Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO POSITIVA PARA UM PROBLEMA ASSINTOTICAMENTE LINEAR OU SUPERLINEAR EM DOMÍNIO EXTERIOR

Flávia Elisandra Magalhães Furtado

Manaus - AM
Fevereiro - 2020

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO POSITIVA PARA UM PROBLEMA ASSINTOTICAMENTE LINEAR OU SUPERLINEAR EM DOMÍNIO EXTERIOR

por

Flávia Elisandra Magalhães Furtado

sob a orientação do

Prof^{o}. Dr. Alireza Khatib

Manaus - AM
Fevereiro - 2020

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

F992e

Furtado, Flávia Elisandra Magalhães
Existência de uma solução positiva para um problema assintoticamente linear ou superlinear em domínio exterior / Flávia Elisandra Magalhães Furtado. 2020
77 f.: 31 cm.

Orientador: Alireza Khatib
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Variedade de Nehari. 2. Domínio Exterior. 3. Sequência de Palais - Smale. 4. Baricentro. I. Khatib, Alireza II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Poder Executivo
Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ata de Defesa Pública de Dissertação da aluna **Flávia Elisandra Magalhães Furtado** do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática – PPGM/UFAM.

Às 14:00 horas do dia 18 de fevereiro de 2020, foi realizada no Auditório Professor José Henrique de Sá Mesquita do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas, a Defesa Pública de Dissertação da discente **Flávia Elisandra Magalhães Furtado, Matrícula: 2180359,** Intitulada: **"Existência de uma solução positiva para um problema assintoticamente linear ou superlinear em domínio exterior"** como parte final de seu trabalho para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**. A Banca Examinadora, instituída pela Portaria Nº 02/2019 – PPGM/UFAM, constituiu-se dos seguintes Professores Doutores: **Alireza Kathib - UFAM (Orientador); Somayeh Mousavinasr - UFAM (Membro Externo); Ricardo Ruviaro - UnB (Membro Externo).** Após a apresentação do trabalho, os examinadores fizeram as perguntas concernentes e em seguida, a Banca Examinadora reuniu-se para deliberar e considerou a discente APROVADA. Nada mais havendo a tratar, a reunião foi encerrada e lavrou-se a ata que vai assinada por todos os membros.

Alireza Khatib
Prof. Dr. Alireza Kathib (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

Somayeh Mousavinasr
Profa. Dra. Somayeh Mousavinasr (Membro Externo)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

Ricardo Ruviaro
Prof. Dr. Ricardo Ruviaro (Membro Externo)
Universidade de Brasília – UnB

Esta dissertação é dedicada a Deus e aos meus pais Wilson de Araújo Furtado e Neide Martins Magalhães.

Agradecimentos

A Deus, por sempre ter sido a minha fortaleza e, principalmente, por me reerguer nos momentos mais difíceis dessa jornada. Ao meu pai, Wilson de Araújo Furtado por toda paciência, confiança e por todo seu esforço para eu chegar aqui. A minha querida mãe e amiga, Neide Martins Magalhães pelas orações, conversas, paciência, incentivo, confiança, apoio e carinho que ela sempre me proporcionou durante os meus estudos.

Aos meus irmãos, Wilson Furtado Jr., Hortência Furtado, Henrique Furtado e Ricardo Furtado, pelas conversas e brincadeiras aleatórias. Aos meus lindos sobrinhos Júlia, Luiza e João, pelo singelo amor. As minhas queridas tias, Raimunda, Líbia e Diva, pelas orações, carinho e incentivo. A todos vocês, muito obrigada por tudo, pois cada um teve a sua importância para a concretização desse sonho.

Aos professores do mestrado, e em especial, ao meu orientador Alireza Khatib pela confiança e paciência em me ensinar, aos professores Thiago Alves e Airton Freitas por disponibilizarem o seu tempo para contribuirem para o meu aprendizado, ao professor Tiago Gonçalves pelas correções e aos professores Cícero Mota e Wilhelm Steinmetz pelo apoio inicial para eu fazer mestrado.

Aos meninos que trabalham na secretaria de Pós-Graduação em Matemática: Euclimar e Arístocles e aos colegas de mestrado: Maristela Cardoso, Ayana Santana, Cristiano Silva, Wanessa Ferreira, Leonardo Brito, Claudeilsio Nascimento, Mikaela Aires, Matheus Hudson e Clebes Brandão. Obrigada pelos momentos de aprendizado e diversão. Com certeza vocês ajudaram essa caminhada a ser mais prazerosa.

A CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \ \ u \in H_0^1(\Omega),$$

em que $N \geq 2$, $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ é limitado e assumindo algumas condições para V e f, mostramos que este problema possui uma solução fraca positiva. A existência dessa solução foi garantida em um domínio exterior através de algumas técnicas variacionais, técnicas de compacidade, um argumento topológico e uma função baricentro.

Palavras-chave: Variedade de Nehari, Domínio Exterior, Sequência de Palais - Smale, Baricentro.

Abstract

In this work we study the problem

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \;\; u \in H_0^1(\Omega),$$

where $N \geq 2$, $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ is limited and assuming some conditions for V and f, we show that this problem has a positive weak solution. The existence of this solution was guaranteed in an external domain through some variational techniques, compactness techniques, a topological argument and a baricenter function.

Keywords: Nehari Manifold, Exterior Domain, Palais - Smale Sequence, Baricenter.

Notação

$B_k(0)$	Bola centrada em 0 com raio k;
$B_{2k}(0)$	Bola centrada em 0 com raio $2k$;
$B_2(y_0)$	Bola centrada em y_0 com raio 2;
$\partial B_2(y_0)$	Fronteira da bola centrada em y_0 com raio 2;
$u_k \to u$	Convergência forte (em norma);
$u_k \rightharpoonup u$	Convergência fraca;
$u_k \to u$ q.t.p. em Ω	Convergência em quase todo ponto x de Ω;
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	Gradiente de u;
$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u;
$\overline{X}$	Fecho de X;
$X \subset\subset Y$	Fecho de X é compacto e está contido em Y;
$dist(u, X)$	Distância de u ao conjunto X;
$p' = \frac{p}{p-1}$	Expoente conjugado de p;
$f = o(g)$, quando $x \to x_0$	$\lim_{x \to x_0} \frac{\lvert f(x)\rvert}{g(x)} = 0$;
supp f	Suporte da função f;
$C^1(X, \mathbb{R})$	Espaço das funções continuamente diferenciáveis de X em $\mathbb{R}$;
X^*	Dual do espaço X;
$L^p(\Omega)$	Espaço de Lebesgue de funções p-integráveis em Ω;
$L^p_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções localmente integráveis em Ω;

$D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_1^{\alpha_n}}$	Derivada fraca com multi-índice;
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	Expoente crítico de Sobolev;
$H^1(\mathbb{R}^N)$	Espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$;
$H_0^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$;
$H^{-1}(\mathbb{R}^N)$	Espaço dual de $H^1(\mathbb{R}^N)$;
$\|u\|_p = \left(\int_\Omega \|u\|^p\right)^p, \forall\, p \in [p, \infty)$	Norma usual de $L^p(\Omega)$;
$\|u\|_\infty := \inf\{C : \|u(x)\| \leq C \;\; q.t.p. \text{ em } \Omega\}$	Norma usual de $L^\infty(\Omega)$;
$\|u\|_{H^1} = \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Norma usual do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$;
$\|u\|_\Omega = \left(\|\nabla u\|^2 + V(x)\|u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Norma alternativa do espaço $H^1(\Omega)$;
$\|u\| = \left(\|\nabla u\|^2 + V_\infty\|u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Norma alternativa do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$;
$\mathcal{N}_V = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}; I_V(u)u = 0\}$	Variedade de Nehari em $H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$;
$\mathcal{N}_\infty = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}; I_\infty(u)u = 0\}$	Variedade de Nehari em $H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$;
$c_V = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_V} I_V(u)$	Ínfimo de I_V em $\mathcal{N}_V$;
$c_\infty = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u)$	Ínfimo de I_∞ em $\mathcal{N}_\infty$;
$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$;	
$u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$.	

Sumário

Introdução

Neste trabalho faremos um estudo baseado no artigo de Khatib e Maia [18], que sob certas condições garante a existência de uma solução fraca positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ para o problema

$$(P_V) \qquad -\Delta u + V(x)u = f(u), \ \ u \in H_0^1(\Omega)$$

em que $N \geq 2$, $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ é um domínio regular, limitado e não há restrições quanto ao seu tamanho, nem qualquer suposição de simetria. O termo não linear f é uma função não homogênea, assintoticamente linear ou superlinear no infinito. Além disso, o potencial V é uma função positiva não necessariamente simétrica.

Trabalharemos com o problema na sua forma variacional, isto é, estudamos o funcional I_V associado ao problema (P_V), definido por

$$I_V(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx - \int_\Omega F(u)dx, \ \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Nosso objetivo é encontrar uma solução fraca para o problema (P_V) a qual será um ponto crítico não trivial para o funcional I_V. Usaremos uma abordagem desenvolvida por Évéquoz e Weth [16], Clapp e Maia [13] e Maia e Pellacci [21], em que é encontrada uma solução positiva, ampliando os resultados de existência obtidos nos célebres artigos de Benci e Cerami [12] e Bahri e Lions [3], para não linearidades não homogêneas em geral, superlineares ou assintoticamente lineares na infinito em um domínio exterior.

Neste trabalho, a existência de uma solução u para o problema (P_V) será garantida de dois modos: quando c_V que é o nível mínimo de energia do funcional I_V for atingido e quando não for atingido. No primeiro caso, a solução u será garantida na Variedade de Nehari $\mathcal{N}_V$ e no segundo caso, a solução u será garantida em $H_0^1(\Omega)$ com $I_V(u) \in (c_V, 2c_V)$.

O interesse em estudar o problema (P_V) surgiu devido o desafio em desenvolver argumentos convenientes num domínio ilimitado como resolver a falta de compacidade no domínio exterior. O trabalho pioneiro sobre problemas assintoticamente lineares foi feito por Stuart e Zhou [24] que assumiram a condição de simetria radial que reduz a dificuldade de mostrar compacidade uma vez que o problema fica definido em $\mathbb{R}$.

Clapp e Maia [13], trabalharam com o problema (P_V) sendo f assintoticamente linear no infinito. Elas mostraram a existência de uma solução *ground states* em que o nível mínimo de energia não é atingido e consideraram $f \in C^3$. Trabalharemos com o mesmo problema (P_V), porém definido em um domínio exterior e considerando menos regularidade para f.

O problema

$$(P_\infty) \qquad -\Delta u + V_\infty u = f(u), \ \ u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

é o caso autonômo do problema (P_V), quando $V(x) = V_\infty$ é uma constante positiva. Esse problema foi resolvido por Berestycki e Lions [8] com solução radial, simétrica e positiva.

Nossa principal contribuição neste trabalho é estender o resultado de Bahri e Lions [3] para f não homogêneo, sem suposição de simetria em V ou em Ω. Observe que aqui Ω é um conjunto geral aberto em $\mathbb{R}^N$ com complemento limitado que pode incluir vários buracos em uma bola ou apenas um conjunto de pontos $\{0\}$. Além disso, permitimos a não linearidade f seja uma função em C^1, melhorando as hipóteses em [13] e [21] onde foi considerado em C^3 por razões técnicas (ver Lema 3.3 em [13]).

Para resolver o problema (P_V), esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

No Capítulo 1 estudamos a solução do problema limite (P_∞) para apresentarmos algumas técnicas em domínios exteriores, tais como: estimativa de decaimento exponencial e também a projeção sobre a Variedade de Nehari.

No Capítulo 2 resolvemos a falta de compacidade do nosso domínio exterior através da sequência de Palais - Smale para o funcional I_V juntamente com o Lema de Splitting no intervalo $(c_\infty, 2c_\infty)$, em que c_∞ é o nível mínimo de energia.

No Capítulo 3 consideramos um argumento topológico e uma aplicação baricentro para mostrarmos o resultado principal desta dissertação.

No Apêndice fizemos um estudo dos resultados auxiliares de Análise Funcional, Espaço de Sobolev e Métodos Variacionais.

Capítulo 1

Problema limite assintoticamente linear ou superlinear

Vamos considerar o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \;\; u \in H_0^1(\Omega)$$

onde $N \geq 2$, Ω é um aberto e $\mathbb{R}^N \backslash \Omega \subseteq B_k(0)$ é uma bola de raio k centrada na origem de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ é limitado, $u \in H_0^1(\Omega)$ e V é um potencial satisfazendo as seguintes condições:

(V_1)
$$V \in C^0(\Omega), \inf_{x \in \Omega} V(x) > 0 \;\; \text{e} \lim_{|x| \to +\infty} V(x) = V_\infty;$$

(V_2)
$$V(x) \leq V_\infty + Ce^{-\gamma|x|}, \text{ onde } C > 0 \;\; \text{e} \;\; \gamma > 2\sqrt{V_\infty}.$$

As condições que vamos considerar para a não linearidade f são:

(f_1)
$$f \in C^1([0, \infty));$$

(f_2)
$$\text{Existem } C > 0, 1 < p_1 \leq p_2 \text{ tais que } p_1, p_2 < 2^* - 1 \;\; \text{e}$$
$$|f^{(k)}(s)| \leq C(|s|^{p_1 - k} + |s|^{p_2 - k})$$

para $k \in \{0, 1\}$ e $s > 0$;

(f_3)
$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} \geq m > V_\infty;$$

(f_4)
$$\text{Se } F(s) := \int_0^s f(t)dt \;\; \text{e} \;\; Q(s) := \frac{1}{2}f(s)s - F(s),$$

então $\lim_{s \to \infty} Q(s) = +\infty$;

(f_5)
$$\text{A função } \frac{f(s)}{s} < f'(s) \text{ para } s > 0;$$

A última condição que consideramos para resolver o problema (P_V) é:

(U) O problema limite (P_∞) possui única solução, radial e positiva

Observação 1. *Note que* $Q(s) := \frac{1}{2}f(s)s - F(s) > 0, \forall s > 0$, *pois por* ($f_5$), $\left(\frac{f(s)}{s}\right)' = \frac{sf'(s)-f(s)}{s^2} > 0$. *Portanto,*

$$\begin{aligned} f(s)s - 2F(s) &= \int_0^s [(f(t)t)' - 2f(t)]dt \\ &= \int_0^s [f'(t)t + f(t) - 2f(t)]dt \\ &= \int_0^s [f'(t)t - f(t)]dt > 0. \end{aligned}$$

Observação 2. *Note que* $f(s) > 0$, *para* $s > 0$. *De fato, por* (f_2), *temos* $0 = f(0) = f'(0)$. *Por outro lado,*

$$f'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(s) - f(0)}{s - 0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s}.$$

E por (f_5), $f(s)/s > 0$. *Assim, podemos escrever* $f(s) = \frac{f(s)}{s}s > 0$ *para todo* $s > 0$.

A seguir, apresentaremos dois exemplos que garantem que as condições estabelecidas para o problema (P_V) não são vazias.

Exemplo 1.1. *Considere o modelo superlinear* $f(s) = s^p, p \in (1, 2^* - 1)$.
Afirmamos que f *satisfaz as hipóteses* (f_1) *a* (f_5).
De fato, sendo f *uma função polinomial, então* $f \in C^1([0,\infty))$.
Como $p \in (1, 2^* - 1)$, *para* $k = 0$, *tome* $p_1 = p$ *e* $p_2 = \frac{2^*-1+p}{2}$, *assim*

$$|f(s)| \leq C(|s|^{p_1} + |s|^{p_2}).$$

Analogamente, para $k = 1$

$$|f'(s)| = |ps^{p-1}| \leq p|s|^{p-1} + |s|^{p_2-1} \leq C(|s|^{p_1-1} + |s|^{p_2-1}).$$

Note que

$$Q(s) = \frac{s^{p+1}p - s^{p+1}}{2(p+1)}$$

implica que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{(p-1)s^{p+1}}{2(p+1)} = +\infty.$$

Como $\frac{f(s)}{s} = s^{p-1}$ *e* $f'(s) = ps^{p-1}$, *então* $\frac{f(s)}{s} < f'(s)$ *para* $s > 0$.

Exemplo 1.2. *Vejamos que o modelo* $f(s) = \frac{s^3}{1+bs^2}$, $b \in (0, V_\infty^{-1})$ *assintoticamente linear satisfaz as condições* (f_1) *a* (f_5).

Observe que f *é o quociente de funções polinomiais, então* $f \in C^1([0,\infty))$.
Para $k = 0$, *temos dois casos a considerar.*
Se $s > 1$, *então*

$$|f(s)| = \left|\frac{s^3}{1+bs^2}\right| \leq \left|\frac{s^3}{bs^2}\right| \leq \frac{1}{b}|s| \leq C(|s|^{p_1} + |s|^{p_2}).$$

Se $s < 1$ *e tomando* $p_1 \in (1, \min\{2^* - 1, 2\})$, *obtemos*

$$|f(s)| = \left|\frac{s^3}{1+bs^2}\right| \leq \left|\frac{s^3}{bs^2}\right| \leq |s|^3 \leq |s|^{p_1} \leq C(|s|^{p_1} + |s|^{p_2}).$$

Quando $k = 1$ *e assumindo que* $s > 1$, *temos*

$$|f'(s)| = \left|\frac{s^4b + 3s^2}{(1+bs^2)^2}\right| \leq \left|\frac{s^4b + 3s^2}{s^4}\right| \leq \left|\frac{s^2b + 3}{s^2}\right| \leq |b + 3| \leq C(|s|^{p_1-1} + |s|^{p_2-1}).$$

Da mesma forma, se $s < 1$,

$$\begin{aligned}
|f'(s)| &= \left|\frac{s^4b+3s^2}{(1+bs^2)^2}\right| \\
&= \left|\frac{s^2}{(1+bs^2)}\frac{(s^2b+3)}{(1+bs^2)}\right| \\
&= \left|\frac{s^2}{(1+bs^2)}(s^2b+3)\right| \\
&\leq \left|\frac{s^2}{(1+bs^2)}(b+3)\right| \\
&\leq C\left|\frac{s^2}{(1+bs^2)}\right| \\
&= C\left|\frac{s^3}{(1+bs^2)}\frac{1}{s}\right| \\
&\leq C|s^3|\left|\frac{1}{s}\right| \\
&\leq C(|s|^{p_1}+|s|^{p_2})\left|\frac{1}{s}\right| \\
&= C(|s|^{p_1-1}+|s|^{p_2-1})|.
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{f(s)}{s} = \frac{s^2}{1+bs^2} \implies \lim_{s\to+\infty}\frac{s^2}{1+bs^2} = \frac{1}{b} \geq m > V_\infty$$

e

$$Q(s) = \frac{s^4}{2(1+bs^2)} - \int_0^s \frac{t^3}{1+bt^2}dt \implies \lim_{s\to+\infty}\frac{s^4}{2(1+bs^2)} - \int_0^s \frac{t^3}{1+bt^2}dt = +\infty$$

já que $\int_0^s \frac{t^3}{1+bt^2}dt = \frac{bs^2-log(b^2s^2+1)}{2b^2}$.

E portanto, $\frac{f(s)}{s} > f'(s)$ *para* $s > 0$, *pois*

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{1+bs^2} - \frac{s^4b+3s^2}{(1+bs^2)^2} &= \frac{s^2(1+bs^2)-s^4b+3s^2}{(1+bs^2)^2} \\
&= \frac{s^2+bs^4-bs^4+3s^2}{(1+bs^2)^2} \\
&= \frac{4s^2}{(1+bs^2)^2} > 0.
\end{aligned}$$

Observação 3. *O problema* (P_∞) *tem única solução se assumirmos que:*
(U') $\psi(s) = \frac{-V_\infty s+f(s)}{sf'(s)-V_\infty s}$ *é decrescente em* $s \in (\tau, +\infty)$, *em que* τ *é o único número positivo tal que* $\frac{f(\tau)}{\tau} = V_\infty$.
De fato, seja $g(u) = -V_\infty u + f(u)$ *com* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, *temos*

- *i)* g *é contínua em* $(0, \infty)$;
- *ii)* $g(u) \leq 0$ *para* $u < \tau$, *pois*

$$\frac{f(u)}{u} < \frac{f(\tau)}{\tau} \implies \frac{f(u)}{u} - V_\infty < 0;$$

- *iii)* $g(u) > 0$ *para* $u > \tau$, *pois*

$$\frac{f(u)}{u} > \frac{f(\tau)}{\tau} \implies \frac{f(u)}{u} - V_\infty > 0;$$

- *iv)* $g \in C^1(\tau, \infty)$, *com* $\psi(s) = \frac{g(u)}{u} = \frac{-V_\infty s+f(s)}{sf'(s)-V_\infty s}$ *é decrescente em* (τ, ∞).

Pelo Teorema D.1 de Serrin e Tang [23], o problema (P_∞) *possui única solução radial.*

1.1 Formulação fraca do problema (P_V)

Considere a sequência $(v_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $v_k \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Então,

$$-\Delta u v_k + V(x) u v_k = f(u) v_k$$

$$\int_\Omega -\Delta u v_k dx + \int_\Omega V(x) u v_k dx = \int_\Omega f(u) v_k dx.$$

Pela fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_k dx + \int_\Omega V(x) u v_k dx = \int_\Omega f(u) v_k dx. \tag{1.1}$$

Agora observe que para $k \to \infty$, temos

$$\left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_k dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \to 0.$$

Com efeito, segue da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_k dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \right| &\leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v_k - \nabla u \cdot \nabla v| dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u (\nabla v_k - \nabla v)| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v_k - \nabla v\|_2. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\left|\int_\Omega V(x) u v_k dx - \int_\Omega V(x) u v dx\right| \to 0$ quando $k \to \infty$, pois usando novamente a Desigualdade de Hölder, resulta que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega V(x) u v_k dx - \int_\Omega V(x) u v dx \right| &\leq \int_\Omega |V(x) u (v_k - v)| dx \\ &\leq \|V(x) u\|_2 \|v_k - v\|_2. \end{aligned}$$

Além disso, $\left|\int_\Omega f(u) u_k dx - \int_\Omega f(u) v dx\right| \to 0$ quando $k \to \infty$. Segue novamente da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f(u) u_k dx - \int_\Omega f(u) v dx \right| &\leq \int_\Omega |f(u) u_k dx - \int_\Omega f(u) v| dx \\ &\leq \int_\Omega |f(u)(u_k - v)| dx \\ &\leq \|f(u)\|_2 \|u_k - v\|_2. \end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$ na equação (1.1), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega V(x) u v dx = \int_\Omega f(u) v dx.$$

Com as hipóteses estabelecidas para o problema (P_V), apresentaremos o resultado principal desta dissertação que consiste em mostrar a existência de uma solução fraca positiva para o problema (P_V) em um domínio exterior.

Teorema 1.1. *Sob as suposições (V_1) a (V_2), (f_1) a (f_5) e (U), o problema (P_V) tem uma solução positiva u em $H_0^1(\Omega)$.*

1.2 Abordagem variacional e estimativa de decaimento exponencial

Note que pela Observação 2, $f(s) > 0$ para $s > 0$ e vamos definir a extensão $f(s) := -f(-s)$ para $s < 0$ que é uma função ímpar e suave. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução positiva para o problema (P_V) com a f estendida, então u será uma solução positiva do problema com a f original.
A constante C representará as várias constantes que aparecerão nas estimativas.
Usaremos a seguinte notação

$$< u, v >_\Omega = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)dx, \qquad \|u\|_\Omega^2 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx.$$

Nossa suposição sobre V implica que $\|\cdot\|_\Omega$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ que é equivalente a padrão. Escrevamos

$$< u, v > = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + V_\infty uv)dx, \qquad \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)dx$$

e nossa suposição em V_∞ implica que $\|\cdot\|$ é uma norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$ que é equivalente a norma padrão. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ podemos definir $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, de fato $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ veja Breziz [10]. Uma solução fraca do problema (P_V) é um ponto crítico do funcional

$$I_V(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega F(u)dx, \;\; u \in H_0^1(\Omega).$$

Pelo item (ii) da Observação 14 e pelo Lema (A.4), obtemos

$$J_V(u) = I_V'(u)u = \|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega f(u)udx. \tag{1.2}$$

Assim, definamos a Variedade de Nehari

$$\mathcal{N}_V = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : J_V(u) = 0\},$$

e o nível de energia mínimo associado ao funcional I_V é dado por

$$c_V = \inf_{u \in \mathcal{N}_V} I_V(u).$$

Seja φ um funcional de classe C^2 em $H_0^1(\Omega)$ e definamos restrição natural para o funcional φ.

Definição 1.1. *Uma restrição natural para o funcional φ é uma Variedade $\mathcal{M} \subset H_0^1(\Omega)$ com a propriedade de que todo ponto crítico de φ restrito a $\mathcal{M}$ é um ponto crítico de $H_0^1(\Omega)$.*

Essa definição será de grande utilidade, pois posteriormente mostraremos que a Variedade de Nehari é uma uma restrição natural.
Denotamos da mesma maneira I_∞, J_∞, $\mathcal{N}_\infty$ e c_∞ para a definição com a constante V_∞, no lugar de $V(x)$. Agora, apresentaremos uma das desigualdades mais utilizadas nessa dissertação que consiste em controlar a solução do problema (P_∞) e a sua derivada de primeira ordem. Seja ω uma solução única de (P_∞) e por Berestychi e Lions [8], essa solução é radial e positiva. Afirmamos que para todo $x \in \mathbb{R}^N$, a seguinte desigualdade é verdadeira

$$C(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|x|} \leq |D^{(k)}w(x)| \leq C(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|x|}, \qquad k = 0, 1. \tag{1.3}$$

De fato, considere R suficientemente grande, então para $|x| > R$, a Proposição D.1 de Gidas, Ni e Nirenberg [17] com $k = 0, 1$ e o Teorema D.2 de Berestycki e Lions [8], garantem que

$$|D^{(k)}w(x)| \leq Be^{-\sqrt{V_\infty}|x|}(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}}, \quad |x| \to \infty.$$

Por outro lado, observe que $\frac{e^{-\sqrt{V_\infty}|x|}}{(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}}$ é contínua e positiva. Assim, para $|x| < R$, a função $\frac{e^{-\sqrt{V_\infty}|x|}}{(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}}$ atinge o seu máximo e o seu mínimo. Logo,

$$C \leq \frac{e^{-\sqrt{V_\infty}|x|}}{(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}} \leq C.$$

Ademais, $w(x)$ é de classe C^2 e positiva. Logo,

$$Ce^{-\sqrt{V_\infty}|x|}(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} \leq D^{(k)}w(x) \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|x|}(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}}.$$

A partir de agora daremos início as construções das propriedades para resolvermos o problema (P_V). No Lema 1.1, estudaremos algumas caracterizações da Variedade de Nehari.

Lema 1.1. *(a) Existe $\rho > 0$ tal que $\|u\|_\Omega \geq \rho$ para todo $u \in \mathcal{N}_V$;*
(b) $\mathcal{N}_V$ é uma subvariedade C^1 fechada em $H_0^1(\Omega)$;
(c) Se $u \in \mathcal{N}_V$, a função $t \to I_V(tu)$ é estritamente crescente em $(0,1]$ e estritamente decrescente em $(1,\infty)$. Em particular,

$$I_V(u) = \max_{t>0} I_V(tu) > 0.$$

Demonstração. (a) Por (1.2), temos que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} J_V(u) &= \|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega f(u)u dx \\ &\geq \|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega |f(u)u| dx \\ &\geq \|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega C(|u|^{p_1} + |u|^{p_2})u dx. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Como $2 < p_1 + 1 \leq p_2 + 1$, existe $t \in (0,1)$ tal que $p_1 + 1 = 2t + (1-t)(p_2+1)$. Assim, para $p = \frac{1}{t}$, $q = \frac{1}{1-t}$, usando a Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{p_1+1} dx &= \int_\Omega |u|^{2t}|u|^{(1-t)p_2+1} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|u|^{2t})^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (|u|^{(1-t)p_2+1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^t \left(\int_\Omega |u|^{p_2+1} dx\right)^{1-t} \\ &= \|u\|_2^{2t} \|u\|_{p_2+1}^{(1-t)(p_2+1)}. \end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $2 < q < 2^*$ e a Desigualdade de Young $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q = ta^{1/t} + (1-t)b^{1/(1-t)}$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{p_1+1} dx &\leq \frac{1}{C}\|u\|_\Omega^{2t} C\|u\|_\Omega^{(1-t)p_2+1} \\ &\leq \frac{t}{C}\left(\|u\|_\Omega^{2t}\right)^{\frac{1}{t}} + (1-t)(C\|u\|_\Omega^{(p_2+1)})^{\frac{1}{1-t}} \end{aligned}$$

$$
(1.5) \qquad = \frac{t}{C}\|u\|_\Omega^2 + (1-t)C^{1/(1-t)}\|u\|_\Omega^{p_2+1}.
$$

E novamente pela imersão de Sobolev

$$
(1.6) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_2+1}dx = \|u\|_{p_2+1}^{p_2+1} \leq C\|u\|_\Omega^{p_2+1}.
$$

Logo, aplicando (1.5), (1.6) e (1.4) obtemos

$$
\begin{aligned}
J_V(u) &\geq \|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega C(|u|^{p_1+1} + |u|^{p_2+1})udx \\
&\geq \|u\|_\Omega^2 - C\left[\frac{t}{C}\|u\|_\Omega^2 + (1-t)C^{1/(1-t)}\|u\|_\Omega^{p_2+1} - C\|u\|_\Omega^{p_2+1}\right] \\
&= \|u\|_\Omega^2 - t\|u\|_\Omega^2 - C\left[((1-t)C^{1/(1-t)}+1)\|u\|_\Omega^{p_2+1}\right] \\
&\geq \|u\|_\Omega^2 - t\|u\|_\Omega^2 - C\|u\|_\Omega^{p_2+1} \\
&= (1-t)\|u\|_\Omega^2 - C\|u\|_\Omega^{p_2+1}.
\end{aligned}
$$

Se $u \in \mathcal{N}_V$, então $J_V(u) = 0$. Assim,

$$
0 \geq (1-t)\|u\|_\Omega^2 - C\|u\|_\Omega^{p_2+1} \implies C\|u\|_\Omega^{p_2+1} \geq (1-t)\|u\|_\Omega^2 \implies \frac{C_2\|u\|_\Omega^{p_2+1}}{\|u\|_\Omega^2} > (1-t).
$$

Como $p_2 > 1$ temos

$$
\|u\|_\Omega > \left(\frac{(1-t)}{C}\right)^{\frac{1}{p_2-1}}.
$$

Logo, $\rho = \left(\frac{1-t}{C}\right)^{\frac{1}{p_2-1}}$.
(b) Como $J_V(u)$ é contínua e

$$
J_V^{-1}(0) = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}; J_V(u) = 0\} = \mathcal{N}_V,
$$

então $\mathcal{N}_V$ é fechado em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, derivando o funcional J_V em u e aplicando em $v \in H_0^1(\Omega)$

$$
J_V'(u)v = 2 < u, v >_\Omega - \int_\Omega [f'(u)u + f(u)]vdx.
$$

Se $v = u$, então

$$
J_V'(u)u = 2 < u, u >_\Omega - \int_\Omega [f'(u)u + f(u)]udx = 2\|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega [f'(u)u^2 + f(u)u]dx.
$$

Note que $\|u\|_\Omega^2 = \int_\Omega f(u)udx$, pois $u \in \mathcal{N}_V$ e pela propriedade (f_5), concluímos

$$
\begin{aligned}
J_V'(u)u &= 2\int_\Omega f(u)udx - \int_\Omega f'(u)u^2dx - \int_\Omega f(u)udx \\
&= \int_\Omega f(u)udx - \int_\Omega f'(u)u^2dx \\
&= \int_\Omega [f(u) - f'(u)u]udx < 0
\end{aligned}
$$

para todo $u \in \mathcal{N}_V$. Sendo $J_V'(u)u < 0$, temos que 0 é valor regular de $J_V : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $J_V \in C^1$, então pelo Teorema D.3 de Biliotti [9], temos que $\mathcal{N}_V$ é uma subvariedade de classe

C^1 em $H_0^1(\Omega)$.
(c) Sejam $u \in \mathcal{N}_V$, $\Omega^+ := \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$ e $\Omega^- := \{x \in \Omega; u(x) < 0\}$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(tu) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\|tu\|_\Omega^2}{2} - \int_\Omega F(tu)dx\right] \\
&= t\|u\|_\Omega^2 - \int_\Omega f(tu)udx \\
&= t\int_\Omega f(u)udx - \int_\Omega f(tu)udx \\
&= t\int_\Omega \left[f(u) - \frac{f(tu)}{t}\right]udx \\
&= t\int_\Omega \left[\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right]u^2dx \\
&= t\left\{\int_{\Omega^-}\left[\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right]u^2dx + \int_{\Omega^+}\left[\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right]u^2dx\right\}.
\end{aligned}$$

Pela propriedade (f_5), temos que $\frac{f(u)}{u}$ é estritamente crescente em $u \in (0, \infty)$ e estritamente decrescente em $u \in (-\infty, 0)$.
De fato, podemos notar que se $u > 0$, então $f'(u)u - f(u) > 0$ e

$$\left(\frac{f(u)}{u}\right)' = \frac{f'(u)u - f(u)}{u^2} > 0.$$

Logo, $\frac{f(u)}{u}$ é crescente. E se $u < 0$, então $\frac{f(u)}{u}$ é decrescente. Com efeito, como f é ímpar, então a sua derivada é par. Considere $v = -u > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(u)}{u}\right)' &= \frac{f'(-v)(-v) - f(-v)}{-v}\frac{1}{-v} \\
&= \frac{f(v)(-v) + f(v)}{v}\frac{1}{-v} \\
&= \frac{f'(v)(v) - f(v)}{v}\frac{1}{-v} < 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{f(u)}{u}$ é decrescente quando $u < 0$. Por outro lado,

$$\left(\frac{f(u)}{u}\right)' = \frac{f'(u)u - f(u)}{u^2}.$$

Portanto, $f'(u)u - f(u) < 0$ se $u < 0$.
Dessa forma, se $t \in (0, 1)$ e $u \in (0, \infty)$, então $tu < u$. Logo $\frac{f(tu)}{tu} < \frac{f(u)}{u}$ implica que $\frac{d}{dt}I_V(tu) > 0$. Se $t \in (0, 1)$ e $u \in (-\infty, 0)$ temos $u < tu < 0$. Assim,

$$\frac{f(tu)}{tu} \leq \frac{f(u)}{u}.$$

Logo, $\frac{d}{dt}I_V(tu) > 0$.
Agora, se $t \in (1, +\infty)$ e $u \in (-\infty, 0)$ obtemos $u > tu$. Pela condição (f_5) concluimos que $\frac{f(tu)}{tu} > \frac{f(u)}{u}$. Portanto, $\frac{d}{dt}I_V(tu) < 0$. Da mesma forma, se $t \in (1, +\infty)$ e $u \in (0, +\infty)$ temos $\frac{f(tu)}{tu} > \frac{f(u)}{u}$, isto é, $\frac{d}{dt}I_V(tu) < 0$. Além disso, observe que para todo $u \in \mathcal{N}_V$, vale

$$I_V(1u) = I_V(u) = \max_{t>0} I_V(tu) > 0.$$

□

O próximo lema nos permite levar uma função não linear em C^3 para uma função não linear em C^1, que melhorou as hipóteses em Clapp e Maia [13] e Coffmam e Marcus [14] que estava considerada em C^3.

Lema 1.2. *Para todo $0 < \nu < p_1 - 1$ e $\rho > 0$, existe $C_\rho \geq 0$ tal que se $0 \leq u, v \leq \rho$, então*

$$F(u+v) - F(u) - F(v) - f(u)v - f(v)u \geq -C_\rho (uv)^{1+\frac{\nu}{2}}.$$

Demonstração. Se $u = 0$ ou $v = 0$ a desigualdade é trivial. De fato, suponhamos que $u = 0$, temos

$$F(v) - F(0) - F(v) - f(0)u - f(v)0 \geq -C_\rho (0)^{1+\frac{\nu}{2}}.$$

Por (f_2), temos $f(0) = 0$, logo $C_\rho(0) \geq 0$. Além disso, por (f_5), f é crescente, então

$$\int_u^{u+v} f(w)dw \geq \int_u^{u+v} f(u)dw = f(u)v.$$

Assim,

$$F(u+v) - F(u) = \int_u^{u+v} f(w)dw \geq f(u)v.$$

Segue da Observação 2, que para todo $0 < \nu < p_1 - 1$, temos

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{f(s)}{|s|^{1+\nu}} = 0, \text{ então } f(s) = o(|s|^{1+\nu}), \text{ quando } |s| \to 0.$$

Defina

$$\tilde{C}_\rho = \sup_{0<u\leq\rho} \frac{f(u)}{u^{1+\nu}} < \infty.$$

Agora para $0 < v \leq u \leq \rho$,

$$\begin{aligned}
F(u+v) - F(u) &- F(v) - f(u)v - f(v)u \geq -F(v) - f(v)u \\
&= -\int_0^v \frac{f(w)}{w^{1+\nu}} w^{1+\nu} dw - \frac{f(v)}{v^{1+\nu}} uv^{1+\nu} \\
&\geq -\tilde{C}_\rho \int_0^v w^{1+\nu} dw - \tilde{C}_\rho uv^{1+\nu} \\
&= -\tilde{C}_\rho \left(\frac{v^{2+\nu}}{2+\nu} \right) - \tilde{C}_\rho uv^{1+\nu} \\
&\geq -\left(\frac{v^{2+\nu}}{2+\nu} + uv^{1+\nu} \right) \tilde{C}_\rho \\
&= -\left[\frac{1}{2+\nu} \left(\frac{v^{2+\nu}}{u^{1+\frac{\nu}{2}}} \right) + \frac{v^{1+\nu}}{u^{\frac{\nu}{2}}} \right] \tilde{C} u^{1+\frac{\nu}{2}} \\
&= -\left[\frac{1}{2+\nu} \left(\frac{v^{2+\nu}}{v^{1+\frac{\nu}{2}} u^{1+\frac{\nu}{2}}} \right) + \frac{v^{1+\nu}}{v^{1+\frac{\nu}{2}} u^{\frac{\nu}{2}}} \right] \tilde{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\nu}{2}} \\
&= -\left[\frac{1}{2+\nu} \left(\frac{v}{u} \right)^{1+\frac{\nu}{2}} + \left(\frac{v}{u} \right)^{\frac{\nu}{2}} \right] \tilde{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\nu}{2}}.
\end{aligned}$$

Note que $(\frac{v}{u})^{\frac{\nu}{2}} < 1$ e $(\frac{v}{u})^{1+\frac{\nu}{2}} < 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
F(u+v) - F(u) &- F(v) - f(u)v - f(v)u \geq -\left[\frac{1}{2} \left(\frac{v}{u} \right)^{1+\frac{\nu}{2}} + \left(\frac{v}{u} \right)^{\frac{\nu}{2}} \right] \tilde{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\nu}{2}} \\
&\geq -\left(\frac{3}{2} \right) \tilde{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\nu}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.3. *Se* $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$*, existe* $C > 0$ *tal que* $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}dx \leq Ce^{-\mu_1|x_1-x_2|}.$$

Se $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$ *e* $\mu_3 > \mu_1 \geq 0$*, existe* $C > 0$ *tal que para todo* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}e^{-\mu_3|x-x_3|}dx \leq Ce^{-\frac{\mu_1}{2}(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_1|)}.$$

Demonstração. Inicialmente observe que

$$\begin{aligned} \mu_1|x_1-x_2| + (\mu_2-\mu_1)|x-x_2| &\leq \mu_1(|x-x_1|+|x-x_2|) + (\mu_2-\mu_1)|x-x_2| \\ &= \mu_1|x-x_1| + \mu_2|x-x_2|. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$-\mu_1|x_1-x_2| - (\mu_2-\mu_1)|x-x_2| \geq -\mu_1|x-x_1| - \mu_2|x-x_2|.$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x_1-x_2|}e^{-(\mu_2-\mu_1)|x-x_2|}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x_1-x_2|}\frac{1}{e^{(\mu_2-\mu_1)|x-x_2|}}dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x_1-x_2|}Cdx \\ &= Ce^{-\mu_1|x_1-x_2|}. \end{aligned}$$

De forma similar obtemos a segunda igualdade, isto é,

$$\mu_1|x_1-x_2| + (\mu_2-\mu_1)|x-x_2| \leq \mu_1|x-x_1| + \mu_2|x-x_2|, \tag{1.7}$$

$$\mu_1|x_2-x_3| + (\mu_3-\mu_1)|x-x_3| \leq \mu_2|x-x_2| + \mu_3|x-x_3|, \tag{1.8}$$

$$\mu_1|x_3-x_1| + (\mu_3-\mu_1)|x-x_3| \leq \mu_1|x-x_1| + \mu_3|x-x_3|. \tag{1.9}$$

Somando as desigualdades (1.7), (1.8) e (1.9), resulta que

$$\begin{aligned} \mu_1(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_1|) + (\mu_2-\mu_1)|x-x_2| + (\mu_3-\mu_1)|x-x_3| + \\ +(\mu_3-\mu_1)|x-x_3| \leq 2\mu_1|x-x_1| + 2\mu_2|x-x_2| + 2\mu_3|x-x_3|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_1}{2}(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_1|) - \frac{1}{2}[(\mu_2-\mu_1)|x-x_2| + (\mu_3-\mu_1)|x-x_3| + \\ +(\mu_3-\mu_1)|x-x_3|] \geq -\mu_1|x-x_1| - \mu_2|x-x_2| - \mu_3|x-x_3|. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}e^{-\mu_3|x-x_3|}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\mu_1}{2}(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_1|)}Cdx \\ &= Ce^{-\frac{\mu_1}{2}(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_1|)}. \end{aligned}$$

$\square$

O objetivo do Lema 1.4 é estudar o comportamento de uma função específica e mostrar que ela é negativa. Essa função terá grande utilidade quando demonstrarmos a projeção sobre Nehari. De início, considere $\lambda \in (0,1]$, $r \in (0,\infty)$ e defina $\phi : [0,1] \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ pondo

$$\phi(\lambda, r) = \lambda^2 \left(\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 dx \right).$$

Para que ϕ esteja bem definida em $\lambda = 0$, considere $\phi(0,r) = 0$. Como a norma é uma função contínua e pelo Lema A.4, concluímos que $\phi(\lambda, r)$ é contínua. Note que por (f_5), podemos concluir que $\phi(\lambda, r)$ é decrescente com respeito a r. De fato,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda, r) &= \lambda^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(w) w dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 dx \right) \\ &= \lambda^2 w^2 \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right) dx \right].\end{aligned}$$

Assim, quando $r \to \infty$, temos $\phi(\lambda, r) < 0$.
Para mostrarmos o decrescimento de $\phi(\lambda, r)$ com respeito a λ, seja $r\lambda > 1$. Usando novamente a propriedade (f_5), temos que f é crescente, então $\frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} > \frac{f(w)}{w}$. Logo

$$\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 dx < \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w)}{w} w^2 dx = \|w\|^2 - \|w\|^2 = 0.$$

Portanto, $\phi(\lambda, r)$ é decrescente com respeito a λ. Feito isso, mostraremos o próximo lema.

Lema 1.4. *Existem $S_0 < 0$ e $T_0 > 0$ tais que*

$$\phi(\lambda, r) + \phi(1-\lambda, r) \le S_0 < 0, \qquad \forall\, r \ge T_0, \lambda \in [0,1].$$

Demonstração. Como a função $\phi(\lambda, r)$ é contínua, então existe uma constante A tal que para todo $r \in (0,\infty)$ e $\lambda \in [0,1]$, obtemos

$$\phi(\lambda, r) \le \lambda^2 \|w\|^2 := A\lambda^2.$$

Observe que w é solução do problema (P_∞), então $\|w\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(w) w dx$.
Desse modo,

$$\phi(\lambda, r) = \lambda^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(w) w dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 dx \right) = \lambda^2 \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right) w^2 dx \right].$$

Agora analisaremos o comportamento da ϕ.
Inicialmente para o caso superlinear, temos que $\lim_{r\to\infty} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} = \infty$ e da propriedade (f_5), resulta que f é não-decrescente, então usando o Teorema da Convergência Monótona obtemos

$$\lim_{r\to\infty} \phi(\lambda, r) = \lambda^2 \lim_{r\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right) w^2 dx \right] = -\infty \qquad \lambda \in (0,1] \tag{1.10}$$

e se $\lambda = 1$, $\lim_{r\to\infty} \phi(1, r) = -\infty$.
Para o caso assintoticamente linear, temos $\lim_{r\to\infty} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} = a$ e usando (f_5), concluímos que f é não-decrescente. Segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \phi(\lambda, r) &= \lambda^2 \lim_{r\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right) w^2 dx \right] \\ &= \lambda^2 \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - a \right) w^2 dx \right] := -B\lambda^2 < 0, \qquad \forall\, \lambda \in (0,1].\end{aligned}$$

Devido a simetria com respeito a λ, consideraremos $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$. Escolha $\lambda_0 \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $A\lambda_0^2 < \frac{B}{2}(1-\lambda_0)^2$.
De fato, como $0 < \lambda_0 < \frac{1}{2}$, então $(1-\lambda_0)^2 > \frac{1}{4}$. Assim, para $\lambda_0 < \sqrt{\frac{B}{8A}}$, obtemos

$$A\lambda_0^2 < A\frac{B}{8A} = \frac{B}{8} = \frac{1}{4}\left(\frac{B}{2}\right) < (1-\lambda_0)^2\frac{B}{2}.$$

Por continuidade de ϕ, existe $r_0 \in (0, \infty)$ tal que

$$\phi(1-\lambda_0, r_0) = -\frac{B}{2}(1-\lambda_0)^2.$$

Então, para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e todo $r \geq \max\{r_0, 2\}$, temos $r(1-\lambda) > 1$ e

$$\phi(\lambda, r) + \phi(1-\lambda, r) \leq A\lambda_0^2 + \phi(1-\lambda_0, r_0) = A\lambda_0^2 - \frac{B}{2}(1-\lambda_0)^2 < 0.$$

Por outro lado, se $\lambda \in [\lambda_0, \frac{1}{2}]$, fixando $r_1 > \frac{1}{\lambda_0}$ para todo $r > r_1$, temos que $r(1-\lambda) \geq r\lambda > r\lambda_0 > r_1\lambda_0 > 1$.
Portanto,

$$\phi(\lambda, r) + \phi(1-\lambda, r) \leq \phi(\lambda_0, r) + \phi(1-\lambda_0, r) < 0, \qquad \forall\, \lambda \in [\lambda_0, \frac{1}{2}] \text{ e } r > r_0.$$

Seja $T_0 := \max\{r_0, r_1\}$ e $S_0 := \max\limits_{\lambda \in [0,1]} \phi(\lambda, T_0) + \phi(1-\lambda, T_0) < 0$. Concluímos que

$$\phi(\lambda, r) + \phi(1-\lambda, r) \leq \phi(\lambda, T_0) + \phi(1-\lambda, T_0) \leq S_0, \qquad \forall\, r > T_0 \text{ e } \lambda \in [0, 1].$$

□

A ideia dos próximos resultados é apresentar algumas caracterizações de w que é uma solução radial positiva de (P_∞). Para isso, trabalharemos com cópias da solução do problema (P_∞) transladadas. Seja $y_0 \in \mathbb{R}^N$ com $|y_0| = 1$ e $B_2(y_0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x - y_0| \leq 2\}$ e escrevemos para cada $y \in \partial B_2(y_0)$,

$$w_0^R := w(x - Ry_0), \qquad w_y^R := w(x - Ry), \qquad R > 0.$$

Lema 1.5. *Se $q > 0$ e $R > 0$ são suficientemente grandes, então*

a)

$$\int_{B_{2K}(0)} |w_0^R|^q dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R} \ \text{ e } \int_{B_{2K}(0)} |w_y^R|^q dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R}.$$

b)

$$\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R|^q dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R} \ \text{ e } \int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_y^R|^q dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R}.$$

Demonstração. Para provarmos o item a) consideremos $2K < 1/2R$, temos

$$\frac{1}{2}R = R - \frac{1}{2}R < |Ry_0| - |x| < |x - Ry_0| < 1 + |x - Ry_0|, \qquad \forall\, x \in B_{2K}(0). \tag{1.11}$$

Combinando as desigualdades (1.3) e (1.11), temos

$$\int_{B_{2K}(0)} |w_0^R|^q dx \;\; = \;\; \int_{B_{2K}(0)} |w(x - Ry_0)|^q dx$$

$$\leq \ C \int_{B_{2K}(0)} [(1+|x-Ry_0|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|x-Ry_0|}]^q dx.$$

Como $R/2 < 1+|x-Ry_0|$, $\forall\, x \in B_{2K}(0)$, então

$$\int_{B_{2K}(0)} |w_0^R|^q dx \ \leq \ C \int_{B_{2K}(0)} R^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x-Ry_0|} dx.$$

Note que

$$|Ry_0| - |x| < |x-Ry_0| \implies -(|Ry_0|-|x|) > -|x-Ry_0|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2K}(0)} |w_0^R|^q dx &\leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} \int_{B_{2K}(0)} e^{-q\sqrt{V_\infty}(R|y_0|-|x_0|)} dx \\
&\leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} \int_{B_{2K}(0)} e^{-q\sqrt{V_\infty}(R-|x_0|)} dx \\
&= CR^{-q\frac{N-1}{2}} \int_{B_{2K}(0)} e^{-q\sqrt{V_\infty}R} e^{q\sqrt{V_\infty}|x_0|} dx \\
&= CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R} \int_{B_{2K}(0)} e^{q\sqrt{V_\infty}|x_0|} dx \\
&\leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R}.
\end{aligned}$$

Para provarmos a segunda desigualdade, seja $2K < 1/2R$, tal que

$$\frac{1}{2}R = R - \frac{1}{2}R < |Ry| - |x| < |x-Ry| < 1+|x-Ry|, \quad \forall\, x \in B_{2K}(0). \tag{1.12}$$

Segue das desigualdades (1.3) e (1.12) que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2K}(0)} |w_y^R|^q dx &= \int_{B_{2K}(0)} |w(x-Ry)|^q dx \\
&\leq C \int_{B_{2K}(0)} [(1+|x-Ry|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|x-Ry|}]^q dx.
\end{aligned}$$

Fazendo cálculos análogos aos da primeira desigualdade, concluímos que

$$\int_{B_{2K}(0)} |w_y^R|^q dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R}.$$

Provaremos o item *b*).
Usando a desigualdade (1.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R|^q dx &= \int_{B_{2K}(0)} |\nabla w(x-Ry_0)|^q dx \\
&\leq C \int_{B_{2K}(0)} (1+|x-Ry_0|)^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x-Ry_0|} dx.
\end{aligned}$$

Pelo item *a*), temos

$$\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R|^q dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}R}.$$

A prova da segunda desigualdade segue de forma análoga. □

Lema 1.6. *Sejam $p \geq q \geq 1$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (w_0^R)^q (w_y^R)^p dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-2q\sqrt{V_\infty}R} \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^N} (w_y^R)^q (w_0^R)^p dx \leq CR^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-2q\sqrt{V_\infty}R}.$$

Demonstração. Note que

$$
(1.13)\quad \begin{cases} \text{se } |x| > R, \text{ então } R < |x| + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}^N \\ \text{se } |x| < R, \text{ então } 2R - R < |R(y - y_0)| - |x| < 1 + |x - R(y - y_0)|, \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}
$$

Fazendo novamente uma mudança de variável e aplicando a desigualdade (1.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} (w_0^R)^q (w_y^R)^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} (w(x - Ry_0))^q (w(x - Ry))^p dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^N} (w(x - Ry_0 + Ry_0))^q (w(x - Ry + Ry_0))^p dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^N} (w(x))^q (w(x - R(y - y_0)))^p dx \\
\leq & \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|)^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x|} (1 + |x - R(y - y_0)|)^{-p\frac{N-1}{2}} e^{-p\sqrt{V_\infty}|x - R(y-y_0)|} dx \\
= & \int_{B_K(0)} (1 + |x|)^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x|} (1 + |x - R(y - y_0)|)^{-p\frac{N-1}{2}} e^{-p\sqrt{V_\infty}|x - R(y-y_0)|} dx \\
+ & \int_{B_K^c(0)} (1 + |x|)^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x|} (1 + |x - R(y - y_0)|)^{-p\frac{N-1}{2}} e^{-p\sqrt{V_\infty}|x - R(y-y_0)|} dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade (1.13) e

$$
(1 + |x|)^{-q\frac{N-1}{2}} < 1 \text{ e } (1 + |x - R(y - y_0)|)^{-p\frac{N-1}{2}} < 1,
$$

resulta que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} (w_0^R)^q (w_y^R)^p dx \leq \int_{B_K(0)} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x|} (1 + |x - R(y - y_0)|)^{-p\frac{N-1}{2}} e^{-p\sqrt{V_\infty}|x - R(y-y_0)|} dx \\
+ & \int_{B_K^c(0)} (1 + |x|)^{-q\frac{N-1}{2}} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x|} e^{-p\sqrt{V_\infty}|x - R(y-y_0)|} dx \\
\leq & \int_{B_K(0)} e^{-q\sqrt{V_\infty}|x|} R^{-p\frac{N-1}{2}} e^{-p\sqrt{V_\infty}|x - R(y-y_0)|} dx \\
+ & \int_{B_K^c(0)} R^{-q\sqrt{V_\infty}|x|} e^{-p\sqrt{V_\infty}|x - R(y-y_0)|} dx.
\end{aligned}
$$

Note que $-p \leq -q$ e $-|R(y - y_0)| > -2R$, então

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (w_0^R)^q (w_y^R)^p dx & \leq C(e^{-q\sqrt{V_\infty}|R(y-y_0)|} R^{-q\frac{N-1}{2}}) + C(e^{-q\sqrt{V_\infty}|R(y-y_0)|} R^{-q\frac{N-1}{2}}) \\
& = C(e^{-q\sqrt{V_\infty}2R} R^{-q\frac{N-1}{2}}) + C(e^{-q\sqrt{V_\infty}2R} R^{-q\frac{N-1}{2}}) \\
& = 2C(e^{-q\sqrt{V_\infty}2R} R^{-q\frac{N-1}{2}}) \\
& = C(e^{-q\sqrt{V_\infty}2R} R^{-q\frac{N-1}{2}}).
\end{aligned}
$$

A segunda desigualdade segue de forma análoga. □

Como em Bahri e Li [2], trabalharemos com uma combinação convexa de duas cópias de w que é solução de (P_∞), veja Clapp e Maia [13], Évéquoz e Weth [16] e Maia e Pellacci [21]. Além disso, multiplicaremos a soluções transladadas por uma função de classe C^1 que permite preservar a regularidade das soluções transladadas.

Definição 1.2. *Considere*

$$Z_{\lambda,y}^R = \lambda w_0^R + (1-\lambda) w_y^R, \qquad \lambda \in [0,1], \qquad R > 0$$

e

$$U_{\lambda,y}^R := Z_{\lambda,y}^R \psi$$

onde $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ *é uma função cut-off crescente e radialmente simétrica dada por*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq K, \\ 0 < \psi < 1 & K < |x| < 2K, \\ 1 & |x| \geq 2K. \end{cases}$$

Note que K *é o raio da bola* $B_K(0)$ *que contém* $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. *Nós podemos considerar* $U_{\lambda,y}^R \in H^1(\Omega)$ *e* $U_{\lambda,y}^R$ *é nula fora de* Ω.

Lema 1.7. *Para* $R > 0$ *suficientemente grande temos*

$$\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_0^R \psi)^2 dx \leq C R^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty} R},$$

$$\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_y^R \psi)^2 dx \leq C R^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty} R}$$

e

$$\int_\Omega (V(x) - V_\infty) w_y^R \psi w_0^R \psi dx \leq C R^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty} R}.$$

Demonstração. Observe que pela condição (V_2), temos

$$V(x) - V_\infty \leq C e^{-\gamma |x|}$$

e

$$\gamma > 2\sqrt{V_\infty} \implies \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{V_\infty}}{\gamma} > 0.$$

Provaremos a primeira desigualdade. Como $w_0^R := w(x - Ry_0)$ e $\psi(x) \leq 1, \forall\, x \in \Omega$, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_0^R \psi)^2 dx &= \int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w(x - Ry_0)\psi)^2 dx \\ &\leq \int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_0^R)^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|x|} (w(x - Ry_0))^2 dx. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Agora aplicando a desigualdade (1.3) em (1.14),

$$\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_0^R \psi)^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|x|} (1 + |x - Ry_0|)^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x - Ry_0|} dx. \tag{1.15}$$

Defina $\nu = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{V_\infty}}{\gamma} > 0$, podemos reescrever a equação (1.15) como

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\nu R}(Ry_0)} e^{-\gamma|x|} (1 + |x - Ry_0|)^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x - Ry_0|} \tag{1.16}$$

$$+ \int_{B_{\nu R}(Ry_0)} e^{-\gamma|x|} (1 + |x - Ry_0|)^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x - Ry_0|}. \tag{1.17}$$

Como $|x - Ry_0| > \nu R$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{\nu R}(Ry_0)$, então

$$|x - Ry_0| > \nu R \implies 1 + |x - Ry_0| > \nu R \implies (1 + |x - Ry_0|)^{-(N-1)} < (\nu R)^{-(N-1)}.$$

Aplicando o Lema 1.3 com $\mu_2 = \gamma > \mu_1 = 2\sqrt{V_\infty}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(1.16) &\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\nu R}(Ry_0)} e^{-\gamma|x|} R^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x - Ry_0|} \\
&\leq CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|Ry_0|} \\
&= CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|R||y_0|} \\
&= CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R}. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Por outro lado, $|x - Ry_0| \geq |Ry_0| - |x| \geq R|y_0| - \nu R = (1 - \nu)R$ para todo $x \in B_{\nu R}(0)$, fazendo uma mudança de variável e usando o fato que $(1 + |x|)^{-(N-1)} < 1$, temos

$$\begin{aligned}
(1.17) &\leq \int_{B_{\nu R}(Ry_0)} e^{-\gamma|x|}(1 + |x - Ry_0|)^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x - Ry_0|} dx \\
&= \int_{B_{\nu R}(0)} e^{-\gamma|x + Ry_0|}(1 + |x - Ry_0 + Ry_0|)^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x - Ry_0 + Ry_0|} dx \\
&= \int_{B_{\nu R}(0)} e^{-\gamma|x + Ry_0|}(1 + |x|)^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x|} dx \\
&\leq \int_{B_{\nu R}(0)} e^{-\gamma|x + Ry_0|} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x|} dx \\
&\leq \int_{B_{\nu R}(0)} e^{-\gamma(1-\nu)R} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x|} dx \\
&= e^{-\gamma(1-\nu)R} \int_{B_{\nu R}(0)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|x|} dx \\
&= e^{-\gamma(1-\nu)R} \int_0^{\nu R} \left[\int_{\partial B_r(0)} e^{-2\sqrt{V_\infty}|y|} dS_y \right] dr \\
&= e^{-\gamma(1-\nu)R} \int_0^{\nu R} \left[\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{e^{2\sqrt{V_\infty}|y|}} dS_y \right] dr \\
&\leq e^{-\gamma(1-\nu)R} \int_0^{\nu R} \left[\int_{\partial B_r(0)} dS_y \right] dr \\
&= e^{-\gamma(1-\nu)R} \int_0^{\nu R} \omega_N(1) N r^{N-1} dr \\
&= Ce^{-\gamma(1-\nu)R} \int_0^{\nu R} r^{N-1} dr \\
&= Ce^{-\gamma(1-\nu)R} \left[\frac{(\nu R)^N}{N} \right] \\
&= Ce^{-\gamma(1-\nu)R} R^N. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Note que

$$\gamma(1 - \nu)R = \gamma(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{V_\infty}}{\gamma})R = (\frac{\gamma}{2} + \sqrt{V_\infty})R > (\sqrt{V_\infty} + \sqrt{V_\infty})R = 2\sqrt{V_\infty}R.$$

Assim,

$$(1.19) \leq Ce^{-\gamma(1-\nu)R} R^N$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Ce^{-2\sqrt{V_\infty}R}R^N \\
&= Ce^{-2\sqrt{V_\infty}R}R^{-(N-1)}R^{N-1}R^N \\
&= Ce^{-2\sqrt{V_\infty}R}R^{-(N-1)}.
\end{aligned}
$$

□

A ideia do Lema 1.8 é fazer uma aproximação de uma função regular em $H^1(\mathbb{R}^N)$ por uma função em $H_0^1(\Omega)$.

Lema 1.8. *Se $R \to \infty$, então $U_{\lambda,y}^R - Z_{\lambda,y}^R \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Para R suficientemente grande, afirmamos que

$$|w_0^R - \psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} \leq CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}, \tag{1.20}$$

$$|\nabla w_0^R - \nabla\psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} \leq CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}, \tag{1.21}$$

$$|w_y^R - \psi w_y^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} \leq CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}, \tag{1.22}$$

$$|\nabla w_0^R - \nabla\psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} \leq CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}. \tag{1.23}$$

Como

$$Z_{\lambda,y}^R = \lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R, \quad \lambda \in [0,1], \quad R > 0$$

e usando a norma de $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$
\begin{aligned}
\|U_{\lambda,y}^R - Z_{\lambda,y}^R\| &= \|Z_{\lambda,y}^R\psi - Z_{\lambda,y}^R\| \\
&= \|\lambda w_0^R\psi + (1-\lambda)w_y^R\psi - \lambda w_0^R - (1-\lambda)w_y^R\| \\
&= \|\lambda w_0^R\psi - \lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R\psi - (1-\lambda)w_y^R\| \\
&= \|\lambda(w_0^R\psi - w_0^R) + (1-\lambda)(w_y^R\psi - w_y^R)\| \\
&\leq \|\lambda(w_0^R\psi - w_0^R)\| + \|(1-\lambda)(w_y^R\psi - w_y^R)\| \\
&= \lambda\|(w_0^R\psi - w_0^R)\|_{H^1(B_{2K}(0))} \\
&+ (1-\lambda)\|(w_y^R\psi - w_y^R)\|_{H^1(B_{2K}(0))}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a norma do espaço L^2 e as desigualdades (1.20), (1.21), (1.22) e (1.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|U_{\lambda,y}^R - Z_{\lambda,y}^R\| &\leq \lambda[|w_0^R - \psi w_0^R|^2 + |\nabla w_0^R - \nabla\psi w_0^R|^2 \\
&+ (1-\lambda)|w_y^R - \psi w_y^R|^2 + |\nabla w_y^R - \nabla\psi w_y^R|^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \lambda[|w_0^R - \psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} + |\nabla w_0^R - \nabla\psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} \\
&+ (1-\lambda)|w_y^R - \psi w_y^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} + |\nabla w_y^R - \nabla\psi w_y^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))}]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lambda[CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R} + CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R} \\
&+ (1-\lambda)CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R} + CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}]^{\frac{1}{2}} \\
&= [\lambda[CR^{-2(N-1)}e^{-4\sqrt{V_\infty}R} + (1-\lambda)[CR^{-2(N-1)}e^{-4\sqrt{V_\infty}R}]^{\frac{1}{2}} \\
&= CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}.
\end{aligned}
$$

Isso mostra que

$$U_{\lambda,y}^R - Z_{\lambda,y}^R \to 0 \text{ quando } R \to \infty.$$

Para completar a demonstração vamos provar as afirmações. Usaremos o Lema 1.5 para obtermos (1.20), isto é,

$$\begin{aligned}
|w_0^R - \psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} &= |(1-\psi)w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} \\
&= \int_{B_{2K}(0)} |(1-\psi)w_0^R|^2 dx \\
&= \int_{B_{2K}(0)} |(1-\psi)|^2 |w_0^R|^2 dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} C|w_0^R|^2 dx \\
&\leq CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R}.
\end{aligned}$$

Provaremos (1.21). Observe que $\psi \in C^\infty$, então as suas derivadas existem e são contínuas. Logo, existem constantes positivas, tais que

$$\begin{aligned}
|\nabla \psi w_0^R| &= |(\nabla\psi) w_0^R + \psi(\nabla w_0^R)| \\
&\leq |(\nabla\psi) w_0^R| + |\psi(\nabla w_0^R)| \\
&\leq |(\nabla\psi)||w_0^R| + |\psi||(\nabla w_0^R)| \\
&\leq C|w_0^R| + C|(\nabla w_0^R)| \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

em $B_{2K}(0)$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
|\nabla w_0^R \; - \; \nabla\psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} &= \int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R - \nabla \psi w_0^R|^2 dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} ||\nabla w_0^R| + |\nabla\psi w_0^R||^2 dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} ||\nabla w_0^R| + C|w_0^R| + C|\nabla w_0^R||^2 dx \\
&= \int_{B_{2K}(0)} |(1+C)|\nabla w_0^R| + C|w_0^R||^2 dx \\
&= \int_{B_{2K}(0)} [(1+C)^2|\nabla w_0^R|^2 + 2(1+C)C_1|\nabla w_0^R||w_0^R| + C_1|w_0^R|^2] dx \\
&\leq C\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R|^2 dx + C\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R||w_0^R| dx + \int_{B_{2K}(0)} |w_0^R|^2 dx.
\end{aligned}$$

Agora usando o Lema 1.5 e a Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
|\nabla w_0^R \; - \; \nabla\psi w_0^R|^2_{L^2(B_{2K}(0))} &\leq CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R} + C\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R||w_0^R| dx \\
&+ CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R} \\
&= CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R} + C\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R w_0^R| dx + CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R} \\
&\leq CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R} + C[(\int_{B_{2K}(0)} |\nabla w_0^R|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{B_{2K}(0)} |w_0^R| dx)^{\frac{1}{2}}] \\
&+ CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R} \\
&\leq CR^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{V_\infty}R}.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.9. *Para cada $r > 0$, $J_\infty(rU^R_{\lambda,y}) - J_\infty(rZ^R_{\lambda,y}) \to 0$ quando $R \to \infty$.*

Demonstração. Por definição de J_∞

$$\begin{aligned}|J_\infty(rU^R_{\lambda,y}) - J_\infty(rZ^R_{\lambda,y})| &= |\|rU^R_{\lambda,y}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(rU^R_{\lambda,y})rU^R_{\lambda,y}dx \\ &- \|rZ^R_{\lambda,y}\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y}dx| \\ &\leq \|rU^R_{\lambda,y} - rZ^R_{\lambda,y}\|^2 + \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rU^R_{\lambda,y})rU^R_{\lambda,y}\right]dx\right|.\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.8, concluímos que

$$\|rU^R_{\lambda,y} - rZ^R_{\lambda,y}\|^2 = o_R(1),$$

pois

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\|rU^R_{\lambda,y} - rZ^R_{\lambda,y}\|^2}{1} = 0 \implies \|rU^R_{\lambda,y} - rZ^R_{\lambda,y}\|^2 = o_R(1).$$

Assim, é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rU^R_{\lambda,y})rU^R_{\lambda,y}]dx = \int_{B_{2k}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rZ^R_{\lambda,y}\psi)rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx = o_R(1).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rU^R_{\lambda,y})rU^R_{\lambda,y}]dx = \int_{B_{2K}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rU^R_{\lambda,y})rU^R_{\lambda,y}]dx \\ +&\int_{B^c_{2K}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rU^R_{\lambda,y})rU^R_{\lambda,y}]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rZ^R_{\lambda,y}\psi)rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx \\ +&\int_{B^c_{2K}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rZ^R_{\lambda,y}\psi)rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rZ^R_{\lambda,y}\psi)rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx \\ +&\int_{B^c_{2K}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y}]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}[f(rZ^R_{\lambda,y})rZ^R_{\lambda,y} - f(rZ^R_{\lambda,y}\psi)rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx \\ \leq&\int_{B_{2K}(0)}[(|rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1} + |rZ^R_{\lambda,y}|^{p_2})rZ^R_{\lambda,y} - (|rU^R_{\lambda,y}|^{p_1} + |rU_{\lambda,y}|^{p_2})rU^R_{\lambda,y}]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}[(|rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1} + |rZ^R_{\lambda,y}|^{p_2})rZ^R_{\lambda,y} - (|rZ^R_{\lambda,y}\psi|^{p_1} + |rZ_{\lambda,y}\psi|^{p_2})rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}[(|rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1} + |rZ^R_{\lambda,y}|^{p_2})rZ^R_{\lambda,y} - (|\psi||rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1} + |\psi||rZ_{\lambda,y}\psi|^{p_2})rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}[(|rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1} + |rZ^R_{\lambda,y}|^{p_2})rZ^R_{\lambda,y} - (|\psi||rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1} + |\psi||rZ_{\lambda,y}\psi|^{p_2})rZ^R_{\lambda,y}\psi]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}[|rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1+1} + |rZ^R_{\lambda,y}|^{p_2+1}) - (|\psi||rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1+1} + |\psi||rZ_{\lambda,y}\psi|^{p_2+1})]dx \\ =&\int_{B_{2K}(0)}(1-|\psi|)(|rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1+1} + |rZ^R_{\lambda,y}|^{p_2+1})dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{B_{2K}(0)} |1-\psi|(|rZ^R_{\lambda,y}|^{p_1+1} + |rZ^R_{\lambda,y}|^{p_2+1})dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} C(|Z^R_{\lambda,y}|^{p_1+1} + |Z^R_{\lambda,y}|^{p_2+1})dx \\
&= \int_{B_{2K}(0)} C(|\lambda w^R_0 + (1-\lambda)w^R_y|^{p_1+1} + |\lambda w^R_0 + (1-\lambda)w^R_y|^{p_2+1})dx \\
&\leq C\int_{B_{2K}(0)} (|w^R_0 + w^R_y|^{p_1+1} + |w^R_0 + w^R_y|^{p_2+1})dx \\
&\leq C\int_{B_{2K}(0)} (|w^R_0|^{p_1+1} + |w^R_0|^{p_2+1} + |w^R_y|^{p_1+1}|w^R_y|^{p_2+1})dx \\
&\leq 2CR^{-(p_1+1)\frac{N-1}{2}}e^{-(p_1+1)\sqrt{V_\infty}R} + 2CR^{-(p_2+1)\frac{N-1}{2}}e^{-(p_2+1)\sqrt{V_\infty}R} \\
&\leq 2CR^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{V_\infty}R} + 2CR^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{V_\infty}R} \\
&= CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}.
\end{aligned}
$$

□

A seguir, apresentaremos e demonstraremos a projeção sobre Nehari que consiste em mostrar que uma combinação convexa de duas cópias da solução do problema (P_∞) em $H^1_0(\Omega)$ pode ser projetada na Variedade de Nehari através de uma função conveniente. Neste lema também será provado que a Variedade de Nehari é não vazia.

Lema 1.10. *Existem $R_0 > 0$ e $T_0 > 2$ tais que para cada $R \geq R_0$, $y \in \partial B_2(y_0)$ e $\lambda \in [0,1]$, existe um único $T^R_{\lambda,y}$ tal que*

$$T^R_{\lambda,y}U^R_{\lambda,y} \in \mathcal{N}_V,$$

$T^R_{\lambda,y} \in [0, T_0]$ e $T^R_{\lambda,y}$ é uma função contínua de variável λ, y e R. Em particular, para $\lambda = \frac{1}{2}$ temos $T^R_{\lambda,y} \to 2$ quando $R \to \infty$ uniformemente em $y \in \partial B_2(y_0)$.

Demonstração. Inicialmente, note que, para cada $u \in H^1_0(\Omega)$, $u > 0$, pela propriedade (f_5) temos que f é crescente e

$$
\begin{aligned}
\frac{J_V(ru)}{r^2} &= \frac{\|ru\|^2 - \int_\Omega f(ru)ru}{r^2}dx \\
&= \|u\|^2 - \int_\Omega \frac{f(ru)u}{r}dx \\
&= \|u\|^2 - \int_\Omega \frac{f(ru)u^2}{ru}dx.
\end{aligned}
$$

Assim, para $r \in (0,\infty)$, temos que $\frac{J_V(ru)}{r^2}$ é estritamente decrescente. Dessa forma, se existe $r_u \in (0,\infty)$ tal que $\frac{J_V(ru)}{r^2} = 0$, então r_u será único devido a injetividade de f. Além disso, $\frac{J_V(ru)}{r^2} > 0$ para r suficientemente pequeno. Em seguida, vamos mostrar que para R suficientemente grande e algum $T_0 > 0$,

$$J_V(rU^R_{\lambda,y}) < 0, \quad \forall\, r \geq T_0.$$

Isso implica que existe $T^R_{\lambda,y} \in [0, T_0)$ tal que $J_V(T^R_{\lambda,y}U^R_{\lambda,y}) = 0$, isto é, $T^R_{\lambda,y}U^R_{\lambda,y} \in \mathcal{N}_V$. Para $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $r \in (0,\infty)$ e como f é crescente, temos

$$
\begin{aligned}
J_\infty(ru + rv) &= \|ru+rv\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(ru+rv)(ru+rv)dx \\
&= r^2\|u\|^2 + 2r^2 < u,v > + r^2\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru+rv)}{(ru+rv)}(ru+rv)^2dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= r^2(\|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru+rv)}{(rv+ru)}(r^2u^2 + 2r^2uv + r^2v^2)dx \\
&\leq r^2(\|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru+rv)}{(ru+rv)^2} r^2u^2dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru+rv)}{(ru+rv)^2} r^2v^2dx \\
&\leq r^2(\|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru+rv)}{(ru+rv)} u^2dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru+rv)}{(ru+rv)} v^2dx) \\
&\leq r^2(\|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru)}{(ru)} u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(rv)}{(rv)} v^2dx).
\end{aligned}
$$

Seja $u := \lambda w_0^R$ e $v := (1-\lambda)w_y^R$, fazendo uma mudança de variável e usando o Lema 1.4, o produto interno do L^2 e o Lema 1.6, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} &\leq \frac{1}{r^2}[r^2(\|\lambda w_0^R\|^2 + 2 < \lambda w_0^R, (1-\lambda)w_y^R > + \|(1-\lambda)w_y^R\|^2 \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w_0^R)}{r\lambda w_0^R}(\lambda w_0^R)^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w_y^R)}{r(1-\lambda)w_y^R}((1-\lambda)w_y^R)^2dx)] \\
&\leq \lambda^2\|w_0^R\|^2 + 2\lambda(1-\lambda) < w_0^R, w_y^R > + (1-\lambda)^2\|w_y^R\|^2 \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w_0^R)}{r\lambda w_0^R}(\lambda w_0^R)^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w_y^R)}{r(1-\lambda)w_y^R}((1-\lambda)w_y^R)^2dx \\
&= \phi(\lambda, r) + \phi((1-\lambda), r) + 2\lambda(1-\lambda) < w_0^R, w_y^R > \\
&\leq S_0 + 2\lambda(1-\lambda) < w_0^R, w_y^R > \\
&= S_0 + 2\lambda(1-\lambda)\int_{\mathbb{R}^N} w_0^R w_y^R dx \\
&\leq S_0 + 2\lambda(1-\lambda)(CR^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{V_\infty}R}) \\
&= S_0 + o_R(1), \quad \forall r \geq T_0, \quad \lambda \in [0,1],
\end{aligned}
$$

pois

$$
2\lambda(1-\lambda)\lim_{R\to\infty}\frac{CR^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{V_\infty}R}}{1} = 0.
$$

Como $2\lambda(1-\lambda)(CR^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{V_\infty}R})$ não depende de y, então $o_R(1) \to 0$ quando $R \to \infty$ converge uniformemente em $y \in \partial B_2(y_0)$. Observe que

$$
\frac{J_V(rU_{\lambda,y}^R)}{r^2} = \frac{J_\infty(rU_{\lambda,y}^R)}{r^2} + \int_\Omega (V(x) - V_\infty)(U_{\lambda,y}^R)^2dx \tag{1.25}
$$

De fato, note que

$$
\begin{aligned}
\frac{J_V(rU_{\lambda,y}^R)}{r^2} &= \frac{\|rU_{\lambda,y}^R\|_\Omega^2}{r^2} - \int_\Omega \frac{f(rU_{\lambda,y}^R)(rU_{\lambda,y}^R)}{r^2}dx \\
&= \frac{\int_\Omega(|\nabla rU_{\lambda,y}^R|^2) + V(x)(rU_{\lambda,y}^R)^2dx}{r^2} - \int_\Omega \frac{f(rU_{\lambda,y}^R)(rU_{\lambda,y}^R)}{r^2}dx \\
&- \int_\Omega \frac{V_\infty(rU_{\lambda,y}^R)^2}{r^2}dx + \int_\Omega \frac{V_\infty(rU_{\lambda,y}^R)^2}{r^2}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla(rU_{\lambda,y}^R)^2|^2}{r^2}dx + \int_\Omega \frac{V(x)(rU_{\lambda,y}^R)^2}{r^2}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(rU^R_{\lambda,y})(rU^R_{\lambda,y})}{r^2}dx - \int_{\Omega} \frac{V_\infty(rU^R_{\lambda,y})^2}{r^2}dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V_\infty(rU^R_{\lambda,y})^2}{r^2}dx \\
&= \int_{\Omega}(V(x)-V_\infty)(U^R_{\lambda,y})^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla(rU^R_{\lambda,y})|^2}{r^2}dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(rU^R_{\lambda,y})(rU^R_{\lambda,y})}{r^2}dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V_\infty(rU^R_{\lambda,y})}{r^2}dx \\
&= \int_{\Omega}(V(x)-V_\infty)(U^R_{\lambda,y})^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(|\nabla(rU^R_{\lambda,y})|^2 + V_\infty(rU^R_{\lambda,y})^2)}{r^2}dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(rU^R_{\lambda,y})(rU^R_{\lambda,y})}{r^2}dx \\
&= \int_{\Omega}(V(x)-V_\infty)(U^R_{\lambda,y})^2dx + \frac{\|rU^R_{\lambda,y}\|^2}{r^2} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(rU^R_{\lambda,y})(rU^R_{\lambda,y})}{r^2}dx \\
&= \int_{\Omega}(V(x)-V_\infty)(U^R_{\lambda,y})^2dx + \frac{J_\infty(rU^R_{\lambda,y})}{r^2}.
\end{aligned}
$$

Assim, da equação (1.25) e do Lema 1.9 resulta que

$$
\frac{J_V(rU^R_{\lambda,y})}{r^2} \leq S_0 + o_R(1), \quad \forall\, r \geq T_0, \quad \lambda \in [0,1].
$$

Por outro lado, existe $R_0 > 0$, tal que $o_{R_0}(1) < 0$. Então,

$$
\frac{J_V(rU^R_{\lambda,y})}{r^2} \leq \frac{S_0}{2} < 0, \quad \forall\, r \geq T_0, \quad \lambda \in [0,1] \quad R \geq R_0.
$$

Portanto,

$$
J_V(rU^R_{\lambda,y}) < 0, \quad \forall\ r \geq T_0.
$$

Mostraremos que $\mathcal{N}_V$ é não-vazio. Considere $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(u,v) = f(u+v) - f(u) - f(v)$. Como f é diferenciável, então pela Desigualdade do Valor Médio, existe $t \in (0,1)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\varphi(u,v) &\leq f(u+v) - f(u) \\
&\leq f'(u+tv)v \leq Cv.
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Por outro lado, usando o fato que $v > 0$ e a propriedade (f_2),

$$
\begin{aligned}
\varphi(u,v) &\geq -f(v) \\
&\geq -C(v^{p_1} + v^{p_2}).
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Combinando as desigualdades (1.26) e (1.27), obtemos

$$
-C(v^{p_1} + v^{p_2}) \leq -f(v) \leq \varphi(u,v) \leq f(u+v) - f(u) \leq f'(u+tv)v \leq Cv. \tag{1.28}
$$

Segue da desigualdade (1.28) e do Lema 1.6 que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(w^R_0, w^R_y)w^R_0 dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} w^R_0 w^R_y dx \\
&\leq CR^{-\frac{(N-1)}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}R} = o_R(1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(w^R_0, w^R_y)w^R_0 dx \geq -\int_{\mathbb{R}^N} C(v^{p_1} + v^{p_2})dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= -C\int_{\mathbb{R}^N} v^{p_1}dx - C\int_{\mathbb{R}^N} v^{p_2}dx \\
&\geq -CR^{-\frac{(N-1)}{2}}e^{-\sqrt{V_\infty}R} = -o_R(1).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(w_0^R, w_y^R)w_0^R|dx = o_R(1),$$

e pela simetria de u e v, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(w_0^R, w_y^R)w_y^R|dx = o_R(1).$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(w_0^R, w_y^R)(w_0^R + w_y^R)|dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(w_0^R, w_y^R)w_0^R|dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(w_0^R, w_y^R)w_y^R|dx \\
&= o_R(1).
\end{aligned}
$$

Como

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(w_0^R, w_y^R)(w_0^R + w_y^R)|dx \leq o_R(1),$$

então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(w_0^R, w_y^R)(w_0^R + w_y^R)|dx = o_R(1). \tag{1.29}$$

Usando o produto interno do L^2, o Lema 1.6 e a equação (1.29), temos

$$
\begin{aligned}
J_\infty(w_0^R + w_y^R) &= \|w_0^R + w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R + w_y^R)(w_0^R + w_y^R)dx \\
&= \|w_0^R\|^2 + 2 < w_0^R, w_y^R > + \|w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R + w_y^R)(w_0^R + w_y^R)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)(w_0^R + w_y^R)dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)(w_0^R + w_y^R)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R)(w_0^R + w_y^R)dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R)(w_0^R + w_y^R)dx \\
&= \|w_0^R\|^2 + 2 < w_0^R, w_y^R > + \|w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(w_0^R, w_y^R)(w_0^R + w_y^R)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)w_0^R dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)w_y^R dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R)w_0^R dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R)w_0^R dx \\
&= J_\infty(w_0^R) + J_\infty(w_y^R) + 2 < w_0^R, w_y^R > - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(w_0^R, w_y^R)(w_0^R + w_y^R)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)w_y^R dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R)w_0^R dx \\
&= J_\infty(w_0^R) + J_\infty(w_y^R) + \int_{\mathbb{R}^N} w_0^R w_y^R dx - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(w_0^R, w_y^R)(w_0^R + w_y^R)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)w_y^R dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R)w_0^R dx \\
&\leq J_\infty(w_0^R) + J_\infty(w_y^R) + CR^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{V_\infty}R} + o_R(1) \\
&= J_\infty(w_0^R) + J_\infty(w_y^R) + o_R(1).
\end{aligned}
$$

Como w é solução de (P_∞), então $J_\infty(w_0^R) = 0$. Assim,

$$J_\infty(w_0^R + w_y^R) \leq o_R(1).$$

Segue do Lema 1.9 que

$$J_\infty((w_0^R + w_y^R)\psi) = J_\infty(w_0^R + w_y^R) = o_R(1) \text{ quando } R \to \infty. \tag{1.30}$$

Portanto,

$$J_V(2U^R_{\frac{1}{2},y}\psi) \;=\; J_\infty((w_0^R + w_y^R)\psi) + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty((w_0^R + w_y^R)\psi)^2 dx.$$

Pela equação (1.30), obtemos

$$J_V(2U^R_{\frac{1}{2},y}\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty((w_0^R + w_y^R)\psi)^2 dx + o_R(1).$$

Observe que pelo Lema 1.7

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty((w_0^R + w_y^R)\psi)^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty(w_0^R + w_y^R)^2 dx \leq o_R(1).$$

Logo,

$$J_V(2U^R_{\frac{1}{2},y}) \leq o_R(1). \tag{1.31}$$

Afirmamos que $T^R_{\lambda,y}$ é contínua e converge uniformemente em $y \in \partial B_2(y_0)$. Para provarmos a continuidade usaremos o Teorema da Função Implícita. Seja $g : \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 definida por $g(t,u) = t\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)u dx$. Considere (t_0, u_0) tal que $g(t_0, u_0) = 0$ e $u_0 > 0$. Para $u_0 \in \mathcal{N}_V$, temos

$$t_0^2\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_0u_0)}{t_0} t_0^2 u_0 dx.$$

Logo,

$$\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_0u_0)}{t_0} u_0 dx.$$

Derivando a função g em relação a t e aplicando a propriedade (f_5), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d(t_0,u_0)}{dt} &= \|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f'(t_0u_0)u_0^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_0u_0)}{t_0} u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^N} f'(t_0u_0)u_0^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(t_0u_0)}{t_0} u_0 - f'(t_0u_0)u_0^2\right] dx < 0.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, a função $\xi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^+$ definida por $t = t(u)$ é de classe C^1 onde $t_0 = t(u_0)$ e $T^R_{\lambda,y} = t(z^R_{\lambda y})$ é único tal que t é de classe C^1. Como a função $(\lambda, y) \to Z^R_{\lambda,y}$ é contínua, então $T^R_{\lambda,y}$ é contínua. Em particular, para $\lambda = 1/2$, temos $T^R_{\frac{1}{2},y} \to 2$. Suponhamos que $T^R_{\frac{1}{2},y} \not\to 2$, então existe $R_n \to \infty$ e $T_n = T^{R_n}_{\frac{1}{2},y} \to T$ em que $T \neq 2$. Observe que se $T_nU^{R_n}_{\frac{1}{2},y} \in \mathcal{N}_V$, então $J(U^{R_n}_{\frac{1}{2},y}) \to 0$, mas $J(2U^{R_n}_{\frac{1}{2},y}) \neq 0$ o que contradiz a equação (1.31). Logo, $T^R_{\frac{1}{2},y} \to 2$. $\square$

Capítulo 2

Compacidade

Neste capítulo queremos resolver a falta de compacidade devido nosso problema está em um domínio ilimitado. Para isso, apresentaremos e demonstraremos alguns lemas, dentre eles o Lema de Splitting, para provarmos o Corolário 1 e mostraremos também que I_V satisfaz a condição de Palais - Smale em uma série de níveis.

Lema 2.1. *Seja (u_k) uma sequência em $\mathcal{N}_V$. Se $I_V(u_k) \to d$, então (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} I_V(u_k) &= I_V(u_k) - I_V'(u_k)u_k \\ &= \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_\Omega F(u_k)dx - \|u_k\|^2 + \int_\Omega f(u_k)u_k dx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como $(u_k) \subset \mathcal{N}_V$, então $\|u_k\|^2 = \int_\Omega f(u_k)u_k dx$. Assim, pela Observação 14, a equação (2.1) resulta

$$\begin{aligned} I_V(u_k) &= \frac{1}{2}\int_\Omega f(u_k)u_k dx - \int_\Omega F(u_k)dx - \int_\Omega f(u_k)u_k dx + \int_\Omega f(u_k)u_k dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega f(u_k)u_k dx - \int_\Omega F(u_k)dx \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(u_k)u_k - F(u_k)\right] dx \geq 0. \end{aligned}$$

Desse modo, como $I_V : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é contínua, então $d \geq 0$. Fixando $D > d$, suponhamos por contradição que $\|u_k\| \to \infty$. Considere $(v_k) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $v_k = t_k u_k$ com $t_k = \frac{2\sqrt{D}}{\|u_k\|}$. Temos

$$\|v_k\| = \|t_k u_k\| = \left\|\frac{2\sqrt{D}}{\|u_k\|}u_k\right\| = 2\sqrt{D}\frac{\|u_k\|}{\|u_k\|} = 2\sqrt{D}.$$

Logo, (v_k) é limitada. Segue do Lema 1.1 item (c), que a função $\xi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\xi(t_k) = \frac{1}{2}\|t_k u_k\|^2 - \int_\Omega F(t_k u_k)dx$ é crescente em $t_k \in (0,1]$ e decrescente em $t_k \in (1,\infty)$ e, além disso,

$$I_V(u_k) = \max_{t_k>0} I_V(t_k u_k) > 0,$$

em outras palavras, o máximo de I_V é atingido quando $t_k = 1$. Logo,

$$I_V(u_k) \geq I_V(t_k u_k) = I_V(v_k).$$

Portanto,

$$D \geq I_V(u_k) \geq I_V(v_k) = \frac{\|t_k u_k\|^2}{2} - \int_\Omega F(v_k)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left\|\frac{2\sqrt{D}}{\|u_k\|}u_k\right\|^2}{2} - \int_\Omega F(v_k)dx \\
&= \frac{4D}{2} - \int_\Omega F(v_k)dx \\
&= 2D - \int_\Omega F(v_k)dx.
\end{aligned}
$$

Assim, $D \leq \int_\Omega F(v_k)dx$. Pela propriedade ($f_2$), temos

$$
\begin{aligned}
D \leq \int_\Omega F(v_k)dx &= \int_\Omega \left[\int_0^{v_k} f(t)dt\right] dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\int_0^{v_k} C(|t|^{p_1} + |t|^{p_2})dt\right] dx \\
&= \int_\Omega [C(|t|^{p_1} + |t|^{p_2})t|_0^{v_k}]dx \\
&= \int_\Omega [C(|v_k|^{p_1} + |v_k|^{p_2})v_k]dx \\
&= C\int_\Omega |v_k|^{p_1+1}dx + C\int_\Omega |v_k|^{p_2+1}dx \\
&= C(\|v_k\|_{p_1+1}^{p_1+1} + \|v_k\|_{p_2+1}^{p_2+1}).
\end{aligned}
$$

Veja que $v_k = t_k u_k \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ implica que $v_k = \frac{2\sqrt{D}}{\|u_k\|}u_k = 2\sqrt{D}$, então $\lim\limits_{k\to\infty} \|v_k\|_{p_1+1}^{p_1+1} > 0$. Assim, usando a contrapositiva do Lema de Lions, obtemos

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_k|^2 dx \neq 0,$$

existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_k|^2 dx > \delta.$$

Como $\mathbb{R}^N$ é completo, existe uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_k)} v_k^2 dx = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_k|^2 dx > \delta. \tag{2.2}$$

Considere $\tilde{u_k}(x) := u_k(x + y_k)$ e $\tilde{v_k}(x) := v_k(x + y_k)$. Visto que (v_k) é limitada, então $\tilde{v}_k$ é limitada em $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, então passando a uma subsequência, temos $v_k \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e pela imersão de Sobolev, concluímos que $\tilde{v_k} \to v$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{v_k}(x) \to v(x)$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^N$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_{B_1(y_k)} v_k^2(x)dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{B_1(0)} v_k^2(x + y_k)dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{B_1(0)} \tilde{v_k}^2(x)dx \\
&= \int_{B_1(0)} v^2(x)dx.
\end{aligned}
$$

Pela equação (2.2), temos

$$\int_{B_1(0)} v^2(x)dx > 0,$$

então $v(x) \neq 0$ e existe um conjunto de medida positiva Λ em $B_1(0)$ tal que $v(x) \neq 0$ para todo $x \in \Lambda$. Observe que

$$|\tilde{u_k}(x)| = |u_k(x + y_k)| \to \infty, \forall\ x \in \Lambda,$$

então $|\tilde{u_k}(x)| \to \infty$ em Λ. Pela Observação 14, temos $\frac{1}{2}f(u)u - F(u) \geq 0$ se $u \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Pela propriedade (f_3), $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e aplicando o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} D > \lim_{k\to\infty} I_V(u_k) &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(u_k)u_k - F(u_k)\right] dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(\tilde{u_k})\tilde{u_k} - F(\tilde{u_k})\right] dx \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Lambda \left[\frac{1}{2}f(\tilde{u_k})\tilde{u_k} - F(\tilde{u_k})\right] dx \\ &\geq \int_\Lambda \lim_{k\to\infty} \inf \left[\frac{1}{2}f(\tilde{u_k})\tilde{u_k} - F(\tilde{u_k})\right] dx. \end{aligned}$$

Como $|\tilde{u}_k(x)| \to \infty$ em Λ, então

$$\int_\Lambda \lim_{k\to\infty} \inf \left[\frac{1}{2}f(\tilde{u_k})\tilde{u_k} - F(\tilde{u_k})\right] dx \to \infty.$$

Portanto, $D > \infty$, mas isso é uma contradição, pois consideramos D fixo. Dessa forma, (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. □

Lema 2.2. *Sobre os níveis de energia temos a seguinte propriedade:* $c_V, c_\infty > 0$.

Demonstração. Seja $(u_k) \subset \mathcal{N}_V$ tal que $I_V(u_k) \to c_V$. Pelo Lema 2.1, (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Segue do Lema 1.1 item (a) e da propriedade (f_2) que

$$\begin{aligned} 0 < \rho^2 \leq \|u_k\|_\Omega^2 &= \int_\Omega f(u_k)u_k dx \\ &\leq \int_\Omega C(|u_k|^{p_1} + |u_k|^{p_2})u_k dx \\ &= \int_\Omega C(|u_k|^{p_1+1} + |u_k|^{p_2+1}) dx \\ &= C(\|u_k\|_{p_1+1}^{p_1+1} + \|u_k\|_{p_2+1}^{p_2+1}). \end{aligned}$$

Dessa forma, $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{p_1+1} \neq 0$ e $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{p_2+1} \neq 0$. Como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, usando a contrapositiva do Lema de Lions, obtemos

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} v_k^2 dx > 0.$$

Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} v_k^2 dx \geq \delta.$$

Como $\mathbb{R}^N$ é completo, existe uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(0)} u_k^2 dx = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u_k^2 dx \geq \delta.$$

Logo, $u_k \neq 0$, pois

$$\int_{B_1(y_k)} u_k^2 dx > 0.$$

Agora, considere a sequência $\tilde{u}_k(x) := u_k(x + y_k)$. Passando a uma subsequência, temos $\tilde{u}_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{u}_k \to u$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{u}_k(x) \to u(x)$ *q.t.p.* em $\mathbb{R}^N$. Portanto,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B_1(y_k)} u_k^2(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{B_1(0)} \tilde{u}_k^2(x)dx = \int_{B_1(0)} u^2(x)dx.$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^2(x)dx > 0$, então $\int_{B_1(0)} u^2(x)dx > 0$. Logo, $u(x) \neq 0$ e existe um conjunto de medida positiva Λ tal que $u(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \Lambda$. Pela Observação 14, temos $\frac{1}{2}f(u)u - F(u) > 0$ se $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$. Como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e aplicando o Lema de Fatou resulta que

$$\begin{aligned}
c_V = \lim_{k\to\infty} I_V(u_k) &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(u_k)u_k - F(u_k)\right]dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(\tilde{u}_k)\tilde{u}_k - F(\tilde{u}_k)\right]dx \\
&\geq \liminf_{k\to\infty}\int_\Lambda \left[\frac{1}{2}f(\tilde{u}_k)\tilde{u}_k - F(\tilde{u}_k)\right]dx \\
&\geq \int_\Lambda \liminf_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2}f(\tilde{u}_k)\tilde{u}_k - F(\tilde{u}_k)\right]dx \\
&= \int_\Lambda [\frac{1}{2}f(u)u - F(u)]dx > 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $c_\infty > 0$. □

Lema 2.3. *Se u é uma solução de (P_V) com $I_V(u) \in [c_V, 2c_V)$, então u não muda de sinal.*

Demonstração. Como $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução de (P_V), então $I'_V(u)u = 0$. Assim, $\|u\|^2 = \int_\Omega f(u)udx$. Pelo Lema 1.1 item (a), temos $u \neq 0$. Considere

$$\Omega^+ = \{u \in H_0^1(\Omega); u(x) > 0\} \text{ e } \Omega^- = \{u \in H_0^1(\Omega); u(x) < 0\}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
0 = I'_V(u)(u^+) &= < u, u^+ > - \int_{\Omega^+\cup\Omega^-} f(u)u^+dx \\
&= < u^+ + u^-, u^+ > - \int_{\Omega^+} f(u)u^+dx - \int_{\Omega^-} f(u)u^+dx \\
&= < u^+, u^+ > + < u^-, u^+ > - \int_{\Omega^+} f(u^+)u^+dx - \int_{\Omega^-} f(u^-)u^+dx \\
&= \|u^+\|^2 - \int_{\Omega^+} f(u^+)u^+dx = J_V(u^+).
\end{aligned}$$

Similarmente obtemos $J_V(u^-) = 0$. Agora suponha que $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
I_V(u) &= I_V(u^+ + u^-) \\
&= \frac{1}{2}\|u^+ + u^-\|^2 - \int_{\Omega^+\cup\Omega^-} F(u^+ + u^-)dx \\
&= < u^+ + u^-, u^+ + u^- > - \int_{\Omega^+\cup\Omega^-} F(u^+ + u^-)dx \\
&= \frac{1}{2}[\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 + 2 < u^+, u^- >] - \int_{\Omega^+} F(u^+ + u^-)dx - \int_{\Omega^-} F(u^+ + u^-)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u^+\|^2 + \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int_{\Omega^+} F(u^+)dx - \int_{\Omega^-} F(u^-)dx \\
&= I_V(u^+) + I_V(u^-).
\end{aligned}$$

Como $c_V := \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_V} I_V(u)$, temos

$$I_V(u) = I_V(u^+) + I_V(u^-) \geq c_V + c_V = 2c_V$$

o que é uma contradição, pois por hipótese $I_V(u) < 2c_V$. $\square$

Observação 4. *Analogamente podemos mostrar que o Lema 2.3 vale para o funcional I_∞.*

Observação 5. *O gradiente de I_V em u pode ser escrito como*

$$\nabla I_V(u) = \nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u) + t\nabla J_V(u).$$

De fato, por Ambrosetti e Malchiodi (seção 6.1) [1], temos

$$< \nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u), v > = < \nabla I_V(u), v > \quad \forall\, v \in T_u(\mathcal{N}_V)$$

ou

$$< \nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u) - \nabla I_V(u), v > = 0, \forall\, v \in T_u(\mathcal{N}_V)$$

em que $T_u(\mathcal{N}_V) := \{v \in H_0^1(\Omega); J_V'(u)v = 0\}$.
Considere o funcional $\nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u) - \nabla I_V(u) : \mathcal{N}_V \to \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Hahn - Banach podemos estender o funcional $\nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u) - \nabla I_V(u)$ para todo o espaço $H_0^1(\Omega)$.
Além disso, observe que

$$\ker(J_V'(u)v) = \{v \in H_0^1(\Omega); J_V'(u)v = 0\} = T_u(\mathcal{N}_V).$$

Portanto, $\ker(J_V'(u)v) \subset \ker(\nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u) - \nabla I_V(u))$. Segue do Lema A.2 que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u) - \nabla I_V(u) = tJ_V'(u)v$$

ou

$$\nabla I_V(u) = \nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u) + tJ_V'(u)v.$$

Lema 2.4. *Se (u_k) é uma sequência de Palais - Smale no nível d para o funcional I_V restrito em $\mathcal{N}_V$, então existe uma subsequência de (u_k) de Palais - Smale no nível d em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência de $(PS)_d$ para I_V em $\mathcal{N}_V$. Pelo Lema 2.1, passando a uma subsequência, temos que (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Considere

$$\nabla I_V(u_k) = \nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u_k) + t_k \nabla J_V \tag{2.3}$$

e observe que aplicando a Desigualdade de Hölder e a Imersão de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega [f'(u_k)u_k - f(u_k)]vdx\right| &\leq \left|\int_\Omega [f'(u_k)u_k + f(u_k)]vdx\right| \\
&= \left|\left[\int_\Omega f'(u_k)u_k v dx + \int_\Omega f(u_k)vdx\right]\right| \\
&\leq \left|\left[\int_\Omega C(|u_k|^{p_1-1} + |u_k|^{p_2-1})u_k v dx + \int_\Omega C(|u_k|^{p_1} + |u_k|^{p_2})vdx\right]\right| \\
&= \left|\left[\int_\Omega C(|u_k|^{p_1} + |u_k|^{p_2})vdx + \int_\Omega C(|u_k|^{p_1} + |u_k|^{p_2})vdx\right]\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega C(|u_k|^{p_1} + |u_k|^{p_2})vdx\right| \\
&= \left|C\int_\Omega |u_k|^{p_1} vdx + C\int_\Omega |u_k|^{p_2} vdx\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\|u_k\|_{p_1}^{p_1}\|v\|_{\frac{p_1}{p_1-1}} + \|u_k\|_{p_2}^{p_2}\|v\|_{\frac{p_2}{p_2-1}}) \\
&\leq C(\|u_k\|_{\Omega}^{p_1}\|v\|_{\Omega} + \|u_k\|_{\Omega}^{p_2}\|v\|_{\Omega}) \\
&= C[(\|u_k\|_{\Omega}^{p_1} + \|u_k\|_{\Omega}^{p_2})\|v\|_{\Omega}] \\
&= C\|v\|_{\Omega}.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\nabla J_V(u_k)$ é limitada. Recordemos que

$$J_V(u_k) = \|u_k\|^2 - \int_{\Omega} f(u_k)u_k dx.$$

Assim, usando a Desigualdade de Cauchy - Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
| < \nabla J_V(u_k), v >_{\Omega} | &= |2 < u_k, v > - \int_{\Omega} f'(u_k)u_k v dx - \int_{\Omega} f(u_k) v dx| \\
&\leq |2 < u_k, v > + \int_{\Omega} f'(u_k)u_k v dx - \int_{\Omega} f'(u_k)u_k v dx| \\
&= |2 < u_k, v > + \int_{\Omega} [f'(u_k)u_k - f(u_k)] v dx| \\
&\leq |2 < u_k, v > | + | \int_{\Omega} [f'(u_k)u_k - f(u_k)] v dx| \\
&\leq 2\|u_k\|_{\Omega}\|v\|_{\Omega} + C\|v\|_{\Omega} \\
&= (2\|u_k\|_{\Omega} + C)\|v\|_{\Omega} \\
&= C\|v\|_{\Omega}, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Sendo $\nabla J_V(u_k)$ e (u_k) limitada, temos

$$|\nabla J_V(u_k)u_k| \leq \|\nabla J_V(u_k)u_k\|\|u_k\|_{\Omega}.$$

Passando a uma subsequência podemos escrever

$$|J_V'(u_k)u_k| \to \rho \geq 0.$$

Vamos mostrar que $\rho > 0$. Resulta do Lema 1.1 item (a) e da propriedade (f_2) que

$$\begin{aligned}
0 < \rho^2 \leq \|u_k\|_{\Omega}^2 &= \int_{\Omega} f(u_k)u_k dx \\
&\leq \int_{\Omega} C(|u_k|^{p_1} + |u_k|^{p_2})u_k dx \\
&= \int_{\Omega} C(|u_k|^{p_1+1} + |u_k|^{p_2+1}) dx.
\end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{p_1+1}^{p_1+1} \neq 0$ e $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{p_2+1}^{p_2+1} \neq 0$, segue da contrapositiva do Lema de Lions que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u_k^2 dx \neq 0.$$

Dessa forma, existe $\delta > 0$, tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u_k^2 dx > \delta.$$

Como $\mathbb{R}^N$ é completo, existe $(y_k) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_k)} u_k^2 dx = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u_k^2 dx \geq \delta.$$

Considere as sequências $\tilde{u}_k(x) := u_k(x+y_k)$ e $\tilde{v}_k(x) := v_k(x+y_k)$. Como $\tilde{u}_k(x)$ limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, passando a uma subsequência, temos $\tilde{u}_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, usando a imersão de Sobolev podemos concluir que $\tilde{u}_k \to u$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{u}_k(x) \to u(x)$ $q.t.p$ em $\mathbb{R}^N$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta \leq \lim_{k\to\infty} \int_{B_1(y_k)} u_k^2 dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{B_1(0)} u_k^2(x+y_k)dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{B_1(0)} \tilde{u}_k^2(x)dx \\
&= \int_{B_1(0)} u_k^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Sendo $\int_{B_1(0)} u^2(x)dx > 0$, então $u \neq 0$. Logo, existe um conjunto de medida positiva Λ em $B_1(0)$ tal que $u(x) \neq 0$, para todo $x \in \Lambda$. Pela propriedade (f_2), se $u \neq 0$, então $f'(u)u^2 - f(u)u > 0$. Aplicando o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty} |\nabla J_V(u_k)u_k| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| 2\|u_k\|_\Omega^2 - \int_\Omega [f'(u_k)u_k^2 + f(u_k)u_k]dx \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| 2\int_\Omega f(u_k)u_k dx - \int_\Omega f'(u_k)u_k^2 dx - \int_\Omega f(u_k)u_k dx \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \int_\Omega f(u_k)u_k dx - \int_\Omega f'(u_k)u_k^2 dx \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \int_\Omega [f'(u_k)u_k^2 - f(u_k)u_k]dx \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega [f'(u_k)u_k^2 - f(u_k)u_k]dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega [f'(\tilde{u_k})\tilde{u_k}^2 - f(\tilde{u_k})\tilde{u_k}]dx \\
&\geq \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Lambda [f'(\tilde{u_k})\tilde{u_k}^2 - f(\tilde{u_k})\tilde{u_k}]dx \\
&\geq \int_\Lambda \lim_{k\to\infty} \inf [f'(\tilde{u_k})\tilde{u_k}^2 - f(\tilde{u_k})\tilde{u_k}]dx \\
&= \int_\Lambda [f'(u_k)u_k^2 - f(u_k)u_k]dx > 0.
\end{aligned}$$

Fazendo o produto interno na equação (2.3) com u_k, obtemos

$$\begin{aligned}
0 = \nabla I_V(u_k)u_k &= < \nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u_k) + t_k \nabla J_V(u_k), u_k > \\
&= < \nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u_k), u_k > + t_k \nabla J_V(u_k)u_k \\
&= o_k(1) + t_k \nabla J_V(u_k)u_k,
\end{aligned}$$

e então, $t_k \to 0$. E novamente da equação (2.3), deduzimos que $\nabla I_V(u_k) \to 0$ quando $\nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u_k) \to 0$. $\square$

Observação 6. *Pelo Lema 2.4 a Variedade de Nehari é uma restrição natural para o funcional I_V.*

Lema 2.5 (Splitting)**.** *Seja (u_k) uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$I_V(u_k) \to d \text{ e } I_V'(u_k) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega). \tag{2.4}$$

Passando (u_k) a uma subsequência, existe uma solução u_0 de (P_V) e um número $m \in \mathbb{N}$ com m funções $w_1, ..., w_m$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e m sequências de pontos $(y_k^j) \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, satisfazendo:

a) $u_k \to u_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$ *ou*
b) w_j *são soluções não triviais do problema limite* (P_∞)*;*
c) $|y_k^j| \to \infty$ *e* $|y_k^j - y_k^i| \to +\infty$, $i \neq j$*;*
d) $u_k - \sum_{i=1}^{m} w_j \to u_0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$*;*
e) $d = I_V(u_0) + \sum_{i=1}^{m} I_\infty(w_j)$.

Demonstração. Como (u_k) é limitada, passando a uma subsequência, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, $I_V'(u_k) \to I_V'(u_0)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Por hipótese, $I_V'(u_k) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, então por unicidade do limite, concluímos que $I_V'(u_0) = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$. Defina $u_k^1 = u_k - u_0 \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e vamos mostrar os seguintes resultados quando $k \to \infty$:

$$\|u_k^1\|^2 = \|u_k\|^2 - \|u_0\|^2 + o_k(1); \tag{2.5}$$

$$I_\infty(u_k^1) \to d - I_V(u_0); \tag{2.6}$$

$$I_\infty'(u_k^1) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega). \tag{2.7}$$

Vamos provar a equação (2.5). Observe que $u_k^1 + u_0 = (u_k - u_0) + u_0 = u_k$. Então,

$$\|u_k^1\|^2 =< u_k - u_0, u_k - u_0 > \Longrightarrow \|u_k^1\|^2 = \|u_k\|^2 + \|u_0\|^2 - 2 < u_k, u_0 > .$$

Como $u_k^1 \rightharpoonup 0$ e aplicando o Teorema da Representação de Riesz, temos

$$< u_k^1, u_0 >= f(u_k^1) \to 0, \forall \ f \in H^{-1}(\Omega).$$

Portanto,

$$\|u_k\|^2 = \|u_k^1\|^2 + \|u_0\|^2 + 2 < u_k^1, u_0 > \Longrightarrow \|u_k^1\|^2 = \|u_k\|^2 - \|u_0\|^2 + o_k(1).$$

Para provarmos a equação (2.6), veja que $u_k \rightharpoonup u_0$ implica $u_k^1 \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, $u_k \to u_0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, $u_k^1 \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, $u_k(x) \to u_0(x)$ *q.t.p.* em $\mathbb{R}^N$ e $u_k^1(x) \to 0$ *q.t.p.* em $\mathbb{R}^N$. Além disso, usando a equação (2.5)

$$\begin{aligned} I_\infty(u_k^1) - I_V(u_k) + I_V(u_0) &= \frac{1}{2}\|u_k^1\|^2 - \int_\Omega F(u_k^1)dx - \frac{1}{2}\|u_k\|^2 + \int_\Omega F(u_k)dx \\ &+ \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \int_\Omega F(u_k)dx \\ &= \frac{1}{2}[\|u_k^1\|^2 - \|u_k\|^2 + \|u_0\|^2] - \int_\Omega [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]dx \\ &= -\int_\Omega [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora mostraremos que

$$-\int_\Omega [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)]dx = o_k(1)$$

em que $o_k(1) \to 0$ quando $k \to +\infty$. Veja que dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $B_D(0)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} [|\nabla u_0|^2 + u_0^2] dx \leq \varepsilon.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, a propriedade (f_2) e a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} [F(u_k^1) - F(u_k) &+ F(u_0)] dx = -\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} [f(u_k + tu_0)u_0 + F(u_0)] dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} [f(u_k + tu_0)u_0 + \int_0^{u_0} f(t)dt] dx \\
&\leq -\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} [f(u_k + tu_0)u_0 + C(|u_0|^{p_1+1} + |u_0|^{p_2+1})] dx \\
&\leq \|f(u_k + tu_0)\|_2 \|u_0\|_2 + C(\|u_0\|_2^{p_1} \|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^{p_2} \|u_0\|_2) \\
&\leq C\varepsilon + C\varepsilon \\
&= C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por (f_2), temos

$$\int_{B_D(0)} F(u_k^1) dx < \infty, \int_{B_D(0)} F(u_k) dx < \infty \text{ e } \int_{B_D(0)} F(u_0) dx < \infty.$$

Assim,

$$-\int_{B_D(0)} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)] dx \in L^1(\Omega).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada, da continuidade da F, de $u_k \to u_0$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^N$ e $u_k^1 \to 0$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^N$ que

$$-\int_{B_D(0)} [F(u_k^1) - F(u_k) + F(u_0)] dx \to 0.$$

Como $I_V(u_k) \to d$ e fazendo $n \to \infty$ na equação (2.8), obtemos

$$I_\infty(u_k^1) \to d - I_V(u_0).$$

Além disso, para provarmos a convergência (2.7) afirmamos que $f(u_0 + u_k^1) - f(u_k^1) \to f(u_0)$ em $H_0^1(\Omega)$. De fato, por analogia ao caso anterior, temos que dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $B_D(0)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} [|\nabla u_0|^2 + u_0^2] dx \leq \varepsilon.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio e pela propriedade (f_2), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} |[f(u_0 + u_k^1) &- f(u_k^1) - f(u_0)]| dx = \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} |[f(u_0 + tu_k^1) - f(u_0)]| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} |[f(u_0 + tu_k^1) + f(u_0)]| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_D(0)} |[f(u_0 + tu_k^1) + C(|u_0|^{p_1} + |u_0|^{p_2}))]| dx \\
&\leq \|f(u_0 + tu_k^1)\|_2 \|u_0\|_2 + C\|u_0\|_2^{p_1} + C\|u_0\|_2^{p_2} \\
&\leq C\varepsilon + C\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\leq \quad C\varepsilon.$$

Novamente, segue do Teorema da Convergência Dominada, da continuidade da F, de $u_k \to u_0$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^N$ e $u_k^1 \to 0$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^N$ que

$$\int_{B_D(0)} |[f(u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi| dx \to 0.$$

Como $I'_V(u_0) = 0$, combinando a equação (2.5) e a Desigualdade de Schwarz, temos que para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k \|\varphi\| &\geq |< I'_V(u_k), \varphi >| = |< I'_V(u_0 + u_k^1), \varphi >| \\
&= |< u_0 + u_k^1, \varphi > - \int_\Omega f(u_0 + u_k^1)\varphi dx| \\
&= |< u_0, \varphi > + < u_k^1, \varphi > - \int_\Omega f(u_0)\varphi dx - \int_\Omega f(u_k^1)\varphi dx \\
&+ \int_\Omega f(u_0)\varphi dx + \int_\Omega f(u_k^1)\varphi dx - \int_\Omega f(u_0 + u_k^1)\varphi dx| \\
&= |< I'_V(u_0), \varphi > + < I'_V(u_k^1), \varphi > + \int_\Omega f(u_0)\varphi dx \\
&+ \int_\Omega f(u_0)\varphi dx - \int_\Omega f(u_0 + u_k^1)\varphi dx| \\
&= |< I'_V(u_0), \varphi > + < I'_V(u_k^1), \varphi > \\
&- \int_\Omega [f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi dx| \\
&= |< I'_V(u_0) + I'_V(u_k^1), \varphi > \\
&- \int_\Omega [f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi dx| \\
&\geq |< I'_\infty(u_0) + I'_V(u_k^1), \varphi >| \\
&- |\int_\Omega [f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi dx| \\
&= |< I'_\infty(u_k^1), \varphi >| - \left| \int_\Omega [f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi dx \right| \\
&\geq |< I'_\infty(u_k^1), \varphi >| - \int_\Omega |[f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]\varphi| dx \\
&\geq |< I'_\infty(u_k^1), \varphi >| - \|\varphi\| \int_\Omega |[f(u_0 + u_k^1) - f(u_0) - f(u_k^1)]| dx \\
&\geq |< I'_\infty(u_k^1), \varphi >| - \varepsilon_k \|\varphi\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|< I'_V(u_k^1), \varphi >| \leq 2\varepsilon_k \|\varphi\| \implies I'_V(u_k^1) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Como (u_k^1) é limitada, então

$$\delta := \limsup_{k \to \infty} \sup \int_{B_1(y)} |u_k^1|^2 dx.$$

Se $\delta = 0$, segue do Lema de Lions que

$$u_k^1 \to 0 \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N), p \in (2, 2^*). \tag{2.9}$$

Pela propriedade (f_2) e por (2.9), concluímos que $u_k^1 \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.
De fato,

$$\begin{aligned} I_V'(u_k^1) &= \|u_k^1\|^2 - \int_\Omega f(u_k^1)u_k dx \\ &\geq \|u_k^1\|^2 - \int_\Omega C(|u_k^1|^{p_1} + |u_k^1|^{p_2})u_k dx \\ &= \|u_k^1\|^2 - \|u_k^1\|_2^{p_1+1} - \|u_k^1\|_2^{p_2+1}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $I_V'(u_k^1) \to 0$, então fazendo $k \to \infty$ na desigualdade (2.10), temos que $\|u_k^1\|^2 \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.
Note que a convergência forte de (u_k^1) em $H_0^1(\Omega)$ implica na convergência forte de (u_k) para u_0 em $H_0^1(\Omega)$. Assim, provamos o primeiro caso do lema.
Provaremos o segundo caso. Se $\delta > 0$, existe uma sequência $(y_k^1) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\frac{\delta}{2} < \lim_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_k^1|^2 dx = \int_{B_1(y_k^1)} |u_k^1|^2 dx.$$

Defina a sequência $(v_k^1) \subset \mathbb{R}^N$ por $v_k^1 = u_k^1(\cdot + y_k^1)$. Como u_k^1 é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então v_k^1 é limitada. Logo, existe $u^1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_k^1 \rightharpoonup u^1$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v_k^1 \to u^1$ *q.t.p.* em $\mathbb{R}^N$. Fazendo uma mudança de variável obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} < \int_{B_1(y_k^1)} |u_k^1|^2 dx &= \int_{B_1(0)} |u_k^1(x + y_k^1)|^2 dx \\ &= \int_{B_1(0)} v_k^1(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Fatou,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\delta}{2} < \liminf_{k\to\infty} \int_{B_1(0)} v_k^1(x)^2 dx \implies \frac{\delta}{2} < \int_{B_1(0)} \liminf_{k\to\infty} v_k^1(x)^2 dx = \int_{B_1(0)} u^1(x)^2 dx.$$

Logo, $u^1 \neq 0$. Além disso, como $u_k^1 \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então podemos assumir que (y_k^1) possui uma subsequência tal que $|y_k^1| \to \infty$. Agora vamos mostrar que $I_\infty'(u^1) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. De fato, tome $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sendo $|y_k^1| \to \infty$, então podemos encontrar n_0 tal que $\phi_k := \phi(x - y_k^1)$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ para todo $k \geq k_0$, além disso, $\|\phi_k\|_\Omega = \|\phi\|$. Como consequência de (2.7), temos

$$\begin{aligned} | < I_\infty'(u^1), \phi > | &= | < I_\infty'(v_k^1), \phi > | + o_k(1) \\ &= | < I_\infty'(u_k^1(x + y_k^1)), \phi(x) > | + o_k(1) \\ &= | < I_\infty'(u_k^1(x)), \phi(x - y_k^1) > | + o_k(1) \\ &= | < I_\infty'(u_k^1), \phi_k > | + o_k(1) \\ &= o_k(1). \end{aligned}$$

Então, u^1 é solução de (P_∞). Defina $u_k^2(x) := u_k^1(x) - u^1(x - y_k^1)$ e $u_k^2(. + y_k^1) = v_k^1 + u^1$ e fazendo cálculos análogos para u^1 e u^2, obtemos

$$\|u_k^2\|^2 = \|u_k^1\|^2 - \|u^1\|^2 + o_k(1);$$

$$I_\infty(u_k^2) \to d - I_V(u_0) - I_\infty(u^1);$$

$$I_\infty'(u_k^2) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Repetindo sucessivamente o mesmo argumento, obteremos uma quantidade finita de soluções do problema (P_∞) que satisfazem o segundo caso do lema. Se a quantidade de soluções for infinita, então no item e), d vai para o infinito, o que é uma contradição. Portanto, existem m soluções de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfazem o segundo caso do lema. $\square$

Lema 2.6. *O problema* (P_∞) *não tem solução* u *tal que* $I_\infty(u) \in (c_\infty, 2c_\infty)$.

Demonstração. Com as suposições da f e considerando f ímpar, por Berestychi e Lions [8], o problema (P_∞) tem solução positiva tal que $I_\infty(w) = c_\infty$. Veremos que w é única. Se u é uma solução de (P_∞) tal que $I_\infty(u) \in [c_\infty, 2c_\infty)$, então pelo Lema 2.3, u não muda de sinal e por Berestychi e Gallouet [7], u é radialmente simétrica. Por (U), o problema (P_∞) tem solução única e positiva. Assim, $u = w$ e $I_\infty(u) = c_\infty$ o que é uma contradição. Logo, (P_∞) não tem solução em $I_\infty \in (c_\infty, 2c_\infty)$. $\square$

Corolário 1 (Compacidade)**.** *Se* c_V *não é atingido, então* $c_V \geq c_\infty$ *e* I_V *satisfaz a condição de* (PS) *em* $\mathcal{N}_V$ *para todo* $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$.

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência de (PS) para I_V em $\mathcal{N}_V$. Segue do Lema 2.1 e do Lema 2.4 que (u_k) é uma sequência limitada de (PS) em $H_0^1(\Omega)$. Como $c_V = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_V} I_V(u)$, existe $(u_j) \subset \mathcal{N}_V$ tal que $I_V(u_j) \to c_V$. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland, existe $(\tilde{u}_j) \subset \mathcal{N}_V$ tal que $I_V(\tilde{u}_j) \to c_V$ e $I'_V(\tilde{u}_j) \to 0$. Agora usando o Lema de Splitting, se $d = c_V$ não é atingido, temos $c_V = I_V(u_0) + \sum\limits_{i=1}^{m} I_\infty(w_j)$ e então $c_V \geq c_\infty$. Se $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$ e (u_k) não possui uma subsequência convergente, então pelo Lema de Splitting, temos

$$2c_\infty > d = I_V(u_0) + \sum_{i=1}^{m} I_\infty(w_j) \geq \begin{cases} 0 + mc_\infty = mc_\infty \text{ se } u_0 = 0 \\ c_V + mc_\infty \geq c_\infty + mc_\infty = (1+m)c_\infty \text{ se } u_0 \neq 0. \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{cases} 2c_\infty > mc_\infty \implies 2 > m \text{ se } u_0 = 0 \\ 2c_\infty > (m+1)c_\infty \implies 2 > m \text{ se } u_0 \neq 0. \end{cases}$$

Logo, em ambos os casos $m < 2$ e portanto $m = 1$. A condição $2c_\infty > (m+1)c_\infty$ implica que é impossível obtermos $m = 1$ para $u_0 \neq 0$. Segue que $u_0 = 0$. Assim, $I_V(u_n) \to I_\infty(w_1)$. Mas por ($U$), a solução é única. Logo, $w_1 = w$ e existe uma solução w do problema (P_∞) com $d = I_\infty(w_1) = I_\infty(w)$ o que contradiz o Lema 2.6. Portanto, I_V satisfaz a condição de (PS) em $\mathcal{N}_V$ para todo $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$. $\square$

Observação 7. *Se* $0 < V_0 < V(x) < V_\infty$*, então* $c_V < c_\infty$*. Se* $d = c_V$*, pelo Lema de Splitting temos* $c_V \geq c_\infty$ *o que é uma contradição. Logo,* $u_k \to u_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$*. Para* $I'(u_0) = 0$ *e* $I(u_0) = c_V > 0$*,* u_0 *é uma solução de* (P_V) *e* c_V *é atingido.*

Capítulo 3

Existência de uma solução positiva

O objetivo deste capítulo é provar o teorema principal desta dissertação. Para isso, utilizaremos a combinação convexa de duas cópias da solução w de (P_∞) projetada em Nehari, a aplicação baricentro e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Definimos, para $R > 0$, $|y_0| = 1$ e $y \in \partial B_2(y_0)$,

$$\varepsilon_R := \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R) w_y^R dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R) w_0^R dx.$$

Observação 8. *Inicialmente $\varepsilon_R = \varepsilon_R(y)$ dependente de y, mas para R suficientemente grande, as estimativas em ε_R são independente de y.*

Nos Lema 3.1 e Lema 3.2, iremos estimar a função ε_R cujo objetivo é torná-la suficientemente pequena quando $R \to \infty$, para mais adiante usarmos a notação $o(\varepsilon_R)$.

Lema 3.1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\varepsilon_R \leq C R^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{V_\infty} R}$$

para todo $y \in \partial B_2(y_0)$ e $R > 0$ suficientemente grande.

Demonstração. Pela propriedade (f_2) e fazendo uma mudança de variável, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R) w_y^R dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} C(|w_0^R|^{p_1} + |w_0^R|^{p_2}) w_y^R dx \\
= &\int_{\mathbb{R}^N} C|w_0^R|^{p_1} w_y^R dx + \int_{\mathbb{R}^N} C|w_0^R|^{p_2} w_y^R dx \\
= &\int_{\mathbb{R}^N} C|w(x - Ry_0)|^{p_1} w(x - Ry) dx + \int_{\mathbb{R}^N} C|w(x - Ry_0)|^{p_2} w(x - Ry) dx \\
= &\int_{\mathbb{R}^N} C|w(x)|^{p_1} w(x - Ry + Ry_0) dx + \int_{\mathbb{R}^N} C|w(x)|^{p_2} w(x - Ry + Ry_0) dx.
\end{aligned}$$

Como $p_0 \geq p_1 > 1$, usando a desigualdade (1.3), o Lema 1.3 e o Lema 1.6 com $p = p_1$ e $q = 1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} C|w(x)|^{p_1} w(x - Ry + Ry_0) dx \leq C R^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{V_\infty} R}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} C|w(x)|^{p_2} w(x - Ry + Ry_0) dx \leq C R^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{V_\infty} R}.$$

Note que o lema acima implica que

$$\varepsilon_R \to 0 \text{ quando } R \to \infty \text{ uniformemente em } y \in \partial B_2(y_0).$$

□

Lema 3.2. *Existe $C > 0$ tal que para todo $s, t \geq \frac{1}{2}$, $y \in \partial B_2(y_0)$ e R suficientemente grande*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0^R)tw_y^R dx \geq CR^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{V_\infty}R}.$$

Demonstração. Para $|x| < 1$ e R suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} 1 + |x| < 1 + |x - R(y - y_0)| &< 1 + |x + R(y - y_0)| \\ &< 1 + |x| + R|y - y_0| \\ &< R + R + 2R \\ &< 4R. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aplicando a propriedade (f_5), a desigualdade (3.1) e a estimativa de decaimento (1.3), temos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0^R)tw_y^R dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(sw_0^R)}{sw_0^R}\right] sw_0^R tw_y^R dx \\ &= st \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(sw_0^R)}{sw_0^R}\right] w_0^R w_y^R dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(\frac{1}{2}w_0^R)}{\frac{1}{2}w_0^R}\right] w_0^R w_y^R dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{B_1(Ry_0)} \left[\frac{f(\frac{1}{2}w_0^R)}{\frac{1}{2}w_0^R}\right] w_0^R w_y^R dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{B_1(Ry_0)} \left[\frac{f(\frac{1}{2}w(x - Ry_0))}{\frac{1}{2}w(x - Ry_0)}\right] w(x - Ry_0)w(x - Ry)dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{B_1(0)} \left[\frac{f(\frac{1}{2}w(x))}{\frac{1}{2}w(x)}\right] w(x)w(x - Ry + Ry_0)dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{B_1(0)} \left[\min_{x \in B_1(0)} \frac{f(\frac{1}{2}w(x))}{\frac{1}{2}w(x)}\right] w(x)w(x - R(y - y_0))dx \\ &= \frac{1}{4} \min_{x \in B_1(0)} \frac{f(\frac{1}{2}w(x))}{\frac{1}{2}w(x)} \int_{B_1(0)} w(x)w(x - R(y - y_0))dx \\ &\geq C \int_{B_1(0)} (1 + |x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|x|} (1 + |x - R(y - y_0)|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|x - R(y - y_0)|} dx \\ &\geq C \int_{B_1(0)} 4R^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}|x|} 4R^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}R|y - y_0|} dx \\ &= C \int_{B_1(0)} R^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{V_\infty}2R} dx \\ &= CR^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{V_\infty}R}. \end{aligned}$$

□

Observação 9. *Se $s, t = 1$, então $\varepsilon_R \geq CR^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{V_\infty}R}$.*

O objetivo do Lema 3.3 é estabelecer uma estimativa que será usada na prova da Proposição 1.

Lema 3.3. *Para todo $b > 1$, existe uma constante C, tal que*

$$\left|\int_{\Omega}[sf(w_0^R\psi) - f(sw_0^R\psi)]w_y^R\psi dx\right| \leq C|s-1|\varepsilon_R,$$

para todo $s \in [0,b], y \in B_2(y_0)$ e R suficientemente grande.

Demonstração. Fixando $u \in \mathbb{R}^N$ e considere a função $g : [0,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(s) = sf(u) - f(su)$. Pela propriedade (f_2), temos

$$\begin{aligned} g'(s) = f(u) - f'(su)u &\leq f(u) + f'(su)u \\ &\leq |f(u)| + C(|su|^{p_1-1}|u| + |su|^{p_2-1}|u|) \\ &= |f(u)| + C(s^{p_1-1}|u|^{p_1} + s^{p_2-1}|u|^{p_2}) \\ &\leq |f(u)| + C(|u|^{p_1} + |u|^{p_2}), \forall \ s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Observe que $g(u) = uf(u) - f(u^2)$ e $g(1) = 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |g(s)| = |sf(u) - f(su)| &= |g(s) - g(1)| \\ &= |g'(t)||s-1| \\ &\leq [|f(u)| + C(|u|^{p_1} + |u|^{p_2})]|s-1|. \end{aligned}$$

Como $\psi < 1$, então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}|sf(w_0^R\psi) &- f(sw_0^R\psi)|w_y^R\psi dx \leq \int_{\Omega}[|f(w_0^R\psi)| + C(|w_0^R\psi|^{p_1} + |w_0^R\psi|^{p_2})]|s-1|w_y^R\psi dx \\ &= |s-1|\left[\int_{\Omega}|f(w_0^R\psi)|w_y^R dx + \int_{\Omega}C(|w_0^R\psi|^{p_1} + |w_0^R\psi|^{p_2})w_y^R dx\right] \\ &\leq |s-1|\int_{\Omega}C(|w_0^R|^{p_1} + |w_0^R|^{p_2})w_y^R dx \\ &+ |s-1|\int_{\Omega}C(|w_0^R|^{p_1} + |w_0^R|^{p_2})w_y^R dx \\ &\leq |s-1|C\int_{\mathbb{R}^N}|w_0^R|^{p_1}w_y^R + |w_0^R|^{p_2}w_y^R dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.6, temos

$$\int_{\Omega}|sf(w_0^R\psi) - f(sw_0^R\psi)|w_y^R\psi dx \leq C|s-1|O(\varepsilon_R) \leq C|s-1|\varepsilon_R, \qquad \forall \ s \in [0,b], y \in \partial B_2(y_0).$$

□

Nos próximos dois resultados iremos controlar a projeção sobre Nehari. Com elas, será possível construirmos funções que auxiliam na prova do teorema principal.

Proposição 1. *Existe $R_1 > 0$ e, para cada $R > R_1$, um número $\eta = \eta_R > 0$, $\eta_R = o_R(1)$ tal que*

$$I_V(T_{\lambda,y}^R U_{\lambda,y}^R) \leq 2c_\infty - \eta, \ \ \lambda \in [0,1], \ \ y \in \partial B_2(y_0).$$

Demonstração. Denotaremos, por simplicidade,

$$s := T_{\lambda,y}^R\lambda, \qquad t := T_{\lambda,y}^R(1-\lambda).$$

Sejam $s, t \in (0, T_0)$. Pelo Lema 1.10, se R é suficientemente grande, temos

$$I_V(sw_0^R\psi \ + \ tw_y^R\psi) = \frac{1}{2}\|sw_0^R\psi + tw_y^R\psi\|^2 - \int_{\Omega}F(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)|^2 + V(x)(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)^2]dx \\
&- \int_\Omega F(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla(sw_0^R\psi)|^2 + 2\nabla(sw_0^R\psi)\nabla(tw_y^R\psi) + |\nabla(tw_y^R\psi)|^2]dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega V(x)[(sw_0^R\psi)^2 + 2sw_0^R\psi tw_y^R\psi + (tw_y^R\psi)^2]dx \\
&- \int_\Omega F(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)dx \\
&= \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla(sw_0^R\psi)|^2dx + st\int_\Omega \nabla(sw_0^R\psi)\nabla(tw_y^R\psi)dx \\
&+ \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla(w_y^R\psi)|^2dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega V(x)(w_0^R\psi)^2dx + st\int_\Omega V(x)w_0^R\psi tw_y^R\psi dx \\
&+ \frac{t^2}{2}\int_\Omega V(x)(w_y^R\psi)^2dx - \int_\Omega F(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)dx \\
&= \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla(w_0^R\psi)|^2dx - \frac{s^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_0^R\psi)^2dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_0^R\psi)^2dx \\
&- \int_\Omega F(sw_0^R\psi)dx + \int_\Omega F(sw_0^R\psi)dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla(w_y^R\psi)|^2dx \\
&- \frac{t^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_y^R\psi)^2dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_y^R\psi)^2dx - \int_\Omega F(tw_y^R\psi)dx + \int_\Omega F(tw_y^R\psi)dx \\
&+ \frac{s^2}{2}\int_\Omega V(x)(w_0^R\psi)^2dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega V(x)(w_y^R\psi)^2dx \\
&+ st\int_\Omega \nabla(w_0^R\psi)\nabla(w_y^R\psi)dx + st\int_\Omega V_\infty w_0^R\psi w_y^R\psi dx - \int_\Omega F(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)dx \\
&- \int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx + \int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx \\
&- \int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx + \int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx \\
&- st\int_\Omega V_\infty w_0^R\psi w_y^R\psi dx + st\int_\Omega V_\infty w_0^R\psi w_y^R\psi dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla(w_0^R\psi)|^2dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_0^R\psi)^2dx - \int_\Omega F(w_0^R\psi)dx && (3.2)\\
&+ \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla(w_y^R\psi)|^2dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_y^R\psi)^2dx - \int_\Omega F(w_y^R\psi)dx && (3.3)\\
&+ \frac{s^2}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_0^R\psi)^2dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_y^R\psi)^2dx && (3.4)\\
&+ st\int_\Omega \nabla(w_0^R\psi)\nabla(w_y^R\psi)dx + st\int_\Omega V_\infty w_0^R\psi w_y^R\psi dx && (3.5)\\
&+ st\int_\Omega (V(x) - V_\infty)w_0^R\psi w_y^R\psi dx && (3.6)\\
&- \int_\Omega [F(sw_0^R\psi tw_y^R\psi)dx - F(sw_0^R\psi) - F(tw_y^R\psi) - f(w_0^R\psi)tw_y^R\psi && (3.7)\\
&- f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi]dx \\
&- \int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx - \int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx. && (3.8)
\end{aligned}
$$

Somando os termos da linha (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla(w_0^R\psi)|^2dx &+ \frac{s^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_0^R\psi)^2dx - \int_\Omega F(w_0^R\psi)dx = \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(sw_0^R)|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(sw_0^R)|^2dx \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V_\infty(sw_0^R)^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V_\infty(sw_0^R)^2dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N}F(sw_0^R)dx + \int_{\mathbb{R}^N}F(sw_0^R)dx \\
&+ \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla(w_0^R\psi)|^2dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega V_\infty(w_0^R\psi)^2dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N}F(sw_0^R\psi)dx \\
&= I_\infty(sw_0^R) + \frac{s^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(sw_0^R\psi)|^2 - |\nabla(w_0^R)|^2)dx \\
&+ \frac{s^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty(w_0^R\psi)^2 - V_\infty(w_0^R))dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}(F(sw_0^R) - F(sw_0^R\psi))dx \\
&= I_\infty(sw_0^R) + \frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}(0)}(|\nabla(w_0^R\psi)|^2 - |\nabla(w_0^R)|^2)dx \\
&+ \frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}^c(0)}(|\nabla(sw_0^R\psi)|^2 - |\nabla(w_0^R)|^2)dx \\
&+ \frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}(0)}(V_\infty(sw_0^R\psi)^2 - V_\infty(w_0^R))dx \\
&+ \frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}^c(0)}(V_\infty(sw_0^R\psi)^2 - V_\infty(w_0^R))dx \\
&+ \int_{B_{2K}(0)}(F(sw_0^R) - F(sw_0^R\psi))dx \\
&+ \int_{B_{2K}^c(0)}(F(sw_0^R) - F(sw_0^R\psi))dx \\
&= I_\infty(sw_0^R) + \frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}(0)}(|\nabla(w_0^R\psi)|^2 - |\nabla(w_0^R)|^2)dx \\
&+ \frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}(0)}(V_\infty(sw_0^R\psi)^2 - V_\infty(w_0^R))dx \\
&+ \int_{B_{2K}(0)}(F(sw_0^R) - F(sw_0^R\psi))dx.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.5 com $q = 2$ e pela equação (1.24), temos

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}(0)}(|\nabla(w_0^R\psi)|^2 &- |\nabla w_0^R|^2)dx + \frac{s^2}{2}\int_{B_{2K}(0)}(V_\infty(w_0^R\psi)^2 - V_\infty(w_0^R)^2)dx \\
&\le \frac{1}{2}CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R} \\
&= o(\varepsilon_R),
\end{aligned}$$

pois

$$\lim_{R\to\infty} \frac{CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}}{CR^{-\frac{N-1}{2}}e^{-2\sqrt{V_\infty}R}} = \lim_{R\to\infty} R^{-\frac{N-1}{2}} = 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio, existe $A(x) \in (0,1)$ tal que

$$\int_{B_{2K}(0)} (F(sw_0^R) - F(sw_0^R\psi))dx = \int_{B_{2K}(0)} f(sw_0^R + A(x)sw_0^R\psi)(sw_0^R - sw_0^R\psi)dx. \tag{3.9}$$

Dessa forma, aplicando a propriedade (f_2) e o Lema 1.5, temos

$$\begin{aligned}
(3.9) \quad &\leq \int_{B_{2K}(0)} f(sw_0^R + A(x)sw_0^R\psi)(1-\psi)sw_0^R)dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} C(|sw_0^R + A(x)sw_0^R|^{p_1} + |sw_0^R + A(x)sw_0^R|^{p_2})(sw_0^R)dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} C(|sw_0^R|^{p_1} + |A(x)sw_0^R|^{p_1} + |sw_0^R|^{p_2} + |A(x)sw_0^R|^{p_2})(sw_0^R)dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} C(|sw_0^R|^{p_1} + |sw_0^R|^{p_1} + |sw_0^R|^{p_2} + |sw_0^R|^{p_2})(sw_0^R)dx \\
&\leq \int_{B_{2K}(0)} C(|sw_0^R|^{p_1+1} + |sw_0^R|^{p_2+1})dx,
\end{aligned}$$

portanto

$$(3.2) = I_\infty(sw_0^R) + o(\varepsilon_R).$$

Como w_0^R é uma solução do problema limite (P_∞) e pelo Lema 1.1 item (c), temos $I_\infty(sw_0^R) \leq c_\infty$. De forma análoga obtemos a soma para a linha (3.3). Assim,

$$(3.2) + (3.3) \leq 2c_\infty + o(\varepsilon_R).$$

Pelo Lema 1.7, obtemos

$$\begin{aligned}
(3.4) + (3.6) \quad &= \frac{s^2}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_0^R\psi)^2dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w_y^R\psi)^2dx \\
&+ st\int_\Omega (V(x) - V_\infty)w_0^R\psi w_y^R\psi dx \\
&\leq CR^{-(N-1)}e^{-2\sqrt{V_\infty}R} \\
&= o(\varepsilon_R).
\end{aligned}$$

Agora aplicando o Lema 1.2 na equação (3.6), existe $0 < \nu < p_1 - 1$ tal que

$$\begin{aligned}
&- \int_\Omega [F(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi) - F(sw_0^R\psi) - F(tw_y^R\psi) - f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi - f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi]dx \\
&\leq \int_\Omega C_\rho(sw_0^R\psi + tw_y^R\psi)^{1+\frac{\nu}{2}}dx \\
&= C_\rho(st)^{1+\frac{\nu}{2}}\int_\Omega (w_0^R\psi w_y^R\psi)^{1+\frac{\nu}{2}}dx \\
&\leq C_\rho(st)^{1+\frac{\nu}{2}}\int_\Omega (w_0^R)^{1+\frac{\nu}{2}}(w_y^R)^{1+\frac{\nu}{2}}dx \\
&\leq CR^{-(\frac{N-2}{2})(1+\frac{\nu}{2})}e^{-2(1+\frac{\nu}{2})\sqrt{V_\infty}R} \\
&= o(\varepsilon_R).
\end{aligned}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
(3.5)+(3.8) &= st\int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R\psi)w_y^R\psi dx - \int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx - \int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx\\
&= \frac{st}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R\psi)w_y^R\psi dx + \frac{st}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R\psi)w_y^R\psi dx\\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx\\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx\\
&= \frac{t}{2}\int_\Omega [sf(w_0^R\psi) - f(sw_0^R\psi)]w_y^R\psi dx + \frac{s}{2}\int_\Omega [tf(w_0^R\psi) - f(tw_y^R\psi)w_0^R]dx\\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 3.3, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\frac{t}{2}\int_\Omega [sf(w_0^R\psi) - f(sw_0^R\psi)]w_y^R\psi dx + \frac{s}{2}\int_\Omega [tf(w_0^R\psi) - f(tw_0^R\psi)]w_y^R dx \le C(|s-1|+|t-1|)\varepsilon_R,
$$

para todo $s,t \in [0,T_0]$, $y \in \partial B_2(y_0)$ e R suficientemente grande. Além disso, pela equação (3.2), afirmamos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx &+ \frac{1}{2}\int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0^R)tw_y^R dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(tw_y^R)sw_0^R dx + o(\varepsilon_R).
\end{aligned}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx &= \frac{1}{2}\int_{B_{2K}(0)} f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx + \frac{1}{2}\int_{B_{2K}^c(0)} f(sw_0^R\psi)tw_y^R\psi dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{B_{2K}^c(0)} f(sw_0^R)tw_y^R dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0^R)tw_y^R dx + 0\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0^R)tw_y^R dx + o(\varepsilon_R). \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, temos

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega f(tw_y^R\psi)sw_0^R\psi dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(tw_y^R)sw_0^R dx + o(\varepsilon_R). \qquad (3.11)
$$

Combinando as equações (3.10) e (3.11) obtemos o resultado desejado. Pelo Lema 3.2, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0^R)tw_y^R dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(tw_y^R)sw_0^R dx \ge C_0\varepsilon_R,
$$

para todo $s,t \ge \frac{1}{2}$, $y \in \partial B_2(y_0)$ e R suficientemente grande. Observe que pelo Lema 1.10, se $\lambda = \frac{1}{2}$ resulta que $s,t \to 1$ quando $R \to \infty$. Com efeito,

$$
\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}T_{\lambda,y}^R = \frac{1}{2}2 = 1
$$

e

$$\lim_{R\to\infty}(1-\frac{1}{2})T^R_{\lambda,y} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}T^R_{\lambda,y} = \frac{1}{2}2 = 1.$$

Para $R_0 > 0$ suficientemente grande e $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ suficientemente pequeno, temos

$$C(|s-1|+|t-1|) \leq \frac{C_0}{2}.$$

Assim,

$$(3.5) + (3.8) \leq -C_0\varepsilon_R + \frac{C_0}{2}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R) = -\frac{C_0}{2}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R),$$

para todo $\lambda \in [\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta]$, $y \in \partial B_2(y_0)$ e $R > R_0$. Portanto,

$$I_V(sw_0^R + tw_y^R) \leq 2c_\infty - \frac{C_0}{2}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R), \tag{3.12}$$

para todo $\lambda \in [\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta]$, $y \in \partial B_2(y_0)$ e $R > R_0$.
Por outro lado, para todo $\lambda \in [0, \frac{1}{2}-\delta] \cup [\frac{1}{2}+\delta, 1]$, $y \in \partial B_2(y_0)$ e R suficientemente grande, se $T^R_{\lambda,y} \leq 2$, então $s = T^R_{\lambda,y} \in [0, 1-2\delta]$, pois

$$s = T^R_{\lambda,y}\lambda \leq 2\lambda \in 2[0, \frac{1}{2}-\delta] = [0, 1-2\delta]$$

ou $t = T^R_{\lambda,y}(1-\lambda) \in [0, 1-2\delta]$, pois

$$t = T^R_{\lambda,y}(1-\lambda) \leq 2(1-\lambda) \in 2[0, \frac{1}{2}-\delta] = [0, 1-2\delta].$$

Se $T^R_{\lambda,y} \geq 2$ e $\lambda \in [\frac{1}{2}+\delta, 1]$, então $s = T^R_{\lambda,y}\lambda \in [1+2\delta, \infty]$ ou $t = T^R_{\lambda,y}(1-\lambda) \in [1+2\delta, \infty]$. Com isso, s ou t pertencem ao conjunto $[0, 1-2\delta] \cup [0, \infty]$ e pelo Lema 1.1 item (c), temos $I_\infty(rw_0^R) = c_\infty$ e existe $\gamma \in (0, c_\infty)$ tal que

$$I_\infty(rw_0^R) \leq c_\infty - \gamma, \quad \forall\ r \in [0, 1-2\delta] \cup [0, \infty].$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(3.4) + ... + (3.8) &\leq o(\varepsilon_R) - \frac{C_0}{2}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R) \\
&= o(\varepsilon_R) - \frac{C_0}{2}\varepsilon_R \\
&= o(\varepsilon_R) + O(\varepsilon_R) \\
&= O(\varepsilon_R).
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_V(sw_0^R + tw_y^R) \leq 2c_\infty + o(\varepsilon_R) - \gamma + O(\varepsilon_R) = 2c_\infty - \gamma + O(\varepsilon_R). \tag{3.13}$$

Combinando as equações (3.12) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
I_V(sw_0^R + tw_y^R) &= I_V(T^R_{\lambda,y}\lambda w_0^R + T^R_{\lambda,y}(1-\lambda)w_y^R) \\
&= I_V(T^R_{\lambda,y}(\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R)) \\
&= I_V(T^R_{\lambda,y}U^R_{\lambda,y}) \\
&\leq 2c_\infty - O(\varepsilon_R) \\
&\leq 2c_\infty - o_R(1) \\
&= 2c_\infty - \eta.
\end{aligned}$$

□

Observação 10. *Note que* $\lambda > 2\sqrt{V_\infty}$ *em* (V_2) *é a menor constante se encontrarmos o limite superior no Lema 1.7 com decaimento exponencial de ordem* $e^{-2\sqrt{V_\infty}R}$.

Lema 3.4. *Para algum* $\delta > 0$, *existe* $R_2 > 0$ *tal que*

$$I_V(T^R_{\lambda,y}U^R_{\lambda,y}) < c_\infty + \delta,$$

para $\lambda = 0$ *e todo* $y \in \partial B_2(y_0)$ *e* $R \geq R_2$. *Em particular,* $c_V \leq c_\infty$.

Demonstração. Afirmamos que

$$I_V(T^R_{0,y}U^R_{0,y}) = I_\infty(T^R_{0,y}w^R_y\psi) + \frac{(T^R_{0,y})^2}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(w^R_y\psi)^2 dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
I_V(T^R_{0,y}U^R_{0,y}) &= \frac{1}{2}\|T^R_{0,y}w^R_y\psi\|^2 - \int_\Omega F(T^R_{0,y}w^R_y\psi)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla(T^R_{0,y}w^R_y\psi)|^2 + V(x)(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2]dx - \int_\Omega F(T^R_{0,y}w^R_y\psi)dx \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(T^R_{0,y}w^R_y\psi)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(T^R_{0,y}w^R_y\psi)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla(T^R_{0,y}w^R_y\psi)|^2 + V_\infty(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(T^R_{0,y}w^R_y\psi)dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx \\
&= \|T^R_{0,y}w^R_y\psi\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(T^R_{0,y}w^R_y\psi)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx \\
&= I_\infty(T^R_{0,y}w^R_y\psi) + \frac{(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2}{2}\int_\Omega (V(x) - V_\infty)(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx.
\end{aligned}$$

Note que da Proposição 1, temos

$$(3.2) = I_\infty(sw^R_0) + o(\varepsilon_R).$$

Assim,

$$I_V(T^R_{0,y}U^R_{0,y}) \leq I_\infty(T^R_{0,y}w^R_y\psi) + o(\varepsilon_R) + \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)(T^R_{0,y}w^R_y\psi)^2 dx.$$

Pelo Lema 1.1 item (c) e pelo Lema 1.7, concluímos que

$$\begin{aligned}
I_V(T^R_{0,y}U^R_{0,y}) &\leq \max_{s>0} I_\infty(sw^R_y\psi) + o_R(1) \\
&\leq c_\infty + o_R(1).
\end{aligned}$$

□

No próximo lema, utilizaremos algumas propriedades da aplicação baricentro β que podem ser encontradas de forma detalhada no Apêndice D.

Lema 3.5. *Se c_V não é atingido, então $c_V = c_\infty$ e existe $\delta > 0$ tal que*

$$\beta(u) \neq 0, \qquad \forall \ u \in \mathcal{N}_V \cap I_V^{c_\infty + \delta}$$

onde $I_V^{c_\infty+\delta} = \{u \in H_0^1(\Omega), I_V(u) \leq c_\infty + \delta\}$.

Demonstração. Se c_V não é atingido, então pelo Corolário 1, $c_V \geq c_\infty$ e pelo Lema 3.4, $c_V \leq c_\infty$. Logo, $c_V = c_\infty$. Por contradição, assumimos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $(v_k) \subset \mathcal{N}_V$ tal que $I_V(v_k) < c_V + \frac{1}{k}$ e $\beta(v_k) = 0$. Pelo Princípio de Ekeland, existe uma sequência (u_k) de $(PS)_d$ para I_V em $\mathcal{N}_V$ de nível $d = c_V$ tal que $\|u_k - v_k\| \to 0$. Pelos Lemas 2.1 e 2.4, passando a uma subsequência, temos que (u_k) é $(PS)_d$ limitada para I_V. Como c_V não é atingido, segue do Lema de Splitting que existe uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|y_k| \to \infty$ e $\|u_k - w(\cdot - y_k)\| \to 0$, onde w é uma solução radial *ground state* positiva ou negativa de (P_∞). Seja $\tilde{v}_k(x) := v_k(x + y_k)$. Observe que pela convergência forte de (u_k), concluímos que $\tilde{v}_k(x) = w(x)$. Usando a propriedade da aplicação baricentro, temos

$$-y_k = \beta(v_k) - y_k = \beta(v_k(\cdot + y_k)).$$

Segue da continuidade da aplicação baricentro que

$$\lim_{k\to\infty} \beta(\tilde{v}_k) = \beta(\lim_{k\to\infty} \tilde{v}_k) = \beta(w).$$

Como w é solução radial, então $\beta(w) = 0$ o que é uma contradição. $\square$

Construímos todas as ferramentas para aplicar um argumento topológico análogo ao encontrado em Clapp e Maia [13] para provar o resultado principal. Provaremos o Teorema principal desta dissertação.

Demonstração do Teorema 1.1. Se c_V é atingido para I_V em algum $u \in \mathcal{N}_V$, então o problema (P_V) possui uma solução u e pelo Lema 2.2, u é uma solução não trivial. De fato, como $c_V = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_V} I_V(u)$, existe uma sequência $(u_k) \subset \mathcal{N}_V$ e $u \in \mathcal{N}_V$ tal que

$$u_k \to u \quad \text{e} \quad I_V(u_k) \to I_V(u).$$

Pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe uma sequência $(v_k) \subset \mathcal{N}_V$ tal que

$$I_V(v_k) \to I_V(u) \quad \text{e} \quad I_V'(v_k) \to I_V'(u) = 0.$$

Logo, u é ponto crítico de I_V em $\mathcal{N}_V$. Como $\mathcal{N}_V$ é uma restrição natural, então u é ponto crítico em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, u é uma solução não trivial do problema (P_V).

Assumimos que c_V não é atingido. Segue do Lema 3.5 que $c_V = c_\infty$. Vamos mostrar que I_V tem um valor crítico em $(c_\infty, 2c_\infty)$. Pelo Lema 3.5, podemos fixar $\delta \in (0, \frac{c_\infty}{4})$ tal que

$$\beta(u) \neq 0, \qquad \forall \, u \in \mathcal{N}_V \cap I_V^{c_\infty+\delta}.$$

Pela Proposição 1 e pelo Lema 3.4, podemos escolher $R > 0$ suficientemente grande e com $\eta_R = \eta \in (0, \frac{c_\infty}{4})$ tal que

$$I_V(T_{\lambda,y}^R U_{\lambda,y}^R) \leq \begin{cases} 2c_\infty - \eta, \forall \lambda \in [0,1] \text{ e } \forall \ y \in \partial B_2(y_0), \\ c_\infty + \delta \text{ para } \lambda = 0 \text{ e } \forall \ y \in \partial B_2(y_0). \end{cases}$$

Para esse $R > 0$, defina

$$\alpha : B_2(y_0) \to \mathcal{N}_V \cap I_V^{2c_\infty - \eta} \text{ pondo } \alpha((1-\lambda)y + \lambda y_0) = T_{\lambda,y}^R U_{\lambda,y}^R$$

com $\lambda \in [0,1]$, $y \in \partial B_2(y_0)$.
Por contradição, assumimos que I_V não tem valor crítico em $(c_\infty, 2c_\infty)$. Como no Corolário 1, I_V satisfaz a condição de (PS) em $\mathcal{N}_V$ para todo nível em $(c_\infty, 2c_\infty)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\nabla_{\mathcal{N}_V} I_V(u)\| \geq \varepsilon, \forall u \in \mathcal{N}_V \cap I_V^{-1}[c_\infty + \delta, 2c_\infty - \eta].$$

Podemos aplicar o Lema da Deformação, isto é, existe uma aplicação contínua

$$\rho : \mathcal{N}_V \cap I_V^{2c_\infty - \eta} \to \mathcal{N}_V \cap I_V^{c_\infty + \delta}$$

tal que $\rho(u) = u$, $\forall u \in \mathcal{N}_V \cap I_V^{c_\infty+\delta}$. Defina

$$\Gamma = (\beta \circ \rho \circ \alpha) : B_2(y_0) \to \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema 3.5, $\Gamma(x) = (\beta \circ \rho \circ \alpha)(x) \neq 0$. Assim, a função $h : B_2(y_0) \to \partial B_2(0)$ dada por $h(x) = 2\frac{\Gamma(x)}{|\Gamma(x)|}$ é contínua, pois é uma composição de funções está bem definida. Além disso, se $y \in \partial B_2(y_0)$, então

$$\begin{aligned} \alpha(y) = T_{0,y}^R U_{0,y}^R &= T_{0,y}^R Z_{0,y}^R \psi \\ &= T_{0,y}^R [0.w_0^R + (1-0)w_y^R]\psi \\ &= T_{0,y}^R w_y^R \psi \in \mathcal{N}_V \cap I_V^{2c_\infty - \eta} \end{aligned}$$

e pela propriedade da função baricentro, temos

$$\begin{aligned} (\beta \circ \rho \circ \alpha)(y) = \beta(\rho(\alpha(y))) &= \beta(\rho(T_{0,y}^R U_{0,y}^R)) \\ &= \beta(T_{0,y}^R w_y^R \psi) \\ &= \beta(T_{0,y}^R (w(x - Ry))\psi) \\ &= \beta(T_{0,y}^R w\psi) + Ry = Ry. \end{aligned}$$

Considerando o homeomorfismo dado por

$$\tilde{h} : \partial B_2(0) \to \partial B_2(y_0), \qquad 2\frac{\Gamma(x)}{|\Gamma(x)|} \mapsto y,$$

podemos construir a aplicação

$$\tilde{h} \circ h : B_2(y_0) \to \partial B_2(y_0), \;\; \tilde{h}(h(y)) = y, \qquad \forall\, y \in \partial B_2(y_0)$$

que é contínua e possui ponto fixo. Mas essa aplicação não existe pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Logo, I_V tem um ponto crítico $u \in \mathcal{N}_V$ com $I_V(u) \in (c_\infty, 2c_\infty)$. Pelo Lema 2.3, u não muda de sinal e como f é ímpar, $-u$ é ainda uma solução do problema (P_V). Isto prova que (P_V) tem uma solução positiva. $\square$

Apêndice A

Resultados auxiliares de Análise Funcional

A.1 Teoria da Medida

A.1.1 Espaço Mensurável

O objetivo desta subseção é apresentar o Teorema da Convergência Monótona, o Lema de Fatou e o Teorema da Convergência Dominada. Para isso, introduziremos algumas definições e propriedades básicas da teoria de medida. Esta subseção foi baseada em Bartle [4] e Botelho [11].

Definição A.1. *Uma σ-álgebra no conjunto Ω é uma família Σ de subconjuntos de Ω que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset,\ \Omega \in \Sigma$;

(ii) *Se* $A \in \Sigma$, *então* $A^C := \Omega - A \in \Sigma$;

(iii) *Se* $A_n \in \Sigma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Neste caso, o par (Ω, Σ) é chamado de espaço mensurável. Cada elemento da σ-álgebra é chamado de conjunto mensurável.

Definição A.2. *Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω a interseção de todas as σ-álgebras que contém $\mathcal{F}$ é ainda uma σ-álgebra, chamada de σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$, e denotada por $\Sigma(\mathcal{F})$. Note que $\Sigma(\mathcal{F})$ é a menor σ-álgebra em Ω que contém $\mathcal{F}$. Quando (Ω, τ) é um espaço topológico, a σ-álgebra $\Sigma(\tau)$ é chamada de σ-álgebra de Borel de Ω denotada por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados de conjuntos de Borel ou borelianos.*

A.1.2 Funções Mensuráveis

Notação 1. *Denotaremos a reta estendida por* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definição A.3. *Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é Σ-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) > \alpha\}$ está em Σ.*

Observação 11. *Na definição de função mensurável poderíamos utilizar qualquer um dos conjuntos abaixo:*

(i) $\{x \in \Omega; f(x) \geq \alpha\}$;

(ii) $\{x \in \Omega; f(x) \leqslant \alpha\}$;

(iii) $\{x \in \Omega; f(x) < \alpha\}$.

Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ o espaço das funções mensuráveis.

Teorema A.1. *Sejam f, g funções em $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções $f + g$, cf, $f \cdot g$ e $|f|$ são mensuráveis.*

A.1.3 Medida

Definição A.4. *Uma medida no espaço mensurável (Ω, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(A) \geq 0$, *para todo* $A \in \Sigma$;

(iii) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ, então

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ é dita finita se $\mu(\Omega) < \infty$, é dita σ-finita se existem conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$ tais que $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. O termo (Ω, Σ, μ) é chamado espaço de medida.

Notação 2. *Os conjuntos $E \in \Sigma$ com a propriedade de $\mu(E) = 0$ são chamados de conjuntos de medida nula. Diremos que uma propriedade é q.t.p. se tal propriedade vale em E exceto em um conjunto de medida nula.*

A.1.4 Funções Integráveis

Notação 3. *Dada uma função f, denotaremos por f^+ a parte positiva de f e por f^- a parte negativa de f que serão definidas por:*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Além disso, temos que

$$f = f^+ - f^- \text{ e } |f| = f^+ + f^-.$$

Definição A.5. *O conjunto $L = L(\Omega, \Sigma, \mu)$ das funções integráveis a Lebesgue com respeito a medida μ consiste no conjunto de todas as funções mensuráveis f tais que as suas partes positiva e negativa possuem integral finita, isto é,*

$$L = L(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma); \int_{\Omega} f^+ d\mu < \infty \text{ e } \int_{\Omega} f^- d\mu < \infty\}.$$

Se $f \in L$, então sua integral com respeito a medida μ é definida por:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu.$$

Se $E \in \Sigma$, então a integral de f sobre E é definida por:

$$\int_E f d\mu = \int_E f \mathcal{X}_E d\mu = \int_E f^+_{\mathcal{X}_E} d\mu - \int_E f^-_{\mathcal{X}_E} d\mu.$$

Teorema A.2 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ uma sequência de funções integráveis tal que* *(i)* $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ...$; *q.t.p em* Ω;

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n < \infty$,

então $f_n(x)$ *converge em* Ω *para um limite finito que denotamos por f(x), a função f pertence a L e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Lema A.1 (Lema de Fatou)**.** *Seja* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ *uma sequência de funções integráveis tal que*

(i) para todo n, $f_n \geq 0$ *q.t.p.;*

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, *se* $\liminf_{n \to \infty} f_n(x) \leq +\infty$. *Então,* $f \in L$ *e*

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n(x) \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n.$$

Teorema A.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ *uma sequência de funções integráveis tal que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p., em que* f *é uma função mensurável;*

(ii) existe $g \in L$ *tal que para todo* n,

$$|f_n(x)| \leq g(x), q.t.p, \quad \forall\ x \in \Omega.$$

Então f *é integrável e, além disso,*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

A.2 Os espaços L^p

Nesta seção definiremos o Espaço L^p, estabeleceremos a Desigualdade de Hölder e alguns resultados de topologia fraca que tiverão bastante utilidade neste trabalho. Esta subseção foi baseada em Bartle [4] e Botelho [11].

A.2.1 Definições dos Espaços L^p

Definição A.6. *Definimos* $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, *com* $1 \leq p < \infty$, *o espaço de Banach das funções* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mensuráveis cuja potência* $|f|^p$ *é integrável em* Ω, *munido com a norma* $||f||_p = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$, *isto é,*

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{\textit{é mensurável e}}\ ||f||_p < \infty\}.$$

Por simplicidade, utilizaremos a notação $L^p(\Omega)$ para denotar o espaço $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Observação 12. *Quando* $p = 2$, $L^2(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com o produto escalar*

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) d\mu.$$

Definição A.7. *Para o caso $p = \infty$, definimos*

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e, } ||f||_{\infty} < \infty\}$$

com

$$\|f\|_{\infty} := \inf\{C : |f(x)| \leq C \ \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Definição A.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável a Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$, isto é,*

$$\int_K |f| dx < \infty.$$

O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$.

Notação 4. *Seja $1 \leq p < \infty$; denotamos por p' o expoente conjugado de p tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Teorema A.4 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam a, b números reais não negativos com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Teorema A.5 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam f e g funções mensuráveis. Se $fg \in L^1(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Agora faremos um estudo resumido sobre o dual do espaço L^p para introduzir o Teorema da Representação de Riesz.

Definição A.9. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que o funcional linear $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo, ou limitado, se:*

$$||\phi|| = \sup\{|\phi(x)|;\ ||x|| = 1\} < \infty.$$

Definição A.10. *O conjunto formado por todos os funcionais lineares contínuos definidos por $\phi : X \to \mathbb{R}$ será chamado de dual do espaço X e representado por X^*.*

Teorema A.6 (Representação de Riesz)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\phi \in (L^p(\Omega))^*$. Então existe uma única função $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\phi(f) = \int_{\Omega} uf d\mu, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, temos

$$||u||_{p'} = ||\phi||_{(L^p(\Omega))^*},$$

onde

$$||\phi||_{(L^p(\Omega))^*} = \sup\left\{\left| \int uf \ d\mu \right|;\ ||f||_{L^p(\Omega)} = 1\right\}.$$

A.3 Convergência fraca

Nesta seção vamos abordar brevemente a noção de convergência fraca. Os conteúdos aqui apresentados também foram baseados em Botelho [11].

Definição A.11. *A topologia fraca no espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E^*)$ é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E^*$.*

Definição A.12. *Seja (x_n) uma sequência em E. Dizemos que (x_n) converge fracamente para x quando $\varphi(x_n)$ converge para $\varphi(x)$ para todo $\varphi \in E^*$. Denotaremos a convergência fraca por $x_n \rightharpoonup x$.*

Observação 13. *Seja Ω um subconjunto aberto, limitado, suave de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$. A sequência $(u_n)_{n\geq 1} \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente para $u \in L^p(\Omega)$, isto é,*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad L^p(\Omega)$$

se

$$\int_\Omega u_n v\, dx \longrightarrow \int_\Omega uv\, dx, \qquad \forall\ v \in L^{p'}(\Omega).$$

Teorema A.7. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

Lema A.2. *Sejam E um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ funcionais lineares em E tais que $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$. Então, existem escalares $a_1, ..., a_n$ tais que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i$.*

A.4 Breve descrição do cálculo diferencial de funcionais em espaço de Banach

Esta seção tem como objetivo introduzir um lema que garante a diferenciabilidade do funcional I_V. Os conteúdos aqui apresentados foram baseados em Willem [25] e Kurdilla [19].

Definição A.13. *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ um funcional com $\Omega \subset X$ aberto. Dizemos que φ tem derivada de Gatêaux em $x \in \Omega$, se para todo $h \in X$ existe um funcional $T \in X^*$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x) - Th}{t} = 0. \tag{A.1}$$

Quando a derivada de Gatêaux em $x \in \Omega$ existe, ela é o único funcional linear T que satisfaz (A.1).

Notação 5. *Denotaremos a derivada de Gatêaux por $D\varphi(x)$.*

Definição A.14. *Sejam X um espaço de Banach e o funcional $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ com $\Omega \subset X$ aberto. Dizemos que φ tem derivada de Fréchet em $x \in \Omega$, se para todo $h \in X$ existe um funcional $T \in X^*$ tal que*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x) - Th}{\|h\|} = 0. \tag{A.2}$$

Quando a derivada de Fréchet em $x \in \Omega$ existe, ela é o único funcional linear T que satisfaz (A.2).

Notação 6. *Denotaremos a derivada de Fréchet por* $\varphi'(x)$.

Definição A.15. *Dizemos que* φ *é de classe* C^1 *em* Ω, *e neste caso escrevemos* $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, *se a aplicação derivada* $\varphi' : \Omega \to X^*$ *é contínua.*

Observação 14. (i) *Toda função constante em um aberto de um espaço de Banach é Fréchet-diferenciável e tem derivada nula.*
(ii) *Sejam* H *um espaço de Hilbert e*

$$\varphi : H \to \mathbb{R} \text{ com } \varphi(x) = \|x\|^2.$$

Então, φ *é Fréchet-diferenciável e* $\varphi'(x)(h) = 2 < x, h >$ *para todos* $x, h \in H$.

Para o próximo lema considere inicialmente os seguintes espaços normados $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ e $L^p(\Omega) + L^q(\Omega)$. Estes espaços são munidos com as seguintes normas respectivamente

$$\|u\|_{p \bigwedge q} := \|u\|_p + \|u\|_q$$

e

$$\|u\|_{p \bigvee q} := \inf\{\|v\|_p + \|w\|_q : v \in L^p(\Omega), w \in L^q(\Omega), u = v + w\}.$$

Lema A.3. *Suponhamos que* $1 \leq p,\ q, r, s < \infty$, $f \in C(\mathbb{R})$ *e* $|f(u)| \leq c(|u|^{p/r} + |u|^{q/s})$. *Então, para todo* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $f(u) \in L^r(\Omega) + L^s(\Omega)$ *o operador*

$$\begin{array}{rcl} A : L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) & \to & L^r(\Omega) + L^s(\Omega) \\ u & \mapsto & f(u) \end{array}$$

é contínuo.

Lema A.4. *Considere*

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx,$$

em que

$$F(u) = \int_0^u f(t) dt.$$

Suponhamos que $f \in C(\mathbb{R})$, $|f(u)| \leq C(|u|^{p_1 - 1} + |u|^{p_2 - 1})$ *com* $1 < p_1 \leq p_2 < 2^* - 1$ *e* $N \geq 3$. *Então, o funcional* ψ *é de classe* $\mathcal{C}^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *e*

$$< \psi'(u), h >= \int_{\mathbb{R}^N} f(u) h dx.$$

Demonstração. Vamos mostrar a existência e continuidade da derivada de Gatêaux. Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in [0, 1]$. Considere

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ pondo } g(s) = F(u(x) + sth(x)).$$

Note que

$$g(0) = F(u(x)),$$

$$g(1) = F(u(x) + th(x))$$

e

$$g'(s) = f(u(x) + sth(x)) th(x).$$

Segue do Teorema do Valor Médio que existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$\frac{g(1) - g(0)}{t} = \frac{F(u(x) + th(x)) - F(u(x))}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(u(x)+\lambda sth(x))th(x)}{t}\\
&= f(u(x)+\lambda sth(x))h(x).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{|F(u(x)+th(x))-F(u(x))|}{t} &= |f(u(x)+\lambda sth(x))h(x)|\\
&= |f(u(x)+\lambda sth(x))||h(x)|\\
&\leq C(|u(x)+\lambda th(x)|^{p_1-1}+|u(x)+\lambda th(x)|^{p_2-1})|h(x)|\\
&\leq C(2^{p_1-1}(|u(x)|^{p_1-1}+|\lambda th(x)|^{p_1-1})\\
&+ 2^{p_2-1}(|u(x)|^{p_2-1}+|\lambda th(x)|^{p_2-1}))|h(x)|\\
&\leq C(2^{p_1-1}(|u(x)|^{p_1-1}+|h(x)|^{p_1-1})\\
&+ 2^{p_2-1}(|u(x)|^{p_2-1}+|h(x)|^{p_2-1}))|h(x)|\\
&\leq C(|u(x)|^{p_1-1}|h(x)|+|h(x)|^{p_1}\\
&+ |u(x)|^{p_2-1}|h(x)|+|h(x)|^{p_2}).
\end{aligned}
$$

Considere

$$
p(x)=C(|u(x)|^{p_1-1}|h(x)|+|h(x)|^{p_1}+|u(x)|^{p_2-1}|h(x)|+|h(x)|^{p_2}).
$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{p_1-v1}|h(x)|dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}(|u(x)|^{p_1-1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}dx)^{\frac{p_1-1}{p_1}}(\int_{\mathbb{R}^N}|h(x)|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{p_1}dx\right)^{\frac{p_1-1}{p_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h(x)|_1^p dx\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \|u\|_{p_1}^{p_1-1}\|h\|_{p_1}. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{p_2-1}|h(x)|dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}(|u(x)|^{p_2-1})^{\frac{p_2}{p_2-1}}dx\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{1}{p_2}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h(x)|_2^p dx\right)^{\frac{1}{p_2}}\\
&= \|u\|_{p_2}^{p_2-1}\|h\|_{p_2}. \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

Então, usando (A.3), (A.4) e a imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}p(x)dx &= C\int_{\mathbb{R}^N}(|u(x)|^{p_1-1}|h(x)|+|h(x)|^{p_1}+|u(x)|^{p_2-1}|h(x)|+|h(x)|^{p_2})dx\\
&\leq C(\|u\|_{p_1}^{p_1-1}\|h\|_{p_1}+\|h\|_{p_1}^{p_1}+\|u\|_{p_2}^{p_2-1}\|h\|_{p_2}+\|h\|_{p_2}^{p_2})<\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, $p(x)\in L^1$. Pelo o Teorema do Valor Médio e pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$
\begin{aligned}
<\psi'(u),h> &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi(u+th(x))-\psi(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}F(u+th)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(F(u+th)-F(u))}{t}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u+th)th}{t}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0}\frac{f(u+th)th}{t}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx.
\end{aligned}
$$

Agora provaremos a continuidade de ψ'. Seja $u_k \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ quando $p \in [2, 2^*]$, então $u_n \to u$ em $L^{p_1} \cap L^{p_2}$. Usando o Lema (A.2), concluímos que $p = p_1$, $r = \frac{p_1}{p_1-1}$, $q = p_2$ e $s = \frac{p_2}{p_2-1}$. Logo, $f(u)$ é contínua em $L^{\frac{p_1}{p_1-1}} + L^{\frac{p_2}{p_2-1}}$. Usando a Desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, obtemos

$$
\begin{aligned}
|<\psi'(u_n)-\psi'(u),h>| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)hdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n)-f(u))hdx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)hdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx\right| \\
&\leq C\|f(u_n)-f(u)\|_{p\bigvee q}\|h\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$
|<\psi'(u_n)-\psi'(u),h>| \to 0.
$$

Portanto, ψ é diferenciável. $\square$

Apêndice B

Derivada Fraca e Espaço de Sobolev

O enfoque deste Apêndice é definir Derivada Fraca, Espaço de Sobolev e introduzir algumas de suas propriedades. Esta seção foi baseada em Evans [15].

B.1 Derivada Fraca

Notação 7. *Denotaremos por $C^{\infty}(\Omega)$ o conjunto das funções diferenciáveis.*

Definição B.1. *O suporte da função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dado por*

$$supp(f) := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Uma função f é dita ter suporte compacto se seu suporte é compacto para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e, o suporte é compacto se, e somente se, for limitado.

Definição B.2. *Definimos por $C_0^{\infty}(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é compacto. Denominamos a função $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ de função teste.*

Definição B.3. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx, \forall\, \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Observação 15. *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

B.1.1 Propriedades

Teorema B.1. *Se $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ então*
(i) $D^{\alpha}u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$ e $D^{\beta}(D^{\alpha}u) = D^{\alpha+\beta}u$ sempre que $|\beta| + |\alpha| \leq k$;
(ii) $D^{\alpha}(\lambda u + \mu v) = \lambda D^{\alpha}u + \mu D^{\alpha}v$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
(iii) Se $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ é um aberto, então $u \in W^{k,p}(\tilde{\Omega})$.

B.1.2 Espaço de Sobolev

Definição B.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existe a derivada $D^{\alpha}u$ para todo multi-índice $|\alpha| \leq k$ e pertence ao espaço $L^p(\Omega)$.*

Na definição acima, $D^\alpha u$ denota a derivada no sentido fraco.

Teorema B.2. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a seguinte norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & se\ p = \infty. \end{cases}$$

Em particular, o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema B.3. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$.*

Notação 8. *Para $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega)$ para indicar o espaço $W^{k,2}(\Omega)$.*

Definição B.5. *O espaço*

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ para\ i \in \{1, ..., n\}\}$$

com o produto interno

$$< u, v >:= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx$$

e com a norma correspondente

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Definição B.6. *Se $1 \leq p < N$, o expoente crítico de Sobolev é dado por*

$$p^* = \frac{Np}{N - p}.$$

B.1.3 Imersão de Sobolev

Definição B.7. *Sejam X, Y espaços normados tais que $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y, e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, quando a aplicação inclusão $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x$, é contínua, e*

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, u \in X\ para\ alguma\ constante\ C\ .$$

Teorema B.4. *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \qquad 2 \leq p < \infty, \quad N = 1, 2,$$
$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \qquad 2 \leq p \leq 2^*, \quad N \geq 3.$$

Definição B.8. *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso compactamente em Y, e escrevemos $X \subset\subset Y$, se:*

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$, $u \in X$ para alguma constante C;

(ii) cada sequência limitada em X é precompacta em Y.

Mais precisamente, a condição (ii) significa que se (u_k) é uma sequência em X com $\sup_k \|u_k\|_X < \infty$, então alguma subsequência $(\tilde{u}_k) \subseteq (u_k)$ converge em Y para algum limite $u \in Y$.

Teorema B.5. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1, então a seguinte imersão é compacta:*

$$H^1(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega), \qquad 1 \leq p \leq 2^*.$$

Apêndice C

Resultados Auxiliares de Métodos Variacionais

Neste Apêndice introduziremos a sequência de Palais-Smale, apresentaremos o Lema de Lions, o Princípio de Ekeland e o Lema da Deformação Quantitativo que nos ajudaram a resolver a falta de compacidade do problema (P_V) no domínio exterior. O Lema da Deformação Quantitativo também foi utilizado na prova do teorema principal. Esta seção foi baseada em Willem [25].

Definição C.1. *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$, um funcional de classe C^1. Suponha que existam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_k) \subset X$ tais que*

$$I(u_k) \to c \quad e \quad \|I'(u_k)\| \to 0,$$

então dizemos que (u_k) é uma sequência Palais - Smale no nível c para I, ou de forma abreviada, (u_k) é uma sequência de $(PS)_c$ para I. O funcional I satisfaz a condição de Palais - Smale no nível c quando toda sequência $(PS)_c$ para I possui uma subsequência convergente.

Lema C.1 (Lema de Lions)**.** *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $(u_k)_k$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_k|^q dx \to 0, k \to \infty$$

então $u_k \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Lema C.2 (Lema da Deformação Quantitativo)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $S \subset X$, $\delta > 0$ e $S_\delta = \{u \in X : dist(u, S) \leq \delta\}$. Sejam ainda $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$\|I'(u)\|_{X^*} \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}, \forall u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta},$$

em que $I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta} = \{v \in X : c - 2\varepsilon \leq I(v) \leq c + 2\varepsilon\}$. Então existe $\eta : [0, 1] \times X \to X$ contínua tal que para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$, valem

i) $\eta(0, u) = u$;

ii) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

iii) $\eta(1, I^{c+\varepsilon} \cap S) \subset (I^{c-\varepsilon} \cap S_\delta)$.

Lema C.3 (Princípio de Ekeland)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ limitado inferiormente e $\varepsilon, \delta > 0$. Se*

$$\varphi(v) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon,$$

existe $u \in X$ tal que

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + 2\varepsilon, \qquad \|\varphi'(u)\| \leq \frac{8\varepsilon}{\delta} \text{ e } \|v - u\| \leq 2\delta.$$

C.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

O objetivo desta seção é enunciar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Os resultados apresentados foram baseados em Willem [25].

Notação 9. *Denote a bola unitária em $\mathbb{R}^N$ por $B^N := \overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 1\}$ e a esfera unitária (a fronteira da bola unitária) por $\mathbb{S}^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| = 1\} = \partial B^N$.*

Definição C.2. *Uma retração de um espaço topológico X em um subespaço Y é uma aplicação contínua $r : X \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.*

Exemplo C.1. *A aplicação $\varphi : \overline{B_1(0)} \backslash \{0\} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\varphi(x) = \frac{x}{|x|}$ é uma retração.*

Teorema C.1 (Teorema da Não - Retração)**.** *Não há retração contínua $r : B^N \to \mathbb{S}^{N-1}$.*

Teorema C.2 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer's)**.** *Toda aplicação $T : B^N \to B^N$ tem um ponto fixo.*

Apêndice D

Resultados A

D.1 Variedade Suave e Grupo de Lie

Nesta seção apresentaremos de forma breve a definição de Variedade Suave e Grupo de Lie com o objetivo de desenvolvermos com maior exatidão a próxima seção. Esta seção foi baseada em Biliotti [9] e Lee [20].

Sejam $\mathbb{H}$ um espaço de Banach e $\mathcal{M}$ um espaço topológico. Uma estrutura diferenciável de classe C^k em $\mathcal{M}$, modelada em $\mathbb{H}$, é uma família $\mathcal{D} = \{(\Omega_i; \phi); i \in I\}$ onde:

i) Ω_i é um aberto de $\mathbb{H}$, $\phi_i(\Omega_i)$ é um aberto de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M} = \cup_{i\in I}\phi_i(\Omega_i)$;

ii) cada $\phi_i : \Omega_i \to \mathcal{M}$ é um homeomorfismo sobre um aberto $\phi_i(\Omega_i)$ e, para cada $i, j \in I$ com $\phi_i(\Omega_i) \cap \phi_j(\Omega_j) \neq \emptyset$, as aplicações $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ são de classe C^k;

iii) $\mathcal{D}$ é máximo em relação as condições acima.

Definição D.1. *Uma variedade diferenciável de classe C^k modelada em $\mathbb{H}$; é um par $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$, onde:*

i) *$\mathcal{M}$ é um espaço topológico de Hausdorff e paracompacto;*

ii) *$\mathcal{D}$ é uma estrutura diferenciável de classe C^k modelada em $\mathbb{H}$.*

Além disso, se $\mathbb{H}$ é um espaço de Hilbert, então diremos que $\mathcal{M}$ é uma variedade Hilbertiana de classe C^k.

Definição D.2. *Um grupo de Lie é uma variedade suave G que é ainda um grupo no sentido algébrico, com a propriedade de que a aplicação de multiplicação $m : G\times G \to G$ e a aplicação inversa $i : G \to G$, dada por*

$$m(g, h) = gh, \quad i(g) = g^{-1},$$

são ambas suaves.

D.2 Aplicação Baricentro Generalizada no Espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$

O objetivo desta seção é fazer um estudo resumido de uma aplicação no espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$ cujas propriedades nos auxiliaram a mostrar a existência de uma solução fraca positiva do problema (P_V). Esta seção foi baseada em Bartsch e Weth [5] e Lee [20].

Notação 10. $O(N) = \{A \in M(N \times N); A^T = A^{-1}\}$.

Definição D.3. *Seja G é um grupo e M é um conjunto. Uma ação a esquerda de G em M é uma aplicação $G \times M \to M$, escrevemos $(g, p) \mapsto g * p$ satisfazendo*

$$g_1 * (g_2 * p) = (g_1 g_2) * p, \forall g_1, g_2 \in G \text{ e } p \in M$$

e

$$e * p = p, \forall p \in M$$

onde e é o elemento neutro em G.

Definição D.4. *Sejam G um grupo de Lie e M, N variedades suaves com G- ações suaves a esquerda ou a direita. A aplicação $F : M \to N$ é dita equivariante com respeito a G-ações se para cada $g \in G$,*

$$F(g * p) = g * F(p) \text{ (ação a esquerda)},$$

$$F(p * g) = F(p) * g \text{ (ação a direita)}.$$

Seja $v \in \mathbb{R}^N$ e considere a translação $\tau_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $\tau_v(x) = x + v$. O grupo de isometrias de $\mathbb{R}^N$ é definido por

$$G = \{\tau_v \circ A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N; v \in \mathbb{R}^N, A \in O(N)\}.$$

Uma ação a esquerda em $\mathbb{R}^N$ induz a uma ação no espaço de aplicações $\mathbb{R}^N \to M$, em que M é um subconjunto qualquer. Assim, $g * u := u \circ g^{-1}$ para $u : \mathbb{R}^N \to M$ e $g \in G$. Explicitamente isso significa que

$$(g * u)(x) = u \circ (A^{-1}(x - v)),$$

pois

$$\begin{aligned} (g * u)(x) &= (u \circ g^{-1})(x) \\ &= (u \circ (\tau_v \circ A)^{-1})(x) \\ &= (u \circ (A^{-1}(\tau^{-1}(x)))) \\ &= (u \circ (A^{-1}(x - v))). \end{aligned}$$

Definição D.5. *Seja $\beta : L^p(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^N$. Dizemos que β é a aplicação baricentro generalizada em $L^p(\mathbb{R}^N)$ se β é contínua e G-equivariante, isto é, $\beta(g * u) = g(\beta(u))$, para todo $g \in G$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Observação 16. *Para $b \in \mathbb{R}^N$, $A \in O(N)$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$, a definição anterior implica que*

i) $\beta(u(x - v)) = \beta(u(x)) + v$;

ii) $\beta(u \circ A^{-1}) = A(\beta(u))$.

Para provar (i), basta considerar $A = I$ e para provar (ii), basta considerar $v = 0$, isto é, $\tau_v = I$.

Portanto, para uma função par, especificamente uma função radial $u \in L^p(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$, temos que $\beta(u) = 0$. De fato, sendo u uma função radial, então para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\beta(u(x)) = \beta(u(|x|)) \text{ e } \beta(u(-x)) = \beta(u(|x|)).$$

Considere $A = -I$, então

$$\beta(u(x)) = \beta(u(-x)) = \beta(u(Ax)) = A^{-1}(\beta(u(x))) = -\beta(u(x)) \implies \beta(u(x)) = 0.$$

Exemplo D.1 (veja Cerami e Passaseo [12]). *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. Defina a aplicação*

$$\mu(u)(x) = \frac{1}{|B_1(x)|}\int_{B_1(x)} |u(y)|dy, \ \ \mu(u) \in L^\infty \cap C^0(0,+\infty),$$

$$\tilde{u}(x) = \left[\mu(u)(x) - \frac{\|\mu(u)\|_\infty}{2}\right]^+, \ \ \tilde{u} \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Então, o baricentro da função $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ dada por

$$\beta(u) = \frac{1}{\|\tilde{u}\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} x\tilde{u}(x)dx$$

é contínua e satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\beta(u(x-y)) = \beta(u) + y \ \forall\, y \in \mathbb{R}^N$,

ii) $\beta(Tu) = \beta(u) \ \forall\, T > 0$.

A partir de agora, os resultados apresentados foram baseados respectivamente em Serrin e Tang [23], Gidas, Ni e Nirenberg [17], Berestycki e Lions [8] e Biliotti [9].

Consideremos a equação elíptica quasilinear

(D.1) $$\Delta_m u + f(u) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, n > m > 1,$$

em que $\Delta_m u = div(|Du|^{m-2}Du)$ é o operador Laplace degenerado.

Teorema D.1. *A equação (D.1) admite no máximo uma solução ground states se, para algum $b > 0$,*

i) *f é contínua em $(0,\infty)$, com $f(u) \leq 0$ e $f(u) > 0$ para $u > b$;*

ii) *$f \in C^1(b,\infty)$, com $g(u) = uf'(u)/f(u)$ é não crescente em (b,∞).*

Considere o problema

(D.2) $$\Delta u + m^2 u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, n \geq 2, m > 0.$$

Proposição D.1. *Seja $u(x) > 0$ uma solução de classe C^2 de (D.2) tendendo para zero no infinito e assumimos que $g(u) = O(u^\alpha)$ para algum $\alpha > 1$ próximo de $u = 0$. Então,*

$$u(x), |\nabla u(x)| = O(e^{-|x|}/|x|^{\frac{N-1}{2}}) \text{ no infinito.}$$

Considere o problema

(D.3) $$-\Delta u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N), u \neq 0.$$

A função g satisfaz as seguintes condições:

i)

$$-\infty < \liminf_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} \leq \lim_{s\to 0^+}\sup \frac{g(s)}{s} = -m < 0;$$

ii)

$$-\infty \leq \limsup_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s^l} \leq 0, \text{ em que } l = \frac{N+2}{N-2};$$

iii) Existe $\alpha > 0$ tal que $G(\alpha) = \int_0^\alpha g(s)ds > 0$.

Teorema D.2. *Suponhamos que $N \geq 3$ e que g satisfaz as condições de i) a iii). Então o problema (D.3) tem uma solução u tal que*

i) $u > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$*;*

ii) u *é esfericamente simétrica, isto é,* $u(x) = u(r)$*, onde* $r = |x|$ *e* u *é decrescente com respeito a* r*;*

iii) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$*;*

iv) u *e a sua derivada de ordem 2 tem decaimento exponencial no infinito:*

$$|D^\alpha u(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, x \in \mathbb{R}^N$$

para algum C*,* $\delta > 0$ *e* $|\alpha| \leq 2$*.*

Teorema D.3. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades diferenciáveis de classe C^k modeladas em H^1 e H^2 respectivamente e seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação de classe C^k. Dado $y \in \mathcal{N}$ se, para cada $p \in f^{-1}(y)$, o diferencial de f no ponto p é sobrejetor e seu núcleo é o complemento em $T_p\mathcal{M}$, então $\mathcal{Z} = f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}$ de classe C^k e o seu espaço tangente é dado por*

$$T_p\mathcal{M} = ker(df_p)$$

para cada $p \in \mathcal{Z}$*.*

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A., Malchiodi, A. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambrigde studies in advanced mathematics, Cambrigde University Press, 2007.

[2] Bahri A., Li, Y.Y., *On a min-max procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field equations in* $\mathbb{R}^N$, Rev. Mat. Iberoamericana 6, no. 1/2 (2013), 751–779.

[3] Bahri A., P.L. Lions, *On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, 14, no. 3 (1997), 365–413.

[4] Bartle, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley Sons, 2014.

[5] Bartsch, T., Weth, T., *Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, 22, no. 3 (2005), 259–281.

[6] Benci V., Cerami G., *Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems in Exterior Domains*, Arch. Rational Mech. Anal., 99(4) (1987), 283–300.

[7] Berestycki, H., Gallouet, T., Kavian O., *Equations de champs scalaires euclidiens nonlineaires dans le plan*, C. R. Math. Acad. Sci, 297(5) (1983), 307–310.

[8] Berestycki, H., Lions, P. L., *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal., 82 (1983), 313-345.

[9] Biliotti, L., *Alguns Aspectos da Geometria Riernanniana das Variedades de Hilbert*, Unicamp, 2002.

[10] Breziz, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC 2011.*

[11] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, SBM, 2012.

[12] Cerami G., Passaseo D, *Existence and multiplicity results for semi linear elliptic dirichlet problems in exterior domains*, Nonlinear Analysis TMA 24, no.11, (1995), 1533–1547.

[13] Clapp, M., Maia, L. A., *A positive bound state for an asymptotically linear or superlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equation, 260 (2016), 3173-3192.

[14] Coffman, C. V., Marcus M., *Superlinear elliptic Dirichlet problems in almost spherically symmetric exterior domains*, Arch Rational Mech. Anal.,96 1986, 167–196.

[15] Evans, L. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2ª Ed., 2010.

[16] Évéquoz, G., Weth, T., *Entire solutions to nonlinear scalar field equations with indefinite linear part*, Adv. Nonlinear Sturd., 12 (2012), 281-314.

[17] Gidas, B., Ni, W., Nirenberg L., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a (1981), 369–402.

[18] Khatib, A., Maia, L. A., *A positive bound state for an asymptotically linear or superlinear Schödinger equation in exterior domaine*, Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2018.

[19] Kurdila, A. J., Zabarankin, M. *Convex Functional Analysis*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser.

[20] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds.* Springer, 2001.

[21] Maia L., A., Pellacci, B., *Positive solutions for asymptotically linear problems in exterior domains*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, (2016), 1-32.

[22] Noris, B., Verzini G., *A remark on natural constraints invariational methods and an application to superlinear Schrödinger systems,* J. diferential equations 254, no.3, (2013), 1529–1547.

[23] Serrin J., Tang M., *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., 49(3) (2000), 897–923.

[24] Stuart, C., Zhou, H. S., *A Variational Problem Related to Self-trapping of an Electromagnetic Field,* Math. Meth. Appl. Sci. 19, (1996), 1397-1407.

[25] Willem, M.,*Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equattions and Their Applications.v. 24. Birkhäuser.