



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGE

IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS DE  
ORDEM FRACIONÁRIA, ESTUDO DE CASO  
APLICADA A UM SISTEMA TÉRMICO

Michel Wanderson de Souza Campos

Manaus - AM  
Dezembro de 2020

Michel Wanderson de Souza Campos

IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS DE  
ORDEM FRACIONÁRIA, ESTUDO DE CASO  
APLICADA A UM SISTEMA TÉRMICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador(a)

Prof. Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior

Co-orientador(a): Prof. Dr. Renan Landau Paiva de Medeiros

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Faculdade de Tecnologia

Manaus - AM

Dezembro de 2020

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C198i Campos, Michel Wanderson de Souza  
Identificação e Controle de Sistemas de Ordem Fracionária,  
Estudo de Caso Aplicada a um Sistema Térmico / Michel  
Wanderson de Souza Campos . 2020  
101 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Florindo Antonio de Carvalho Ayres Junior  
Coorientador: Renan Landau Paiva de Medeiros  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade  
Federal do Amazonas.

1. Identificação Fracionária. 2. Modelo fracionário a três termos.  
3. planta térmica. 4. mínimos quadrados. 5. controlador fracionário.  
I. Ayres Junior, Florindo Antonio de Carvalho. II. Universidade  
Federal do Amazonas III. Título

MICHEL WANDERSON DE SOUZA CAMPOS

**IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS DE ORDEM  
FRACIONÁRIA: ESTUDO DE CASO APLICADO A UM SISTEMA  
TÉRMICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

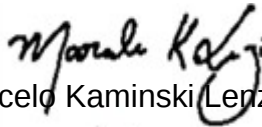
Aprovado em 23 de dezembro de 2020

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Florindo Antônio, de Carvalho Ayres Junior, Presidente

Universidade Federal do Amazonas



Prof. Dr. Marcelo Kaminski Lenzi, Membro

Universidade Federal do Paraná



Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho, Membro

Universidade Federal do Amazonas

Esta dissertação é dedicada a todos aqueles que contribuíram para tal, em especial meus pais; Wilson Ferreira Campos e Marlene de Souza Campos, pelo apoio dado neste longo período de toda minha vida acadêmica. Em memória de Dra. Creuza Barbosa, por seu apoio e conselhos, especialmente, durante o início da vida acadêmica. À minha companheira Prof. Priscila Sousa, pelo apoio e paciência em toda minha caminhada acadêmica neste período.

---

## AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao Prof. Dr. Florindo Ayres, ao Prof. Dr. Renan Landau, por me aceitar como orientando, pela paciência e por todas as orientações até aqui dadas, aqui o meu reconhecimento de que, sem tais orientações, esta dissertação não seria possível. E ainda agradecer as grandes contribuições do Prof. Dr. Edgar Filho, pelos conselhos e aprendizagem diversas ao longo de minha passagem pelo Mestrado. Aos demais colegas de laboratório, Prof. Nei Júnior e ao Prof. Adrian Barreda, pelo apoio dado até aqui.

*"Quanto mais me aprofundo na Ciência mais me aproximo de Deus."*

Albert Einstein

# IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA, ESTUDO DE CASO APLICADA A UM SISTEMA TÉRMICO

Autor: Michel Wanderson de Souza Campos

Orientador: Prof. Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior

## Resumo

A necessidade de se modelar a natureza sempre foi um grande desafio ao homem. Descrever fenômenos naturais em modelos matemáticos tem sido desafiador ao longo da história na área de identificação de sistemas. Atualmente, há uma infinidade de métodos e regras a serem seguidas quando se trata de sistemas reais como sistemas térmicos, dentre outros. Tendo como principal objetivo o de obter o controle sob o sistema identificado, modificando seu comportamento de forma eficiente, com menor custo e intervenção humana possível. Contudo, não é possível identificar um sistema com 100% de precisão, o que se consegue é um modelo aproximado da dinâmica estudada. Neste trabalho, são investigados métodos de identificação baseados em cálculo fracionário aplicados à sistemas de ordem fracionária. A planta térmica estudada é composta por uma lâmpada ultravioleta de 250 Watts acionada por um dimmer que é controlado por meio de um microcontrolador. Os dados obtidos em uma faixa de potência são coletados em malha aberta no domínio do tempo. Com os dados armazenados, a planta é identificada segundo o modelo de mínimos quadrados não recursivos ou batelada, na qual se pesquisa um ajuste da curva de resposta da planta minimizando uma função de erro médio quadrático. Após a identificação do sistema, um controlador do tipo  $PI^\mu D^\lambda$  é proposto para o controle uma magnitude de 25 Watts no intervalo de potência



de [50, 200]Watts. Como resultado, obteve-se um bom desempenho do controlador, confirmando a eficiência da identificação do sistema estudado.

*Palavras-chave:* Identificação fracionária, modelo fracionário a três termos, planta térmica, mínimos quadrados, controlador fracionário.

# IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA, ESTUDO DE CASO APLICADA A UM SISTEMA TÉRMICO

Autor: Michel Wanderson de Souza Campos

Orientador: Prof. Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior

## Abstract

The need to model nature has always been a great challenge to man. Describing natural phenomena in mathematical models has been challenging throughout history in the area of systems identification. Currently, there are a multitude of methods and rules to be followed when it comes to real systems such as thermal systems, among others. Having as main objective the one of obtaining the control under the identified system, modifying their behavior efficiently, with the lowest cost and possible human intervention. However, it is not possible to identify a system with 100% accuracy, what is achieved is an approximate model of the studied dynamics. In this work, identification methods based on fractional calculations applied to fractional order systems are investigated. The thermal plant studied is composed of a 250 Watt ultraviolet lamp driven by a dimmer that is controlled through a microcontroller. The data obtained in a power range are collected in an open loop in the time domain. With the stored data, the plant is identified according to the non-recursive or batch least-squares model, offline mode, in which an adjustment of the plant's response curve is investigated, minimizing by mean quadratic error function. After identifying the system, a controller of the type  $PI^\mu D^\lambda$  is proposed for the control in all power ranges from 10% in the range of 20% to 80%. As result, a good performance of the controller was obtained, proving the efficiency of the identification of the studied system.

*Keywords:* fractional-order identification, three-term model, fractional-order controller, thermal system, least square.

---

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Lugar das raízes de 3.6 como função de $\zeta$ . Autor (MERRIKH-BAYAT; KARIMI-GHARTEMANI, 2008) . . . . .	38
Figura 2 – Função representada pelos pontos e aproximados por uma curva $y = f(x)$ . . . . .	41
Figura 3 – Esquemático do Sistema Térmico, Laboratório de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos (FT/UFAM) . . . . .	46
Figura 4 – Amostra de dados coletados da planta térmica à variação de potência de 10% . . . . .	48
Figura 5 – (Vermelha) Curva da função de aproximação com os parâmetros obtidos, (Azul) Curva da função a ser identificada . . . . .	49
Figura 6 – (Azul) A amostra dos dados coletados.(Vermelho) Ajuste da curva pelo modelo de ordem fracionária a três termos . . . . .	50
Figura 7 – Distribuição normal dos resíduos . . . . .	51
Figura 8 – Ajuste da curva (Vermelho) para o modelo de ordem inteira a dois termos . . . . .	52
Figura 9 – Gráfico da distribuição normal dos resíduos . . . . .	53
Figura 10 – Ajuste da curva (Vermelha) para o Modelo Fracionário a dois termos . . . . .	53
Figura 11 – Gráfico da distribuição normal dos resíduos . . . . .	54
Figura 12 – Ajuste da curva de aproximação para o modelo inteiro a três termos . . . . .	55
Figura 13 – Gráfico da distribuição normal dos resíduos . . . . .	56
Figura 14 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a três termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	59

Figura 15 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a três termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	60
Figura 16 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a três termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	61
Figura 17 – Gráfico do ajuste do modelo inteiro a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	62
Figura 18 – Gráfico do ajuste do modelo inteiro a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	63
Figura 19 – Gráfico do ajuste do modelo inteiro a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	64
Figura 20 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	65
Figura 21 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	66
Figura 22 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo . . . . .	67
Figura 23 – Regiões de Estabilidade para $v = 0.5$ e $v = 1.5$ . . . . .	75
Figura 24 – Esquema de um Controlador PID de ordem inteira . . . . .	76
Figura 25 – Controlador fracionário genérico . . . . .	77
Figura 26 – Comparação entre controladores de ordem inteira e fracionário (ROQUE, 2015) . . . . .	78
Figura 27 – Possíveis configurações de controladores fracionários (ROQUE, 2015)	78
Figura 28 – Comportamento na Frequência para um sistema $G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{a})^{2\alpha} + 2\zeta(\frac{s}{a})^\alpha + 1}$ . Adaptado de (VALÉRIO; COSTA, 2013) . . . . .	79
Figura 29 – Comportamento da frequência de um controlador PID fracionário para dois parâmetros (VALÉRIO; COSTA, 2013) . . . . .	80
Figura 30 – Resposta do sistema ao degrau unitário com o controlador PID fracionário . . . . .	85
Figura 31 – Diagrama de Bode do sistema Planta-Controlador . . . . .	85
Figura 32 – Resposta do sistema a variação de setpoint e esforço de controle . . . . .	86

Figura 33 – Resposta do sistema a variação do setpoint e esforço de controle . . .	87
Figura 34 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios . . . . .	88
Figura 35 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios . . . . .	88
Figura 36 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios . . . . .	89
Figura 37 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios . . . . .	89
Figura 38 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios . . . . .	90
Figura 39 – Resposta ao Degrau do Sistema Identificado e com atuação do Controlador . . . . .	90
Figura 40 – Resposta ao Degrau do Sistema Identificado e com atuação do Controlador . . . . .	91
Figura 41 – Resposta ao Degrau do Sistema Identificado e com atuação do Controlador . . . . .	91

---

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS . . . . .	50
Tabela 2 – RESULTADO DOS PARÂMETROS OBTIDOS NA FAIXA DE POTÊNCIA DE 20% A 30% da POTÊNCIA MÁXIMA . . . . .	51
Tabela 3 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS NA FAIXA DE POTÊNCIA DE 20% a 30% da POTÊNCIA MÁXIMA . . . . .	52
Tabela 4 – RESULTADO DOS PARÂMETROS OBTIDOS NA FAIXA DE 20% a 30% da POTÊNCIA MÁXIMA . . . . .	54
Tabela 5 – RESULTADOS DOS PARÂMETROS OBTIDOS NA FAIXA DE POTÊNCIA DE 20% a 30% da POTÊNCIA MÁXIMA . . . . .	56
Tabela 6 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS NO MODELO FRACTIONÁRIO A TRÊS TERMOS . . . . .	57
Tabela 7 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O MODELO INTEIRO A DOIS TERMOS . . . . .	57
Tabela 8 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O MODELO FRACIONÁRIO A DOIS TERMOS . . . . .	58
Tabela 9 – RESULTADOS DOS PARÂMETROS ESTIMADOS EM SEUS VALORES MÉDIOS A VARIAÇÃO DE POTÊNCIA DE 10% DA POTÊNCIA MÁXIMA . . . . .	70
Tabela 10 – RESULTADO DA IDENTIFICAÇÃO PARA O SISTEMA TÉRMICO .	73
Tabela 11 – RESULTADO DO CÁLCULO DOS ÍNDICES INTEGRAL DE DESEMPENHO . . . . .	96
Tabela 12 – RESULTADO DO ESTUDO DOS ESFORÇOS DE CONTROLE . . . . .	97

---

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**AF** *Controle Direto Adaptativo*

**CF** *Cálculo Fracionário*

**DMAFOPI** *Modo Adaptativo Dual PI Ordem Fracionária*

**EDO** *Equação Diferencial Ordinária*

**EDP** *Equação Diferencial Parcial*

**FOPID** *Controlador PID de Ordem Fracionária*

**LHD** *Definição Mão Esquerda*

**LHP** *Semiplano Esquerdo*

**LMI** *Desigualdade Matricial Linear*

**LTI** *Linear Invariante no Tempo*

**LTI FOS** *Linear Invariante no Tempo Sistema de Ordem Fracionária*

**MIMO** *Multi-Entrada-Multi-Saída*

**MNQR** *Mínimos Quadrados Não-Recursivo*

**PI** *Proporcional-Integral*

**PID** *Proporcional-Integral-Derivativo*



**RHD** *Definição mão Direita*

**RL** *Riemann-Liouville*

**VPTF** *Função de Transferência de Parâmetros Variáveis*

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação e Justificativa . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivo Geral . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos Específicos . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>1.4</b>	<b>Materiais e Métodos . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>1.5</b>	<b>Organização do Trabalho . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.1</b>	<b>A Função Gama de Euler ou Função Fatorial . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.2</b>	<b>Função Beta . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Integral Fracionária . . . . .</b>	<b>30</b>
2.3.1	Definição de Riemann-Liouville . . . . .	30
<b>2.4</b>	<b>Derivada Fracionária . . . . .</b>	<b>31</b>
2.4.1	Definição de Riemann-Liouville . . . . .	31
2.4.2	Definição de Caputo . . . . .	32
<b>2.5</b>	<b>Função de Mittag-Leffler . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>2.6</b>	<b>Conclusão do Capítulo . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DE ORDEM FRACIONÁRIA DE SISTEMAS .</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Função de Transferência de Ordem Fracionária de Dois Ter- mos ou Um Polo . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1.1	Resposta Temporal da Função de Transferência Fracionária a Dois Termos . . . . .	36
3.1.2	Função de Transferência de Ordem Fracionária a Três Termos	36

<b>3.2</b>	<b>Resposta ao Degrau da Função de Transferência de Ordem Fracionária a Três Termos</b> . . . . .	<b>39</b>
3.2.1	Métodos dos Mínimos Quadrados Não recursivo ou Batelada (MNQR) . . . . .	40
<b>3.3</b>	<b>Conclusão do Capítulo</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Apresentação do Ambiente Experimental</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.2</b>	<b>Apresentação do Ambiente de Simulação</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>4.3</b>	<b>Aplicação da Metodologia para a Identificação do Sistema (Obtenção dos Modelos Identificados)</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>4.4</b>	<b>Descrição dos Testes Realizados no Sistema</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADO DA IDENTIFICAÇÃO</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>5.1</b>	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>6</b>	<b>CONTROLE DE SISTEMAS FRACIONÁRIOS</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>6.1</b>	<b>Controladores PID</b> . . . . .	<b>75</b>
6.1.1	Controlador PID de ordem Inteira . . . . .	75
6.1.2	Controlador PID de Ordem Fracionária . . . . .	76
<b>6.2</b>	<b>Sintonia de Controladores Fracionários</b> . . . . .	<b>78</b>
6.2.1	Sintonia analítica: Resposta em Frequência . . . . .	80
6.2.2	Aproximação de Oustaloup Recursivo . . . . .	81
<b>7</b>	<b>RESULTADOS DA SINTONIA DO CONTROLADOR PID FRACIONÁRIO</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>7.1</b>	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>92</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>94</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>99</b>

# 1

---

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Motivação e Justificativa

**D**esde o surgimento da humanidade, o homem tenta descrever os fenômenos da natureza sob modelos matemáticos. Na antiguidade, os filósofos já observavam os fenômenos naturais com um olhar descritivo e analítico e com o avanço da matemática puderam descrevê-los sob equações matemáticas. Tais exemplos vêm desde a Grécia e passando pela história como Nicolau Copérnico que desenvolveu a teoria Heliocêntrica do Sistema Solar. Mas foi com o advento do cálculo diferencial que surgiu o estudo dos sistemas dinâmicos. Desde então, técnicas de modelagem e identificação de sistemas vem sendo estudadas, porém eram tarefas árduas fazê-las, principalmente levando em consideração a coleta de dados de um sistema. Com a tecnologia ficou mais acessível, tendo como ferramentas atuais o Matlab e Labview que auxiliam na maioria dos experimentos em laboratório.

Uma das técnicas de modelagem matemática é a caixa branca. Neste caso, faz-se necessário conhecer a fundo o sistema a ser modelado, além de estar bem familiarizado com o sistema. Para esse tipo de modelagem, é preciso conhecer as relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos. A modelagem caixa branca também é conhecido como modelagem pela física ou natureza do processo ou ainda modelagem fenomenológica ou conceitual (AGUIRRE, 2007).

Todavia, nem sempre é necessário conhecer a fundo os fenômenos físicos que descrevem o sistema para modelá-lo, é isto que a área de identificação de sistemas

estuda. Tendo como principal método, o de caixa preta (blackbox) ou modelagem empírica. Neste caso, os tipos de modelos, as técnicas usadas são bastante diferentes da modelagem por caixa branca (AGUIRRE, 2007).

A modelagem empírica requer um conjunto de dados que será analisado segundo as regras de projeto, sejam eles no domínio da frequência ou no domínio do tempo. Segundo Lennart Ljung (LJUNG, 1999), a construção de um modelo para identificação de um conjunto de dados envolve três princípios básicos:

1. Os dados
2. O Conjunto de modelos candidatos
3. A regra na qual os modelos candidatos podem ser avaliados usando os dados

Quanto ao conjunto de modelos desenvolvidos, há três grupos principais (LJUNG, 1999):

1. Métodos paramétricos
2. Não-Paramétricos
3. Métodos no Domínio da Frequência

Segundo Luís Antônio Aguirre (AGUIRRE, 2007), algumas características precisam ser conhecidas antes de se escolher o método na qual irá identificar o sistema, são eles:

*Linearidade:* Um sistema é dito linear se ele obedece ao princípio da superposição, na qual quando se tem uma entrada  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  e saídas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  respectivamente, se para uma entrada  $au_1(t) + bu_2(t)$  temos uma saída  $ay_1(t) + by_2(t)$ .

*Invariância no Tempo:* Um sistema é invariante no tempo quando sua dinâmica não se altera significativamente no período de tempo que se considera o sistema. Portanto, faz sentido representar tal dinâmica usando-se um modelo matemático. Isto não induz que os coeficientes são constantes, neste caso os coeficientes podem flutuar no tempo.

*Concentração de Parâmetros:* Sistemas representados por equações diferenciais ordinárias (EDO) são aqueles sistemas que variam apenas no tempo enquanto que

sistemas que são representados por equações diferenciais parciais (EDP) variam tanto no espaço quanto no tempo. Portanto são classificados em sistemas a parâmetros concentrados e distribuídos, respectivamente.

*Modelos discretos e contínuos:* modelos contínuos são representados por EDO e representam sua evolução no tempo, enquanto modelos discretos são descritos por equações a diferenças em instantes discretos.

O sistema estudado nesta dissertação é um sistema térmico, linear e invariante no tempo na faixa de potência de  $[50, 175] \text{Watts}$ . O modelo de identificação escolhida foi o método dos mínimos quadrados, na qual se trata de um método paramétrico, que tem por objetivo achar o melhor ajuste da curva de resposta da amostra de dados, minimizando a função de custo do erro médio quadrático que será melhor mostrada no capítulo 3.

EDO's de ordem fracionária é assunto estudado em cálculo fracionário, que teve sua origem em 1695 por L'Hôpital que escreveu uma carta com a seguinte pergunta: E se a ordem de diferenciação não for inteira? Pode ter algum significado  $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$  quando a ordem  $n$  é igual a  $1/2$ ? (VALÉRIO; COSTA, 2013).

Iniciou-se então uma nova teoria chamada Cálculo Fracionário (CF) que mais tarde teve contribuições de Liouville (1832), Riemann (1853), Holmgren (1864), Euler (1730) e Lagrange (1772) e outras contribuições mais tarde. Liouville em 1832 expandiu as funções em séries exponenciais e definiu a  $n$ -ésima derivada de uma série operando termo-a-termo como se fosse um inteiro positivo. Riemann em 1853, propôs uma definição diferente que envolvia uma integral definida e era aplicável para séries de potência com expoentes não inteiros. Mas foi Krug em 1890 quem primeiro uniu os resultados de Riemann e Liouville com a contribuição de Grünwald (OLDHAM; SPAINER, 1974).

A primeira aplicação do CF foi feita por Abel em 1823. Ele descobriu que a solução da equação integral para o problema de tautochrone poderia ser obtido via uma integral na forma de derivada de ordem um meio. Mais tarde, no 90th century, importantes estímulos para o uso do CF foi provida pelo desenvolvimento de Boole de métodos simbólicos para solução de equações lineares diferenciais de coeficientes constantes, ou o cálculo operacional de Heaverside para solucionar problemas em teoria

eletromagnética tais como linhas de transmissão. Nas últimas décadas os trabalhos com CF com aplicações em controle por realimentação, teoria de identificação de sistemas e processamentos de sinais tem crescido bastante (MONJE et al., 2010).

Durante séculos o CF obteve somente aplicações no campo teórico, tendo exemplos em campos práticos somente depois de 1974 em que K. B. Oldham e J. Spainer (OLDHAM; SPAINER, 1974). Várias outras publicações tiveram destaque no cenário do CF em campos práticos, na área de sistemas de ordem fracionária e controle, como as obras de C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue e V. Feliu (MONJE et al., 2010)

Atualmente, os trabalhos de Jacyntho (JACYNTHO, 2015) em identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando como entrada o degrau obteve um excelente resultado quando propôs um modelo de identificação baseado em integradores fracionários, método semelhante a que (SILVA, 2008) fez em sua tese de mestrado com integradores de ordem inteira.

O trabalho de (QUADROS, 2019), em sua dissertação de mestrado, apresenta uma identificação e controle de sistema térmico multivariável experimental. Na qual empregou-se uma identificação fracionária para o sistema térmico em comparação com ordem inteira, utilizando planta fracionária de dois e três termos e então desenvolveu um controlador fracionário de classe PID (FOPID).

Em (ZHOU; CAO; CHEN, 2013) usa as definições de cálculo fracionário em algoritmo genérico para identificação fracionária de sistemas não-lineares e instáveis no domínio do tempo, mesmo com adições de perturbações, ainda sim se consegue obter uma ótima identificação, chegando a uma acuracidade 99,62% com sinal de excitação PRBS e VFS.

Em sua dissertação de mestrado, (CAMPOS, 2019) faz uma análise completa de controladores FOPID no domínio do tempo e da frequência. Apresenta a sintonia de controladores FOPID pelo método de Nelder-Mead, procedimento clássico para sintonias de controladores FOPID e a sintonia automática proposta por (KEYSER; MURESAN; IONESCU, 2018).

Em (VICTOR et al., 2013), o autor trata de identificação de sistemas em tempo contínuo usando modelos de diferenciação fracionária. Uma versão adaptada do modelo

simplificado de variável instrumental refinada é primeiramente proposta para estimar os parâmetros do modelo fracionário quanto todas as ordens das diferenciações são assumidas como conhecidas. Logo após é apresentada uma abordagem de otimização baseada no estimador de variável instrumental desenvolvido, onde duas variantes do algoritmo são propostas: Uma é que se assume que as ordens de diferenciação são múltiplos inteiros de uma ordem comensurável que é estimada e outra que todas as ordens de diferenciação são estimadas, O desempenho do estimador são avaliadas por análise de simulação de Monte Carlo.

Em (VERHAEGEN, 1993), o autor reformula a identificação de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) operando em malha fechada com um compensador LTI para problema de identificação de malha aberta multi-entrada-multi-saída (MIMO) (modelo de espaço de estado), seguido por uma etapa de redução do modelo. Michel diz no artigo que o problema de identificação em malha aberta consiste em um modelo de espaço de estado MIMO, descrevendo a transferência determinística de entradas livremente excitáveis para sinais mensuráveis (restritos) na malha. Ainda Segundo o autor, o problema é resolvido pela técnica proposta de identificação MOESP (MIMO output-error state space model), descrita em (VERHAEGEN, 1993).

Em (SUGIE; INOUE; MARUTA, 2017), o autor propõe uma técnica de identificação de sistemas em malha fechada com múltiplas entradas e múltiplas saídas baseada em um método de subespaço que produz modelos de baixa ordem na presença de ruídos sem o conhecimento dos ganhos do controlador por realimentação de estados, apenas sabendo os dados mensurados de entrada e saída e o tipo de ruído do sistema, no tempo discreto. O método comprime os dados por projetando-os em um subespaço e então determina um sistema de baixa ordem baseada em minimização da norma nuclear.

Em (ZIUBINSK; SIEROCIUK, 2015) é proposto um método de identificação paramétrica de perturbações coloridas de ordem fracionária. Perturbações coloridas são aquelas na qual se tem uma correlação dinâmica e não somente aleatória de sinal. A técnica emprega filtros Kalman de ordem fracionária para sistemas de ordem fracionária com perturbações estocásticas.



Um processo de tanque quadruplo é apresentado em (ROY; ROY, 2016). Segundo os autores, o processo é bem conhecido como referência para testar estratégias avançadas de controle multivariável, pois o mesmo apresenta ambas fases mínima e não mínima, dependendo de como se configura o sistema. O sistema é modelado segundo o conceito de funções de transferência de parâmetros variáveis (VPTF) na qual tem uma resposta com acuracidade melhor do que o modelo modelado pelas equações de Bernoulli da hidrodinâmica. Um controlador do tipo Dual Mode Adaptive Fractional Order PI (DMAFOPI) junto com um controlador do tipo Adaptive Feedforward (AF) controla os níveis no (QTP). A realização e atualização online de ordem variável do integrador do controlador DMAFOPI são desafiadores e tratados com sucesso neste artigo. Uma breve comparação com alguns dos trabalhos semelhantes relatados anteriormente revelam que o controle proposto esquema tem algumas vantagens e oferece melhores desempenhos do que vários outros trabalhos semelhantes relatados em vários aspectos (ROY; ROY, 2016).

Pela primeira vez, em (PETRAS; CHEN; VINAGRE, 2002), um procedimento de teste de estabilidade robusta é proposto para sistemas de ordem fracionária linear e invariante no tempo (LTI FOS) de ordem proporcionais com incertezas paramétricas. O procedimento é baseado nos trabalhos de Denis Matignon (MATIGNON, 1996) e nas obras de Kharitonov (veja (HENRION, 2001))

(MURESAN et al., 2015) apresenta duas alternativas para solucionar o problema para controlar sistemas de fase não-mínima, que se trata de um sistema quadruplo de tanques semelhante ao que (ROY; ROY, 2016) apresentou em seu artigo. As soluções alternativas consistem em descentralização e desacoplamento das estratégias de controle de ordem fracionária. A técnica se mostrou mais eficiente quando comparadas com as técnicas clássicas do modelo de controle interno para sistemas multi-entradas-multi-saídas, como as de LMI bem como as de algoritmo genético para determinação da ordem e dos ganhos do controlador PID.

Em (MATUŠU; SENOL; PEKAR, 2017), o autor apresenta uma abordagem gráfica para análise robusta para família de quase-polinômios de ordem fracionária com incertezas complicadas de estrutura. O artigo enfatiza estruturas multilineares, polinomiais

e gerais de incertezas e quase-polinomial com incertezas paramétricas também são estudadas. Desde que famílias de polinômios com incertezas complexas de estruturas sofrem com a falta de ferramentas analíticas, a estabilidade robusta é investigada por cálculo numérico e representação de conjuntos de valores e aplicações subsequentes de condição de exclusão de zeros.

Em (LI et al., 2017), o autor apresenta uma revisão e avaliação das ferramentas numéricas empregadas no cálculo fracionário no ambiente do MATLAB com a avaliação de performance entre os algoritmos empregados, dando um background das melhores ferramentas para auxiliar futuros estudantes e pesquisadores em seus trabalhos.

O artigo de (LI; LEE, 1996) trata de um método de identificação no domínio da frequência, o método enfatiza a identificação precisa da direcionalidade do ganho de processo, que mostrou ser importante para controle por realimentação. O método requer testes em malha fechada em adição dos testes em malha aberta e combina ambos os dados de malha aberta e fechada tal que o modelo derivado encontre a matriz de resposta em frequência e sua inversa com exatidão. O procedimento adotado é usado para identificar um modelo de coluna de destilação de alta pureza não ideal e é mostrado para capturar a direcionalidade do ganho de processo com mais precisão do que o método convencional.

Em (HARTLEY T. T. LORENZO, 2003), o autor aborda uma forma de identificação de sistemas semelhante a deste trabalho, porém os dados são coletados no domínio da frequência e não no tempo e o método para identificação é baseada nos mínimos quadrados. A técnica pode ser usada tanto para sistemas contínuos ou discreto, bem como de ordem fracionária ou inteira.

Em (GHANBARI; HAERI, 2010), é apresentado um método de identificação paramétrica através de funções racionais ortogonais. A motivação para tal artigo foi de que o método prover melhores aproximações de modelos com menos parâmetros. Pelo fato de que modelos baseados em Leguerre serem simples, eles são deficientes em altas frequências. Por isto o uso de bases de Legendre na qual tem locais de polos progressivos e pode ser esperado melhor performance em altas frequências.

Em (CAPONETTO et al., 2016) é apresentado um modelo de ordem fracionária

para um sistema de aquecimento e uma comparação, em malha fechada, de um modelo fracionário e um controlador PI padrão. Inicialmente, o autor fez uma identificação do modelo em dois passos: primeiro ele usou um algoritmo de otimização multi-objective Nelder-Mead simplex, usado para identificar os parâmetros por ajuste do modelo de resposta (módulo e fase), tal algoritmo é usado no MATLAB como a função `fminsearch`. Minimizando a função custo de erro que é a soma de dois termos, o erro em módulo e o erro em fase. Logo após, uma comparação em malha fechada foi dentre um controlador PI fracionário e o padrão, tendo como melhor resultado o fracionário.

Em (YUSOF et al., 2015) é mostrado a identificação de um sistema eletro-hidráulico através de um modelo de ordem proporcional fracionária. O autor usa o algoritmo de Lavenberg-Marquardt, uma vez em que o modelo é não-linear, para minimizar a função custo que é o erro entre os dados observados e os preditos pelo. Foi-se usado as definições de Grunwald-Letnikov para definir o modelo de ordem fracionária no algoritmo solucionador.

Neste trabalho é aplicado o método de mínimos quadrados ou batelada, para identificação de um sistema térmico. Os sinais de saída e entrada foram coletados no domínio no tempo, o sistema é caracterizado como estável. Portanto, o método de MNQR. A contribuição deste trabalho é aplicar o método de MNQR para um sistema estável e no domínio do tempo para funções de transferência de ordem fracionária. Com a sintonia de um controlador fracionário na forma padrão, aproximado pela função de Oustaloup, tendo como resultado, uma função de transferência resultante do controlador-planta identificada como ordem fracionária proporcional. O método foi aplicado a um sistema térmico para eficiência do método de identificação. Vale ressaltar que este método foi empregado para este tipo de sistema na qual trata este trabalho, qualquer modificação ou configuração pode acarretar no insucesso do método.

## 1.2 Objetivo Geral

Investigar técnicas de identificação fracionária e submeter a simulação do método escolhido para identificação e sintonia dos parâmetros do melhor modelo para um sistema

térmico bem como a sintonia do controlador fracionário  $PI^\lambda D^\mu$  para averiguação da eficácia do modelo identificado.

### 1.3 Objetivos Específicos

- Estudar e escolher um método de identificação de sistemas estáveis no domínio do tempo.
- Coletar dados da planta afim de se obter amostras de sinais de entrada e saída para implementação do método escolhido.
- Executar o algoritmo baseado no método de identificação para obtenção dos parâmetros da função de transferência da planta em malha aberta no ambiente MATLAB utilizando algoritmo baseado na teoria dos mínimos quadrados.
- Análise estatística dos resíduos e dos coeficientes de Willmott e de Nash-Sutcliffe.
- Conclusão da melhor função de aproximação do ajuste analisando dados de dispersão dos resíduos dos modelos propostos.
- Sintonia do controlador  $PI^\lambda D^\mu$  para averiguação da eficácia do sistema identificado.

### 1.4 Materiais e Métodos

A configuração da planta é um paralelepípedo de acrílico medindo aproximadamente 45x35x20 cm, com papel alumínio adesivado nas paredes afim de refletir a irradiação térmica emitido pela lâmpada UV de 250 W de potência máxima, localizada no interior da caixa acrílica. Inclui também um exaustor de 12 V que resfria o sistema garantindo assim seu equilíbrio térmico, localizado também no interior do paralelepípedo. A lâmpada é controlada através de um DIMMER fabricado pela Microtech, este é localizado fora da caixa e controlado por um arduíno. A planta térmica está localizada em um ambiente com controle de temperatura (ar condicionados). O ambiente de simulação

para cálculos de resposta e identificação bem como controle é o MATLAB/Simulink. O método usado para a identificação da planta é a dos mínimos quadrados que irá ser explicada nos capítulos seguintes.

## 1.5 Organização do Trabalho

Esta dissertação está dividida na seguinte forma:

No Capítulo 2 é mostrado os conceitos básicos de cálculo fracionário assim como suas propriedades e definições no sentido de Riemann-Liouville e no sentido de Caputo para derivadas e integrais de ordem fracionária. É mostrado também as definições de Função Gama de Euler e Função Beta, assim como a função de Mittag-Leffler. E por fim as transformadas de Laplace e transformada inversa.

No capítulo 3 são expostos os conceitos de mínimos quadrados não recursivos, o processo de identificação de sistemas e o método baseado na minimização da função de custo do Erro médio, bem como a representação da função de transferência de pseudo-segunda-ordem ou de três termos e a função de transferência de pseudo-primeira-ordem ou a dois termos e sua transformada de Laplace inversa para o domínio do tempo a uma entrada degrau.

No Capítulo 4 é apresentado a metodologia empregada no processo de obtenção dos modelos identificados, o ambiente experimental assim como os testes feitos na planta com variação ao setpoint.

No Capítulo 5 são exibidos os resultados da identificação do sistema térmico, as definições de coeficiente de eficiência de Willmott e Nash-Sutcliffe assim como as figuras e ilustrações de valor.

No Capítulo 6 são mostrados os conceitos de estabilidade de sistemas fracionários e controlador PID de ordem fracionária, método da frequência de sintonia de controladores PID fracionário e a aproximação de Oustaloup.

No Capítulo 7 são exibidos os resultados da sintonia do controlador junto a planta identificada, bem como os testes na planta real e o resultado do conjunto Identificação-Controlador e conclusão do autor sobre o trabalho realizado.

## 2

---

# CONCEITOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO

**N**este capítulo iremos abordar alguns conceitos e aplicações do cálculo fracionário, os conceitos básicos para a compreensão do CF e suas propriedades. Tais conceitos abrangem a definição de função gama, função beta e propriedades, definição de derivada e de integral segundo o conceito de Riemann-Liouville e de Caputo. A função de Mittag Leffler de um e dois parâmetros, a transformada de Laplace e sua transformada inversa.

## 2.1 A Função Gama de Euler ou Função Fatorial

Uma das mais importantes contribuições de Euler para o cálculo foi a função Gama que é uma das funções básicas para o cálculo fracionário. A mesma é uma generalização da função fatorial, para números não inteiros (PODLUBNY; KENNETH, 1998). A função Gama é de fundamental importância para o cálculo fracionário, pois esta nos permite representar transformações integrais em séries de potência, como por exemplo a própria generalização do conceito de integral para ordem fracionária, derivada de ordem fracionária, as funções de Mittag-Leffler (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), dentre outras que serão mostradas neste trabalho.

Intuitivamente, considere a integração abaixo:

$$\int_0^{\infty} e^{-r} dr = 1 \quad (2.1)$$

agora, substituindo  $r = st$ ,  $dr = tds$  ( $t > 0$ ) na equação 2.1, temos:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} ds = \frac{1}{t} \quad (2.2)$$

derivando a função interna  $e^{-st}$  em 2.2, temos:  $-se^{-st}$  e aplicando a fórmula de Leibniz:

$$\int_0^{\infty} -se^{-st} ds = -\frac{1}{t^2} \quad (2.3)$$

repetindo o passo anterior em 2.3, temos:

$$\int_0^{\infty} s^2 e^{-st} ds = \frac{2}{t^3} \quad (2.4)$$

de forma geral:

$$\int_0^{\infty} s^n e^{-st} ds = \frac{n!}{t^{n+1}} \quad (2.5)$$

substituindo para  $t = 1$  em 2.5.

$$\int_0^{\infty} s^n e^{-s} ds = n! \quad (2.6)$$

desta forma:

$$g(x) = \int_0^{\infty} s^x e^{-s} ds = x! \quad (2.7)$$

temos então a função gama de Euler ou função fatorial como sendo:

$$\Gamma(x) = g(x-1) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds = (x-1)! \quad (2.8)$$

onde a integral que define a função em 2.8 é uma integral imprópria. Sendo  $Re(x) > 0$ .

**Teorema 1.**  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

*Demonstração.* Aplicando a definição (2.8)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{(x+1)-1} ds = \int_0^{\infty} e^{-s} s^x ds \text{ fazendo integração por partes, temos:}$$

$$\Gamma(x+1) = [-e^{-s}s^x]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-s}xs^{x-1}ds = x \int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds = x\Gamma(x) \quad \square$$

**Teorema 2.**  $\Gamma(1) = 1$

*Demonstração.* Aplicando a definição (2.8), temos:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-s}s^{1-1}ds = \int_0^\infty e^{-s}ds = (e^{-s})_0^\infty = -(-1) = 1 \quad \square$$

## 2.2 Função Beta

A função beta é definida como:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (2.9)$$

sendo  $x, y \in C, Re(x) > 0, Re(y) > 0$

A relação entre as funções gama e beta é mostrado abaixo:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!} \quad (2.10)$$

sendo  $x$  e  $y$  inteiros positivos.

## 2.3 Integral Fracionária

A integral fracionária é uma generalização da integral de ordem inteira. Na literatura, há muitas definições de integral fracionária (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), vamos apresentar algumas das principais.

### 2.3.1 Definição de Riemann-Liouville

Segundo Riemann-Liouville, temos:

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

se escolhermos  $\alpha = 1$ , temos:



$$J^1 f(t) = \frac{1}{0!} \int_0^t (t - \tau)^{1-1} f(\tau), d\tau$$

$$Jf(t) = \int_0^t f(\tau), d\tau$$

que é a própria definição de integral inteira de ordem um.

A equação 2.11 é uma generalização da fórmula de Cauchy 2.12 para determinação da n-ésima primitiva de uma função:(CAMARGO; OLIVEIRA, 2015)

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

Na interpretação de Riemann-Loiuville, a notação  $J^n$  é interpretada como um operador de ordem n.

**Propriedade 1.** *Lei dos expoentes*

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.13)$$

## 2.4 Derivada Fracionária

### 2.4.1 Definição de Riemann-Liouville

Segundo Riemann-Liouville ou Left Hand Definition (LHD), o cálculo da derivada fracionária se baseia no fato de que a derivada é a operação inversa da integral, ou seja, como temos o operador integral, a derivada é o operador inverso da integral (MONJE et al., 2010). Temos:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \quad (2.14)$$

onde  $m - 1 \leq \alpha < m$  e  $m \in \mathbb{N}$

Exemplo: Calcule a derivada  $1/2$  ( $\alpha = 1/2$ ) da função  $f(t) = t^3$  Primeiro de tudo, se quiséssemos calcular a derivada de ordem 1 ( $\alpha = 1$ ), temos:  $m = 2$ , logo:

$$D^1 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{\tau^3}{(t - \tau)^0} d\tau$$

$$Df(t) = \frac{1}{1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{t^4}{4} = 3t^2$$

resultado esperado pelo cálculo clássico. Para  $\alpha = 1/2$ ;  $m = 1$ .

$$D^{1/2} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau^3}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau$$

$$D^{1/2} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left( \frac{32}{35} t^{7/2} \right) = \frac{32}{35\sqrt{\pi}} \frac{7}{2} t^{5/2} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{5/2} = 1.8053t^{5/2}$$

Trabalhar com integral neste tipo de definição pode ser um pouco árduo, por isso a relação abaixo é válida;

$$D^\alpha(t^\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda - \alpha + 1)} t^{\lambda-\alpha}; t \in R^+, \lambda \notin Z^- \quad (2.15)$$

para o mesmo exemplo, temos:

$$D^{1/2}(t^3) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-1/2+1)} t^{3-1/2} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(7/2)} t^{5/2} = 6 \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} = 1.8053t^{5/2}$$

Agora, vamos calcular a derivada fracionária de ordem 1/2, segundo RL, para uma função constante  $k$ . Temos  $\alpha = 1/2; m = 1$

$$D^{1/2}(k) = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} (2kt^{1/2}) = k \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

ou seja, a derivada de uma constante, na definição de RL, não é zero e isto gera um problema de condição inicial quando se vai modelar sistemas reais na qual temos condições iniciais nula. Por isto é muito usado a definição de Michelle Caputo ou Right Hand Definition (RHD), para problemas de modelagem em controle. (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015)

### 2.4.2 Definição de Caputo

A definição de Caputo ou RHD, é a mais usada quando se trata de modelagem e simulação de sistemas dinâmicos na qual se usa derivadas de ordem fracionária. É exatamente o oposto da definição de Riemann-Liouville, onde se integra a derivada da função.

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{\frac{d^m}{dt^m} f(t)}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \quad (2.16)$$

Usando a definição de Caputo, novamente calcularemos a derivada de ordem um da função  $f(t) = t^3$ .

$$D^1 f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-1)} \int_0^t \frac{\frac{d^2}{dt^2} f(t)}{(t-\tau)^{1+1-2}} d\tau = \int_0^t \frac{6\tau}{(t-\tau)^0} d\tau = 3t^2$$

como previsto.

Agora calcularemos a derivada de uma função constante,  $k$ .

$$D^{1/2}(k) = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} \int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau}(k)}{(t-\tau)^{1/2+1-1}} d\tau$$

$$D^{1/2}(k) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{0}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0$$

E por fim a derivada meia da função  $f(t) = t^3$

$$D^{1/2}t^3 = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{3\tau^2}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{5/2} = 1.8053t^{5/2}$$

como esperado no resultado pelo método LHD.

Algumas propriedades do operador diferencial fracionário são vistas na literatura, são elas:

**Propriedade 2. Linearidade**

$${}_c D_t^\alpha [af(t) + bg(t)] = a {}_c D_t^\alpha f(t) + b {}_c D_t^\alpha g(t); a, b \in R$$

**Propriedade 3. Lei dos Expoentes**

$$D_t^\alpha D_t^\beta f(t) = D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

## 2.5 Função de Mittag-Leffler

Nas equações diferenciais de ordem inteira, a função exponencial  $\exp(z)$  tem um importante papel. Similarmente no cálculo de ordem fracionária, a função de Mittag-Leffler tem uma parte muito importante (DAS, 2008).

A função tem suas definições conforme a quantidade de parâmetros, neste trabalho, iremos mostrar somente a função de um e de dois parâmetros.

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é definida como:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.17)$$

a sua forma expandida é a série infinita mostrada na equação 2.18 abaixo:

$$E_\alpha(z) = 1 + \frac{z}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \quad (2.18)$$

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é definida como:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.19)$$

Temos que  $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z)$ . A função de dois parâmetros para  $\beta = 1$  é equivalente a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

A partir da função de dois parâmetros, podemos generalizar várias outras funções, que são importantes tanto para a geometria quanto para soluções de equações diferenciais. Temos:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.20)$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z \quad (2.21)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \sinh z \quad (2.22)$$

## 2.6 Conclusão do Capítulo

Vimos que a função gama de Euler, que é uma generalização do fatorial, é de fundamental importância para representar várias outras funções especiais para o cálculo fracionário, dentre elas a função beta, a de Mittag-Leffler e as definições de Integral e Derivada de ordem não inteira. As definições de integral de Riemann-Liouville e de derivada de Caputo, na qual esta última difere da definição de RL nas condições iniciais, na qual temos que na primeira definição, a derivada de uma constante não é nula e que este fato acarreta um problema de valor inicial quando se vai modelar sistemas reais, por este motivo usa-se a definição de Caputo em sistemas de controle e modelagem de sistemas e é o que será empregado neste trabalho. Tais definições nos permitem reescrever funções de transferência de segunda ordem, aqui chamadas de modelo fracionário a três termos e o modelo a dois termos (com um polo) que serão estudadas no próximo capítulo.

## 3

---

# IDENTIFICAÇÃO DE ORDEM FRACIONÁRIA DE SISTEMAS

**A** identificação de sistemas tornou-se um campo indispensável para a área de engenharia de controle e automação de sistemas. Em sistemas reais, nem sempre temos conhecimento de todos os fenômenos físicos/químicos e/ou de outras naturezas matematicamente falando (COELHO; COELHO, 2004). Na maioria das vezes, quando não se sabe o modelo que descreve um sistema o que detemos é de somente dados de entrada e saída e assim tentar estudar a dinâmica de cada sistema. É neste propósito que a área de identificação de sistemas se dedica, não é necessário saber todos os fenômenos internos que acontecem em um sistema físico para que possamos modelá-lo (AGUIRRE, 2007).

### 3.1 Função de Transferência de Ordem Fracionária de Dois Termos ou Um Polo

A função de transferência de dois termos ou a um polo tem uma estrutura semelhante ao que se conhece na literatura, com a diferença de que temos um termo  $\alpha$  no expoente da variável  $s$ , sendo  $0 < \alpha < 1$  e  $K, a$  e  $b$  constantes, simbolizando a generalização da função de transferência primeiro grau. A função de transferência a dois termos é

representada pela equação 3.1 no domínio da frequência (MONJE et al., 2010).

$$G(s) = \frac{K}{as^\alpha + b} \quad (3.1)$$

### 3.1.1 Resposta Temporal da Função de Transferência Fracionária a Dois Termos

Sendo  $b = 1$  e  $\alpha = 1/v$ , temos que a equação 3.1 recai na sua forma de ordem fracionária, mostrado na equação 3.2.

$$G(s) = \frac{K}{as^{\frac{1}{v}} + 1} \quad (3.2)$$

Sua transformada inversa de Laplace, segundo (PODLUBNY; KENNETH, 1998), com uma entrada ao degrau de magnitude  $M$  é representada pela equação 3.3 abaixo.

$$.g(t) = \frac{KM}{a} t^{\frac{1}{v}} E_{\frac{1}{v}, \frac{1+v}{v}} \left( -\frac{t^{\frac{1}{v}}}{a} \right) \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Função de Transferência de Ordem Fracionária a Três Termos

A função de transferência padrão de segunda ordem é de grande importância para teoria de controle. Recentemente, de acordo com os avanços na modelagem e controle por meio de derivativos fracionários, tem havido uma necessidade crescente de funções de transferência de ordem fracionária, generalizando a de segunda ordem. Tal funções de transferência levam a melhores resultados quando a função de transferência da planta consiste em potências fracionárias da variável  $s$  de Laplace (MERRIKH-BAYAT; KARIMI-GHARTEMANI, 2008).

A função de transferência padrão de segunda ordem é dada pela equação 3.4.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.4)$$

é de grande significado para a teoria de controle. A principal razão de se estudar esta função de transferência é que ela tem o comportamento da maioria dos comportamentos dos sistemas dinâmicos na prática.

Temos a forma fracionária padrão desta função de transferência representada abaixo pela equação 3.5.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^{\frac{2}{v}} + 2\zeta\omega_n s^{\frac{1}{v}} + \omega_n^2} \quad (3.5)$$

onde  $\alpha = \frac{1}{v}$ ,  $v \in R^+$ ,  $v > 1$ , e  $\omega_n \in R^+$ .

Denis Matignon (MATIGNON, 1998) diz que 3.5 é estável se, e somente se, as raízes da equação 3.6 estiverem no setor  $|arg(\omega)| > \frac{\pi}{2v}$ .

$$\omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2 = 0 \quad (3.6)$$

como resultado, temos que a estabilidade de 3.5 depende de  $v$ . As raízes de 3.6 são calculados como 3.7.

$$\omega_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (3.7)$$

onde pela equação 3.7 vemos que a estabilidade não depende de  $\omega_n \in R^+$ .

Para que os valores de  $\zeta$  interceptem o raio, deveremos ter  $\omega = r e^{i\frac{\pi}{v}}$ . Pois devemos achar para que valores de  $\zeta$  teremos as raízes na metade esquerda do plano (LHP) e esta região compreende o intervalo  $\frac{\pi}{2v} < |arg(\omega)| < \frac{\pi}{v}$ . Para a metade direita do plano, temos o intervalo  $|arg(\omega)| < \frac{\pi}{2v}$ . Logo;

$$(r e^{i\frac{\pi}{v}})^2 + 2\zeta\omega_n(r e^{i\frac{\pi}{v}}) + \omega_n^2 \quad (3.8)$$

como resultado, temos que;

$$r = \omega_n$$

$$\zeta = -\cos\frac{\pi}{v}$$

portanto, teremos a estabilidade se, e somente se:

$$\zeta < -\cos\frac{\pi}{v} \quad (3.9)$$

de forma equivalente:

$$\zeta > -\cos\frac{\pi}{2\nu} \quad (3.10)$$

comparando a região de estabilidade de 3.5 na qual é dada por 3.10 e a região de estabilidade de 3.4 na qual é dada por  $\zeta > 0$ , concluímos que 3.5 terá um par de pólos complexos conjugados no LHP se, e somente se:

$$-\cos\frac{\pi}{2\nu} < \zeta < -\cos\frac{\pi}{\nu} \quad (3.11)$$

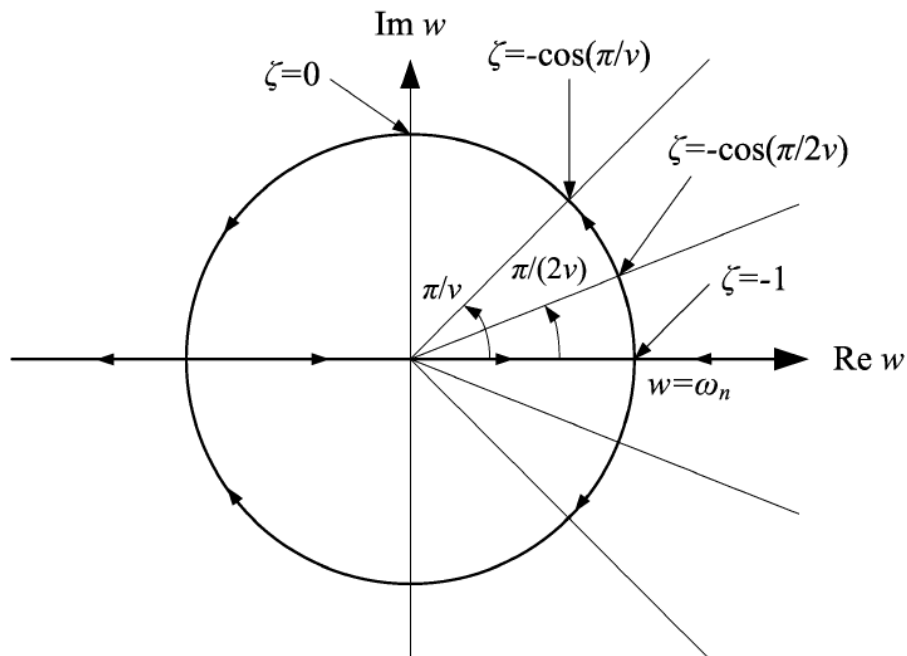


Figura 1 – Lugar das raízes de 3.6 como função de  $\zeta$ . Autor (MERRIKH-BAYAT; KARIMI-GHARTEMANI, 2008)



## 3.2 Resposta ao Degrau da Função de Transferência de Ordem Fracionária a Três Termos

Temos que os polos de 3.4 e 3.5 são iguais a 3.7, logo, expandindo 3.5 em frações parciais com resposta ao degrau com magnitude  $M$ , temos:

$$G(s) = \frac{M\omega_n^2}{s \left( s^{\frac{2}{v}} + 2\zeta\omega_n^{\frac{1}{v}} + \omega_n^2 \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^{\frac{1}{v}} + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{C}{s^{\frac{1}{v}} + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (3.12)$$

$$= \frac{A \left( s^{\frac{1}{v}} + \phi \right) \left( s^{\frac{1}{v}} + \Phi \right) + Bs \left( s^{\frac{1}{v}} + \Phi \right) + Cs \left( s^{\frac{1}{v}} + \phi \right)}{s \left( s^{\frac{1}{v}} + \phi \right) \left( s^{\frac{1}{v}} + \Phi \right)} \quad (3.13)$$

onde  $\phi = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$  e  $\Phi = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$= \frac{A \left( s^{\frac{2}{v}} + s^{\frac{1}{v}}\phi + \phi s + \phi\Phi \right) + Bs^{\frac{2}{v}} + B\Phi s + Cs^{\frac{2}{v}} + C\phi s^{\frac{1}{v}}}{s \left( s^{\frac{1}{v}} + \phi \right) \left( s^{\frac{1}{v}} + \Phi \right)} \quad (3.14)$$

$$= \frac{As^{\frac{2}{v}} + A\Phi s^{\frac{1}{v}} + A\phi s^{\frac{1}{v}} + A\phi\Phi + Bs^{\frac{2}{v}} + B\Phi s^{\frac{1}{v}} + Cs^{\frac{2}{v}} + C\phi s^{\frac{1}{v}}}{s \left( s^{\frac{1}{v}} + \phi \right) \left( s^{\frac{1}{v}} + \Phi \right)} \quad (3.15)$$

$$= \frac{(A + B + C)s^{\frac{2}{v}} + [A(\phi + \Phi) + B\Phi + C\phi]s^{\frac{1}{v}} + A\phi\Phi}{s \left( s^{\frac{1}{v}} + \phi \right) \left( s^{\frac{1}{v}} + \Phi \right)} \quad (3.16)$$

comparando 3.16 com 3.12, temos que:

$$A + B + C = 0 \quad (\text{I})$$

$$A(\phi + \Phi) + B\Phi + C\phi = 0 \quad (\text{II})$$

$$A\phi\Phi = M\omega_n^2 \quad (\text{III})$$

de (III) temos que:

$$A = \frac{\omega_n^2 M}{\phi\Phi} = \frac{\omega_n^2 M}{\left( \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \left( \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} = M \quad (3.17)$$

multiplicando (I) por  $(-\phi)$  e somando as equações (I) e (II), temos:

$$B(\Phi - \phi) + A\Phi = 0 \quad (3.18)$$

$$B = -\frac{A\Phi}{\Phi - \phi} \quad (3.19)$$

substituindo 3.17 em 3.19, temos:

$$B = -\frac{M(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = -\frac{M(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (3.20)$$

multiplicando (I) por  $(-\Phi)$  e repetindo os mesmos passos anteriores feitos com  $B$ , temos:

$$C = \frac{M(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (3.21)$$

substituindo  $A, B, eC$  em 3.12, temos:

$$G(s) = \frac{A}{s} - \frac{M(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \left( s^{\frac{1}{v}} + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} + \frac{M(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \left( s^{\frac{1}{v}} + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} \quad (3.22)$$

aplicando a transformada inversa de laplace em 3.22 temos:

$$s(t) = M \left( \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{-\frac{v-1}{v}} E_{\frac{1}{v}, \frac{1}{v}} \left( - \left( \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) t^{\frac{1}{v}} \right) \right) \\ - M \left( \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} t^{-\frac{v-1}{v}} E_{\frac{1}{v}, \frac{1}{v}} \left( - \left( \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) t^{\frac{1}{v}} \right) + 1 \right) \quad (3.23)$$

### 3.2.1 Métodos dos Mínimos Quadrados Não recursivo ou Bate-lada (MNQR)

O método dos mínimos quadrados se baseia em minimizar a função custo de erro quadrático que consiste na soma dos quadrados da diferença entre os valores observados e os valores computados, multiplicado por parâmetros que representam graus de precisão. Essa diferença tente a ser mínimo para que os valores observados e computados sejam próximos (ASTROM; WITTENMARK, 1997).

A Figura 2 ilustra bem esta definição, na qual a reta ilustrada é a que melhor representa a função aproximado por uma reta.



Figura 2 – Função representada pelos pontos e aproximados por uma curva  $y = f(x)$ .

O equacionamento do problema por mínimos quadrados é da forma:

$$\hat{y} = \theta_1\phi_1(t) + \theta_2\phi_2(t) + \dots + \theta_n\phi_n(t) \tag{3.24}$$

onde  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$  são funções conhecidas ou dados conhecidos da curva observada e  $\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t)$  são parâmetros desconhecidos.  $(t_j, y_j), j = 1, 2, \dots, N$ , são os dados observados a cada instante  $t$ .

O método consiste em determinar os valores dos parâmetros de tal forma que os valores de  $\hat{y}$  e  $y_j$  sejam o mais próximo possível. Portanto, temos que minimizar a diferença  $\hat{y} - y$  de tal forma a determinar os parâmetros desconhecidos do problema. A função custo de erro ser minimizado é mostrado na equação 3.25.

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \epsilon_j^2 \tag{3.25}$$

$$\epsilon = y_j - \hat{y} = y_1 - \theta_1\phi_1(t_1) - \dots - \theta_j\phi_j(t_j); j = 1, 2, \dots, N \tag{3.26}$$

reescrevendo a equação 3.25 temos:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon \tag{3.27}$$

Deve-se determinar os parâmetros  $\theta$  de tal forma a minimizar  $\epsilon$ , sendo  $\epsilon$  dado pela equação 3.28:

$$\epsilon = y - \theta\phi(t) \quad (3.28)$$

substituindo 3.28 em 3.27, temos:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} (y - \theta\phi(t))^T (y - \theta\phi(t)) = \frac{1}{2} (y^T y - y^T \theta\phi(t) - \theta^T \phi^T(t)y + \theta^T \phi^T(t)\theta\phi(t)) \quad (3.29)$$

O valor mínimo de uma função é dada como:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (3.30)$$

logo:

$$\frac{\partial j(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial (y^T y - y^T \theta\phi(t) - \theta^T \phi^T(t)y + \theta^T \phi^T(t)\theta\phi(t))}{\partial \theta} \quad (3.31)$$

como resultado, temos:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [-2\theta^T y + 2\phi^T(t)\phi(t)\theta] = 0 \quad (3.32)$$

simplificando as expressões, temos:

$$\theta = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T y \quad (3.33)$$

O estimador dos mínimos quadrados não recursivo ou batelada é baseada neste tipo de problema formulado acima. Em sua maioria, os problemas de identificação provêm de sistemas dinâmicos que possuem informação em tempo real, em outras palavras, entradas na forma  $u(t) = u(i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  e saídas na forma  $y(t) = y(j)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ . A representação do sistema é representada pela equação 3.34:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \epsilon(k) \quad (3.34)$$

onde  $u$  é a entrada e  $y$  é a saída e  $\epsilon$  é o ruído. Assumindo que  $A$  e  $B$  tenham ordem  $ny$  e  $nu$ . Sendo:

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{ny}^{ny} \quad (3.35)$$

$$B(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{nu}a^{nu} \quad (3.36)$$

sendo  $y(k)q^{-n} = y(k-1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ; temos:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{ny}y(k-ny) = b_1u(k-1) + \dots + b_{nu}u(k-nu) + \epsilon(k) \quad (3.37)$$

$$y(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_{ny}y(k-ny) + b_1u(k-1) + \dots + b_{nu}u(k-nu) + \epsilon(k) \quad (3.38)$$

onde da equação 3.39, temos a matriz de medidas dada pela equação 3.40.

$$\phi^T(k) = [-y(k-1) - \dots - y(k-ny)u(k-1) + \dots + u(k-nu)] \quad (3.39)$$

e a matriz de parâmetros dada pela equação 3.40

$$\theta^T(k) = [-a_1 - \dots - a_{ny}b_1 + \dots + b_{nu}] \quad (3.40)$$

com base nas definições acima, segundo Lennard Ljung (LJUNG, 1999), podemos escrever o sistema no modelo de regressão linear na forma da equação 3.41, uma vez que o número de medidas é maior que o número de restrições do sistema ( $N > n$ ).

$$y = \phi^T(t)\theta + \epsilon(t) \quad (3.41)$$

para  $N$  medidas, temos:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \dots \\ \phi(N-1) \end{bmatrix} \theta(k) + \begin{bmatrix} \epsilon(0) \\ \epsilon(1) \\ \dots \\ \epsilon(N-1) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

a dimensão de  $\theta$  vai depender da natureza da matriz de medidas  $\phi$ . Deste modo, com a matriz de medidas (amostra) e a matriz de saídas estimada, temos a determinação da matriz de parâmetros dada pela equação 3.43.

$$\theta = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T y \quad (3.43)$$

onde  $[\phi^T \phi]^{-1} \phi^T$  é chamada de pseudo-inversa da matriz  $\phi$  e também chamada de matriz de excitação (AGUIRRE, 2007) uma vez que  $[\phi^T \phi]$  é não singular (ASTROM; WITTENMARK, 1997).

### 3.3 Conclusão do Capítulo

Devido as definições e propriedades das funções de Mittag-Leffler apresentadas no Capítulo 2, podemos representar a generalização da função de transferência primeiro grau e de segundo grau com expoentes não inteiros. Ao fazer tal generalização, algumas propriedades mudam de acordo com o grau do expoente dos modelos apresentados, contudo, há também a mudança da região de estabilidade do sistema, na qual a região de instabilidade se torna um setor cônico e não todo o semiplano direito. Devido a propriedade de que as respostas no domínio do tempo de sistemas lineares serem funções exponenciais, podemos generaliza-lo sob a função de Mittag-Leffler, na qual a função exponencial é um caso particular do mesmo e empregando dentro do método de mínimos quadrados não recursivo ou em batelada, temos a sintonia da matriz de parâmetros com relação ao mínimo da função de erro médio quadrático e portanto, obtendo os coeficientes do modelo fracionário a dois termos e a três termos e de dois termos de ordem inteira. A função de erro médio quadrático, que é a diferença entre a medida observada e o predito, tende a seguir uma distribuição normal, no estudo dos resíduos para validação do método analisando variáveis de dispersão como o desvio padrão.

## 4

---

# METODOLOGIA

### 4.1 Apresentação do Ambiente Experimental

O ambiente experimental na qual a planta se encontra consiste no laboratório de simulação e controle de sistemas dinâmicos, que se encontra na Faculdade de Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas, na qual sua temperatura é controlada por dois ar-condicionado. A planta é composta por um recipiente de acrílico, medindo  $45 \times 35 \times 20$  centímetros, com fechamento superior através de fixação por parafusos, uma lâmpada de  $250W$  infravermelha com alimentação  $127V$  AC, um exaustor de  $12V$  e um sensor de temperatura LM35 com sensibilidade de  $0^\circ C$  a  $100^\circ C$ , todos internos ao recipiente acrílico. As faces internas do acrílico são revestidas de papel alumínio, afim de preservar a potência térmica fornecida pela lâmpada, minimizando perdas. Externo ao recipiente, temos um módulo Dimmer para arduino /PIC MC- 8A com sinal zero crossing e alimentação  $127V$  AC da Microtech.

O módulo Dimmer é composto por um TRIAC BT137 integrado que tem como função chavear a corrente alternada. Com isto o módulo é capaz de controlar eletricamente a intensidade luminosa ou o consumo de luz qualquer, como por exemplo, uma lâmpada incandescente tradicional. A característica fundamental de um módulo Dimmer é a capacidade de interromper o envio de corrente a um dado circuito através de uma regulagem de disparos que é programada por um Arduino, Raspberry Pi, PIC, entre outros. A porta representada pela entrada ZC (Zero Crossing) manda um sinal ao microcontrolador de que a tensão está cruzando o zero. Por sua vez, a plataforma microcontroladora manda um pulso de volta para o módulo através da porta DIM que

fará com que o módulo controle a energia fornecida para a lâmpada.

A plataforma microcontroladora é o Arduino UNO. Se trata de uma plataforma open source ou hardware para prototipagem eletrônica, projetada com um microcontrolador Atmel AVR com suporte para entrada/saída de dados integrado, com linguagem de programação padrão baseado em C/C++. A Figura 3 representa bem o esquema de como é ligada e integrada o sistema da planta térmica com o arduino e o Dimmer.

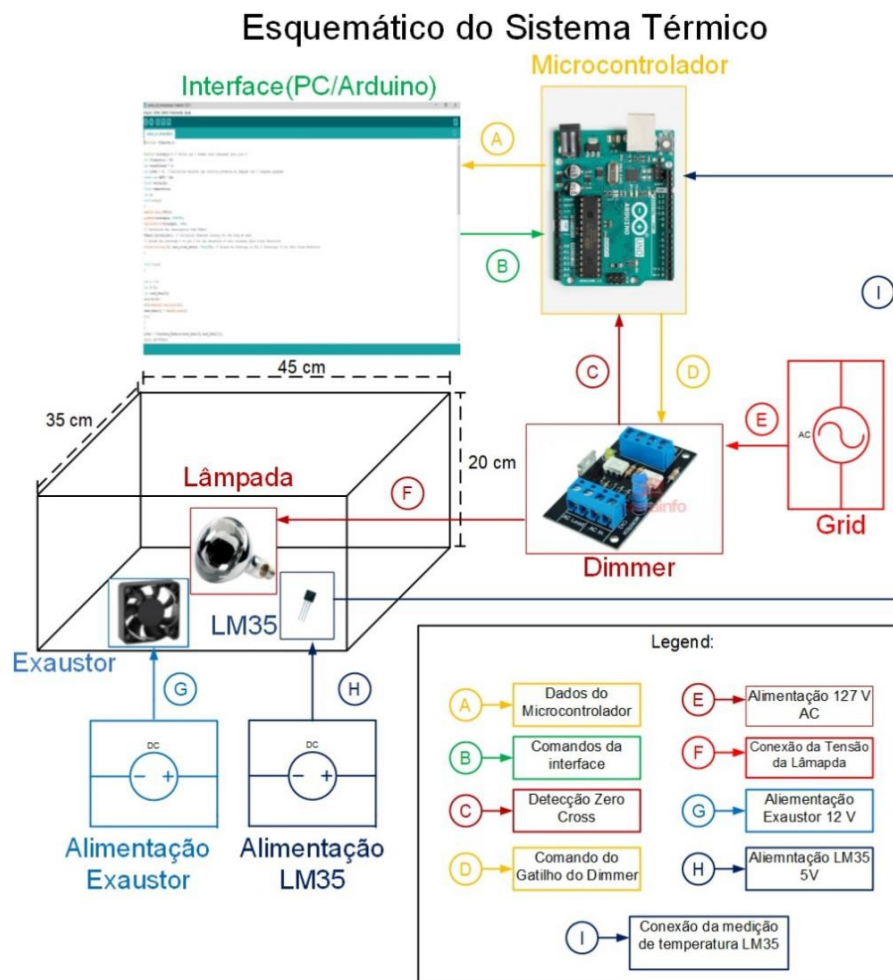


Figura 3 – Esquemático do Sistema Térmico, Laboratório de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos (FT/UFAM)

## 4.2 Apresentação do Ambiente de Simulação

O ambiente de simulação escolhido foi o software MATLAB, da Mathworks. Junto com o toolbox Simulink inserido no software. Trata-se de um programa interativo de alta performance com foco em cálculo numérico. O MATLAB integra análise numérica,



cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em uma ambientação de uso fácil, onde os problemas e soluções são apresentados matematicamente. A vantagem do sistema interativo desta aplicação, cujo elemento básico de informação é a matriz e que não requer dimensionamento. O sistema permite a resolução de muitos problemas numéricos em apenas uma fração de tempo que se gasta para fazer um script semelhante em linguagem Fortran, Basic ou C.

### 4.3 Aplicação da Metodologia para a Identificação do Sistema (Obtenção dos Modelos Identificados)

Primeiramente, estudou-se o modo como o sistema foi instalado e a interpretação do sistema. A planta térmica consiste em uma lâmpada que fornece potência térmica, controlado por um dimmer, e a saída é coletada através de um sensor de temperatura, a plataforma microcontroladora para configurar o envio de pulso para disparo do TRIAC BT137 é feita através do Arduino, segundo o algoritmo apresentado na sessão anterior. Logo temos que o sinal de entrada do sistema é a potência fornecida à lâmpada e a saída que temos é a temperatura resultante no ambiente interno da lâmpada, considerando que a temperatura inicial do sistema se equiparava sempre  $4^{\circ}C$  acima da temperatura do ambiente externo, controlado por dois ar condicionado, ou seja, por volta dos  $24^{\circ}C$ , ambos os ar-condicionado eram configurados para manter a temperatura do laboratório à  $20^{\circ}C$ . Devido à grande sensibilidade do sistema à perturbações externas, como por exemplo, o mínimo instante que se abria a porta do laboratório, onde havia passagem de calor externo ao laboratório, fazia com que o sistema sentisse uma variação de temperatura. Devido a isso, o sinal resultante sentido pelo LM35 apresentou um ruído bastante considerável. A planta apresentada desta forma tem configuração de malha aberta, por este motivo, a identificação foi feita neste primeiro momento em malha aberta. A modelagem pode ser representada pela equação 4.1.

$$T(s) = G(s)R(s) + G(0) \quad (4.1)$$

sendo  $G(0)$  as condições iniciais da planta, como por exemplo a temperatura inicial. Conforme a análise por variação de faixa de operação, temos que as condições iniciais são nulas, ou seja,  $G(0) = 0$ .

A diferença dos sinais coletados é mostrada na 4, a uma variação de 25 Watts de potência correspondente ao intervalo de 50 a 75 Watts, onde é possível ver que o sistema sofre bastante interferência do meio externo à planta.

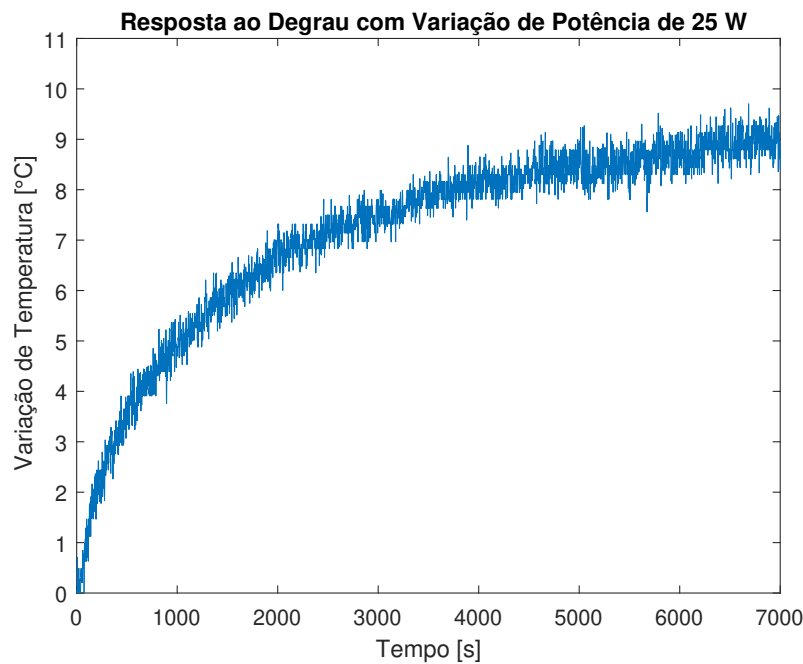


Figura 4 – Amostra de dados coletados da planta térmica à variação de potência de 10%

Com o sinal coletado, iniciou-se a etapa de verificar qual método de identificação seria escolhido, que no caso deste trabalho foi o de mínimos quadrados não recursivo ou batelada, na qual é muito usado em sistemas estáveis. Porém, o método de MQNR é estruturado para condições iniciais igual a zero, como se vê na literatura. Por este motivo, houve a necessidade de se fazer uma variação de ponto de operação, fazendo assim a análise de variação de potência por variação de temperatura em cada faixa de operação. Somente é possível fazer este procedimento devido a linearidade que o sistema apresenta.

O algoritmo programado pelo autor deste trabalho foi primeiramente testado em uma simulação onde se sabia a função desejada, para veracidade do método proposto. A função teste escolhida foi uma função de transferência no domínio da frequência da

forma:

$$T(s) = \frac{1}{s+1}P(s) \quad (4.2)$$

Sendo  $P(s)$  o sinal de entrada do sistema. Como temos um sinal no domínio do tempo, calculou-se a transformada inversa da equação 4.2, representada pela equação 4.3 para uma entrada ao degrau de magnitude  $M$ , função de heaviside.

$$u(t) = M(1 - e^{-t}) \quad (4.3)$$

Como função escolhida por aproximação, escolheu-se a equação 3.2 em sua forma temporal 3.3 com  $v = 1$ .

Como resultado, obteve-se os seguintes parâmetros para o menor erro possível com aplicação de um ruído ao sinal de  $T(s)$ . Sendo  $\theta$  o parâmetro obtido da aproximação da curva pelo método MQNR.

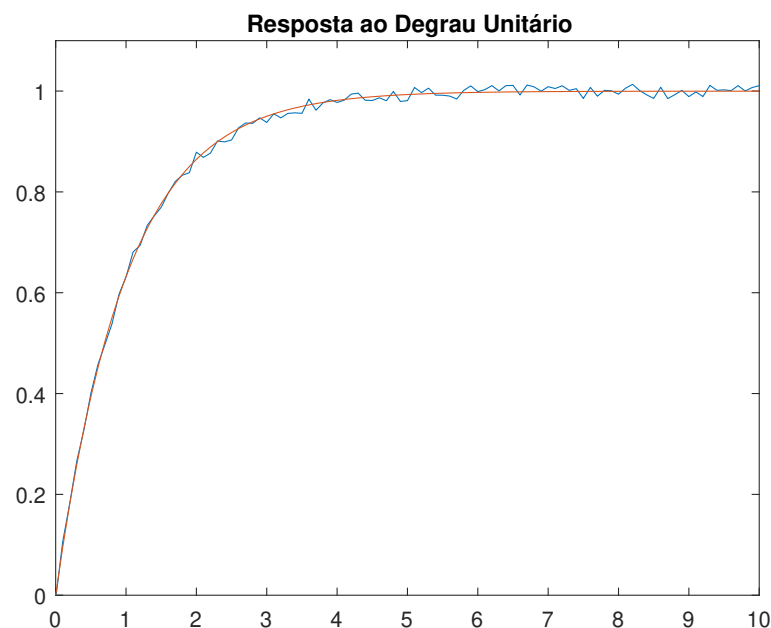


Figura 5 – (Vermelha) Curva da função de aproximação com os parâmetros obtidos, (Azul) Curva da função a ser identificada

Como mostrado na figura 5, o resultado do ajuste usando o algoritmo proposto foi satisfatório (linha vermelha), com parâmetro  $\theta$  igual a 0,9998 e erro de  $7.1332 \times 10^{-5}$ .

Tabela 1 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS

Parâmetros	Modelo de um Polo (eq: 4.3)
$K$	1
$a$	1
$\alpha$	1
$\theta$	0.9998
$E$	$7.1332 \cdot 10^{-5}$

## 4.4 Descrição dos Testes Realizados no Sistema

### TESTE 1 - IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Inicialmente, utilizou-se uma variação de potência de 10%, na faixa de 20% a 30%. Como proposto, usou-se o algoritmo baseado no método dos mínimos quadrados apresentado no Capítulo 3 com modelo de função de transferência a equação 3.5 na sua forma temporal 3.23.

Como resultado, obteve-se os seguintes parâmetros para a faixa de potência que corresponde a  $M = 25W$  como magnitude do degrau.

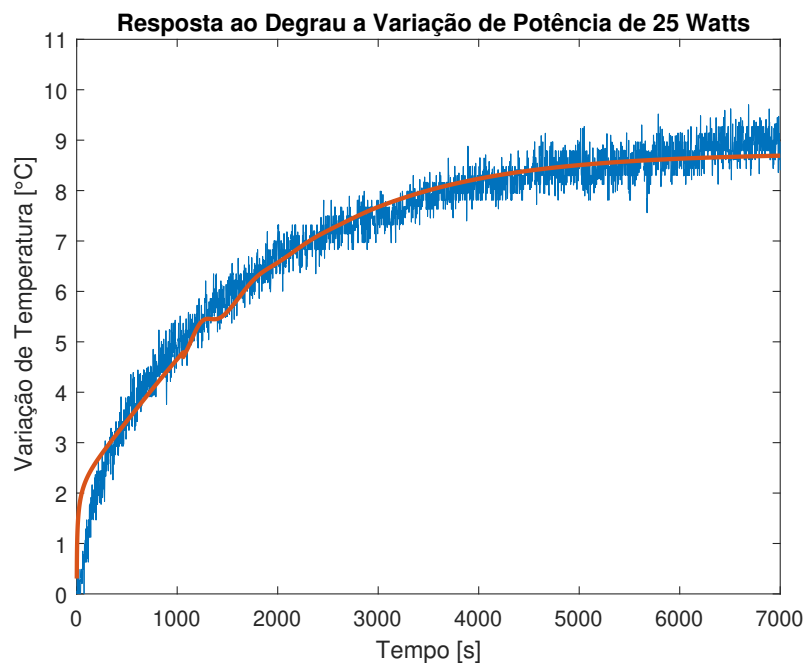


Figura 6 – (Azul) A amostra dos dados coletados.(Vermelho) Ajuste da curva pelo modelo de ordem fracionária a três termos

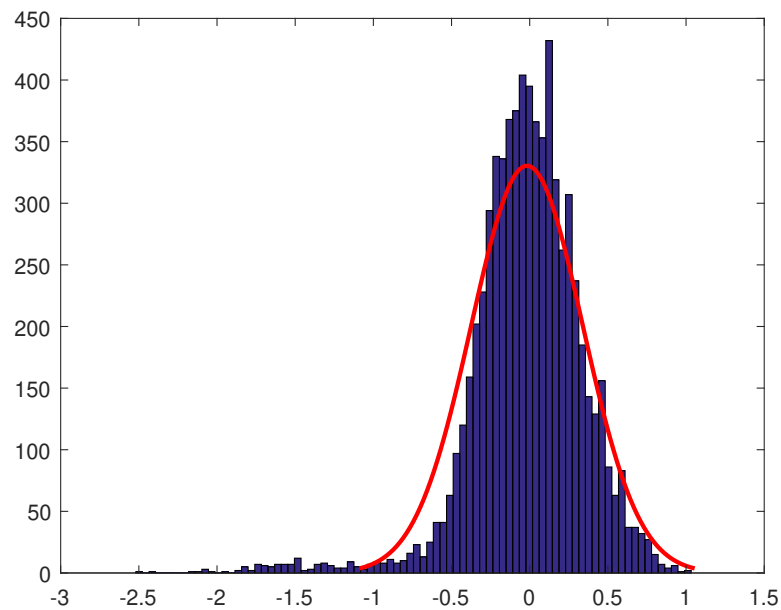


Figura 7 – Distribuição normal dos resíduos

Tabela 2 – RESULTADO DOS PARÂMETROS OBTIDOS NA FAIXA DE POTÊNCIA DE 20% A 30% da POTÊNCIA MÁXIMA

Parâmetros	Modelo de Ordem Fracionária a Tres Termos (eq: 3.5)
$\alpha$	0.9434
$\omega_n$	0.0014
$\zeta$	0.94
$\theta$	0.3606
$E$	0.1280

A média e o desvio padrão obtidos foram  $-0.0173$  e  $0.3574$ , respectivamente. Apesar do gráfico do ajuste apresentar uma dinâmica diferente nos primeiros 400 segundos, temos que no geral, o gráfico apresenta uma boa representação da dinâmica do sistema, a julgar pela distribuição dos resíduos do modelo.

Outros modelos foram estudados para a mesma faixa de operação, são elas o modelo de primeira ordem inteira e primeira ordem fracionária, afim de verificar qual o melhor modelo descreve o sistema estudado, estatisticamente.

Para o modelo de primeira ordem inteira, é proposto a função de transferência com entrada ao degrau de magnitude  $M = 25W$  em 3.3, com  $v = 1$ .

Tabela 3 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS NA FAIXA DE POTÊNCIA DE 20% a 30% da POTÊNCIA MÁXIMA

Parâmetros	Modelo de ordem Inteira a Dois Termos (eq.20)
-	
$K$	0.3512
$a$	1410
$\alpha$	1
$\theta$	1
$E$	0.2054

A média e o desvio padrão obtidos da análise dos resíduos do ajuste de primeira ordem foram 0.0436 e 0.3747. É notório pelo gráfico de resíduos que a função de primeira ordem não realiza um bom ajuste da curva, pois a distribuição da curva gaussiana está deslocada do histograma de frequências dos resíduos, apesar do gráfico aparentar uma aproximação satisfatória.

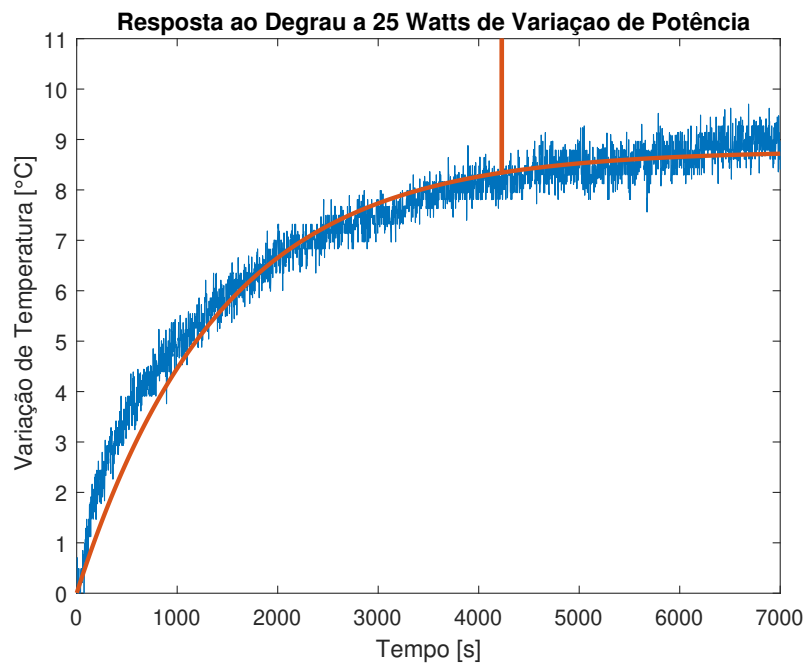


Figura 8 – Ajuste da curva (Vermelho) para o modelo de ordem inteira a dois termos

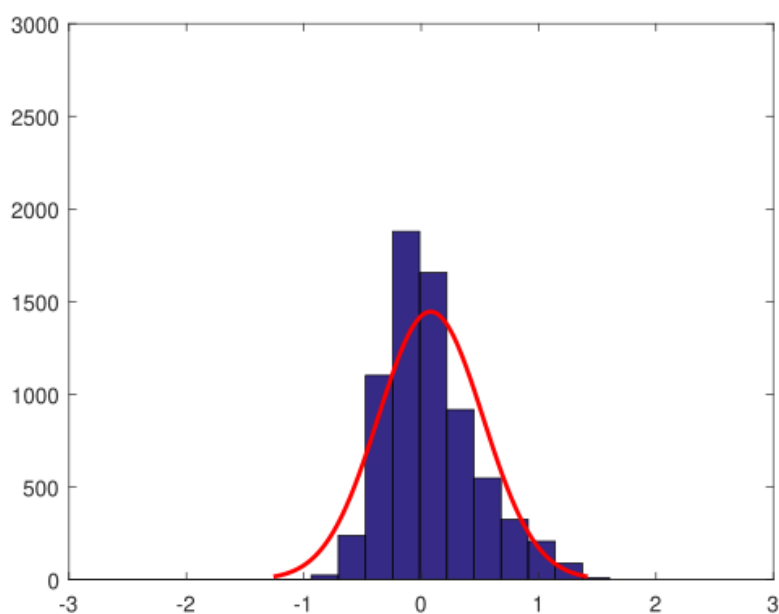


Figura 9 – Gráfico da distribuição normal dos resíduos

Para o modelo fracionário a dois termos, representado pela equação 3.3, temos os seguintes resultados quanto ao ajuste e aos parâmetros, bem como o gráfico da distribuição normal dos resíduos mostrados na Figura 8. Sendo  $0 < \alpha < 1$ .

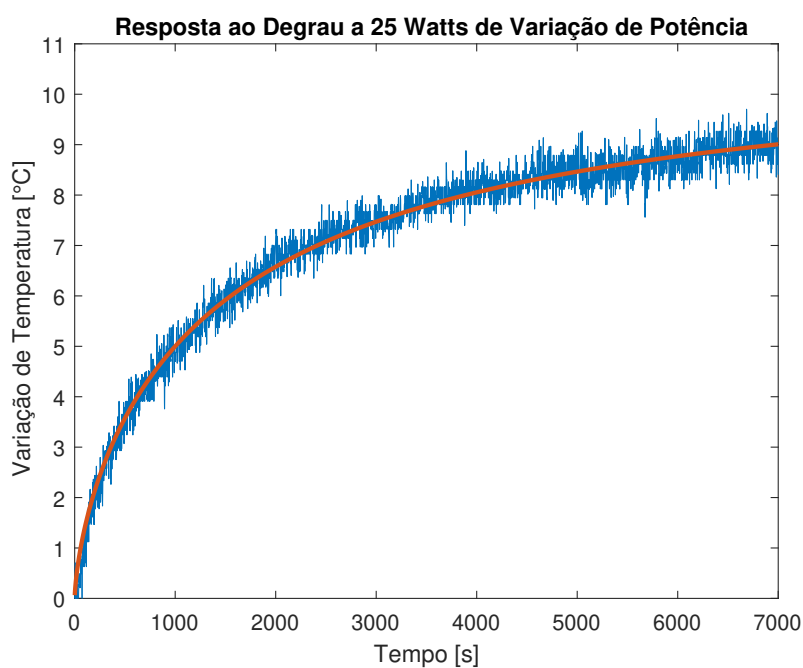


Figura 10 – Ajuste da curva (Vermelha) para o Modelo Fracionário a dois termos

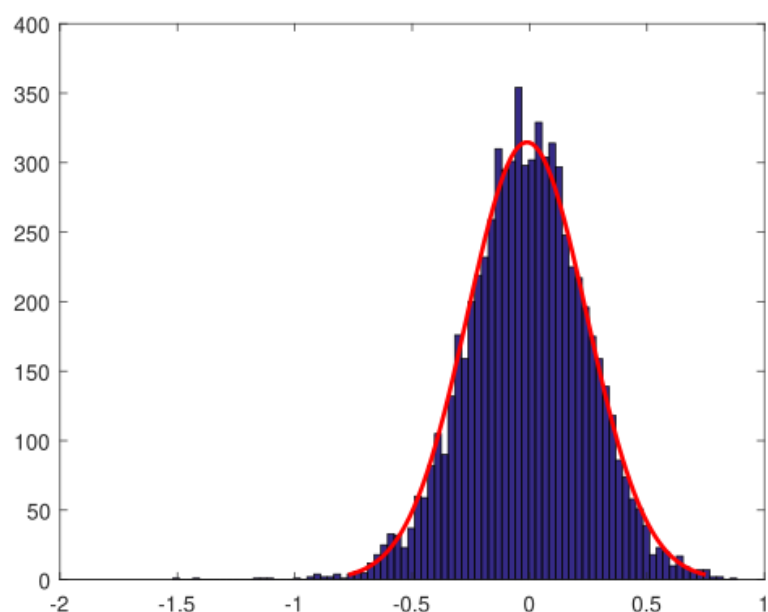


Figura 11 – Gráfico da distribuição normal dos resíduos

Tabela 4 – RESULTADO DOS PARÂMETROS OBTIDOS NA FAIXA DE 20% a 30% da POTÊNCIA MÁXIMA

Parâmetros	Modelo Fracionário a Dois Termos (eq. 3.3)
$K$	0.4404
$a$	190
$\alpha$	0.6897
$\theta$	0.9999
$E$	0.0645

A média e o desvio padrão obtidos da análise dos resíduos do ajuste do modelo fracionário a dois termos foram 0.0089 e 0.2612. Analisando o gráfico de dispersão na distribuição normal dos resíduos na Figura 11, vemos que há uma melhor distribuição com relação aos demais gráficos de resíduo, o desvio padrão mostra essa diferença, sendo para o modelo a dois termos 1.43 menor que a do modelo de primeira ordem inteira e 1.36 menor comparada ao modelo fracionário a três termos. Temos ainda que a média do modelo fracionário a dois termos é a mais próxima de zero quando comparada aos demais.

Foi-se estudado o modelo de segunda ordem inteira, representado pela Equação 3.4 com a mesma faixa de operação e variação de potência. É esperado para este modelo



que o erro apresente maior que a do modelo fracionário a três termos, pois temos o parâmetro  $\alpha = 1$  e sendo o modelo fracionário uma generalização da mesma. Sua transformada de inversa de Laplace é mostrada abaixo para cada faixa do coeficiente de amortecimento com entrada ao degrau com magnitude  $M = 25$ , para  $0 \leq \zeta < 1$  (OGATA, 2010).

$$s(t) = M \left( 1 - \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) \right) \quad (4.4)$$

para  $\zeta = 1$

$$s(t) = M (1 - \omega_n^2 t e^{-t\omega_n}) \quad (4.5)$$

para  $\zeta > 1$

$$s(t) = M \left( 1 - \frac{\zeta + \sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n t (\zeta - \sqrt{1-\zeta^2})} \right) + M \left( \frac{\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n t (\zeta + \sqrt{1-\zeta^2})} \right) \quad (4.6)$$

Os resultados dos parâmetros, bem como o gráfico da distribuição normal dos resíduos e o ajuste da curva para o intervalo de  $0 \leq \zeta < 1$  não foram satisfatórios, apresentando um erro relativamente grande e uma distribuição com um padrão não-normal para os resíduos, sendo assim, o intervalo para  $\zeta > 1$  obteve o menor erro.

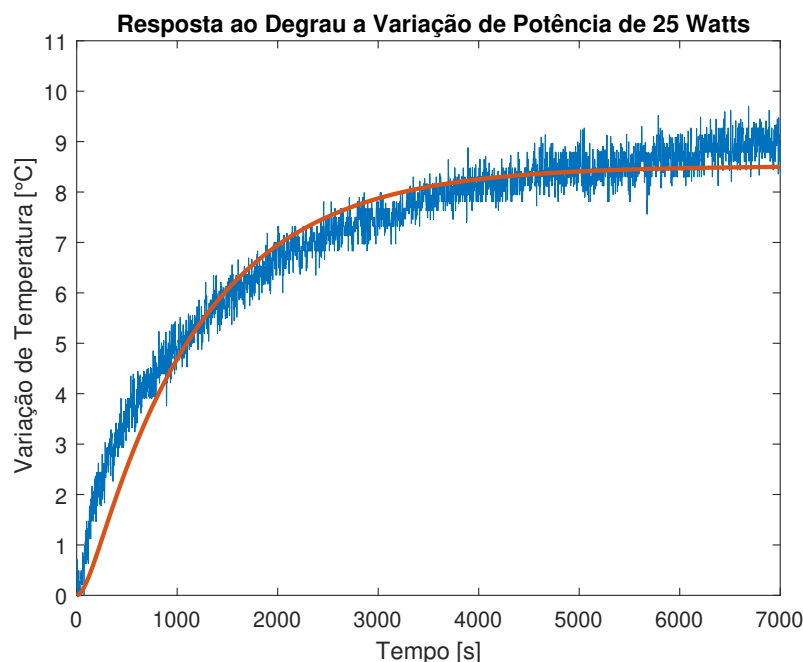


Figura 12 – Ajuste da curva de aproximação para o modelo inteiro a três termos

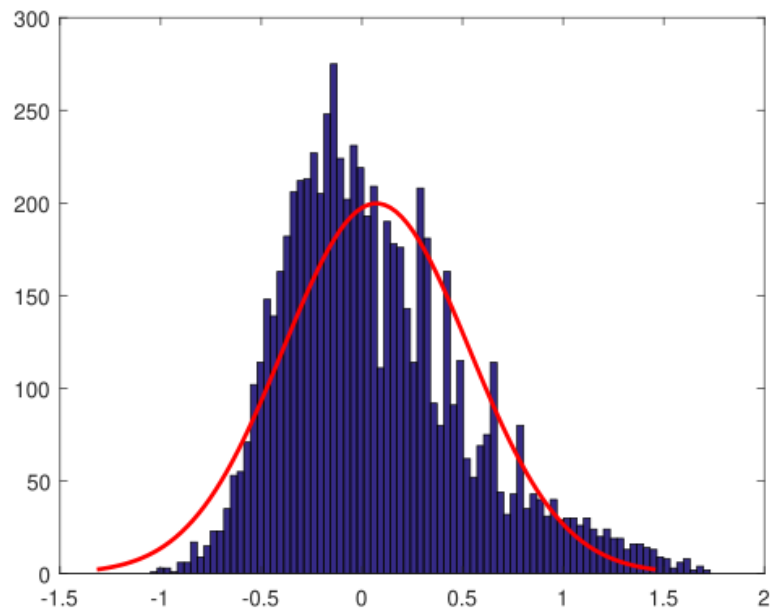


Figura 13 – Gráfico da distribuição normal dos resíduos

Tabela 5 – RESULTADOS DOS PARÂMETROS OBTIDOS NA FAIXA DE POTÊNCIA DE 20% a 30% da POTÊNCIA MÁXIMA

Parâmetros	Modelo inteiro a três termos (eq. 3.4)
-	0.003
$\omega_n$	1.83
$\zeta$	1
$\alpha$	0.3407
$\theta$	0.2192
$E$	

Como esperado, a análise do gráfico dos resíduos não é satisfatória, sendo a média e o desvio padrão iguais a 0.0713 e 0.4627 respectivamente. Sendo assim conclui-se que o modelo a três termos inteiro é inadequado para o sistema estudado.

#### TESTE 2 - VARIAÇÃO AO SETPOINT

Após a identificação na faixa de operação de 20% a 30% de potência, foram feitos outros testes em outras faixas de operação, como 30% a 40%, 40% a 50% até 70% a 80% da potência máxima (250W), tanto no sentido crescente de potência quanto no sentido decrescente. Ao todo foram feitas doze identificações.

Tabela 6 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS NO MODELO FRACIONÁRIO A TRÊS TERMOS

Faixa de Potência	Parâmetro $\alpha$	Parâmetro $\omega_n$	Parâmetro $\zeta$	Parâmetro $E$	Parâmetro $\theta$
20% to 30%	0.9434	0.0014	0.94	0.1280	0.3506
30% to 40%	0.9434	0.0014	0.95	0.1417	0.4760
40% to 50%	0.9615	0.009	0.9	0.2812	0.5441
50% to 60%	0.9524	0.0016	0.96	0.1454	0.4085
60% to 70%	0.9524	0.0012	0.94	0.1135	0.3568
70% to 80%	0.9901	0.0014	0.96	0.0661	0.1311
80% to 70%	0.9524	0.0130	0.93	0.1088	-0.2034
70% to 60%	0.9434	0.0018	0.93	0.1259	-0.2868
60% to 50%	0.9524	0.0013	0.92	0.1063	-0.4565
50% to 40%	0.9434	0.0016	0.92	0.1394	-0.4240
40% to 30%	0.9434	0.0015	0.92	0.1437	-0.4090
30% to 20%	0.9615	0.0012	0.94	0.2062	-0.3800

O comportamento do ajuste do modelo a três termos no domínio do tempo apresenta um desvio muito grande nos primeiros 400 segundos, tal comportamento era suprimido após uma frequência de 0.01 rad/s, portanto, a baixas frequências o ajuste não era aceitável nesta faixa de tempo, mas de um modo geral, o ajuste do modelo ainda foi satisfatório. Com erro médio de 0.1422. Pelo comportamento dos dados obtidos do sistema, era esperado que o valor da frequência natural fosse baixo e o coeficiente de amortecimento estivesse próximo ou maior que 1.

Tabela 7 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O MODELO INTEIRO A DOIS TERMOS

Faixa de Potência	Parâmetro $K$	Parâmetro $a$	Parâmetro $E$	Parâmetro $\theta$
20% to 30%	0.3512	1410	0.2054	1
30% to 40%	0.4754	1410	0.3926	1
40% to 50%	0.5340	1930	0.4104	1
50% to 60%	0.4050	1200	0.2675	1
60% to 70%	0.3499	1480	0.1452	1
70% to 80%	0.1377	1640	0.0806	1
80% to 70%	0.2019	1410	0.1146	-1
70% to 60%	0.3042	1500	0.3420	-1
60% to 50%	0.4540	1410	0.2097	-1
50% to 40%	0.3870	1310	0.1928	-1
40% to 30%	0.4170	1410	0.3565	-1
30% to 20%	0.3761	1410	0.2210	-1

Para o modelo de dois termos inteiro, pode-se notar um pior ajuste com relação ao fracionário de três termos, o mesmo apresenta um erro médio de 0.2490, o que nos dá um resultado pior do que o modelo fracionário a três termos.

Tabela 8 – RESULTADO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O MODELO FRACIONÁRIO A DOIS TERMOS

Faixa de Potência	Parâmetro $K$	Parâmetro $\alpha$	Parâmetro $a$	Parâmetro $E$	Parâmetro $\theta$
20% to 30%	0.4404	0.6897	190	0.0645	0.9999
30% to 40%	0.5963	0.6897	190	0.0767	1
40% to 50%	0.7910	0.7143	410	0.1823	1
50% to 60%	0.5928	0.6757	210	0.0665	1.001
60% to 70%	0.4926	0.6536	190	0.0645	1
70% to 80%	0.1402	0.9901	1600	0.0741	1
80% to 70%	0.2120	0.9174	810	0.0909	-1
70% to 60%	0.2978	0.9009	520	0.0996	-1
60% to 50%	0.5699	0.7246	260	0.1068	-1
50% to 40%	0.5136	0.7143	190	0.0482	-1
40% to 30%	0.4866	0.7143	190	0.0878	-1
30% to 20%	0.4445	0.8065	470	0.1191	-1

Para o modelo a dois termos fracionário pode-se notar o melhor ajuste com relação aos outros dois modelos apresentados anteriormente, com um erro médio de 0.09095 e é o que mais se aproxima da curva observada.

Abaixo são mostrados os gráficos das curvas estimadas e os gráficos da distribuição dos resíduos do modelo fracionário a três termos, representados pela Figura 14, Figura 15 e Figura 16. O gráfico mostra a variação de temperatura em  $^{\circ}C$  sobre o tempo em segundos.

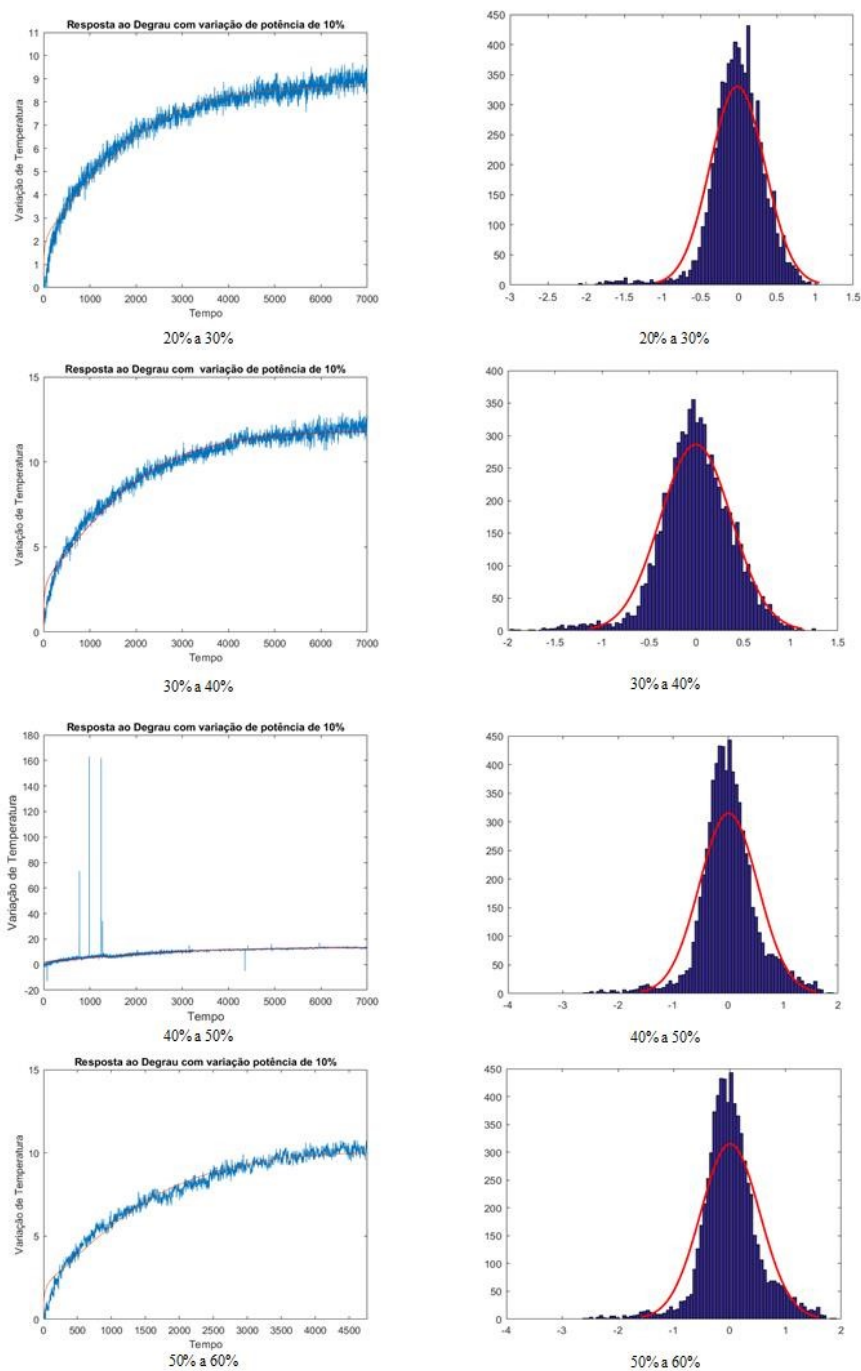


Figura 14 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a três termos e seus respectivos gráficos de resíduo

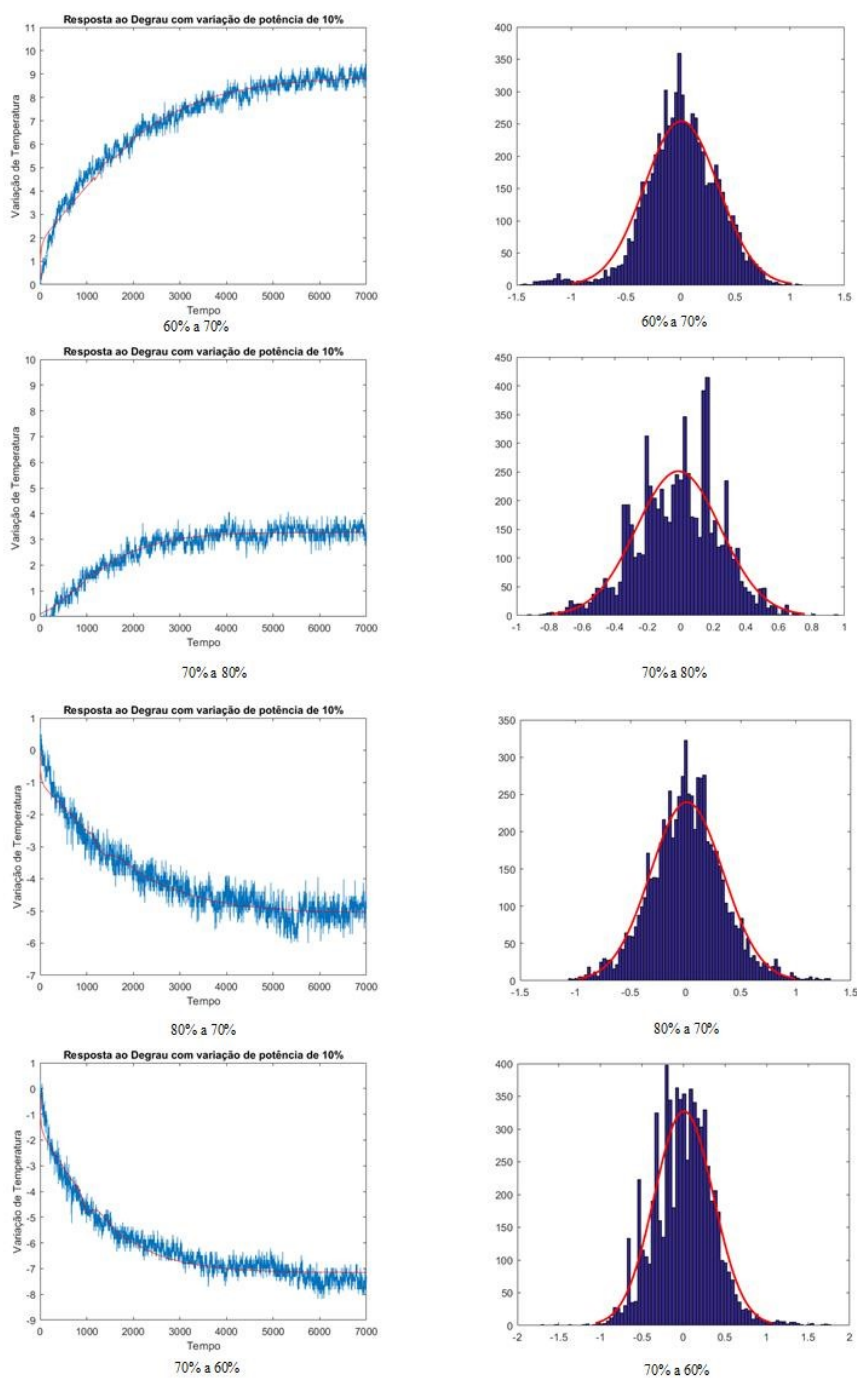


Figura 15 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a três termos e seus respectivos gráficos de resíduo

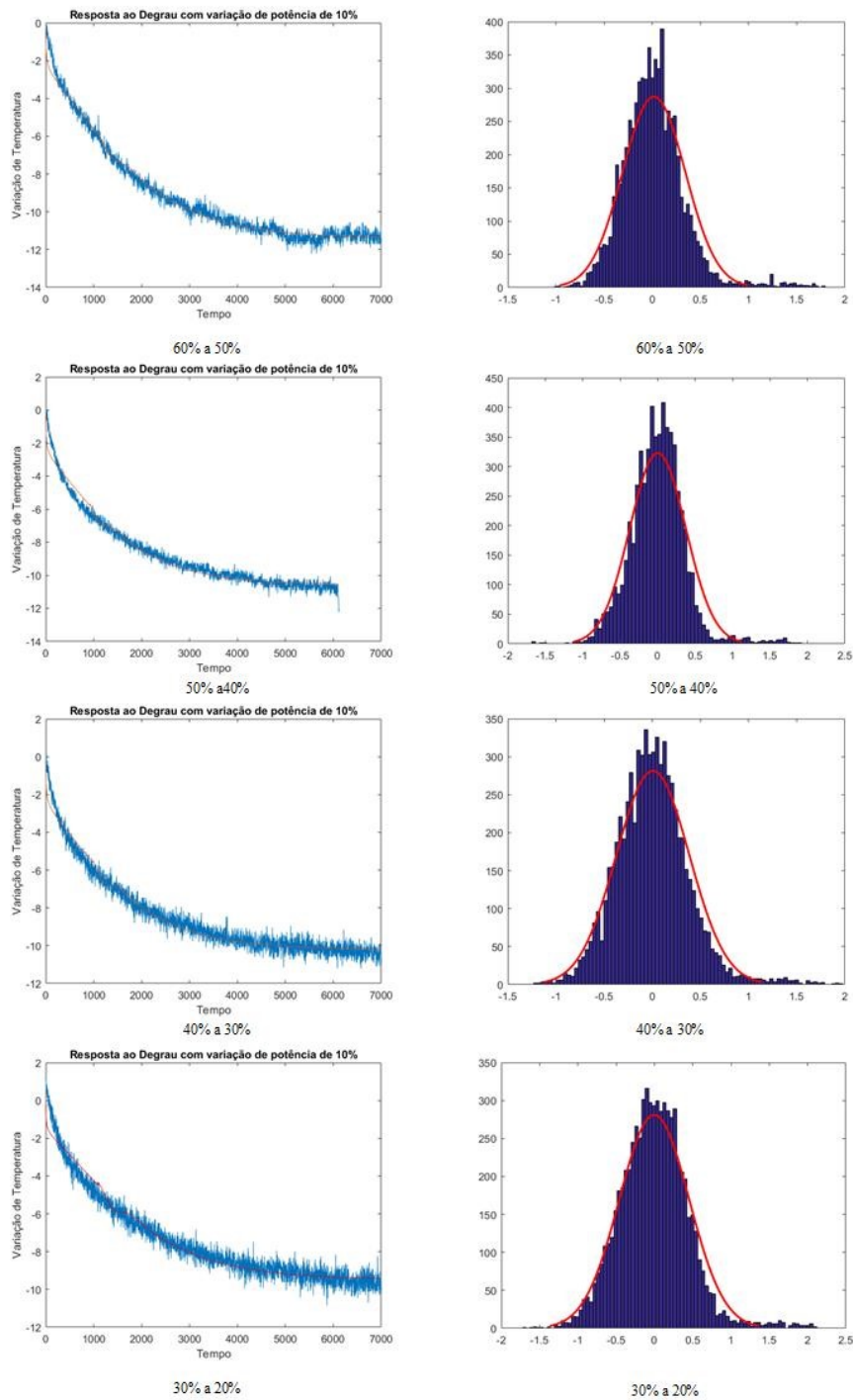


Figura 16 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a três termos e seus respectivos gráficos de resíduo

Comparando as curvas estimadas e as obtidas a partir de ensaios experimentais que no início da variação houve um baixo casamento das mesmas entre os instantes de tempo 1 e 400. Assim, observa-se valores dispersivos no gráfico de resíduos, no que se remete ao intervalo de  $[-2, -1.5]$  nos gráficos de intervalos crescentes de variação de potência, principalmente. Percebe-se ainda, que no intervalo de 70% a 80% o gráfico de

resíduos não obedece a um padrão de distribuição normal, apresentando valores com alto grau de dispersão em certos intervalos.

A seguir são mostrados os gráficos das curvas estimadas e os gráficos da distribuição dos resíduos do modelo de ordem inteira a dois termos representados pela Figura 17, Figura 18 e Figura 19.

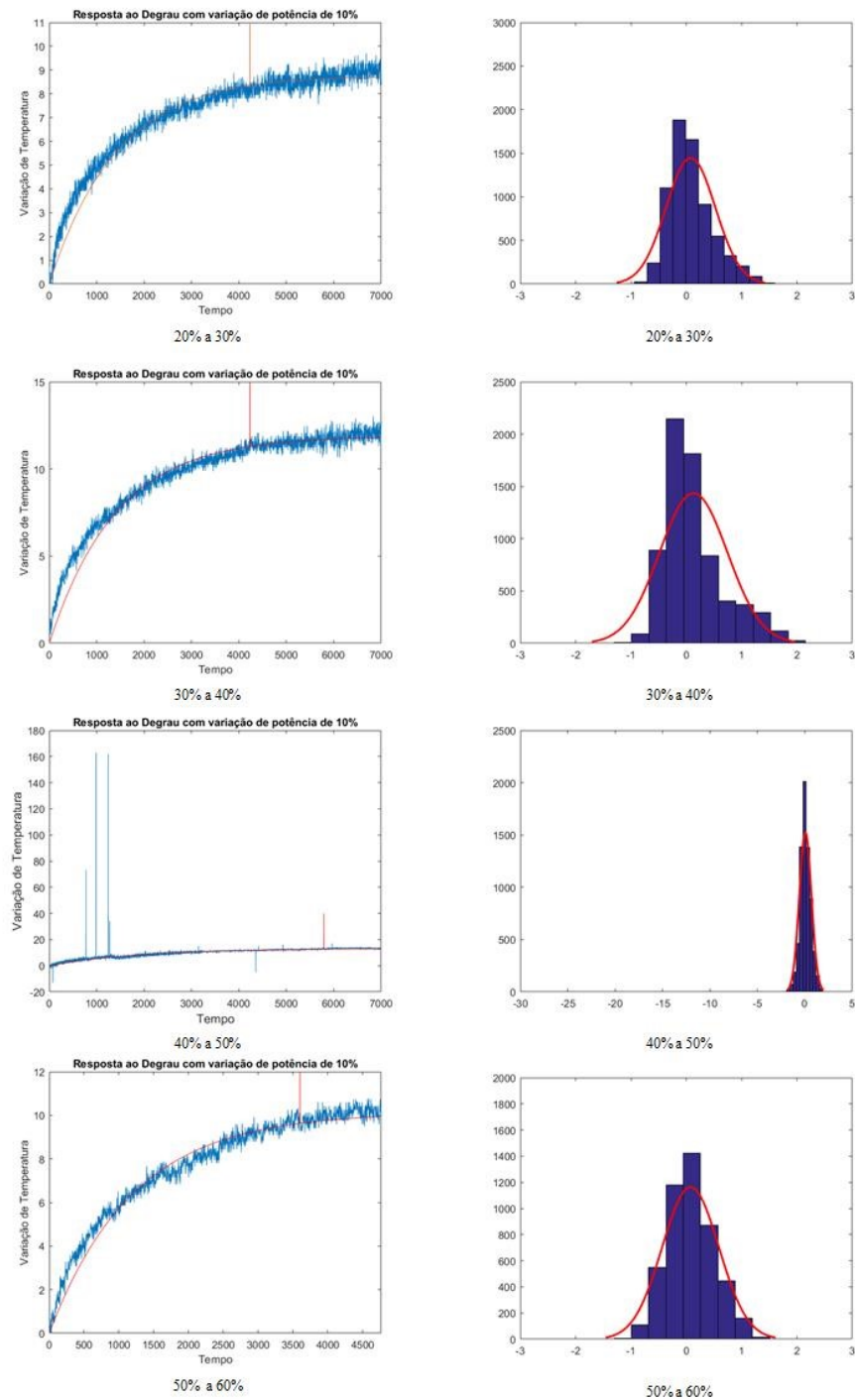


Figura 17 – Gráfico do ajuste do modelo inteiro a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo



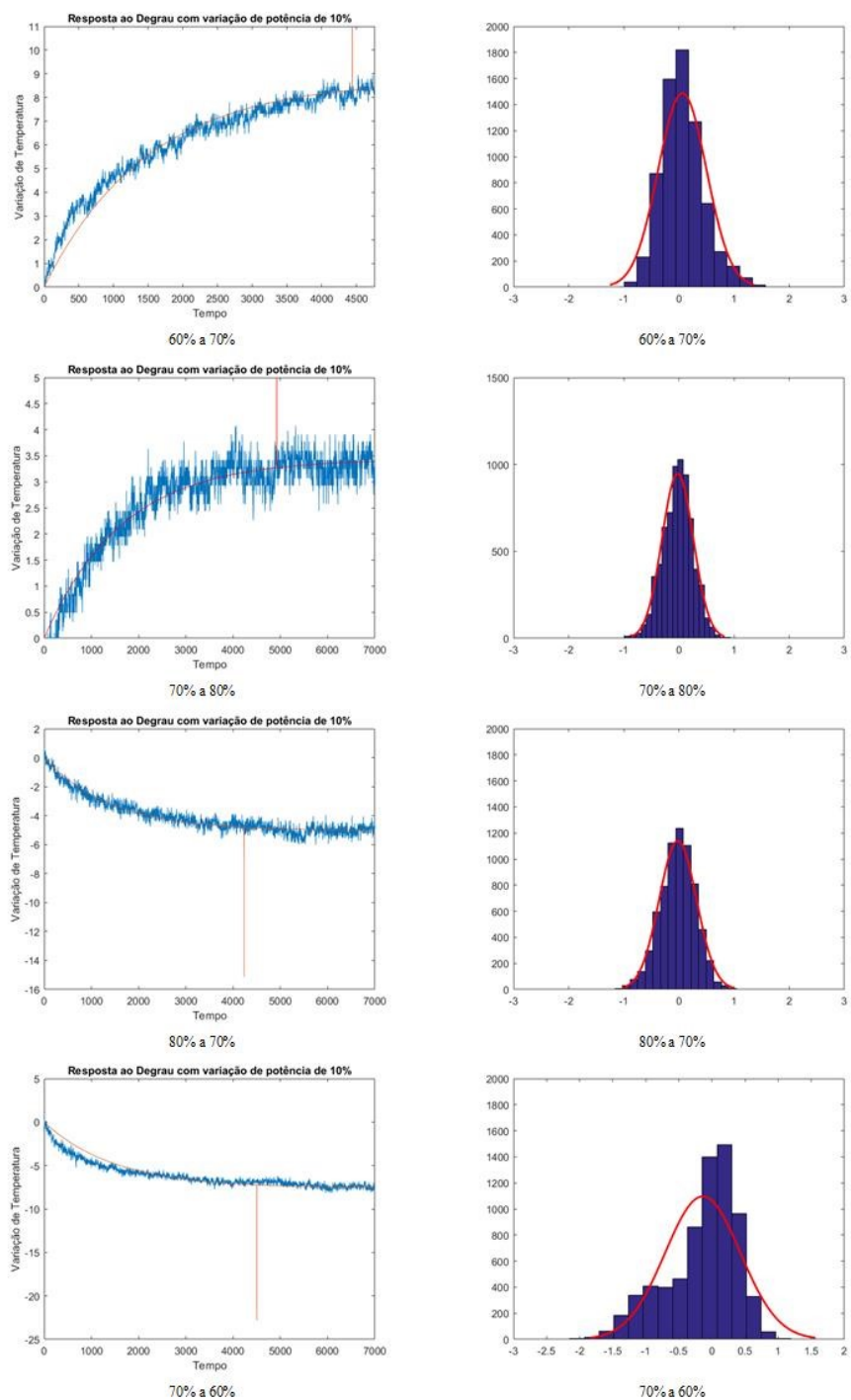


Figura 18 – Gráfico do ajuste do modelo inteiro a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo

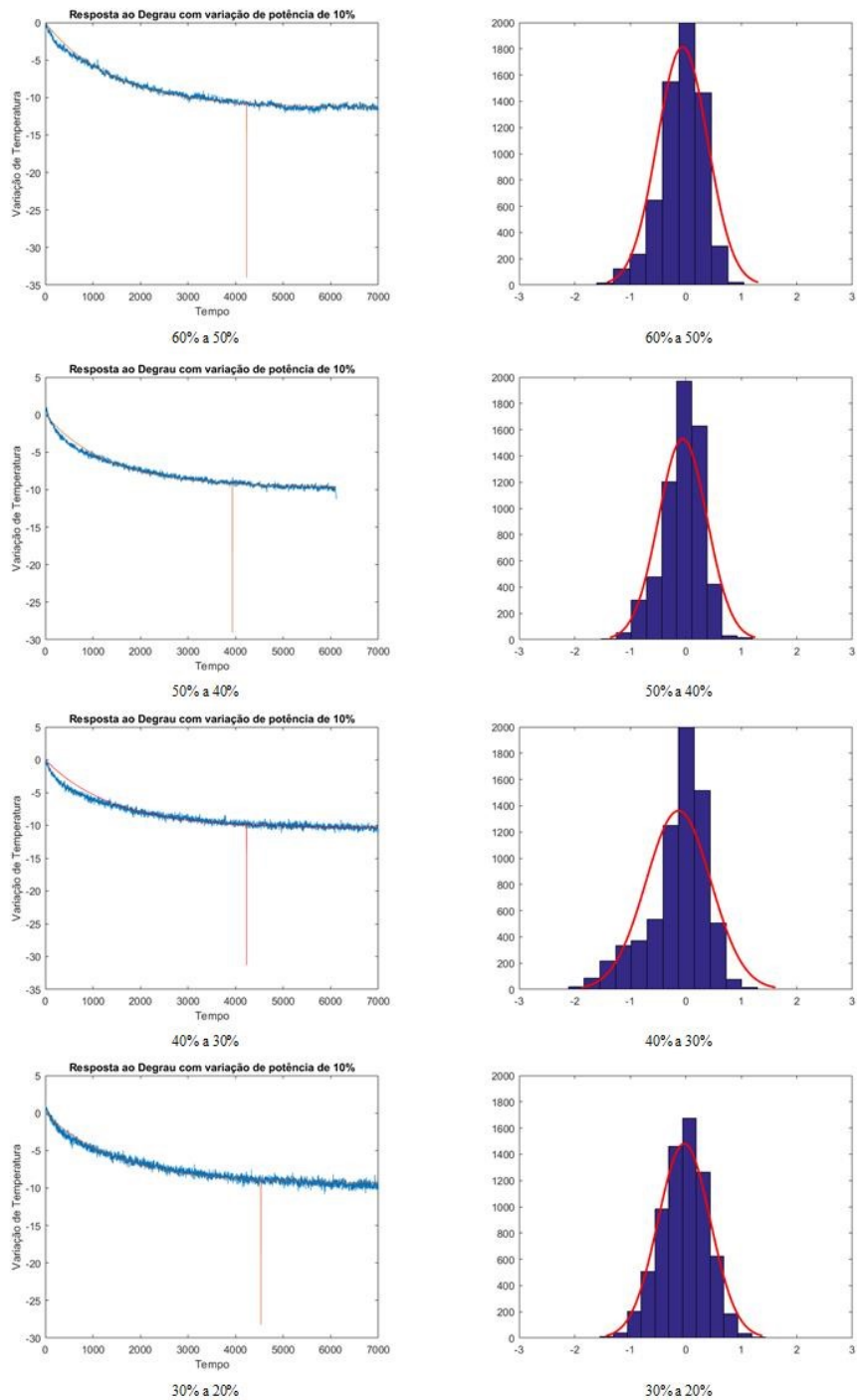


Figura 19 – Gráfico do ajuste do modelo inteiro a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo

Analisando os gráficos, observa-se ainda certas discrepâncias entre a curva observada e a predita em certos intervalos de tempo. Assim, o índice de erro médio quadrático ainda se apresenta elevado em relação ao modelo fracionário a três termos. Pode-se ainda concluir que o modelo tem uma eficiência inferior quanto a descrição da dinâmica da curva observada, isto é refletido nos valores de índice de eficiência de

willmott e de Nash-Sutcliffe que será melhor comentado nas secções seguintes.

Os gráficos relacionados as curvas estimadas, e a distribuição dos resíduos relacionados ao seu respectivo modelo fracionário a dois termos são apresentados nas Figuras 20, Figura 21 e Figura 22, respectivamente.

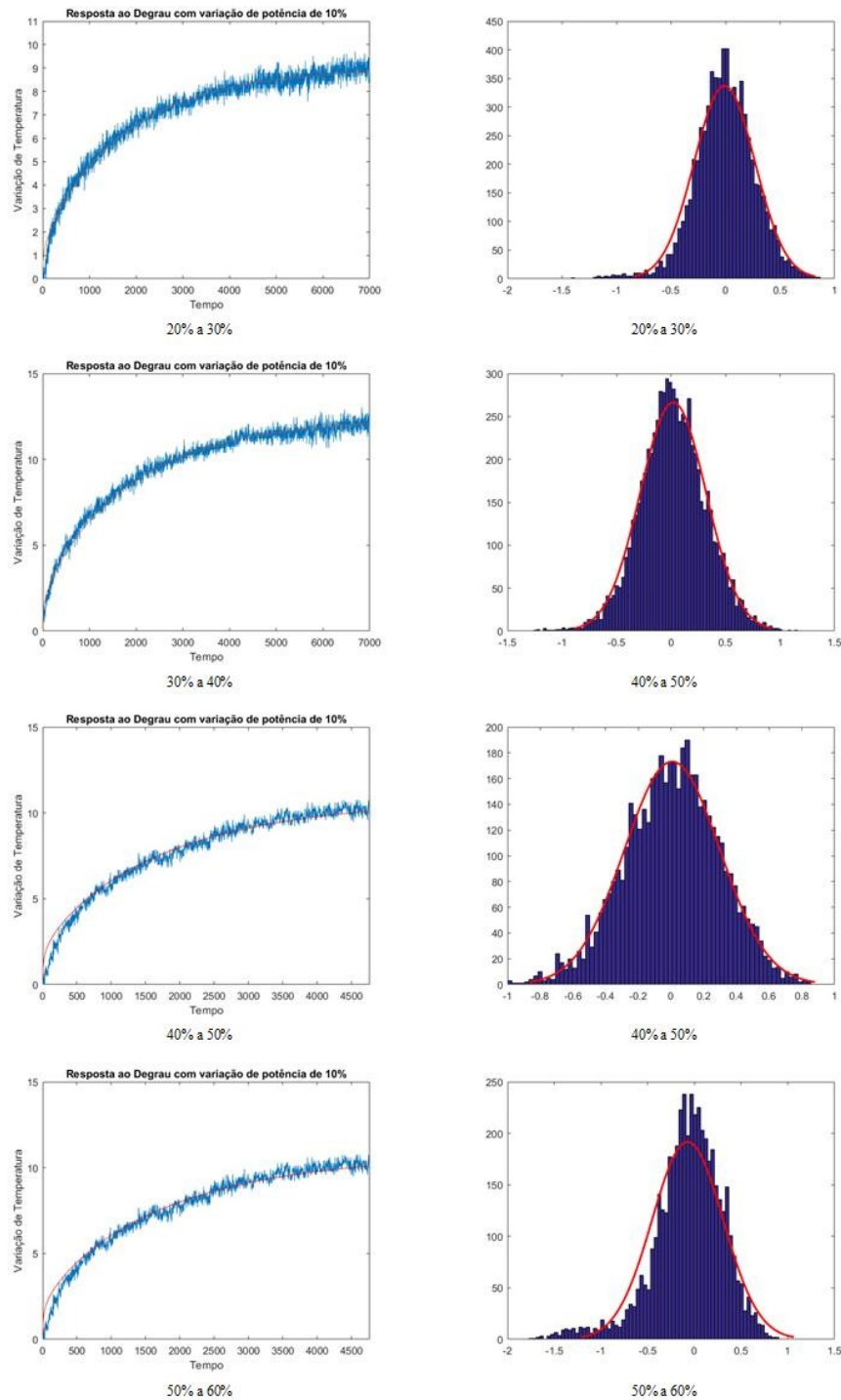


Figura 20 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo

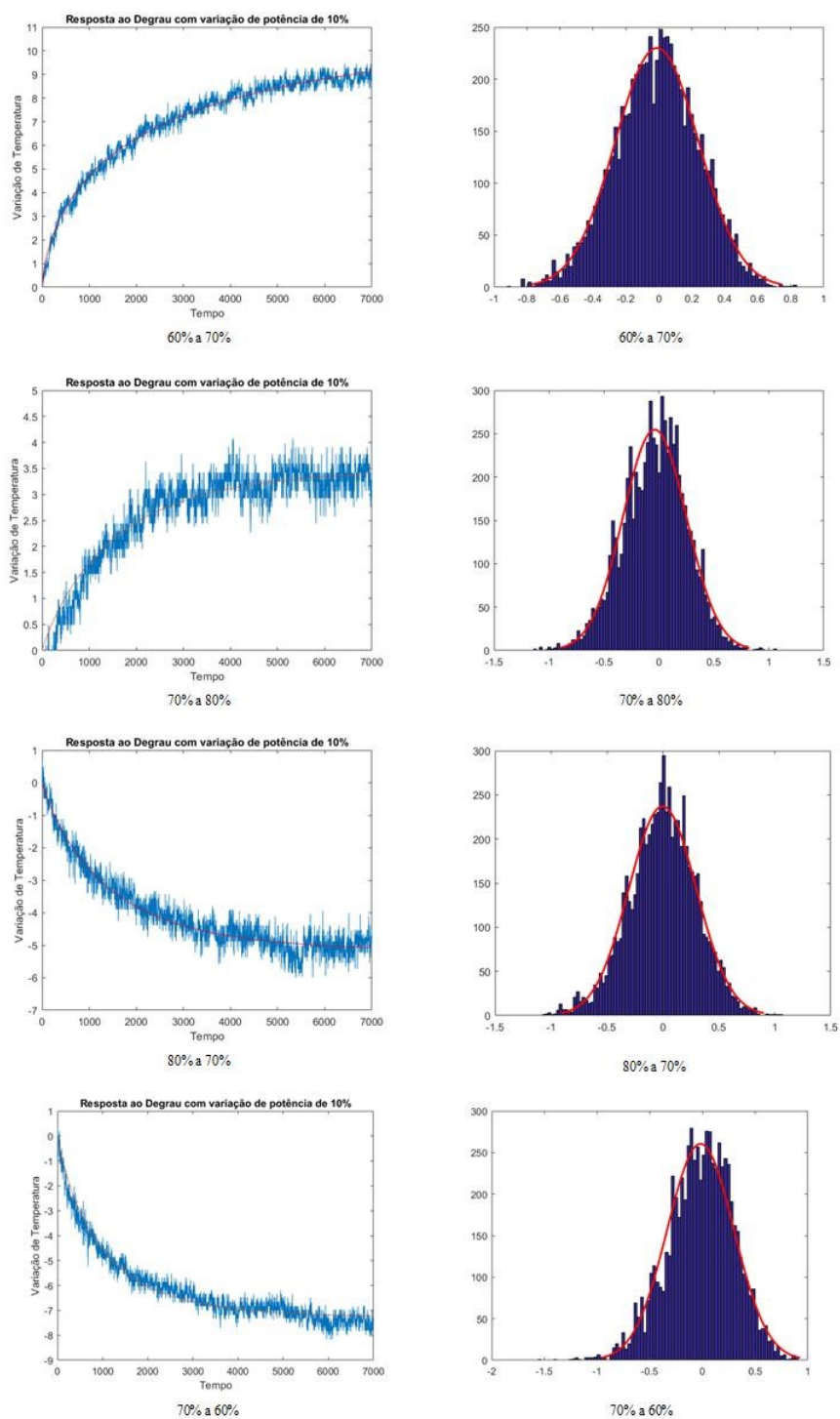


Figura 21 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo

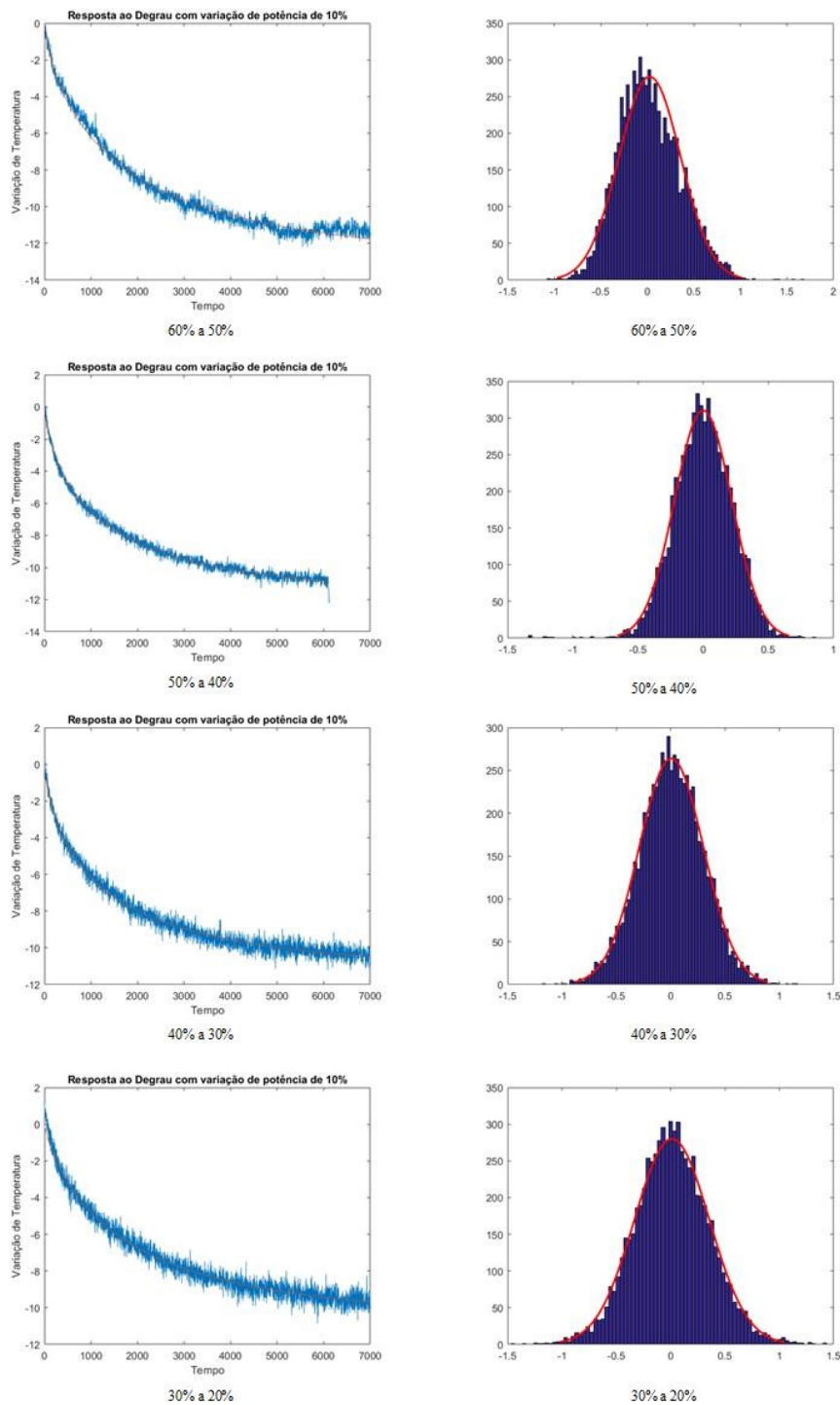


Figura 22 – Gráfico do ajuste do modelo fracionário a dois termos e seus respectivos gráficos de resíduo

Percebe-se nos gráficos de ajuste que há uma melhor concordância entre as curvas preditas e observadas. Isto é espelhado nos gráficos de distribuição dos resíduos, portanto, em comparação aos outros modelos, é o que há uma melhor predição em comparação dos índices de erro médio quadrático e desvio padrão. Porém, tais parâmetros

são necessários mas não suficiente para se eleger o melhor modelo.

## 4.5 Conclusão

Utilizando dos conceitos apresentados no Capítulo 3, foi colocado em prática o algoritmo baseado na teoria dos mínimos quadrados par obtenção da matriz de parâmetros e para sintonia dos parâmetros da função de transferências dos modelos discutidos anteriormente, no ambiente de simulação do MATLAB. Constata-se na prática que os resíduos tendem a uma distribuição normal gaussiana, como mostrado em (NOVICKI et al., 2019). Foi observado também a grande sensibilidade da planta térmica a distúrbios externos, apresentado no gráfico dos dados observados do sistema, lembrando que quanto maior o ruído sob o sistema, maior o erro de predição do algoritmo submetido. Em um caso particular, pode-se observar o gráfico da faixa de operação de 40% a 50%, em que, além do ruído do sistema, houve erros de medição por parte do LM35, com medições fora do padrão da curva. No algoritmo, foram feitas tratamento de dados, afim de suprimir estas falhas de medições, sem perda de generalização dos dados originais, o efeito 'rlowess' do MATLAB filtra e suaviza os dados fora do padrão, evitando falhas de medição e assim abstendo o aumento de erro do algoritmo de predição, em um caso particular, o MATLAB não conseguiu aplicar o efeito a esta faixa de operação de 40% a 50%, a simulação dos dados ocorreu normalmente, pois mesmo com tais efeitos, não há perda de generalização dos dados apresentados e nem o comprometimento da dinâmica do sistema com relação a sua curva. Vale mencionar que no período de coleta dos dados, diversas causas contribuíram para o aumento do ruído do sistema, desde manutenções do laboratório em que se encontra a planta, até falha instantânea da rede de transmissão, mas a dinâmica da curva em si não foi comprometida. Foram feitas as análises estatísticas dos resíduos de cada modelo em cada faixa de operação para uma conclusão final sobre qual modelo melhor prediz os dados observados. O modelo que teve menor erro foi a fracionária de dois termos e a pior foi a de ordem inteira a três termos, motivo pelo qual não se estudou neste trabalho. O modelo também que apresentou menor dispersão de dados com relação a média foi a de dois termos de

ordem fracionária. Antes de se chegar uma conclusão definitiva sobre o melhor modelo, irá ser apresentado nos capítulos seguintes, os conceitos de coeficiente de eficiência de Willmott e de Nash-Sutcliffe para melhor validação dos dados de identificação.

## 5

---

## RESULTADO DA IDENTIFICAÇÃO

**A**nalizando as tabelas dos parâmetros estimados, exibiremos, de forma geral, a relação dos parâmetros nos seus valores médios, com sua média e desvio padrão dos resíduos, apresentados abaixo na tabela 5.

Tabela 9 – RESULTADOS DOS PARÂMETROS ESTIMADOS EM SEUS VALORES MÉDIOS A VARIAÇÃO DE POTÊNCIA DE 10% DA POTÊNCIA MÁXIMA

-	Modelo Fracionário - a três termos	Modelo Fracionário a dois termos	Modelo de Ordem Inteira a dois termos
$K$	-	0.4648	0.3661
$a$	-	435.8333	1468.33
$\alpha$	0.9533	0.7659	1
$\omega_n$	0.0024	-	-
$\zeta$	0.9342	-	-
$\mu$	0.0092	0.0107	0.0715
$\sigma$	0.3713	0.2953	0.4817
$\theta$	0.1422	1	1
$E$	0.1422	0.0900	0.2490

A tabela acima representa os resultados parciais obtidos do experimento e simulação de cada faixa de operação conforme os procedimentos adotados nos capítulos anteriores, sendo  $\mu$  a média dos valores dos resíduos e  $\sigma$  o desvio padrão.

Conforme se pode verificar, temos um valor menor de erro no modelo fracionário a dois termos e um valor da média dos resíduos mais próximo de zero do que os demais modelos, além de apresentar um valor menor para o desvio padrão, que significa que os dados do modelo são menos dispersos com relação à média deles, ou seja, a aproximação é maior.



Outros indicativos de eficiência de concordância de dados existem na literatura, foram empregados o coeficiente de willmott e o coeficiente de eficiência de Nash-Sutcliffe.

O coeficiente de Nash é muito usado para avaliação de modelos. Seu valor varia entre  $-\infty$  a 1. Quanto maior o valor, maior é a concordância entre o modelo e a observação. A formula para o cálculo é dada pela equação 5.1.

$$\eta = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \quad (5.1)$$

onde:  $O_i$  são os dados observados  $P_i$  são os dados preditos  $\bar{O}$  é a média dos dados observados

A interpretação do valor de  $\eta$  é que se for igual 1 representa que há uma concordância total entre o predito e o observado, ou seja, o modelo desempenha com perfeição. Se for igual a zero, significa que o modelo desempenha tão bem quanto a média dos valores observados, ou seja, o modelo não desempenha uma boa eficiência. Para valores negativos reprovam totalmente o modelo proposto. O resultado para a faixa de operação acima, para o modelo fracionário a três termos foi de  $\eta = 96.34\%$ .

Outro coeficiente usado para medir a eficiência de um modelo é o coeficiente de Willmott, a equação (5.2).

$$d = 100 \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^n (|P_i - \bar{O}| + |O_i - \bar{O}|)^2} \right) \quad (5.2)$$

O valor de d médio para o modelo fracionário a três termos obtida foi  $d = 99.04\%$ . Para o modelo fracionário a dois termos obteve-se  $\eta = 97.35\%$  e  $d = 99.30\%$ . Para o modelo de primeira ordem:  $\eta = 93.87\%$  e  $d = 98,58\%$

## 5.1 Conclusão

A metodologia baseada em MQNR ou batelada foi proposto neste trabalho para modelar o sistema térmico estudado neste trabalho. O algoritmo foi sintetizado no ambiente MATLAB/Simulink para identificação dos parâmetros dos modelos propostos com

variação ao setpoint. Mesmo com o experimento apresentando falhas de medições e ruídos demasiados, a técnica de MQNR se mostrou eficiente na modelagem do sistema, algumas falhas de medição na temperatura de saída podem ter causado o aumento significativo do erro em algumas faixas de operação e não por ineficiência do método no ajuste da curva, a sensibilidade do sistema quanto a ruídos do ambiente também ajudaram para o aumento do erro de predição.

A principal característica de um sistema com resposta criticamente amortecido e com tempo de acomodação alto, na sua maioria, é que o mesmo apresenta coeficiente de amortecimento próximo ou maior que um e frequência natural muito baixo. Mesmo com tal característica, o modelo fracionário a dois termos se mostrou mais eficiente do que a de três termos e quanto ao de primeiro grau, conforme os indicadores de Nash e Willmott, para quase todas as faixas de operação, como mostra a média dos coeficientes na Página 56 e após a avaliação do erro médio na qual há uma menor distância com relação ao zero e menos dispersão quanto ao desvio padrão dos dados. Os testes feitos no MATLAB com a planta identificada mostraram a eficiência do modelo quanto à variação do setpoint.

O resíduo neste tipo de modelo em regressão linear tende a ter uma distribuição normal gaussiana, por isso o indicador de desvio padrão é um bom indicativo de eficiência para validação do modelo neste caso. Vale analisar que os coeficientes de Nash e Willmott sozinhos não asseguram o melhor modelo para os dados observados, uma vez que tais coeficientes julgam o quão fiel é a curva predita quanto as características dinâmicas da curva. Em alguns casos, pode-se apresentar um erro médio quadrático menor que outra curva, porém, com características dinâmicas inferiores a outra que apresentou erro quadrático médio maior. Por isto foi-se apresentado juntamente com os coeficientes de eficiência, o estudo dos resíduos quanto a sua média e ao seu desvio padrão. Portanto, o modelo fracionário a dois termos obteve maior desempenho na predição dos dados do sistema térmico em todos os indicativos de eficiência mencionados no Capítulo 5.

Abaixo, a apresentação da planta identificada com seus respectivos parâmetros e faixas de operação na Tabela 9.

Tabela 10 – RESULTADO DA IDENTIFICAÇÃO PARA O SISTEMA TÉRMICO

Faixa de Operação	Função de Transferência Identificada
20% to 30%	$\frac{0.4404}{190s^{0.6897}+1}$
30% to 40%	$\frac{0.5963}{190s^{0.6897}+1}$
40% to 50%	$\frac{0.7910}{410s^{0.7143}+1}$
50% to 60%	$\frac{0.5928}{210s^{0.6757}+1}$
60% to 70%	$\frac{0.4926}{190s^{0.6536}+1}$
70% to 80%	$\frac{0.1402}{1600s^{0.9901}+1}$
80% to 70%	$-\frac{0.2120}{810s^{0.9174}+1}$
70% to 60%	$-\frac{0.2978}{520s^{0.9009}+1}$
60% to 50%	$-\frac{0.5699}{260s^{0.7246}+1}$
50% to 40%	$-\frac{0.5136}{190s^{0.7143}+1}$
40% to 30%	$-\frac{0.4866}{190s^{0.7143}+1}$
30% to 20%	$-\frac{0.4445}{470s^{0.8065}+1}$

## 6

---

## CONTROLE DE SISTEMAS FRACIONÁRIOS

**E**stabilidade de sistemas dinâmicos sempre foi o principal objetivo da engenharia de controle e automação, porém nem sempre é fácil conseguir ou adquirir tal objetivo devido as adversidades e as incertezas quanto a todas as dinâmicas que devemos considerar ao identificar um sistema dinâmico real. A pesquisa sobre estabilidade em sistemas lineares fracionários é, ainda, um processo em andamento e muitos trabalhos foram apresentados ao longo dos anos como cita (PADUA; VISIOLI, 2015), página 25. Diferente de sistemas de ordem inteira, um teste geral de estabilidade só existe para sistemas fracionárias de ordem proporcional, como o apresentado por esta dissertação no Capítulo 3.

**Teorema 3.** *Um sistema de ordem fracionária proporcional é estável se, e somente se, todos os polos  $\tilde{p}_i$  satisfazem 6.1*

$$|\arg(\tilde{p}_i)| > v \frac{\pi}{2} \quad (6.1)$$

A Figura 23 mostra como se comporta a região de estabilidade para sistemas de ordem proporcional, para  $v = 0.5$  e  $v = 1.5$ .

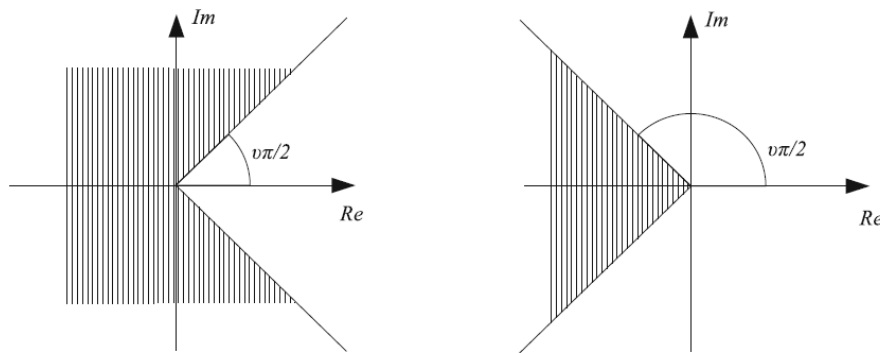


Figura 23 – Regiões de Estabilidade para  $v = 0.5$  e  $v = 1.5$

## 6.1 Controladores PID

Controladores fracionários são generalizações dos controladores PID de ordem inteira amplamente usados em sistemas industriais. Nesta seção iremos expor as definições de controladores PID de ordem inteira e fracionária, os métodos de sintonia analítica e numérica e as regras de sintonia. (VALÉRIO; COSTA, 2013)

### 6.1.1 Controlador PID de ordem Inteira

O controlador PID é um controlador de malha fechada para uma planta SISO que provêm uma ação de controle  $u(t)$  dado por:

$$u(t) = Pe(t) + I \int_0^t r(t)dt + D \frac{de(t)}{dt} \quad (6.2)$$

onde  $e(t)$  é o erro e os parâmetros a serem sintonizados são os ganhos proporcional  $P$ , integral  $I$  e o derivativo  $D$ . Isto significa que a atuação de controle é a soma destas três partes: um proporcional ao erro, um proporcional a integral do erro, e um proporcional à derivada do erro. A função de transferência correspondente  $C(s) = \frac{u(s)}{e(s)}$  é:

$$C(s) = P + \frac{I}{s} + Ds \quad (6.3)$$

a equação 6.2 pode ser reescrita na forma da equação 6.3

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (6.4)$$

onde  $K_p = P$  é o ganho proporcional,  $T_i = \frac{K_p}{I}$  é a constante de tempo integral e  $T_d = \frac{D}{K_p}$  é a constante de tempo derivativo. Uma outra forma de reescrever a equação 6.3 é na forma da equação 6.5 abaixo;

$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) (1 + T_D s) \quad (6.5)$$

onde  $K_P \left( 1 + \frac{T_D}{T_I} \right) = P$  é o ganho proporcional,  $T_I = \frac{K_P}{I}$  é a constante de tempo integral e  $T_D = \frac{D}{K_P}$  é a constante de tempo derivativo. É importante salientar que  $K_P \neq K_p$ ,  $T_I \neq T_i$  e  $T_D \neq T_d$ . A forma da equação 6.5 é útil para sintonizar as componentes integral e derivativo separadamente. (VALÉRIO; COSTA, 2013)

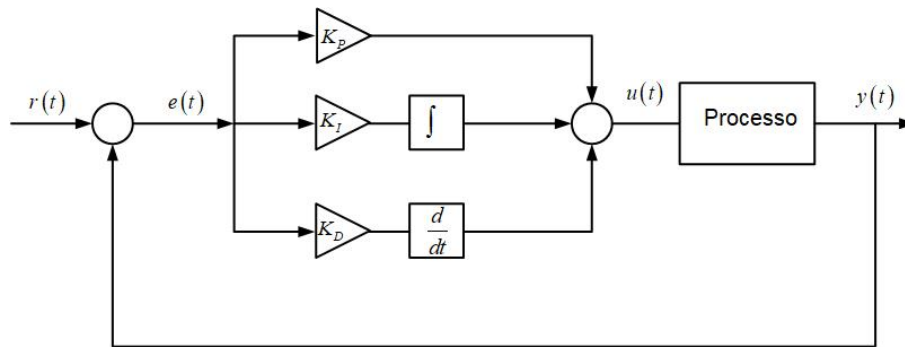


Figura 24 – Esquema de um Controlador PID de ordem inteira

### 6.1.2 Controlador PID de Ordem Fracionária

Um controlador PID de ordem fracionária, também conhecido como um controlador  $PD^\lambda I^\mu$ , provê uma ação de controle  $u(t)$  dado por:

$$u(t) = Pe(t) + I_0 D_t^\lambda f(t) + D_0 D_t^\mu \quad (6.6)$$

onde normalmente temos  $\lambda, \mu > 0$ . Neste caso temos a ação de controle sendo o mesmo da ordem inteira, mas com a diferença de dois novos parâmetros,  $\lambda$  agindo na ação integral e  $\mu$  na ação derivativa. A função de transferência correspondente do controlador  $C(s) = \frac{u(s)}{e(s)}$  é:

$$C(s) = P + \frac{I}{s^\lambda} + T_d s^\mu \quad (6.7)$$

em analogia a (6.4), temos:

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_d s^\mu \right) \quad (6.8)$$

há uma forma irracional desta função de transferência, embora geralmente não seja tão usada, a equação (6.4) pode ser reescrita como:

$$D(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)^\lambda (1 + T_D s)^\mu \quad (6.9)$$

observe, entretanto, que  $D(s)$  e  $C(s)$  são diferentes tipos de controladores PID fracionários, como mencionado,  $D(s)$  sendo a forma irracional. (VALÉRIO; COSTA, 2013)

Observe que (6.8) é PID de ordem fracionária somente se  $\lambda = \mu$ . Caso contrário terá duas partes derivativas se  $\mu > \lambda > 0$  ou duas partes integrativas se  $\lambda > \mu > 0$ . (VALÉRIO; COSTA, 2013)

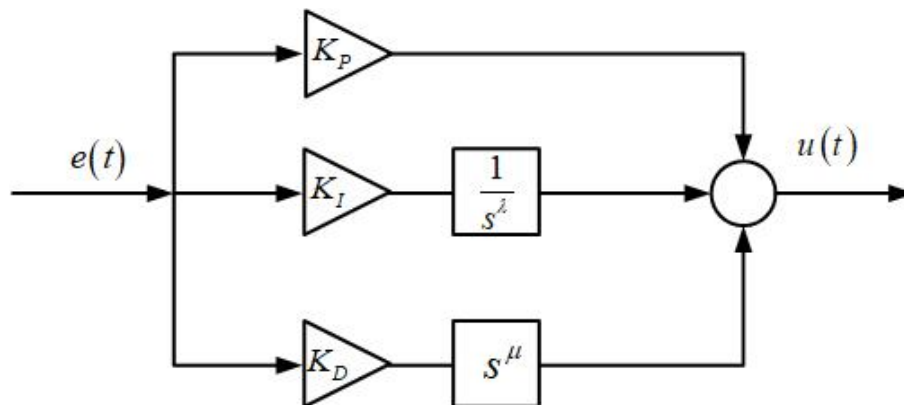


Figura 25 – Controlador fracionário genérico

Uma das vantagens do controlador PID fracionário é que o mesmo permite uma infinidade de configurações e possibilidades, ou seja, há mais graus de liberdade se comparado com o controlador convencional de ordem inteira. A figura 26 representa bem esta vantagem.

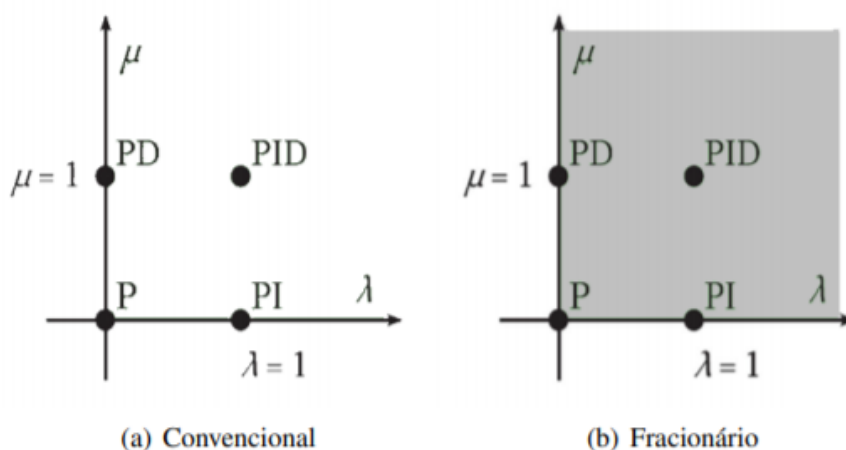


Figura 26 – Comparação entre controladores de ordem inteira e fracionário (ROQUE, 2015)

Controlador	Descrição	Parâmetros
$P$	P Convencional	$K_d = 0, K_i = 0$
$PI$	PI Convencional	$K_d = 0, K_i \neq 0, \lambda = 1$
$PD$	PD Convencional	$K_d \neq 0, K_i = 0, \mu = 1$
$PID$	PID Convencional	$K_d \neq 0, K_i \neq 0, \lambda = 1, \mu = 1$
$PI^\lambda$	PI Fracionário	$K_d = 0, K_i \neq 0, 0 < \lambda < 1$
$PD^\mu$	PD Fracionário	$K_d \neq 0, K_i = 0, 0 < \mu < 1$
$PID^\mu$	PID Integrativo inteiro	$K_d \neq 0, K_i \neq 0, \lambda = 1, 0 < \mu < 1$
$PI^\lambda D$	PID Derivativo inteiro	$K_d \neq 0, K_i \neq 0, 0 < \lambda < 1, \mu = 1$
$PI^\lambda D^\mu$	PID Fracionário	$K_d \neq 0, K_i \neq 0, 0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$

Figura 27 – Possíveis configurações de controladores fracionários (ROQUE, 2015)

## 6.2 Sintonia de Controladores Fracionários

A Figura (28) mostra o comportamento da frequência de um controlador PID fracionário. Em baixas frequências se comporta como sendo  $\frac{1}{s^\lambda}$  e altas frequências como sendo  $Ds^\mu$ , se o ganho proporcional  $P$  for suficientemente grande comparado a  $I$  e  $D$ , existirá um intervalo de frequência intermediária onde o controlador fracionário se comportará como um  $P$ . Observe que para valores de  $\lambda$  e  $\mu$  grandes suficientes poderá existir picos de ressonância, como mostra a figura 28 para uma função de transferência proporcional fracionária.(VALÉRIO; COSTA, 2013)



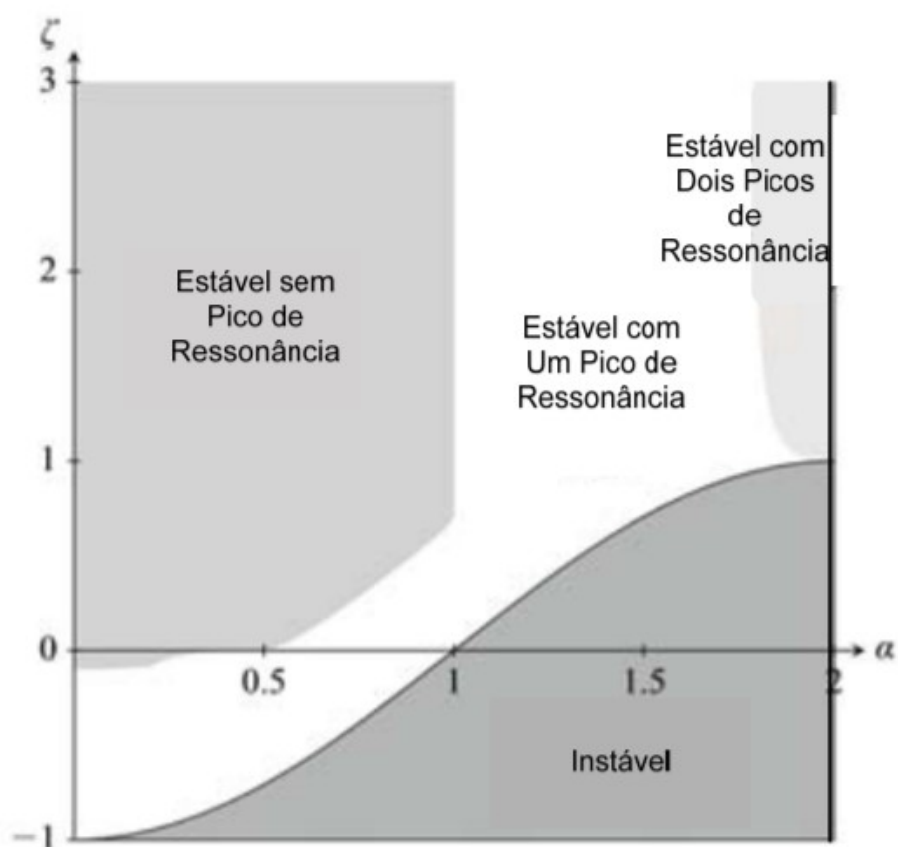


Figura 28 – Comportamento na Frequência para um sistema  $G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{a})^{2\alpha} + 2\zeta(\frac{s}{a})^\alpha + 1}$ .  
Adaptado de (VALÉRIO; COSTA, 2013)

Os valores de  $\omega_l$  e  $\omega_h$  (as frequências de transição mostrado na figura 29) depende não somente de  $I$  e  $D$  como em controladores PID inteiros, mas também de  $\lambda$  e  $\mu$ .

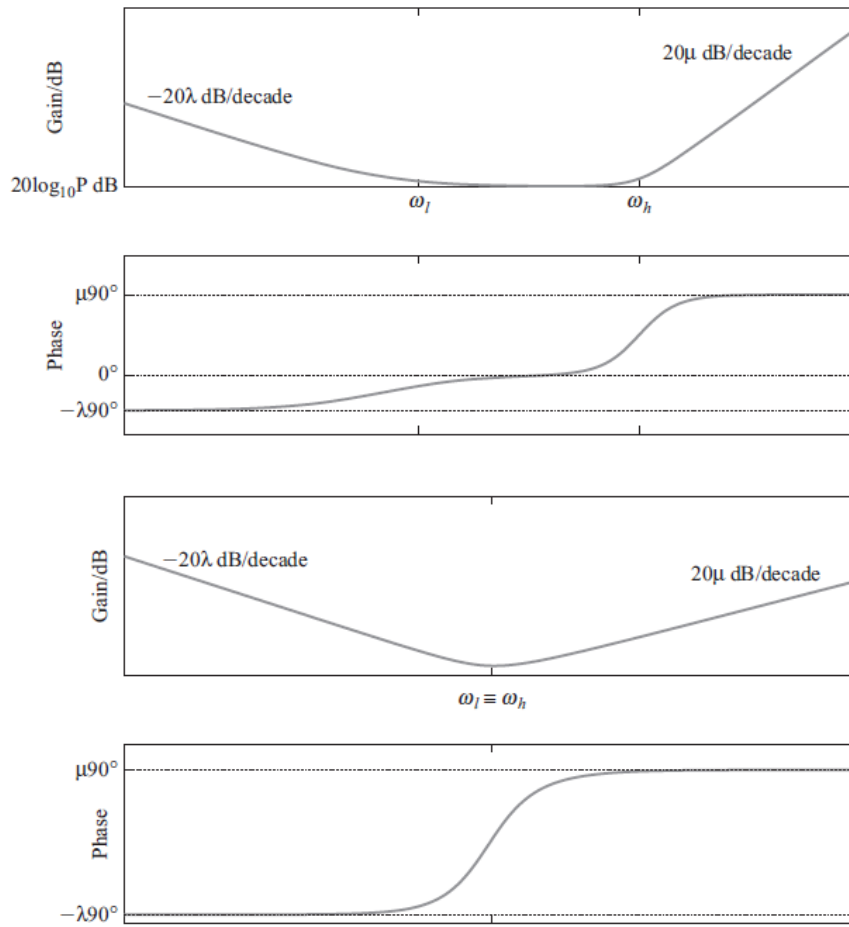


Figura 29 – Comportamento da frequência de um controlador PID fracionário para dois parâmetros (VALÉRIO; COSTA, 2013)

### 6.2.1 Sintonia analítica: Resposta em Frequência

Desde que o PID fracionário tem cinco parâmetros para sintonizar, as seguintes condições podem ser verificadas.

1. Para garantir uma margem de fase desejada  $\varphi_m = 180^\circ + \angle[C(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc})]$  no ganho de frequência de cruzamento  $\omega_{gc} : |C(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc})| = 1$ , então:

$$C(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc}) = e^{j(-\pi+\varphi_m)} \quad (6.10)$$

$$C(j\omega_{gc}) = \frac{e^{j(-\pi+\varphi_m)}}{|G(j\omega_{gc})|e^{\angle[G(j\omega_{gc})]}} \quad (6.11)$$

$$P + \frac{Ie^{-j\frac{\lambda\pi}{2}}}{\omega_{gc}^\lambda} + D\omega_{gc}^\mu e^{j\frac{\mu\pi}{2}} = \frac{e^{j(-\pi+\varphi_m-\angle[G(j\omega_{gc})])}}{|G(j\omega_{gc})|} \quad (6.12)$$

$$P + \frac{I}{\omega_{gc}^\lambda} \cos \frac{\lambda\pi}{2} + D\omega_{gc}^\lambda \cos \frac{\mu\pi}{2} = \frac{\cos(-\pi + \varphi_m - \angle[G(j\omega_{gc})])}{|G(j\omega_{gc})|} \quad (6.13)$$

$$-\frac{I}{\omega_{gc}^\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2} + D\omega_{gc}^\lambda \sin \frac{\mu\pi}{2} = \frac{\sin(-\pi + \varphi_m - \angle[G(j\omega_{gc})])}{|G(j\omega_{gc})|} \quad (6.14)$$

2. Para garantir um ganho de margem desejado  $g_m = \frac{1}{|C(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc})|}$  na frequência de cruzamento de fase:  $\omega_{pc} : \angle[C(j\omega_{pc})G(j\omega_{pc})] = -\pi$ , então:

$$C(j\omega_{pc})G(j\omega_{pc}) = -\frac{1}{g_m} \quad (6.15)$$

$$C(j\omega_{pc}) = \frac{1}{e} \frac{j^\pi}{g_m} |G(j\omega_{pc})| e^{j\angle[G(j\omega_{pc})]} \quad (6.16)$$

$$P + \frac{I}{\omega_{gc}^\lambda} \cos \frac{\lambda\pi}{2} + D\omega_{gc}^\lambda \cos \frac{\mu\pi}{2} = \frac{\cos(\pi - \angle[G(j\omega_{gc})])}{g_m |G(j\omega_{gc})|} \quad (6.17)$$

$$-\frac{I}{\omega_{gc}^\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2} + D\omega_{gc}^\lambda \sin \frac{\mu\pi}{2} = \frac{\sin(\pi - \angle[G(j\omega_{gc})])}{g_m |G(j\omega_{gc})|} \quad (6.18)$$

3. Para garantir uma fase constante, temos:

$$\frac{d\angle[C(j\omega)G(j\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_{gc}} = 0 \quad (6.19)$$

isto implica que:

$$\frac{d\angle[C(j\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_{gc}} = -\frac{d\angle[G(j\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_{gc}} \quad (6.20)$$

## 6.2.2 Aproximação de Oustaloup Recursivo

Aproximação do filtro recursivo de oustaloup para um diferenciador de ordem fracionária é amplamente usado in cálculo fracionário. O filtro generalizado pode ser designado como:

$$G_f(s) = K \prod_{k=1}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (6.21)$$

onde os polos e zeros e o ganho são calculados como:

$$\omega'_k = \omega_b \omega_u^{\frac{2k-1-\gamma}{N}}, \omega_k = \omega_b \omega_u^{\frac{2k-1+\gamma}{N}}, K = \omega_h^\gamma$$

onde  $\omega_u = \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_b}}$ . É usado o termo "generalizado" pois  $N$  pode ser tanto par quanto ímpar inteiros.

No ambiente do MATLAB, podemos escrever o seguinte algoritmo:

```
function G=ousta_fod(gam,N,wb,wh)
k=1:N; wu=sqrt(wh/wb);
wkp=wb*wu.^((2*k-1-gam)/N); wk=wb*wu.^((2*k-1+gam)/N);
G=zpk(-wkp,-wk,wh^gam); G=tf(G);
```

onde  $\gamma$  é a ordem do derivador e  $N$  é a ordem do filtro.

## 7

---

## RESULTADOS DA SINTONIA DO CONTROLADOR PID FRACIONÁRIO

**P**rimeiramente, foi-se escolhido a função de transferência, segundo o resultado mostrado no Capítulo 5, para a sintonia e cálculo do controlador  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Para os parâmetros  $[a, K, \alpha]$ , analisando todos os resultados da identificação, temos que:

$$a = [190, 410]$$

$$K = [0.4404, 0.7910]$$

$$\alpha = [0.6536, 0.7143]$$

O autor verificou que os valores que se afastaram muito da média, excluindo a faixa de 70% a 80%, eram as faixas onde ocorreu maior adversidade durante a coleta de dados naquele dia, portanto, os parâmetros saíram do padrão previsto nas primeiras coletas no intervalo de [20%, 40%]. Baseado na frequência dos dados do parâmetro  $a$  na qual há uma maior sensibilidade à distúrbios, escolheu-se os seguintes valores:

$$a = 190$$

$$K = 0.4926$$

$$\alpha = 0.6536$$

$$\theta = 1$$

o resultado também se baseia no parâmetro do erro médio quadrático, empregado no método de identificação baseado no Capítulo 3, onde se verifica que as identificações

com menor erro se aproximam dos valores citados acima. Ressaltando que não houve necessidade de se fazer um estudo analítico para verificação de faixas não lineares, pois os dados observados denunciavam os intervalos que compreendiam as não linearidades, é ele a faixa de 70% a 80%, verifica-se que neste intervalo, a variação da temperatura foge muito do intervalo considerado linear, considerando ainda a temperatura inicial dos dados observados, que oscilavam em torno de  $[18^{\circ}C, 22^{\circ}C]$ , com variação de temperatura em torno de  $[8.8^{\circ}C, 12.6^{\circ}C]$  na resposta do sistema, considerado a margem aceitável para linearidade dos sinais, ressaltando que a modelagem foi feita através de variação de temperatura por variação de potência, considerando isto, a variação de temperatura inicial ficou entre  $[-2^{\circ}, 2^{\circ}C]$ . Os dados observados no intervalo de  $[70\%, 80\%]$ , obteve-se uma variação de temperatura de  $3.14^{\circ}C$ , ou seja, muito longe do intervalo aceitável para considerações de linearidade mencionado acima. Outro fator que explicita a não-linearidade é a mudança nos parâmetros nesta faixa, com valores de  $a$  quase 10 vezes maior.

Com os valores da identificação prontas, utilizando o software MATLAB e as técnicas mencionadas do Capítulo 6, começamos a implementar o algoritmo para sintonia do controlador. Utilizando ainda o algoritmo de aproximação de Oustaloup, que aproxima um termo fracionário a um termo de ordem inteira, temos o resultado para tal sintonia. Vale ressaltar que as equações usadas foram as não lineares, representadas pelas equações (6.13), (6.14), (6.17) e (6.18) para sintonia dos parâmetros do controlador fracionário. Foi-se fixado o valor da ordem do integrador  $\lambda = 1$  e assim foram feitas as sintonias de  $P, I, D$  e  $\mu$ . O resultado da sintonia com o emprego da aproximação de Oustaloup é mostrado abaixo na equação (7.1)

$$C(s) = \frac{52.56s^2 + 9.821s + 0.3069}{s^2 + 0.2584s} \quad (7.1)$$

os valores dos parâmetros foram os seguintes  $[P, I, D, \lambda, \mu] = [33.2051, 1.1879, 1, 1.6346]$ . As margens de frequências usadas na aproximação de Oustaloup foram  $\omega_b = 1/4 * \omega_{gc}$  e  $\omega_h = 4 * \omega_{gc}$ . E o valor para a frequência de cruzamento de ganho ( $\omega_{gc}$ ) foi  $0.0268 \text{ rad/s}$ . E a margem de fase desejada  $\varphi_m = 60^{\circ}$

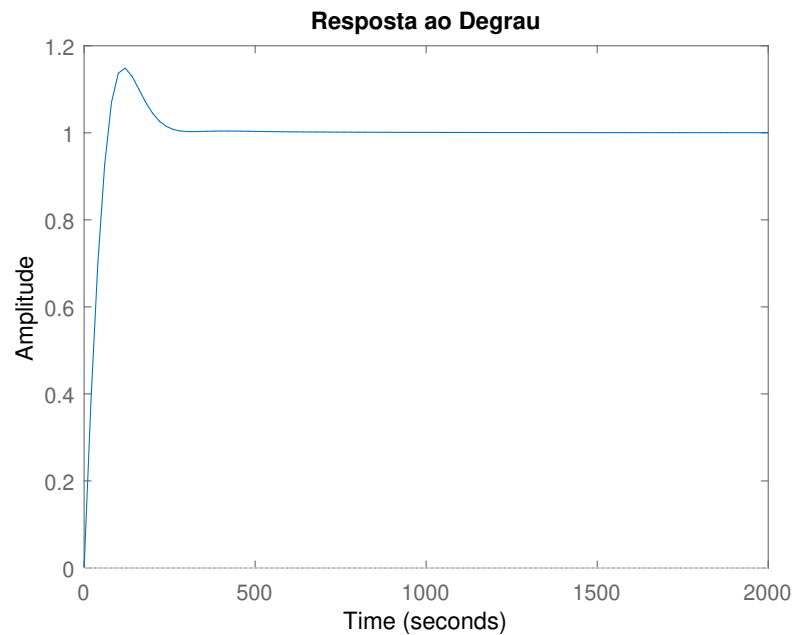


Figura 30 – Resposta do sistema ao degrau unitário com o controlador PID fracionário

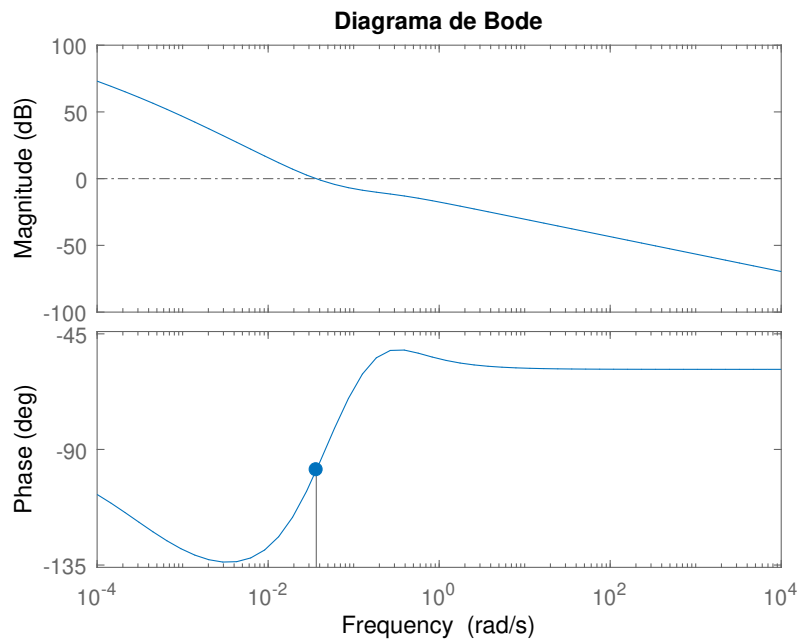


Figura 31 – Diagrama de Bode do sistema Planta-Controlador

Conforme os resultados simulados no ambiente MATLAB, foi-se testado o sistema identificado e o controlador sintonizado na planta real, com a forma discretizada do controlador a um tempo de amostragem a 5 segundos. Abaixo, é mostrado do resultado das curvas do sistema com variação do setpoint (temperatura), em um intervalo de  $[50^\circ, 70^\circ]$  com variações de  $2^\circ C$ .

Um controlador PI de ordem inteira foi sintonizado para efeito de comparação, na legenda da foto classificado como PIGP. O Controlador PI de ordem inteira é mostrado abaixo:

$$C(s) = \frac{50.974s + 2.8513}{s} \quad (7.2)$$

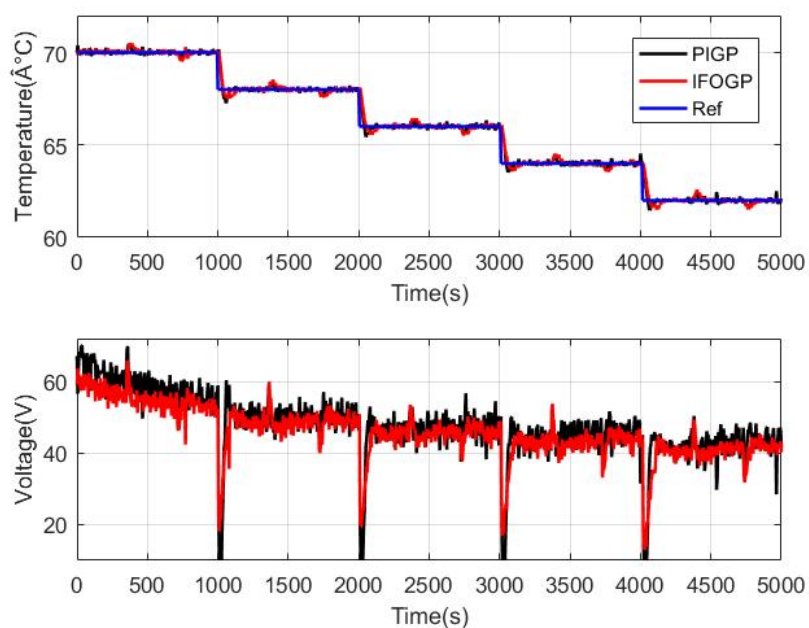


Figura 32 – Resposta do sistema a variação de setpoint e esforço de controle

A Figura 32 apresenta a curva da planta controlada pela variação do setpoint no intervalo  $T_{ref} = [70 - 68, 68 - 66, 66 - 64, 64 - 62]$ . Vê-se que o FOGP apresenta variações acima e abaixo da referência, isso acontece por causa do ruído na planta.



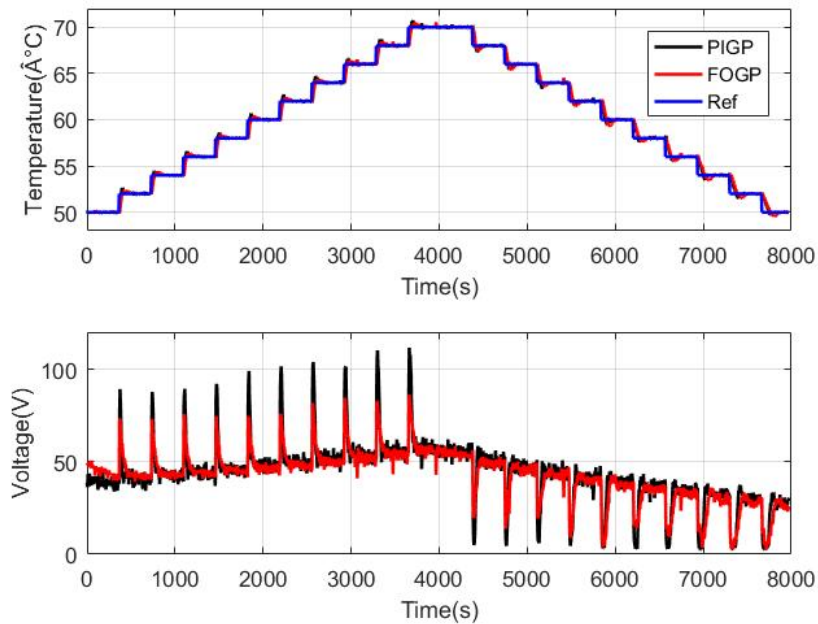


Figura 33 – Resposta do sistema a variação do setpoint e esforço de controle

Observa-se que o controlador FOGP apresentado pela linha vermelha apresentou menos esforço de controle do que o controlador PIGP, como pode ser visto. Também é mostrada a resposta da planta controlada pela variação do ponto de ajuste em todas as faixas, aumentando  $T_{ref} = [50 - 52, 52 - 54, 54 - 56, 56 - 58, 58 - 60, 60 - 62, 62 - 64, 64 - 66, 66 - 68, 68 - 70]$  e também a queda  $T_{ref} = [70 - 68, 68 - 66, 66 - 64, 64 - 62, 62 - 60, 60 - 58, 58 - 56, 56 - 54, 54 - 52, 52 - 50]$ . Em ambas as Figuras 21 e 22 o FOPG e o PIGP apresentam um bom desempenho no controle da planta térmica.

Uma análise de inserção e rejeição de distúrbio foi feita, em comparação do PIGP e FOGP, mostrados abaixo.

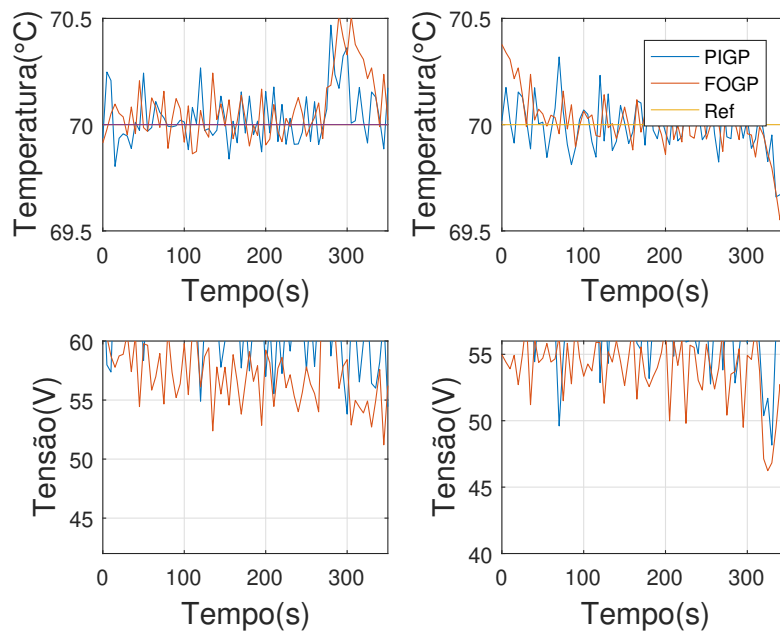


Figura 34 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios

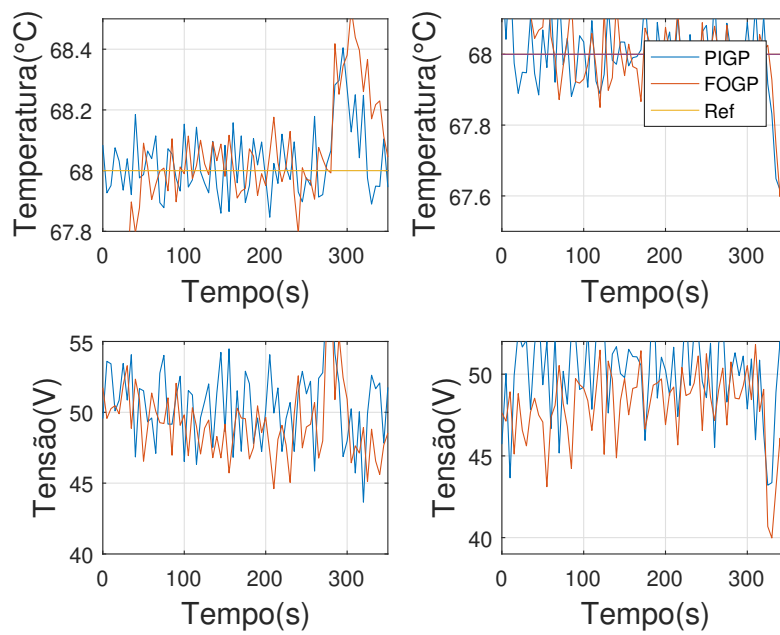


Figura 35 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios

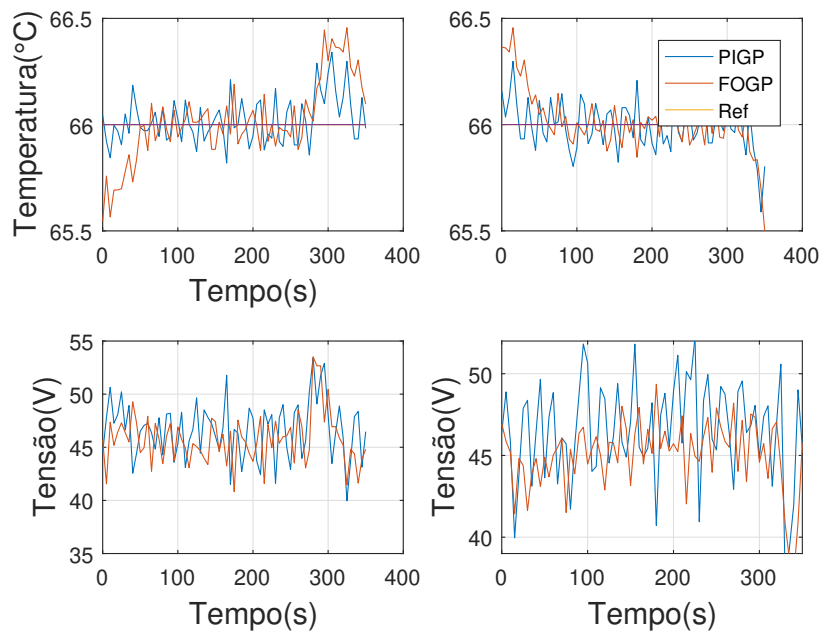


Figura 36 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios

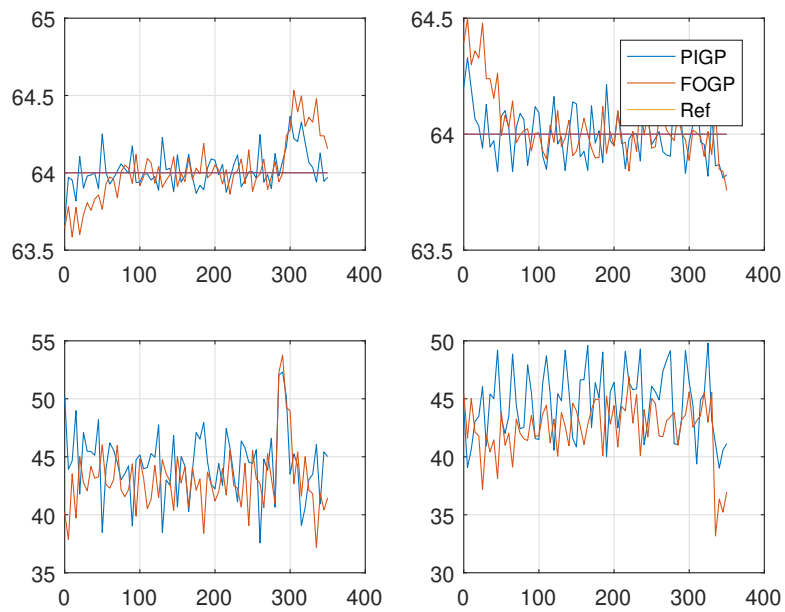


Figura 37 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios

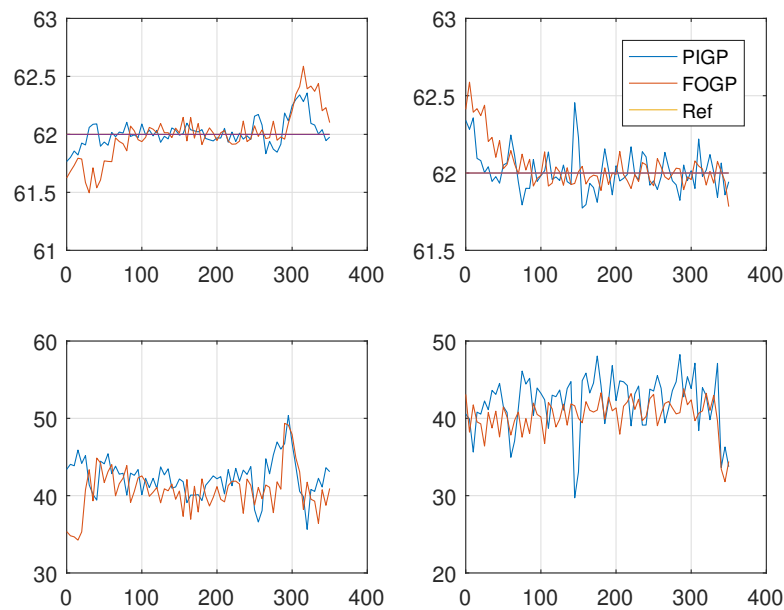


Figura 38 – Gráfico de inserção e rejeição de distúrbios

Vê-se o comportamento das respostas do FOGP e PIGP ao inserir ruídos na planta. Na maioria das situações, o FOGP apresenta um melhor comportamento em comparação com o controlador PI de ordem completa, também é observado o esforço de controle e o FOGP apresenta um desempenho superior ao PI. Os índices de desempenho Integral irão mostrar isso na próxima secção.

Abaixo, as respostas a variação do setpoint.

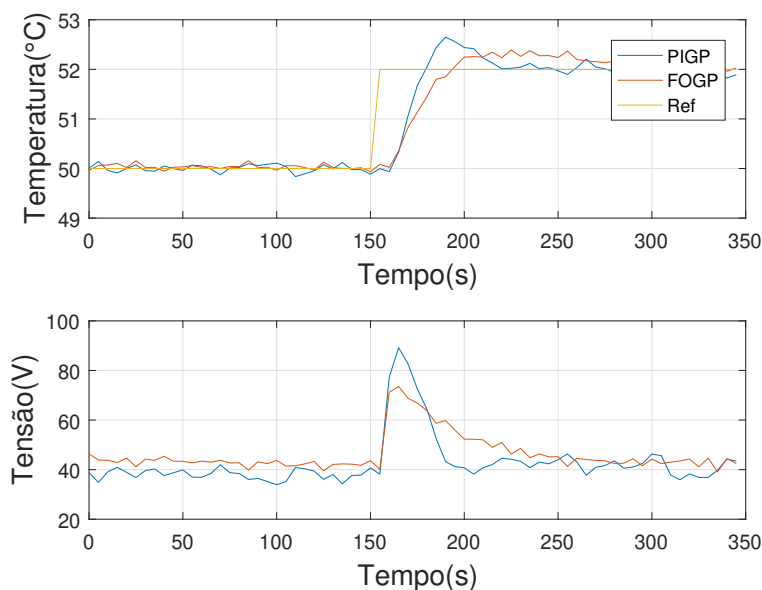


Figura 39 – Resposta ao Degrau do Sistema Identificado e com atuação do Controlador

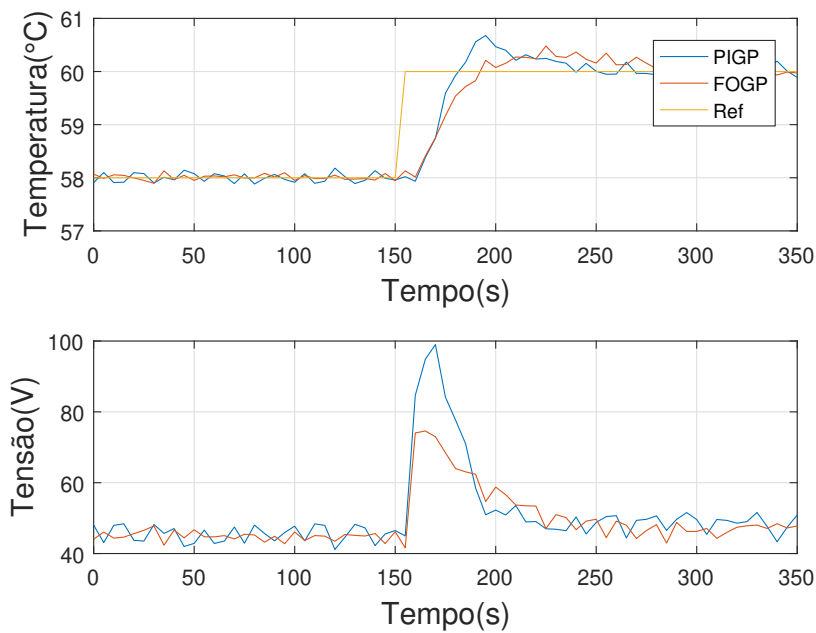


Figura 40 – Resposta ao Degrau do Sistema Identificado e com atuação do Controlador

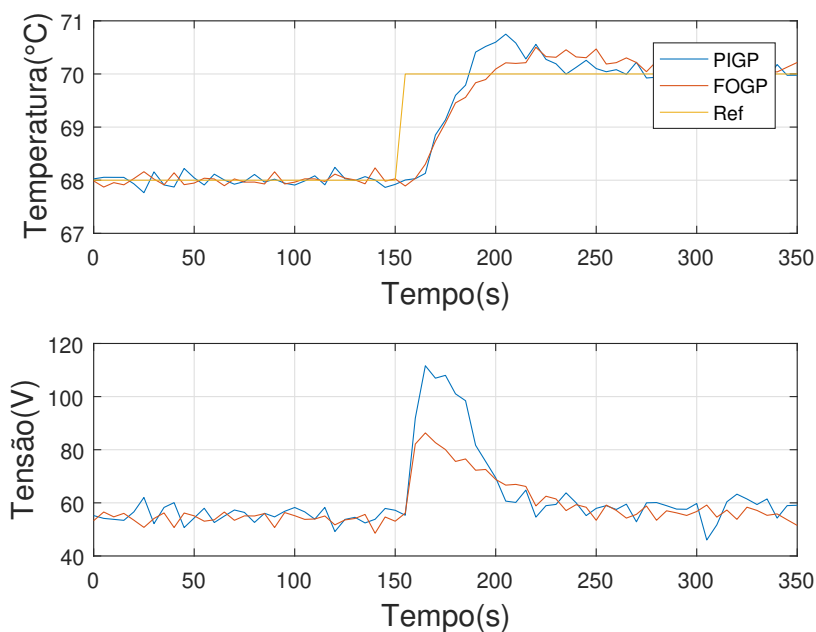


Figura 41 – Resposta ao Degrau do Sistema Identificado e com atuação do Controlador

É observada a resposta ao degrau para uma referência de variação de temperatura de  $2^{\circ}C$ . observe que os controladores atendem aos requisitos previamente estabelecidos na simulação no ambiente MATLAB, exceto para valores de sobressinal. O gráfico do esforço de controle mostra um desempenho superior do controlador FOPID,

isto será definitivo para determinar qual controlador tem o melhor desempenho para a planta térmica.

Vale salientar que, no caso do sistema térmico estudado, se trata de um sistema estável, o que não descaracteriza a necessidade de controlá-lo. Um dos maiores problemas da planta se trata de desempenho, uma vez que a planta em malha aberta tem um tempo de acomodação de mais de 7000 segundos ( $t_s > 2h$ ), ou seja, se trata de um sistema com uma resposta lenta. Uma das principais tarefas principais do controlador é reduzir o tempo de acomodação o máximo possível, com um sobressinal aceitável. Para tal, foi fixado nestes parâmetros um sobressinal máximo de 20% e tempo de acomodação de no mínimo 600 segundos ( $M_p < 20\%/t_s < 600s$ ), além de obter um erro próximo de zero. Observando a Figura 30 vemos que os requisitos de desempenho foram alcançados, com  $M_p = 16.3\%$  e com um tempo de acomodação de  $t_s = 320s$  na simulação. Analisando as Figuras 39, 40 e 41, temos que os tempos de pico e de acomodação deram exatos com a simulação, o sobressinal resultante na planta real foi maior do que visto na simulação, mas ainda satisfatório.

## 7.1 Conclusão

Os resultados da sintonia do controlador e as curvas demonstradas na secção anterior mostram que a identificação foi bem sucedida, o método proposto de Mínimos Quadrados não-Recursivo apresentado no Capítulo 3 mostrou-se bem eficaz para sistemas estáveis e no domínio do tempo. Os modelos candidatos selecionados, conforme a resposta de saída de sistemas lineares ser de propriedade exponencial a entrada ao degrau, demonstrada no Capítulo 3, levou ao modelo selecionado que foi o Modelo Fracionário a Dois Termos, todo o processo se mostrou eficaz na prática com os resultados. Vale ressaltar que a faixa de 70% a 80% se mostrou não-linear e por isso foi excluída do estudo do controlador fracionário e também da função de transferência escolhida conforme os resultados obtidos e comentados no Capítulo 6.

A função de transferência do sistema identificado junto ao controlador é apre-

sentado abaixo na equação (7.3).

$$G_{cp}(s) = \frac{0.13627s^2 + 0.025463s + 0.00079573}{s^{2.6536} + 0.0052632s^2 + 0.25838s^{1.6536} + 0.0013599s} \quad (7.3)$$

A função de transferência com os parâmetros sintonizados na identificação é mostrada abaixo.

$$G_f(s) = \frac{0.4926}{190s^{0.6536} + 1} \quad (7.4)$$

e o controlador sintonizado já com a aproximação de Oustaloup em 7.5.

$$C(s) = \frac{52.56s^2 + 9.821s + 0.3069}{s^2 + 0.2584s} \quad (7.5)$$

## 8

---

## CONCLUSÃO

**P**ara se modelar um sistema dinâmico, necessita-se saber o que devemos analisar e quais variáveis considerar sobre o sistema. Nesta dissertação, é analisado um sistema térmico, formado essencialmente por uma lâmpada ultravioleta, controlada por um DIMMER, um exaustor e um sensor de temperatura LM35. O exaustor garante que o sistema não ultrapasse o limite de segurança, pois o sistema pode alcançar temperaturas muito elevadas colocando em risco o funcionamento do sistema, sem o mesmo o sistema poderia ser instável.

No primeiro momento, houve a coleta de dados do sistema térmico, tendo como entrada a potência térmica, em Watts, e a saída a temperatura em Celsius. Não houve alguma informação auxiliar sobre a dinâmica do sistema, na qual era desconhecida. Para solucionar esta situação, o método de identificação por Mínimos Quadrados Não-Recursivo (MNQR) foi apresentada no Capítulo 3, pois os dados foram coletados no domínio do tempo e se tratava de um sistema estável. Para os modelos candidatos, houve a necessidade de se classificar o sistema segundo os dados observados, tal classificação, como comentado no Capítulo 4, depende de como é configurado e após análise dos dados observados, foi concluído que o mesmo é linear na faixa de potência de  $[50, 175]Watts$ .

Com a classificação do sistema, os modelos candidatos puderam ser escolhidos segundo a teoria dos sistemas lineares, que para um sinal ao degrau, tem resposta de natureza exponencial, e por teste motivo, pode ser aproximado pela função de Mittag-Leffler do CF e assim fazer as generalizações dos modelos a três e a dois ter-



mos, totalizando quatro modelos candidatos. Após a definição dos modelos definidos, como apresentado no Capítulo 3, foi colocado em prática, no ambiente do MATLAB, o estudo dos modelos que melhor apresenta a dinâmica e melhor ajuste da curva, como apresentado no Capítulo 5, como resultado, temos que o melhor modelo foi a de ordem fracionária de dois termos, representado pela equação 8.1.

$$G(s) = \frac{K}{as^\alpha + 1} \quad (8.1)$$

ressaltando que, em sistemas térmicos, é característico um tempo de atraso do sistema. Porém, nesta planta em particular, o atraso na resposta é desprezada pois em comparação ao tempo de acomodação, o mesmo é muito pequeno.

Analizando os resultados para o modelo fracionário a dois termos, temos que o erro se aproxima de zero nos parâmetros em que  $a = 190$ , onde o valor aparece em mais frequência no intervalo de potência de  $[50, 175]Watts$ . O intervalo de  $[175, 200]Watts$  se apresentou fora do padrão dos valores dos outros intervalos de potência, como mostra os resultados no Capítulo 5, o mesmo não é linear, em comparação com as outras curvas mostradas na coleta de dados, os parâmetros também demonstram esse resultado. O resultado dos parâmetros na qual se tem menor erro quadrático é apresentado na equação 8.2.

$$G_f(s) = \frac{0.4926}{190s^{0.6536} + 1} \quad (8.2)$$

Após o resultado da identificação, começou a sintonia dos controladores  $PI^\lambda D^\mu$ . Nesta fase do trabalho, optou-se por usar o método que (PETRAS; CHEN; VINAGRE, 2002) usou em sua tese de doutorado para sintonia de controladores fracionários de cinco parâmetros. As equações não-lineares citadas no Capítulo 6 foram sintonizadas com a ajuda da função *fminsearch* do MATLAB, com o parâmetro  $\lambda = 1$ . O resultado da sintonia do controlador, já com a aproximação de Oustaloup é apresentada na equação abaixo:

$$C(s) = \frac{52.56s^2 + 9.821s + 0.3069}{s^2 + 0.2584s} \quad (8.3)$$

e por fim, o resultado da função de transferência do sistema com o controlador fracionário aproximado pelo método recursivo de Oustaloup com a planta identificada é mostrada na equação 8.4

$$G_{cp}(s) = \frac{0.13627s^2 + 0.025463s + 0.00079573}{s^{2.6536} + 0.0052632s^2 + 0.25838s^{1.6536} + 0.0013599s} \quad (8.4)$$

vale ressaltar que o método de (PETRAS; CHEN; VINAGRE, 2002) de sintonia é baseada no método da resposta da frequência e que o método não tem a necessidade de se modelar o sistema em malha fechada.

Outro controlador, também sintonizado pelo método da resposta em frequência, de ordem inteira Proporcional-Integrativo foi sintonizado para efeito de comparação, como mostra as Figuras 39 até 41 com a legenda PIGP.

Na literatura, há os índices integrais de desempenho que medem quão eficiente é o controlador levando em conta a integral do erro de sinal, setpoint e os esforços de controle. Os índices usados neste trabalho são: IAE, ISE e ITAE. Os mesmos são calculados pela seguinte fórmula

$$IAE : \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (8.5)$$

$$ISE : \int_0^{\infty} |e(t)|^2 dt \quad (8.6)$$

$$ITAE : \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (8.7)$$

abaixo são mostrados os resultados do cálculo dos índices conforme as respostas das Figuras 39, 40 e 41.

Tabela 11 – RESULTADO DO CÁLCULO DOS ÍNDICES INTEGRAL DE DESEMPENHO

-	IAE	ISE	ITAE
PI	12.1324	13.7034	128.5858
-	12.5763	14.2291	127.5029
-	15.3813	16.3869	175.6648
$PI^{\mu}D^{\lambda}$	13.8586	14.0938	158.0436
-	13.5806	13.7808	149.1171
-	14.7981	15.7601	171.6414

Foram feitas o cálculo dos esforços de controle, considerando o sinal de referência a média dos valores antes do instante da ação do controlador. O estudo é mostrado na Tabela 12.

Tabela 12 – RESULTADO DO ESTUDO DOS ESFORÇOS DE CONTROLE

-	IAE	ISE	ITAE
PI	291.6526	7785.3430	3526.0630
-	381.5978	11073.0800	4738.7290
-	408.7626	13831.8100	4616.9740
$PI^\mu D^\lambda$	356.4483	6319.3790	4772.4730
-	220.8618	4385.4490	7355.4090
-	267.0154	4102.8240	3269.9260

Comparando a Tabela 11 entre os valores do PI e do  $PI^\mu D^\lambda$  temos que o PI não é superior em todos os índices, sendo o  $PI^\mu D^\lambda$  superior na curva da Figura 41. Comparando o estudo dos esforços de controle, vemos que o  $PI^\mu D^\lambda$  é muito superior, ou seja, há menos esforço de controle em comparação ao PI, logo o  $PI^\mu D^\lambda$  é mais eficiente. Entre outras ressalvas, não podemos ignorar o sobressinal que o  $PI^\mu D^\lambda$  tem em comparação ao PI, pois se vê nas Figuras 39, 40 e 41, que o  $PI^\mu D^\lambda$  atende ao valor do sobressinal de projeto. Sabe-se que na prática, o valor do sobressinal pode diferir do sobressinal de projeto na qual foi fixado em 20%. Na Figura 39 o sobressinal com o controle PI foi de 65%, enquanto que com o controlador  $PI^\mu D^\lambda$  o sobressinal foi de 34%. O controlador PI já vinha apresentando um sobressinal alto nas simulações no MATLAB, diferente do  $PI^\mu D^\lambda$ .

Analisando os estudos, levando em conta o desempenho dos índices integrais e do esforço de controle, conclui-se que o controlador  $PI^\mu D^\lambda$  tem um melhor desempenho diante do controlador PI.

Ao final, com os resultados apresentados no Capítulo 7, mostra que os parâmetros escolhidos no modelo, segundo as regras do método escolhido, foi eficaz e o objetivo citado no Capítulo 1 foram alcançados, gerais e específicos.

A identificação fracionária do sistema em particular pelo método de Mínimos Quadrados Não-Recursivo mostrou-se eficaz na sintonia de sistemas estáveis no domínio do tempo, bem como a escolha dos parâmetros do sistema identificado, mostrando que um sistema fracionário, por deter de mais graus de liberdade no ajuste de curva do

que a de ordem inteira, tem melhor exatidão na representação do sistema apresentado. A sintonia de um controlador fracionário PID se torna mais eficaz do que a PI de ordem inteira, de acordo com as Figuras de valor apresentado no Capítulo 7 e os estudos apresentados neste capítulo.

---

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas: Teoria e Aplicação*. 3. ed. [S.l.]: UFMG, 2007. ISBN 9788542300796. 18, 19, 35, 44
- ASTROM, K.; WITTENMARK, B. *Computer-Controlled Systems - Theory and Design*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1997. (Information and System Sciences Series). 40, 44
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. *Cálculo Fracionário*. 1. ed. [S.l.]: Livraria da Física, 2015. 28, 30, 31, 32
- CAMPOS, F. *Análise do controlador PID de ordem fracionária aplicada à simulação de sistemas reais*. [S.l.]: Universidade Federal do Ceará, 2019. 21
- CAPONETTO, R. et al. Fractional-order identification and control of heating processes with non-continuous materials. *Entropy*, 2016. 24
- COELHO, A. A. R.; COELHO, L. d. S. *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares*. [S.l.]: Editora da UFSC, 2004. 35
- DAS, S. *Functional fractional calculus for system identification and controls*. [S.l.]: Springer, 2008. 33
- GHANBARI, M.; HAERI, M. Parametric identification of fractional-order systems using a fractional legendre basis. *Journal of System and Control Engineering*, 2010. 24
- HARTLEY T. T. LORENZO, C. F. Fractional-order system identification based on continuous order-distributions. *Signal Processing*, 2003. ISSN 2287-2300. 24
- HENRION, D. *Robust stability analysis: Interval uncertainty, Graduate course on polynomial methods for robust control*. [S.l.: s.n.], 2001. <<http://www.laas.fr/~henrion/courses/>>. 23
- JACYNTHO, L. A. *Identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando como entrada um degrau*. [S.l.]: Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", 2015. 21
- KEYSER, R. D.; MURESAN, C. I.; IONESCU, C. M. Autotuning of a robust fractional order pid controller. *9TH INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL (IFAC) SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN (ROCOND)*, 2018. ISSN 2405-8963. 21

- LI, W.; LEE, J. H. *Frequency-Domain Closed-Loop Identification of Multivariable Systems for Feedback Control*. [S.l.]: AiChe, 1996. 24
- LI, Z. et al. A review and evaluation of numerical tools for fractional calculus and fractional order controls. *International Journal of Control*, 2017. ISSN 1165-1181. 24
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for User*. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1999. ISBN 9780136566953,0136566952. 19, 43
- MATIGNON, D. Stability result on fractional differential equations with applications to control processing. *MACS - SMC*, 1996. 23
- MATIGNON, D. *Stability properties for generalizated fractional differential systems, em: Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*. [S.l.]: SMAI, 1998. 37
- MATUŠU, R.; SENOL, B.; PEKAR, L. Robust stability of fractional order polynomials with complicated uncertainty structure. *PLoS ONE*, 2017. 23
- MERRIKH-BAYAT, F.; KARIMI-GHARTEMANI, M. *Some Properties of Three-Term Fractional Order System*. [S.l.]: Fractional Calculus and Applied Analysis: An international Journal for Theory and Applications, 2008. v. 3. ISSN 1311-0454. 10, 36, 38
- MONJE, C. A. et al. *Fractional-order Systems and Control: Fundamentals and Applications*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag London, 2010. (Advances in Industrial Control). ISBN 1849963347,9781849963343, 9781849963350. 21, 31, 36
- MURESAN, C. et al. Design and analysis of a multivariable fractional order controller for a non-minimum phase system. *Journal of Vibration and Control*, 2015. 23
- NOVICKI, R. E. et al. *Open and closed loop identification and control of a thermal system*. [S.l.: s.n.], 2019. ISSN 2035-1755. 68
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 5. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2010. 55
- OLDHAM, K.; SPAINER, J. *The fractional calculus*. 1. ed. [S.l.]: Academic Press, 1974. (Mathematics in science and engineering III). ISBN 9780125255509, 9780486450018, 0125255500, 0486450015. 20, 21
- PADUA, F.; VISIOLI, A. *Advances In Robust Fractional Control*. [S.l.]: Springer, 2015. 74
- PETRAS, I.; CHEN, Y.; VINAGRE, B. M. A robust stability test procedure for a class of uncertain lti fractional order systems. *International Carpathian Control Conference*, 2002. 23, 95, 96
- PODLUBNY, I.; KENNETH, V. T. *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivates, fractional diferential equations, to methods of their solution and some of their applications*. 1. ed. [S.l.]: Academic Press, 1998. 28, 36
- QUADROS, T. *Identificação e controle de sistema térmico multivariável*. [S.l.]: Universidade Federal do Paraná, 2019. 21
- ROQUE, A. A. G. S. *Aplicação das FPAA na realização de sistemas de ordem fracionária*. [S.l.]: Instituto superior de Engenharia do Porto, 2015. 11, 78

- ROY, P.; ROY, B. K. *Dual mode adaptive fractional order PI controller with feedforward controller based on variable parameter model for quadruple tank process*. [S.l.]: Elsevier, 2016. 23
- SILVA, D. S. *Identificação de funções de transferência utilizando como entrada um degrau*. [S.l.: s.n.], 2008. <[http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/87217/silva\\$\\_ds\\$\\_\\$me\\$\\_\\$ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/87217/silva$_ds$_$me$_$ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y)>. 21
- SUGIE, T.; INOUE, K.; MARUTA, I. On noise tolerant closed loop identification of mimo systems. *56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan*, 2017. 22
- VALÉRIO, D.; COSTA, J. da. *An Introduction to Fractional Control*. [S.l.]: Institution of Engineering and Technology, 2013. (Control, Robotics and Sensors Series). ISBN 9781849195454. 11, 20, 75, 76, 77, 78, 79, 80
- VERHAEGEN, M. *Application of a subspace model identification technique to identify LTI systems operating in closed-loop*. [S.l.: s.n.], 1993. 22
- VICTOR, S. et al. *Parameter and differentiation order estimation in fractional models*. [S.l.]: Elsevier Ltd., 2013. 21
- YUSOF, N. M. et al. Identification of electro-hydraulic actuator system using commensurate fractiona-order. *Conference on System, Process and Control*, 2015. 25
- ZHOU, S.; CAO, J.; CHEN, Y. Genetic algorithm-based identification of fractional-order systems. *Journal Entropy*, 2013. ISSN 1099-4300. 21
- ZIUBINSK, P.; SIEROCIUK, D. Fractional order noise identification with application to temperature sensor data. 2015. 22