Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Propriedades Genéricas de Autofunções e Autovalores de Operadores Elípticos na Forma Divergente em Variedades Riemannianas.

por

Abraão Caetano Mendes

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da FAPEAM (Março/2016 a Março/2018) e da CAPES (Abril/2018 a Fevereiro/2020).

Manaus - AM
Fevereiro/2020

Propriedades Genéricas de Autofunções e Autovalores de Operadores Elípticos em Variedades Riemannianas.

por

Abraão Caetano Mendes

sob orientação do

Professor Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus - AM
Fevereiro/2020

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Mendes, Abraão Caetano
M538p Propriedades genéricas de autofunções e autovalores de operadores elípticos na forma divergente em variedades Riemannianas / Abraão Caetano Mendes. 2020
52 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Marcus Antonio Mendonça Marrocos
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Operadores elípticos. 2. propriedades genéricas. 3. Condição de Dirichlet. 4. Condição de T-Neumann. 5. Condição de T-Robin. I. Marrocos, Marcus Antonio Mendonça II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Abraão Caetano Mendes

Propriedades Genéricas de Autofunções e Autovalores de Operadores Elípticos na Forma Divergente em Variedades Riemannianas.

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 28 de Fevereiro de 2020.

Banca Examinadora

Marcus Marrocos
....

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (Orientador)
Universidade Federal do ABC - UFABC

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Membro)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

....

Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (Membro Externo)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Adilson Presoto
....

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto (Membro Externo)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

“Não sabes, não ouvistes que o Eterno Deus, o SENHOR, o Criador dos fins da terra, nem se cansa, nem se fatiga? Não se pode esquadrinhar o seu entendimento.
Faz forte ao cansado, e multiplica as forças ao que não tem nenhum vigor.
Os jovens se cansam e se fatigam, e os moços de exaustos caem,
mas, os que esperam no SENHOR renovam as suas forças, sobem com asas como águias, correm e não se cansam, caminham e não se fatigam.”
Isaías 40:28-31.

Dedico este trabalho aos meus pais José e Adalciete, aos meus irmãos Alexandre e Abigail, e ao meu sobrinho Kauã Benjamin.

Agradecimentos

Sou grato ao meu Deus por toda a graça e misericórdia derramadas em minha vida até aqui, e por tantas bençãos que Ele me já concedeu, e em especial, por mais essa conquista que Ele me concedeu; com certeza não foi fácil chegar aqui, mas tenho total consciência que sem Ele nada disso teria sido possível. Eu dedico a Deus em primeiro lugar esse título de “doutor em matemática”, e toda honra, toda glória e todo louvor sejam dados a Deus, agora e para sempre.

Agradeço também à minha família por toda a confiança na minha pessoa, por todo apoio, e principalmente, por serem a minha base aqui na terra, onde sempre posso encontrar amor e refúgio nas horas difíceis da vida. Eu dedico esta conquista aos meus pais José e Adalciete, aos meus irmãos Alexandre e Abigail, e ao meu sobrinho Kauã Benjamin.

Quero agradecer ao meu orientador prof. Dr. Marcus Marrocos (UFABC) por ter aceitado me orientar, antes mesmo de entrar no programa de doutorado em matemática na UFAM, por todo apoio que precisei durante estes 4 anos de doutorado, por ter me motivado e até mesmo me ajudado a que eu fosse para Santo André (SP), onde vivi, talvez as experiências mais diversas possíveis, conheci muitas pessoas legais, que sempre se mostraram solícitas em me ajudar, e onde fiz boa parte da minha tese, principalmente a parte sem simetria.

Quero agradecer de coração aos irmãos da Igreja Batista Regular Canaã (Manaus-AM) por todo apoio e confiança, principalmente pelas orações feitas ao meu favor para que eu pudesse trabalhar e viver sempre com as bençãos e a proteção de Deus, tanto aqui em Manaus como em Santo André também.

Quero agradecer do fundo do meu coração aos amados irmãos e amigos da Igreja Presbiteriana Parque das Nações (Santo André - SP) por terem me acolhido no desafio mais difícil da minha vida até aqui; por todos os abraços e carinhos, por todas as palavras de bondade e de amizade, pela amizade que temos, a qual creio que veio da parte de Deus, por tudo o que vocês fizeram por mim. Meus amados irmãos e amigos, que Deus abençoe ricamente com chuvas de bençãos sobre cada um, cada família, toda a igreja de um modo geral; não tenho palavras para agradecer tudo o que vocês fizeram por mim, muito obrigado de coração.

Quero agradecer também aos meus colegas do doutorado em matemática da UFAM: Andrea Mota, Adrian Ribeiro, Clebes Brandão, João Filipe, Antônio Airton, Kelly Karina, Kelly Marães, Manoel Vieira, José Roberto, Edson Lopes, Matheus Hudson, Cristiano de Souza, Claudeisio, Júlio César e Mário Campoverde, por toda a amizade construída até aqui, por todas as conversas descontraídas e por toda a inspiração matemática, fazendo com que tivéssemos sempre um ambiente de trabalho saudável e acolhedor, o que tornou muitas vezes leve o fardo para que pudéssemos cumprir com êxito a difícil tarefa de fazer uma tese em matemática.

Quero também agradecer aos nossos professores que tivemos neste doutorado, os quais tiveram um papel importante na minha vida acadêmica e que contribuíram para a minha formação matemática e profissional também.

E por fim, quero agradecer aos incentivos financeiros que recebi para realizar este trabalho: da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), durante o perído Março/2016 a Março/2018, e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, durante o período Abril/2018 a Fevereiro/2020. O meu muito obrigado também.

Resumo

Neste trabalho, provamos propriedades genéricas de autovalores e autofunções de famílias a dois e três parâmetros de operadores elípticos na forma divergente em variedades Riemannianas compactas com bordo. Assumiremos as condições de fronteira de Dirichlet, T-Neumann e T-Robin. As principais ferramentas que utilizamos foram desenvolvidas por K. Uhlenbeck em [Generic Properties of Eigenfunctions, Amer. J. Math. 98 (1976) 1059-1078].

Palavras-chave: Operadores elípticos, propriedades genéricas, condição de Dirichlet, condição de T-Neumann, condição de T-Robin, autovalores, autofunções.

Abstract

In this work, we prove generic properties of eigenvalues and eigenfunctions to two and to three parameters families of the elliptic operators in the divergence form on compact Riemannian manifolds with boundary. We assume the Dirichlet, T-Neumann and T-Robin boundary conditions. The main tools that we used were developed by K. Uhlenbeck in [Generic Properties of Eigenfunctions, Amer. J. Math. 98 (1976) 1059-1078].

Keywords: Elliptic operators, generic properties, Dirichlet condition, T-Neumann condition, T-Robin condition, eigenvalues, eigenfunctions.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho abordamos o tema *“Multiplicidade Genérica de Autovalores”*, o qual teve origem no artigo *“Genericity of Simple Eigenvalues for Elliptic PDE’s”*, de J.H. Albert (1975). Usando *Teoria da Perturbação*, Albert [3] mostrou que todos os autovalores do problema elíptico em questão são simples, isto é, os autoespaços são unidimensionais em um conjunto *residual*. Daí o termo *simplicidade genérica*.

Este tema ficou popularizado no célebre artigo da renomada matemática estadunidense Karen Uhlenbeck (Prêmio Abel 2019) *“Generic Properties of Eigenfunctions”* (1976) [27], no qual, Uhlenbeck mostrou que as seguintes propriedades são genéricas para uma certa classe de operadores elípticos autoadjuntos de segunda ordem numa variedade compacta M:

A. *Os autovalores são simples;*

B. 0 *é valor regular das autofunções no interior de* M*;*

C. *As autofunções são funções de Morse no interior de* M*;*

D. 0 *é valor regular da derivada normal das autofunções no bordo* ∂M.

No entanto, ao invés de usar resultados da Teoria da Perturbação, abordagem usada por Albert [3], Uhlenbeck utilizou *Teoria da Transversalidade*, usando argumentos de transversalidade paramétrica inspirados pelo famoso *Teorema de Sard-Smale* [25]. No final, o resultado obtido por Albert aparece como uma simples aplicação dos resultados obtidos por Uhlenbeck, mostrando assim que as ferramentas da Teoria da Transversalidade são mais adequadas para demonstrar propriedades genéricas de certas funções que são soluções de EDP’s.

Podemos dividir o tema *“Propriedades Genéricas de Autofunções e Autovalores”* em pelos menos dois casos: os sem simetria, e os com simetria. Para os casos sem simetria podemos mencionar, entre outros, os seguintes trabalhos:[3, 9, 5, 8, 18, 27]. Já para os casos com simetria, podemos citar, entre outros, os seguintes trabalhos: [19, 20, 29].

Neste trabalho contemplamos as seguintes famílias de operadores elípticos de segunda ordem na forma divergente:

1. o operador $L_b := L + b$, onde L é um operador elíptico de segunda ordem autoadjunto e o parâmentro b pertence ao espaço de funcões $C^k(M)$.

2. o operador Laplaciano drifting $\Delta_{\eta,g} := \Delta_g - \langle \nabla^g \eta, \nabla^g \rangle$ onde consideramos a métrica g e a *função drifting* η como parâmetros;

3. o operador $(\eta, T)-$divergente $\mathcal{L}_\eta := div(T\nabla) - T(\nabla\eta, \nabla)$, onde T é um $(0, 2)-$tensor simétrico definido positivo (ver [14]). Neste caso o parâmetro é a função η;

Consideramos o *"Problema de Autovalor com Peso"* em cada família de operadores elíptico, isto é,

$$Lu + \omega\lambda u = 0$$

onde L é um operador elíptico e ω é a chamada *função peso* (dos autovalores λ), daí o nome *"Problema de Autovalor com Peso"*.

Em alguns casos, vamos trabalhar também com as seguintes condições no bordo: de Dirichlet; de $T-$Neumann [23]; e de $T-$Robin; e, utilizando técnicas de Daniel Henry [16], e fazendo uso direto dos resultados obtidos por Uhlenbeck [27], vamos mostrar que as mesmas Propriedades A, B, C e D são genéricas para os problemas elípticos com os quais iremos trabalhar.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos algumas noções básicas sobre a Teoria de Fredholm: operador de Fredholm, índice, aplicação de Fredholm; apresentamos a definição de conjunto residual, que é uma interseção enumerável de abertos e densos de um espaço topológico (X, τ), e a definição de propriedade genérica: dizemos que uma propriedade $\mathcal{P}$ é genérica quando $\mathcal{P}$ é verdadeira para um conjunto residual $\Gamma \subset (X, \tau)$.

Apresentamos também os teoremas de transversalidade paramétrica usados por Uhlenbeck para demonstrar as propriedades A, B, C e D [27]. Logo em seguida, apresentamos alguns fatos básicos sobre operadores elípticos e o Teorema da Continuação Única Fraco [27].

Como iremos trabalhar na seção (2.3) com o operador $(\eta, T)-$divergente $\mathcal{L}_\eta$ [14], também damos algumas noções básicas sobre tensores em variedades Riemanninas [17, 21, 26]. Apresentamos algumas fórmulas do $\eta-$divergente, que o leitor pode encontrar na tese de R. Mesquita [18], e o Teorema de Du Bois-Raymond, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [7], o qual será usado frequentemente ao longo deste trabalho.

E no final do capítulo, apresentamos as propriedades genéricas abstratas demonstradas por K. Uhlenbeck em [27], as quais vamos demonstrar para os problemas elípticos para os operadores citados anteriormente.

No capítulo 2 apresentamos os resultados sobre as propriedades genéricas A, B, C e D para os seguintes problemas elípticos:

Na seção (2.1), trabalhando com o operador $L_b = L + b$, onde L é um operador elíptico autoadjunto de 2º ordem e b é um termo de ordem zero (em [27] o termo b é o único parâmetro de variação), para o problema de autovalor com peso, conseguimos demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 0.1 (Propriedade A.) *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e conexa. Então os autovalores do operador L_b para o problema de autovalor com peso são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.*

onde o parâmetro b mora no conjunto $\mathcal{B}_1 = C_0^k(U) \hookrightarrow C^k(M)$, U é qualquer conjunto aberto de M, e a função peso ω mora no conjunto $\mathcal{B}_2 = \{\omega : M \to \mathbb{R}, \omega > 0\} \subset C^k(M)$.

Teorema 0.2 (Propriedades B, C e D.) *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M, $U \subset M$ aberto, L um operador elíptico autoadjunto de segunda ordem. Então as propriedades B, C e D são genéricas para o operador $L_b = L + b$ para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.*

O destaque destes resultados é que eles dependem de dois parâmetros de variação: do termo de ordem zero b e da função peso ω.

Na seção (2.2), vamos trabalhar com o operador Laplaciano drifting

$$\Delta_{(g,\eta)} := \Delta_g - g(\nabla^g \eta, \nabla^g) \tag{1}$$

para o problema de autovalor com peso. Em [18] R. Mesquita provou a propriedade A para o Laplaciano drifting, com condição de Dirichlet no bordo, onde o parâmetro de variação é a métrica g.

Queremos chamar a atenção do leitor para o fato que agora estaremos trabalhando com variedades Riemannianas com peso (M, g, dm), onde $dm_g = e^{-\eta} dM_g$, η é a chamada *função drifting*, e usaremos as fórmulas do $\eta-$divergente [18].

Nossa proposta é variar a métrica g por métricas conformes à g do tipo $\overline{g} = \mu g$, onde $\mu : M \to \mathbb{R}$, $\mu > 0$, é o chamado *fator conforme*, e também estaremos variando a função drifting η e a função peso ω.

Primeiramente, definimos o novo Laplaciano drifting para ser

$$\overline{L}_{(\overline{g},\eta)} = \overline{\Delta} - \overline{g}(\overline{\nabla}\eta, \overline{\nabla}) \tag{2}$$

onde $\overline{\nabla}$ e $\overline{\Delta}$ são calculados segundo a métrica conforme $\overline{g}$.

Neste sentido, conseguimos demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 0.3 (Propriedade A.) *Seja (M, g, dm_g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M. Então os autovalores do operador $\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}$ para o problema de autovalor com peso são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

E

Teorema 0.4 (Propriedades B, C e D.) *Sejam (M, g, dm_g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M. Então as propriedades B, C e D são genéricas para o operador $\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}$ para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

O destaque aqui é que nossos resultados sobre as propriedades A, B, C e D dependem de três parâmetros de variação: do fator conforme μ, da função drifting η e da função peso ω, e todos estes parâmetros moram no conjunto $\mathcal{B} = \{\gamma : M \to \mathbb{R}, \gamma > 0\} \subset C^k(M)$.

Na seção (2.3) vamos trabalhar com o operador $(\eta, T)-$divergente [14]:

$$\mathcal{L}_\eta := div(T\nabla) - T(\nabla\eta, \nabla) \tag{3}$$

onde T é um $(0, 2)-$tensor simétrico definido positivo, numa variedade Riemanniana (M, g, dm) compacta, conexa e com bordo, onde $dm = e^{-\eta} dM$. Nesta seção, a função drifting η e a função peso ω desempenharão o papel dos nossos parâmetros de variação.

Este operador foi bastante estudado no paper de J. Gomes e J. Miranda [14], onde o leitor pode encontrar as principais definições e propriedades do operador $\mathcal{L}$, um tipo de *teorema de Stokes tensorial:*

Teorema 0.5 *Sejam (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, T um $(0,2)-$tensor simétrico definido positivo e $f \in C^\infty(M)$. Então*

$$\int_M \mathcal{L}(f)dm = \int_{\partial M} T(\nabla f, \nu)d\mu \tag{4}$$

onde $dm = e^{-\eta}dM$, $d\mu = e^{-\eta}d(\partial M)$ e ν é um campo de vetores normais unitários ao longo de ∂M.

resultados sobre estimativas de autovalores do operador $\mathcal{L}$ e a própria motivação da definição do operador. Outros tipos de resultados sobre o operador $\mathcal{L}$ (limites superiores tipo-Reilly de autovalores em subvariedades de espaços Euclideanos com densidade, autovalores de operadores tipo-Paneitz e problemas de Steklov generalizados) podem ser encontrados no artigo de J. Roth [23].

Primeiramente conseguimos demonstrar a propriedade A com condição de Dirichlet no bordo:

Teorema 0.6 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M. Então os autovalores do operador $\mathcal{L}_\eta$ para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

E logo em seguida, apresentamos uma aplicação para o operador Laplaciano drifting $\Delta_\eta = \Delta - \langle \nabla\eta, \nabla \rangle$:

Corolário 0.1 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M. Então os autovalores do operador Laplaciano drifting Δ_η para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Depois, conseguimos demonstrar a propriedade A com a condição: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_T} = \langle T\nabla u, \nu \rangle = 0$ em ∂M; batizamos esta condição de $T-$*Neumann*, pois, a mesma é um tipo de *condição de Neumann tensorial*, já que a mesma depende do tensor T:

Teorema 0.7 *Seja* (M, g, dm) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo* ∂M*. Então os autovalores do operador* $\mathcal{L}_\eta$ *para o problema de autovalor com peso, com condição de* $T-$*Neumann no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$*.*

Em seguida, aplicamos para o operador Laplaciano drifting Δ_η, com condição de Neumann no bordo:

Corolário 0.2 *Seja* (M, g, dm) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo* ∂M*. Então os autovalores do operador Laplaciano drifting* Δ_η *para o problema de autovalor com peso, com condição de Neumann no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$*.*

A seguir, demonstraremos a propriedade A com a condição: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_T} + \beta u = 0$ em ∂M; batizamos esta condição de $T-$*Robin*, pois, a mesma é um tipo de *condição de Robin tensorial*, já que a mesma depende do tensor T:

Teorema 0.8 *Seja* (M, g, dm) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo* ∂M*. Então os autovalores do operador* $\mathcal{L}_\eta$ *para o problema de autovalor com peso, com condição de* $T-$*Robin no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$*.*

Em seguida, aplicamos para o operador Laplaciano drifting Δ_η, com condição de Robin no bordo:

Corolário 0.3 *Seja* (M, g, dm) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo* ∂M*. Então os autovalores do operador Laplaciano drifting* Δ_η *para o problema de autovalor com peso, com condição de Robin no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$*.*

Demonstramos, a seguir, as propriedades B, C e D para o operador $\mathcal{L}_\eta$, com condição de Dirichlet no bordo:

Teorema 0.9 *Seja* (M, g, dm) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo* ∂M*. Então as propriedades B, C e D são genéricas para o operador* $\mathcal{L}_\eta$*, para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$*.*

Aplicamos este resultado para o operador Laplaciano drifting Δ_η e conseguimos as propriedades B, C e D para o mesmo:

Corolário 0.4 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M. Então as propriedades B, C e D são genéricas para o operador Laplaciano drifting Δ_η, para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

O destaque desta seção é que conseguimos a propriedade A para os problemas de Dirichlet, $T-$Neumann e $T-$Robin, e as propriedades B, C e D para o problema de Dirichlet, e aplicamos todos os resultados obtidos para o operador $(\eta, T)-$divergente $\mathcal{L}_\eta$ para o operador Laplaciano drifting Δ_η, e todas as propriedades genéricas obtidas dependem de dois parâmetros de variação: da função drifting η e da função peso ω.

Para um entendimento mais claro sobre os resultados que iremos apresentar ao longo deste trabalho, as principais referências são: o paper de K. Uhlenbeck [27], as teses de doutorado de R. Mesquita [18] e de J. Miranda [11], o paper de J. Gomes e J. Miranda [14] e o livro de Daniel Henry [16].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos apresentar algumas definições, resultados e notações que nos ajudarão a ter um bom entendimento do restante do trabalho, e principalmente, a desenvolver um ambiente de forma a facilitar os principais resultados a serem apresentados e demonstrados de uma forma clara, lógica e construtiva. Sendo assim, iremos omitir algumas demonstrações de alguns resultados que irão ser apresentados aqui neste capítulo, mas, sempre iremos apontar onde estas demonstrações poderão ser encontradas.

Para um melhor entendimento sobre os assuntos que iremos abordar neste capítulo, recomendamos ao leitor as referências [7, 17, 18, 21, 26, 27].

Definição 1.1 (Ponto regular e valor regular) *Seja $f : M \to N$ uma aplicação C^1 entre duas variedades diferenciáveis. Dizemos que $x \in M$ é um ponto regular de f se $(df)_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ é sobrejetiva. Dessa forma, dizemos que $y \in N$ é um valor regular de f se todo ponto $x \in f^{-1}(y)$ é um ponto regular de f.*

Definição 1.2 (Operador de Fredholm, [27]) *Um operador linear $F : M \to N$ entre espaços de Banach é de Fredholm se o seu núcleo tem dimensão finita, e sua imagem é um subespaço fechado de codimensão finita.*

Definição 1.3 (Índice, [27]) *O índice de um operador de Fredholm é definido como a diferença entre a dimensão do núcleo e a codimensão da imagem.*

Definição 1.4 (Aplicação de Fredholm, [27]) *Uma aplicação diferenciável entre duas variedades de Banach é de Fredholm se em cada ponto a derivada é um operador de Fredholm.*

Se a aplicação é C^r e o domínio é conexo então o índice é constante (o conjunto dos operadores de Fredholm é aberto e o índice é localmente constante), ou seja, o índice neste caso não depende dos pontos do domínio [12].

Teorema 1.1 (Sard, [24]) *Se $f : M^m \to N^n$ é uma aplicação C^∞, então a imagem do conjunto dos pontos críticos de f tem medida nula.*

Corolário 1.1 *O conjunto dos valores regulares de uma aplicação C^∞ é denso.*

Definição 1.5 (Conjunto Residual) *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $\Gamma \subset X$ é residual ou genérico se Γ é uma interseção enumerável de abertos densos de X, isto é, se Γ pode ser escrito da forma $\Gamma = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$, onde cada W_i é um aberto denso do espaço topológico X.*

Definição 1.6 (Propriedade genérica) *Uma propriedade que é verdadeira para um subconjunto residual $\Gamma \subset X$ é chamada genérica.*

Teorema 1.2 (Sard-Smale, [25]) *Seja $F : M \to N$ uma aplicação de Fredholm entre duas variedades de Banach separáveis. Se F é C^r para $r >$ índice(F), então os valores regulares de F formam um conjunto residual em N.*

Definição 1.7 (Transversalidade) *Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é transversal a $Z \subset N$, e escrevemos $f \pitchfork Z$, se para todo $x \in M$ tem-se que ou $f(x) \notin Z$ ou $(df)_x(T_xM) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}N$.*

Proposição 1.1 ([12]) *Seja $f : M \to N$ uma aplicação C^k. Se f é transversal a $Z \subset N$, então ou $f^{-1}(Z)$ é vazio ou é uma subvariedade de M de codimensão igual à codimensão de Z em N.*

Em outras palavras, *a noção de transversalidade inclui a noção de valor regular como um caso especial.*

Teorema 1.3 (Teorema da Transversalidade 1, [1]) *Seja $\varphi : H \times \mathcal{B} \to E$ uma aplicação C^k, H, $\mathcal{B}$ e E variedades de Banach com H e E separáveis. Se 0 é um valor regular de φ e $\varphi_b = \varphi(, b)$ é uma aplicação de Fredholm de índice $< k$, então o conjunto $\{b \in \mathcal{B} : 0$ é valor regular de $\varphi_b\}$ é residual em $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.4 (Teorema da Transversalidade 2, [27]) *Sejam $Q, \mathcal{B}, X, Y$ e Y' variedades de Banach separáveis, $Y' \subset Y$ com X, Y e Y' de dimensão finita. Seja $\pi : Q \to \mathcal{B}$ uma aplicação de Fredholm de índice 0. Então se $f : Q \times X \to Y$ é uma aplicação C^k para $k > \max(1, \dim X + \dim Y' - \dim Y)$, e se f é transversal a Y', então o conjunto $\{b \in \mathcal{B} : f_b = f \mid_{\pi^{-1}(b)}$ é transversal a $Y'\}$ é residual em $\mathcal{B}$.*

1.1 Teoria básica sobre operadores elípticos.

É um resultado da teoria básica de operadores elípticos que se os coeficientes de um operador L são C^k então (veja [2]):

1. As aplicações $(L + \lambda) : H_k^p(M) \cap H_{1,0}^p(M) \to H_{k-2}^p(M)$, $k \geq 1$, são de Fredholm de índice zero;
2. As autofunções de L são soluções $u \in H_{1,0}(M)$ de $(L + \lambda)u = 0$, e pela teoria da regularidade pertencem a $H_k^p(M)$;
3. Os autoespaços são de dimensão finita e geram $L^2(M)$.

Teorema 1.5 (Teorema da Continuação Única Fraco, [4]) *Seja L um operador elíptico de segunda ordem com coeficientes C^3. Se $Lv = 0$ num domínio aberto e conexo D, e se $v = 0$ num subconjunto aberto de D, então v é identicamente nula em D.*

1.2 Funções de Green em variedades Riemannianas.

A clássica teoria das funções de Green tem uma extensão à variedades. Se L é um operador elíptico autoadjunto de classe C^3, nós achamos uma solução fraca de $L(G(y, .)) = \delta_y + u$, onde u satisfaz $Lu = 0$, $u \in H_{1,0}(M)$, e δ_y é a distribuição sobre $C^0(M)$ dada por $\int_M \delta_y(x) f(x) d\mu = f(y)$, a qual mora no espaço de Sobolev $H_{-1}^q(M)$ das funções, dual a $L_{1,0}^p(M)$ para $p > n$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

$G(y, .)$ é única se nós assumimos $\int_M G(y, x) u(x) d\mu = 0$ para toda $u \in H_{1,0}(M)$ tal que $Lu = 0$. $G(y, x)$ é chamada uma *função de Green modificada* (veja [27]) sobre M. A seguir, apresentamos as propriedades básicas de G, assumindo que L é autoadjunto e tem coeficientes no mínimo de classe C^3.

Propriedades das funções de Green modificadas ([27]): Seja $\Delta = \{(x,x) \in M \times M; x \in M\}$. Então existe uma função G de classe C^3 sobre $M \times M \setminus \Delta$ com as seguintes propriedades:

(a) $G(y,x) = G(x,y)$;

(b) $G(y,.) \in H^q_{1,0}(M)$ para $q < (n-1)^{-1}$ onde $n = dim(M)$;

(c) $G(x,y) = 0$ para $x \neq y$, $x \in \partial M$;

(d) $\int_M G(y,x)Lf(x)d\mu = f(y)$ se $\int_M u(x)f(x)d\mu = 0$ para todo $Lu = 0$, $u \in H_{1,0}(M)$, $f \in C^2(M) \cap H_{1,0}(M)$;

(e) $\int_M G(y,x)u(x)d\mu = 0$, para todo $Lu = 0$, $u \in H_{1,0}(M)$.

1.3 Noções Básicas sobre tensores em variedades Riemannianas

Definição 1.8 (Tensor) *Um $(1,r)$-tensor em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$T : \chi(M)^r \to \chi(M) \tag{1.1}$$

multilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M, onde $\chi(M)$ é o conjunto de campos de vetores de classe C^∞ em M. Enquanto que, num $(0,r)$-tensor, o contradomínio é $C^\infty(M)$. Formalmente,

$$T(Y_1,\ldots,fX+hY,\ldots,Y_r) = fT(Y_1,\ldots,X,\ldots,Y_r) + hT(Y_1,\ldots,Y,\ldots,Y_r) \tag{1.2}$$

para todos $X,Y \in \chi(M)$ e $f,h \in \chi(M)$.

Exemplo 1.1 *O tensor métrico $g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $X,Y \in T_pM$, o produto interno de X e Y na métrica Riemanniana de M, isto é, $g_p(X,Y) = \langle X,Y\rangle_p$, é um $(0,2)$-tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Mais geralmente, dado um $(0,r)$-tensor T em uma variedade Riemanniana (M,g), podemos identificá-lo com um $(1,r-1)$-tensor T^*, via a métrica Riemanniana g, fazendo

$$g(T^*(Y_1,\ldots,Y_{r-1}),Y_r) = T(Y_1,\ldots,Y_r) \tag{1.3}$$

Para simplificar a notação, e desde que não tenhamos perigo de confusão, vamos omitir o " * "no $(1,r-1)$-tensor T^* correspondente ao $(0,r)$-tensor T.

Em particular, o tensor métrico g será identificado com o $(1,1)$-tensor identidade I em $\chi(M)$.

A importância da teoria de tensores em variedades Riemannianas é que as noções básicas de derivada covariante, derivada de Lie, produto interno, traço e divergência podem ser estendidas à tensores, e, a partir disso, muitos cálculos que geralmente são feitos em coordenadas locais, podem ser feitos em caráter tensorial o que, em muitos casos, pode ser bastante vantajoso.

Para um melhor entendimento da teoria de tensores em variedades Riemannianas, recomendamos as referências [17, 21, 26].

1.4 Fórmulas do $\eta-$divergente e Teorema de Du Bois-Raymond.

Para o próximo capítulo, no qual veremos as propriedades genéricas do espectro do operador $(\eta,T)-$divergente, iremos usar as fórmulas do $\eta-$divergente e o Teorema de Stokes para variedades com peso (que podem ser encontradas em [11, 18]), e o Lema de Du Bois-Raymond [7].

Vamos definir o operador $\eta-$divergente em $\chi(M)$ como segue:

$$div_\eta = div - d\eta \tag{1.4}$$

onde $d\eta$ denota a diferencial de η. Pela linearidade de $d\eta$ e pelas propriedades usuais da divergência de campos de vetores, valem as seguintes igualdades, para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \chi(M)$:

(i) $div_\eta(X+Y) = div_\eta X + div_\eta Y$;

(ii) $div_\eta(fX) = f div_\eta X + g(\nabla f, X)$;

(iii) $div(\epsilon^{-\eta}X) = \epsilon^{-\eta}div_\eta X$.

Teorema 1.6 (Teorema de Stokes para variedades com peso:) *Seja* (M, g, dm) *uma variedade Riemanniana compacta e com bordo* ∂M*. Então*

$$\int_M div_\eta X dm = \int_{\partial M} g(X, \nu) d\mu \tag{1.5}$$

onde $dm = \epsilon^{-\eta}dM$*,* $d\mu = \epsilon^{-\eta}d(\partial M)$*,* ν *é um campo de vetores normais unitários exterior ao bordo* ∂M *e* X *é um campo de vetores tangentes compactamente suportado em* (M, g, dm)*.*

Agora, vamos considerar um $(0,2)-$tensor T simétrico definido positivo numa variedade Riemannianna (M, g, dm), de modo que o seu $(1,1)-$tensor correspondente seja simétrico e definido positivo.

Definição 1.9 *Definimos o* $\eta-$*divergente de um* $(1,1)-$*tensor* T *em* M *como o* $(0,1)-$*tensor dado por:*

$$div_\eta T = divT - d\eta \circ T \tag{1.6}$$

Novamente pela simetria de T temos:

$$div(T(X)) = (divT)(X) + \langle \nabla X, T \rangle \tag{1.7}$$

e

$$\langle \nabla f X, T \rangle = f \langle \nabla X, T \rangle + T(X, \nabla f) \tag{1.8}$$

O lema a seguir relaciona o operador $(\eta, T)-$divergente $\mathcal{L}_\eta$ com o $(0,1)-$tensor $div_\eta T$ [18, 11]:

Lema 1.1 *Sejam* $\eta, f : M \to \mathbb{R}$ *funções suaves,* T *um* $(0,2)-$*tensor simétrico e* $Z \in \chi(M)$*. Então vale:*

$$div_\eta(T(fZ)) = f\langle div_\eta T, Z \rangle + f \langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla f, Z) \tag{1.9}$$

em particular, se $Z = \nabla h$ *para alguma* $h \in C^\infty(M)$*, então:*

$$div_\eta(T(f\nabla h)) = f\langle div_\eta T, \nabla h \rangle + f\langle \nabla^2 h, T \rangle + T(\nabla f, \nabla h) \tag{1.10}$$

A seguir, apresentamos uma das nossas principais ferramentas que iremos usar em várias demonstrações ao longo deste trabalho:

Teorema 1.7 (Teorema de Du Bois-Raymond, [7]) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_M u\varphi dM = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.11}$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Ao longo deste trabalho, vamos fazer uso do seguinte lema:

Lema 1.2 *Sejam M compacta, λ um número real e $\omega, f, g : M \to \mathbb{R}$ funções C^2, com ω e λ tendo o mesmo sinal (> 0 ou < 0), e T um $(0,2)-$tensor simétrico definido positivo, tais que*

$$\langle \nabla f, T\nabla g \rangle = \omega \lambda f g \tag{1.12}$$

então $f = 0$ ou $g = 0$.

Demonstração: Seja $p \in M$ tal que $f(p) \neq 0$. Consideremos a curva integral α em M tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(s) = T\nabla g(\alpha(s))$. Definindo $\beta(s) = f(\alpha(s))$, encontramos

$$\beta'(s) = \langle \nabla f(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = \langle \nabla f(\alpha(s)), T\nabla g(\alpha(s)) \rangle = \omega(\alpha(s))\lambda f(\alpha(s)) g(\alpha(s)) = \lambda \omega(\alpha(s)) g(\alpha(s)) \beta(s)$$

Logo, $\beta(s) = \beta_0 \exp^{\lambda \int_0^s \omega(\alpha(t)) g(\alpha(t)) dt}$. A última igualdade nos diz que β é ilimitada em M; mas isto não pode ocorrer, pois, β é contínua e M é compacta.

1.5 Propriedades Genéricas Abstratas

A referência para esta seção é o paper de K. Uhlenbeck [27].

Ao longo deste trabalho queremos mostrar que as seguintes propriedades são genéricas para uma certa classe de operadores elípticos numa variedade Riemanniana compacta M:

A. Os autovalores são simples;

B. 0 é valor regular das autofunções no interior de M;

C. As autofunções são funções de Morse no interior de M;

D. 0 é valor regular da derivada normal das autofunções no bordo ∂M.

Seja (L_b) uma família de operadores elípticos de segunda ordem autoadjuntos, onde o parâmetro b mora num subconjunto aberto de um espaço de Banach.
Vamos considerar a seguinte esfera unitária

$$S_k^p = \{u \in H_k^p(M) \cap H_{1,0}(M) : \int_M u^2 dm = 1\}$$

e a seguinte aplicação $\varphi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to H_{k-2}^p(M)$ dada por

$$\varphi(u, \lambda, b) = (L_b + \lambda)u$$

de onde também podemos considerar a aplicação $\varphi_b = \varphi(.,.,b)$ onde b está fixo.

Lema 1.3 (Lema 2.1 de [27], pg. 1064.) *φ_b é uma aplicação de Fredholm de índice zero.*

Lema 1.4 (Lema 2.2 de [27], pg. 1064.) *O ponto $(u, \lambda, b) \in \varphi^{-1}(0)$ se e somente se u é uma autofunção de L_b com autovalor λ. A autofunção u mora num autoespaço de dimensão 1 se e somente se u é um ponto regular de φ_b.*

Lema 1.5 (Lema 2.3 de [27], pg. 1064.) *Os autoespaços de L_b são unidimensionais se, e somente se, 0 é valor regular de φ_b.*

Teorema 1.8 (Teorema 1 de [27], pg. 1064.) *Seja $\varphi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to H_{k-2}^p(M)$ uma aplicação C^2. Se 0 é um valor regular de φ, então o conjunto $\{b \in \mathcal{B} :$ os autovalores de L_b são simples $\}$ é residual em $\mathcal{B}$.*

Em outras palavras, *os autovalores de L_b são genericamente simples.*

Definição 1.10 *O mapa de B nos operadores elípticos sobre M, $b \mapsto L_b$, determina uma aplicação de B nos coeficientes do operador (em coordenadas locais suaves). Chamamos esta aplicação de mapa de coeficientes.*

Para mostrarmos as propriedades B, C e D sempre iremos fazer uso da seguinte proposição:

Proposição 1.2 (Proposição 2.10 de [27], pg. 1068.) *Suponha que o mapa de coeficientes de $\mathcal{B}$ nos coeficientes com a topologia C^{n+1} é C^{n+1}. Além disso, nós consideramos a diferencial $D_2\varphi : T_b(\mathcal{B}) \to C^{n-2}(M)$ numa solução de $\varphi(u, \lambda, b) = (L_b + \lambda)u = 0$. Seja $J = Im(D_2\varphi)$ e assuma que $W \in L^1(M)$, $W \in C^2(M \setminus \{y\})$ e $\int_M W(x)j(x)d\mu_x = 0$ para todo $j \in J$ implica $W = 0$ num subconjunto aberto de M. Então, as propriedades B, C e D são genéricas para o operador L_b, relativamente ao conjunto $\mathcal{B}$.*

Capítulo 2

Propriedades genéricas do espectro de alguns problemas elípticos

Neste capítulo, apresentaremos os principais resultados deste trabalho.

Nosso principal objetivo é mostrar que as propriedades A, B, C e D (ver seção (1.5)) são genéricas para as seguintes famílias de operadores elípticos descritas abaixo, para as quais estaremos trabalhando com o problema de autovalor com peso:

1. Para a família de operadores $L_b = L + b$, com parâmetro de variação no termo de ordem zero (seção (2.1)), valem as propriedades A, B, C e D (ver seção (1.5)), e dependem de dois parâmetros de variação: o termo de ordem zero b e a função peso ω;

2. Na seção (2.2), mostraremos que as propriedades A, B, C e D (ver seção (1.5)) são genéricas para o operador Laplaciano drifting, onde estaremos perturbando a métrica g por métricas conformes à métrica g, a função drifting η e a função peso ω, ou seja, agora as propriedades genéricas dependem de três parâmetros variando simultaneamente.

3. Para o operador $(\eta, T)-$divergente [11, 14] (seção (2.3)), mostraremos que a propriedade A é genérica com condições de fronteira de Dirichlet, de T-Neumann ou T-Robin, e as propriedades B, C e D são genéricas também, com condição de Dirichlet no bordo. E todas as propriedades genéricas obtidas dependem de dois parâmetros: da função drifting η e da função peso ω.

No que diz respeito à Teoria Espectral no caso com peso nos autovalores, temos as mesmas propriedades básicas de quando estamos no problema de autovalor clássico, isto é, os autovalores são discretos, os autoespaços têm dimensão finita.

Vamos considerar o problema de autovalor com peso:

$$(L + \omega\lambda)u = 0 \tag{2.1}$$

Como estamos supondo $\omega > 0$ temos

$$(L + \omega\lambda)u = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{\omega}L + \lambda)u = 0, \tag{2.2}$$

onde $w : M \to \mathbb{R}$ é uma função positiva de classe C^k.

Como estamos considerando um problema de autovalores mais geral é necessário justificar por que os teoremas abstratos da Uhlenbeck apresentados na seção 1.5 continuam válidos. Considere as duas aplicações

$$\Phi_1(u, \lambda, \omega) = (L + \omega\lambda)u \tag{2.3}$$

e

$$\Phi_2(u, \lambda, \omega) = (\frac{1}{\omega}L + \lambda)u \tag{2.4}$$

definidas nos espaços de funções convenientes. É fácil ver que $\Phi_1^{-1}(0) = \Phi_2^{-1}(0)$, além disso, a diferencial $D_\omega\Phi_1$ é sobrejetiva se e somente se $D_\omega\Phi_2$ também é. Portanto, todos os resultados da seção 1.5 são válidos para Φ_1.

2.1 Propriedades genéricas do espectro do operador $L_b = L + b$ para o problema de autovalor com peso.

Nesta seção, queremos trabalhar com uma versão "generalizada" de uma aplicação que aparece no paper de Uhlenbeck [27] intitulada como *"Perturbação dos termos de ordem zero"* (pg. 1074), onde agora, trabalhando via o problema de autovalor com peso, estaremos variando não somente o termo de ordem zero de um operador elíptico, como também a função peso, e assim mostrar que, para este caso, as propriedades A, B, C e D são genéricas também.

2.1.1 Propriedade A.

Seja L um operador elíptico de segunda ordem autoadjunto qualquer, com coeficientes suaves, sobre uma variedade Riemanianna (M, g), compacta, conexa e com bordo ∂M.

Seja $\mathcal{B}_1 = C_0^k(U)$, onde U é qualquer conjunto aberto de M ($\mathcal{B}_1$ será o nosso conjunto de variação dos termos de ordem zero b), e seja também $\mathcal{B}_2 = \{\omega : M \to \mathbb{R}, \omega > 0\} \subset C^k(M)$ o conjunto de variação das funções peso ω.

Considerando a inclusão $\mathcal{B}_1 = C_0^k(U) \hookrightarrow C^k(M)$, isto é, assumindo que cada $b \in \mathcal{B}_1$ seja identicamente nula em $M \setminus U$, e considerarando a seguinte família de operadores elípticos autoadjuntos:

$$b \mapsto L_b = L + b \tag{2.5}$$

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso:

$$L_b u + \omega\lambda u = Lu + bu + \omega\lambda u = 0 \quad \text{em } M.$$

Seja $\varphi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \to L^2(M)$

$$\varphi(u, \lambda, b, \omega) = L_b u + \omega\lambda u = Lu + bu + \omega\lambda u \tag{2.6}$$

Novamente, queremos mostrar que:

Proposição 2.1 *0 é valor regular de φ.*

Demonstração: Suponhamos que 0 não seja valor regular de φ. Então existe $(u, \lambda, b, \omega) \in \varphi^{-1}(0)$ tal que (u, λ, b, ω) é ponto crítico de φ. Ou seja, $D\varphi_{(u,\lambda,b,\omega)}$ não é sobrejetiva.

$D\varphi_{(u,\lambda,b,\omega)}(v, s, g, h) = (L_b + \omega\lambda)v + s\omega u + gu + h\lambda u$

Como $Im(D\varphi_{(u,\lambda,b,\omega)}) \neq L^2(M)$ e $Im(D\varphi_{(u,\lambda,b,\omega)})$ é subespaço fechado em $L^2(M)$, temos que existe $W \in L^2(M) \setminus Im(D\varphi_{(u,\lambda,b,\omega)})$ ortogonal a $Im(D\varphi_{(u,\lambda,b,\omega)})$.

Vamos considerar:

(i) $s = g = h = 0$ implica que $\int_M W(L_b + \omega\lambda)v dM = 0$;

(ii) $v = s = h = 0$ implica que $\int_M W gu dM = 0$.

Agora, usando o item (ii) temos:

$$\int_M gWu dM = 0, \forall g \in C^k(M) \tag{2.7}$$

Pelo Teorema de Du Bois-Raymond (1.7), $Wu = 0$ em M.

Seja $q \in M$ tal que $u(q) \neq 0$. Pela continuidade de u temos que existe uma vizinhança $U \subset M$ de q tal que u não se anula em U. Logo, devemos ter $W(U) = 0$. Como W é uma autofunção de L_b, chegamos a uma contradição, pois, pelo Teorema da Continuação Única Fraco (1.5), W seria idendicamente nula em M.

Portanto, 0 é valor regular de Φ.

Teorema 2.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e conexa. Então os autovalores do operador L_b para o problema de autovalor com peso são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.*

Demonstração: Como 0 é valor regular de Φ, então, pelo Teorema (1.8), os autovalores do operador L_b são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

2.1.2 Propriedades B, C e D.

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo:

$$L_b u + \omega\lambda u = 0 \text{ em } M; \quad u = 0 \text{ em } \partial M;$$

Vamos considerar a variedade de Banach de todas as autofunções

$$Q = \{(u, \lambda, b, \omega) \in S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 : \Phi(u, \lambda, b, \omega) = 0\} \tag{2.8}$$

onde $\Phi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \to L^2(M)$ é dada por

$$\Phi(u, \lambda, b, \omega) = L_b u + \omega\lambda u = Lu + bu + \omega\lambda u \tag{2.9}$$

A caracterização do espaço tangente de Q é:

$$T_{(u,\lambda,b,\omega)}Q = \{(v, s, g, h) \in H_{1,0}(M) \times \mathbb{R} \times C^k(M) \times C^k(M) : \textstyle\int_M vudM = 0,$$
$$(L_b + \omega\lambda)v + s\omega u + gu + h\lambda u = 0\}.$$

Nosso objetivo é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M, $U \subset M$ aberto, L um operador elíptico autoadjunto de segunda ordem. Então* *as propriedades B, C e D são genéricas para o operador $L_b = L + b$ para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.*

Demonstração: Vamos olhar para o espaço ortogonal de $D\Phi_{(\eta,\omega)}(g,h) = gu + h\lambda u$ em $L^1(M)$, onde $D\Phi_{(\eta,\omega)}$ é a derivada de Φ na direção dos parâmetros η e ω. Seja $W \in L^1(M)$ tal que

$$\int_M W(gu + h\lambda u)dM = 0, \forall g, h \in C^k(M) \tag{2.10}$$

fazendo $h = 0$ temos:

$$\int_M W(gu)dM = 0, \forall g \in C^k(M) \tag{2.11}$$

Pelo Teorema de Du Bois-Raymond (1.7) temos:

$$Wu = 0, \text{ em } M$$

Como u não pode ser identicamente nula, por ser uma autofunção, existe um aberto em M no qual W se anula. Logo, estamos dentro das hipóteses da Proposição (1.2), e, portanto, valem as propriedades B, C e D.

2.2 Perturbação da métrica, da função drifting e da função peso.

Nesta seção, queremos mostrar que as propriedades A, B, C e D (1.5) valem para o operador Laplaciano drifting $\Delta_{(g,\eta)} = \Delta_g - g(\nabla^g \eta, \nabla^g)$ para o problema de autovalor com peso, onde estaremos variando a métrica g da variedade Riemanniana (M, g, dm_g) por métricas conformes à métrica g, do tipo $\overline{g} = \mu g$, onde $\mu : M \to \mathbb{R}$ e $\mu > 0$, e estaremos variando também a função drifting η e a função peso ω. Ou seja, estaremos trabalhando agora com três parâmetros variando simultaneamente: μ, η, e ω.

2.2.1 Relações básicas para métricas conformes.

Seja $\overline{g}$ uma métrica conforme à métrica g, ou seja, $\overline{g}$ é do tipo $\overline{g} = \mu g$, onde $\mu : M \to \mathbb{R}$ e $\mu > 0$.

Valem as seguintes expressões para o gradiente, o Laplaciano e o operador Laplaciano drifting, calculados na métrica $\overline{g}$:

(i) $\overline{\nabla}u = \frac{1}{\mu}\nabla u$;

(ii) $\overline{\Delta}u = \frac{1}{\mu}(\Delta u + (n-2)g(\nabla u, \nabla h))$, onde h é uma função tal que $\mu = e^{2h}$.

(iii) Se definirmos o novo Laplaciano drifting para ser

$$\overline{L}_{(\overline{g},\eta)} = \overline{\Delta} - \overline{g}(\overline{\nabla}\eta, \overline{\nabla}) \tag{2.12}$$

então

$$\overline{L}_{(\overline{g},\eta)} = \frac{1}{\mu}\{\Delta + (n-2)g(\nabla, \nabla h) - g(\nabla\eta, \nabla)\} \tag{2.13}$$

2.2.2 Explicação do problema.

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso:

$$\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}u + \omega\lambda u = 0 \tag{2.14}$$

em M, onde (M, g, dm_g) é uma variedade Riemanniana, compacta, conexa, e com bordo, onde $dm_g = e^{-\eta}dM_g$, η é a função drifting, $\overline{g} = \mu g$ é a métrica conforme à métrica g, onde $\mu : M \to \mathbb{R}$ e $\mu > 0$, e ω é a função peso.

Queremos deixar bem claro para o leitor que, quando falamos *"perturbação da métrica g por métricas conformes à g"*, queremos dizer que estaremos perturbando o fator conforme μ, pois, para cada escolha de μ temos uma nova métrica conforme $\overline{g} = \mu g$, ou seja, queremos dizer com isso que os nossos parâmetros de variação são, de fato, o fator conforme μ, a função drifting η e a função peso ω, e cada um destes três parâmetros pertencem ao conjunto $\mathcal{B} = \{\gamma : M \to \mathbb{R}, \gamma > 0\} \subset C^k(M)$.

Antes de partirmos para as demonstrações das propriedades A, B, C e D (1.5), queremos esclarecer que iremos trabalhar com a equação

$$J_{(\eta,h)}u + \mu\omega\lambda u = 0, \quad \text{em } M$$

onde $J_{(\eta,h)} = \Delta + (n-2)g(\nabla, \nabla h) - g(\nabla\eta, \nabla)$, a qual é equivalente à equação (2.14) e que por isso possuem os mesmos espectros.

2.2.3 Propriedade A para o operador $\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}$.

Seja $\Phi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L^2(M)$

$$\Phi(u, \lambda, \mu, \eta, \omega) = J_{(\eta,h)}u + \mu\omega\lambda u \tag{2.15}$$

Queremos mostrar que:

Proposição 2.2 *0 é valor regular de Φ.*

Demonstração: Suponhamos que 0 não seja valor regular de Φ. Então existe $(u, \lambda, \mu, \eta, \omega) \in \Phi^{-1}(0)$ tal que $(u, \lambda, \mu, \eta, \omega)$ é ponto crítico de Φ. Ou seja, $D\Phi_{(u,\lambda,\mu,\eta,\omega)}$ não é sobrejetiva.

Como $Im(D\Phi_{(u,\lambda,\mu,\eta,\omega)}) = \{D\Phi_{(u,\lambda,\mu,\eta,\omega)}(v, s, f, g, \theta)\} \neq L^2(M)$ e $Im(D\Phi_{(u,\lambda,\mu,\eta,\omega)})$ é subespaço fechado em $L^2(M)$, temos que existe $W \in L^2(M) \setminus Im(D\Phi_{(u,\lambda,\mu,\eta,\omega)})$ ortogonal a $Im(D\Phi_{(u,\lambda,\mu,\eta,\omega)})$.

Temos algumas situações a considerar:

(i) $s = f = g = \theta = 0$ implica que $\int_M W(J_{(\eta,h)} + \mu\omega\lambda)vdm_{\overline{g}} = 0$;

(ii) $v = s = f = g = 0$ implica que $\int_M W\mu\theta\lambda u dm_{\overline{g}} = 0$.

O item (i) nos diz que W é uma solução fraca (e, portanto forte) de $(J_{(\eta,h)} + \mu\omega\lambda)W = 0$ em M, $W = 0$ em ∂M. Portanto, W é uma autofunção de $J_{(\eta,h)}$ e é C^k também.

Agora, usando o item (ii) temos:

$$\int_M \theta e^{-\eta} W\mu^2\lambda u dM_g = 0, \forall\theta \in C^k(M) \tag{2.16}$$

onde usamos o fato que $dm_{\overline{g}} = e^{-\eta}dM_{\overline{g}} = \mu e^{-\eta}dM_g$

Pelo Teorema de Du Bois-Raymond (1.7), $\lambda\mu^2 e^{-\eta}Wu = 0$ em M.

Como estamos trabalhando com autovalor não-nulo, temos que $Wu = 0$ em M.

Seja $y \in M$ tal que $u(y) \neq 0$. Pela continuidade de u temos que existe uma vizinhança $U \subset M$ de y tal que u não se anula em U. Logo, devemos ter $W(U) = 0$. Como W é uma autofunção de $J_{(\eta,h)}$, chegamos a uma contradição, pois, pelo Teorema da Continuação Única Fraco (1.5), W seria idendicamente nula em M.

Portanto, 0 é valor regular de Φ.

Teorema 2.3 *Seja* (M, g, dm_g) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Então os autovalores do operador* $\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}$ *para o problema de autovalor com peso são genericamente simples relativamente ao conjunto* $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

Demonstração: Como 0 é valor regular de Φ, então, pelo Teorema (1.8), os autovalores do operador $\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}$ são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

2.2.4 Propriedades B, C e D para o operador $\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}$.

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo:

$$\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}u + \omega\lambda u = 0 \text{ em } M; \quad u = 0 \text{ em } \partial M;$$

Vamos considerar a variedade de Banach de todas as autofunções

$$Q = \{(u, \lambda, \mu, \eta, \omega) \in S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \Phi(u, \lambda, \mu, \eta, \omega) = 0\} \tag{2.17}$$

onde $\Phi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L^2(M)$ é dada por

$$\Phi(u, \lambda, \mu, \eta, \omega) = J_{(\eta,h)}u + \mu\omega\lambda u \tag{2.18}$$

Nosso objetivo é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.4 *Sejam* (M, g, dm_g) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo* ∂M. *Então as propriedades* B, C *e* D *são genéricas para o operador* $\overline{L}_{(\overline{g},\eta)}$ *para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto* $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

Demonstração: Vamos olhar para o espaço ortogonal de $Im(D\Phi_{(\mu,\eta,\omega)}) = \{D\Phi_{(\mu,\eta,\omega)}(f, g, \theta)\}$ em $L^1(M)$, onde $D\Phi_{(\mu,\eta,\omega)}$ é a derivada de Φ na direção dos parâmetros μ, η e ω. Seja $W \in L^1(M)$ tal que

$$\int_M W D\Phi_{(\mu,\eta,\omega)}(f, g, \theta)dm = 0, \forall f, g, \theta \in C^k(M) \tag{2.19}$$

Fazendo $f = g = 0$ em (2.19), usando as fórmulas do $\eta-$divergente e o Teorema de Du Bois-Raymond (1.7) temos:

$$Wu = 0, \text{ em } M$$

Mas, como já sabemos isso implica em dizer que existe um aberto em M no qual W se anula. Ou seja, estamos dentro das hipóteses da Proposição (1.2), e, portanto, valem as propriedades B, C e D.

2.3 Propriedades genéricas do espectro do operador $(\eta, T)-$divergente.

Nesta seção vamos dar algumas definições sobre o operador $(\eta, T)-$divergente, propriedades que iremos usar e enunciar o Teorema de Stokes para variedades com peso quando estamos trabalhando com um $(0,2)-$tensor T simétrico definido positivo numa variedade Riemanniana (M, g, dm), onde $dm = e^{-\eta}dM_g$, com $\eta \in C^\infty(M)$, um tipo de *teorema de Stokes tensorial.* Para mais detalhes, propriedades e a própria motivação do tensor $(\eta, T)-$divergente, recomendamos ao leitor o paper de J. Gomes e J. Ferreira [14].

Definição 2.1 *A divergência de um* $(1,1)-$*tensor* T *numa variedade Riemanniana* (M, g) *é definida como o* $(0,1)-$*tensor dado por*

$$(divT)(v)(p) = tr(z \mapsto (\nabla_z^T(v)(p)) \tag{2.20}$$

em que $p \in M$, $v, z \in T_pM$, ∇ *denota a derivada covariante de* T *e* tr *o traço calculado na métrica* g.

Se T é um $(1,1)-$tensor e $f \in C^\infty(M)$ então $(divT)(\nabla f) = \langle divT, df\rangle$.
Seja T um $(0,2)-$tensor simétrico definido positivo em M, tal que o seu $(1,1)-$tensor correspondente seja simétrico definido positivo também. Vamos definir um operador que é uma extensão tensorial do Laplaciano drifting $(:= \Delta - g(\nabla\eta, \nabla))$:

Definição 2.2 *Seja* T *um* $(1,1)-$*tensor simétrico definido positivo em* (M, g). *Definimos o operador* $(\eta, T)-$*divergente por*

$$\mathcal{L}(f) := div(T\nabla f) - T(\nabla\eta, \nabla f) \tag{2.21}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

Ele aparece como o traço do $(1,1)-$tensor sobre M dado por

$$\tau_{\eta,f} = \nabla T(\nabla f) - \frac{T(\nabla f, \nabla \eta)}{n} I \tag{2.22}$$

Além disso, o operador $\mathcal{L}$ tem a forma divergente: $\mathcal{L}(f) := div_\eta(T(\nabla f))$. É imediato das propriedades do div_η e da simetria de T que

$$\mathcal{L}(fh) = f\mathcal{L}(h) + h\mathcal{L}(f) + 2T(\nabla f, \nabla h) \tag{2.23}$$

para todas $f, h \in C^\infty(M)$.

Teorema 2.5 (Teorema de Stokes tensorial para variedades com peso) *Sejam (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, T um $(0,2)-$tensor simétrico definido positivo, e $f \in C^\infty(M)$. Então*

$$\int_M \mathcal{L}(f) dm = \int_{\partial M} T(\nabla f, \nu) d\mu \tag{2.24}$$

onde $dm = e^{-\eta} dM$, $d\mu = e^{-\eta} d(\partial M)$ e ν é um campo de vetores normais unitários ao longo de ∂M.

Assim, a fórmula de integração por partes é dada por

$$\int_M h\mathcal{L}(f) dm = -\int_M T(\nabla h, \nabla f) dm + \int_{\partial M} hT(\nabla f, \nu) d\mu \tag{2.25}$$

para todas $f, h \in C^\infty(M)$. Logo, o operador $\mathcal{L}$ é autoadjunto no espaço de todas as funções em $L^2(M, dm)$ que se anulam no bordo ∂M.
Portanto, o problema de autovalores

$$\mathcal{L}u + \lambda u = 0 \text{ em } M; \quad u = 0 \text{ em } \partial M;$$

possui um espectro real e discreto $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k ... \to +\infty$, e cada autovalor é repetido de acordo com sua multiplicidade [14].

2.3.1 Propriedade A com condição de Dirichlet no bordo.

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo:

$$\mathcal{L}_\eta u + \omega \lambda u = 0 \text{ em } M; \quad u = 0 \text{ em } \partial M;$$

onde $\mathcal{L}_\eta = div(T\nabla) - T(\nabla\eta, \nabla)$ é o nosso operador (η, T)-divergente, e que já sabemos que o mesmo é autoadjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, dm)$ com domínio $H^2(M, dm) \cap H_{1,0}(M, dm)$.

Vamos definir a seguinte aplicação $\Phi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L^2(M)$ dada por

$$\Phi(u, \lambda, \eta, \omega) = \mathcal{L}_\eta u + \omega\lambda u = div(T\nabla u) - T(\nabla\eta, \nabla u) + \omega\lambda u \tag{2.26}$$

Queremos mostrar que:

Proposição 2.3 *0 é valor regular de Φ.*

Demonstração: Suponhamos que 0 não seja valor regular de Φ. Então existe $(u, \lambda, \eta, \omega) \in \Phi^{-1}(0)$ tal que $(u, \lambda, \eta, \omega)$ é ponto crítico de Φ. Ou seja, $D\Phi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}$ não é sobrejetiva.

$D\Phi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}(v, s, g, h) = (\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)v + s\omega u - T(\nabla g, \nabla u) + h\lambda u$

Como $Im(D\Phi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}) \neq L^2(M)$ e $Im(D\Phi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$ é subespaço fechado em $L^2(M)$ (pois a aplicação Φ é de Fredholm, logo a derivada em todo ponto ponto tem imagem fechada de codimensão finita), temos que existe $W \in L^2(M) \setminus Im(D\Phi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$ ortogonal a $Im(D\Phi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$.

Vamos considerar as seguintes situações:

(i) $s = g = h = 0$ implica que $\int_M W(\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)v dm = 0$;

(ii) $v = s = h = 0$ implica que $\int_M WT(\nabla g, \nabla u) dm = 0$.

O item (i) nos diz que W está no complemento ortogonal da imagem do operador, logo, está no núcleo do operador adjunto; como estamos trabalhando com operadores autoadjuntos, W pertence ao núcleo do próprio operador, ou seja, W é uma solução fraca (e, portanto forte) de $(\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)W = 0$ em M, $W = 0$ em ∂M. Portanto, W é uma autofunção de $\mathcal{L}_\eta$ e é C^k também.

Agora, usando o item (ii) temos:

$0 = \int_M W\langle\nabla g, T\nabla u\rangle dm = \int_M \langle\nabla g, e^{-\eta} WT\nabla u\rangle dM$

Neste ponto vamos usar as fórmulas para o div_η:

$div_\eta(gWT\nabla u) = e^\eta div(e^{-\eta} gWT\nabla u) = e^\eta(g div(e^{-\eta} WT\nabla u) + \langle\nabla g, e^{-\eta} WT\nabla u\rangle)$.

Agora, usando o Teorema de Stokes tensorial para variedades com peso (2.5)

$$\int_{\partial M} gW\langle T\nabla u,\nu\rangle d\mu = \int_M div_\eta(gWT\nabla u)dm = \int_M e^\eta g div(e^{-\eta}WT\nabla u)dm$$
$$+\int_M e^\eta\langle \nabla g, e^{-\eta}WT\nabla u\rangle dm.$$

onde a última integral é igual a zero pelo item (ii).

Logo, temos que:

$$\int_M g div(e^{-\eta}WT\nabla u)dM = \int_{\partial M} gW\langle T\nabla u,\nu\rangle d\mu \tag{2.27}$$

Agora, usando o fato que $W = 0$ em ∂M, temos:

$$\int_M g div(e^{-\eta}WT\nabla u)dM = 0, \forall g\in C^k(M) \tag{2.28}$$

Pelo Teorema de Du Bois-Raymond (1.7), $div(e^{-\eta}WT\nabla u) = 0$ em M.

$0 = div(e^{-\eta}WT\nabla u) = e^{-\eta}div_\eta(WT\nabla u) = e^{-\eta}(W div_\eta T\nabla u + \langle\nabla W, T\nabla u\rangle)$

Isto implica que

$$0 = W\mathcal{L}_\eta u + \langle \nabla W, T\nabla u\rangle \tag{2.29}$$

$\Rightarrow \langle\nabla W, T\nabla u\rangle = \omega\lambda W u.$

O que não pode acontecer, pelo Lema (1.2).

Portanto, 0 é valor regular de Φ.

Teorema 2.6 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Então os autovalores do operador $\mathcal{L}_\eta$ para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.*

Demonstração: Como 0 é valor regular de Φ, então, pelo Teorema (1.8), os autovalores do operador $\mathcal{L}_\eta$ são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.

Como corolário, temos a seguinte aplicação para o operador Laplaciano drifting Δ_η, com condição de Dirichlet no bordo:

Corolário 2.1 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Então os autovalores do operador Laplaciano drifting Δ_η para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.*

Demonstração: Basta fazer $T =$ tensor métrico g em (2.26) e aplicar o Teorema (2.6).

2.3.2 Propriedade A com condição de $T-$Neumann no bordo.

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso:

$$\mathcal{L}_\eta u + \omega\lambda u = 0 \text{ em } M; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_T} = 0 \text{ em } \partial M;$$

onde $\mathcal{L}_\eta = div(T\nabla) - T(\nabla\eta, \nabla)$ é o nosso operador (η, T)-divergente, e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_T} = \langle T\nabla u, \nu\rangle$; com isto, a nossa condição de fronteira é "tipo"Neumann, uma espécie de *condição de Neumann tensorial* [23].

Seja $\Psi : S_k^p \cap \{\dfrac{\partial u}{\partial \nu_T} = 0 \text{ em } \partial M\} \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L^2(M)$

$$\Psi(u, \lambda, \eta, \omega) = \mathcal{L}_\eta u + \omega\lambda u = div(T\nabla u) - T(\nabla\eta, \nabla u) + \omega\lambda u \tag{2.30}$$

Queremos mostrar que:

Proposição 2.4 *0 é valor regular de Ψ.*

Demonstração: Suponhamos que 0 não seja valor regular de Ψ. Então existe $(u, \lambda, \eta, \omega) \in \Psi^{-1}(0)$ tal que $(u, \lambda, \eta, \omega)$ é ponto crítico de Ψ. Ou seja, $D\Psi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}$ não é sobrejetiva.

$D\Psi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}(v, s, g, h) = (\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)v + s\omega u - T(\nabla g, \nabla u) + h\lambda u$

Como $Im(D\Psi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}) \neq L^2(M)$ e $Im(D\Psi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$ é subespaço fechado em $L^2(M)$, temos que existe $W \in L^2(M) \setminus Im(D\Psi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$ ortogonal a $Im(D\Psi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$.

Vamos considerar as seguintes situações:

(i) $s = g = h = 0$ implica que $\int_M W(\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)v dm = 0$;

(ii) $v = s = h = 0$ implica que $\int_M WT(\nabla g, \nabla u)dm = 0$.

O item (i) nos diz que W é uma solução fraca (e, portanto forte) de $(\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)W = 0$ em M, $\dfrac{\partial W}{\partial \nu_T} = 0$ em ∂M. Portanto, W é uma autofunção de $\mathcal{L}_\eta$ e é C^k também.

Agora, usando o item (ii) temos:

$0 = \int_M W\langle\nabla g, T\nabla u\rangle dm = \int_M \langle\nabla g, e^{-\eta}WT\nabla u\rangle dM.$

Neste ponto vamos usar as fórmulas para o div_η:

$div_\eta(gWT\nabla u) = e^\eta div(e^{-\eta}gWT\nabla u) = e^\eta(g div(e^{-\eta}WT\nabla u) + \langle\nabla g, e^{-\eta}WT\nabla u\rangle).$

Agora, usando o Teorema de Stokes tensorial para variedades com peso (2.5)

$$\int_{\partial M} gW\langle T\nabla u,\nu\rangle d\mu = \int_M div_\eta(gWT\nabla u)dm = \int_M e^\eta g div(e^{-\eta}WT\nabla u)dm$$
$$+\int_M e^\eta\langle\nabla g, e^{-\eta}WT\nabla u\rangle dm.$$

onde a última integral é igual a zero pelo item (ii).

Logo, temos que:

$$\int_M g div(e^{-\eta}WT\nabla u)dM = \int_{\partial M} gW\langle T\nabla u,\nu\rangle d\mu \tag{2.31}$$

Agora, usando o fato que $\dfrac{\partial u}{\partial\nu_T} = 0$ em ∂M, pois u é uma autofunção de $\mathcal{L}_\eta$, temos:

$$\int_M g div(e^{-\eta}WT\nabla u)dM = 0, \forall g\in C^k(M) \tag{2.32}$$

Pelo Teorema de Du Bois-Raymond (1.7), $div(e^{-\eta}WT\nabla u) = 0$ em M.

$0 = div(e^{-\eta}WT\nabla u) = e^{-\eta}div_\eta(WT\nabla u) = e^{-\eta}(Wdiv_\eta T\nabla u + \langle\nabla W, T\nabla u\rangle)$

Isto implica que

$$0 = W\mathcal{L}_\eta u + \langle\nabla W, T\nabla u\rangle \tag{2.33}$$

$\Rightarrow \langle\nabla W, T\nabla u\rangle = \omega\lambda W u$. O que não pode acontecer, pelo Lema (1.2).

Portanto, 0 é valor regular de Ψ.

Teorema 2.7 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Então os autovalores do operador $\mathcal{L}_\eta$ para o problema de autovalor com peso, com condição de $T-$Neumann no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.*

Demonstração: Como 0 é valor regular de Ψ, então, pelo Teorema (1.8), os autovalores do operador $\mathcal{L}_\eta$ são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.

Como aplicação, temos o seguinte corolário para o operador Laplaciano drifting Δ_η, com condição de Neumann no bordo:

Corolário 2.2 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Então os autovalores do operador Laplaciano drifting Δ_η para o problema de autovalor com peso, com condição de Neumann no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.*

Demonstração: Basta fazer $T =$ tensor métrico g em (2.30) e aplicar o Teorema (2.7).

2.3.3 Propriedade A com condição de $T-$Robin no bordo.

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso:

$$\mathcal{L}_\eta u + \omega\lambda u = 0, \text{ em } M$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu_T} + \beta u = 0, \text{ em } \partial M$$

onde $\mathcal{L}_\eta = div(T\nabla) - T(\nabla\eta, \nabla) + \alpha$, $\alpha \in C^2(M)$, $\beta \in C^3(M)$, e $\frac{\partial u}{\partial \nu_T} = \langle T\nabla u, \nu\rangle$; com isto, a nossa condição de fronteira é "tipo"Robin, uma espécie de *condição de Robin tensorial.*

Seja $\varphi : S_k^p \cap \{\frac{\partial u}{\partial \nu_T} + \beta u = 0, \text{ em } \partial M\} \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L^2(M)$

$$\varphi(u, \lambda, \eta, \omega) = \mathcal{L}_\eta u + \omega\lambda u = div(T\nabla u) - T(\nabla\eta, \nabla u) + \alpha u + \omega\lambda u \tag{2.34}$$

Queremos mostrar que:

Proposição 2.5 *0 é valor regular de φ.*

Demonstração: Suponhamos que 0 não seja valor regular de φ. Então existe $(u, \lambda, \eta, \omega) \in \varphi^{-1}(0)$ tal que $(u, \lambda, \eta, \omega)$ é ponto crítico de φ. Ou seja, $D\varphi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}$ não é sobrejetiva.

$D\varphi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}(v, s, g, h) = (\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)v + s\omega u - T(\nabla g, \nabla u) + h\lambda u$

Como $Im(D\varphi_{(u,\lambda,\eta,\omega)}) \neq L^2(M)$ e $Im(D\varphi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$ é subespaço fechado em $L^2(M)$, temos que existe $W \in L^2(M) \setminus Im(D\varphi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$ ortogonal a $Im(D\varphi_{(u,\lambda,\eta,\omega)})$.

Vamos considerar:

(i) $s = g = h = 0$ implica que $\int_M W(\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)vdm = 0$;

(ii) $v = s = h = 0$ implica que $\int_M WT(\nabla g, \nabla u)dm = 0$;

(iii) $v = s = g = 0$ implica que $\int_M Wh\lambda udm = 0$.

O item (i) nos diz que W é uma solução fraca (e, portanto forte) de $(\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)W = 0$ em M, $\frac{\partial W}{\partial \nu_T} + \beta W = 0$ em ∂M. Portanto, W é uma autofunção de $\mathcal{L}_\eta$ e é C^k também.

Agora, usando o item (iii) temos:

$$\int_M e^{-\eta} Wh\lambda udM = 0, \forall h \in C^k(M) \tag{2.35}$$

Pelo Teorema de Du Bois-Raymond (1.7), temos $e^{-\eta}W\lambda u = 0$; como $e^{-\eta} \neq 0$ e estamos trabalhando com autovalor λ não-nulo, então temos $Wu = 0$ em M. Como $u \neq 0$, por ser uma autofunção, existe uma vizinhança $V \subset M$ tal que $u\mid_V \neq 0$, ou seja, $W(V) = 0$. Pelo Teorema da Continuação Única Fraco (1.5), temos $W = 0$. Contradição, pois, W é uma autofunção de $\mathcal{L}_\eta$.

Portanto, 0 é valor regular de φ.

Teorema 2.8 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Então os autovalores do operador $\mathcal{L}_\eta$ para o problema de autovalor com peso, com condição de $T-$Robin no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Demonstração: Como 0 é valor regular de φ, então, pelo Teorema (1.8), os autovalores do operador $\mathcal{L}_\eta$ são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

Como aplicação, temos o seguinte corolário para o operador Laplaciano drifting Δ_η, com condição de Robin no bordo:

Corolário 2.3 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Então os autovalores do operador Laplaciano drifting Δ_η para o problema de autovalor com peso, com condição de Robin no bordo, são genericamente simples relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Demonstração: Basta fazer $T =$ tensor métrico g em (2.34) e aplicar o Teorema (2.8).

2.3.4 Propriedades B, C e D para o operador $(\eta, T)-$divergente.

Vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso, com condições de Dirichlet no bordo:

$$\mathcal{L}_\eta u + \omega\lambda u = 0 \text{ em } M; \quad u = 0 \text{ em } \partial M;$$

onde $\mathcal{L}_\eta = div(T\nabla) - T(\nabla\eta, \nabla)$ é o nosso operador (η, T)-divergente, e que já sabemos que o mesmo é autoadjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, dm)$ com domínio $H^2(M, dm) \cap H_{1,0}(M, dm)$.

Vamos considerar a variedade de Banach de todas as autofunções

$$Q = \{(u, \lambda, \eta, \omega) \in S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \Phi(u, \lambda, b, \omega) = 0\} \tag{2.36}$$

onde $\Phi : S_k^p \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L^2(M)$ é dada por

$$\Phi(u, \lambda, \eta, \omega) = \mathcal{L}_\eta u + \omega\lambda u = div(T\nabla u) - T(\nabla\eta, \nabla u) + \omega\lambda u \tag{2.37}$$

A caracterização do espaço tangente de Q é:

$$T_{(u,\lambda,\eta,\omega)}Q = \{(v, s, g, h) \in H_{1,0}(M) \times \mathbb{R} \times C^k(M) \times C^k(M) : \textstyle\int_M vudm = 0,$$
$$(\mathcal{L}_\eta + \omega\lambda)v + s\omega u - \langle\nabla g, T\nabla u\rangle + h\lambda u = 0\}.$$

Nosso objetivo é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.9 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M. Então as propriedades B, C e D são genéricas para o operador $\mathcal{L}_\eta$, para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Demonstração: Vamos olhar para o espaço ortogonal de $D\Phi_{(\eta,\omega)}(g, h) = -T(\nabla g, \nabla u)+ h\lambda u$ em $L^1(M)$, onde $D\Phi_{(\eta,\omega)}$ é a derivada de Φ na direção dos parâmetros η e ω. Seja $W \in L^1(M)$ tal que

$$\int_M W(-T(\nabla g, \nabla u) + h\lambda u)dm = 0, \forall g, h \in C^k(M) \tag{2.38}$$

fazendo $g = 0$ temos:

$$\int_M W(h\lambda u)dm = 0, \forall h \in C^k(M) \tag{2.39}$$

e usando as fórmulas do $\eta-$divergente e o Teorema de Du Bois-Raymond (1.7) temos:

$$Wu = 0, \text{ em } M$$

Como u não pode ser identicamente nula, por ser uma autofunção, existe um aberto em M no qual W se anula. Logo, estamos dentro das hipóteses da Proposição (1.2), e, portanto, valem as propriedades B, C e D.

Como aplicação, temos o seguinte corolário, o qual garante as mesmas propriedades B, C e D para o operador Laplaciano drifting, com condição de Dirichlet no bordo:

Corolário 2.4 *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo ∂M. Então as propriedades B, C e D são genéricas para o operador Laplaciano drifting Δ_η, para o problema de autovalor com peso, com condição de Dirichlet no bordo, relativamente ao conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Demonstração: Basta fazer $T =$ tensor métrico g em (2.37) e aplicar o Teorema (2.9).

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos novas aplicações dos resultados abstratos de K. Uhlenbeck [27], para os operadores $L_b = L + b$, o Laplaciano drifting $\Delta_{(g,\eta)} = \Delta_g - g(\nabla^g \eta, \nabla^g)$ e $(\eta, T)-$divergente $\mathcal{L}_\eta = div(T\nabla) - T(\nabla\eta, \nabla)$, para o Problema do Autovalor com Peso, ou seja, a principal novidade do trabalho é a função peso com sinal definido ω nos autovalores.

Mostramos que, sob determinadas condições sobre a função peso ω, podemos aplicar os resultados abstratos de [27], e garantir as mesmas propriedades genéricas abstratas de [27]:

A. Os autovalores são simples;

B. 0 é valor regular das autofunções no interior de M;

C. As autofunções são funções de Morse no interior de M;

D. 0 é valor regular da derivada normal das autofunções no bordo ∂M.

Uma possível direção em que se pode estender os resultados do presente trabalho seria considerar funções peso que mudam de sinal. Com essa hipótese sobre a função peso os resultados abstratos da Uhlenbeck necessitam de uma adaptação. Outra importante direção é considerar famílias de operadores com simetria não trivial. Já é bem conhecido na literatura que a propriedade A não é válida se a família de operadores possui simetria diferente de $\mathbb{Z}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}_2$, porém no caso com simetria existe uma propriedade análoga a dos autoespaços serem unidimensionais, a saber os autoespaços são representações irredutíveis do grupo de simetria da família de operadores, ver [19, 20]. Portanto uma direção natural que pode-se seguir é considerar a mesma questão para operadores ellípticos com simetria e com peso. Além dos análogos das propriedades B, C e D em famílias com simetria.

Apêndice A

A.1 Sobre os espaços de Sobolev.

Seja Ω um aberto do M, $1 \leq p < +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ então u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, porém, em geral, $D^\alpha u$ não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$.

Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, defini-se um novo espaço denominado *espaço de Sobolev.* Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes à $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo:

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \tag{A.1}$$

O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p}^p)$ é denominado espaço de Sobolev.

Observação: Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a estrutura Hilbertiana de tais espaços.

Proposição A.1 ([7]) *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Proposição A.2 ([7]) *Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.*

Para um maior aprofundamento sobre a Teoria dos espaços de Sobolev, recomendamos ao leitor o livro de M. Cavalcanti e V. Cavalcanti [7].

A.2 Laplaciano drifting.

Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta com peso, onde $dm = e^{-\eta}dM$ e $\eta \in C^\infty(M)$. Vamos definir o operador $\eta-$divergente em $\chi(M)$, onde $\chi(M)$ é o conjunto de campos de vetores de classe C^∞ em M, da seguinte maneira:

Definição A.1 ([18])

$$div_\eta = div - d\eta$$

onde $d\eta$ é a diferencial de η.

Segue da linearidade de $d\eta$ e das propriedades usuais da divergência de campos de vetores que, para $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \chi(M)$ teremos:

(i) $div_\eta(X + Y) = div_\eta(X) + div_\eta(Y)$;

(ii) $div_\eta(fX) = f div_\eta(X) + g(\nabla f, X)$;

(iii) $div(e^{-\eta}X) = e^{-\eta}div_\eta(X)$.

Podemos agora definir o operador Laplaciano drifting da seguinte forma:

Definição A.2 ([18])

$$\Delta_\eta(f) := div_\eta(\nabla f) = \Delta f - \langle \nabla\eta, \nabla f\rangle$$

Também temos o seguinte teorema da divergência quando estamos em variedades Riemannianas com peso:

Teorema A.1 (Teorema da Divergência, [18].) *Seja (M, g, dm) uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo ∂M. Então:*

$$\int_M \Delta_\eta(f)dm = \int_{\partial M} g(\nabla f, \nu)d\mu$$

onde $dm = e^{-\eta}dM$, $d\mu = e^{-\eta}d(\partial M)$ e $\eta \in C^\infty(M)$.

Assim, a fórmula de integração por partes é dada por:

$$\int_M h\Delta_\eta(f)dm = -\int_M g(\nabla h, \nabla f)dm + \int_{\partial M} hg(\nabla f, \nu)d\mu$$

para quaisquer $f, h \in C^\infty(M)$.

Portanto, o operador Laplaciano drifting é formalmente autoadjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, dm)$, quando todas as funções se anulam no bordo ∂M.

Para mais informações sobre o operador Laplaciano drifting e suas propriedades, recomendamos ao leitor a tese de R. Mesquita [18].

Bibliografia

[1] Abraham, R. *Transversality in manifolds mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 69, (1963), pp. 470-474.

[2] Agmon, S. *The L_p aproach to the Dirichlet problem.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), pp. 405-448.

[3] Albert J., *Nodal and critical sets for eigenfunctions of elliptic operators*, Proc. Sym. Pure Math., vol. 23.

[4] Aronszajn, N. *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations*, J. Math. Pures. Appl. 36 (1957), pp. 235-249.

[5] Bando, S., Urakawa, H. *Generic properties of the eigenvalue of the laplacian for compact Riemannian manifolds.* Tôhoku math. J. 35 (1983) 155-172.

[6] Bessa, G. P., Gimeno, V., Jorge, L. *Green functions and the Dirichlet spectrum.* Rev. Mat. Iberoam., European Mathematical Society, DOI 10.4171/RMI/1119, 2019.

[7] Cavalcanti, M.; Cavalcanti, V. *Iniciação à Teoria das Distribuições e aos espaços de Sobolev*, Maringá, (2000).

[8] Cunha, C. L. *Propriedades de Autovalores para uma classe de operadores elípticos de segunda ordem.* Tese de Doutorado, UFC, Fortaleza, 2016.

[9] de Alcântara, M. A. *Sobre a Hipótese de Transversalidade de Arnold em Famílias de Operadores Bilaplaciano em Variedades Riemannianas.* Tese de Doutorado, UFAM, Manaus, 2015.

[10] de Figueiredo, D. G. *Positive solutions of semilinear elliptic problems.* Lectures notes in Mathmatics, Springer-Verlag, New York, 1982.

[11] de Miranda, J. F. R. *Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco e estimativas de autovalores para uma classe de operadores diferenciais elípticos*. Tese de Doutorado, UFAM, Manaus, 2015.

[12] de Melo, W. *Topologia das Variedades*, IMPA, Rio de Janeiro, (2014).

[13] Gomes, J. N. V. *Operadores Diferenciais em Variedades Riemannianas*, Notas de Aula da Disciplina MAT6651, IME-USP, São Paulo, (2015).

[14] Gomes, J. N. V.; Miranda, J. F. R. *Eigenvalues estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form*, Nonlinear Analysis 176 (2018) 1-19.

[15] Guillemin, V.; Polack, A. *Differential Topology*, Prentice-Hall, (1974).

[16] Henry, D. *Perturbation of the Boundary in Boundary Value Problems of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, New York, 2005.

[17] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[18] Mesquita, R. R. *Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η-laplaciano e aplicações* . Tese de Doutorado. UFAM, Manaus, 2014.

[19] Marrocos, M. A. M. *Autovalores de alguns problemas elípticos em regiões simétricas.* Tese de Doutorado. USP, São Paulo, 2011.

[20] Pereira, A. L. *Eigenvalues of the Laplacian on symmetric regions.* NoDEA 2 (1995) 63-109.

[21] Petersen, P. *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] Ribeiro, B. H. C. *Problema Linear de Autovalor com peso indefinido.* Monografia, UFPB, João Pessoa, 2004.

[23] Roth, J. *Reilly-type Inequalities for Paneitz and Steklov Eigenvalues.* Potential Analysis - Springer, 2019.

[24] Sard, A. *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol 48 (1942), pp. 883-890.

[25] Smale, S. *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, American Journal of Mathematics, Vol. 87, Nº 4, (1965), pp. 861-866.

[26] Spivak, M. *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Vol. 4, Houston, Texas, 1979.

[27] Uhlenbeck, K. *Generic Properties of Eigenfunctions.* Amer. J. of Math. 98 (1976) pp. 1059-1078.

[28] Xia, C. *Eigenvalues on Riemannian Manifolds.* Publicações Matemáticas, 29º CBM, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.

[29] Zelditch, S. *On the generic spectrum of a Riemannian cover.* Ann. Inst. Fourier, Grenobe 40, 2(1990), pp. 407-442.