende de y, pois t_y é uniformemente limitado pelo Lema 4.5. Queremos agora estimar a integral

$$\frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x) - V_\infty)u_{0,y}^2(x)dx.$$

Pela hipótese (V_4), segue que

$$\frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x) - V_\infty)u_{0,y}^2(x)dx = \frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x+y) - V_\infty)u_0^2(x)dx \leq -Ce^{-\gamma|y|} \tag{4.26}$$

para $|y|$ suficientemente grande, com $C > 0$ que não depende de y. Assim, segue das estimativas (4.25) e (4.26) que (4.20) pode ser escrito como

$$I(v_y^- + t_y u_{0,y}^+) \leq I_\infty(t_y u_{0,y}) - Ce^{-\gamma|y|} + Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|}.$$

Temos que $0 < \gamma < \sqrt{V_\infty}$, pela hipótese (V_4). Isso significa que $-Ce^{-\gamma|y|} + Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|} < 0$. E portanto,

$$I(v_y^- + t_y u_{0,y}^+) < \max_{t\geq 0} I_\infty(tu_0)$$

para $|y|$ suficientemente grande.

Afirmação 4.4. *O máximo* $\max_{t\geq 0} I_\infty(tu_0)$ *é atingido em* $t = 1$.

De fato, seja u_0 a solução dada por Berestycki e Lions, Teorema (1.19), ou seja, u_0 é positiva, radial e simétrica. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_\infty(tu) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\|tu\|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^n} F(tu)dx\right] \\
&= t\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)u\ dx \\
&= t\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)u\ dx \\
&= t\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right]u^2\ dx.
\end{aligned}$$

Pela hipótese (f_5), temos que $\dfrac{f(u)}{u}$ é estritamente crescente. Dessa forma, se $t > 1$ então $tu > u$. Logo $\dfrac{f(u)}{u} < \dfrac{f(tu)}{tu}$ implica que $\dfrac{d}{dt}I_\infty(tu) < 0$. Se $0 < t < 1$ então $tu < u$. Logo $\dfrac{f(u)}{u} > \dfrac{tu}{tu}$ implica que $\dfrac{d}{dt}I_\infty(tu) > 0$. Portanto, $I_\infty(u) = \max_{t>0} I_\infty(tu)$. Segue da definição do valor de $c > 0$ que

$$c \leq \max_{w\in M} I(w) = I(v_y^- + t_y u_{0,y}^+) < \max_{t\geq 0} I_\infty(tu_0) = I_\infty(u_0) \leq c_\infty.$$

O que mostra a estimativa desejada. $\square$

Lema 4.6 (Lema de Splitting). *Seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$I(u_k) \to c > 0 \text{ e } \|I'(u_k)\|(1+\|u_k\|) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N). \tag{4.27}$$

Então, passando a uma subsequência se necessário, existe uma solução u_0 de (P), um número $m \in \mathbb{N}$, m funções $u^1, \ldots, u^m$ e m sequências de pontos $(y_k^j) \subset \mathbb{R}^N, 1 \le j \le m$ satisfazendo uma das seguintes alternativas:

(1) $u_k \to u_0$ em $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ ou

(2) u^j são soluções não triviais de (P_∞), tais que:

(a) $|y_k^j| \to \infty$ e $|y_k^j - y_k^i| \to \infty, i \neq j$;

(b) $u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} u^j(\cdot - y_k^j) \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

(c) $c = I(u_0) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} I_\infty(u^j)$.

Demonstração. Uma vez que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, passando a uma subsequência, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_k \rightharpoonup u_0$. Como I é um funcional C^1, então $\|I'(u_k)\|(1+\|u_k\|) \to \|I'(u_0)\|(1+\|u_0\|)$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e por hipótese, temos que $\|I'(u_k)\|(1+\|u_k\|) \to 0$. Por outro lado, pela unicidade de limite e como $(1+\|u_k\|) \neq 0$, temos $I'(u_0) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Seja $u_k^1 := u_k - u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vamos mostrar os seguintes resultados para $k \to \infty$

$$\|u_k^1\|_{V_\infty}^2 = \|u_k\|^2 - \|u_0\|^2 + o_k(1) \tag{4.28}$$

$$I_\infty(u_k^1) \to c - I(u_0) \tag{4.29}$$

$$I'_\infty(u_k^1) \to 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N) \tag{4.30}$$

Para provar (4.28), notemos que $u_k^1 + u_0 = (u_k - u_0) + u_0 = u_k$. Assim

$$\|u_k^1 + u_0\|^2 = \langle u_k^1 + u_0, u_k^1 + u_0\rangle = \|u_k^1\|_{V_\infty}^2 + \|u_0\|^2 + 2\langle u_k^1, u_0\rangle.$$

Como $u_k^1 \rightharpoonup 0$ e usando o Teorema de Representação de Riesz 1.7, temos que $\langle u_k^1, u_0\rangle = g(u_k^1) \to 0$ para todo $g \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Logo

$$\|u_k\|^2 = \|u_k^1\|_{V_\infty}^2 + \|u_0\|^2 + 2\langle u_k^1, u_0\rangle \Rightarrow \|u_k^1\|_{V_\infty}^2 = \|u_k\|^2 - \|u_0\|^2 + o_k(1).$$

Agora, vamos provar a equação (4.29). Note que $u_k \rightharpoonup u_0$ implica $u_k^1 \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, $u_k \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N), u_k^1 \to 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N), u_k(x) \to u_0(x)$ *q.t.p* em $\mathbb{R}^N$ e $u_k^1(x) \to 0$ *q.t.p* em $\mathbb{R}^N$. Além disso, usando a equação (4.28) e as definições de I e I_∞, temos

$$I_\infty(u_k^1) - I(u_k) + I(u_0) = \frac{1}{2}\|u_k^1\|_{V_\infty}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_k^1)\, dx - \frac{1}{2}\|u_k\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_k)\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0)\ dx \\
&= \frac{1}{2}(\|u_k^1\|_{V_\infty}^2 - \|u_k\|^2 + \|u_0\|^2) - \int_{\mathbb{R}^N} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]\ dx \\
&= o_k(1) - \int_{\mathbb{R}^N} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]\ dx
\end{aligned}
$$

em que $o_k(1) \to 0$ quando $k \to \infty$. Agora, mostraremos que $-\int_{\mathbb{R}^N} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]dx = o_k(1)$. Veja que, dado, $\varepsilon > 0$ podemos escolher $B_D(0)$ tal que

$$
\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} [|\nabla u_0|^2 + u_0^2]dx \leq \varepsilon.
$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, a propriedade (f_4) e a desigualdade de Hölder 1.3, obtemos

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]dx &= -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} (f(u_k + tu_0)u_0 + F(u_0))\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} [f(u_k + tu_0)u_0 + C(|u_0|^{p_1+1} + |u_0|^{p_2+1})]dx \\
&\leq \|f(u_k + tu_0)\|_2 \|u_0\|_2 + C(\|u_0\|_2^{p_1} + \|u_0\|_2^{p_2})\|u_0\|_2 \\
&\leq \|u_0\| + C(\|u_0\|^{p_1} + \|u_0\|^{p_2})\|u_0\| \\
&\leq \varepsilon + C_\varepsilon = C_\varepsilon
\end{aligned}
$$

Segue de (f_4) que

$$
\int_{B_D(0)} F(u_k^1)dx < \infty; \quad \int_{B_D(0)} F(u_k)dx < \infty; \quad \int_{B_D(0)} F(u_0)dx < \infty.
$$

Dessa forma,

$$
-\int_{B_D(0)} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]dx \in L^1(\mathbb{R}^N).
$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada 1.2, usando os fatos que F é contínua, $u_k(x) \to u_0(x)$ $q.t.p$ em $\mathbb{R}^N$ e $u_k^1(x) \to 0$ $q.t.p$ em $\mathbb{R}^N$, temos

$$
\int_{B_D(0)} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]dx \to 0.
$$

E, então,

$$
I_\infty(u_k^1) - I(u_k) + I(u_0) = o_k(1). \tag{4.31}
$$

Como $I(u_k) \to c$ e fazendo $k \to \infty$ na equação (4.31) obtemos

$$
I_\infty(u_k^1) \to c - I(u_0).
$$

Vamos provar a convergência dada em (4.30). Segue das equações (4.28), (4.27) e da desigualdadede

Cauchy-Scwharz que para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k\|\varphi\| &\geq |\langle I'(u_k), \varphi\rangle| = |\langle I'(u_0 + u_k^1), \varphi\rangle| \\
&= |\langle u_0 + u_k^1, \varphi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0 + u_k^1)\varphi\ dx| \\
&= |\langle u_0, \varphi\rangle + \langle u_k^1, \varphi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\varphi\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_k^1)\varphi\ dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\varphi\ dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} f(u_k^1)\varphi\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0 + u_k^1)\varphi\ dx| \\
&= |\langle I'(u_0), \varphi\rangle + \langle I'_\infty(u_k^1), \varphi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} [f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi\ dx| \\
&\geq |\langle I'_\infty(u_k^1), \varphi\rangle| - \int_{\mathbb{R}^N} |[f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi| dx.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que $\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)| dx \to 0$. De forma análoga as contas feitas anteriormente, temos que dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $B_D(0)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} [|\nabla u_0|^2 + u_0^2] dx \leq \varepsilon.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio e pela propriedade (f_4)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} |f(u_0 + u_k^1) - f(u_k^1) - f(u_0)| dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} |f(u_0 + \theta u_k^1) u_k^1 - f(u_0)| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} [|f(u_0 + \theta u_k^1) u_k^1| + |f(u_0)|] dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{D(0)}} [|f(u_0 + \theta u_k^1)||u_k^1| + |C(|u_0|^{p_1} + |u_0|^{p_2})] dx \\
&\leq \|f(u_0 + \theta u_k^1)\|_2 \|u_k^1\|_2 \ + C(\|u_0\|_2^{p_1} + \|u_0\|_2^{p_2}) \\
&\leq C_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Novamente aplicando o Teorema da Convergência Dominada 1.2, usando o fato que f é contínua, que $u_k(x) \to u_0(x)$ $q.t.p$ em $\mathbb{R}^N$ e $u_k^1(x) \to 0$ $q.t.p$ de $\mathbb{R}^N$ temos

$$\int_{B_D(0)} [f(u_0 + u_k^1) - f(u_k^1) + f(u_0)] dx \to 0.$$

Dessa forma,

$$\varepsilon_k\|\varphi\| \geq |\langle I'_\infty(u_k^1), \varphi\rangle| - \varepsilon_k\|\varphi\| \Rightarrow |\langle I'_\infty(u_k^1), \varphi| \leq \varepsilon_k\|\varphi\| \Rightarrow I'_\infty(u_k^1) \to 0\ em\ H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Como $(u_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, então

$$\delta := \limsup_{k\to\infty} \sup \int_{B_1(y)} |u_k^1|^2\ dx.$$

Se $\delta = 0$, segue do Lema de Lions 1.10 que

$$u_k^1 \to 0 \ em \ L^p(\mathbb{R}^N), p \in (2, 2^*). \tag{4.32}$$

Pela propriedade (f_4) e pelas equações (4.30) e (4.32) concluímos que $u_k^1 \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato

$$\begin{aligned} I'_\infty(u_k)u_k &= \|u_k^1\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_k^1)u_k^1 \, dx \\ &\geq \|u_k^1\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} C(|u_k^1|^{p_1} + |u_k^1|^{p_2}) \, dx \\ &\geq \|u_k^1\|^2 - C(\|u_k^1\|_2^{p_1} + \|u_k^1\|_2^{p_2}). \end{aligned}$$

Como $I'(u_k^1) \to 0$, então fazendo $k \to \infty$ na desigualdade acima temos que $\|u_k^1\|^2 \to 0$ o que implica $u_k^1 \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Note que, a convergência forte de (u_k^1) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ implica na convergência forte de u_k para u_0 em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Provando o primeiro caso do Lema.

Provaremos o segundo caso. Para $\delta > 0$, existe uma sequência $(y_k^1)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\frac{\delta}{2} < \lim_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_k^1|^2 \, dx = \int_{B_1(y_k^1)} |u_k^1|^2 \, dx.$$

Defina a sequência $(v_k^1)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ por $v_k^1 = u_k^1(\cdot + y_k^1)$. Como u_k^1 é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então (v_k^1) também é limitada. Assim, passando a uma subsequência, existe $u^1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_k^1 \rightharpoonup u^1$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v_k^1(x) \to u^1(x)$ em quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$. Fazendo uma mudança de variável obtemos

$$\frac{\delta}{2} < \int_{B_1(y_k^1)} |u_k^1|^2 \, dx = \int_{B_1(0)} |u_k^1(x + y_k^1)|^2 \, dx = \int_{B_1(0)} |v_k^1(x)|^2 \, dx.$$

Aplicando o Lema de Fatou 1.2,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\delta}{2} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{B_1(0)} v_k^1(x)^2 \, dx \Rightarrow \frac{\delta}{2} < \int_{B_1(0)} \liminf_{k\to\infty} v_k^1(x)^2 \, dx = \int_{B_1(0)} u^1(x)^2 \, dx.$$

Logo $u \neq 0$. Além disso, como $u_k^1 \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ segue que, passando a uma subsequência, podemos assumir que $(y_k^1)_{k\in\mathbb{R}^N}$ possui uma subsequência tal que $|y_k^1| \to \infty$. Agora, vamos mostrar que $I'_\infty(u^1) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. De fato, tome $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sendo $|y_k^1| \to \infty$, então podemos encontrar k_0 tal que $\phi_k := \phi(x - y_k^1)$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ para todo $k \geq k_0$, além disso, $\|\phi_k\| = \|\phi\|$. Como consequência de (4.30) vale que

$$\begin{aligned} |\langle I'_\infty(u^1), \phi\rangle| &= |\langle I'_\infty(v_k^1), \phi\rangle| + o_k(1) \\ &= |\langle I'_\infty(u_k^1(x + y_k^1)), \phi(x)\rangle| + o_k(1) \\ &= |\langle I'_\infty(u_k^1(x)), \phi(x - y_k^1)\rangle| + o_k(1) \\ &= |\langle I'_\infty(u_k^1), \phi_k\rangle| + o_k(1) = o_k(1) \end{aligned}$$

Então, u^1 é solução de (P_∞). Defina $u_k^2(x) := u_k^1(x) - u^1(x - y_k^1)$ e $u_k^2(\cdot + y_k^1) = v_k^1 + u^1$ e fazendo os cálculos análogos feitos para u^1 em u^2, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_k^2\|^2 &= \|u_k^1\| - \|u^1\|^2 + o_k(1),\\ I_\infty(u_k^2) &\to c - I(u_0) - I(u^1),\\ I'_\infty(u_k^2) &\to 0 \text{ } em \text{ } H^{-1}(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Repetindo esse mesmo argumento sucessivamente, obteremos uma quantidade finita de soluções u^j do problema (P_∞) que satisfazem o segundo caso do Lema. Se a quantidade de soluções fosse infinita, então no item (c) teríamos que c iria para o infinito, o que é uma contradição. Portanto, existem m soluções para o problema (P_∞), satisfazendo, assim, a segunda parte do Lema. □

Teorema. *Sob as hipóteses* (V_1) - (V_4) *e* (f_1)-(f_5), *o problema* (P) *tem uma solução fraca* u *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração do Teorema Principal. Como citado anteriormente, para $R > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$ foram considerados os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}M &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ \|w\| \leq R,\ t \geq 0,\ v^- \in E^-\} \text{ } e\\ M_0 &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^- \in E^-,\ \|w\| = R,\ t \geq 0 \text{ } ou \text{ } \|w\| \leq R,\ t = 0\}.\end{aligned}$$

Além isso, vamos considerar o conjunto:

$$N_\rho = \{w \in E^+;\ \|w\| = \rho > 0\}.$$

Vamos mostrar que $\inf_{N_\rho} I > \max_{M_0} I$. Pelo Lema 4.1, temos que $I|_{M_0} \leq 0$, e isso implica que $\max_{M_0} I \leq 0$. Dessa forma, basta mostrar que $\inf_{N_\rho} I > 0$.

De (4.19) temos que, se $w \in E^+$ com $\|w\| = \rho > 0$ então $I(w) > 0$. Segue disso que $\inf_{N_\rho} I > 0$ e portanto $\inf_{N_\rho} I > \max_{M_0} I$.

Por consequência do Teorema de Linking 4.1 existe uma sequência de Cerami $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para o funcional I no nível $c > 0$. Pelo Lema 3.2 (u_n) possui uma subsequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ limitada. Dessa forma, a menos de uma subsequência, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Do Lema 4.2 temos que $c < c_\infty$, então pelo item (1) do Lema de Splitting 4.6 $u_n \to u$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, temos que $I(u) > 0$ pois, como u é solução de (P) podemos escrever $I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u)u - F(u)\right) dx > 0$, pela condição (f_3). Então, se caso o item (2) seja considerado válido, pelo item (c) teríamos que $c = I(u) + \sum_{j=1}^{m} I_\infty(u^j) \geq c_\infty$, o que é uma contradição.

Portanto, $u_n \to u$ e $I(u) = c > 0$ com $I'(u) = 0$, pois I é um funcional C^1. Assim, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca não trivial do problema (P). □

Apêndice A

Teorema de Linking

Neste apêndice, enunciaremos algumas definições e resultados necessários para a demonstração do Teorema de Linking.

Definição A.1. *Seja X um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$, dado $d \in \mathbb{R}$ definiremos φ^d como o conjunto de todos os pontos de níveis menores ou iguais a d, ou seja,*

$$\varphi^d = \{u \in X;\ \varphi(u) \leq d\}$$

Definição A.2. *Dado $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e seja $S \subset X$ com $\alpha > 0$, designamos por S_α a vizinhança fechada de S definida por*

$$S_\alpha = \{u \in X :\ d(u,S) \leq \alpha\}$$

em que $d(u,S) = \inf\{\|u-v\| :\ v \in S\}$.

Definição A.3. *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$, um funcional de classe C^1. Suponha que existam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tais que*

$$I(u_n) \to c \text{ e } \|I'(u_n)\|_{X^*}(1 + \|u_n\|) \to 0,$$

então dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami no nível c para I, ou de forma abreviada, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência $(C)_c$ para I. Além disso, dizemos que I satisfaz a condição de Cerami no nível c, quando toda sequência $(C)_c$ para I, possui uma subsequência convergente.

Vamos denotar a bola unitária em $\mathbb{R}^N$ por $B^N := \overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \leq 1\}$ e a esfera unitária, a fronteira de uma bola unitária, por $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| = 1\} = \partial B^N$.

Definição A.4. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Uma retração de X em A é uma aplicação $R : X \to A$ tal que $R(x) = x$ para todo x em A.*

Teorema A.1 (Teorema da Não Retração)**.** *Não existe uma retração contínua de B^N em $\mathbb{S}^{N-1}$.*

Lema A.1 (Lema da Deformação). *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R}), S \subset X, c \in \mathbb{R}$ $\varepsilon, \delta > 0$ tais que*

$$(\text{A.1}) \qquad (\forall\ u \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}) : (1+\|u\|)\|\varphi'(u)\|_{X^*} \geq 8\varepsilon/\delta$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(i) $\eta(t,u) = u$ *se* $t = 0$ *ou se* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$

(ii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$

(iii) $\eta(t,\cdot) = u$ *é um homeomorfismo de* X, $\forall\ t \in [0,1]$

(iv) $\|\eta(t,u) - u\| \leq \delta, \forall\ u \in X$

(v) $\varphi(\eta(\cdot,u))$ *é não crescente,* $\forall\ u \in X$

(vi) $\varphi(\eta(t,u)) < c, \forall\ u \in \varphi^c \cap S_\delta, \forall\ t \in (0,1]$.

Teorema A.2. *Sejam X um espaço de Banach, M_0 um subespaço fechado de um espaço métrico M e $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Defina*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M,X);\ \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}$$

Se $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz

$$(\text{A.2}) \qquad +\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u))$$

então, para todo $\varepsilon \in \left(0, \frac{c-a}{2}\right), \delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que

$$(\text{A.3}) \qquad \sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon,$$

existe $u \in X$ tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

(b) $dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$;

(c) $(1+\|u\|)\|\varphi'(u)\|_{X^*} < 8\varepsilon/\delta$.

Demonstração. Suponhamos que existe $\varepsilon \in \left(0, \frac{c-a}{2}\right), \forall\ \delta > 0, \forall \gamma \in \Gamma$ e $\sup\limits_M \varphi \circ \gamma \leq c + \varepsilon$ para cada $u \in X, c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$ mas $(1+\|u\|)\|\varphi'(u)\|_{X^*} > \frac{8\varepsilon}{\delta}$. Logo, as hipóteses do Lema A.1 são satisfeitas com $S := \gamma(M)$. Assumimos que

$$(\text{A.4}) \qquad c - 2\varepsilon > a$$

Assim, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$. Definamos

$$\beta : M \to X$$

$$u \mapsto \beta(u) = \eta(1, \gamma(u))$$

Para todo $u \in M_0$, e para cada $\gamma_0 \in \Gamma_0$, temos por (A.2) e da desigualdade (A.4) que

$$\varphi(\gamma_0(u)) \leq a < c - 2\varepsilon.$$

Segue disso que $\gamma_0(u) \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$. Pelo item (i) do Lema A.1, temos

$$\beta(u) = \eta(1, \gamma_0(u)) = \gamma_0(u)$$

logo $\beta \in \Gamma$. Segue de A.3 que

$$\gamma(u) \in \varphi^{c+\varepsilon} \quad \forall\ u \in M.$$

Então, pelo item (ii) do Lema A.1 obtemos

$$\varphi(\beta(u)) = \varphi(\eta(1, \gamma(u))) \leq c - \varepsilon \quad \forall\ u \in M.$$

Logo, $\sup_{u \in M} \varphi(\beta(u)) \leq c - \varepsilon$ o que é uma contradição pela definição de c. □

Teorema A.3. *Sejam X um espaço de Banach, M_0 um subespaço fechado de um espaço métrico M e $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Defina*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M, X);\ \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}$$

Se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz

$$+\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u))$$

então existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ satisfazendo

$$\varphi(u_n) \to c, \quad (1 + \|u\|)\|\varphi'(u_n)\|_{X^*} \to 0.$$

Em particular, se φ satisfaz a condição $(C)_c$, então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. Pelo Teorema A.2, para $\varepsilon \in \left(0, \frac{c-a}{2}\right)$ existe $u \in X$ tal que

$$c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon \ e\ (1 + \|u\|)\|\varphi'(u)\|_{X^*} \leq 8\varepsilon/\delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $\varepsilon = \frac{c-a}{2n}$. Então, existe $u_n \in X$ tal que

$$c - \frac{c-a}{n} \leq \varphi(u_n) \leq c + \frac{c-a}{n}$$

$$e$$

$$(1 + \|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|_{X^*} \leq \frac{8(c-a)}{n\delta}$$

Assim, quando $n \to +\infty$, temos

$$c \leq \lim_{n\to+\infty} \varphi(u_n) \leq c \text{ e}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(1 + \|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|_{X^*} \leq 0.$$

Portanto, $\varphi(u_n) \to c$ e $(1 + \|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|_{X^*} \to 0$. □

Teorema A.4 (Teorema de Linking sob a condição $(C)_c$)**.** *Seja $X = Y \oplus Z$ um espaço de Banach com $\dim Y < \infty$. Seja $\rho > r > 0$ e seja $z \in Z$ tal que $\|z\| = r$. Defina*

$$\begin{aligned} M &:= \{u = y + \lambda z : \ \|u\| \leq \rho, \ \lambda \geq 0, \ y \in Y\} \\ M_0 &:= \{u = y + \lambda z : \ y \in Y, \ \|u\| = \rho \text{ e } \lambda \geq 0 \text{ ou } \|u\| \leq \rho \text{ e } \lambda = 0\} \\ N_r &:= \{u \in Z; \ \|u\| = r\} \end{aligned}$$

Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que

$$b := \inf_{N_r} \varphi > a := \max_{M_0} \varphi.$$

Então $c \geq b$ e existe uma sequência $(C)_c$ de φ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in M} \varphi(\gamma(u)) \qquad\qquad \Gamma := \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_{M_0} = id\}$$

então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. Mostraremos primeiro que $c \geq b$. Para isso, vamos provar que, para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(M) \cap N_r \neq \emptyset$. Denote por P a projeção sobre Y tal que $P_Z = \{0\}$ e por R a retração de $Y \oplus \mathbb{R}z \setminus \{z\}$ sobre M_0. Se $\gamma(M) \cap N_r = \emptyset$, então a aplicação

$$\begin{aligned} r : &M \to M_0 \\ &u \mapsto R(P\gamma(u) + \|(I - P)\gamma(u)\|r^{-1}z) \end{aligned}$$

é uma retração de M sobre M_0. De fato, para $u = y + \lambda z \in M_0$ segue que

$$\begin{aligned} r(u) &= R(P\gamma(u) + \|(I - P)\gamma(u)\|r^{-1}z) \\ &= R(P\gamma(y + \lambda z) + \|(I - P)\gamma(y + \lambda z)\|r^{-1}z) \\ &= R(P(y + \lambda z) + \|y + \lambda z - P(y + \lambda z)\|r^{-1}z) \\ &= R(y + \|y + \lambda z - y\|r^{-1}z) \\ &= R(y + \lambda\|z\|r^{-1}z) = y + \lambda z = u, \end{aligned}$$

o que é uma contradição pelo Teorema A.1. Assim, $\gamma(M) \cap N_r \neq \emptyset$. Então, existe $v \in \gamma(M) \cap N_r$ tal que

$$\max_M(\varphi \circ \gamma) \geq \varphi(\gamma(u)) = \varphi(v) \geq \inf_{N_r} \varphi = b.$$

Portanto,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in M} \varphi(\gamma(u)) \geq b$$

isto é, $c \geq b$. Considerando $\varepsilon = \frac{c-a}{2n}$, pelo Teorema A.3, existe uma sequência de Cerami $(C)_c$ em que c é um valor crítico de φ. $\square$

Apêndice B

Convergência uniforme da estimativa (4.1)

Seja ∂B_1 o bordo de B_1, em que B_1 é uma bola aberta de raio 1 em um espaço de dimensão finita gerado pelas funções $u_0^+(\cdot - y),\ \phi_1, \ldots, \phi_k$. Queremos provar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(R\overline{u})}{(R\overline{u})^2} \right) \overline{u}^2 dx = 0$$

uniformemente para $\overline{u} \in \partial B_1$.

Para cada $R = k \in \mathbb{N}$, considere $J_k : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ o funcional dado por $J_k(\overline{u}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(k\overline{u})}{(k\overline{u})^2} \right) \overline{u}^2 dx$. A continuidade da função F mostra que J_k é um funcional contínuo para cada k fixo. A Afirmação 4.1 e a equivalência de normas nos mostram que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J_k(\overline{u}) \leq |J_k(\overline{u})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(k\overline{u})}{(k\overline{u})^2} \right) \overline{u}^2 dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{m}{2} - \frac{F(k\overline{u})}{(k\overline{u})^2} \right| |\overline{u}|^2 dx \leq m\|\overline{u}\|_E^2 \leq C \end{aligned}$$

para todo $\overline{u} \in \partial B_1$. A continuidade do funcional J_k no conjunto compacto ∂B_1 nos garante que, para k fixo, o funcional J_k assume o máximo em $u_k \in \partial B_1$.

Considere (u_k) a sequência desses máximos. Como $\|u_k\| = 1$ para cada k, e o espaço gerado pelas funções $u_0^+(\cdot - y), \phi_1, \cdots, \phi_k$ é de dimensão finita, existe $\tilde{u} \in \partial B_1$ tal que, passando a uma subsequência se necessário,

$$u_k \to \tilde{u} \tag{B.1}$$

fortemente na norma $\|\cdot\|$. Para todo $\overline{u} \in \partial B_1$ e para cada k, temos $0 \leq J_k(\overline{u}) \leq J_k(u_k)$, isto é,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(k\overline{u})}{(k\overline{u})^2} \right) \overline{u}^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k)}{(ku_k)^2} \right) u_k^2 dx \tag{B.2}$$

para todo $\overline{u}$ e para cada k. Tomando o limite $k \to \infty$, primeiro note que $u_k(x) \to \tilde{u}(x)$ em quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$. Dessa forma, se $\tilde{u}(x) \neq 0$ segue que $|k\tilde{u}(x)| \to \infty$ se $k \to \infty$. Consequentemente, a hipótese (f_2) nos dá

$$\left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k(x))}{(ku_k(x))^2}\right) u_k(x)^2 \to 0 \text{ } se \text{ } k \to \infty, \tag{B.3}$$

pois o primeiro termo converge para zero e u_k é limitado. Se $\tilde{u}(x) = 0$, então o primeiro termo será limitado e também teremos (B.3). Pela convergência forte em (B.1), existe uma função $\tilde{h} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, passando a uma subsequência se necessário,

$$0 \leq \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k(x))}{(ku_k(x))^2}\right) u_k(x)^2 \leq m|u_k^2(x)| \leq \tilde{h}(x) \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{B.4}$$

Finalmente, por (B.3) e (B.4), o Teorema da Convergência dominada 1.2 nos garante que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k)}{(ku_k)^2}\right) u_k^2 dx = 0.$$

Fazendo $k \to \infty$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(k\tilde{u})}{(k\tilde{u})^2}\right) \tilde{u}^2 dx = 0.$$

Então, da desigualdade apresentada em (B.2), podemos concluir que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(k\overline{u})}{(k\overline{u})^2}\right) \overline{u}^2 dx = 0 \tag{B.1}$$

uniformemente em $\overline{u} \in \partial B_1$.

Referências Bibliográficas

[1] EGOROV, YURI AND KONDRATIEV, VLADIMIR, *On Spectral Theory of Elliptic Operators* Advances and Applications, vol. 89, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[2] A. STUART, *An Introdution to Elliptic Equantions on* $\mathbb{R}^n$, Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential equations (Trieste, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 237–285

[3] D. G. COSTA AND H. TEHRANI *Existence and multiplicity results for a class of Schrödinger equations with indefinite nonlinearities* Adv. Differential Equations 8 (2003), no. 11, 1319–1340.

[4] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations* New York; Sringer, 2010.

[5] BARTLE, ROBERT G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.*

[6] BOTELHO, GERALDO *Fundamentos de Análise Funcional*/ Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira. - Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[7] H. BERESTYCK AND P.-L. LIONS *Nonlinear Scalar Field Equations, I Existence of a Ground State* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 313 - 345.

[8] P. L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéarie **1** (1984), no. 2, 109 - 145 (English, with French summary).

[9] P. L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéarie **1** (1984), no. 4, 223 - 283 (English, with French summary).

[10] G. CERAMI, D. PASSASEO, *Positive solutions of semilinear elliptic problems in unbouded domains with unbounded boundary.* Ann, I. Poincaré a **24**, no. 1, (2007), 41 - 60.

[11] N. ACKERMANN, M. CLAPP, AND F. PACELLA, *Alternating sign multibump solutions of linear elliptic equations in expanding tubular domains*, Comm. Partial Differential Equations **38** (2013) no. 5, 751 - 779.

[12] MEDEIROS, Luis Adauto da Justa e MIRANDA, Manuel Antolino Milla *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos Não Homogêneos*, Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000. 151p.

[13] Ackermann, Nils; Clapp, Mónica and Pacella, Filomea *Alternating Sign Multibump Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in Expanding Tubular Domains*, Communications in Partial Differential Equations, 2013, 38:5, 751-779.

[14] MAIA, Liliane de Almeida; JUNIOR, José Carlos Oliveira and RUVIARO, Ricardo, *A Non-periodic and Assymptopically Linear Indefinite Variational Problem in* $\mathbb{R}^N$, Indiana University Journal, Vol 66, No. 1 (2017).

[15] G. CERAMI, *An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds*, Inst. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **112** (1978), no. 2, 332-336 (1979) (Italian)

[16] G. LI and C. Wang, *The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic problem of linking type without the Ambrosetti - Rabinowitz condition*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math **36** (2011), no. 2, 461-480.

[17] P. H. Rabinowitz, *Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), no. 1, 215 - 223.

[18] Evans, L *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2ª Ed., 2010.

[19] KURDILA, A. J., ZABARANKIN, M. *Convex Functional Analysis*, System & Control: Fundations & Applicatons; Birkhäuser.

[20] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, V. 24. Birkhäuser

[21] W. Kryszewski e A. Szulkin, *Generalized Linking Theorem with Application to Semilinear Schrödinger Equation*, Adv. Diff. Equas., **3** (1998), 441-472.

[22] A. A. Pankov, *Periodic Nonlinear Schrödinger Equation with Application to Phonic Crystal*, Milan J. Math, **73** (2005), 259 - 287.

[23] A. Szulkin e T. Weth, *Ground State Solutions for some Indefinite Variational Problems*, J. Func. Anal., **257** (2009), 3802 - 3822.

[24] L. Jeanjean e K. Tanaka, *A Positive Solution for an Asymptotically Linear Elliptic Problem in* $\mathbb{R}^N$ *Autonomous at Infinity*, ESAIM Control Optim, Calc. Var, **7** (2002), 597 - 614.