

Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Subvariedades Biharmônicas do Espaço Projetivo Quaterniônico

Clebes do Nascimento Brandão

Manaus-AM
Dezembro/2019

Subvariedades Biharmônicas do Espaço Projetivo Quaterniônico

por

Clebes do Nascimento Brandão

sob orientação do

Professor Dr. José Nazareno Vieira Gomes

e coorientação do

Professor Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Manaus-AM

Dezembro/2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

B821s Brandão, Clebes do Nascimento
Subvariedades Biharmônicas do Espaço Projetivo Quaterniônico /
Clebes do Nascimento Brandão. 2019
55 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Coorientador: Renato de Azevedo Tribuzy
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Subvariedades biharmônicas. 2. Espaço projetivo
quaterniônico. 3. Fibrção de Hopf quaterniônica. 4. Estabilidade. I.
Gomes, José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do
Amazonas III. Título

Clebes do Nascimento Brandão

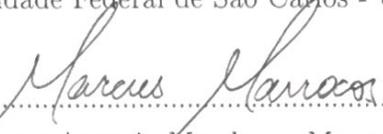
Subvariedades Biharmônicas do Espaço Projetivo Quaterniônico

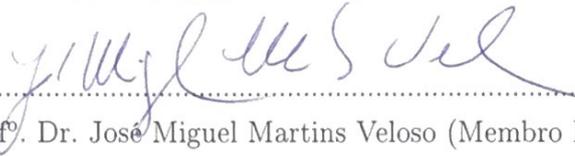
Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovado em 06 de Dezembro de 2019.

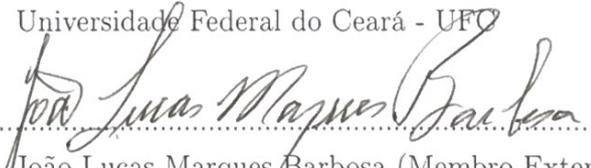
BANCA EXAMINADORA


.....
Prof^o. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar


.....
Prof^o. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos (Membro)
Universidade Federal do ABC - UFABC


.....
Prof^o. Dr. José Miguel Martins Veloso (Membro Externo)
Universidade Federal do Pará - UFPA


.....
Prof^o. Dr. Abdênago Alves de Barros (Membro Externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC


.....
Prof^o. Dr. João Lucas Marques Barbosa (Membro Externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC

*Dedico este trabalho ao meu avô Augusto Canidé do
Nascimento, o seu Socilho (In Memoriam)*

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

Ao Deus e Pai de nosso Senhor e Salvador Jesus Cristo por me permitir mais esta conquista, abençoando-me com saúde, proteção, sabedoria e força de vontade para vencer cada etapa desta jornada.

À minha esposa Deyneanne e a meu filho Levi pelo companheirismo e por suportarem as minhas impaciências involuntárias, bem como por entenderem minhas ausências de corpo e muitas das vezes de mente.

À minha mãe Odete, meu padrasto Ilásio, meus irmãos Renã, Renata, Irla e Elaine e minhas sobrinhas Heloísa e Maitê (sou um tio coruja) que mais uma vez me serviram de inspiração. Agradeço pela confiança a mim depositada, pelos incentivos e apoio incondicional.

Aos amigos e parceiros de trabalho da Universidade Federal do Acre - UFAC pelo apoio e por serem prestativos em todos os momentos que foram requisitados. Espero que não haja ciúmes, mas gostaria de representá-los citando o nome da Janiere, técnica administrativa do CCET (Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas).

Aos amigos da turma de doutorado, Adrian, Abraão, Andrea, Manoel e Airton, pelos momentos agradáveis e de descontração que compartilhamos e, principalmente, nos momentos de estudo. Vocês foram de grande importância em todas as etapas de meu curso, obrigado pela companhia nos momentos.

Agradeço ao professor José Nazareno Vieira Gomes e ao professor Renato de Azevedo Tribuzy pela orientação e co-orientação de meu trabalho, respectivamente. Agradeço principalmente por que com ambos eu aprendi não apenas matemática, mas ensinamentos que levarei comigo a vida toda. Quem os conhece sabe que ambos dispensam comentários.

Aos membros da banca examinadora, professores doutores José Nazareno Vieira Gomes, Marcus Antonio Mendonça Marrocos, José Miguel Martins Veloso, Abdênago Alves de Barros e João Lucas Marques Barbosa pelas sugestões dadas para melhoria desta tese.

A todos, meu muito obrigado!

”Now faith is the substance of things hoped for, the evidence of things not seen.

For by it the elders obtained testimony.

By faith we understand that the worlds by the word of God were created, so that what is seen was not made than is apparent.”

”ORA, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam, e a prova das coisas que se não vêem.

Porque por ela os antigos alcançaram testemunho.

Pela fé entendemos que os mundos pela palavra de Deus foram criados; de maneira que aquilo que se vê não foi feito do que é aparente.”

*Holy Bible
Bíblia Sagrada*

Resumo

A presente tese é dedicada ao estudo das subvariedades biharmônicas nos espaços forma quaterniônicos. Após dar a condição de biharmonicidade para subvariedades destes espaços, estudamos diferentes casos particulares para os quais obtemos estimativas de curvatura. Encontramos a relação entre o campo de bitensão da aplicação de inclusão de uma subvariedade do espaço projetivo quaterniônico de dimensão quaterniônica n e o campo de bitensão da inclusão de seu correspondente tubo de Hopf na esfera unitária de dimensão $4n+3$. Estudamos sobre subvariedades com curvatura média paralela e pseudo-umbílicas biharmônicas do espaço projetivo quaterniônico e obtivemos alguns resultados de estabilidade deste tipo de subvariedade.

Palavras-chave: Subvariedades biharmônicas; Espaço projetivo quaterniônico; Fibração de Hopf quaterniônica. Estabilidade.

Abstract

The present thesis is devoted to the study of biharmonic submanifolds in quaternionic space forms. After giving the biharmonicity conditions for submanifolds in these spaces, we study different particular cases for which we obtain curvature estimates. We find the relation between the bitension field of the inclusion of a submanifold in the n -dimensional quaternionic projective space and the bitension field of the inclusion of the corresponding Hopf-tube in the unit sphere of dimension $4n+3$. We studied biharmonic with parallel mean curvature and pseudo-umbilicas submanifolds of the projective quaternionic space and we obtained some stability results for this type of submanifold.

Keywords: Biharmonic Submanifolds; quaternionic projective space; quaternionic Hopf fibration. Stability.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 Fibrados Riemannianos	6
1.2 O campo de tensão e aplicações harmônicas	10
1.3 O campo de bitensão e aplicações biharmônicas	12
1.4 Variedades Kähler quaterniônicas e suas subvariedades	14
1.5 Variedades 3-Sasakianas	15
1.6 O espaço projetivo quaterniônico	16
2 Subvariedades Biharmônicas dos Espaços Forma Quaterniônicos	19
2.1 Espaços forma quaterniônicos	19
2.2 Subvariedades biharmônicas dos espaços forma quaterniônicos	20
3 Subvariedades Biharmônicas do Espaço Projetivo Quaterniônico	26
3.1 Equadores generalizados $M_{p,q}^{\mathbb{H}}(r, s)$ em $\mathbb{H}P^n$	26
3.2 A fibração de Hopf quaterniônica e a equação biharmônica	27
3.3 Subvariedades biharmônicas PMC de $\mathbb{H}P^n$	31
3.4 Subvariedades pseudo-umbílicas biharmônicas de $\mathbb{H}P^n$	36
3.5 Subvariedades biharmônicas estáveis de $\mathbb{H}P^n$	38
Bibliografia	43

Introdução

A noção de aplicações biharmônicas foi sugerida em 1964 por Eells e Sampson [21] como uma generalização natural das tradicionais aplicações harmônicas. Uma aplicação $f : M \rightarrow \tilde{M}$ entre duas variedades Riemannianas, com M compacta, é harmônica se for ponto crítico do funcional energia $E(t)$, que é obtido integrando o quadrado da norma da diferencial df . Se a variedade domínio não for compacta, então aplicações harmônicas são definidas como soluções da equação de Euler-Lagrange $\tau(f) = 0$, onde $\tau(f) = \text{tr} \nabla^f df$ é o campo de tensão de f e ∇^f é a conexão no fibrado induzido por f em M . Uma imersão isométrica é mínima se, e somente se, for uma aplicação harmônica.

Uma aplicação biharmônica entre variedades Riemannianas, com domínio compacto, é um ponto crítico do funcional bienergia $E_2(t)$ que, por sua vez, é obtido integrando o quadrado da norma do seu campo de tensão. Para o caso não compacto, aplicações biharmônicas são definidas como aquelas cujo correspondente campo de bitensão é nulo, ver Eq. (1.2), donde concluímos que toda aplicação harmônica é trivialmente biharmônica. Contudo, recíproca nem sempre é verdadeira. De fato, existem vários exemplos de aplicações biharmônicas não harmônicas em diferentes espaços ambientes. Indicamos o trabalho de Y.-L. Ou [37] para mais detalhes. Aplicações biharmônicas não harmônicas são chamadas de aplicações biharmônicas-próprias.

Nas duas últimas décadas, importantes progressos têm sido obtidos no estudo de propriedades geométricas e analíticas de aplicações biharmônicas. Uma atenção especial vem sendo dada ao estudo de subvariedades biharmônicas, ou seja, subvariedades cuja aplicação de inclusão é uma imersão isométrica biharmônica. É um passo fundamental conhecer a geometria destas subvariedades em espaços forma. Nesta direção diversos resultados foram provados em diferentes espaços ambientes, como os espaços forma reais [2, 7, 8, 9], espaços forma complexos [10], espaços forma Sasakianos [11], 3-variedades homogêneas [15], produtos de espaços forma [12], dentre outros.

Um problema interessante é saber sob quais condições geométricas uma subvariedade biharmônica de uma variedade Riemanniana é mínima. O primeiro passo é analisar este problema no espaço Euclidiano, para este caso, indicamos o trabalho mais atual de B.Y. Chen [2]. Em seu programa de estudos sobre as subvariedades biharmônicas do espaço Euclidiano Chen obteve alguns resultados satisfatórios, o que o levou a propor a seguinte questão: *Qualquer subvariedade biharmônica no espaço Euclidiano é mínima?*

Devido a alguns resultados de inexistência de subvariedades biharmônicas-próprias em espaços forma reais de curvatura seccional não positiva (ver, por exemplo, [5, 7, 16]). A questão proposta por Chen foi generalizada por Caddeo, Montaldo e Oniciuc em [25] como segue: *Qualquer subvariedade biharmônica numa variedade Riemanniana com curvatura seccional não positiva é mínima?*

Embora a questão proposta por Chen permaneça em aberta, a sua versão generalizada é falsa. De fato, L. Tang e Y.L. Ou [22] construíram exemplos de hipersuperfícies biharmônicas-próprias (de curvatura média não constante) em um espaço de dimensão 5 de curvatura seccional negativa não constante. No entanto, quando o espaço ambiente é um espaço forma de curvatura constante não positiva, a versão generalizada ainda é um problema em aberto.

As técnicas utilizadas por Chen para obter resultados de inexistência de subvariedades biharmônicas-próprias nos espaços Euclidianos foram adaptadas por Oniciuc et al. e resultou na classificação de subvariedades biharmônicas-próprias em diferentes espaços ambientes de curvatura positiva (ver [7]-[12], [25] e [26]). Nós usamos essas técnicas para estudar as subvariedades biharmônicas-próprias dos espaços forma quaterniônicos. Em particular, damos uma atenção especial para ambientes de curvatura seccional quaterniônica positiva. Uma motivação parcial para isto são os resultados de inexistência deste tipo de subvariedade em espaços forma quaterniônicos de curvatura seccional quaterniônica não positiva, como destacamos na Observação 2.3.

Cabe destacar que as subvariedades quaterniônicas (também chamadas invariantes) e as subvariedades complexas, por serem mínimas, são trivialmente subvariedades biharmônicas de uma variedade Kähler quaterniônica.

Voltamos nossa atenção aos casos especiais das subvariedades anti-quaterniônicas e subvariedades totalmente reais. Calculamos as equações que caracterizam as subvariedades anti-quaterniônicas biharmônicas e as subvariedades totalmente reais biharmônicas

dos espaços forma quaterniônicos. Mais precisamente, obtemos os seguintes resultados:

Teorema 1 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$. Então, M é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{tr} B(\cdot, A_H) - c(m+9)H = 0 \\ \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) + 2\text{tr} A_{\nabla^\perp H} = 0. \end{cases}$$

Teorema 2 *Seja M^m uma subvariedade totalmente real de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$. Então M é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{tr}(B(\cdot, A_H)) - cmH - 3c \sum_{k=1}^3 (H + F_k^2 H) = 0 \\ \frac{m}{2} \text{grad}|H|^2 + 2\text{tr}(A_{\nabla^\perp H}) = 0. \end{cases}$$

Os detalhes técnicos destes dois teoremas podem ser conferidos na Seção 2.2. Como aplicação do Teorema 1 nós recuperamos um resultado de inexistência para o caso em que o espaço ambiente é um espaço forma quaterniônico de curvatura seccional quaterniônica constante não positiva (ver Corolário 2.3) e estudamos as subvariedades biharmônicas-próprias do espaço projetivo quaterniônico $\mathbb{H}P^n$. O espaço projetivo quaterniônico é um modelo de variedade Kähler quaterniônica de curvatura seccional quaterniônica constante igual a 4. Além disso, nós consideramos a projeção natural $\pi : \mathbb{S}^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ da esfera Euclidiana unitária \mathbb{S}^{4n+3} sobre $\mathbb{H}P^n$ definida pela fibração de Hopf quaterniônica $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$, que define uma submersão Riemanniana. Usando esta fibração construímos um exemplo (previamente anunciado por W. Zhang [39]) de subvariedade biharmônica-própria de $\mathbb{H}P^n$. Sendo \bar{M} uma subvariedade real de $\mathbb{H}P^n$ e denotando por $M := \pi^{-1}(\bar{M})$ o tubo de Hopf sobre \bar{M} , nós obtivemos a fórmula que relaciona o campo de bitensão da inclusão de \bar{M} em $\mathbb{H}P^n$ e o campo de bitensão da inclusão de M em \mathbb{S}^{4n+3} , ver Teorema 3.1.

Como aplicação dos Teoremas 1 e 2, nós estudamos as subvariedades biharmônicas-próprias com curvatura média paralela (PMC), as subvariedades biharmônicas-próprias com curvatura média constante (CMC) e as subvariedades biharmônicas-próprias pseudo-umbílicas em $\mathbb{H}P^n$. Na classe das subvariedades biharmônicas-próprias PMC de $\mathbb{H}P^n$ encontramos uma limitação inferior para o quadrado da norma da segunda forma fundamental, como consequência, obtemos uma estimativa para a curvatura escalar da subvariedade em termos do quadrado da norma de seu campo de vetores curvatura média, a saber:

Proposição 1 *Se M^m é uma subvariedade anti-quaterniônica biharmônica-própria PMC de $\mathbb{H}P^n$, então $|B|^2 \geq m + 9$. Em particular, se $m = 3n$, então*

$$Scal_M \leq 9n^2(1 + |H|^2) + 18n - 9.$$

Proposição 2 *Seja M^m uma subvariedade totalmente real biharmônica-própria PMC de $\mathbb{H}P^n$. Então $|B|^2 \geq m$. Em particular,*

$$Scal_M \leq m^2(1 + |H|^2) - 2m.$$

Para o caso em que a subvariedade anti-quaterniônica biharmônica é compacta, obtemos a seguinte limitação para $|H|^2$.

Teorema 3 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica biharmônica-própria compacta de $\mathbb{H}P^n$. Então:*

(a) *Existe um ponto $p \in M$ tal que $|A_H(p)|^2 < (m + 9)|H(p)|^2$*

ou

(b) $|A_H|^2 = (m+9)|H|^2$. *Neste caso, a subvariedade M é PMC, com $|H|^2 \in (0, \frac{m+9}{m}]$.*

Na classe das subvariedades pseudo-umbílicas biharmônicas-próprias de $\mathbb{H}P^n$, obtemos os seguintes resultados.

Proposição 3 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica pseudo-umbílica biharmônica-própria de $\mathbb{H}P^n$. Então $|B|^2 \geq m|H|^2$. Em particular, a curvatura escalar de M satisfaz*

$$Scal_M \leq m^2(1 + |H|^2) + m(17 - |H|^2) - 36n.$$

Proposição 4 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica de $\mathbb{H}P^n$ com curvatura média constante não nula. Então temos as seguintes observações:*

(a) *Se M é biharmônica-própria, então $|H|^2 \in (0, \frac{m+9}{m}]$.*

(b) *Se $|H|^2 = \frac{m+9}{m}$, então M é biharmônica-própria se, e somente se, M é pseudo-umbílica e $\nabla^\perp H = 0$.*

A primeira e a segunda variação da bienergia de uma aplicação biharmônica-própria entre variedades Riemannianas foram calculadas por G.Y. Jiang [17] e como aplicação ele estabeleceu algumas condições para que uma subvariedade biharmônica estável do espaço projetivo complexo seja uma subvariedade mínima. Nós adaptamos as técnicas desenvolvidas por Jiang e encontramos algumas desigualdades envolvendo o quadrado da norma do campo de bitensão de uma subvariedade compacta biharmônica-própria estável de $\mathbb{H}P^n$. Com essas desigualdades obtemos a seguinte limitação para a função densidade de energia de uma tal subvariedade.

Teorema 4 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{H}P^n$ uma subvariedade biharmônica-própria compacta de $\mathbb{H}P^n$ com $|\tau(f)|^2$ constante. Se M é estável, então a função densidade de energia $e(f)$ satisfaz*

$$e(f) \geq \frac{|\tau(f)|}{18}.$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fixamos as notações e apresentamos alguns resultados da teoria clássica de geometria Riemanniana. No que segue todas as variedades são consideradas conexas e, quando necessário, orientadas pelo elemento de volume.

1.1 Fibrados Riemannianos

Um **fibrado vetorial** (real suave) sobre uma variedade diferenciável M é uma variedade diferenciável E , juntamente com uma aplicação diferenciável e sobrejetiva $\pi : E \rightarrow M$ satisfazendo as seguintes condições:

- (a) Para cada $p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ possui uma estrutura de espaço vetorial real k -dimensional.
- (b) Para cada $p \in M$, existem uma vizinhança $U \subset M$ de p e uma aplicação diferenciável $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tais que:
 - (i) Para cada $q \in U$, a restrição de Φ a E_q é um isomorfismo linear entre E_q e $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, munido com a estrutura canônica de espaço vetorial real.
 - (ii) Se $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ denota a projeção sobre o primeiro fator, então $\pi = \pi_U \circ \Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$.

Nas notações acima, dizemos que M é a **base** do fibrado, E é o seu **espaço total** e E_p é a **fibra** de E sobre p . O natural k é o **posto** de E (ou de π) e, se $k = 1$, dizemos

que E é um fibrado de linhas. Por fim, Φ é uma **trivialização local**, ou uma **carta de fibrado** de E sobre U .

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M . Uma seção local sobre um conjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\eta : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \eta = Id_U$; se $U = M$, dizemos que η é uma seção global ou simplesmente seção de π . O conjunto $\Gamma(E)$ das seções de E (ou de π) se torna um $C^\infty(M)$ -módulo sobre o anel das funções diferenciáveis sobre M , pondo, para $f \in C^\infty(M)$ e $\eta \in \Gamma(E)$,

$$(f\eta)(p) = f(p)\eta(p), \forall p \in M.$$

O fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável n -dimensional M é um fibrado vetorial de posto n sobre M e o conjunto dos campos de vetores $\mathfrak{X}(M)$ de M pode ser identificado com o conjunto das seções de TM .

Uma ferramenta importante na construção de fibrados vetoriais é dada pelo lema abaixo. Para mais detalhes veja Neto [1, Lema 1.9].

Lema 1.1 *Sejam M uma variedade diferenciável, $k \in \mathbb{N}$ e, para cada $p \in M$, E_p um espaço vetorial real k -dimensional; sejam também $E = \coprod E_p$ a soma topológica dos espaços E_p e $\pi : E \rightarrow M$ a aplicação tal que $\pi(E_p) = p$. Suponha, ainda, dadas:*

- (a) *Uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M .*
- (b) *Para cada $\alpha \in A$, uma bijeção $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a cada E_p é um isomorfismo linear entre E_p e $\{p\} \times \mathbb{R}^k$, munido da estrutura canônica de espaço vetorial real k -dimensional.*
- (c) *Para $\alpha, \beta \in A$ tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ para si mesmo, tem a forma*

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)v).$$

Então, E tem uma única estrutura de variedade diferenciável tal que $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial de posto k tendo as aplicações Φ_α como trivializações locais.

Usando o Lema 1.1, encontramos novos exemplos de fibrados vetoriais, dentre os quais destacamos:

Exemplo 1.1 Dados fibrados vetoriais $\pi_E : E \rightarrow M$ e $\pi_F : F \rightarrow M$ de postos k e l , respectivamente, o fibrado de homeomorfismos de E em F sobre M é o fibrado

$$\text{Hom}(E; F) = \coprod_{p \in M} \text{Hom}(E_p; F_p),$$

onde $\text{Hom}(E_p; F_p)$ é o espaço vetorial kl -dimensional das transformações lineares de E_p em F_p . Uma seção de $\text{Hom}(E; F)$ é simplesmente um homomorfismo $\Phi : E \rightarrow F$, isto é, uma aplicação diferenciável Φ de E em F tal que $\pi_F \circ \Phi = \pi_E$ e $\Phi|_{E_p} : E_p \rightarrow F_p$ é uma transformação linear, para todo $p \in M$.

Exemplo 1.2 Seja $\pi_E : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto k . O **fibrado dual** de E é o fibrado

$$E^* = \coprod_{p \in M} E_p^*.$$

A cada seção $\eta \in \Gamma(E)$ corresponde uma seção $\eta^* \in \Gamma(E^*)$, que associa a cada $p \in M$ o funcional linear $\eta_p^* : E_p \rightarrow \mathbb{R}$, dual algébrico de $\eta_p \in E_p$. Em particular, o fibrado cotangente T^*M de uma variedade diferenciável M é o fibrado dual do fibrado tangente TM de M . Uma seção $\omega \in \Gamma(T^*M)$ de T^*M é uma 1-forma diferencial sobre M .

Exemplo 1.3 Sejam $\pi_E : E \rightarrow M$ e $\pi_F : F \rightarrow M$ fibrados vetoriais sobre M . Então o produto tensorial

$$E \otimes F = \coprod_{p \in M} (E_p \otimes F_p)$$

admite uma estrutura de fibrado vetorial sobre M . Uma seção de $E \otimes F$ é um campo tensorial sobre M .

Aproveitamos estes exemplos para lembrar a seguinte definição

Definição 1.1 Se E é um fibrado sobre M , uma k -forma diferencial sobre M com valores em E é uma seção do fibrado $\Lambda^k M \otimes E$.

Finalizamos esta lista de exemplos com o que define o fibrado pull-back por uma aplicação entre variedades diferenciáveis. Tal fibrado é de fundamental importância na teoria das imersões isométricas e aparecerá com muita frequência no decorrer deste trabalho.

Exemplo 1.4 (fibrado induzido) *Sejam $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável entre variedades Riemannianas e $\pi_F : F \rightarrow N$ um fibrado vetorial de posto k . O **fibrado pull-back**, ou **fibrado induzido**, pela aplicação f é o fibrado vetorial $\pi_{f^{-1}F} : f^{-1}F \rightarrow M$, onde*

$$f^{-1}F = \coprod_{p \in M} F_{f(p)} \approx \{(p, v); p \in M, v \in F_{f(p)}\}.$$

Uma **métrica Riemanniana** em um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação $C^\infty(M)$ -bilinear, simétrica e positiva definida

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M).$$

Uma **conexão (linear)** em um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, \eta) &\mapsto \nabla_X \eta \end{aligned}$$

satisfazendo, para $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \Gamma(E)$, as seguintes condições:

- (a) $\nabla_{fX} \eta = f \nabla_X \eta$.
- (b) $\nabla_X (f\eta) = f \nabla_X \eta + X(f)\eta$.

Para cada seção $\eta \in \Gamma(E)$, a aplicação

$$\begin{aligned} \nabla \eta : \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \Gamma(E) \\ X &\mapsto \nabla_X \eta \end{aligned}$$

é $C^\infty(M)$ -linear e seu valor em um ponto $p \in M$ só depende dos valores de η ao longo de qualquer curva tangente a X_p . Neste sentido, dizemos que uma seção η de $\Gamma(E)$ é **paralela** se $\nabla \eta = 0$.

A derivada covariante de $\nabla \eta$ é dada por

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \eta(X, Y) &= \nabla_X (\nabla \eta(Y)) - \nabla \eta(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_X \nabla_Y \eta - \nabla_{\nabla_X^M Y} \eta. \end{aligned}$$

A divergência de $\nabla \eta$ é definida tomando o traço nesta última equação, como segue

$$\operatorname{div} \nabla \eta = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \eta - \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i} \eta),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ornotnormal local em M e ∇^M é a conexão Riemanniana de M . Segue das propriedades das conexões envolvidas que $div\nabla\eta$ independe do referencial ortonormal local escolhido, de modo que $div\nabla\eta$ está bem definido como seção de E .

O tensor **curvatura** de um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ com conexão linear ∇ é a aplicação \mathbb{R} -trilinear

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

definida por

$$R(X, Y)\eta = \nabla_X \nabla_Y \eta - \nabla_Y \nabla_X \eta - \nabla_{[X, Y]}\eta.$$

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial munido de uma métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ é **compatível com a métrica** se, para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \Gamma(E)$, tivermos

$$X\langle \eta, \xi \rangle = \langle \nabla_X \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \nabla_X \xi \rangle.$$

Um **fibrado (vetorial) Riemanniano** é um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$, munido com uma métrica Riemanniana g e uma conexão ∇ compatível com g .

O **traço-Laplaciano** de um fibrado Riemanniano $\pi : E \rightarrow M$, com conexão ∇ , é o operador $\Delta : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ definido por $\Delta\eta = -div\nabla\eta$.

Por um abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\pi : E \rightarrow M$ quando estamos trabalhando com fibrados cuja aplicação é a natural, mas sim às variedades E e M .

1.2 O campo de tensão e aplicações harmônicas

Seja $f : (M^m, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades Riemannianas. Então, a diferencial de f pode ser pensada como uma seção do fibrado $T^*M \otimes f^{-1}T\tilde{M}$, de 1-formas com valores em $f^{-1}T\tilde{M}$, como segue

$$df(X) = f_*X, \forall X \in \Gamma(TM).$$

Munindo $T^*M \otimes f^{-1}T\tilde{M}$ com a norma de Hilbert-Schmidt, temos a igualdade

$$|df|^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{g}(f_*e_i, f_*e_i),$$

onde $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é um referencial ortonormal em M .

A segunda forma fundamental da aplicação f , denotada por B_f , é a derivada covariante $\bar{\nabla}df$, que é uma seção de $\odot^2 T^*M \otimes f^{-1}TM$, tal que $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} B_f(X, Y) &= (\bar{\nabla}df)(X, Y) := (\bar{\nabla}_X df)(Y) \\ &= \nabla_X^f df(Y) - df(\nabla_X Y) \\ &= \tilde{\nabla}_{df(X)} df(Y) - df(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

Aqui, $\nabla, \tilde{\nabla}, \nabla^f$ e $\bar{\nabla}$ são as conexões Riemannianas nos fibrados $TM, T\tilde{M}, f^{-1}T\tilde{M}$ e $T^*M \otimes f^{-1}T\tilde{M}$, respectivamente. O campo de tensão da aplicação f , denotado por $\tau(f)$, é o traço de sua segunda forma fundamental B_f . Se $\{e_i\}_{i=1}^m$ é um referencial ortonormal local em um aberto $U \subset M$, então $\tau(f)$ é a seção de $f^{-1}T\tilde{M}$ dada por

$$\tau(f) = \sum_i B_f(e_i, e_i) = \sum_i (\bar{\nabla}_{e_i} df)(e_i).$$

A densidade de energia da aplicação f é a função diferenciável $e(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$e(f) = \frac{1}{2}|df|^2;$$

e, se a densidade de energia de f é (Lebesgue) integrável sobre M , definimos a energia de f como o número real

$$E(f) = \int_M e(f) dM.$$

Nesse caso, dizemos também que a aplicação f tem energia finita.

Uma variação de f é uma aplicação diferenciável

$$F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \tilde{M}, \epsilon > 0,$$

satisfazendo $F(0, p) = f(p)$, para todo $p \in M$. Uma variação de f será denotada por $\{f_t\}_t$, $-\epsilon < t < \epsilon$, onde $f_t(p) = F(t, p)$. Dizemos que $\{f_t\}_t$ é uma variação própria se existir um compacto $K \subset M$ tal que $f_t = f$ em K^c , para todo $-\epsilon < t < \epsilon$. Nesse caso, se f tem energia finita, então

$$E(f_t) = \int_{K^c} e(f) dM + \int_K e(f_t) dM < +\infty,$$

e fica bem definida uma função diferenciável

$$F : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto E(f_t),$$

denominada o funcional energia associado à variação $\{f_t\}_t$.

Uma aplicação $f : (M^m, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ de energia finita é chamada uma **aplicação harmônica** se f for ponto crítico do funcional energia associado a toda variação própria $\{f_t\}_t$.

Eells e Sampson [21] provaram que uma aplicação $f : (M^m, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ é harmônica se, e somente se, $\tau(f) = 0$. Na linguagem do cálculo das variações, dizemos que $\tau(f) = 0$ é a equação de Euler-Lagrange do problema variacional de minimização da energia de uma aplicação. Note que quando f é uma imersão isométrica com campo de vetores curvatura média H , temos $\tau(f) = mH$. Portanto, a imersão f é uma aplicação harmônica se, e somente se, M é uma subvariedade mínima de \tilde{M} .

Para mais detalhes desta seção, referimos à referência [21].

1.3 O campo de bitensão e aplicações biharmônicas

De maneira análoga à seção anterior, dada uma aplicação diferenciável $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ entre duas variedades Riemannianas, a função diferenciável

$$e_2(f) = \frac{1}{2}|\tau(f)|^2$$

é chamada a densidade de bienergia de f . Se f for tal que sua densidade de bienergia é (Lebesgue) integrável sobre M , definimos a bienergia de f como o número real

$$E_2(f) = \int_M e_2(f) dM.$$

Nesse caso, dizemos também que a aplicação f tem bienergia finita.

Definição 1.2 *Uma aplicação diferenciável $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ entre variedades Riemannianas de bienergia finita é **biharmônica** se f for ponto crítico do funcional bienergia associado a toda variação própria $\{f_t\}_t$.*

Se $\{f_t\}_t$ é uma variação própria de f , definimos o **campo variacional** de $\{f_t\}_t$ como a seção compactamente suportada $\frac{df_t}{dt}|_{t=0}$ de $f^{-1}TM$, tal que

$$\frac{df_t}{dt}|_{t=0}(p) \approx \left(p, \frac{df_t}{dt}(p)|_{t=0}\right),$$

onde o segundo membro acima, $\frac{df_t}{dt}(p)|_{t=0} \in T_{f(p)}M$ denota o vetor velocidade da curva diferenciável $t \mapsto f_t(p)$ no instante $t = 0$.

A fórmula da primeira variação associada ao funcional bienergia (também chamada **primeira variação da bienergia**) foi obtida por Jiang [16], como segue

Teorema 1.1 [16, Theorem 3] *Seja $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ uma aplicação diferenciável com bienergia finita. Se $\{f_t\}_t$ é uma variação própria de f com campo variacional v , então*

$$\frac{dE_2}{dt}|_{t=0} = 2 \int_M g(-\Delta\tau(f) - \text{tr}\tilde{R}(df, \tau(f))df, v) dM. \quad (1.1)$$

Definição 1.3 *Para uma aplicação diferenciável $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ entre duas variedades Riemannianas, definimos o **campo de bitensão** $\tau_2(f)$ de f por*

$$\tau_2(f) = -\Delta\tau(f) - \text{tr}(\tilde{R}(df, \tau(f))df). \quad (1.2)$$

Segue imediatamente da primeira variação da bienergia que, se $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ é uma aplicação com bienergia finita e $\tau_2(f) = 0$, então f é biharmônica.

Note que, se $f : (M^m, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ é uma imersão isométrica, então

$$\tau_2(f) = m(-\Delta H - \text{tr}(\tilde{R}(df, H)df)). \quad (1.3)$$

Observação 1.1 *A equação de Euler-Lagrange associada ao funcional bienergia é definida por $\tau_2(f) = 0$. Portanto, ampliamos a noção de biharmonicidade, considerando biharmônica toda aplicação $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ tal que $\tau_2(f) = 0$ (f não necessariamente com bienergia finita).*

Para detalhes do conteúdo desta seção, indicamos a referência [16].

Segue da Definição 1.3 que toda aplicação harmônica é biharmônica. As aplicações biharmônicas não-harmônicas são chamadas de **aplicações biharmônicas-próprias**, e as subvariedades com aplicação de inclusão biharmônica-própria são chamadas **subvariedades biharmônicas-próprias**. Observamos ainda que no contexto das subvariedades do espaço Euclidiano, a definição de subvariedade biharmônica dada na Observação 1.1 coincide com a dada por Chen [2].

1.4 Variedades Kähler quaterniônicas e suas subvariedades

Uma variedade Kähler quaterniônica é uma tripla $(\tilde{M}, \mathcal{V}, \tilde{g})$ constituída por uma variedade Riemanniana (\tilde{M}, \tilde{g}) e um subfibrado \mathcal{V} de posto 3 do fibrado dos endomorfismos $Hom(TM; TM)$ do fibrado tangente TM de \tilde{M} , com as seguintes propriedades:

(a) Em qualquer vizinhança coordenada U de \tilde{M} , existe uma base local $\{J_1, J_2, J_3\}$, denominada base canônica local de \mathcal{V} , tal que

(i) Cada J_k , $k = 1, 2, 3$, é uma estrutura quase Hermitiana em U com respeito a métrica \tilde{g} ,

(ii) $J_k J_{k+1} = J_{k+2} = -J_{k+1} J_k$, $k \bmod 3$, para $k = 1, 2, 3$.

(b) \mathcal{V} é paralelo em $Hom(TM; TM)$ com respeito à conexão Riemanniana ∇ de \tilde{M} . Isto significa que se J é uma seção de \mathcal{V} , então $\nabla_X J$ é também uma seção de \mathcal{V} , para qualquer campo de vetores arbitrário X em \tilde{M} .

A condição (b) é equivalente à seguinte condição: existem três 1-formas locais ω_1, ω_2 e ω_3 tais que

$$\begin{aligned} \nabla_X J_1 &= \omega_3(X)J_2 - \omega_2(X)J_3 \\ \nabla_X J_2 &= -\omega_3(X)J_1 + \omega_1(X)J_3 \\ \nabla_X J_3 &= \omega_2(X)J_1 - \omega_1(X)J_2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

para cada campo de vetores X em U .

Observe que, se $\tilde{M}^n = (\tilde{M}, \mathcal{V}, \tilde{g})$ é uma variedade Kähler quaterniônica, então \tilde{M} é necessariamente de dimensão real $4n$ ($n \geq 1$).

Uma variedade Riemanniana é uma variedade Kähler quaterniônica se, e somente se, seu grupo de holonomia é um subgrupo de $Sp(1) \cdot Sp(n)$ (ver [20, 30]). Wolf [20] classificou espaços simétricos que possuem estruturas Kähler quaterniônicas.

A partir de agora, a menos que explicitamente indicado, nos referiremos a \tilde{M}^n como uma variedade Kähler quaterniônica de dimensão quaterniônica n (isto é, a dimensão real de \tilde{M} é igual a $4n$). Seja M uma subvariedade real de uma variedade Kähler quaterniônica \tilde{M} . Para todo $X \in TM$ e todo $\xi \in TM^\perp$, temos as seguintes decomposições

$$J_k X = P_k X + N_k X, \tag{1.5}$$

$$J_k \xi = T_k \xi + F_k \xi, \quad (1.6)$$

onde $P_k X$ e $N_k X$ são as componentes tangente e normal de $J_k X$, respectivamente, enquanto que $T_k \xi$ e $F_k \xi$ são as componentes tangente e normal de $J_k \xi$, respectivamente, para $k = 1, 2, 3$.

Como cada J_k é uma estrutura quase complexa, elas satisfazem $J_k^2 = -Id$. Então, a partir de (1.5) e (1.6) deduzimos que os operadores P_k, N_k, T_k, F_k , satisfazem as seguintes relações

$$P_k^2 X + T_k N_k X = -X, \quad (1.7)$$

$$N_k P_k X + F_k N_k X = 0, \quad (1.8)$$

$$P_k T_k \xi + T_k F_k \xi = 0, \quad (1.9)$$

$$F_k^2 \xi + N_k T_k \xi = -\xi, \quad (1.10)$$

$$\tilde{g}(N_k X, \xi) = -\tilde{g}(X, T_k \xi) \quad (1.11)$$

para todo $X \in TM$ e todo $\xi \in TM^\perp$. Além disso, P_k e F_k são anti-simétricos.

Para detalhes do conteúdo desta seção, indicamos os trabalhos de Alekseevsky & Marchiafava [6] e Tsukada [23].

1.5 Variedades 3-Sasakianas

Uma estrutura Sasakiana, ou uma estrutura métrica de contato normal, em uma variedade Riemanniana (M, g) é um campo de vetores Killing ξ de comprimento unitário satisfazendo a condição (ver [33], [35])

$$\nabla_j \nabla_i \xi^h = \xi_i \delta_j^h - \xi^h g_{ij},$$

ξ^h sendo componentes de ξ e g_{ij} componentes de g , onde $\xi_i = \xi^h g_{hi}$ e ∇_j denota a conexão Riemanniana de (M, g) . Então ξ é chamado uma estrutura Sasakiana ou uma estrutura métrica de contato normal em (M, g) .

Uma estrutura 3-Sasakiana ou uma 3-estrutura métrica de contato normal em uma variedade Riemanniana (M, g) é um conjunto $\{\xi, \eta, \zeta\}$ formado por três estruturas Sasakianas ξ, η e ζ de M , que são mutuamente ortogonais e satisfazem as seguintes condições

$$[\eta, \zeta] = 2\xi, \quad [\zeta, \xi] = 2\eta, \quad [\xi, \eta] = 2\zeta.$$

Observe que, se uma variedade Riemanniana M admite uma estrutura 3-Sasakiana, então M é necessariamente de dimensão $m = 4n + 3$ ($n \geq 0$). Além disso, a distribuição G gerada por ξ , η e ζ é integrável, e cada variedade integral de D é totalmente geodésica e de curvatura constante 1 (ver [6]). Em adição, suponha que a distribuição G é regular. Então, denotando por B o espaço quociente M/G e admitindo que a projeção natural $\pi : M \rightarrow B$ é diferenciável e de posto $4n$ em todo ponto, temos que B se torna uma variedade diferenciável de dimensão $4n = m - 3$. Neste caso, dizemos que M é um espaço fibrado Riemanniano com estrutura 3-Sasakiana, e cada variedade integral maximal de G é chamada uma fibra.

Seja M um espaço fibrado Riemanniano com estrutura 3-Sasakiana. Projetando a métrica g de M sobre a variedade $B = M/G$, e a denotando por g_B , obtemos que (B, g_B) se torna uma variedade Riemanniana, chamada o espaço base do espaço fibrado Riemanniano com estrutura 3-Sasakiana.

Finalizamos esta seção com as duas seguintes proposições que relacionam a teoria das variedades Kähler quaterniônicas com a teoria das variedades 3-Sasakianas, e serão bastante úteis para o entendimento do que veremos no Capítulo 3.

Proposição 1.1 (M. Falcitelli, S. Ianus & A.M. Pastore [24]) *Dada uma variedade Kähler quaterniônica M^{4n+4} . Qualquer hipersuperfície orientável N^{4n+3} de M^{4n+4} admite uma estrutura 3-Sasakiana.*

Proposição 1.2 (T. Ichiyama, J. Inoguchi & H. Urakawa [31]) *O espaço base (B, g_B) de um espaço fibrado Riemanniano com estrutura 3-Sasakiana admite uma estrutura Kähler quaterniônica $\{g_B, V\}$, isto é (B, g_B, V) é uma variedade Kähler quaterniônica.*

1.6 O espaço projetivo quaterniônico

Considere a esfera unitária \mathbb{S}^{4n+3} de dimensão $4n + 3$ ($n \geq 1$) no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{4n+4} que é identificado com o espaço quaterniônico \mathbb{H}^{n+1} de dimensão quaterniônica $n + 1$. A Proposição 1.1 garante que \mathbb{S}^{4n+3} admite uma estrutura 3-Sasakiana $\{\xi, \eta, \zeta\}$, como segue. Em \mathbb{H}^{n+1} temos três estruturas quase complexas naturalmente definidas. Sejam $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1}$ e i, j, k as unidades quaterniônicas, definimos

$$Iz = (iz_1, \dots, iz_{n+1}), \quad Jz = (jz_1, \dots, jz_{n+1}) \quad \text{e} \quad Kz = (kz_1, \dots, kz_{n+1}).$$

Denotando por N o vetor normal exterior de \mathbb{S}^{4n+3} em cada ponto $p \in \mathbb{S}^{4n+3}$, e sendo $\iota : \mathbb{S}^{4n+3} \rightarrow \mathbb{R}^{4n+4}$ o mergulho isométrico natural, obtemos a tripla de campos de vetores $\{\xi, \eta, \zeta\}$ definidos em \mathbb{S}^{4n+3} por

$$-I(N) = \iota_*\xi, \quad -J(N) = \iota_*\eta \quad \text{e} \quad -K(N) = \iota_*\zeta. \quad (1.12)$$

Agora, seja $G = \{z \in \mathbb{H}; |z| = 1\}$ o grupo das isometrias agindo em \mathbb{S}^{4n+3} pela multiplicação, e denote por $\mathbb{H}P^n$ o espaço quociente \mathbb{S}^{4n+3}/G . Então $\mathbb{H}P^n$ admite uma estrutura diferenciável de modo que a projeção natural $\pi : \mathbb{S}^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ é uma submersão, tendo \mathbb{S}^{4n+3} como espaço total e $\mathbb{H}P^n$ como base. Como G age de forma propriamente descontínua em \mathbb{S}^{4n+3} , segue que $\mathbb{H}P^n$ admite uma métrica \bar{g} tal que π torna-se uma submersão Riemanniana, conhecida na literatura como **fibração de Hopf quaterniônica**. Com respeito a esta métrica, usando a Proposição 1.2 (veja também a Proposição 2.6 de [24]) obtemos que $\mathbb{H}P^n$ torna-se uma variedade Kähler quaterniônica com curvatura seccional quaterniônica 4, denominado o **espaço projetivo quaterniônico** de dimensão (quaterniônica) n . Dada a importância para resultados posteriores, explicitaremos a seguir a estrutura Kähler quaterniônica de $\mathbb{H}P^n$ obtida via fibração de Hopf quaterniônica.

Denotemos por $H_p\mathbb{S}^{4n+3}$ e $span\{\xi, \eta, \zeta\}$ os subespaços horizontal e vertical de $T_p\mathbb{S}^{4n+3}$, respectivamente. Então, em cada $p \in \mathbb{S}^{4n+3}$, temos

$$T_p\mathbb{S}^{4n+3} = H_p\mathbb{S}^{4n+3} \oplus span\{\xi_p, \eta_p, \zeta_p\}.$$

Ademais, como π é uma submersão Riemanniana existe um isomorfismo entre os espaços $H_p\mathbb{S}^{4n+3}$ e $T_{\pi(p)}\mathbb{H}P^n$. Consequentemente, para cada campo de vetores \bar{X} em $\mathbb{H}P^n$ existe um único campo de vetores \bar{X}^H em \mathbb{S}^{4n+3} , denominado o levantamento horizontal de \bar{X} , tal que $\pi_*(\bar{X}^H) = \bar{X}$. É conhecido que como subespaço de \mathbb{R}^{4n+4} , $H_p\mathbb{S}^{4n+3}$ é $\{I, J, K\}$ -invariante (veja por exemplo Abedi & Nazari [13, Proposition 1]). Consequentemente, π dá origem a uma estrutura Kähler quaterniônica para $\mathbb{H}P^n$ para a qual cada base canônica $\{I', J', K'\}$ de $\mathbb{H}P^n$ é dada por

$$I'\bar{X} = \pi_*(I\bar{X}^H), \quad J'\bar{X} = \pi_*(J\bar{X}^H), \quad K'\bar{X} = \pi_*(K\bar{X}^H),$$

para qualquer campo de vetores \bar{X} tangente a $\mathbb{H}P^n$.

Usando a fórmula de Gauss para os campos de vetores verticais ξ, η, ζ e para um campo de vetores horizontal E de $T_p\mathbb{S}^{4n+3}$, obtemos

$$D_E\xi = \nabla_E\xi, \quad D_E\eta = \nabla_E\zeta \quad \text{e} \quad D_E\zeta = \nabla_E\zeta, \quad (1.13)$$

onde D denota a conexão Euclidiana de \mathbb{R}^{4n+4} e ∇ denota a conexão Riemanniana de \mathbb{S}^{4n+3} . Agora, usando as relações (1.12) e (1.13), concluímos que

$$\begin{aligned}\nabla_E \xi &= -D_E I N = -(\tilde{D}_E I) N - I(D_E N) \\ &= \omega_3(E)\eta - \omega_2(E)\zeta - IE.\end{aligned}\tag{1.14}$$

similarmente, temos

$$\begin{aligned}\nabla_E \eta &= -D_E J N = -\omega_3(E)\xi + \omega_1(E)\zeta - JE \\ \nabla_E \zeta &= -D_E K N = \omega_2(E)\xi - \omega_1(E)\eta - KE.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Observe ainda que, como a derivada de Lie do levantamento horizontal $E = \bar{X}^H$ de um campo de vetores em relação a um campo de vetores vertical é zero, temos

$$\nabla_E \xi = \nabla_\xi E \quad \nabla_E \eta = \nabla_\eta E \quad \text{e} \quad \nabla_E \zeta = \nabla_\zeta E\tag{1.16}$$

A métrica Riemanniana \bar{g} de $\mathbb{H}P^n$ é induzida por $\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}) \circ \pi = g(\bar{X}^H, \bar{Y}^H)$ e sua conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ é dada por $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \pi_* (\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H)$, para quaisquer campos de vetores \bar{X} e \bar{Y} tangentes a $\mathbb{H}P^n$. Então $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^H$ é a parte horizontal de $\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H$ e consequentemente, podemos escrever

$$\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^H + g(\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H, \xi)\xi + g(\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H, \eta)\eta + g(\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H, \zeta)\zeta.\tag{1.17}$$

Por (1.14) e (1.15), temos que

$$\begin{aligned}g(\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H, \xi) &= -g(\bar{Y}^H, \nabla_{\bar{X}^H} \xi) = g(\bar{Y}^H, I\bar{X}^H) = \bar{g}(\bar{Y}^H, I'\bar{X}) \\ g(\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H, \eta) &= -g(\bar{Y}^H, \nabla_{\bar{X}^H} \eta) = g(\bar{Y}^H, J\bar{X}^H) = \bar{g}(\bar{Y}^H, J'\bar{X}) \\ g(\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H, \zeta) &= -g(\bar{Y}^H, \nabla_{\bar{X}^H} \zeta) = g(\bar{Y}^H, K\bar{X}^H) = \bar{g}(\bar{Y}^H, K'\bar{X}).\end{aligned}$$

De modo que (1.17) se torna

$$\nabla_{\bar{X}^H} \bar{Y}^H = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^H + g(\bar{Y}^H, I\bar{X}^H)\xi + g(\bar{Y}^H, J\bar{X}^H)\eta + g(\bar{Y}^H, K\bar{X}^H)\zeta.\tag{1.18}$$

Para mais detalhes desta seção, referimos à referência [13].

Capítulo 2

Subvariedades Biharmônicas dos Espaços Forma Quaterniônicos

Neste capítulo nós encontramos as equações que as subvariedades anti-quaterniônicas e as totalmente reais de um espaço forma quaterniônico devem satisfazer para que sejam subvariedades biharmônicas e, de imediato investigamos as equações biharmônicas para essas subvariedades no caso em que elas possuem campo de vetores curvatura média paralelo.

2.1 Espaços forma quaterniônicos

Sejam \tilde{M} uma variedade Kähler quaterniônica, $p \in \tilde{M}$ e $X \in T_p\tilde{M}$. A **seção quaterniônica** gerada por X é o subespaço de dimensão 4 em $T_p\tilde{M}$ definido por

$$Q(X) = \text{span}\{X, J_1X, J_2X, J_3X\}.$$

Se para todos $p \in \tilde{M}$, $X \in T_p\tilde{M}$ e $Y, Z \in Q(X)$, a curvatura seccional é constante $K(Y, Z) = c$, então dizemos que \tilde{M} é uma variedade Kähler quaterniônica de curvatura seccional quaterniônica constante c . Em adição, uma tal variedade é chamada um **espaço forma quaterniônico** e a denotamos por $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(c)$. É conhecido que o tensor curvatura de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(c)$ tem a expressão (veja por exemplo [30]):

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \frac{c}{4} \left\{ \tilde{g}(Y, Z)X - \tilde{g}(X, Z)Y + \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(J_k Y, Z)J_k X \right\} \quad (2.1)$$

$$- \sum_{i=k}^3 \tilde{g}(J_k X, Z) J_k Y + 2 \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(X, J_k Y) J_k Z \},$$

para $X, Y, Z \in T\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(c)$.

2.2 Subvariedades biharmônicas dos espaços forma quaterniônicos

O principal ingrediente no estudo das subvariedades biharmônicas é a decomposição do campo de bitensão com respeito às suas componentes normal e tangente. O resultado a seguir foi obtido em [2] e [5] no contexto das subvariedades em espaços formas reais, e em [36] para hipersuperfícies gerais, e devido a sua importância para o nosso trabalho, apresentaremos a prova.

Lema 2.1 *Sejam M^m uma subvariedade de uma variedade Riemanniana \tilde{M} e $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ a inclusão canônica. Denotemos por B a segunda forma fundamental de $M^m \subset \tilde{M}$, por A o operador de Weingarten e por H o campo de vetores curvatura média de M^m em \tilde{M} . Então M^m é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{tr} B(\cdot, A_H) + \text{tr} \left(\tilde{R}(d\iota, H) d\iota \right)^\perp = 0, \\ \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) + 2 \text{tr} A_{\nabla^\perp H} + 2 \text{tr} \left(\tilde{R}(d\iota, H) d\iota \right)^\top = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde ∇^\perp e Δ^\perp denotam, respectivamente, a conexão normal e o traço-Laplaciano no fibrado normal TM^\perp de M .

Demonstração: A partir de (1.3), a subvariedade M^m é biharmônica se, e somente se,

$$\Delta H + \text{tr}(\tilde{R}(\cdot, H) \cdot) = 0.$$

Considere $\{X_i\}_{i=1}^m$ um referencial ortonormal local de campos em M^m , geodésico em um ponto $p \in M^m$. Usando as equações de Gauss e de Weingarten, obtemos em p ,

$$\begin{aligned} \Delta H &= - \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_i}^\perp H \\ &= - \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{X_i}^\perp (-A_H X_i + \nabla_{X_i}^\perp H) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i=1}^m \left\{ - \nabla_{X_i} A_H X_i - B(X_i, A_H X_i) - A_{\nabla_{X_i}^\perp H} X_i + \nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_i}^\perp H \right\} \\
&= \Delta^\perp H + \text{tr} B(\cdot, A_H) + \text{tr} \nabla A_H + \text{tr} A_{\nabla^\perp H}.
\end{aligned}$$

Além disso, por uma conta direta, obtemos em p

$$\begin{aligned}
\text{tr} \nabla A_H &= \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} A_H X_i \\
&= \sum_{i,j=1}^m \langle \nabla_{X_i} A_H X_i, X_j \rangle X_j = \sum_{i,j=1}^m X_i \langle A_H X_i, X_j \rangle X_j \\
&= \sum_{i,j=1}^m X_i \langle B(X_i, X_j), H \rangle X_j = \sum_{i,j=1}^m X_i \langle \nabla_{X_j}^\perp X_i, H \rangle X_j \\
&= \sum_{i,j=1}^m \left\{ \langle \nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_j}^\perp X_i, H \rangle + \langle \nabla_{X_j}^\perp X_i, \nabla_{X_i}^\perp H \rangle \right\} X_j \\
&= \sum_{i,j=1}^m \left\{ \langle \nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_j}^\perp X_i, H \rangle + \langle B(X_i, X_j), \nabla_{X_i}^\perp H \rangle \right\} X_j \\
&= \sum_{i,j=1}^m \langle \nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_j}^\perp X_i, H \rangle X_j + \sum_{i=1}^m A_{\nabla_{X_i}^\perp H} X_i.
\end{aligned}$$

Como para cada $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \langle \nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_j}^\perp X_i, H \rangle &= \sum_{i=1}^m \left\{ \langle \tilde{R}(X_i, X_j) X_i, H \rangle + \langle \nabla_{X_j}^\perp \nabla_{X_i}^\perp X_i, H \rangle \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{ \langle \tilde{R}(X_i, H) X_i, X_j \rangle + \langle \nabla_{X_j}^\perp B(X_i, X_i), H \rangle \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{ \langle \tilde{R}(X_i, H) X_i, X_j \rangle + \langle \nabla_{X_j}^\perp B(X_i, X_i), H \rangle \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \langle \tilde{R}(X_i, H) X_i, X_j \rangle + \frac{m}{2} X_j |H|^2,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\text{tr} \nabla A_H = \sum_{i,j=1}^m \left\{ \langle \tilde{R}(X_i, H) X_i, X_j \rangle X_j + \frac{m}{2} X_j |H|^2 \right\} + \text{tr} A_{\nabla^\perp H}.$$

Substituindo esta expressão em ΔH , obtemos que ι é biharmônica se, e somente se, a Equação (2.2) é satisfeita. \square

No caso em que o espaço ambiente é um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^2(4c)$, de curvatura seccional quaterniônica $4c$, nós obtemos o seguinte resultado

Proposição 2.1 *Seja M^m uma subvariedade de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$ com segunda forma fundamental B , operador de Weingarten A e campo de vetores curvatura média H . Então M^m é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{tr}B(\cdot, A_H) - cmH + 3c \sum_{k=1}^3 N_k T_k H = 0 \\ \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) + 2\text{tr}A_{\nabla^\perp H} + 6c \sum_{k=1}^3 P_k T_k H = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde os operadores N_k, T_k e P_k são os dados nas decomposições (1.5) e (1.6).

Demonstração: O tensor curvatura de um espaço forma quaterniônico é dado pela Equação (2.1). Seja $\{X_i\}_{i=1}^m$ um referencial local em M^m . Temos

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\tilde{R}(\cdot, H)\cdot \right) &= c \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{g}(H, X_i)X_i - \tilde{g}(X_i, X_i)H \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(J_k H, X_i)J_k X_i \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(J_k X_i, X_i)J_k H \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(X_i, J_k H)J_k X_i \right\} \\ &= -cmH + 3c \sum_{k=1}^3 J_k(T_k H) \\ &= -cmH + 3c \sum_{k=1}^3 \{P_k T_k H + N_k T_k H\}. \end{aligned}$$

Como $P_k T_k H$ é tangente e $N_k T_k H$ é normal, pela identificação das partes tangente e normal na Equação (2.2) obtemos o resultado da proposição. \square

A seguir destacamos algumas classes de subvariedades de uma variedade Kähler quaterniônica: Sejam \tilde{M} uma variedade Kähler quaterniônica e M^m uma subvariedade de \tilde{M} . Então, (Veja [28, 38]):

- (a) M é chamada uma subvariedade quaterniônica de \tilde{M} se M satisfaz $J(T_p M) \subset T_p M$, para qualquer seção $J \in \mathcal{V}$ e qualquer ponto $p \in M$.
- (b) M é chamada uma subvariedade totalmente real de \tilde{M} se M satisfaz $J(T_p M) \perp T_p M$, para qualquer $J \in \mathcal{V}$ e qualquer ponto $p \in M$.

- (c) M é chamada uma subvariedade totalmente complexa de \tilde{M} se existe um subfibrado \mathcal{V}_0 de posto 1 de \mathcal{V} tal que $J(TM) \subset TM$, $\forall J \in \mathcal{V}_0$ e $J'(TM) \perp TM$ para $J' \in \mathcal{V}$ e $J' \perp \mathcal{V}_0$.
- (d) M é chamada uma subvariedade anti-quaterniônica (ou anti-invariante) de \tilde{M} se M satisfaz $J(T_p^\perp M) \perp T_p^\perp M$, para qualquer seção $J \in \mathcal{V}$ e qualquer ponto $p \in M$.

As subvariedades quaterniônicas e as totalmente complexas de uma variedade Kähler quaterniônica são exemplos triviais de subvariedades biharmônicas. De fato, essas duas classes de subvariedades são mínimas, i.e., harmônicas e, conseqüentemente, são biharmônicas. Para verificar tal afirmação, reportamos aos trabalhos de Funabashi [28, Proposition 2.2] e Chen [4, Lemma 4].

Estabeleceremos agora os principais resultados desta seção, a saber: encontramos as equações que as subvariedades anti-quaterniônicas e as totalmente reais de um espaço forma quaterniônico devem satisfazer para que sejam subvariedades biharmônicas.

Teorema 2.1 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$. Então, M^m é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{tr} B(\cdot, A_H) - c(m+9)H = 0 \\ \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) + 2\text{tr} A_{\nabla^\perp H} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Demonstração: De fato, basta observar que se M^m é uma subvariedade anti-quaterniônica de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$, então temos $F_k = 0$ em (1.6) e a partir de (1.10) o resultado segue. \square

Teorema 2.2 *Seja M^m uma subvariedade totalmente real de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$. Então M^m é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{tr}(B(\cdot, A_H)) - cmH - 3c \sum_{k=1}^3 (H + F_k^2 H) = 0 \\ \frac{m}{2} \text{grad}|H|^2 + 2\text{tr}(A_{\nabla^\perp H}) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Demonstração: De fato, se M^m é uma subvariedade totalmente real de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$, então $P_k = 0$ em (1.5) e a partir de (1.10) obtemos o resultado. \square

Hipersuperfícies reais são exemplos típicos de subvariedades anti-quaterniônicas, enquanto que as curvas diferenciáveis são exemplos de subvariedades totalmente reais. Shibuya [38, Lemma 5.3] mostrou que uma subvariedade de uma variedade Kähler quaterniônica não pode ser totalmente real e anti-quaterniônica ao mesmo tempo. De fato, se M^m é subvariedade anti-quaterniônica e totalmente real ao mesmo tempo de uma variedade Kähler quaterniônica $\tilde{M}^{\tilde{m}}$ de dimensão real $4\tilde{m}$, então obtemos imediatamente que $m \leq \tilde{m}$ e $m \geq 3\tilde{m}$, o que é uma contradição.

Observação 2.1 *No caso complexo, a condição correspondente para anti-quaterniônica é anti-holomorfa. Além disso, é possível que uma subvariedade de uma variedade Kähler seja totalmente real e anti-holomorfa ao mesmo tempo.*

Uma classe especial de subvariedades consiste das subvariedades com **curvatura média paralela** (PMC), que são aquelas tais que $\nabla^\perp H = 0$. Para esta classe de subvariedades os Teoremas 2.1 e 2.2 se escrevem como segue.

Corolário 2.1 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica PMC de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$. Então M^m é biharmônica se, e somente se,*

$$\text{tr}B(\cdot, A_H) = c(m + 9)H.$$

Corolário 2.2 *Seja M^m uma subvariedade totalmente real PMC de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$. Então M^m é biharmônica se, e somente se,*

$$\text{tr}(B(\cdot, A_H)) = cmH + 3c \sum_{i=1}^3 (H + F_i^2 H).$$

Neste cenário também reobtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.3 (Ichiyama, Inoguchi & Urakawa [34]) *Seja M^{4n-1} uma hipersuperfície de um espaço forma quaterniônico $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$ com curvatura média constante não nula H . Então, M^{4n-1} é biharmônica se, e somente se,*

$$|B|^2 = 4c(n + 2).$$

Observação 2.2 *Em particular, a norma da segunda forma fundamental de M^{4n-1} é constante.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.1, uma hipersuperfície M^{4n-1} de $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}^n(4c)$ é biharmônica se, e somente se,

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \operatorname{tr} B(\cdot, A_H) - c(4n + 8)H = 0 \\ \frac{m}{2} \operatorname{grad}(|H|^2) + 2\operatorname{tr}(A_{\nabla^\perp H}) = 0. \end{cases}$$

Se M tem curvatura média constante, a segunda equação é trivialmente satisfeita e a primeira se torna

$$\operatorname{tr} B(\cdot, A_H) = c(4n + 8)H.$$

Além disso, denotando por $A = A_\eta$ o operador de Weingarten com respeito a uma seção unitária (local) η no fibrado normal, temos $A_H = HA$, que implica

$$\operatorname{tr} B(\cdot, A_H) = H \operatorname{tr} B(\cdot, A) = H|B|^2.$$

Finalmente, como H é uma constante não nula, obtemos $|B|^2 = 4c(n + 2)$. □

Observação 2.3 *Uma consequência imediata do Corolário 2.3 é o fato de que não existem hipersuperfícies biharmônicas-próprias CMC em um espaço forma quaterniônico de curvatura seccional quaterniônica não positiva. No Capítulo 3 nos preocuparemos apenas com os casos onde o espaço ambiente é um espaço forma quaterniônico de curvatura seccional quaterniônica positiva. Uma motivação parcial para isto é que o Corolário 2.3 exclui o caso $c \leq 0$.*

Capítulo 3

Subvariedades Biharmônicas do Espaço Projetivo Quaterniônico

Considere uma fibração $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ compatível com a fibração de Hopf quaterniônica $\pi : \mathbb{S}^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ dada na Seção 1.6, onde \bar{M} é uma subvariedade real de $\mathbb{H}P^n$ e $M = \pi^{-1}(\bar{M})$ é uma subvariedade de \mathbb{S}^{4n+3} . Mais precisamente, $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ é uma fibração com fibras totalmente geodésicas tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{S}^{4n+3} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \bar{M} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathbb{H}P^n \end{array}$$

Esta submersão tem muitas propriedades interessantes como, por exemplo, preservar harmonicidade (ver Shibuya [38]). Muito embora esta submersão não preserve biharmonicidade (ver Loubeau & Oniciuc [14]), ela nos fornece o estereótipo de construção de subvariedades biharmônicas em $\mathbb{H}P^n$, como veremos a seguir.

3.1 Equadores generalizados $M_{p,q}^{\mathbb{H}}(r, s)$ em $\mathbb{H}P^n$

Em [19] Lawson introduziu o conceito de equador generalizado $M_{p,q}^{\mathbb{H}}$, que é mínimo em $\mathbb{H}P^n$. Um equador generalizado $M_{p,q}^{\mathbb{H}}$ é o espaço base da fibração $\mathbb{S}^3 \rightarrow M_{4p+3,4q+3} \rightarrow M_{p,q}^{\mathbb{H}}$, onde

$$M_{4p+3,4q+3} = \mathbb{S}^{4p+3} \left(\sqrt{\frac{4p+3}{4n+2}} \right) \times \mathbb{S}^{4q+3} \left(\sqrt{\frac{4q+3}{4n+2}} \right), \quad \text{com } p+q = n-1,$$

é o toro de Clifford. Assim, chamamos $M_{p,q}^{\mathbb{H}}(r, s)$ o equador generalizado na categoria biharmônica, que não é sempre mínimo. Como o toro de Clifford generalizado em \mathbb{S}^{4n+3} tem curvatura média constante, o mesmo acontece com $M_{p,q}^{\mathbb{H}}(r, s)$.

É conhecido que uma subvariedade M , de dimensão m , da esfera Euclidiana é biharmônica-própria se, e somente se, a seguinte equação é satisfeita (ver por exemplo [5], [7]-[9] e [12]),

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{tr}B(\cdot, A_H) - mH = 0 \\ \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) + 2\text{tr}A_{\nabla^\perp H} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Além disso, se assumirmos que M tem campo de vetores curvatura média paralelo, então a equação biharmônica se torna

$$\text{tr}B(\cdot, A_H) = mH. \quad (3.2)$$

Usando o Corolário 2.3, obtemos que $M_{p,q}^{\mathbb{H}}(r, s)$ é uma subvariedade biharmônica-própria de $\mathbb{H}P^n$ se, e somente se, $|\bar{B}|^2 = 4(n+2)$. Por outro lado, sabemos de [19] que $|\bar{B}|^2 = |B|^2 - 6$, onde B é a segunda forma fundamental do toro de Clifford generalizado em \mathbb{S}^{4n+3} . Combinando com o fato de que $|B|^2 = \left(\frac{s}{r}\right)^2(4p+3) + \left(\frac{r}{s}\right)^2(4q+3)$, obtemos que $M_{p,q}^{\mathbb{H}}(r, s)$ é uma subvariedade biharmônica-própria de $\mathbb{H}P^n$ se, e somente se,

$$\left(\frac{s}{r}\right)^2(4p+3) + \left(\frac{r}{s}\right)^2(4q+3) = 4(n+2) + 6.$$

3.2 A fibração de Hopf quaterniônica e a equação biharmônica

Consideremos novamente uma fibração $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ compatível com a aplicação de Hopf $\pi : \mathbb{S}^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$. Iremos agora encontrar a relação entre o campo de bitensão da inclusão $\bar{\iota}$ e o campo de bitensão da inclusão ι . Para tanto, iniciamos com o seguinte

Lema 3.1 *Sejam $X = \bar{X}^H \in \Gamma(TM)$, onde $\bar{X} \in \Gamma(T\bar{M})$, e $V = \bar{V}^H \in \Gamma(\iota^{-1}T\mathbb{S}^{4n+3})$, onde $\bar{V} \in \Gamma(\bar{\iota}^{-1}T\mathbb{H}P^n)$. Então*

$$\begin{aligned} \nabla_X^\iota V &= (\nabla_{\bar{X}}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + g(V, IX)\xi + g(V, JX)\eta + g(V, KX)\zeta \\ &= (\nabla_{\bar{X}}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + (\bar{g}(\bar{V}, I'\bar{X}) \circ \pi)\xi + (\bar{g}(\bar{V}, J'\bar{X}) \circ \pi)\eta + (\bar{g}(\bar{V}, K'\bar{X}) \circ \pi)\zeta, \end{aligned}$$

onde ∇^ι e $\nabla^{\bar{\iota}}$ denotam as conexões nos fibrados $\iota^{-1}T\mathbb{S}^{4n+3}$ e $\bar{\iota}^{-1}T\mathbb{H}P^n$, respectivamente.

Demonstração: Este resultado segue imediatamente da equação (1.18). \square

A partir do Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned} g((\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H, IX) &= g(\nabla_X^\iota V, IX) - g(V, IX)g(\xi, IX) \\ &\quad - g(V, JX)g(\eta, IX) - g(V, KX)g(\zeta, IX) \\ &= g(\nabla_X^\iota V, IX). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} g((\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H, JX) &= g(\nabla_X^\iota V, JX), \\ g((\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H, KX) &= g(\nabla_X^\iota V, KX). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para os resultados a seguir é conveniente usarmos as seguintes notações: $\Psi_1 = I$, $\Psi_2 = J$, $\Psi_3 = K$, $\psi_1 = \xi$, $\psi_2 = \eta$, $\psi_3 = \zeta$.

Lema 3.2 *Se $V = \bar{V}^H \in \Gamma(\iota^{-1}T\mathbb{S}^{4n+3})$, com $\bar{V} \in \Gamma(\bar{\iota}^{-1}T\mathbb{H}P^n)$, então*

$$\begin{aligned} \Delta^\iota V &= (\Delta^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + 2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{div}(\Psi_k V)^\top \psi_k + \sum_{k=1}^3 g(V, \Psi_k \tau(\iota)) \psi_k + 3V - \sum_{i=1}^{\bar{m}} \Psi_k (\Psi_k V)^\top \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i) \psi_k - \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(V, \Psi_k X_i) (\omega_{k+2}(X_i) \psi_{k+1} - \omega_{k+1}(X_i) \psi_{k+2}) \right\} \end{aligned}$$

onde Δ^ι e $\Delta^{\bar{\iota}}$ são os traço-Laplacianos agindo nas seções de $\iota^{-1}(T\mathbb{S}^{4n+3})$ e $\bar{\iota}^{-1}(T\mathbb{H}P^n)$, respectivamente, enquanto V^\top denota a componente de V tangente a M .

Demonstração: O traço-Laplaciano $\Delta^\iota V$ é dado por

$$-\Delta^\iota V = \sum_{i=1}^{\bar{m}} \{ \nabla_{X_i}^\iota \nabla_{X_i}^\iota V - \nabla_{\nabla_{X_i}^M X_i}^\iota V \} + \sum_{k=1}^3 \{ \nabla_{\psi_k}^\iota \nabla_{\psi_k}^\iota V - \nabla_{\nabla_{\psi_k}^M \psi_k}^\iota V \},$$

onde $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^{\bar{m}}$ é um referencial ortonormal local de campos tangentes a \bar{M} , $1 \leq \bar{m} \leq 4n - 1$. Calculamos cada termo separadamente. Primeiramente, a partir do Lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_{X_i}^\iota \nabla_{X_i}^\iota V &= (\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \left\{ g((\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H, \Psi_k X_i) \psi_k + X_i g(V, \Psi_k X_i) \psi_k + g(V, \Psi_k X_i) \nabla_{X_i}^\iota \psi_k \right\} \end{aligned}$$

Usando as igualdades (3.3) e (3.4) e a compatibilidade da métrica, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_{X_i}^\iota \nabla_{X_i}^\iota V &= (\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + 2 \sum_{k=1}^3 g(\nabla_{X_i}^\iota V, \Psi_k X_i) \psi_k + \sum_{k=1}^3 g(V, \nabla_{X_i}^\iota \Psi_k X_i) \psi_k \\ &+ \sum_{k=1}^3 g(V, \Psi_k X_i) \nabla_{X_i}^\iota \psi_k.\end{aligned}$$

Veja que

$$\sum_{k=1}^3 g(V, \nabla_{X_i}^\iota \Psi_k X_i) \psi_k = \sum_{k=1}^3 g(V, D_{X_i} \Psi_k X_i) \psi_k = \sum_{k=1}^3 g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i + \Psi(\nabla_{X_i}^\iota X_i)) \psi_k.$$

Então,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_i}^\iota \nabla_{X_i}^\iota V &= (\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + 2 \sum_{k=1}^3 g(\nabla_{X_i}^\iota V, \Psi_k X_i) \psi_k + \sum_{k=1}^3 g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i) \psi_k \quad (3.5) \\ &+ \sum_{k=1}^3 g(V, \Psi(\nabla_{X_i}^\iota X_i)) \psi_k + \sum_{k=1}^3 g(V, \Psi_k X_i) \nabla_{X_i}^\iota \psi_k.\end{aligned}$$

Prosseguindo, temos

$$\nabla_{\nabla_{X_i}^M X_i}^\iota V = \left(\nabla_{\nabla_{\bar{X}_i}^{\bar{M}} \bar{X}_i}^{\bar{\iota}} \bar{V} \right)^H + \sum_{k=1}^3 g(V, \Psi_k \nabla_{X_i}^M X_i) \psi_k. \quad (3.6)$$

Usando (3.5) e (3.6) obtemos que

$$\begin{aligned}-\Delta^\iota V &= -(\Delta^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \left\{ 2 \sum_{k=1}^3 g(\nabla_{X_i}^\iota V, \Psi_k X_i) \psi_k + \sum_{k=1}^3 g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^3 g(V, \Psi_k (\nabla_{X_i}^\iota X_i - \nabla_{X_i}^M X_i)) \psi_k + \sum_{k=1}^3 g(V, \Psi_k X_i) \nabla_{X_i}^\iota \psi_k \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^3 \nabla_{\psi_k}^\iota \nabla_{\psi_k}^\iota V. \\ &= -(\Delta^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + \sum_{k=1}^3 \left\{ 2 \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(\nabla_{X_i}^\iota V, \Psi_k X_i) \psi_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i) \psi_k + g(V, \Psi_k \tau(\iota)) \psi_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(V, \Psi_k X_i) \nabla_{X_i}^\iota \psi_k + \nabla_{\psi_k}^\iota \nabla_{\psi_k}^\iota V \right\}.\end{aligned}$$

Para finalizar esta primeira parte, usando (1.14) e (1.15), temos que

$$\nabla_{X_i}^\iota \psi_k = \omega_{k+2}(X_i) \psi_{k+1} - \omega_{k+1}(X_i) \psi_{k+2} - \Psi_k X_i,$$

e então,

$$\begin{aligned}
-\Delta^\iota V &= -(\Delta^{\bar{\iota}} \bar{V})^H + \sum_{k=1}^3 \left\{ 2 \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(\nabla_{X_i}^\iota V, \Psi_k X_i) \psi_k \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i) \psi_k + g(V, \Psi_k \tau(\iota)) \psi_k \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(V, \Psi_k X_i) (\omega_{k+2}(X_i) \psi_{k+1} - \omega_{k+1}(X_i) \psi_{k+2}) \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \Psi_k (\Psi_k V)^\top + \nabla_{\psi_k}^\iota \nabla_{\psi_k}^\iota V \right\}
\end{aligned}$$

Agora calcularemos os termos extras da equação acima

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\bar{m}} g(\nabla_{X_i}^\iota V, \Psi_k X_i) &= \sum_{i=1}^{\bar{m}} \left\{ -X_i g(\Psi_k V, X_i) - g(V, \nabla_{X_i}^\iota \Psi_k X_i) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{\bar{m}} \left\{ -X_i g(\Psi_k V, X_i) - g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i + \Psi_k (\nabla_{X_i}^\iota X_i)) \right\} \quad (3.7) \\
&= \sum_{i=1}^{\bar{m}} \left\{ -X_i g(\Psi_k V, X_i) - g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i) \right. \\
&\quad \left. + g(\Psi_k V, (\tau(\iota))) + g(\Psi_k V, \nabla_{X_i}^M X_i) \right\} \\
&= g(\Psi_k V, (\tau(\iota))) - \operatorname{div}(\Psi_k V)^\top - \sum_{i=1}^{\bar{m}} g(V, (\tilde{D}_{X_i} \Psi_k) X_i).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\nabla_{\psi_k}^\iota V = \mathcal{H}(\nabla_{\psi_k}^\iota V) + \sum_{l=1}^3 g(\nabla_{\psi_k}^\iota V, \psi_l) \psi_l = \mathcal{H}(\nabla_{\psi_k}^\iota V) = -\Psi_k V,$$

que nos dá

$$\nabla_{\psi_k}^\iota \nabla_{\psi_k}^\iota V = -V.$$

□

Antes de fornecer a relação entre os campos de bitensão, precisamos calcular o traço dos operadores curvatura. Um deles fica imediatamente

$$-\operatorname{tr} R^{\mathbb{S}^{4n+1}}(d\iota, \tau(\iota)) d\iota = (\bar{m} + 3) \tau(\iota) \quad (3.8)$$

e

$$-\operatorname{tr} R^{\mathbb{H}P^n}(d\bar{\iota}, \tau(\bar{\iota})) d\bar{\iota} = \bar{m} \tau(\bar{\iota}) - 3 \sum_{i=1}^3 \Psi_k (\Psi_k \tau(\iota))^\top. \quad (3.9)$$

Estamos agora em posição de enunciar o principal teorema desta seção, a saber.

Teorema 3.1 *Seja \bar{M} uma subvariedade real de $\mathbb{H}P^n$ de dimensão \bar{m} e denote por $M := \pi^{-1}(\bar{M})$ seu correspondente tubo de Hopf. Se denotarmos por $\bar{\iota} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ e $\iota : M \rightarrow \mathbb{S}^{4n+1}$ as respectivas inclusões, temos que*

$$(\tau_2(\bar{\iota}))^H = \tau_2(\iota) - 4 \sum_{k=1}^3 \Psi_k(\Psi_k \tau(\iota)^\top) + 2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{div}(\Psi_k \tau(\iota)^\top) \psi_k. \quad (3.10)$$

Demonstração: A expressão do campo de bitensão (1.2) juntamente com (3.8) nos dá

$$\tau_2(\iota) = -\Delta^\iota \tau(\iota) + (\bar{m} + 3)\tau(\iota).$$

Como $\tau(\iota) = \tau(\bar{\iota})^H$, usando o Lema 3.2 juntamente com (3.9) temos

$$\begin{aligned} \tau_2(\iota) &= -(\Delta^{\bar{\iota}} \tau(\bar{\iota}))^H - 2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{div}(\Psi_k \tau(\iota)^\top) \psi_k - 3\tau(\iota) + \sum_{k=1}^3 \Psi_k(\Psi_k \tau(\iota)^\top) + (\bar{m} + 3)\tau(\iota) \\ &= -(\Delta^{\bar{\iota}} \tau(\bar{\iota}))^H - 2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{div}(\Psi_k \tau(\iota)^\top) \psi_k + \bar{m}\tau(\iota) + \sum_{k=1}^3 \Psi_k(\Psi_k \tau(\iota)^\top) \\ &= (\tau_2(\bar{\iota}))^H + 4 \sum_{k=1}^3 \Psi_k(\Psi_k \tau(\iota)^\top) - 2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{div}(\Psi_k \tau(\iota)^\top) \psi_k. \end{aligned}$$

□

Usando o levantamento horizontal, podemos escrever (3.10) da forma

$$(\tau_2(\bar{\iota}))^H = \tau_2(\iota) - 4 \sum_{k=1}^3 (\Psi'_k(\Psi'_k \tau(\iota)^\top))^H + 2 \sum_{k=1}^3 \left(\operatorname{div}_{\bar{M}}(\Psi'_k \tau(\iota)^\top) \circ \pi \right) \psi_k.$$

Ademais, se cada $\Psi_k \tau(\iota)$ for tangente a M , então $\tau_2(\bar{\iota}) = 0$ e cada $(\operatorname{div}_{\bar{M}}(\Psi'_k \tau(\iota)^\top)) = 0$ se, e somente se, $\tau_2(\iota) + 12\tau(\iota) = 0$.

3.3 Subvariedades biharmônicas PMC de $\mathbb{H}P^n$

A proposição a seguir é motivada pelo Corolário 2.3. Ela nos dá uma limitação inferior para o quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma subvariedade anti-quaterniônica biharmônica própria PMC de $\mathbb{H}P^n$ e, como consequência, obtemos uma estimativa para a curvatura escalar da subvariedade em termos do quadrado da norma de seu campo de vetores curvatura média.

Proposição 3.1 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica de $\mathbb{H}P^n$, com segunda forma fundamental B . Se M é biharmônica-própria PMC, então $|B|^2 \geq m + 9$. Em particular, se $m = 3n$, a curvatura escalar de M satisfaz*

$$Scal_M \leq 9n^2(1 + |H|^2) + 18n - 9.$$

Demonstração: Assumindo primeiramente que $H(p) \neq 0$ em cada ponto $p \in M$, obtemos

$$\begin{aligned} |A_H|^2 &= \sum_{i=1}^m \tilde{g}(A_H e_i, A_H e_i) = \sum_{i,j=1}^m \tilde{g}(A_H e_i, e_j)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^m \tilde{g}(B(e_i, e_j), H)^2 \leq |H|^2 |B|^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por outro lado, usando o Corolário 2.1 obtemos que

$$|A_H|^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{g}(A_H e_i, A_H e_i) = \sum_{i=1}^m \tilde{g}(B(e_i, A_H e_i), H) = (m + 9)|H|^2.$$

Como $|H|^2$ é não nula, por meio de (3.11) obtemos $|B|^2 \geq m + 9$. Agora, usando a expressão do tensor curvatura \tilde{R} de $\mathbb{H}P^n$ na equação de Gauss,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle,$$

e tomando o traço, obtemos

$$\begin{aligned} Ric_M(Y, Z) &= (m - 1)\tilde{g}(Y, Z) + 3 \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(P_k Y, P_k Z) \\ &\quad + m\tilde{g}(H, B(Y, Z)) - \sum_{i=1}^m \tilde{g}(B(e_i, Y), B(e_i, Z)). \end{aligned}$$

Considerando agora um referencial ortonormal local $\{\eta_\alpha\}_{\alpha=1}^{4n-m}$ de campos de vetores normais a M , temos para cada $k = 1, 2, 3$ que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(Y, Z) &= \tilde{g}(J_k Y, J_k Z) \\ &= \tilde{g}\left(P_k Y + \sum_{\alpha=1}^{4n-m} \tilde{g}(J_k Y, \eta_\alpha)\eta_\alpha, P_k Z + \sum_{\beta=1}^{4n-m} \tilde{g}(J_k Z, \eta_\beta)\eta_\beta\right) \\ &= \tilde{g}(P_k Y, P_k Z) + \sum_{\alpha=1}^{4n-m} \tilde{g}(J_k Y, \eta_\alpha)\tilde{g}(J_k Z, \eta_\alpha), \end{aligned}$$

e, usando o fato de M ser anti-quaternioniônica, obtemos

$$\tilde{g}(P_k Y, P_k Z) = \tilde{g}(Y, Z) - \sum_{\alpha=1}^{4n-m} \tilde{g}(Y, J_k \eta_\alpha) \tilde{g}(Z, J_k \eta_\alpha).$$

Substituindo na expressão do tensor de Ricci acima, obtemos

$$\begin{aligned} Ric_M(Y, Z) &= (m-1)\tilde{g}(Y, Z) \\ &+ 3 \sum_{k=1}^3 \left\{ \tilde{g}(Y, Z) - \sum_{\alpha=1}^{4n-m} \tilde{g}(Y, J_k \eta_\alpha) \tilde{g}(Z, J_k \eta_\alpha) \right\} \\ &+ m\tilde{g}(H, B(Y, Z)) - \sum_{i=1}^m \tilde{g}(B(e_i, Y), B(e_i, Z)). \end{aligned}$$

Tomando o traço novamente, encontramos

$$\begin{aligned} Scal_M &= m(m-1) + 3 \sum_{k=1}^3 \left\{ m - \sum_{\alpha=1}^{4n-m} |J_k \eta_\alpha|^2 \right\} + m^2 |H|^2 - |B|^2 \\ &= m^2(1 + |H|^2) + 17m - 36n - |B|^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Tomando $m = 3n$ e usando que $|B|^2 \geq m + 9$, segue que

$$Scal_M \leq m^2(1 + |H|^2) + 4m - 9.$$

□

No caso particular em que M é uma hipersuperfície de $\mathbb{H}P^n$ nós reobtemos o Corolário 2.3 e, a partir de (3.12) e do Corolário 2.1, conseguimos o seguinte resultado

Proposição 3.2 *Seja M^{4n-1} uma hipersuperfície real de $\mathbb{H}P^n$ com curvatura média constante não nula H . Então M é biharmônica própria se, e somente se,*

$$Scal_M = (4n-1)^2(1 + |H|^2) + 28n - 25.$$

Analogamente à Proposição 3.1, quando M é uma subvariedade totalmente real de $\mathbb{H}P^n$ obtemos

Proposição 3.3 *Seja M^m uma subvariedade totalmente real biharmônica-própria PMC de $\mathbb{H}P^n$. Então $|B|^2 \geq m$. Em particular,*

$$Scal_M \leq m^2(1 + |H|^2) - 2m.$$

Demonstração: Usando o Corolário 2.2 na expressão

$$|A_H|^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{g}(A_H e_i, A_H e_i) = \sum_{i=1}^m \tilde{g}(B(e_i, A_H e_i), H), \quad (3.13)$$

obtemos

$$\begin{aligned} |A_H|^2 &= m|H|^2 + 3 \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(H + F_k^2 H, H) \\ &= (m+9)|H|^2 - 3 \sum_{k=1}^3 |F_k H|^2. \end{aligned}$$

Como $|H|^2 \geq |F_k H|^2$, obtemos, por um lado,

$$(m+9)|H|^2 - 9|H|^2 \leq (m+9)|H|^2 - 3 \sum_{k=1}^3 |F_k H|^2 = |A_H|^2,$$

e, por outro lado (veja a demonstração da proposição anterior),

$$|A_H|^2 = (m+9)|H|^2 - 3 \sum_{k=1}^3 |F_k H|^2 \leq |H|^2 |B|^2.$$

Como H é não nulo em todo ponto, segue daí que $m \leq |B|^2$.

Agora, usando a expressão do tensor curvatura de $\mathbb{H}P^n$ na equação de Gauss, e tomando o traço, obtemos

$$\begin{aligned} Ric_M(Y, Z) &= (m+1)\tilde{g}(Y, Z) + 3 \sum_{k=1}^3 \tilde{g}(P_k Y, P_k Z) \\ &\quad + m\tilde{g}(H, B(Y, Z)) - \sum_{i=1}^m (B(e_i, Y), B(e_i, Z)). \end{aligned}$$

Tomando o traço novamente, encontramos

$$Scal_M = m(m-1) + m^2|H|^2 - |B|^2.$$

Como $|B|^2 \geq m$, segue que

$$Scal_M \leq m(m-2) + m^2|H|^2 = m^2(1 + |H|^2) - 2m.$$

□

Quando uma subvariedade anti-quaterniônica biharmônica é compacta, encontramos a seguinte limitação para $|H|^2$.

Teorema 3.2 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica biharmônica-própria compacta de $\mathbb{H}P^n$. Então:*

(a) *Existe um ponto $p \in M$ tal que $|A_H(p)|^2 < (m + 9)|H(p)|^2$*

ou

(b) *$|A_H|^2 = (m+9)|H|^2$. Neste caso, a subvariedade M é PMC com $|H|^2 \in (0, \frac{m+9}{m}]$.*

Demonstração: Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica biharmônica-própria de $\mathbb{H}P^n$. A primeira equação de (2.4) implica que

$$\Delta^\perp H = (m + 9)H - \text{tr}(B \cdot, A_H(\cdot)).$$

Tomando o produto escalar com H e substituindo na fórmula de Weitzenböck

$$\frac{1}{2}\Delta|H|^2 = \langle \Delta^\perp H, H \rangle - |\nabla^\perp H|^2, \quad (3.14)$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|H|^2 = (m + 9)|H|^2 - |A_H|^2 - |\nabla^\perp H|^2. \quad (3.15)$$

Como M é compacta, integrando a Equação (3.15) em M deduzimos que

$$\int_M [(m + 9)|H|^2 - |A_H|^2] dM \geq 0.$$

Donde provamos o item (a) e a primeira parte do item (b). Seja agora p um ponto arbitrário de M e seja $\{X_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal de $T_p M$ tal que $A_H(X_i) = \lambda_i X_i$.

Temos

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{i=1}^m \langle A_H X_i, X_i \rangle = m|H|^2,$$

ou, equivalentemente,

$$|H|^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{m}.$$

Então, o quadrado da norma de A_H se torna

$$|A_H|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2.$$

Substituindo na Equação (3.15) obtemos

$$(m + 9) \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{m} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 + |\nabla^\perp H|^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^m \lambda_i)^2}{m} + |\nabla^\perp H|^2.$$

Portanto,

$$(m + 9)|H|^2 \geq m|H|^4 + |\nabla^\perp H|^2 \geq m|H|^4.$$

Assim,

$$|H|^2 \in (0, \frac{m+9}{m}].$$

Além disso, integrando (3.15), obtemos $\nabla^\perp H = 0$ e concluímos a prova. \square

3.4 Subvariedades pseudo-umbílicas biharmônicas de

$\mathbb{H}P^n$

Observando que no espaço projetivo quaterniônico não existem subvariedades totalmente umbílicas além das totalmente geodésicas (ver B.Y. Chen [3]), consideremos as subvariedades **pseudo-umbílicas**, isto é, as subvariedades de $\mathbb{H}P^n$ satisfazendo $A_H = |H|^2 I$. Ainda motivados pelo Corolário 2.3, e também pela Proposição 3.1, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.4 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica pseudo-umbílica biharmônica própria de $\mathbb{H}P^n$. Então $|B|^2 \geq m|H|^2$. Em particular, a curvatura escalar de M satisfaz*

$$Scal_M \leq m^2(1 + |H|^2) + m(17 - |H|^2) - 36n.$$

Demonstração: Como visto na demonstração da Proposição 3.1, a curvatura escalar de M tem a expressão

$$Scal_M = m^2(1 + |H|^2) + 17m - 36n - |B|^2.$$

Usando que $|A_H|^2 \leq |H|^2|B|^2$, e do fato de M ser pseudo-umbílica, obtemos que

$$m|H|^4 = \sum_{i=1}^m \tilde{g}(|H|^2 e_i, |H|^2 e_i) = \sum_{i=1}^m \tilde{g}(A_H e_i, A_H e_i) = |A_H|^2 \leq |H|^2|B|^2.$$

Isto é, $m|H|^2 \leq |B|^2$. Substituindo na expressão da curvatura escalar de M , obtemos que

$$\begin{aligned} Scal_M &\leq m(m-1) + 18m - 36n + m^2|H|^2 - m|H|^4 \\ &= m^2(1 + |H|^2) + m(17 - |H|^2) - 36n. \end{aligned}$$

□

Se a condição de compacidade no Teorema 3.2 for substituída pela condição de função curvatura média constante, usando a mesma técnica da demonstração do Teorema 3.2, obtemos a seguinte

Proposição 3.5 *Seja M^m uma subvariedade anti-quaterniônica de $\mathbb{H}P^n$ com curvatura média constante não nula. Então temos as seguintes observações.*

- (a) *Se M é biharmônica-própria, então $|H|^2 \in (0, \frac{m+9}{m}]$.*
- (b) *Se $|H|^2 = \frac{m+9}{m}$, então M é biharmônica-própria se, e somente se, M é pseudo-umbílica e $\nabla^\perp H = 0$.*

Demonstração: Se M^m é uma subvariedade anti-quaterniônica biharmônica-própria de $\mathbb{H}P^n$. A primeira equação de (2.4) implica que

$$\langle \Delta^\perp H, H \rangle = (m+9)|H|^2 - |A_H|^2.$$

Usando a fórmula de Weitzenböck (3.14) e o fato que $|H|$ é constante, obtemos

$$(m+9)|H|^2 = |A_H|^2 + |\Delta^\perp H|^2. \quad (3.16)$$

Seja p um ponto arbitrário de M e seja $\{X_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal de $T_p M$ tal que $A_H(X_i) = \lambda_i X_i$. Temos em p que

$$|H|^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{m}.$$

e

$$|A_H|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2.$$

Substituindo em (3.16) obtemos

$$(m+9) \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{m} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 + |\nabla^\perp H|^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^m \lambda_i)^2}{m} + |\nabla^\perp H|^2.$$

Portanto,

$$(m+9)|H|^2 \geq m|H|^4 + |\nabla^\perp H|^2 \geq m|H|^4,$$

então,

$$|H|^2 \in (0, \frac{m+9}{m}].$$

Agora, assumamos que $|H|^2 = \frac{m+9}{m}$. Se M é biharmônica-própria, então todas as desigualdades acima são igualdades e, conseqüentemente, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$ e $\nabla^\perp H = 0$, i.e., M é pseudo-umbílica e $\nabla^\perp H = 0$. Reciprocamente, se $|H|^2 = \frac{m+9}{m}$ e M é pseudo-umbílica com $\nabla^\perp H = 0$, então temos

$$\Delta^\perp H + \text{tr}B(\cdot, A_H(\cdot)) - c(m+9)H = 0,$$

e

$$\frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) + 2\text{tr}A_{\nabla^\perp H} = 0.$$

Conseqüentemente, pelo Corolário 2.3, M é biharmônica. Isto conclui a prova. \square

Concluiremos este capítulo, e também a tese, com alguns resultados que tratam da estabilidade das subvariedades biharmônicas-próprias de $\mathbb{H}P^n$.

3.5 Subvariedades biharmônicas estáveis de $\mathbb{H}P^n$

Vimos na Seção 1.3 que as aplicações biharmônicas $f : M \rightarrow N$ com bienergia finita são precisamente os pontos críticos do funcional bienergia. Em particular, fixada uma tal f , a fim de investigar se ela é um mínimo do funcional bienergia $E_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ associado à variação própria $f_t : M \rightarrow N$, cumpre calcular a derivada segunda $E_2''(0)$. Nesse sentido, o resultado de interesse é a fórmula para a segunda variação da bienergia de uma aplicação biharmônica, obtida por Jiang [17], a saber:

Teorema 3.3 *Seja $f : (M^m, g) \rightarrow (\tilde{M}^n, \tilde{g})$ uma aplicação diferenciável entre variedades Riemannianas, M compacta, e seja $\{f_t\}_t$ uma variação arbitrária de f com campo variacional v . Então a segunda fórmula de variação de $\frac{1}{2}E_2(f_t)$ é dada como segue*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(f_t) \Big|_{t=0} &= \int_M \left| -\Delta v - \sum_{i=1}^m \tilde{R}(df(e_i), v) df(e_i) \right|^2 dM \\ &\quad - \int_M \left\langle v, \sum_{i=1}^m (\nabla_{df(e_i)} \tilde{R})(df(e_i), \tau(f))v \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + \sum_{i=1}^m (\nabla_{\tau(f)} \tilde{R})(df(e_i), v) df(e_i) \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + \sum_{i=1}^m \tilde{R}(\tau(f), v) \tau(f) \right\rangle \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i=1}^m \tilde{R}(df(e_i), v) \nabla_{e_i} \tau(f) \\
& + 2 \sum_{i=1}^m \tilde{R}(df(e_i), \tau(f)) \nabla_{e_i} v \rangle dM.
\end{aligned}$$

A partir da segunda fórmula de variação temos a seguinte definição.

Definição 3.1 *Uma aplicação biharmônica $f : (M^m, g) \rightarrow (\tilde{M}^n, \tilde{g})$, M compacta, é estável se $\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(f_t) \Big|_{t=0}$ é não negativo para toda variação $\{f_t\}_f$ de f .*

Observe que, pela definição da bienergia, qualquer aplicação harmônica é biharmônica estável. Isto também pode ser visto como segue: Como $\tau(f) = 0$, para qualquer campo de vetores V de qualquer variação $\{f_t\}_t$ temos

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(f_t) \Big|_{t=0} = \int_M \left| -\Delta v - \sum_{i=1}^m \tilde{R}(df(e_i), v) df(e_i) \right|^2 dM \geq 0.$$

O teorema a seguir nos dá uma limitação superior para o quadrado da norma do campo de bitensão de uma subvariedade compacta biharmônica-própria estável de $\mathbb{H}P^n$. Sua demonstração é feita usando uma técnica de Jiang [17]. Em seu trabalho, Jiang procurava obter condições para que uma subvariedade biharmônica estável do espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ fosse trivial (isto é, fosse harmônica).

Proposição 3.6 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{H}P^n$ uma subvariedade biharmônica-própria compacta de $\mathbb{H}P^n$. Se M é estável, então $|\tau(f)|^2 \leq 9\sqrt{2e(f)}|\bar{\nabla}\tau(f)|$ em pelo menos um ponto de M .*

Demonstração: Como $\mathbb{H}P^n$ é um espaço simétrico, temos $\nabla R^{\mathbb{H}P^n} = 0$, e então (3.17) se torna

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(f_t) \Big|_{t=0} &= \int_M \left| -\Delta v - \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{H}P^n}(df(e_i), v) df(e_i) \right|^2 dM \\
&\quad - \int_M \left\langle v, \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{H}P^n}(\tau(f), v) \tau(f) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 2 \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{H}P^n}(df(e_i), v) \nabla_{e_i} \tau(f) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 2 \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{H}P^n}(df(e_i), \tau(f)) \nabla_{e_i} v \right\rangle dM.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Em especial, como M é biharmônica, se tomarmos $v = \tau(f)$, o primeiro termo e o primeiro integrando do segundo termo de (3.18) se anulam, e então obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(f_t) \Big|_{t=0} = -4 \int_M \left\langle \tau(f), \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{H}P^n}(df(e_i), \tau(f)) \nabla_{e_i} \tau(f) \right\rangle dM. \quad (3.19)$$

Usando a expressão do tensor curvatura de $\mathbb{H}P^n$ e observando que $\tau(f)$ é ortogonal ao espaço tangente de M e a $J(\tau(f))$, para qualquer seção J na estrutura quaterniônica de $\mathbb{H}P^n$, a equação (3.19) se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(f_t) \Big|_{t=0} = & -4 \int_M \left\langle \tau(f), \sum_{i=1}^m \left\{ -\langle df(e_i), \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) \rangle \tau(f) \right. \right. \\ & + \sum_k \langle J_k(\tau(f)), \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) \rangle J_k(df(e_i)) \\ & \left. \left. + 2 \sum_k \langle df(e_i), J_k(\tau(f)) \rangle J_k(\bar{\nabla}_{e_i} \tau(f)) \right\} \right\rangle dM. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Veja que, para cada i ,

$$\langle df(e_i), \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) \rangle = e_i \langle df(e_i), \tau(f) \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} df(e_i), \tau(f) \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} df(e_i), \tau(f) \rangle$$

E então, somando em i , obtemos

$$\sum_{i=1}^m \langle df(e_i), \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) \rangle = -|\tau(f)|^2.$$

Substituindo em (3.19), obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(f_t) \Big|_{t=0} = 4 \int_M \left[-|\tau(f)|^4 + 3 \sum_{i=1}^m \sum_k \langle J_k(df(e_i)), \tau(f) \rangle \langle J_k \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f), \tau(f) \rangle \right] dM. \quad (3.21)$$

Para cada i e cada k , pela desigualdade de Schwarz, temos

$$\begin{aligned} & \langle J_k df(e_i), \tau(f) \rangle \langle J_k \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f), \tau(f) \rangle \leq \\ & \sqrt{\langle J_k df(e_i), J_k df(e_i) \rangle} \cdot |\tau(f)| \cdot \sqrt{\langle J_k \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f), J_k \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) \rangle} \cdot |\tau(f)| \\ & = |\tau(f)|^2 \cdot \sqrt{\langle df(e_i), df(e_i) \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f), \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) \rangle}. \end{aligned}$$

Tomando a soma sobre i e k novamente, e usando a desigualdade de Schwarz, obtemos que

$$\sum_{i=1}^m \sum_k \langle J_k df(e_i), \tau(f) \rangle \langle J_k \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f), \tau(f) \rangle \leq 3|\tau(f)|^2 \cdot \sqrt{2e(f)} |\bar{\nabla} \tau(f)|.$$

Substituindo em (3.21), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} E_2(\varphi_t) \Big|_{t=0} \leq 4 \int_M |\tau(f)|^2 (9\sqrt{2e(f)} |\bar{\nabla} \tau(f)| - |\tau(f)|^2) dM.$$

Por fim, como M é uma subvariedade biharmônica-própria estável de $\mathbb{H}P^n$ concluímos que, em pelo menos um ponto $p \in M$, $|\tau(f)|^2 \leq 9\sqrt{2e(f)} |\bar{\nabla} \tau(f)|$. \square

Proposição 3.7 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{H}P^n$ uma subvariedade biharmônica-própria compacta de $\mathbb{H}P^n$ com $|\tau(f)|^2$ constante. Então vale que*

$$\frac{1}{2} e(f) |\tau(f)|^2 \leq |\nabla \tau(f)|^2 \leq 2e(f) |\tau(f)|^2.$$

Demonstração: Calculando o Laplaciano da densidade de bienergia $e_2(f)$ de f , temos

$$\Delta e_2(f) = \frac{1}{2} \Delta |\tau(f)|^2 = |\nabla \tau(f)|^2 - \langle \Delta \tau(f), \tau(f) \rangle.$$

Usando que $|\tau(f)|^2$ é constante e que M é uma subvariedade biharmônica-própria, obtemos que

$$|\nabla \tau(f)|^2 = - \langle \text{tr} R^{\mathbb{H}P^n}(df, \tau(f)) df, \tau(f) \rangle.$$

Denotemos por $K^{\mathbb{H}P^n}(df(e_i) \wedge \tau(f))$ a curvatura seccional do plano gerado por $df(e_i)$ e $\tau(f)$. Como este plano é não degenerado, para cada i , temos (ver Ishihara [30])

$$\langle R^{\mathbb{H}P^n}(df, \tau(f)) df, \tau(f) \rangle = -K^{\mathbb{H}P^n}(df(e_i) \wedge \tau(f)) \langle df(e_i), df(e_i) \rangle \cdot |\tau(f)|^2.$$

Lembrando que a curvatura seccional de $\mathbb{H}P^n$ satisfaz (ver Ishihara [30])

$$\frac{1}{4} \leq K^{\mathbb{H}P^n}(df(e_i) \wedge \tau(f)) \leq 1,$$

obtemos

$$\frac{1}{2} e(f) |\tau(f)|^2 \leq - \langle \text{tr} R^{\mathbb{H}P^n}(df, \tau(f)) df, \tau(f) \rangle \leq 2e(f) |\tau(f)|^2.$$

Assim, temos

$$\frac{1}{2} e(f) |\tau(f)|^2 \leq |\nabla \tau(f)|^2 \leq 2e(f) |\tau(f)|^2.$$

\square

Teorema 3.4 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{H}P^n$ uma subvariedade biharmônica-própria compacta de $\mathbb{H}P^n$ com $|\tau(f)|^2$ constante. Se M é estável, então a função densidade de energia $e(f)$ satisfaz*

$$e(f) \geq \frac{|\tau(f)|}{18}.$$

Demonstração: Pela Proposição 3.6, existe um ponto $p \in M$ tal que

$$0 < |\tau(f)|^2 \leq 9\sqrt{2e(f)}|\nabla\tau(f)|.$$

Usando a Proposição 3.7, obtemos

$$|\tau(f)|^2 \leq 9\sqrt{2e(f)}|\nabla\tau(f)| \leq 18e(f)|\tau(f)|.$$

Então,

$$0 \leq |\tau(f)|(18e(f) - |\tau(f)|).$$

Como $|\tau(f)| > 0$ segue que $18e(f) - |\tau(f)| \geq 0$. □

Bibliografia

- [1] A.C.M. Neto, Tópicos de Geometria Diferencial, Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção: Fronteiras da Matemática, 2014, 1 Ed.
- [2] B.Y. Chen, Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, Ser. Pure Math., vol. 27, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2014, 2 Ed.
- [3] B.Y. Chen, Interaction of Legendre curves and Lagrangian submanifolds, Israel J. Math. 99 (1997) 69-108.
- [4] B.Y. Chen, Totally umbilical submanifolds of quaternion-space-forms, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 26 (1978) 154-162.
- [5] C. Oniciuc, Biharmonic maps between Riemannian manifolds, An. Ştiinţ. Univ. Al.I. Cuza Iaşi. Mat. 48 (2002) 237-248.
- [6] D.V. Alekseevsky, S. Marchiafava, Quaternionic structures on a manifold and subordinate structures, Ann. Mat. Purra Appl. 17 (1996) 205-273.
- [7] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, Classification results for biharmonic submanifolds in spheres, Israel J. Math. 168 (2008) 201-220.
- [8] A. Balmus, C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector field in spheres, J. Math. Anal. Appl. 386 (2012) 619-630.
- [9] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic PNMC submanifolds in spheres, Ark. Mat. 51 (2013) 197-221.
- [10] D. Fetcu, E. Loubeau, S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds of $\mathbb{C}P^n$, Math. Z. 266 (2010) 505-531.

- [11] D. Fetcu, C. Oniciuc, Explicit formulas for biharmonic submanifolds in Sasakian space forms, *Pac. J. Math.* 240 (1) (2009) 85-107.
- [12] D. Fetcu, C. Oniciuc, H. Rosenberg, Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, *J. Geom. Anal.* 23 (4) (2016) 2158-2176.
- [13] E. Abedi, Z. Nazari, On submersion and immersion submanifolds of a quaternionic projective space, *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica* 8 (1) (2016) 5-21.
- [14] E. Loubeau, C. Oniciuc, On the biharmonic and harmonic indices of the Hopf map, *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007) 5239-5256.
- [15] E. Loubeau, S. Montaldo, Biminimal immersions, *Pro. Edinb. Math. Soc.* 51 (2008) 421-437.
- [16] G. Y. Jiang, 2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds. *Chin. Ann. Math. Ser. A* 7 (2) (1986) 130-144.
- [17] G.Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, *Chin. Ann. Math. Ser. A* 7 (4) (1986) 389-402.
- [18] G.Y. Jiang, Some non-existence theorems of 2-harmonic isometric immersions into Euclidean spaces, *Chin. Ann. Math. Ser. A* 8 (1987) 376-383.
- [19] H.B. Lawson, Rigidity theorems in rank-1 symmetric spaces, *J. Differential Geometry*, 4 (1970) 349-357.
- [20] J.A. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, *J. Math. Mech.* 14 (1965) 1033-1047.
- [21] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* 86 (1964) 109-160.
- [22] L. Tang, Y.L. Ou, On the Generalized Chen's Conjecture on Biharmonic Submanifolds, *Michigan Math. J.* 61 (2012) 531-542.
- [23] K. Tsukada, Parallel submanifolds in a quaternion projective space, *Osaka J. Math.* 22 (1985) 187-241.

- [24] M. Falcitelli, S. Ianus, A.M. Pastore, Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific, Singapore/River Edge, 2004.
- [25] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds of \mathbb{S}^3 . *Internat. J. Math.* 12 (8) (2001) 867-876.
- [26] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds in spheres, *Israel J. Math.* 130 (2002) 109-123.
- [27] S. Funabashi, Totally real submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold, *Kodai Math. J.* 29 (1978) 261-270.
- [28] S. Funabashi, Totally complex submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold, *Kodai Math. J.* 2 (1979) 314-336.
- [29] S. Ishihara, M. Konishi, Differential geometry of fibred spaces, Study Group of Differential Geometry, Tokyo, 1973.
- [30] S. Ishihara, Quaternion Kahlerian manifolds, *J. Diff. Geometry* 9 (1974) 483-500.
- [31] S. Ishihara, Quaternion Kahlerian manifolds and fibred Riemannian spaces with Sasakian 3-structure, *Kodai Math. Sem. Rep.* 25 (1973) 321-329.
- [32] S. Marchiafava, Complex submanifolds of quaternionic Kähler manifolds. *Contemporary Geometry and Related Topics*, Univ. Belgrade, Fac. Math. Belgrade (2006) 325-335.
- [33] S. Sasaki, Almost contact manifolds I, II, Lecture note, (1965), Tôhoku Univ. (1965, 1967).
- [34] T. Ichiyama, J. Inoguchi, H. Urakawa, Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields. *Note Math.* 28(suppl 1) (2008) 233-275.
- [35] Y. Hatakeyama, Y. Ogawa, S. Tanno, Some properties of manifolds with contact metric structure, *Tôhoku Math. J.* 15 (1963) 42-48.
- [36] Y.-L. Ou, Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds, *Pacific J. Math.* 248 (2010) 217-232.

- [37] Y.-L. Ou, Some constructions of biharmonic maps and Chen's conjecture on biharmonic hypersurfaces, *J. Geom. Phys.* 62 (4) (2012) 751-762.
- [38] Y. Shibuya, Real submanifolds in a quaternionic projective space *Kodai Math J.* 1 (1978) 421-439.
- [39] W. Zhang, New examples of biharmonic submanifolds in $\mathbb{C}P^n$ and \mathbb{S}^{2n+1} . *An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat (N.S.)* 57 (2011) 207-218.