UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Movimento Browniano como Rough Path

Davi Wanderley Misturini

Manaus

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Davi Wanderley Misturini

O Movimento Browniano como Rough Path

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mikhail Neklyudov

Manaus
2020

Poder Executivo
Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ata de Defesa Pública de Dissertação do aluno **Davi Wanderley Misturini** do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática – PPGM/UFAM.

Às 14:00 horas do dia 28 de fevereiro de 2020, foi realizada no Auditório Professor José Henrique de Sá Mesquita do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas, a Defesa Pública de Dissertação do discente **Davi Wanderley Misturini, Matrícula: 2170513,** Intitulada: **"O Movimento Browniano como Rough Path"** como parte final de seu trabalho para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**. A Banca Examinadora, instituída pela **Portaria nº 08/2020 – PPGM/UFAM**, constituiu-se dos seguintes Professores Doutores: **José Nazareno Vieira Gomes - UFSCar (Presidente); Dragomir Mitkov Tsonev - UFAM (Membro); Hudson do Nascimento Lima - UFPR (Membro Externo).** Após a apresentação do trabalho, os examinadores fizeram as perguntas concernentes e em seguida, a Banca Examinadora reuniu-se para deliberar e considerou o discente Aprovado. Nada mais havendo a tratar, a reunião foi encerrada e lavrou-se a ata que vai assinada por todos os membros.

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Presidente)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Hudson do Nascimento Lima (Membro Externo)
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M678m

Misturini, Davi Wanderley

O Movimento Browniano como Rough Path / Davi Wanderley Misturini. 2020

62 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Mikhail Neklyudov

Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Movimento Browniano. 2. Rough Path. 3. Relações de Chen. 4. Integral de Itô. 5. Integral de Stratonovitch. I. Neklyudov, Mikhail II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

À minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus queridos pais (Sônia e Arlindo) e irmãos (Filipe, Carol e Camila) pelo apoio dado desde o início dessa jornada. Sem o amparo e conselho de vocês, estar hoje aqui seria quase impossível.

Agradeço aos meus estimados e talentosos companheiros, cuja amizade iniciara desde os tempos de graduação e perdura até hoje: Matheus, Wington, Sérgio, Fábio e André.

Agradeço ao meu amigo e professor Danilo Benarrós, por todo suporte fornecido nos meses finais do curso de mestrado.

Agradeço ao meu eminente orientador, Mikhail Neklyudov, por pela ajuda, paciência e acessibilidade. A todos os professores do Departamento de Matemática, em particular ao professor Roberto Prata e José Nazareno, pelas recomendações e acompanhamento e ao professor Hudson Lima pelas sugestões e por aceitar o convite em fazer parte da banca.

Meus agradecimentos também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento por meio da concessão de bolsa durantes os meses de estudo.

Por fim, e não menos importante, sou grato a Deus pelo dom da vida.

“Tudo o que temos de decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado”.

Gandalf

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos o Movimento Browniano do ponto de vista da teoria de Rough Path, abordagem desenvolvida por Terry Lyons na década de 1990. Tal teoria oferece uma alternativa conveniente ao cálculo estocástico de Itô no estudo de equações diferenciais estocásticas. Como pré-requisitos, construiremos o Movimento Browniano clássico através do Teorema de Extensão de Daniell-Kolmogorov e introduziremos os conceitos de integrais de Itô e Stratonovitch.

Palavras-chave: Movimento Browniano, Rough Path, Relações de Chen, Integral de Itô, Integral de Stratonovitch.

ABSTRACT

In this paper we will present the Brownian Motion from the point of view of the Rough Path theory, an approach developed by Terry Lyons in the 1990s. This theory offers a convenient alternative to the Itô stochastic calculation in the study of stochastic differential equations. As prerequisites, we will build the classic Brownian Movement using the Daniell-Kolmogorov Extension Theorem and introduce the concepts of Itô and Stratonovitch integrals.

Keywords: Brownian Motion, Rough Path, Chen relations, Itô Integral, Stratonovitch Integral.

Conteúdo

Introdução

O intuito desse trabalho é apresentarmos o conceito de movimento browninano sob o ponto de vista da teoria de rough path's, inicialmente desenvolvida por Terry Lyons na década de 1990.

No Capítulo 1, apresentamos algumas preliminares da teoria clássica de probabilidade, como os conceitos de esperança condicional e processos estocásticos. Neste capítulo também abordamos dois resultados fundamentais na demonstração da existência do movimento browniano clássico: o Teorema de Existência de Daniell-Kolmogorov e o Teorema de Continuidade de Kolmogorov.

No Capítulo 2, abordamos o conceito de Martingale bem como demonstramos a existência do movimento browniano, além de propriedades básicas inerentes a esse processo.

No Capítulo 3, introduzimos as noções de integral de Itô e integral de Stratonovitch.

No Capítulo 4, apresentamos os conceitos de caminhos com p-variação finita, as notações das integrais iteradas utilizadas, bem como a demonstração as relações de Chen.

Por fim, no Capítulo 5, demonstramos o resultado principal do texto: o movimento browniano é um p-rough path com $2 < p < 3$. Além disso, são provadas alguns resultados preliminares, como a importante Desigualdade de Garsia-Rodemich-Rumsey.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentamos algumas das definições e resultados básicos conhecidos na teoria clássica de probabilidade, utilizando um pouco de teoria da medida. Boa parte das demonstrações serão omitidas. Desta forma, recomendamos Evans [2], Capítulo 2 para mais detalhes.

1.1 Espaços de Probabilidade

Definição 1.1. Uma σ-álgebra é uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então seu complemento $A^{\complement} := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;

(iii) Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, então $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Definição 1.2. Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Denominamos

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

uma *medida de probabilidade* quando:

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$;

(ii) Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

valendo a igualdade caso os A_i sejam dois a dois disjuntos.

Definição 1.3. A tripla

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

é denominada *espaço de probabilidade*, onde Ω é não-vazio, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade em $\mathcal{F}$.

Além disso, estabelecemos que

(i) Um conjunto $A \in \mathcal{F}$ é denominado *evento*;

(ii) $\mathbb{P}(A)$ é a probabilidade do evento A ocorrer;

(iii) Se $\mathbb{P}(A) = 1$, diremos que "A ocorre com probabilidade 1", ou "*quase certamente*" (*q.c.*).

Exemplo 1.1. A menor σ-álgebra contendo todos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^d$ é denominada *σ-álgebra de Borel*, denotada por $\mathcal{B}$. Se assumirmos que f é não-negativa, integrável, que $\int_{\mathbb{R}^d} f dx = 1$ e

$$\mathbb{P}(B) := \int_B f(x)dx$$

para cada $B \in \mathcal{B}$, então $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ definirá um espaço de probabilidade. Denominamos f de função *densidade* da medida de probabilidade $\mathbb{P}$.

1.1.1 Variáveis Aleatórias e Função de Distribuição

Podemos pensar em espaços de probabilidade como uma construção essencialmente matemática que, no entanto, não é "diretamente observável". Estamos interessados em construir aplicações X de Ω em $\mathbb{R}^d$ cujos valores podemos observar. Para isso, introduzimos o conceito de *variáveis aleatórias*, um dos objetos essenciais em nosso estudo:

Definição 1.4. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. A aplicação

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

é uma *variável aleatória* n-dimensional se para cada $B \in \mathcal{B}$, tivermos

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Equivalentemente diremos que X é *$\mathcal{F}$-mensurável*.

Observação 1.1. Por hora, denotamos “X” ao invés de “$X(\omega)$”. Além disso, denotamos $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$ como $\mathbb{P}(X \in B)$, que indica a probabilidade de X tomar valores em B.

Exemplo 1.2. Seja $A \in \mathcal{F}$. A *função indicadora* de A,

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A, \end{cases}$$

é uma varíavel aleatória. De fato, observe que

$$\chi_A^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \,|\, \chi_A(\omega) \in B\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } 0 \notin B \text{ e } 1 \notin B \\ A^{\complement}, & \text{se } 0 \in B \text{ e } 1 \notin B \\ A, & \text{se } 0 \notin B \text{ e } 1 \in B \\ \Omega, & \text{se } 0 \in B \text{ e } 1 \in B \end{cases}$$

Em qualquer caso, $\chi_A^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Exemplo 1.3. Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathscr{F}$, com $\Omega = \bigcup_{i=1}^m A_i$, e $a_1, a_2, \ldots, a_m$ são números reais, então

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$$

é uma variável aleatória, denominada *função simples*.

Assumiremos também o conhecimento de algumas propriedades padrões em teoria de medida como, por exemplo, que soma e produtos de variáveis aleatórias são também variáveis aleatórias.

Lema 1.1. Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória. Então

$$\mathscr{F}(X) := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

é uma σ-álgebra, denominada *σ-álgebra gerada* por X. Esta é a menor sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ com respeito a qual X é mensurável.

Observação 1.2. É essencial entender que, em termos probabilísticos, a σ-álgebra $\mathcal{F}(X)$ pode ser interpretada como “contendo toda informação relevante” sobre a variável aleatória X.

Definição 1.5. Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória com valores em $\mathbb{R}^n$. Denotamos

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

a *esperança* (ou *expectativa*) de X e

$$\mathbb{V}(X) := \int_\Omega |X - \mathbb{E}(X)|^2 d\mathbb{P}$$

a *variância*, onde $|\cdot|$ denota a norma Euclideana.

Uma noção importante é a de independência entre variáveis aleatórias. De modo geral, vale a seguinte definição:

Definição 1.6. Sejam $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ variáveis aleatórias ($i = 1, 2, \dots$). Diremos que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots$ são *independentes* se, para todo inteiro $k \geq 2$ e para todos conjuntos de Borel $B_1, \dots, B_k \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_k \in B_k) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2) \cdots \mathbb{P}(X_k \in B_k).$$

Isso é equivalente a afirmar que as σ-álgebras $\{\mathcal{F}(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$ são independentes.

Teorema 1.1. Sejam $X_1, \dots, X_m$ variáveis aleatórias independentes tomando valores em $\mathbb{R}$ com $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$ ($i = 1, \dots, m$). Então $\mathbb{E}(|X_1 \cdots X_m|) < \infty$ e

$$\mathbb{E}(X_1 \cdots X_m) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_m).$$

Consideremos agora $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. A notação $x \leq y$ significa, neste caso, que $x_i \leq y_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Definição 1.7. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e suponha $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória.

(i) A *função de distribuição* de X é a função

$$F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

definida por

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Mais geralmente, se $X_1, \ldots, X_m : \Omega \to \mathbb{R}^n$ são variáveis aleatórias, a *função de distribuição conjunta* é a função

$$F_{X_1,\ldots,X_m} : (\mathbb{R}^n)^m \to [0,1]$$

definida por

$$F_{X_1,\ldots,X_m}(x_1,\ldots,x_m) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_m \leq x_m)$$

para todo $x_k \in \mathbb{R}^n$ e $k = 1, \ldots, m$.

Definição 1.8. Suponha $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória e $F = F_X$ é sua função de distribuição. Se existir uma função integrável não negativa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n) dy_n \ldots dy_1,$$

então f é denominada função *densidade* de X.

Segue daí então que

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}. \tag{1.1}$$

Essa é uma fórmula interessante, uma vez que a igualdade no lado direito é uma integral ordinária a qual sempre poderá ser calculada explicitamente.

Lema 1.2. Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória, e assuma que sua função de distribuição $F = F_X$ possui densidade f. Considere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e que $g(X)$ é integrável. Então

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)dx.$$

Definição 1.9. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é *Gaussiana* (ou *normal*) se, e somente se, X possui densidade na forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{|x-m|^2}{2\sigma^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Assim, diremos que X possui média m e variância σ^2 e denotaremos

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

Neste caso,

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m$$

e

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X-m)^2] = \int_\mathbb{R} (x-m)^2 f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

De modo mais geral, se $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ possui densidade

$$f_X(x) = \frac{1}{((2\pi)^n \det C)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)\cdot C^{-1}(x-m)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

para algum $m \in \mathbb{R}^n$ e alguma matriz simétrica positiva definida C, diremos que X possui distribuição *Gaussiana* (ou *normal*) com média m e matriz de covariância C. Escreveremos

$$X \sim N(m, C).$$

1.1.2 Alguns métodos probabilísticos

Apresentamos algumas ferramentas probabilísticas úteis para o entendimento de algumas passagens no texto.

Começamos com a seguinte estimativa:

Lema 1.3 (Desigualdade de Chebyshev)**.** Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma variável aleatória tal que

$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \quad \text{para algum } p > 0. \tag{1.3}$$

Então,

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}(|X|^p) \quad \text{para todo } \lambda \geq 0. \tag{1.4}$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_\Omega |X|^p d\mathbb{P} \geq \int_{\{|X| \geq \lambda\}} |X|^p d\mathbb{P} \geq \lambda^p \mathbb{P}(|X| \geq \lambda).$$

□

Definição 1.10. Seja $A_1, \dots, A_n, \dots$ eventos em um espaço de probabilidade. Então o evento

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ pertence a uma quantidade infinita dos } A_n\text{'s}\}$$

é denominado "A_n *ocorre infinitamente*", ou, abreviadamente, "A_n *o.i.*".

Lema 1.4 (Borel-Cantelli)**.** Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$$

então

$$\mathbb{P}(A_n \ o.i.) = 0.$$

Demonstração. Sabemos que A_n o.i. $= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_m$. Assim, para cada n, pela subaditividade de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(A_n \text{ o.i}) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m).$$

Portanto, fazendo $n \to \infty$, o limite do lado direito é nulo, uma vez que $\sum \mathbb{P}(A_m) < \infty$ por hipótese. □

1.2 Esperança Condicional

Definição 1.11. Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Para qualquer variável aleatória integrável X e qualquer evento $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, a *esperança condicional* de X dado B é dada como

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}.$$

Definição 1.12. Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas em Ω. A *esperança condicional* de X dado Y é qualquer variável aleatória Z, $\mathcal{F}(Y)$-mensurável, tal que

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Z d\mathbb{P} \quad \text{para todos } A \in \mathcal{F}(Y).$$

Definição 1.13. Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma variável aleatória integrável no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ e suponha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ uma sub-σ-álgebra. Definimos a *esperança condicional* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ como uma variável aleatória $\mathcal{F}$-mensurável tal que

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) d\mathbb{P} \tag{1.5}$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

É importante destacar ainda que a esperança condicional é única, a menos de eventos com probabilidade zero, conforme indica o resultado seguinte.

Teorema 1.2. Seja $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória integrável. Então para cada sub-σ-álgebra $\mathcal{F}$ de $\mathcal{U}$, a esperança condicional $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ existe e é única a menos de $\mathcal{F}$-mensuráveis conjuntos de probabilidade zero.

Valem ainda as seguintes propriedades acerca da esperança condicional:

Teorema 1.3. Sejam X e Y variáveis aleatórias integráveis em $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{F}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{U}$. Temos que

1. $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}(Y))$.

2. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$

3. $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{W})$, onde $\mathcal{W} = \{\emptyset, \Omega\}$ é a σ-álgebra trivial.

4. Se a,b são constantes, então

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \;\; q.c.$$

5. Se X é $\mathcal{F}$-mensurável, então

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X \;\; q.c.$$

6. Se X é $\mathcal{F}$-mensurável e XY integrável, então

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \;\; q.c.$$

7. Se X é independente de $\mathcal{F}$, então

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X) \;\; q.c.$$

8. Se $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$, temos

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{W}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{W}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{W})|\mathcal{F}) \ \ q.c.$$

9. A inequação $X \leq Y \ q.c.$ implica

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \ \ q.c.$$

Demonstração. Demonstremos cada um dos itens acima:

1. Segue direto da definição, já que Y é $\mathcal{F}(Y)$-mensurável.

2. Tomando $A = \Omega$ em (1.5), temos

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \int_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X).$$

3. No caso $\mathcal{W} = \Omega$ segue que

$$\mathbb{E}(X|\Omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega)} \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X).$$

O caso $\mathcal{W} = \emptyset$ é claro, já que tudo se iguala a zero.

4. Para todo $A \in \mathcal{F}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_A (a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}))\, d\mathbb{P} &= a\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} + b\int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} \\
&= a\int_A X d\mathbb{P} + b\int_A Y d\mathbb{P} \\
&= \int_A (aX + bY) d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

5. Como $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ e X é $\mathcal{F}$-mensurável, então segue pela unicidade que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X \ q.c.$.

6. Pela unicidade $q.c.$ de $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F})$, basta mostrarmos que

$$\int_A X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A XY d\mathbb{P} \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{F}.$$

Consideremos $X = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}$, onde $B_i \in \mathcal{F}$ para $i = 1, \ldots, m$. O caso geral segue por aproximação de funções simples. Temos que:

$$\begin{aligned}
\int_A X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} &= \sum_{i=1}^m b_i \underbrace{\int_{A\cap B_i}}_{\in\mathcal{F}} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=1}^m b_i \int_{A\cap B_i} Y d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=1}^m b_i \int_A \chi_{B_i} Y d\mathbb{P} \\
&= \int_A \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i} Y' d\mathbb{P} = \int_A XY d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

7. Assumamos que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ e tome $A \in \mathcal{W}$. Então

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{W})d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{W})d\mathbb{P},$$

já que $A \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$. Então $\mathbb{E}(X|\mathcal{W}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{W})$ q.c..

8. Assumamos novamente que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ e tome $A \in \mathcal{W}$. Por definição, $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ para todo $A \in \mathcal{F}$ e $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{W})d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ para todo $A \in \mathcal{W}$. Logo,

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{W})d\mathbb{P} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}.$$

Por definição novamente, $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{W})d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{W})|\mathcal{F})d\mathbb{P}$. Portanto,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{W})|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{W}) \quad q.c.$$

Além disso, por (i), temos que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{W})|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{W})$ já que $\mathbb{E}(X|\mathcal{W})$ é $\mathcal{W}$-mensurável, logo $\mathcal{F}$-mensurável.

9. Suponha que $X \leq Y$. Observe que

$$\int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) - \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})d\mathbb{P} = \int_A (Y - X)d\mathbb{P} \geq 0$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. Defina $A \coloneqq \{\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq 0\}$. Este evento pertence à $\mathcal{F}$ e $P(A) = 0$. Portanto, $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ *q.c.*

□

1.3 Espaço de funções e processos estocásticos

Nos basearemos em Baudoin [1], página 6-10, como referência às notações dadas nas definições e resultados desta seção.

Seja $\mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, o conjunto das funções de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ em $\mathbb{R}^d$. Denotamos $\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos

$$\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), f(t_1) \in I_1, \ldots, f(t_n) \in I_n\},$$

onde $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $I_i = \prod_{k=1}^{d}(a_i^k, b_i^k]$, com $i = 1, \ldots, n$.

Observação 1.3. A σ-álgebra $\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ é também gerada pelas famílias

$$\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), f(t_1) \in \mathcal{B}_1, \ldots, f(t_n) \in \mathcal{B}_n\},$$

onde $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ são os conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^d$.

Estamos também interessados em processos formados por caminhos contínuos. Neste caso, usaremos o espaço das funções contínuas $\mathscr{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ munido de uma σ-álgebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ gerada por

$$\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), f(t_1) \in I_1, \ldots, f(t_n) \in I_n\},$$

onde novamente consideramos $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $I_i = \prod_{k=1}^{d}(a_i^k, b_i^k]$, com $i = 1, \ldots, n$.

Proposição 1.1. A σ-álgebra de Borel de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ é a mesma que a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos.

Definição 1.14. Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Um *processo estocástico d-dimensional* é uma família $(X_t)_{t\geq 0}$ de variáveis aleatórias em $\mathbb{R}^d$ que são mensuráveis com respeito à $\mathscr{F}$.

O processo $(X_t)_{t\geq 0}$ pode também ser visto como uma aplicação

$$X(\omega) \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), \qquad t \to X_t(\omega).$$

As aplicações $t \to X_t(\omega)$ são chamadas de *caminhos* do processo e a medida de probabilidade definida por

$$\mu(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)), A \in \mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$$

é chamada de *lei* (ou *distribuição*) de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Exemplo 1.4. Para $t \geq 0$, detonamos por π_t a aplicação que leva funções $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ em $f(t)$:

$$\pi_t : f \to f(t).$$

O processo estocástico $(\pi_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$, definido em $(\mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}), \mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), \mu)$, é denominado *processo canônico associado* a X.

Definição 1.15. Um processo $(X_t)_{t \geq 0}$ é dito *mensurável* se a aplicação

$$(t, \omega) \to X_t(\omega)$$

é mensurável com respeito à σ-álgebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{F}$. Isto significa que

$$\text{para todo } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \text{ temos } \quad \{(t, \omega), X_t(\omega) \in A\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{F}.$$

Vale observar que os caminhos de um processo mensurável são funções mensuráveis de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ em $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.16. Se um processo X toma valores em $\mathscr{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$, isto é, se os caminhos de X são funções contínuas, então tal processo é dito *contínuo*. Neste caso, a aplicação

$$X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathscr{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}))$$

é mensurável e a distribuição de X é uma medida de probabilidade no respectivo espaço de chegada $(\mathscr{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}))$. Além disso, um processo contínuo também é mensurável no sentido da Definição 1.15.

1.4 Teorema de Daniell-Kolmogorov

O teorema de extensão de Daniell-Kolmogorov é uma forma não-construtiva de assegurar que coleções de distribuições finito-dimensionais irão definir, sob determinadas hipóteses, processos estocásticos em espaços de probabilidade. Este resultado pode ser útil para assegurarmos a existência do Movimento Browniano, um dos principais objetos definidos neste texto. A demonstração deste resultado é bastante técnica e nos restringiremos ao caso unidimensional.

Definição 1.17. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo estocástico e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Para conjuntos de Borel $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}$, definimos

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}(\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n) = \mathbb{P}[X_{t_1} \in \mathcal{B}_1, \ldots, X_{t_n} \in \mathcal{B}_n].$$

Mais geralmente, definimos $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ (uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}^n$) por

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in \mathcal{B}], \quad \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n \text{ Borel}.$$

Dizemos que $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ é a *distribuição finito-dimensional* do processo $(X_t)_{\geq 0}$.

Considere $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ uma permutação. As distribuições finito-dimensionais de um dado processo satisfazem as seguintes propriedades:

(1) *(Invariância por permutações)*

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}_{t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(n)}}(A_{\tau(1)} \times \cdots \times A_{\tau(n)}),\ A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R});$$

(2) *(Invariância por projeções)*

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}),\ A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Antes de enunciarmos e provarmos o Teorema de extensão de Daniell-Kolmogorov, recordaremos o Teorema de Carathéodory, muito utilizado para construção de medidas, e provaremos um lema sobre existência de uma sequência de conjuntos compactos que nos será útil.

Definição 1.18. Considere Ω um conjunto não-vazio. Uma família $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω é dita uma *álgebra* quando as seguinte propriedades são satisfeitas:

(1) $\Omega \in \mathscr{A}$;

(2) Se $A, B \in \mathscr{A}$, então $A \cup B \in \mathscr{A}$;

(3) Se $A \in \mathscr{A}$, então $\Omega \setminus A \in \mathscr{A}$.

Teorema 1.4 (Teorema de Carathéodory)**.** Seja Ω um conjunto não-vazio e $\mathscr{A}$ uma álgebra. Considere $\sigma(\mathscr{A})$ a σ-álgebra gerada por $\mathscr{A}$. Se μ_0 é uma medida σ-aditiva em $(\Omega, \mathscr{A})$, então existe uma única medida σ-aditiva μ em $(\Omega, \sigma(\mathscr{A}))$ tal que para $A \in \mathscr{A}$,

$$\mu_0(A) = \mu(A)$$

Lema 1.5. Seja $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ uma sequência de conjuntos de Borel que satisfazem

$$\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n \times \mathbb{R}.$$

Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a medida de probabilidade $\mathbb{P}_n$ é dada em $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ e que tais medidas de probabilidade são compatíveis, no sentido de que

$$\mathbb{P}_n(A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}_{n-1}(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}), \qquad A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

e satisfazem

$$\mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n) > \varepsilon,$$

onde $0 < \varepsilon < 1$. Então existe uma sequência de conjuntos compactos $K_n \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ tal que

(i) $K_n \subset \mathcal{B}_n$;

(ii) $K_{n+1} \subset K_n \times \mathbb{R}$;

(iii) $\mathbb{P}_n(K_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração. Para cada n, podemos encontrar um conjunto compacto $K_n^* \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$K_n^* \subset \mathcal{B}_n \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n \setminus K_n^*) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Considere

$$K_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} K_i^* \times \mathbb{R}^{n-i} \right) \cap K_n^*.$$

Primeiramente, observamos que

$$K_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} K_i^* \times \mathbb{R}^{n-i} \right) \cap K_n^* = \bigcap_{i=1}^{n-1} (K_i^* \times \mathbb{R}^{n-i}) \cap K_n^*$$

é limitado e fechado em espaço de dimensão finita, logo compacto.

O item (i) segue facilmente ao notarmos que, se $x \in K_n$, então $x \in K_n^* \subset \mathcal{B}_n$ e daí $K_n \subset \mathcal{B}_n$. Podemos demonstrar (ii) da seguinte forma. Seja $x \in K_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Logo, $x \in K_{n+1}^*$ e $x \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i^* \times \mathbb{R}^{n+1-i}$, isto é, $x \in K_l^* \times \mathbb{R}^{n+1-l}$

para todo $l = 1, \dots, n$. Considere $\hat{x} \in K_l^* \times \mathbb{R}^{n-l}$, onde $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$ com $l = 1, \dots, n$. Temos que

$$\hat{x} \in \bigcap_{l=1}^{n-1} K_l^* \times \mathbb{R}^{n-l}. \tag{1.6}$$

Como $x \in K_n^* \times \mathbb{R}$, temos que

$$\hat{x} \in K_n^* \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7) segue que $\hat{x} \in K_n$. Portanto, $K_{n+1} \subset K_n \times \mathbb{R}$, como queríamos. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(K_n) &= \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n) - \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n \setminus K_n) \\
&= \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n) - \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n \setminus (\cap_{i=1}^{n-1} K_i^* \times \mathbb{R}^{n-i}) \cap K_n^*) \\
&\geq \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n) - \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n \setminus (K_1^* \times \mathbb{R}^{n-1})) - \dots - \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n \setminus (K_{n-1}^* \times \mathbb{R})) \\
&\quad -\mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n \setminus K_n^*) \qquad (1.8) \\
&\geq \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n) - \mathbb{P}_1(\mathcal{B}_1 \setminus K_1^*) - \dots - \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n \setminus K_n^*) \qquad (1.9) \\
&> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^2} - \dots - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&= \varepsilon - \varepsilon \Bigg(\underbrace{\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\leq \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^{n+1} = 1/2} \Bigg) \\
&\geq \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, vale (iii). □

Com estes resultados em mente, passemos agora ao teorema principal desta seção:

Teorema 1.5 (Teorema de Daniell-Kolmogorov)**.** Suponha que são dados, para cada $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, i = 1, \dots, n$, uma medida de probabilidade $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$ em $\mathbb{R}^n$. Assumamos que estas medidas satisfazem

(1) $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbb{P}_{t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(n)}}(A_{\tau(1)} \times \dots \times A_{\tau(n)})$, $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$;

(2) $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_{n-1}}(A_1 \times \dots \times A_{n-1})$, $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Então existe uma única medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathscr{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathscr{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$ tal que para $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, tem-se

$$\mathbb{P}(\pi_{t_1} \in A_1, \dots, \pi_{t_n} \in A_n) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n).$$

Demonstração. Considere o cilindro

$$\mathcal{C}_{t_1,\dots,t_n}(\mathcal{B}) = \{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in \mathcal{B}\}$$

onde $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i = 1, \dots, n$, e $\mathcal{B}$ é um conjunto de Borel em $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_{t_1,\dots,t_n}(\mathcal{B})) \coloneqq \mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}(\mathcal{B})$$

Temos que $\mathbb{P}$ está bem definida e satisfaz $\mathbb{P}(\mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})) = 1$. Além disso, o conjunto $\mathscr{A}$ de todos os possíveis cilindros $\mathcal{C}_{t_1,\dots,t_n}(\mathcal{B})$ satisfazem as condições do Teorema de Carathéodory. Assim, resta mostrar a sigma-aditividade de $\mathbb{P}$. Considere então uma sequência $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cilindros dois a dois disjuntos tais que, se $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ é um cilindro, então

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(C_n).$$

De fato, seja $D_N \coloneqq C \setminus \bigcup_{n=0}^{N} C_n$, $N \in \mathbb{N}$. Como

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D_N) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} C_n\right), \tag{1.10}$$

então devemos mostrar que $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(D_N) = 0$.

Primeiramente, observe que, se $R \geq S$, então $D_R \subseteq D_S$. Assim, $\mathbb{P}(D_R) \leq \mathbb{P}(D_S)$. Ou seja, a sequência $(\mathbb{P}(D_N))_{N\in\mathbb{N}}$ é decrescente e positiva, logo convergente. Vamos supor por um instante que $\mathbb{P}(D_N) \geq \varepsilon$ para chegarmos na contradição de que $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} D_N \neq \emptyset$.

Como D_N é um cilindro, o evento $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} D_N$ envolve uma sequência contável de tempos $t_1 < \cdots < t_n < \dots$. Assumamos que D_N possa ser escrito como

$$D_N = \{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_N)) \in \mathcal{B}_N\},$$

onde $\mathcal{B}_N \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de conjuntos de Borel tais que $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n \times \mathbb{R}$. Pelo Lema 1.5, existe uma sequência de compactos $K_n \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, tal que

(i) $K_n \subset \mathcal{B}_n$;

(ii) $K_{n+1} \subset K_n \times \mathbb{R}$;

(iii) $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}(K_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Como K_n é não-vazio, tome

$$(x_1^n, \dots, x_n^n) \in K_n.$$

Por compacidade, $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $(x_1^{j_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $(x_1^{j_1(n)}) \overset{n\to\infty}{\to} x_1 \in K_1$. Analogamente, a sequência $(x_1^{j_1(n)}, x_2^{j_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, digamos $(x_1^{j_1(n)}, x_2^{j_1(n)})_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\to} (x_1, x_2) \in K_2$. Continuando com este processo, pelo Axioma da Escolha, obtemos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo n,

$$(x_1, \dots, x_n) \in K_n.$$

Como $(x_1, \dots, x_N) \in K_N \subset \mathcal{B}_N$, temos que o evento

$$\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_N)) = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{B}_N\}$$

pertence à D_N, o que nos fornece a contradição esperada. Portanto, $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(D_N) = 0$ e segue por (1.10) a σ-aditividade de $\mathbb{P}$. $\square$

Graças ao seguinte corolário, fica claro a utilidade do Teorema de Daniell-Kolmogorov na construção de processos.

Corolário 1.1. Considere que é dado para cada $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, i = 1, \dots, n$ uma medida de probabilidade $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}$ em $\mathbb{R}^n$. Vamos assumir que tais medidas satisfazem as hipóteses contidas no Teorema de Daniell-Kolmogorov. Então existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ munido de um processo $(X_t)_{t\geq 0}$ tal que a distribuição finito-dimensional de $(X_t)_{t\geq 0}$ é dada pelas medidas $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}$.

Demonstração. Escolhemos

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = (\mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}), \mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}), \mathbb{P})$$

onde $\mathbb{P}$ é a medida de probabilidade dada pelo Teorema de Daniell-Kolmogorov. O processo canônico $(\pi_t)_{t\geq 0}$ definido em $\mathscr{A}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ (ver Exemplo 1.4) por $\pi_t(f) = f(t)$ satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

Aplicaremos o teorema principal desta seção quando quisermos provar a existência de processos estocásticos com dadas distribuições finito-dimensionais. Tomemos como exemplos os denominados processos Gaussianos, definidos a seguir.

Definição 1.19. Um processo estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ tomando valores reais definido em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ é um *processo Gaussiano* se todas as distribuições finito-dimensionais de X são variáveis aleatórias Gaussianas.

Definição 1.20. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ é um processo Gaussiano. Definimos a *função covariância* como

$$R(t,s) = \operatorname{Cov}(X_t, X_s) \coloneqq \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))],$$

onde $m(t) \coloneqq \mathbb{E}(X_t)$ é a *função média.*

Como

$$\begin{aligned} R(t,s) &= \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))] \\ &= \mathbb{E}[(X_s - m(s))(X_t - m(t))] \\ &= R(s,t), \end{aligned}$$

então a função covariância é simétrica. Além disso, é positiva. De fato, para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j R(t_i, t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \mathbb{E}[(X_{t_i} - m(t_i))(X_{t_j} - m(t_j))] \qquad (1.11) \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_i (X_{t_i} - m(t_i)) a_j (X_{t_j} - m(t_j))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (X_{t_i} - m(t_i))\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j (X_{t_j} - m(t_j))\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \big(X_{t_i} - m(t_i)\big)\right)^2\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Vale o seguinte resultado:

Proposição 1.2. Seja $m : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ e $R : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e simétrica. Então existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e um processo Gaussiano $(X_t)_{t\geq 0}$ neste espaço cuja função média é m e cuja função covariância é R.

1.5 Teorema de Continuidade de Kolmogorov

O Teorema de Daniell-Kolmogorov é uma ferramenta útil para assegurar a existência de espaços munidos com processos estocásticos. Contudo, este teorema nada afirma acerca da continuidade destes processos. Para isto, o Teorema de Continuidade de Kolmogorov assegura que, sob certas condições, um processo estocástico é contínuo, a menos de uma *modificação.*

Definição 1.21. Uma função $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d$ é dita *Hölder com expoente* $\alpha > 0$ ou α-*Hölder* se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq C|t - s|^\alpha$$

para $t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tomando $\alpha = 1$, observamos que f é Lipschitz, em particular contínua.

Definição 1.22. Um processo estocástico $(Y_t)_{t\geq 0}$ é uma *modificação* de $(X_t)_{t\geq 0}$ se, para $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Definição 1.23. Diremos que o processo X e Y possuem a mesma distribuição finito-dimensional se, para quaisquer inteiro $n \geq 1$, números reais $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ e $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd})$, temos

$$\mathbb{P}[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A] = \mathbb{P}[(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in A]$$

Desta forma, se um processo é uma modificação do outro, então ambos possuem a mesma distribuição finito-dimensional.

Teorema 1.6 (Teorema de Continuidade de Kolmogorov)**.** Seja α, ε, $c > 0$. Se um processo d-dimensional $(X_t)_{t\in[0,1]}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ satisfaz

$$\mathbb{E}(\|X_t - X_s\|^\alpha) \leq c|t - s|^{1+\varepsilon} \tag{1.12}$$

para $s, t \in [0, 1]$, então existe uma modificação de $(X_t)_{t\in[0,1]}$ contínua e cujos caminhos são γ-Hölder para todo $\gamma \in [0, \frac{\varepsilon}{\alpha})$.

Demonstração. Para simplificar, considere $d = 1$. Seja

$$\mathscr{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n}, k = 0, \ldots, 2^n \right\}$$

e

$$\mathscr{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n.$$

Seja $\gamma \in [0, \frac{\varepsilon}{\alpha})$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq k\leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}\right) &(1.13)\\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{P}(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}) &(1.14)\\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\mathbb{E}(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^{\alpha})}{2^{-\gamma\alpha n}} &(1.15)\\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{c|\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}|^{1+\varepsilon}}{2^{-\gamma\alpha n}} &(1.16)\\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{c|\frac{1}{2^n}|^{1+\varepsilon}}{2^{-\gamma\alpha n}} = c2^{-n(\varepsilon-\gamma\alpha)}.
\end{aligned}$$

A igualdade em (1.13) se justifica da seguinte forma. Considere o evento

$$A := \max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}.$$

Se $\omega \in A$, então existe k tal que $|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \geq 2^{-\gamma n}$. Isto é, existe k tal que $\omega \in A_k$, onde

$$A_k = \{\omega \big|\, |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}\}.$$

Assim, $A \subset \bigcup A_k$. Além disso, como claramente

$$\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \geq |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \geq 2^{-\gamma n}$$

onde $\omega \in A_k$, prova-se a inclusão $\bigcup A_k \subset A$.

Em (1.14), utilizamos a $\sigma-$aditividade da medida $\mathbb{P}$, em (1.15) aplicamos o Lema 1.3 e em (1.16) utilizamos a hipótese (1.12). Assim, como $\varepsilon - \gamma\alpha > 0$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}\big) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} c2^{-n(\varepsilon-\gamma\alpha)}\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Desta forma, pelo Lema de Borel-Cantelli, podemos encontrar um conjunto $\Omega^* \in \mathscr{F}$ tal que $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ e, para $\omega \in \Omega^*$, existe $N(\omega)$ tal que para $n \geq N(\omega)$,

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \leq 2^{-\gamma n}.$$

Em particular, existe uma variável aleatória C finita quase certamente de forma que, para cada $n \geq 0$,

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \leq C 2^{-\gamma n}.$$

Afirmamos que os caminhos do processo X restrito à Ω^*, isto é, $X\big|_{\Omega^*}$, são γ-Hölder em $\mathscr{D}$. De fato, tome $s, t \in \mathscr{D}$. Podemos sempre encontrar n tal que

$$|s - t| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Tomemos agora uma sequência estacionária e crescente $(s_k)_{k \geq n}$ convergente para s, onde $s_k \in \mathscr{D}_k$ e

$$|s_{k+1} - s_k| = 2^{-(k+1)} \quad \text{ou} \quad 0.$$

Da mesma forma, podemos encontrar uma sequência análoga $(t_k)_{k \geq n}$ convergente para t de forma que s_n e t_n estejam próximos em $\mathscr{D}_n$. Desta forma

$$X_t - X_s = \sum_{i=n}^{\infty} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) + (X_{s_n} - X_{t_n}) + \sum_{i=n}^{\infty} (X_{t_i} - X_{t_{i+1}}),$$

onde os somatórios acima são finitos. Desta forma,

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &\leq C 2^{-\gamma n} + 2 \sum_{k=n}^{\infty} C 2^{-\gamma(k+1)} \\ &\leq 2C \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-\gamma k} \\ &\leq \frac{2C}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-\gamma n}. \end{aligned}$$

Portanto, os caminhos em $X\big|_{\Omega^*}$ são γ-Hölder em $\mathscr{D}$. Para $\omega \in \Omega^*$, considere $t \to Y_t(\omega)$ a única função contínua que se identifica com a aplicação $t \to X_t(\omega)$ em $\mathscr{D}$. Caso $\omega \notin \Omega^*$, tomamos $Y_t(\omega) = 0$. Assim, $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ é a modificação que procuramos do processo $(X_t)_{t \in [0,1]}$. $\square$

Capítulo 2

Movimento Browniano

Em 1826, Robert Brown, um botânico e físico escocês, observara o movimento irregular de pequenas partículas de pólen suspensas em água. Brown percebeu dois fatos interessantes neste seu experimento: o caminho de uma partícula dada era muito irregular e, além disso, os movimentos de duas partículas distintas era aparentemente independentes. Surge então o que mais tarde será conhecido como movimento Browniano, exemplo principal de processo estocástico apresentado neste texto.

No nosso caso, apresentaremos a existência do movimento Browniano como consequência do Teorema de Daniell-Kolmogorov e do Teorema de Continuidade de Kolmogorov. Há também a abordagem de construção explícita, quando tal processo é visto, por exemplo, como combinação entre variáveis aleatórias independentes com distribuição gaussiana e integrais de funções de Haar, base ortogonal do espaço de Hilbert L^2. Para uma leitura com mais detalhes desta abordagem, indicamos Misturini [6], página 8.

2.1 Martingales

Nas definições a seguir, o tempo pode ser contínuo ou discreto.

Definição 2.1. Dada uma variável aleatória X definida em $(\Omega, \mathcal{F})$, denotemos por $\sigma(X)$ a σ-álgebra gerada por X. Isto é, a menor σ-álgebra a qual torna X mensurável. Analogamente, dado um processo estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$, $\sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ denota a σ-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias X_s, para $0 \leq s \leq t$.

Definição 2.2. Uma família de sub-σ-álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é chamada de *filtração* no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é crescente, isto é,

$$0 \leq s < t \implies \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Definição 2.3. Um processo estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ é *adaptado* à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se, para cada tempo $t \geq 0$, a variável aleatória X_t é mensurável em relação à σ-álgebra $\mathcal{F}_t$.

Todo processo é adaptado a sua filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$, também denominado *história* do processo até o tempo t.

Definição 2.4. Um processo estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ adaptado à filtração $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ é dito *progressivamente mensurável* com respeito à filtração $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ se, para cada $t \geq 0$ e $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega, X_s(\omega) \in A\} \in \mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t.$$

Definição 2.5. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ uma filtração. Um processo estocástico $(X_t)_{t\in T}$ a valores reais definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito um *martingale* em relação à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ (e à medida $\mathbb{P}$) se:

1. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ para todo $t \in T$;

2. $(X_t)_{t\in T}$ é adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$;

3. $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *q.c.* para todo $t \geq s$.

Quando não mencionarmos a filtração, subtende-se que se trata da filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$. A condição *3* expressa a noção de que, tendo a informação do processo até o tempo s, a melhor estimativa para o estado futuro no tempo $t \geq s$ é justamente o último valor observado, X_s.

Certamente um dos exemplos mais importantes de martingales trata-se do movimento browniano, como veremos mais à frente (ver Proposição 2.3).

2.2 Existência do Movimento Browniano

Definição 2.6. Um processo estocástico $B(\cdot, \cdot) : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é denominado *movimento browniano* ou *processo de Wiener (unidimensional)* se é um processo Gaussiano com função média

$$\mathbb{E}(B_t) = 0$$

e função de covariância

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = \min(s,t).$$

Aqui, utilizamos como notação $B_t = B_t(\omega) = B(\omega, t)$, fixado $\omega \in \Omega$.

Observação 2.1. Vale ressaltar que $R(s,t) \coloneqq \min(s,t)$ define uma função de covariância. É simétrica uma vez que $\min(s,t) = \min(t,s)$. Além disso, é positiva. De fato, para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \min(t_i, t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \int_0^\infty \chi_{[0,t_i]}(s)\chi_{[0,t_j]}(s) ds \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \chi_{[0,t_i]}(s)\chi_{[0,t_j]}(s) \right) ds \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[0,t_i]}(s) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[0,t_j]}(s) \right) ds \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[0,t_i]}(s) \right)^2 ds \geq 0.
\end{aligned}$$

Definição 2.7. A distribuição de um movimento browniano, que é uma medida no espaço das funções contínuas $\mathscr{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$, é denominado *medida de Wiener*.

Podemos também definir o movimento browniano para o caso n-dimensional:

Definição 2.8. Um processo estocástico n-dimensional $(B_t)_{t\geq 0}$ é denominado movimento browniano se

$$(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^1, \ldots, B_t^n)_{t\geq 0},$$

onde $(B_t^i)_{t\geq 0}$ são movimentos brownianos independentes unidimensionais.

Certamente tal definição só faz sentido se este objeto, de fato, existir. Podemos assegurar isso como decorrência do Teorema de Existência de Daniell-Kolmogorov e do Teorema de Continuidade de Kolmogorov.

Teorema 2.1. Existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munido de um processo estocástico, o qual é um movimento browniano.

Demonstração. Pela Proposição 1.2, existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e um processo Gaussiano $(X_t)_{t\geq 0}$ com função média

$$\mathbb{E}[X_t] = 0$$

e função de covariância

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = \min\{s, t\}.$$

Além disso, para $n \geq 0$ e $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!}(t-s)^n. \tag{2.1}$$

Assim, pelo Teorema 1.6, existe uma modificação $(B_t)_{t\geq 0}$ de $(X_t)_{t\geq 0}$ cujos caminhos são γ-Hölder, onde $\gamma \in [0, \frac{n-1}{2n})$. Desta forma, temos também que o movimento browniano é localmente γ-Hölder para todo $\gamma < \frac{1}{2}$. □

Vejamos com mais detalhes o passo dado em (2.1) através da seguinte Proposição:

Proposição 2.1. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo estocástico gaussiano contido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vale que

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha(X_t - X_s)}\right] = e^{\frac{\alpha^2(t-s)}{2}}$$

Demonstração. Sabemos que $(X_t, X_s) \sim N(0, C)$, onde C denota a matriz de covariância que, neste caso, é dada por

$$C = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_t^2] & \mathbb{E}[X_t X_s] \\ \mathbb{E}[X_t X_s] & \mathbb{E}[X_s^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \min\{t, s\} \\ \min\{t, s\} & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & s \\ s & s \end{bmatrix},$$

onde $s < t$, sem perda de generalidade. Assim, $\det C = ts - s^2$. Além disso,

$$C^{-1} = \frac{1}{t-s} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{t}{s} \end{bmatrix}.$$

Por (1.2) e pelo Lema 1.2, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\alpha(X_t-X_s)}\right] &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha(x-y)} \frac{e^{-\frac{x^2-2xy+\frac{t}{2}y^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{(2\pi)^2(ts-s^2)}}dxdy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\alpha(x-y)-\frac{(x-y)^2+(\frac{t}{2}-1)y^2}{2(t-s)}}}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}dxdy \qquad (2.2)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\alpha z-\frac{z^2+(\frac{t}{2}-1)y^2}{2(t-s)}}}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}dzdy \qquad (2.3)\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha z-\frac{z^2}{2(t-s)}}dz \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2s}}dy \qquad (2.4)\\
&= \frac{\sqrt{2\pi s}}{s\pi\sqrt{s(t-s)}}\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha z-\frac{z^2}{2(t-s)}}dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-\alpha(t-s))^2}{2(t-s)}+\frac{\alpha^2(t-s)}{2}} \qquad (2.5)\\
&= e^{\frac{\alpha^2(t-s)}{2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi(t-s)}}du \\
&= e^{\frac{\alpha^2(t-s)}{2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{\pi}}dw \qquad (2.6)\\
&= e^{\frac{\alpha^2(t-s)}{2}}.
\end{aligned}
$$

Em (2.3) tomamos $z = x-y$. Em (2.4) utilizamos o fato de que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2s}}dy = \sqrt{2\pi s}$. Em (2.5) fizemos a substituição $u = z-\alpha(t-s)$. Em (2.6), fizemos $w = \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt{t-s}}$ e o fato de que $\int_{\mathbb{R}} e^{-w^2}dw = \sqrt{\pi}$. Assim, por um lado temos que

$$
\mathbb{E}\left[e^{\alpha(X_t-X_s)}\right] = e^{\frac{\alpha^2(t-s)}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\alpha^2}{2})^n}{n!}(t-s)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{2^n n!}(t-s)^n.
$$

Por outro lado,

$$
\mathbb{E}\left[e^{\alpha(X_t-X_s)}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k(X_t-X_s)^k}{k!}\right].
$$

Tomando $k = 2n$, teremos

$$
\mathbb{E}\left[\frac{\alpha^{2n}(X_t-X_s)^{2n}}{(2n)!}\right] = \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!}(t-s)^n.
$$

Assim,

$$
\mathbb{E}[(X_t-X_s)^{2n}] = \frac{(2n)!}{\alpha^{2n}}\cdot\frac{\alpha^{2n}}{2^n n!}(t-s)^n.
$$

Segue então (2.1). $\square$

O seguinte resultado é muitas vezes utilizado na literatura como definição formal de movimento browniano. É interessante notar que esta caracterização pode ser entendida como consequência dos resultado pré-estabelecidos até aqui.

Proposição 2.2. Seja $(B_t)_{t\geq 0}$ um movimento browniano unidimensional. Temos que:

1. $B_0 = 0$ quase certamente;

2. Para todo $0 \leq s < t < \infty, B_t - B_s \sim N(0, t-s)$;

3. Os incrementos em intervalos de tempo disjuntos são independentes. Ou seja, para tempos $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, as variáveis aleatórias $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ são independentes.

Observação 2.2. O item *3* nos fornece a informação de que o movimento browniano satisfaz a *propriedade de Markov*. Isto significa que, dado um momento presente B_s, qualquer outra informação do que ocorre no processo antes do tempo s é irrelevante na predição do que irá ocorrer com o processo após o tempo s.

Demonstração. Como movimento browniano, $(B_t)_{t\geq 0}$ é um processo Gaussiano com função de covariância $\mathbb{E}[B_s B_t] = \min\{s, t\}$, para todos $s, t \in [0, \infty)$. O item *1* segue do fato de que $B_0 \sim N(0, 0)$. Assim, $B_0 = 0$ quase certamente.

Como $B_t - B_s$ é o incremento sobre o intervalo $[s, t]$, então o mesmo ocorre ocorre sobre o intervalo $[s-s, t-s] = [0, t-s]$. Assim, $B_t - B_s \sim B_{t-s} - B_0 \sim B_{t-s} \sim N(0, t-s)$, já que $B_0 = 0$. Isto prova *2*.

Para mostrar *3*, utilizaremos o fato de que variáveis aleatórias gaussianas são independentes se, e somente se, são não-correlacionadas (ver Apêndice A de [7]). Assim, basta provarmos que

$$\mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = 0, \quad \text{quando } t_i < t_j.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] &= \mathbb{E}[B_{t_i} B_{t_j} - B_{t_{i-1}} B_{t_j} - B_{t_i} B_{t_{j-1}} + B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}}] \\
&= t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1} = 0.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.3. Seja $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ a filtração natural do movimento browniano $(B_t)_{t\geq 0}$. Então, $(B_t)_{t\geq 0}$ é um martingale.

Demonstração. Verifiquemos que são satisfeitas as condições impostas na Definição 2.5. De fato,

1. Para cada $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|B_t|] < \infty$, pois $B_t \sim N(0,t)$;

2. $(B_t)_{t\geq 0}$ é adaptado à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (filtração natural);

3. Se $t \geq s$ então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s) + B_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)] + B_s = 0 + B_s = B_s \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de $(B_t - B_s)$ ser independente da σ-álgebra $\mathcal{F}_s$ (por definição de incrementos independentes) e B_s ser $\mathcal{F}_s$-mensurável, juntamente com as propriedades *5* e *7* do Teorema 1.3. □

Por tudo isso, sabemos então que as trajetórias do movimento browniano são contínuas, quase certamente. Além disso, com probabilidade um, estas trajetórias não são diferenciáveis em nenhum ponto. De fato, se $B_s = x_0$, o comportamento futuro $(B_t)_{t>s}$ depende apenas deste fato e não leva em conta de que forma o processo $(B_t)_{t\in[0,s]}$ se aproximou de x_0 quando t aproximou-se de s. Assim, não há por que esperar que este processo se desenvolva a partir de x_0 de forma que haja uma reta tangente neste ponto. Sugerimos Evans [2], Seção 3.4, para mais detalhes.

Capítulo 3

As Integrais de Itô e de Stratonovitch

O objetivo deste capítulo é estabelecer uma rápida introdução às definições de Integral de Itô e Integral de Stratonovitch. Os detalhes das demonstrações, propriedades adicionais e construções alternativas podem ser vistos em Baudoin [1], páginas 140-144 e Øksendal [7], páginas 21-37.

Considere $L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ o espaço de Hilbert munido da norma

$$\|u\|^2 := \mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_s^2 ds\right)$$

e formado pelo conjunto dos processos $(u_t)_{t\geq 0}$ que são progressivamente mensuráveis com respeito à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ e tais que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_s^2 ds\right) < \infty.$$

Denotemos por $\mathcal{E} \subset L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ o conjunto dos processos $(u_t)_{t\geq 0}$ que podem ser escritos como

$$u_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \chi_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

onde $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n$ e F_i são variáveis aleatórias $\mathcal{F}_{t_i}$-mensuráveis tais que $\mathbb{E}(F_i^2) < \infty$.

O seguinte teorema nos fornece a definição básica do que chamaremos de integral de Itô.

Teorema 3.1. Seja $(B_t)_{t\geq 0}$ um movimento browniano. Existe uma única aplicação linear

$$\mathcal{I} : L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

tal que

(i) para $u = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \chi_{(t_i, t_{i+1}]} \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{I}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i (B_{t_i+1} - B_{t_i}); \tag{3.1}$$

(ii) para $u \in L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}(\mathcal{I}(u)^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_s^2 ds\right). \tag{3.2}$$

A aplicação $\mathcal{I}$ é denominada *integral de Itô* e, para $u \in L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, usaremos a notação

$$\mathcal{I}(u) \coloneqq \int_0^\infty u_s dB_s.$$

Demonstração. Denotemos $\Delta B_k \coloneqq B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$. Então:

$$\mathbb{E}[F_i F_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \mathbb{E}[F_j^2](t_{j+1} - t_j) & \text{se } i = j \end{cases}.$$

De fato, para cada i, F_i^2 e ΔB_i^2 são independentes e possuem esperança finita, também $F_i^2 \Delta B_i^2$ tem esperança finita. Por Cauchy-Schwarz segue que, para cada i e j,

$$\mathbb{E}\left[|F_i F_j \Delta B_i|\right] < \infty.$$

Supondo (sem perda de generalidade) $i < j$, temos que ΔB_j e $F_i F_j \Delta B_i$ são independentes. Assim,

$$\mathbb{E}\left[F_i F_j \Delta B_i \Delta B_j\right] = \underbrace{\mathbb{E}[F_i F_j \Delta B_i]}_{<\infty} \underbrace{\mathbb{E}[\Delta B_j]}_{=0} = 0.$$

Desta forma, os termos $i \neq j$ se anulam e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i \Delta B_i\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=0}^{n-1} F_i F_j \Delta B_i \Delta B_j\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 \Delta B_i^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sum_{0\leq i<j\leq n-1} F_i F_j \Delta B_i \Delta B_j\right] \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_s^2 ds\right). \end{aligned}$$

A ideia para provar a densidade de $\mathcal{E}$ é a seguinte. Para $u \in L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, a sequência $(u_t\chi_{[0,t_n]}(|u_t|))_{t\geq 0}$ converge para u. Além disso, se $u \in L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ é um processo limitado, então u é limite de processos limitados neste mesmo espaço, cujas trajetórias possuem suporte contido num conjunto compacto fixo (considere por exemplo a sequência $(u_t\chi_{[0,n]}(t))_{t\geq 0}$). Nestas condições, a sequência $\left(\frac{1}{n}\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u_s d_s \chi_{(\frac{1}{n},\infty)}(t)\right)_{t\geq 0}$ converge para u. Por fim, u é limite de processos que pertencem à $\mathcal{E}$. Podemos ver isso ao tomar, por exemplo, a sequência $\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_{\frac{i}{n}}\chi_{(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]}(t)\right)_{t\geq 0}$. $\square$

Valem também as seguintes propriedades:

Proposição 3.1. Sejam $u, v \in L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Temos que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_t dB_t\right) = 0 \tag{3.3}$$

e

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_t dB_t \int_0^\infty v_t dB_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_t v_t dt\right). \tag{3.4}$$

Demonstração. Para provar (3.3), basta observar que, se $u_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i\chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_s dB_s\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[F_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}(F_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i})] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[F_i\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i})] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[F_i \underbrace{\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})}_{=0}] = 0.
\end{aligned}$$

Para justificar (3.4), utilizamos a isometria de Itô em (3.2) nos processos $u+v$ e $u-v$. De fato,

$$\left(\int_0^\infty u_t dB_t \int_0^\infty v_t dB_t\right) \;\; =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty u_t dB_t + \int_0^\infty v_t dB_t\right)^2 - \left(\int_0^\infty u_t dB_t - \int_0^\infty v_t dB_t\right)^2\right]\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty (u_t - v_t) dB_t\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty (u_t - v_t) dB_t\right)^2\right]\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty (u_t + v_t)^2 dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^\infty (u_t - v_t)^2 dt\right]\right)\\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left((u_t + v_t)^2 - (u_t - v_t)^2\right) dt\right]\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_t v_t dt\right).
\end{aligned}
$$

□

Tendo a definição de integral de Itô em mãos, a integral de Stratonovitch torna-se simples de definir. Para isso, introduzimos os conceitos e variação e covariação quadrática.

Definição 3.1. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo estocástico no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para cada $t \geq 0$ e para toda sequência de subdivisões $\Delta_n[0,t]$ tais que

$$
\lim_{n\to\infty} |\Delta_n[0,t]| = 0,
$$

a *variação quadrática* desse processo, denotada por $\langle X \rangle_t$, é definida como

$$
\langle X \rangle_t \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n})^2.
$$

Tal limite, quando existe, é definido usando convergência em probabilidade. Mais geralmente, considerando agora outro processo $(Y_t)_{t\geq 0}$, definimos a *covariação quadrática*, $\langle X, Y \rangle_t$, dos processos X e Y como

$$
\langle X, Y \rangle_t \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n})(Y_{t_k^n} - Y_{t_{k-1}^n}).
$$

Vale observar que a covariação quadrática pode ser escrita em termos da variação quadrática por meio da identidade

$$
\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle X + Y \rangle_t - \langle X \rangle_t - \langle Y \rangle_t\right).
$$

Finalizemos com a definição da integral de Stratonovitch.

Definição 3.2 (Integral de Stratonovitch)**.** Sejam $(X_t)_{t\geq 0}$ e $(Y_t)_{t\geq 0}$ semimartingales contínuos. A integral de Stratonovitch de $(X_t)_{t\geq 0}$ com respeito a $(Y_t)_{t\geq 0}$ é dado por

$$\int_0^t X_s \circ dY_s \coloneqq \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t.$$

onde

(1) $\int_0^t X_s dY_s$ é a integral de Itô de $(X_t)_{t\geq 0}$ com relação a $(Y_t)_{t\geq 0}$;

(2) $\langle X, Y\rangle_t$ é a covariação quadrática no tempo t entre $(X_t)_{t\geq 0}$ e $(Y_t)_{t\geq 0}$.

Observação 3.1. A Definição 3.2 continua válida ao tomarmos $X, Y : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ como processos de Wiener, uma vez que o movimento browniano é um exemplo de semimartingale contínuo.

Capítulo 4

Introdução à Teoria de Lyons para Rough Paths

Em 1998, Terry Lyons [5] introduziu a teoria de rough path. Tal teoria possui inspirações na teoria topológica de K. T. Chen sobre caminhos de integrais iteradas. A teoria de rough path nos fornece uma visão diferenciada ao tratarmos de soluções de equações diferenciais estocásticas (EDE) ao considerarmos não apenas um caminho em si, mas também as integrais iteradas associadas a esse caminho. Do ponto de vista da teoria de EDE clássica, na qual a teoria de integrais sobre martingales é crucialmente usada, isso é bastante surpreendente. Ao contrário do trabalho desenvolvido por Chen, estamos interessados em trajetórias com baixa regularidade, uma vez que nossos interesses são aplicações probabilísticas. O movimento Browniano é um importante exemplo de rough path, como veremos no próximo capítulo. Antes disso, apresentaremos alguns resultados gerais necessários para o fundamentarmos nossa abordagem.

4.1 Caminhos contínuos com p-varição finita

Seja $s \leq t$. Denotemos $\Delta[s,t]$ o conjunto das subdivisões do intervalo $[s,t]$. Assim, $\Pi \in \Delta[s,t]$ pode ser escrito como

$$\Pi = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}.$$

Definição 4.1. Um caminho contínuo $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ possui *p-variação limitada* em

$[s,t]$ se

$$\|x\|_{p\text{-var},[s,t]} := \left(\sup_{\Pi \in \Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

O espaço dos caminhos contínuos com p-variação limitada $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ será denotado por $C^{p\text{-var}}\big([s,t], \mathbb{R}^d\big)$.

Exemplo 4.1. Se $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ é um caminho α-Hölder, então x possui $1/\alpha$-variação finita. De fato, supondo que para todos $a, b \in [s,t]$ tem-se $\|x(a) - x(b)\| \leq C|a-b|^\alpha$, com $C, \alpha > 0$ e tomando uma partição Π de $[s,t]$, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\sup_{\Pi \in \Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{1/\alpha} \right)^\alpha &\leq \left(\sup_{\Pi \in \Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} C^{1/\alpha} \|t_{k+1} - t_k\| \right)^\alpha \\
&= C \left(\sup_{\Pi \in \Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|t_{k+1} - t_k\| \right)^\alpha \\
&= C|s-t|^\alpha < \infty.
\end{aligned}$$

A Proposição a seguir nos diz que a noção de p-variação só é interessante quando consideramos $p \geq 1$.

Proposição 4.1. Seja $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ é um caminho contínuo com p-variação finita, sendo $p < 1$. Então x é constante.

Demonstração. Temos, para $s \leq u \leq t$,

$$\begin{aligned}
\|x(u) - x(s)\| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^p \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{1-p} \\
&\leq \left(\max \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{1-p} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^p \right) \\
&\leq \left(\max \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{1-p} \right) \|x\|^p_{p\text{-var},[s,t]}.
\end{aligned}$$

Como x é contínua no compacto $[s,t]$, então x é uniformemente contínua nesse intervalo. Tomando uma sequência de subdivisões com comprimento tendendo a 0, concluímos que

$$\|x(u) - x(s)\| = 0.$$

Portanto, x é constante. $\square$

Proposição 4.2. Seja $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ um caminho contínuo. Se $p \leq p'$, então

$$\|x\|_{p'\text{-var},[s,t]} \leq \|x\|_{p\text{-var},[s,t]}.$$

Como consequência,

$$C^{p\text{-var}}\left([s,t],\mathbb{R}^d\right) \subset C^{p'\text{-var}}\left([s,t],\mathbb{R}^d\right).$$

Demonstração. Considere ψ_k números reais tais que $\psi_k \geq 0$. Então, para $q \geq 1$, vale que

$$\sum_k \psi_k^q \leq \left(\sum_k \psi_k\right)^q. \tag{4.1}$$

De fato,

$$\sum_k \frac{\psi_k^q}{(\sum_l \psi_l)^q} \;=\; \sum_k \left(\frac{\psi_k}{\sum_l \psi_l}\right)^q.$$

Seja $a_k \coloneqq \frac{\psi_k}{\sum_l \psi_l} \geq 0$. Assim, $\sum_k a_k = 1$, já que

$$\sum_k a_k^q \leq \max_m a_m^{q-1} \underbrace{\left(\sum_k a_k\right)}_{=1} = (\max_m a_m)^{q-1} \leq 1.$$

Considere uma partição Π de $[s,t]$ e $\psi_k \coloneqq \sup\limits_{\Pi\in\Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\| \geq 0$, temos por (4.1) que

$$\begin{aligned}
\sup_{\Pi\in\Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{p'} \;&\leq\; \sup_{\Pi\in\Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{p\frac{p'}{p}} \\
&\leq\; \left(\sup_{\Pi\in\Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{p}\right)^{\frac{p'}{p}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\sup_{\Pi\in\Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\sup_{\Pi\in\Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^{p}\right)^{1/p}.$$

□

Teorema 4.1. Seja $p \geq 1$. O espaço $C^{p\text{-var}}([0,T],\mathbb{R}^d)$ munido da norma $\|x(0)\| + \|x\|_{p\text{-var},[0,T]}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Para simplificar, consideremos o caso em que $p = 1$. Seja $x^n \in C^{1\text{-var}}([0,T],\mathbb{R}^d)$ uma sequência de Cauchy. Para simplificar, denotemos $y(t) := x^n(t) - x^m(t)$. Pela desigualdade triangular:

$$\|y(t)\| \leq \|y(t) - y(0)\| + \|y(0)\|.$$

Como $[0,T] = [0,t] \cup [t,T]$, temos

$$\|y(t) - y(0)\| \leq \sum_{l=1}^{n} \|y(t_{l+1}) - y(t_l)\|,$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_j = t < t_{j+1} < \cdots < t_n = T$. Assim,

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|y(0)\| + \sum_{l=1}^{n-1} \|y(t_{l+1}) - y(t_l)\| \\ &\leq \|y(0)\| + \|y\|_{1\text{-var},[0,T]} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Desta forma, tomando o supremo do lado esquerdo de (4.2) e retomando a notação inicial, segue que

$$\|x^n - x^m\|_\infty \leq \|x^n(0) - x^m(0)\| + \|x^n - x^m\|_{1\text{-var},[0,T]}.$$

Logo, x^n converge uniformemente para um caminho contínuo $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$. Vamos provar que $x \in C^{1\text{-var}}([0,T],\mathbb{R}^d)$. Considere novamente

$$\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$$

uma partição de $[0,T]$. Pela convergência uniforme, existe $m \geq 0$ tal que $\|x - x^m\|_\infty \leq \frac{1}{2n}$. Novamente pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x^m(t_{k+1})\| + \sum_{k=0}^{n-1} \|x^m(t_k) - x(t_k)\| + \|x^m\|_{1\text{-var},[0,T]} \\ &\leq 1 + \sup_n \|x^n\|_{1\text{-var},[0,T]} \end{aligned}$$

Portanto, tomando o supremo, temos

$$\|x\|_{1\text{-var},[0,T]} \leq 1 + \sup_n \|x^n\|_{1\text{-var},[0,T]} < \infty,$$

já que $x^n \in C^{1\text{-var}}([0,T],\mathbb{R}^d)$ é Cauchy. Isto prova o queríamos. $\square$

4.2 Relações de Chen

Consideremos a equação diferencial ordinária

$$y(t) = y(0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t V_i(y(\tau))dx^i(\tau), \tag{4.3}$$

onde $V_i, i = 1, \ldots, d$, são campos de vetores suaves em $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Seja $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$. Vamos supor que $x \in C^1$ por um instante. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e por mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
f(y(t)) &= f(y(s)) + \int_s^t d[f(y(\tau))] \\
&= f(y(s)) + \int_s^t \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(y(\tau)) \frac{dy^i}{d\tau} d\tau \\
&= f(y(s)) + \int_s^t \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(y(\tau)) \sum_{l=1}^{d} V_l^i(y(\tau)) \frac{dx^l}{d\tau}(\tau) d\tau \\
&= f(y(s)) + \int_s^t \sum_{l=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} V_l^i(y(\tau)) \partial_i f(y(\tau)) \frac{dx^l}{d\tau}(\tau) d\tau \\
&= f(y(s)) + \int_s^t \sum_{l=1}^{d} V_l f(y(\tau)) dx^l(\tau) \\
&= f(y(s)) + \sum_{l=1}^{d} \int_s^t V_l f(y(\tau)) dx^l(\tau)
\end{aligned}$$

Por aproximação, tal resultado também é válido quando $x \in C^{1\text{-var}}\big([0,T], \mathbb{R}^d\big)$. Novamente pela fórmula de mudança de variáveis, desta vez para $V_i f(y(s))$, temos

$$f(y(t)) = f(y(s)) \sum_{i=1}^{d} V_i f(y(s)) \int_s^t dx^i(u) + R_1(s,t),$$

onde

$$R_1(s,t) = \sum_{i,j=1}^{d} \int_s^t \int_0^u V_j V_i f(y(v)) dx^j(v) dx^i(u).$$

Aplicando novamente este procedimento, obtemos, após N passos, que

$$f(y(t)) = f(y(s)) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)} (V_{i_1} \ldots V_{i_k} f)(y(s)) \int_{\Delta^k[s,t]} dx^I + R_N(s,t)$$

para algum termo residual $R_N(s,t)$. Aqui, utilizamos a seguinte notação:

(1) $\Delta^k[s,t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [s,t]^k, s \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le t\}$;

(2) se $I = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, d\}^k$ é uma *palavra* de comprimento k,

$$\int_{\Delta^k[s,t]} dx^I = \int_{s \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le t} dx^{i_1}(t_1) \dots dx^{i_k}(t_k).$$

Assumindo por um instante que $R_N(s,t) \to 0$ quando $N \to \infty$, somos levados à fórmula de expansão formal

$$f(y(t)) = f(y(s)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I=(i_1,\dots,i_k)} (V_{i_1} \dots V_{i_k} f)(y(s)) \int_{\Delta^k[s,t]} dx^I.$$

Isto nos diz que, ao menos informalmente, toda informação dada por x sobre y está contida no conjunto das integrais iteradas $\int_{\Delta^k[s,t]} dx^I$.

Considere $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_d]]$ a álgebra não-comutativa sobre $\mathbb{R}$ das séries formais com d indeterminantes, isto é, o conjunto das séries

$$Y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I \in \{1,\dots,d\}^k} a_{i_1,\dots,i_k} X_{i_1} \dots X_{i_k}.$$

Definirmos a assinatura de um caminho $x \in C^{1\text{-var}}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ da seguinte forma:

Definição 4.2. Seja $x \in C^{1\text{-var}}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$. A *assinatura* de x é a série formal

$$\mathcal{S}(x)_{s,t} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I \in \{1,\dots,d\}^k} \left(\int_{\Delta^k[s,t]} dx^I \right) X_{i_1} \dots X_{i_k}, \quad 0 \le s \le t \le T.$$

A assinatura goza de interessantes propriedades algébricas. Muitas destas propriedades baseiam-se a partir das denominadas *relações de Chen*, como veremos a seguir.

Lema 4.1 (Relações de Chen)**.** Seja $x \in C^{1\text{-var}}([0,T], \mathbb{R}^d)$. Para qualquer palavra $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, d\}^n$ e quaisquer $0 \le s \le t \le u \le T$,

$$\int_{\Delta^n[s,u]} dx^{(i_1,\dots,i_n)} = \sum_{k=0}^{n} \int_{\Delta^k[s,t]} dx^{(i_1,\dots,i_k)} \int_{\Delta^{n-k}[t,u]} dx^{(i_{k+1},\dots,i_n)},$$

onde utilizamos a convenção de que $\int_{\Delta^0[0,t]} dx^I = 1$.

Demonstração. Vamos provar que

$$\Delta^n[s,u] = \bigcup_{k=0}^{n} \Delta^k[s,t] \times \Delta^{n-k}[t,u]. \tag{4.4}$$

Para uma noção intuitiva de que, de fato, (4.4) é verdade, façamos $n = 2$. Sabemos que, por definição,

$$\Delta^2[s,t] = \{(t_1, t_2) \in [s,u] \times [s,u], 0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 \leq u\}.$$

Assim, teríamos

$$\begin{aligned}
\Delta^2[s,u] &= \bigcup_{k=0}^{2} \Delta^k[s,t] \times \Delta^{2-k}[t,u] \\
&= (\Delta^0[s,t] \times \Delta^2[t,u]) \cup (\Delta^1[s,t] \times \Delta^1[t,u]) \cup (\Delta^2[s,t] \times \Delta^0[t,u]) \\
&= \Delta^2[t,u] \cup (\Delta^1[s,t] \times \Delta^1[t,u]) \cup \Delta^2[s,t] \\
&= \Delta^2[s,t] \cup \Delta^2[t,u] \cup (\Delta^1[s,t] \times \Delta^1[t,u])
\end{aligned}$$

onde utilizamos a convenção $\Delta^0 \equiv 1$.

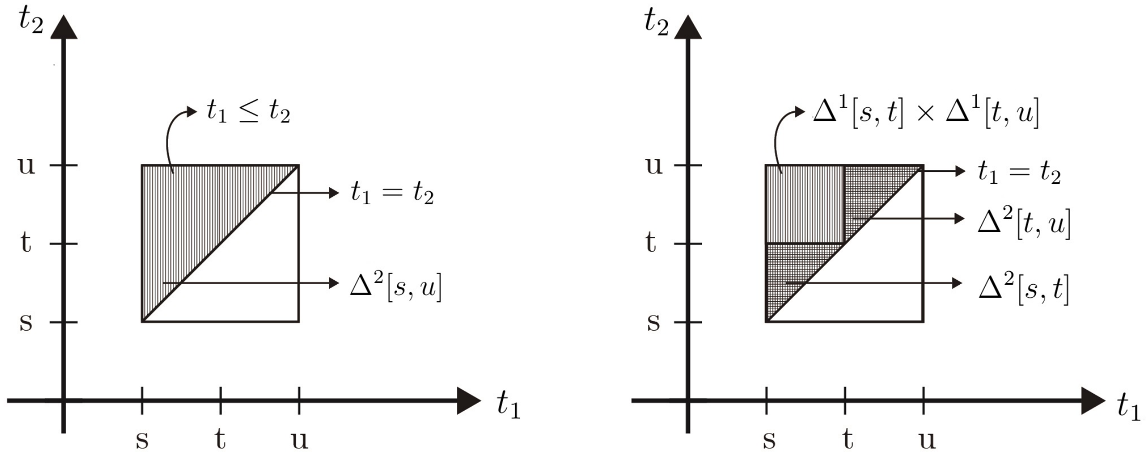

Figura 4.1: Interpretação gráfica da igualdade $\Delta^2[s,u] = \Delta^2[s,t] \cup \Delta^2[t,u] \cup (\Delta^1[s,t] \times \Delta^1[t,u])$

Considere, sem perda de generalidade, $s = 0$ e $u = 1$. Tome $x \in \Delta^n[0,1]$. Então $x = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, onde $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$. Fixemos $t \in [0,1]$. Queremos mostrar que existe k tal que $x \in \Delta^k[0,t] \times \Delta^{n-k}[t,1]$. Se existe $\bar{k}$ tal que $t_{\bar{k}} \leq t \leq t_{\bar{k}+1}$, onde $\bar{k} \in \{1, \ldots, n-1\}$, então $(t_1, \ldots, t_{\bar{k}}) \in \Delta^k[0,t]$ e $(t_{\bar{k}+1}, \ldots, t_n) \in \Delta^{n-k}[t,1]$. Se não existe tal $\bar{k}$, então há duas possibilidades: $\bar{k} = 0$, caso em que $t \in [0, t_1)$, ou $\bar{k} = n$, caso em que $t \in (t_n, 1]$. De qualquer forma, segue que

$$\Delta^n[s,u] \subset \bigcup_{k=0}^{n} \Delta^k[s,t] \times \Delta^{n-k}[t,u].$$

A inclusão contrária é clara. Desta forma, segue (4.4). Portanto, podemos inferir que

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta^n[s,u]} dx^{(i_1,\dots,i_n)} &= \int_{\bigcup_{k=0}^n \Delta^k[s,t]\times\Delta^{n-k}[t,u]} dx^{(i_1,\dots,i_n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{\Delta^k[s,t]\times\Delta^{n-k}[t,u]} dx^{(i_1,\dots,i_n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{\Delta^k[s,t]} dx^{(i_1,\dots,i_k)} \int_{\Delta^{n-k}[t,u]} dx^{(i_{k+1},\dots,i_n)}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Note que podemos considerar a igualdade em (4.5) uma vez que as possíveis interseções contidas em $\bigcup_{k=0}^n \Delta^k[s,t]\times\Delta^{n-k}[t,u]$ têm medida nula. □

Para facilitar a notação, será conveniente escrevermos

$$\int_{\Delta^k[s,t]} dx^{\otimes k} := \sum_{I\in\{1,\dots,d\}^k} \left(\int_{\Delta^k[s,t]} dx^I\right) X_{i_1}\dots X_{i_k}.$$

Assim, podemos reescrever as relações de Chen da seguinte forma:

Lema 4.2 (Relações de Chen 2)**.** Seja $x \in C^{1\text{-var}}([0,T],\mathbb{R}^d)$. Para qualquer palavra $I=(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,d\}^k$ e quaisquer $0\le s\le t\le u\le T$,

$$\int_{\Delta^k[s,u]} dx^{\otimes k} = \sum_{j=0}^{k} \int_{\Delta^j[s,t]} dx^{\otimes j} \int_{\Delta^{k-j}[t,u]} dx^{\otimes (k-j)}.$$

Demonstração. Por definição e pelo Lema (4.1),

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta^k[s,t]} dx^{\otimes k} &= \sum_{I\in\{1,\dots,d\}^k} \left(\int_{\Delta^k[s,t]} dx^I\right) X_{i_1}\dots X_{i_k} \\
&= \sum_{I\in\{1,\dots,d\}^k} \left(\int_{\Delta^k[s,t]} dx^{(i_1,\dots,i_k)}\right) X_{i_1}\dots X_{i_k} \\
&= \sum_{I\in\{1,\dots,d\}^k} \left(\sum_{j=0}^{k} \int_{\Delta^j[s,t]} dx^{(i_1,\dots,i_j)} \int_{\Delta^{k-j}[t,u]} dx^{(i_{j+1},\dots,i_k)}\right) \cdot \\
&\quad \cdot X_{i_1}\dots X_{i_j} X_{i_{j+1}}\dots X_{i_k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{I \in \{1,\dots,d\}^k} \int_{\Delta^j[s,t]} dx^{(i_1,\dots,i_j)} X_{i_1} \dots X_{i_j} \cdot \\
&\quad \cdot \int_{\Delta^{k-j}[t,u]} dx^{(i_{j+1},\dots,i_k)} X_{i_{j+1}} \dots X_{i_k} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{(i_1,\dots,i_j)} \int_{\Delta^j[s,t]} dx^{(i_1,\dots,i_j)} X_{i_1} \dots X_{i_j} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{(i_{j+1},\dots,i_k)} \int_{\Delta^{k-j}[t,u]} dx^{(i_{j+1},\dots,i_k)} X_{i_{j+1}} \dots X_{i_k} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \int_{\Delta^j[s,t]} dx^{\otimes j} \int_{\Delta^{k-j}[t,u]} dx^{\otimes (k-j)},
\end{aligned}
$$

como queríamos □

Vale notar também que a definição de assinatura pode ser reescrita como

$$\mathcal{S}(x)_{s,t} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta^k[s,t]} dx^{\otimes k}.$$

Além disso, das relações de Chen derivam a seguinte propriedade de assinatura:

Lema 4.3. Seja $x \in C^{1\text{-var}}([0,T], \mathbb{R}^d)$. Para $0 \leq s \leq t \leq u \leq T$,

$$\mathcal{S}(x)_{s,u} = \mathcal{S}(x)_{s,t} \mathcal{S}(x)_{t,u}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.2,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(x)_{s,u} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta^k[s,u]} dx^{\otimes k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \int_{\Delta^j[s,t]} dx^{\otimes j} \int_{\Delta^{k-j}[t,u]} dx^{\otimes (k-j)}. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, tomando

$$a_j := \int_{\Delta^j[s,t]} dx^{\otimes j} \quad \text{e} \quad b_l := \int_{\Delta^l[t,u]} dx^{\otimes l}, \qquad (4.7)$$

temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(x)_{s,t}\mathcal{S}(x)_{t,u} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{j,l=0}^{\infty} a_j b_l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j+l=k} a_j b_l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.
\end{aligned}
$$

Voltando à notação dada em (4.7), temos por (4.6) a igualdade almejada. □

Capítulo 5

O Movimento Browniano como Rough Path

Neste último capítulo, veremos como a teoria de rough paths pode ser usada no estudo do movimento Browniano. De fato, tal processo estocástico é quase certamente um p-rough path, com $2 < p < 3$. Para isto, começamos com uma adaptação do resultado devido a Garsia, Rodemich e Rumsey [4].

Teorema 5.1 (Desigualdade de Garsia-Rodemich-Rumsey)**.** Seja $T > 0$ e considere

$$\Gamma : \{(s,t) \,|\, 0 \leq s,t \leq T\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

um funcional contínuo simétrico ($\Gamma_{s,t} = \Gamma_{t,s}$), que se anula na diagonal ($\Gamma_{t,t} = 0$) e tal que existe uma constante $C > 0$ de maneira que para todo $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T$,

$$\Gamma_{t_1,t_n} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_{t_i,t_{t+1}} \right). \tag{5.1}$$

Então, para $q > 1$ e $\alpha \in (1/q, 1)$, existe uma constante $K > 0$ tal que, para todo $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\Gamma^q_{s,t} \leq K|t-s|^{\alpha q - 1} \int_0^T \int_0^T \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv. \tag{5.2}$$

Demonstração. A demonstração se dará em duas etapas.

Parte 1. Assuma primeiramente que $T = 1$, $s = 0$ e $t = 1$. Vamos provar que

$$\Gamma_{0,1}^q \leq K \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv.$$

Defina

$$I(v) := \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du. \tag{5.3}$$

Assim,

$$\int_0^1 I(v) dv = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv.$$

Podemos encontrar $t_0 \in (0,1)$ tal que $I(t_0) \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv$. De fato, se para todo $t_0 \in (0,1)$ tivéssemos $I(t_0) > \int_0^1 I(v) dv$ então

$$\int_0^1 I(s) ds > \int_0^1 I(v) dv,$$

uma contradição. Agora, construiremos uma sequência decrescente $(t_n)_{n \geq 0}$ por indução da como segue. Se escolhermos t_{n-1}, tomamos $t_n \in (0, \frac{1}{2} t_{n-1})$ tal que

$$I(t_n) \leq \frac{4}{t_{n-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv, \qquad J_{n-1}(t_n) \leq \frac{4 I(t_{n-1})}{t_{n-1}},$$

onde

$$J_{n-1}(s) := \frac{\Gamma_{s,t_{n-1}}^q}{|s - t_{n-1}|^{1+\alpha q}} \tag{5.4}$$

Podemos sempre encontrar tal t_n. Se isso não fosse verdade, teríamos $(0, \frac{1}{2} t_{n-1}) = A \cup B$ com

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ t \in \left(0, \frac{1}{2} t_{n-1}\right), I(t) > \frac{4}{t_{n-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv \right\} \\ B &:= \left\{ t \in \left(0, \frac{1}{2} t_{n-1}\right), J_{n-1}(t) > \frac{4 I(t_{n-1})}{t_{n-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, teríamos que

$$\frac{4\mu(A)}{t_{n-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv \leq \int_A I(t) dt \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv, \tag{5.5}$$

onde μ denota da medida de Lebesgue. Portanto, se $\mu(A) > 0$, segue por (5.5) que $\mu(A) < \frac{1}{4} t_{n-1}$. Similarmente,

$$\begin{aligned} 4\mu(B) \frac{I(t_{n-1})}{t_{n-1}} &\leq \int_B J_{n-1}(t) dt < \int_0^1 J_{n-1}(s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\Gamma_{s,t_{n-1}}^q}{|s - t_{n-1}|^{1+\alpha q}} ds = I(t_{n-1}). \end{aligned}$$

Assim, $\mu(B) > 0$ implica $\mu(B) < \frac{1}{4}t_{n-1}$. Isto contradiz o fato de que $(0, \frac{1}{2}t_{n-1}) = A \cup B$, já que teríamos $\mu((0, \frac{1}{2}t_{n-1})) = \frac{1}{2}t_{n-1}$ enquanto $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) < 2 \cdot \frac{1}{4}t_{n-1} = \frac{1}{2}t_{n-1}$. Portanto, t_n esta bem definida caso t_{n-1} esteja. Temos então que

$$J_{n-1}(t_n) \leq \frac{4I(t_{n-1})}{t_{n-1}} \leq \frac{4}{t_{n-1}} \cdot \frac{4}{t_{n-2}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv.$$

Logo, pela definição de J_{n-1}, temos

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^q_{t_n,t_{n-1}}}{|t_n - t_{n-1}|^{1+\alpha q}} &\leq \frac{16}{t_{n-1}t_{n-2}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv \\ \Gamma^q_{t_n,t_{n-1}} &\leq \frac{16|t_n - t_{n-1}|^{1+\alpha q}}{t_{n-1}t_{n-2}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv \end{aligned}$$

Como $t_{n-1} \in (0, \frac{1}{2}t_{n-2})$, temos que $\frac{1}{t_{n-2}} < \frac{1}{2t_{n-1}}$. Logo

$$\begin{aligned} \Gamma^q_{t_n,t_{n-1}} &\leq \frac{8|t_n - t_{n-1}|^{1+\alpha q}}{t^2_{n-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv \\ \Gamma_{t_n,t_{n-1}} &\leq \frac{8^{\frac{1}{q}}|t_n - t_{n-1}|^{\frac{1}{q}+\alpha}}{t^{2/q}_{n-1}} \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv \right)^{1/q} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pela subaditividade de Γ e por (5.6), segue que

$$\Gamma_{0,t_0} \leq C \left(\sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_{t_l,t_{l-1}} \right) \leq C \sum_{l=1}^{\infty} \frac{8^{\frac{1}{q}}|t_l - t_{l-1}|^{\frac{1}{q}+\alpha}}{t^{2/q}_{l-1}} \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv \right)^{1/q}$$

Além disso, é possível mostrar que existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\frac{|t_l - t_{l-1}|^{\alpha+1/q}}{t^{2/q}_{l-1}} \leq \tilde{C}(t^{\alpha-1/q}_{l-1} - t^{\alpha-1/q}_l). \tag{5.7}$$

De (5.7), temos a seguinte soma telescópica:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|t_l - t_{l-1}|^{\alpha+1/q}}{t^{2/q}_{l-1}} \leq \tilde{C} \sum_{l=1}^{\infty} (t^{\alpha-1/q}_{l-1} - t^{\alpha-1/q}_l) = \tilde{C} t^{\alpha-1/q}_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,t_0} &\leq C 8^{\frac{1}{q}} \tilde{C} t^{\alpha-1/q}_0 \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv \right)^{1/q} \\ \Gamma^q_{0,t_0} &\leq K_1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv \end{aligned}$$

onde $K_1 := 8C^q \tilde{C}^q t^{\alpha q-1}_0$. Similarmente, utilizando o mesmo argumento acima sobre o funcional $\Gamma_{1-s,1-t}$, temos que

$$\Gamma^q_{t_0,1} \leq K_2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma^q_{u,v}}{|u-v|^{1+\alpha q}} dudv.$$

Finalmente, fazendo uso novamente da subaditividade de Γ, garantimos a existência de uma constante $\tilde{K}$ tal que

$$\Gamma_{0,1}^q \leq \tilde{K} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv.$$

Parte 2. Considere agora, de modo geral, o funcional $\Gamma : \{0 \leq s, t \leq T\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $0 \leq s < t \leq T$ fixos. Definamos o funcional reescalado $\tilde{\Gamma}_{u,v} \coloneqq \Gamma_{s+u(t-s),\, s+v(t-s)}$ definido para $0 \leq u, v \leq 1$. Pela *Parte 1* (observando que $\tilde{\Gamma}_{0,1} = \Gamma_{s,t}$), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{0,1}^q &\leq K \int_0^1 \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv \\
\Gamma_{s,t}^q &\leq K \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_{s+u(t-s),\, s+v(t-s)}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv
\end{aligned}$$

Tomando $\tilde{u} \coloneqq s + u(t-s)$ e $\tilde{v} = s + v(t-s)$, segue que

$$u = \frac{\tilde{u} - s}{t - s}, \quad v = \frac{\tilde{v} - s}{t - s}, \quad du = \frac{d\tilde{u}}{t - s}, \quad dv = \frac{d\tilde{v}}{t - s}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{s,t}^q &\leq K \int_s^t \int_s^t \frac{\Gamma_{\tilde{u},\tilde{v}}^q}{|\frac{\tilde{u}-s}{t-s} - \frac{\tilde{v}-s}{t-s}|^{1+\alpha q}} \cdot \frac{1}{(t-s)^2} d\tilde{u} d\tilde{v} \\
&= K \frac{|t-s|^{1+\alpha q}}{(t-s)^2} \int_s^t \int_s^t \frac{\Gamma_{\tilde{u},\tilde{v}}^q}{|\tilde{u} - \tilde{v}|^{1+\alpha q}} d\tilde{u} d\tilde{v} \\
&= K |t-s|^{\alpha q - 1} \int_s^t \int_s^t \frac{\Gamma_{\tilde{u},\tilde{v}}^q}{|\tilde{u} - \tilde{v}|^{1+\alpha q}} d\tilde{u} d\tilde{v} \\
&\leq K |t-s|^{\alpha q - 1} \int_0^T \int_0^T \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv
\end{aligned}$$

segue então (5.2), como queríamos. □

A integral que utilizaremos para vermos o movimento browniano do ponto de vista da teoria de rough path será a integral de Stratonovitch, e não a integral de Itô (ver Friz [3], página 16, para uma discussão com mais detalhes). Se $(B_t)_{t \geq 0}$ é o movimento browniano d-dimensional, podemos definir indutivamente as integrais iteradas de Stratonovitch $\int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq t} \circ dB_{t_1}^{i_1} \circ \cdots \circ dB_{t_k}^{i_k}$. Numa notação mais concisa das integrais iteradas pela álgebra das séries formais,

$$\int_{\Delta^k[s,t]} \circ dB^{\otimes k} = \sum_{I \in \{1,\ldots,d\}^k} \left(\int_{\Delta^k[s,t]} \circ dB^I \right) X_{i_1} \ldots X_{i_k}.$$

Além disso, para $m \geq 1$ e $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_k\leq t} \circ\, dB^{i_1}_{t_1} \circ\cdots\circ\, dB^{i_k}_{t_k}\right|^m\right) < \infty. \tag{5.8}$$

Para demonstração do resultado principal, precisamos também da seguinte proposição:

Proposição 5.1. Seja $T \geq 0$, $2 < p < 3$ e $n \geq 1$. Existe uma variável aleatória finita e positiva $C = C(T,p,n)$ tal que $\mathbb{E}(C^m) < \infty$ para todo $m \geq 1$ e, para todos $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|\int_{\Delta^k[s,t]} \circ\, dB^{\otimes k}\right\|^{1/k} \leq C|t-s|^{1/p}.$$

Demonstração. Considere o funcional

$$\Gamma_{s,t} := \sum_{k=1}^{n}\left\|\int_{\Delta^k[s,t]} \circ\, dB^{\otimes k}\right\|^{1/k} \tag{5.9}$$

e vamos provar que a condição (5.1) é satisfeita (note que a simetria e a nulidade na diagonal de $\Gamma_{s,t}$ é clara). Pelas relações de Chen (Lema 4.2),

$$\int_{\Delta^k[t_1,t_N]} \circ\, dB^{\otimes k} = \sum_{i_1+\cdots+i_{N-1}=k}\int_{\Delta^{i_1}[t_1,t_2]} \circ\, dB^{\otimes i_1}\cdots\int_{\Delta^{i_{N-1}}[t_{N-1},t_N]} \circ\, dB^{\otimes i_{N-1}}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\Delta^k[t_1,t_N]} \circ\, dB^{\otimes k}\right\| &= \left\|\sum_{i_1+\cdots+i_{N-1}=k}\int_{\Delta^{i_1}[t_1,t_2]} \circ\, dB^{\otimes i_1}\cdots\int_{\Delta^{i_{N-1}}[t_{N-1},t_N]} \circ\, dB^{\otimes i_{N-1}}\right\| \\
&\leq \sum_{i_1+\cdots+i_{N-1}=k}\left\|\int_{\Delta^{i_1}[t_1,t_2]} \circ\, dB^{\otimes i_1}\cdots\int_{\Delta^{i_{N-1}}[t_{N-1},t_N]} \circ\, dB^{\otimes i_{N-1}}\right\| \\
&\leq \sum_{i_1+\cdots+i_{N-1}=k}\left\|\int_{\Delta^{i_1}[t_1,t_2]} \circ\, dB^{\otimes i_1}\right\|\cdots\left\|\int_{\Delta^{i_{N-1}}[t_{N-1},t_N]} \circ\, dB^{\otimes i_{N-1}}\right\| \\
&\leq \sum_{i_1+\cdots+i_{N-1}=k}\Gamma^{i_1}_{t_1,t_2}\cdots\Gamma^{i_{N-1}}_{t_{N-1},t_N} \\
&\leq (\Gamma_{t_1,t_2}+\cdots+\Gamma_{t_{N-1},t_N})^k.
\end{aligned}$$

Como $\Gamma_{t_1,t_N} = \sum_{k=1}^{n}\left\|\int_{\Delta^k[t_1,t_N]} \circ\, dB^{\otimes k}\right\|^{1/k}$, segue que

$$\Gamma_{t_1,t_N} \leq n\left(\sum_{i=1}^{N-1}\Gamma_{t_i,t_{t+1}}\right).$$

Fazendo uso da Desigualdade de Garsia-Rodemich-Rumsey, com $q > 1$ e $\alpha \in (1/q, 1)$, garantimos a existência de uma constante $K > 0$ tal que para todo $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\Gamma_{s,t}^q \leq K|t-s|^{\alpha q - 1} \int_0^T \int_0^T \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv.$$

Pela propriedade de reescalonamento [1] do movimento browniano e por (5.8) temos que, para alguma constante $K > 0$,

$$\mathbb{E}(\Gamma_{u,v}^q) = K|u-v|^{q/2}.$$

Como consequência,

$$\int_0^T \int_0^T \frac{\Gamma_{u,v}^q}{|u-v|^{1+\alpha q}} du dv < \infty$$

quase certamente, quando $\alpha - \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$. O resultado segue do teorema de Fubini. $\square$

Lema 5.1. Sejam $(B_t^1)_{t \geq 0}$ e $(B_t^2)_{t \geq 0}$ movimentos brownianos independentes. Então

$$\langle B^1, B^2 \rangle_t = 0.$$

Demonstração. De fato,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n (B_{t_k^n}^1 - B_{t_{k-1}^n}^1)(B_{t_k^n}^2 - B_{t_{k-1}^n}^2)\right]^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^n (B_{t_k^n}^1 - B_{t_{k-1}^n}^1)(B_{t_k^n}^2 - B_{t_{k-1}^n}^2)(B_{t_l^n}^1 - B_{t_{l-1}^n}^1)(B_{t_l^n}^2 - B_{t_{l-1}^n}^2)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^n \mathbb{E}[(B_{t_k^n}^1 - B_{t_{k-1}^n}^1)(B_{t_k^n}^2 - B_{t_{k-1}^n}^2)(B_{t_l^n}^1 - B_{t_{l-1}^n}^1)(B_{t_l^n}^2 - B_{t_{l-1}^n}^2)|\mathcal{F}_{t_k}]\right].
\end{aligned}$$

Caso $l > k$, por independência e pela $\mathcal{F}_{t_k}$-mensurabilidade,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^n \mathbb{E}[(B_{t_k^n}^1 - B_{t_{k-1}^n}^1)(B_{t_k^n}^2 - B_{t_{k-1}^n}^2)(B_{t_l^n}^1 - B_{t_{l-1}^n}^1)(B_{t_l^n}^2 - B_{t_{l-1}^n}^2)|\mathcal{F}_{t_k}]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^n (B_{t_k^n}^1 - B_{t_{k-1}^n}^1)(B_{t_k^n}^2 - B_{t_{k-1}^n}^2)\mathbb{E}[(B_{t_l^n}^1 - B_{t_{l-1}^n}^1)(B_{t_l^n}^2 - B_{t_{l-1}^n}^2)|\mathcal{F}_{t_k}]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^n (B_{t_k^n}^1 - B_{t_{k-1}^n}^1)(B_{t_k^n}^2 - B_{t_{k-1}^n}^2)\mathbb{E}[(B_{t_l^n}^1 - B_{t_{l-1}^n}^1)(B_{t_l^n}^2 - B_{t_{l-1}^n}^2)]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^n (B_{t_k^n}^1 - B_{t_{k-1}^n}^1)(B_{t_k^n}^2 - B_{t_{k-1}^n}^2)\mathbb{E}[B_{t_l^n}^1 - B_{t_{l-1}^n}^1]\mathbb{E}[B_{t_l^n}^2 - B_{t_{l-1}^n}^2]\right] = 0.
\end{aligned}$$

[1] O processo $\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}\right)_{t \geq 0}$ possui a mesma lei de distribuição de $(B_t)_{t \geq 0}$, onde $c > 0$.

Analogamente para $k > l$. Assim, considerando apenas os termos em que $k = l$, teremos novamente por independência

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^{n}(B^1_{t^n_k} - B^1_{t^n_{k-1}})(B^2_{t^n_k} - B^2_{t^n_{k-1}})(B^1_{t^n_l} - B^1_{t^n_{l-1}})(B^2_{t^n_l} - B^2_{t^n_{l-1}})\right] \\
= \ & \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}(B^1_{t^n_k} - B^1_{t^n_{k-1}})^2(B^2_{t^n_k} - B^2_{t^n_{k-1}})^2\right] \\
= \ & \sum_{k=1}^{n}(t^n_k - t^n_{k-1})(t^n_k - t^n_{k-1}) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n}(t^n_k - t^n_{k-1})^2 \leq T \max_k |t^n_k - t^n_{k-1}| \to 0.
\end{aligned}$$

□

Para definir rough path, utilizaremos a abordagem feita em Baudoin [1], página 238 e Friz & Hairer [3], página 16.

Definição 5.1. Seja $p \geq 1$ e $x \in C^{p\text{-var}}\big([0,T],\mathbb{R}^d\big)$. Dizemos que x é um *p-rough path (geométrico)* se existe uma sequência $x_n \in C^{1\text{-var}}\big([0,T],\mathbb{R}^d\big)$, com $x_n \to x$ na norma de p-variação, e tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{[p]}\left\|\int dx_n^{\otimes j} - \int dx_m^{\otimes j}\right\|^{1/j}_{\frac{p}{j}\text{-var},[0,T]} \leq \varepsilon$$

para $m, n \geq N$. O espaço dos p-rough paths será denotado por $\Omega^p([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Com isso em mãos, podemos agora passar ao teorema principal do texto.

Considere o intervalo $[0,T]$ e uma sequência D_n de subdivisões de $[0,T]$ tal que $D_{n+1} \subset D_n$ e $\|D_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Um exemplo seria uma sequência de subdivisões por números diádicos. A família $\mathcal{F}_n = \sigma(B_t, t \in D_n)$ é uma filtração. Denotemos por B^n um processo ponto-a-ponto linear obtido de B por interpolação ao longo das subdivisões D_n. Isto é, para $t^n_i \leq t \leq t^n_{i+1}$,

$$B^n_t = \frac{t^n_{i+1} - t}{t^n_{i+1} - t^n_i} B_{t^n_i} + \frac{t - t^n_i}{t^n_{i+1} - t^n_i} B_{t^n_{i+1}}.$$

Teorema 5.2. Quando $n \to \infty$, quase certamente

$$\|B^n - B\|_{p\text{-var},[0,T]} + \left\|\int dB^{n,\otimes 2} - \int \circ\, dB^{\otimes 2}\right\|^{1/2}_{\frac{p}{2}\text{-var},[0,T]} \to 0. \tag{5.10}$$

Particularmente, os caminhos do movimento browniano são, quase certamente, p-rough paths para $2 < p < 3$.

Demonstração. Pela Propriedade de Markov do movimento browniano, temos para $t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n$,

$$\mathbb{E}(B_t \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(B_t \,|\, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n}). \tag{5.11}$$

Além disso,

$$\mathbb{E}(B_t \,|\, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n}) = \frac{t_{i+1}^n - t}{t_{i+1}^n - t_i^n} B_{t_i^n} + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} B_{t_{i+1}^n} = B_t^n. \tag{5.12}$$

Logo, por (5.11) e (5.12),

$$\mathbb{E}(B_t \,|\, \mathcal{F}_n) = B_t^n.$$

Segue imediatamente que $B_t^n \to B_t$, quando $n \to \infty$. Da mesma forma, para $i \neq j$,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t B_s^i dB_s^j \,|\, \mathcal{F}_n \right) = \int_0^t B_s^{n,i} dB_s^{n,j}. \tag{5.13}$$

De fato, para $0 < t < T$ e $\varepsilon > 0$ pequeno, temos pela independência de B^i e B^j que

$$\mathbb{E}(B_t^i (B_{t+\varepsilon}^j - B_t^j) \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(B_t^i \,|\, \mathcal{F}_n) \mathbb{E}(B_{t+\varepsilon}^j - B_t^j \,|\, \mathcal{F}_n) = B_t^{n,i} (B_{t+\varepsilon}^{n,j} - B_t^{n,j}).$$

Assim, (5.13) segue do fato de que a integral de Itô é limite, em L^2, de somas de Riemann. Segue então, quase certamente,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^t B_s^{n,i} dB_s^{n,j} = \int_0^t B_s^i dB_s^j.$$

Novamente pela independência de B^i e B^j, a covariação quadrática $\langle B^i, B^j \rangle_t$ é zero, pelo Lema 5.1. Como consequência, as integrais de Itô e Stratonovitch coincidem:

$$\int_0^t B_s^i dB_s^j = \int_0^t \circ B_s^i dB_s^j.$$

Para $i = j$, temos $\int_0^t \circ B_s^i dB_s^j = (B_t^i)^2$. Desta forma, afirmamos que

$$\lim_{n \to \infty} \left(B_t^n, \int_0^t B_s^n \otimes dB_s^n \right) = \left(B_t, \int_0^t B_s \otimes \circ dB_s \right). \tag{5.14}$$

quase certamente.

Para provar a convergência desejada nas normas de variação, precisamos de uma estimativa de Hölder.

Pela Proposição 5.1, sabemos que existe uma variável aleatória finita K_1 (que pertence à L^m para todo $m \geq 1$) tal que para todo $i \neq j$, $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\left| \int_s^t (B_u^i - B_s^i) \circ dB_u^j \right| \leq K_1 |t-s|^{2/p}.$$

Como

$$\mathbb{E} \left(\int_s^t (B_u^i - B_s^i) dB_u^j \,|\, \mathcal{F}_n \right) = \int_s^t (B_u^{n,i} - B_s^{n,i}) dB_u^{n,j},$$

deduzimos que

$$\left| \int_s^t (B_u^{n,i} - B_s^{n,i}) dB_u^{n,j} \right| \leq K_2 |t-s|^{2/p},$$

onde K_2 é uma variável aleatória finita que pertence à L^m para todo $m \geq 1$. Similarmente,

$$\|B_t^n - B_s^n\| \leq K_3 |t-s|^{1/p}.$$

Combinando a convergência ponto-a-ponto com estas estimativas Hölder uniformes, temos o resultado desejado.

$\square$

Bibliografia

[1] BAUDOIN, Frabice. *Diffusion Process and Stochastic Calculus.* 1.ed. European Mathematical Society, 2010.

[2] EVANS, C. Lawrence. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, Berkeley, 2013.

[3] FRIZ, Peter K. *A Course on Rough Paths: With an Introduction to Regularity Structures.* 1st ed. Universitext. Springer International Publishing, 2014.

[4] GARSIA, A.M.; RODEMICH, E.; RUMSEY, H. *A Real Varible Lemma and the Continuity of Paths of Some Gaussian Process.* Indiana University Mathematics Journal, Vol. 20, No. 6, 1970, pp. 565-578.

[5] LYONS, Terry. *Differential Equations Driven by Rough Signals.* Rev. Mat. Iberoamericana 14, no. 2, 1998, pp. 215-310.

[6] MISTURINI, R. *Movimento Browniano, Integral de Itô e Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas.* 2010. 81 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2010. Disponível em: `http://hdl.handle.net/10183/24926`.

[7] ØKSENDAL, Bernt Karsten. *Stochastic differential equations: an introduction with applications.* 6th ed. Berlin: Springer, 2005.