Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Estimativas para o primeiro autovalor positivo de um operador elíptico de segunda ordem na forma divergente e alguns teoremas de comparação

Andrea Martins da Mota

Manaus-AM
Dezembro/2020

Estimativas para o primeiro autovalor positivo de um operador elíptico de segunda ordem na forma divergente e alguns teoremas de comparação

por
Andrea Martins da Mota

sob orientação da
Professora Dra. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Manaus-AM
Dezembro/2020

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M917e

Mota, Andrea Martins da

Estimativas para o primeiro autovalor positivo de um operador elíptico de segunda ordem na forma divergente e alguns teoremas de comparação / Andrea Martins da Mota . 2020

41 f.: 31 cm.

Orientadora: Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Operador diferencial. 2. Autovalores. 3. Fórmula de Reilly. 4. Curvatura média. 5. Teorema de comparação. I. Miranda, Juliana Ferreira Ribeiro de. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática

Andrea Martins da Mota

Estimativas para o primeiro autovalor positivo de um operador elíptico de segunda ordem na forma divergente e alguns teoremas de comparação

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria.

Manaus, 11 de Dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda (Orientadora)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (membro)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (membro)
Universidade Federal do ABC - UFABC

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (membro externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Marco Magliaro (membro externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Documento assinado eletronicamente por **Marco Magliaro**, **Usuário Externo**, em 15/12/2020, às 09:53, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda**, **Professor do Magistério Superior**, em 15/12/2020, às 14:27, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Mendonça Marrocos**, **Usuário Externo**, em 15/12/2020, às 14:33, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Abdênago Alves de Barros**, **Usuário Externo**, em 15/12/2020, às 19:06, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Nazareno Vieira Gomes**, **Usuário Externo**, em 23/12/2020, às 16:49, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0393197** e o código CRC **958F7426**.

Av. General Rodrigo Octávio, 6200 - Bairro Coroado 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho, Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181 / Ramal 2405
CEP 69080-900, Manaus/AM, pos-matematica@ufam.edu.br

Referência: Processo nº 23105.043003/2020-17 SEI nº 0393197

Agradecimentos

Aos meus pais e minha irmã por me apoiarem, por suas orações que me sustentaram e por me mostrarem diariamente o quanto Deus me ama.

À minha amiga irmã Soraya Bianca pelo carinho, incentivo e grandes alegrias.

A todos meus colegas e amigos de doutorado. Em especial ao Abraão, Adrian, Clebes, Cristiano, João Filipe e Júlio César pela grande generosidade e parceria, principalmente nos estudos. Aprendi muito com vocês.

À minha orientadora, Profa. Dra. Juliana Miranda, profissional tão determinada, por suas sugestões e correções, por ter acreditado neste trabalho e por todo encorajamento.

Ao Prof. Dr. Marcus Marrocos por suas importantes observações e sugestões.

Ao Prof. Dr. José Nazareno por ter sido tão prestativo todas as vezes que precisei, pelas palavras sempre oportunas de incentivo e pelos valiosos ensinamentos que não foram poucos e me permitiram concluir esta tese. O trabalho de escrever esta tese - do jeito que consome tempo e eventualmente erros acabam surgindo - seria impossível para mim sem a sua ajuda com correções e melhorias. Agradeço a você por ter sido presente comigo até aqui. Tenho certeza que por quem o conhece sua ausência é sempre sentida. Você é gigante!

Aos membros da banca por suas sugestões para versão final desta tese.

À CAPES e à FAPEAM pelo apoio financeiro. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A ti Jesus por sua fidelidade não depender da minha e por sua companhia constante. Sem você eu não teria dado um passo. Sei que meu futuro está seguro em ti.

Resumo

Nesta tese, nós obtemos estimativas inferiores para o primeiro autovalor positivo de um operador diferencial elíptico de segunda ordem na forma divergente em variedades Riemannianas com peso, sendo elas fechadas ou compactas com bordo. Este operador generaliza operadores tais como o operador laplaciano, o laplaciano deformado e o quadrado de Cheng-Yau. As estimativas em variedades fechadas decorrem de uma fórmula tipo Bochner já conhecida para este operador, enquanto que as estimativas em variedades compactas com bordo são decorrentes de uma fórmula tipo Reilly obtida nesta tese. Nós também obtemos resultados de comparação para a curvatura média de esferas geodésicas, generalizando o teorema local de comparação do laplaciano.

Palavras-chave: Operador diferencial; Autovalores; Fórmula de Reilly; Curvatura média; Teorema de comparação.

Abstract

In this thesis, we obtain lower bound estimates for the first eigenvalue of a second-order elliptic differential operator in divergence form on closed or compact with boundary weighted Riemannian manifolds. This operator generalizes operators such as the laplacian, the drifted laplacian and the square of Cheng-Yau. For this, we use a known Bochner type formula for this operator, and a Reilly type formula obtained in this thesis. We also derive comparison results for the mean curvature of geodesic spheres, generalizing the local laplacian comparison theorem.

Keywords: Differential operator; Eigenvalues; Reilly formula; Mean curvature; Comparison theorem.

Conteúdo

Introdução

Esta tese é constituída de três partes. Na primeira delas, o Capítulo 1, estabeleceremos notações, exibiremos algumas propriedades necessárias para os teoremas principais que serão abordados nos capítulos seguintes e motivaremos a definição de um operador diferencial elíptico de segunda ordem na forma divergente, o (η, T)-divergente, principal objeto de estudo desta tese. No Capítulo 2 trataremos de estimativas envolvendo o primeiro autovalor positivo para este operador. Na última parte, Capítulo 3, trataremos de alguns resultados de comparação.

As relações entre o espectro do operador laplaciano Δ e algumas quantidades geométricas têm sido alvo de interesse contínuo de diversos trabalhos. Uma delas foi dada por Lichnerowicz [7] o qual mostrou que em uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle)$ n-dimensional compacta, conexa, orientada e sem bordo com curvatura de Ricci satisfazendo $Ric(\cdot\,,\cdot\,) \geq (n-1)\langle \cdot\,,\cdot \rangle$, o primeiro autovalor positivo λ_1^{Δ} do laplaciano satisfaz $\lambda_1^{\Delta} \geq n$, resultado que só foi possível através de uma fórmula introduzida por Bochner [32]. Posteriormente, Obata [27] provou que a igualdade é atingida se, e somente se, a variedade Riemanniana é isométrica a esfera unitária redonda. Pouco depois, em 1977, Reilly [30] obteve uma versão integral da fórmula de Bochner para variedades Riemannianas compactas com bordo, chamada de fórmula de Reilly, e a utilizou para conseguir diversos resultados, sendo que um dos mais relevantes é uma generalização dos teoremas de Lichnerowicz e Obata para o primeiro autovalor positivo do laplaciano com a condição de bordo de Dirichlet. Mais tarde, Escobar [18] utilizando a fórmula de Reilly deu uma estimativa sharp para o primeiro autovalor positivo do laplaciano definido em uma variedade Riemanniana compacta e com condição de bordo de Neumann. Outras aplicações da fórmula de Reilly podem ser encontradas em [1, 8, 17, 34].

Com o desenvolvimento dos estudos de variedades Riemannianas com peso também surgiu o interesse em pesquisar o espectro do laplaciano deformado $\Delta_\eta = \Delta - \langle \nabla\eta, \nabla \rangle$, onde ∇ denota o gradiente calculado na métrica de M e η uma função suave em M, e saber sob que condições também valeriam estimativas como as encontradas para o laplaciano. Uma variedade Riemanniana com peso é uma tripla $(M, \langle , \rangle, dm = e^{-\eta}dM)$, onde $(M, \langle , \rangle)$ é uma variedade Riemanniana, η é uma função suave em M chamada função peso (ou função densidade) e dM é a forma volume de M induzida pela métrica $\langle , \rangle$. Nessas variedades, existe uma extensão natural para a curvatura de Ricci conhecida como tensor de Bakry-Émery-Ricci e definida por $Ric_\eta := Ric + \nabla^2\eta$, onde ∇^2 denota o hessiano calculado na métrica de M. Este tensor foi introduzido por Lichnerowicz [6] e por Bakry e Émery independentemente em [10]. Motivado por esses estudos, Ma [24] obteve uma estimativa para o primeiro autovalor positivo $\lambda_1^{\Delta_\eta}$ de Δ_η em variedades Riemannianas com peso compactas sem bordo, a saber

$$\lambda_1^{\Delta_\eta} \geq \frac{n(z+1)c}{n(z+1)-1}, \tag{1}$$

para certos números reais z e c positivos e n a dimensão da variedade. Para a sua obtenção foi usada a fórmula de Bochner para o η-laplaciano (acima indicado como laplaciano deformado)

$$\frac{1}{2}\Delta_\eta|\nabla f|^2 = \langle \nabla(\Delta_\eta f), \nabla f\rangle + |\nabla^2 f|^2 + Ric_\eta(\nabla f, \nabla f), \quad f \in C^\infty(M), \tag{2}$$

a qual é uma extensão natural da fórmula de Bochner clássica, aplicada a autofunção associada ao primeiro autovalor positivo. Em seguida, Ma e Du [25] obtiveram uma extensão da fórmula de Reilly para o operador η-laplaciano, a saber

$$\begin{aligned}\int_M ((\widetilde{\Delta}_\eta f)^2 - |\widetilde{\nabla}^2 f|^2)\, dm = \int_M \widetilde{Ric}_\eta(\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f)\, dm + \int_{\partial M} (H f_\nu - \langle \widetilde{\nabla}\eta, \widetilde{\nabla} f\rangle + \Delta f) f_\nu \, d\mu \\ + \int_{\partial M} (II(\nabla f, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla f_\nu\rangle)\, d\mu, \end{aligned} \tag{3}$$

onde o bordo ∂M é a variedade com métrica e orientação induzidas pela aplicação inclusão $\iota : \partial M \hookrightarrow M$, ν é o campo normal unitário exterior a M ao longo de ∂M, α é a segunda forma fundamental de ∂M e $H := tr(A)$, em que A é o operador forma de ∂M com respeito a ν, dado por $A(\cdot) = \widetilde{\nabla}_{(\cdot)}\nu$. Objetos geométricos com $\sim$ se referem a M, ao passo que aqueles sem $\sim$ se referem ao bordo ∂M. Sua demonstração é uma consequência imediata da integração sobre M da fórmula de Bochner (2) e do teorema da divergência.

Como aplicação dessa nova fórmula, eles obtiveram a mesma limitação inferior vista em (1) para o primeiro autovalor positivo de Δ_η em variedades Riemannianas compactas com bordo nas condições de bordo de Dirichlet e de Neumann. Outras estimativas tipo Lichnerowicz para o η-laplaciano foram obtidas por Setti [5].

As estimativas de Ma e Du em uma variedade Riemanniana compacta com peso $(M, \langle,\rangle, dm = e^{-\eta}dM)$ foram estendidas neste trabalho para um operador diferencial elíptico na forma divergente que generaliza os operadores laplaciano e η-laplaciano, denominado (η, T)-divergente e definido como sendo

$$\mathcal{L}f := div_\eta(T(\nabla f)) = div(T(\nabla f)) - \langle \nabla\eta, T(\nabla f)\rangle,$$

em que $f \in C^\infty(M)$ e T é um $(1,1)$-tensor em M simétrico e positivo definido. Outros resultados relacionados a este operador podem ser encontrados em [4, 9, 21, 22, 23].

A principal ferramenta para obtenção das estimativas inferiores para o primeiro autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$ em variedades Riemannianas compactas é uma fórmula tipo Bochner provada por Gomes e Miranda [21] para o operador $\mathcal{L}$ e que é dada por

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\mathcal{L}f), \nabla f\rangle + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T\rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T\rangle,$$

onde $R_{\eta,T} := R_T - \nabla(div_\eta T)^\sharp$ e $R_T(X,Y) := tr(T \circ (Z \mapsto R(X,Z)Y))$ são ambas extensões para a curvatura de Ricci que surgem naturalmente na prova desta fórmula. Aqui $R(X,Z)Y$ denota o tensor curvatura de Riemann da métrica $\langle,\rangle$.

Como aplicações para fórmula tipo Bochner para o operador $\mathcal{L}$ obtivemos estimativas para o primeiro autovalor positivo deste operador definido em uma variedade Riemanniana com peso fechada. Note que em variedades Riemannianas compactas temos $\epsilon \leq \langle T(X), X\rangle \leq \delta$, onde $\epsilon = \min_{|X|=1}\langle T(X), X\rangle$ e $\delta = \max_{|X|=1}\langle T(X), X\rangle$, para todo X em $\mathfrak{X}(M)$. Os resultados alcançados foram:

Teorema 1. *Seja T um $(1,1)$-tensor simétrico, paralelo e positivo definido em uma variedade Riemanniana fechada e orientada $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, dm = e^{-\eta} dM)$. Assuma que*

$$R_{\eta,T} \geq \left(\frac{|T(\nabla \eta)|^2}{z\, tr(T)} + c \right) g,$$

para certos números reais z e c positivos, então

$$\lambda \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon},$$

onde λ é o primeiro autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$.

Teorema 2. *Seja T um $(1,1)$-tensor de Codazzi não-paralelo, simétrico, positivo definido e livre de divergência em uma variedade Riemanniana fechada e orientada $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, dm = e^{-\eta} dM)$. Se*

$$R_{\eta,T}(X,X) + (Ric_\eta \circ T)(X,X) \geq 2 \left(\frac{|T(\nabla \eta)|^2}{z\, tr(T)} + c \right) \langle X, X \rangle,$$

para certos números reais z e c positivos, então

$$\lambda \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon},$$

onde λ é o primeiro autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$.

Além disso, para uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle, dm = e^{-\eta} dM)$ compacta com bordo, foi necessário trabalharmos com uma generalização da curvatura média, H_T, que surge naturalmente, para estendermos a fórmula de Reilly para $\mathcal{L}$.

Teorema 3 (Fórmula tipo Reilly). *Se f é uma função suave em M, então*

$$\begin{aligned}
&\int_M \left((\widetilde{\mathcal{L}} f) \widetilde{\Delta}_\eta f - \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f) - \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}^2 f \circ T \rangle + \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla} f} T \rangle \right) dm = \\
&\int_{\partial M} \left(\Delta_T(f) + \langle \nabla f_\nu, T(\nu) \rangle + f_\nu H_T + \langle \nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu) \rangle \right) f_\nu \, d\mu \\
&+ \int_{\partial M} \left(\langle \nabla f, \widetilde{div T} \rangle + f_\nu \langle \nu, \widetilde{div T} \rangle - \langle \widetilde{\nabla} \eta, T(\nabla f) \rangle - f_\nu \langle \widetilde{\nabla} \eta, T(\nu) \rangle \right) f_\nu \, d\mu \\
&+ \int_{\partial M} \left(II(\nabla f, (T(\nabla f))^\top) + \langle \nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu) \rangle - \nabla f(f_{\nu_T}) \right) d\mu,
\end{aligned}$$

onde $f_\nu = \langle \widetilde{\nabla} f, \nu \rangle$, $f_{\nu_T} = \dfrac{\partial f}{\partial \nu_T} = \langle T(\widetilde{\nabla} f), \nu \rangle$ e $(\ )^\top$ denota a projeção tangencial $(\ )^\top : TM \to T\partial M$.

Como aplicação da fórmula de Reilly para $\mathcal{L}$ conseguimos obter estimativas em uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle, dm = e^{-\eta} dM)$ compacta com bordo nas condições de bordo de Dirichlet (2.3) e de Neumann (2.5), que estendem as obtidas por Ma e Du. Assim como no caso da fórmula de Reilly, foi necessário trabalharmos com uma generalização da curvatura média com peso introduzida por Gromov [26]. Restringindo uma função definida na variedade M ao seu bordo obtemos uma relação (2.41) que motiva a definição de uma curvatura média com peso generalizada $H_{\eta,T}$. Assim, finalizamos o Capítulo 2 com o teorema a seguir

Teorema 4. *Sejam $(M^{n+1}, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, dm = e^{-\eta} dM)$ uma variedade Riemanniana compacta, orientada e com bordo suave, e T um $(1,1)$-tensor em M, simétrico, paralelo e positivo definido tal que o normal unitário exterior ν seja um autovetor de T. Assuma que*

$$\widetilde{R}_{\eta,T} \geq \left(\frac{|T(\widetilde{\nabla}\eta)|^2}{z\, tr(T)} + c \right) g,$$

para certos números reais z e c positivos. Considere o seguinte problema de autovalores $-\widetilde{\mathcal{L}}u = \lambda u$.

(1) *Com a condição sobre o bordo de Dirichlet (2.3), se a curvatura média com peso generalizada, $H_{\eta,T}$, de ∂M é não-negativa, então*

$$\lambda_D \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon},$$

onde λ_D é o primeiro autovalor não-nulo do Problema de Dirichlet para o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$.

(2) *Com a condição sobre o bordo de Neumann (2.5) ou (2.6), se o bordo ∂M é convexo, isto é, a segunda forma fundamental é não negativa, então*

$$\lambda_N \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon},$$

onde λ_N é o primeiro autovalor não-nulo do Problema de Neumann para o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$.

O bom entendimento dos entes geométricos $R_{\eta,T}$ e $H_{\eta,T}$ citados anteriormente nos levou a buscar por generalizações de teoremas de comparação da curvatura média de esferas geodésicas. Para isso, uma boa direção a ser seguida é o trabalho de Wei e Wylie [14] que generaliza o teorema local de comparação do laplaciano. Lembremos que o teorema de comparação do laplaciano diz que em uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle)$ completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante $(n-1)c$, o laplaciano da função distância a partir de um ponto fixado em M é limitado superiormente pelo laplaciano da função distância a partir de um ponto fixado em uma forma espacial de curvatura seccional igual a c. Como localmente o laplaciano da função distância em M pode ser interpretado como a curvatura média de uma esfera geodésica centrada neste ponto fixado em M, este teorema também pode ser chamado de teorema de comparação da curvatura média. No Capítulo 3 generalizamos alguns resultados obtidos em [14] que tratam de comparação de curvaturas médias de esferas geódesicas.

Teorema 5. *Sejam $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional orientada e completa, $\eta \in C^\infty(M)$ e T um $(1,1)$-tensor em M livre de divergência, simétrico, positivo definido e radialmente paralelo tal que ∂r é um autovetor de T e $\epsilon \leq \langle T(X(t)), X(t) \rangle \leq \delta$, para todo campo de vetores unitários $X(t)$ ao longo de um segmento geodésico minimizante $\gamma(t)$ partindo de p com $\gamma'(t) = \partial r(\gamma(t))$. Se*

$$R_{\eta,T}(\partial r, \partial r) \geq \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

então dado um segmento geodésico minimizante e $r_0 \geq 0$, temos

$$H_{\eta,T}(r) - H_{\eta,T}(r_0) \leq -\lambda(r - r_0), \quad para \quad r \geq r_0.$$

A igualdade ocorre para algum $r > r_0$ se, e somente se, todas as curvaturas seccionais radiais são zero, $\nabla^2 r = 0$ e $\langle \nabla_{\partial r} T(\nabla \eta), \partial r \rangle = \lambda$, ao longo da geodésica de r_0 a r.

Teorema 6. *Sejam $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional orientada e completa, $\eta \in C^\infty(M)$ e T um $(1,1)$-tensor em M livre de divergência, simétrico, positivo definido e radialmente paralelo tal que ∂r é um autovetor de T e $\epsilon \leq \langle T(X(t)), X(t)\rangle \leq \delta$, para todo campo de vetores unitários $X(t)$ ao longo de um segmento geodésico minimizante $\gamma(t)$ partindo de p com $\gamma'(t) = \partial r(\gamma(t))$. Assuma que*

$$R_{\eta,T}(\partial r, \partial r) \geq (n-1)c\delta, \quad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

ao longo de um segmento geodésico minimizante $\gamma(t)$ partindo de um ponto fixado $p \in M$. Se $\partial t(\eta) \geq -a$, para alguma constante real $a \geq 0$ (quando $c > 0$ assuma que $r \leq \pi/2\sqrt{c}$), então

$$H_{\eta,T}(r) \leq \delta(H_c(r) + a),$$

onde H_c é a curvatura média da esfera geodésica numa forma espacial de curvatura seccional igual a c. A igualdade ocorre se, e somente se, todas as curvaturas seccionais radiais são iguais a c e $\partial t(\eta) = -a$.

Capítulo 1

Motivando a definição do operador $\mathcal{L}_{\eta,T}$

Neste capítulo fixaremos as notações que serão usadas ao longo do texto e faremos uma breve revisão de conceitos e resultados que serão utilizados posteriormente. Começaremos relembrando alguns fatos sobre tensores para que possamos motivar a definição do operador em que todo nosso estudo será baseado, o $\mathcal{L}_{\eta,T}$, ver (1.11).

Considerando $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional, indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores tangentes a M de classe C^∞.

Definição 1.1. *Um $(1,r)$-tensor em uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$ é uma aplicação*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r-fatores)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

multilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Um $(0,r)$-tensor é definido de modo análogo, porém o contradomínio é $C^\infty(M)$. Formalmente,

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, h \in C^\infty(M)$.

Dado um $(0,r)$-tensor T, podemos identificá-lo mediante a métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ com um $(1, r-1)$-tensor o qual ainda indicaremos por T, fazendo

$$\langle T(X_1, \ldots, X_{r-1}), X_r \rangle = T(X_1, \ldots, X_r).$$

Em particular, o tensor métrico $\langle , \rangle$, será identificado com o $(1,1)$-tensor identidade I em $\mathfrak{X}(M)$.

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante aos tensores como veremos na seguinte definição:

Definição 1.2. *A derivada covariante de um $(1,r)$-tensor T é um $(1,r+1)$-tensor ∇T dado por*

$$\begin{aligned} \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r) =& \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) \\ & - \ldots - T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0,r)$-tensor T é um $(0,r+1)$-tensor ∇T dado por (1.1).

Observação 1.1. *Dizemos que um tensor T é paralelo quando $\nabla T \equiv 0$.*

Definição 1.3. *Seja T um $(1,1)$-tensor em uma variedade Riemanniana M. Definimos o $(1,2)$-tensor B^T como*

$$B^T(X,Y) := (\nabla_X T)(Y) - (\nabla_Y T)(X). \tag{1.2}$$

Se $B^T \equiv 0$, dizemos que T é um tensor de Codazzi.

Definição 1.4. *Definimos a divergência de um $(1,r)$-tensor T em $(M^n, \langle , \rangle)$, como sendo o $(0,r)$- tensor dado por*

$$(divT)(v_1, \dots, v_r)(p) = tr\{w \longmapsto (\nabla_w T)(v_1, \dots, v_r)(p)\} \tag{1.3}$$

onde $p \in M^n$, $(v_1, \dots, v_r) \in T_pM \times \cdots \times T_pM$ e tr denota o traço.

Definição 1.5. *Definimos o laplaciano de um $(1,r)$-tensor T em $(M^n, \langle , \rangle)$, como sendo o $(0,r+1)$-tensor dado por*

$$\Delta T := div \nabla T. \tag{1.4}$$

Dada uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle)$, lembremos do isomorfismo dado por

$$\begin{aligned} {}^\flat : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}^*(M) \\ X &\longmapsto X^\flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ &\qquad\qquad Y \longmapsto X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Denotamos a sua aplicação inversa por $^\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Esse isomorfismo é conhecido como isomorfismo musical.

Nossa intenção agora é relembrar a definição de um produto interno entre tensores, para isso, considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em M, T e S $(1,1)$-tensores em M e seus respectivos adjuntos T^* e S^*. O produto interno de Hilbert-Schmidt é dado por

$$\langle T, S \rangle := tr(TS^*) = \sum_i \langle TS^*(e_i), e_i \rangle = \sum_i \langle S^*(e_i), T^*(e_i) \rangle = \sum_i \langle T(e_i), S(e_i) \rangle.$$

Para mais detalhes sobre o produto interno de Hilbert-Schmidt, ver por exemplo [9, 19, 31].

Além disso, como a métrica Riemanniana em M induz uma métrica Riemanniana em $\mathfrak{X}^*(M)$ por

$$\langle X^\flat, Y^\flat \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $X^\flat, Y^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$, podemos verificar que

$$\langle divT, Z^\flat \rangle = \langle (divT)^\sharp, Z \rangle \overset{(1.5)}{=} (divT)(Z),$$

em que T é um $(1,1)$-tensor em M e $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Quando não houver perigo de confusão, omitiremos por simplicidade o símbolo "$\sharp$".

Notemos também que a partir da definição do $(0,1)$-tensor $X^\flat(Y) = \langle X, Y\rangle$ em (1.5), convém considerar o $(1,1)$-tensor $\nabla X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por $\nabla X(Z) = \nabla_Z X$. Para isso, basta notar que derivar um campo é o mesmo que derivar covariantemente o seu dual. Desta forma, podemos definir a divergência do campo X por $divX := tr(\nabla X)$. Fixada uma função $\eta \in C^\infty(M)$, definimos a η- divergência de um campo X por

$$div_\eta X := divX - \langle \nabla\eta, X\rangle.$$

Das propriedades usuais de divergência de campos de vetores, para $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\begin{aligned} div_\eta(X+Y) &= div_\eta(X) + div_\eta(Y),\\ div_\eta(fX) &= f div_\eta(X) + \langle \nabla f, X\rangle,\\ div(e^{-\eta}X) &= e^{-\eta} div_\eta(X). \end{aligned}$$

Quando $(M, \langle,\rangle)$ é uma variedade Riemanniana orientada com bordo ∂M, as propriedades acima nos levam a considerar um peso em sua forma volume dM, bem como na forma volume $d\partial M$ de seu bordo, como segue: $dm = e^{-\eta}dM$ e $d\mu = e^{-\eta}d\partial M$. Portanto, se ν é um campo de vetores normais unitários exterior ao bordo ∂M e X é um campo de vetores tangentes com suporte compacto em M, teremos

$$\int_M div_\eta(X)\ dm = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle\ d\mu, \tag{1.6}$$

que é a expressão do teorema da divergência (ou Teorema de Stokes) para *variedades com peso*.

Note que o operador η-laplaciano (também chamado de laplaciano deformado ou laplaciano com peso) é definido por

$$\Delta_\eta f := div_\eta \nabla f, \quad f \in C^\infty(M). \tag{1.7}$$

É imediato que Δ_η satisfaz propriedades análogas às do laplaciano. Por exemplo, para $f, h \in C^\infty(M)$, temos

$$\Delta_\eta(fh) = f\Delta_\eta(h) + h\Delta_\eta(f) + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle.$$

Dado um $(1,r)$-tensor T em $(M, \langle,\rangle)$, podemos definir dois novos tensores que estendem as Definições 1.4 e 1.5 e serão de grande utilidade neste capítulo. Definimos por η-divergente de T o $(0,r)$-tensor dado por

$$div_\eta T := divT - d\eta \circ T, \tag{1.8}$$

e por η-laplaciano de T o $(0, r+1)$-tensor dado por

$$\Delta_\eta T := div_\eta \nabla T \overset{(1.8)}{=} div\nabla T - d\eta \circ \nabla T \overset{(1.4)}{=} \Delta T - d\eta \circ \nabla T. \tag{1.9}$$

Ao longo de todo este trabalho denotaremos por Ric o tensor de Ricci da métrica $\langle,\rangle$, dado por

$$Ric(X, Z) := tr(Y \longmapsto R(X, Y)Z),$$

onde $R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ é o $(1,3)$- tensor curvatura de Riemann e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Indicamos como leitura complementar [28].

Uma ferramenta importante que relaciona o tensor de Ricci ao operador laplaciano é a fórmula de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle + |\nabla^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{1.10}$$

Sua origem pode ser encontrada em [32]. Esta fórmula nos permite obter resultados muito importantes, como por exemplo, o teorema de Lichnerowicz que estabelece uma cota inferior para o primeiro autovalor não-nulo do laplaciano. Para o operador η-laplaciano existe uma extensão natural de tal fórmula, a saber

$$\frac{1}{2}\Delta_\eta|\nabla f|^2 = \langle \nabla(\Delta_\eta f), \nabla f\rangle + |\nabla^2 f|^2 + Ric_\eta(\nabla f, \nabla f),$$

onde $Ric_\eta := Ric + \nabla^2\eta$ é uma extensão do tensor de Ricci e é conhecido como o tensor de Bakry-Émery-Ricci. Atualmente, este tensor tem sido estudado na teoria de sólitons e quase sólitons de Ricci, uma vez que um sóliton de Ricci gradiente $(M, \langle,\rangle, \nabla\eta, \lambda)$ é caracterizado por $Ric_\eta = \lambda\langle,\rangle$ para alguma constante λ, enquanto que para um quase sóliton de Ricci gradiente, λ é uma função real suave em M. Para maiores detalhes ver por exemplo [2, 12, 16, 20, 35].

Agora vamos definir um operador que é uma extensão do η-laplaciano (1.7).

Definição 1.6. *Seja T um $(1,1)$-tensor simétrico, positivo definido em $(M, \langle,\rangle)$. Definimos o operador (η, T)-divergente por*

$$\mathcal{L}_{\eta,T} f := div_\eta(T(\nabla f)) = div(T(\nabla f)) - \langle \nabla\eta, T(\nabla f)\rangle, \tag{1.11}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

Temos que o operador $\mathcal{L}_{\eta,T}$ aparece como o traço do $(1,1)$-tensor em $(M, \langle,\rangle)$, dado por

$$\tau_{\eta,f} := \nabla T(\nabla f) - \frac{T(\nabla f, \nabla\eta)}{n} I,$$

e associado ao tensor $\tau_{\eta,f}$ temos, respectivamente, a sua parte sem traço e sua norma de Hilbert-Schmidt ao quadrado que satisfazem

$$\mathring{\tau}_{\eta,f} = \tau_{\eta,f} - \frac{\mathcal{L}_{\eta,T} f}{n} I \qquad \text{e} \qquad |\tau_{\eta,f}|^2 \geq \frac{1}{n}(\mathcal{L}_{\eta,T} f)^2$$

como visto em [21].

Segue das propriedades de div_η e da simetria de T que

$$\mathcal{L}_{\eta,T}(fh) = f\mathcal{L}_{\eta,T} h + h\mathcal{L}_{\eta,T} f + 2T(\nabla f, \nabla h),$$

onde $f, h \in C^\infty(M)$.

Através da relação

$$div_\eta(T(h\nabla f)) = h\langle div_\eta T, \nabla f\rangle + h\langle \nabla^2 f, T\rangle + T(\nabla h, \nabla f), \tag{1.12}$$

que pode ser encontrada em [19, 31] e em sua versão mais simples (quando η é contante) em [3, 2, 20], podemos relacionar o operador (η, T)-divergente com o $(0,1)$-tensor $div_\eta T$, ou seja,

$$\mathcal{L}_{\eta,T} f = div_\eta(T(\nabla f)) = \langle div_\eta T, \nabla f\rangle + \langle \nabla^2 f, T\rangle. \tag{1.13}$$

Em 1977, Cheng e Yau [36] introduziram o seguinte operador

$$\Box f := tr(\nabla^2 f \circ T) = \langle \nabla^2 f, T \rangle, \tag{1.14}$$

onde $f \in C^\infty(M)$ e T é um $(1,1)$-tensor simétrico. Para o caso em que M é orientável e compacta, Cheng e Yau provaram que o operador $\Box$ é auto-adjunto se, e somente se, $divT = 0$. De fato, sendo M orientável (não necessariamente compacta) é imediato da equação (1.12), do teorema da divergência e da simetria de T que

$$\int_M (f\Box h - h\Box f)\, dM = \int_M (h\langle divT, \nabla f\rangle - f\langle divT, \nabla h\rangle)\, dM,$$

para toda $f, h \in C_c^\infty(M)$, isto é, funções suaves com suporte compacto em M, donde podemos concluir o fato afirmado anteriormente provado por Cheng e Yau. Por exemplo, denotando $R = tr(Ric)$, é bem conhecido que $divRic = \dfrac{dR}{2}$ e $div(RI) = dR$, logo o tensor $G := Ric - \dfrac{R}{2}\langle , \rangle$ tem divergente nulo, e portanto $\Box f = \langle \nabla^2 f, G\rangle$ é auto-adjunto.

Observemos que $\mathcal{L}_{\eta,T}$, $div_\eta T$ e $\Box$ se relacionam por (1.13), isto é,

$$\mathcal{L}_{\eta,T} f = \langle div_\eta T, \nabla f\rangle + \Box f, \tag{1.15}$$

e em particular, se o operador $\Box$ é auto-adjunto, tal relação se resume a

$$\mathcal{L}_{\eta,T} f = -T(\nabla \eta, \nabla f) + \Box f. \tag{1.16}$$

Em 2015, Alencar, Neto e Zhou [15] provaram uma fórmula generalizada tipo Bochner aplicada ao operador $\Box$, a saber:

$$\frac{1}{2}\Box(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\Box f), \nabla f\rangle + R_T(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T\rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T\rangle, \tag{1.17}$$

onde $R_T(X,Y) := tr(T \circ (Z \mapsto R(X,Z)Y))$ e $R(X,Z)Y$ é o tensor curvatura de Riemann da métrica $\langle , \rangle$.

A seguir provaremos uma fórmula tipo Bochner que pode ser encontrada em [21]. Esta fórmula relaciona de maneira precisa e útil a teoria analítica dos operadores diferenciais elípticos com a geometria da variedade. Além disso, o formato que apresentaremos aqui é o ideal para aplicar as técnicas que utilizaremos neste trabalho.

Antes, lembremos que um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \le i, j \le n$.

Por simplicidade de notação, ao longo de todo o texto denotaremos o operador $\mathcal{L}_{\eta,T}$ apenas por $\mathcal{L}$. Caso seja necessário dar ênfase ao tensor T em questão, abandonaremos a notação $\mathcal{L}$ e usaremos $\mathcal{L}_T$.

Teorema 1.1 (Fórmula tipo Bochner). *Sejam $(M^n, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana e T um $(1,1)$-tensor simétrico e positivo definido em M. Então, para qualquer função suave f em M,*

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\mathcal{L} f), \nabla f\rangle + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T\rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T\rangle, \tag{1.18}$$

onde $R_{\eta,T} := R_T - \nabla(div_\eta T)^\sharp$ com $R_T(X,Y) := tr(T \circ (Z \mapsto R(X,Z)Y))$.

Demonstração. Fixado $p \in M$, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$ contendo p, geodésico em p. Então, temos em p que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}div(T(\nabla|\nabla f|^2)) - \frac{1}{2}\langle\nabla\eta, T(\nabla|\nabla f|^2)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle divT, \nabla|\nabla f|^2\rangle + \frac{1}{2}\langle\nabla^2|\nabla f|^2, T\rangle - \frac{1}{2}\langle T(\nabla\eta), \nabla|\nabla f|^2\rangle \\
&= \langle divT, \nabla_{\nabla f}\nabla f\rangle - \langle T(\nabla\eta), \nabla_{\nabla f}\nabla f\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla|\nabla f|^2, T(e_i)\rangle \\
&= \langle divT - T(\nabla\eta), \nabla_{\nabla f}\nabla f\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f, T(e_i)\rangle \\
&= \nabla f\langle divT - T(\nabla\eta), \nabla f\rangle - \langle\nabla_{\nabla f}(divT - T(\nabla\eta)), \nabla f\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle R(\nabla f, e_i)\nabla f + \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f, T(e_i)\rangle \\
&= \nabla f\langle divT, \nabla f\rangle - \nabla f\langle T(\nabla\eta), \nabla f\rangle - \langle\nabla_{\nabla f}(divT - d\eta\circ T), \nabla f\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle R(\nabla f, e_i)\nabla f, T(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, T(e_i)\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{\nabla_{\nabla f}e_i}\nabla f, T(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{\nabla_{e_i}\nabla f}\nabla f, T(e_i)\rangle \\
&= \nabla f(div(T(\nabla f)) - \Box f) - \nabla f\langle T(\nabla\eta), \nabla f\rangle - \langle\nabla_{\nabla f}div_\eta T, \nabla f\rangle \\
&\quad + R_T(\nabla f, \nabla f) + \sum_{i=1}^{n}\nabla f\langle\nabla_{e_i}\nabla f, T(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f}T(e_i)\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{T(e_i)}\nabla f, \nabla_{\nabla f}e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{T(e_i)}\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle \\
&= \nabla f(div(T(\nabla f)) - \langle T(\nabla\eta), \nabla f\rangle) - \nabla f(\Box f) - \nabla(div_\eta T)(\nabla f, \nabla f) \\
&\quad + R_T(\nabla f, \nabla f) + \nabla f(\Box f) - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f, (\nabla_{\nabla f}T)(e_i) - T(\nabla_{\nabla f}e_i)\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^2 f(T(e_i)), \nabla_{e_i}\nabla f\rangle \\
&= \nabla f(\mathcal{L}f) + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^2 f(e_i), (\nabla_{\nabla f}T)(e_i)\rangle + \langle\nabla^2 f\circ T, \nabla^2 f\rangle \\
&= \nabla f(\mathcal{L}f) + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) - \langle\nabla^2 f, \nabla_{\nabla f}T\rangle + \langle\nabla^2 f\circ T, \nabla^2 f\rangle.
\end{aligned}$$

□

Dados $(M, \langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana, T um $(1,1)$-tensor simétrico em M e $\eta \in C^\infty(M)$, ao longo de todo o Capítulo 2 utilizaremos a seguinte definição que apareceu naturalmente na prova do Teorema 1.1

$$R_{\eta,T}(X,Y) := R_T(X,Y) - \nabla(div_\eta T)^\sharp(X,Y), \tag{1.19}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde

$$R_T(X,Y) \coloneqq tr(T \circ (Z \mapsto R(X,Z)Y)) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,e_i)Y, T(e_i) \rangle.$$

Capítulo 2

Fórmula tipo Reilly e aplicações a estimativas de autovalores

Nosso objetivo neste capítulo será provar os Teoremas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4. Os dois primeiros tratam de estimativas inferiores para o primeiro autovalor não-nulo de um operador diferencial elíptico em variedades fechadas, enquanto que no último as estimativas inferiores para o primeiro autovalor não-nulo deste operador se dão em variedades compactas com bordo. O Teorema 2.3, por sua vez, é a principal ferramenta para obtenção das estimativas em variedades com bordo, tratando-se de uma fórmula tipo Reilly que estende a já conhecida para o caso do operador η-laplaciano. O capítulo está dividido em três seções, na primeira delas abordaremos brevemente os problemas de Dirichlet e de Neumann para este operador e nas duas últimas seções apresentaremos os resultados principais do capítulo.

De agora em diante, exceto quando explicitamente mencionado, as variedades serão supostas conexas.

2.1 Alguns Problemas de Autovalores

Para o que segue denotaremos por $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana completa e $\Omega \subset M$ um domínio, ou seja, um aberto, conexo e limitado em M. Observemos que o teorema da divergência (1.6) para variedades com peso continua válido no caso em que $X = T(\nabla f)$, nos fornecendo assim o teorema da divergência para o operador $\mathcal{L}$

$$\int_\Omega \mathcal{L}f \, dm = \int_{\partial\Omega} T(\nabla f, \nu) \, d\mu, \tag{2.1}$$

onde $d\mu = e^{-\eta} d\partial\Omega$ é a forma volume com peso no bordo $\partial\Omega$ induzida pelo campo de vetores normais unitários ν exterior a Ω ao longo de $\partial\Omega$. Note que no caso em que ν é o normal unitário interior a Ω ao longo de $\partial\Omega$, o segundo membro da igualdade (2.1) muda de sinal. A fórmula de integração por partes é dada por

$$\int_\Omega h\mathcal{L}f \, dm = -\int_\Omega T(\nabla h, \nabla f) \, dm + \int_{\partial\Omega} hT(\nabla f, \nu) \, d\mu, \tag{2.2}$$

onde $h, f \in C^\infty(\Omega)$ e ν é o campo normal unitário exterior a Ω ao longo de $\partial\Omega$. Portanto, o operador $\mathcal{L}$ é formalmente auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(\Omega, dm)$ quando consideramos as funções deste espaço que se anulam em $\partial\Omega$. Desse modo, o problema de Dirichlet de autovalores

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

possui espectro real e discreto $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \cdots \to \infty$, em que cada autovalor é repetido de acordo com a sua multiplicidade. Em particular, sendo u uma autofunção de $\mathcal{L}$ em Ω associada ao autovalor λ, por (2.2) temos

$$\lambda = \frac{\int_\Omega T(\nabla u, \nabla u)\, dm}{\int_\Omega u^2\, dm}. \tag{2.4}$$

Agora considere o seguinte problema de Neumann para o operador $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_T} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde u é o vetor normal unitário ν exterior a Ω ao longo do bordo $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_T} = \langle \nabla u, T(\nu)\rangle = \langle T(\nabla u), \nu\rangle$. Note que no problema de Neumann (2.5) e no caso onde $\partial\Omega = \emptyset$, em que temos o problema de autovalor fechado $\mathcal{L}u + \lambda u = 0$, o menor autovalor de $\mathcal{L}$ em Ω é 0.

Observe também que $T(\nabla u, \nu)$ se comporta como uma derivada normal com respeito a T, a menos do fato que ∇u não está sendo calculado na métrica T. Sob a condição de que ν é um autovetor de T, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_T} = \langle \nabla u, T(\nu)\rangle$ é a derivada normal de u com respeito ao vetor normal $T(\nu)$. Neste trabalho ambas as condições serão utilizadas. A partir de agora chamaremos $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_T}$ de derivada T-normal de u. Além disso, na condição de ν ser autovetor de T, o subespaço unidimensional gerado por ν é invariante por T, e seu complemento ortogonal também, tornando assim o problema (2.5) no problema de Neumann clássico, a saber

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

Um problema desse tipo para o operador $\mathcal{L}$ foi considerado por Cunha [9], a fim de provar propriedades genéricas para os autovalores de $\mathcal{L}$.

2.2 Estimativa tipo Lichnerowicz em variedades Riemannianas fechadas com peso

Um problema interessante associado ao operador (η, T)-divergente, como nos casos dos operadores laplaciano e η-laplaciano, é o estudo de seu espectro quando a variedade é compacta. Como aplicações da fórmula tipo Bochner (1.18), nesta seção forneceremos duas estimativas inferiores para o primeiro autovalor não-nulo do operador (η, T)-divergente em uma variedade Riemanniana com peso fechada (compacta e sem bordo). A primeira delas, o Teorema 2.1, estende a estimativa dada por Ma e Du [25] para o operador η-laplaciano, quando T é um tensor paralelo. Já a segunda, Teorema 2.2, é uma estimativa para o caso em que T é um tensor de Codazzi não-paralelo.

Começaremos esta seção com três lemas com técnicas de demonstração já conhecidas. Aqui eles serão provados de maneira mais conveniente para servirem de ferramentas auxiliares nas provas subsequentes. Após isso, apresentaremos as Proposições 2.1 e 2.2, que serão necessárias para demonstrarmos os teoremas desejados.

Lema 2.1. *Sejam S e T $(1,1)$-tensores simétricos em $(M^n, \langle , \rangle)$. Se T é positivo definido, então*

$$tr(S^2T) \geq \frac{(tr(ST))^2}{tr(T)} \tag{2.7}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $S = hI$, onde $h = tr(S)/n \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Como T é positivo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $(\sqrt{T})^{-1}T$ e $\sqrt{T}S$, temos

$$\begin{aligned} \langle (\sqrt{T})^{-1}T, \sqrt{T}S\rangle^2 &\leq \langle (\sqrt{T})^{-1}T, (\sqrt{T})^{-1}T\rangle \cdot \langle \sqrt{T}S, \sqrt{T}S\rangle \\ &= \langle I, T\rangle \cdot \langle TS, S\rangle \\ &= tr(T) \cdot tr(TS^2). \end{aligned}$$

Recordemos que $\langle T, S\rangle^2 = \langle (\sqrt{T})^{-1}T, \sqrt{T}S\rangle^2$, o que prova a primeira parte. E a igualdade ocorre se, e somente se,

$$(\sqrt{T})^{-1}T = f\sqrt{T}S \Leftrightarrow (\sqrt{T})^{-2}T = f(\sqrt{T})^{-1}\sqrt{T}S \Leftrightarrow I = fS,$$

Tomando o traço na última igualdade acima, temos $n = ftr(S)$. Portanto, $S = \dfrac{tr(S)}{n}I$. □

Lema 2.2. *Dados dois números reais quaisquer a, b e z um número real positivo, vale que:*

$$(a+b)^2 \geq \frac{a^2}{z+1} - \frac{b^2}{z}. \tag{2.8}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $b = -\frac{z}{1+z}a$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\sqrt{\frac{z}{z+1}}a + \sqrt{\frac{z+1}{z}}b\right)^2 \\ &= \frac{z}{z+1}a^2 + 2ab + \frac{z+1}{z}b^2 \\ &= (a+b)^2 - \frac{a^2}{z+1} + \frac{b^2}{z}, \end{aligned}$$

o que prova o Lema. □

Lema 2.3. *Sejam T um $(1,1)$-tensor simétrico em uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então*

(*a*) $(\nabla^2 T)(X, Y, Z) - (\nabla^2 T)(X, Z, Y) = R(Y, Z)T(X) + T(R(Z, Y)X)$.

(*b*) $(\nabla^2 T)(X, Y, Z) - (\nabla^2 T)(Y, X, Z) = -(\nabla_Z B^T)(X, Y)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}(\nabla^2 T)(X,Y,Z) &= (\nabla(\nabla T))(X,Y,Z) = (\nabla_Z(\nabla T))(X,Y)\\ &= \nabla_Z((\nabla T)(X,Y)) - (\nabla T)(\nabla_Z X, Y) - (\nabla T)(X, \nabla_Z Y)\\ &= \nabla_Z((\nabla_Y T)(X)) - (\nabla_Y T)(\nabla_Z X) - (\nabla_{\nabla_Z Y} T)(X)\\ &= \nabla_Z(\nabla_Y T(X) - T(\nabla_Y X)) - \nabla_Y T(\nabla_Z X) + T(\nabla_Y \nabla_Z X) - \nabla_{\nabla_Z Y} T(X)\\ &\quad + T(\nabla_{\nabla_Z Y} X)\\ &= \nabla_Z \nabla_Y T(X) - \nabla_Z T(\nabla_Y X) - \nabla_Y T(\nabla_Z X) + T(\nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{\nabla_Z Y} X)\\ &\quad - \nabla_{\nabla_Z Y} T(X).\end{aligned}$$

Similarmente,

$$(\nabla^2 T)(X,Z,Y) = \nabla_Y \nabla_Z T(X) - \nabla_Y T(\nabla_Z X) - \nabla_Z T(\nabla_Y X) + T(\nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_{\nabla_Y Z} X) - \nabla_{\nabla_Y Z} T(X).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(\nabla^2 T)(X,Y,Z) - (\nabla^2 T)(X,Z,Y) &= \nabla_Z \nabla_Y T(X) - \nabla_Y \nabla_Z T(X) + \nabla_{[Y,Z]} T(X)\\ &\quad + T(\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_{[Z,Y]} X)\\ &= R(Y,Z)T(X) + T(R(Z,Y)X),\end{aligned}$$

o que prova o item (a). Agora, pela definição do tensor B^T, temos

$$\begin{aligned}(\nabla^2 T)(X,Y,Z) &= (\nabla_Z(\nabla T))(X,Y)\\ &= \nabla_Z((\nabla T)(X,Y)) - (\nabla T)(\nabla_Z X, Y) - (\nabla T)(X, \nabla_Z Y)\\ &= \nabla_Z((\nabla T)(Y,X) - B^T(X,Y)) - (\nabla T)(\nabla_Z X, Y) - (\nabla T)(X, \nabla_Z Y)\\ &= \nabla_Z((\nabla T)(Y,X)) - \nabla_Z(B^T(X,Y)) - (\nabla T)(\nabla_Z X, Y) - (\nabla T)(X, \nabla_Z Y)\\ &= (\nabla_Z(\nabla T))(Y,X) + (\nabla T)(\nabla_Z Y, X) + (\nabla T)(Y, \nabla_Z X) - \nabla_Z(B^T(X,Y))\\ &\quad - (\nabla T)(\nabla_Z X, Y) - (\nabla T)(X, \nabla_Z Y)\\ &= (\nabla^2 T)(Y,X,Z) - \nabla_Z(B^T(X,Y)) + B^T(X, \nabla_Z Y) + B^T(\nabla_Z X, Y)\\ &= (\nabla^2 T)(Y,X,Z) - (\nabla_Z B^T)(X,Y),\end{aligned}$$

o que prova o item (b). □

A fórmula tipo Bochner para o operador (η, T)-divergente apresenta termos não muito familiares, por exemplo, $\langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T\rangle$. Para um tensor não-paralelo, não é possível eliminarmos tal termo. Cálculos, como a sua integral, tornam-se tarefas muito difíceis de ser realizadas diretamente. A fim de contornarmos este problema, um dos nossos objetivos aqui será reescrever a fórmula tipo Bochner para um tensor de Codazzi não-paralelo, como veremos na Observação 2.2. Para isso, veremos dois resultados preliminares e neles consideraremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico em um ponto $p \in M$.

Proposição 2.1. *Sejam T um $(1,1)$-tensor simétrico em uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle)$ e $\eta \in C^\infty(M)$. Se $divB^T \equiv 0$, então*

$$(\Delta_\eta T)(X,X) = -R_{\eta,T}(X,X) + (Ric_\eta \circ T)(X,X), \tag{2.9}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, se $X = \nabla f$ temos

$$(\Delta_\eta T)(\nabla f, \nabla f) = -R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + (Ric_\eta \circ T)(\nabla f, \nabla f), \tag{2.10}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Segue da definição do η-laplaciano de um tensor (1.9) e do item (b) do Lema 2.3, que

$$\begin{aligned}(\Delta_\eta T)(X,X) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla^2 T)(X,e_i,e_i),X\rangle - \langle \nabla\eta, (\nabla_X T)(X)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla^2 T)(e_i,X,e_i),X\rangle - \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} B^T)(X,e_i),X\rangle \\ &\quad - \langle (\nabla_X T)(\nabla\eta),X\rangle,\end{aligned}$$

Agora, pelo item (a) do Lema 2.3 e pela hipótese sobre B^T, temos

$$\begin{aligned}(\Delta_\eta T)(X,X) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla^2 T)(e_i,e_i,X),X\rangle + \sum_{i=1}^n \langle R(X,e_i)T(e_i),X\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle T(R(e_i,X)e_i),X\rangle - \langle \nabla_X(T(\nabla\eta)),X\rangle + \langle T(\nabla_X\nabla\eta),X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_X(\nabla T))(e_i,e_i),X\rangle + \sum_{i=1}^n \langle R(X,e_i)T(e_i),X\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle R(e_i,X)e_i,T(X)\rangle - \langle \nabla_X(T(\nabla\eta)),X\rangle + \nabla^2\eta(X,T(X)) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X((\nabla T)(e_i,e_i)) - (\nabla T)(\nabla_X e_i,e_i) - (\nabla T)(e_i,\nabla_X e_i),X\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \langle R(X,e_i)X,T(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^n \langle R(X,e_i)T(X),e_i\rangle - \langle \nabla_X(T(\nabla\eta)),X\rangle \\ &\quad + \nabla^2\eta(X,T(X)) \\ &= \langle \nabla_X divT,X\rangle - R_T(X,X) + Ric(X,T(X)) - \langle \nabla_X(T(\nabla\eta)),X\rangle \\ &\quad + \nabla^2\eta(X,T(X)) \\ &= \langle \nabla_X(div_\eta T),X\rangle - R_T(X,X) + Ric_\eta(X,T(X)) \\ &= -R_{\eta,T}(X,X) + (Ric_\eta\circ T)(X,X).\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2. *Sejam T um $(1,1)$-tensor simétrico e positivo definido em uma variedade Riemanniana $(M,\langle,\rangle)$ e $\eta\in C^\infty(M)$. Se $f\in C^\infty(M)$, então*

$$\begin{aligned}\langle \nabla^2 f,\nabla_{\nabla f}T\rangle &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{(\nabla_{\nabla f}T)}f - (\Delta_\eta T)(\nabla f,\nabla f) - \sum_{i=1}^n e_i\langle \nabla f, B^T(\nabla f,e_i)\rangle) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla f, B^T(\nabla f,e_i)\rangle. \qquad (2.11)\end{aligned}$$

Demonstração. Fazendo uso da relação (1.15), temos

$$\langle \nabla^2 f,\nabla_{\nabla f}T\rangle = \mathcal{L}_{(\nabla_{\nabla f}T)}f - \sum_{i=1}^n \langle \nabla f,(\nabla_{e_i}(\nabla_{\nabla f}T))(e_i)\rangle + \langle \nabla f,(\nabla_{\nabla f}T)(\nabla\eta)\rangle. \qquad (2.12)$$

Veja agora que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{e_i}(\nabla_{\nabla f}T))(e_i)\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,\nabla_{e_i}((\nabla_{\nabla f}T)(e_i))\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{\nabla f}T)(\nabla_{e_i}e_i)\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,\nabla_{e_i}((\nabla_{e_i}T)(\nabla f))\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,\nabla_{e_i}(B^T(\nabla f,e_i))\rangle,\end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de B^T na última igualdade acima. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{e_i}(\nabla_{\nabla f}T))(e_i)\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}T)(\nabla f)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{e_i}T)(\nabla_{e_i}\nabla f)\rangle\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}e_i\langle\nabla f,B^T(\nabla f,e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,B^T(\nabla f,e_i)\rangle.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Desenvolvendo o terceiro termo da primeira linha em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{e_i}T)(\nabla_{e_i}\nabla f)\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,(\nabla_{e_i}T)(\nabla f)\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,(\nabla_{\nabla f}T)(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,B^T(e_i,\nabla f)\rangle,\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos novamente a definição de B^T. Assim, de volta a (2.13), temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{e_i}(\nabla_{\nabla f}T))(e_i)\rangle &= \langle\nabla f,(\Delta T)(\nabla f)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,(\nabla_{\nabla f}T)(e_i)\rangle\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,B^T(e_i,\nabla f)\rangle + \sum_{i=1}^{n}e_i\langle\nabla f,B^T(\nabla f,e_i)\rangle\\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,B^T(\nabla f,e_i)\rangle.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente, substituindo (2.14) em (2.12) e recordando que B^T é um tensor antissimétrico, obtemos

$$\begin{aligned}\langle\nabla^2 f,\nabla_{\nabla f}T\rangle &= \mathcal{L}_{(\nabla_{\nabla f}T)}f - \langle\nabla f,(\Delta_\eta T)(\nabla f)\rangle - \langle\nabla^2 f,\nabla_{\nabla f}T\rangle - \sum_{i=1}^{n}e_i\langle\nabla f,B^T(\nabla f,e_i)\rangle\\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,B^T(\nabla f,e_i)\rangle,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 2.1. *Quando T é um tensor de Codazzi não-paralelo, a equação* (2.11) *reduz-se a*

$$\langle\nabla^2 f,\nabla_{\nabla f}T\rangle = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{(\nabla_{\nabla f}T)}f - (\Delta_\eta T)(\nabla f,\nabla f)\right). \tag{2.15}$$

Observação 2.2. *Note que por* (2.10) *e* (2.15)*, podemos reescrever a fórmula tipo-Bochner* (1.18)*, no caso em que T é um tensor de Codazzi não-paralelo, como*

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\mathcal{L}f), \nabla f\rangle + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T\rangle - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{(\nabla_{\nabla f}T)}f + \frac{1}{2}R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}(Ric_\eta \circ T)(\nabla f, \nabla f). \tag{2.16}$$

Observemos que como M é compacta e T é um tensor simétrico e positivo definido, segue que

$$\epsilon \leq \langle T(X), X\rangle \leq \delta, \tag{2.17}$$

onde $\epsilon = \min_{|X|=1}\langle T(X), X\rangle$ e $\delta = \max_{|X|=1}\langle T(X), X\rangle$.

Agora estamos em condições de apresentar e provar os dois resultados principais da seção. No primeiro deles, obtemos uma estimativa inferior do primeiro autovalor não-nulo do operador (η, T)-divergente quando T é um tensor paralelo e no segundo quando T é um tensor de Codazzi não-paralelo e livre de divergência. Observe que em ambos os casos o $tr(T)$ é constante.

Doravante, consideraremos λ um autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$ e f sua autofunção correspondente, isto é, $\mathcal{L}f + \lambda f = 0$, e assumiremos que $f > 0$ e $\int_M f^2\, dm = 1$.

Teorema 2.1. *Seja T um $(1,1)$-tensor simétrico, paralelo e positivo definido em uma variedade Riemanniana fechada e orientada $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, dm = e^{-\eta}dM)$. Assuma que*

$$R_{\eta,T} \geq \left(\frac{|T(\nabla\eta)|^2}{z\, tr(T)} + c\right) g,$$

para certos números reais z e c positivos, então

$$\lambda \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon},$$

onde λ é o primeiro autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$.

Demonstração. Integrando sobre M a primeira desigualdade em (2.17) com $X = \nabla f/|\nabla f|$ e usando a fórmula de integração por partes, temos

$$\epsilon\int_M |\nabla f|^2\, dm \leq \int_M \langle T(\nabla f), \nabla f\rangle\, dm = -\int_M f\mathcal{L}f\, dm = \lambda\int_M f^2\, dm = \lambda. \tag{2.18}$$

Similarmente, para a segunda desigualdade de (2.17), temos

$$\delta\int_M |\nabla f|^2\, dm \geq \int_M \langle T(\nabla f), \nabla f\rangle\, dm = -\int_M f\mathcal{L}f\, dm = \lambda\int_M f^2\, dm = \lambda. \tag{2.19}$$

De (2.18) e (2.19) segue que

$$\frac{\lambda}{\delta} \leq \int_M |\nabla f|^2\, dm \leq \frac{\lambda}{\epsilon}. \tag{2.20}$$

A fórmula tipo Bochner (1.18) aplicada a autofunção f com T sendo paralelo nos dá

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = -\lambda|\nabla f|^2 + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + tr((\nabla^2 f)^2 \circ T), \tag{2.21}$$

assim, integrando (2.21) sobre M e usando o teorema da divergência com $\partial M = \emptyset$, temos

$$0 = -\lambda \int_M |\nabla f|^2 \, dm + \int_M R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) \, dm + \int_M tr((\nabla^2 f)^2 \circ T) \, dm. \tag{2.22}$$

Pelo Lema 2.1, temos

$$tr((\nabla^2 f)^2 \circ T) \geq \frac{(tr(\nabla^2 f \circ T))^2}{tr(T)} = \frac{(\Box f)^2}{tr(T)}. \tag{2.23}$$

Agora, usando a desigualdade elementar dada no Lema 2.2, temos também que

$$(\Box f)^2 = (\mathcal{L} f + \langle T(\nabla \eta), \nabla f \rangle)^2 \geq \frac{(\mathcal{L} f)^2}{z+1} - \frac{|\langle T(\nabla \eta), \nabla f \rangle|^2}{z} \geq \frac{\lambda^2 f^2}{z+1} - \frac{|T(\nabla \eta)|^2 |\nabla f|^2}{z},$$

onde na primeira igualdade usamos o fato que $divT = 0$, pois T é um tensor paralelo. Portanto,

$$tr((\nabla^2 f)^2 \circ T) \geq \frac{1}{tr(T)} \left(\frac{\lambda^2 f^2}{z+1} - \frac{|T(\nabla \eta)|^2 |\nabla f|^2}{z} \right). \tag{2.24}$$

Substituindo (2.24) em (2.22) e usando a hipótese sobre $R_{\eta,T}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq & -\lambda \int_M |\nabla f|^2 \, dm + \frac{1}{z \, tr(T)} \int_M |T(\nabla \eta)|^2 |\nabla f|^2 \, dm + c \int_M |\nabla f|^2 \, dm \\ & + \frac{\lambda^2}{(z+1) \, tr(T)} \int_M f^2 \, dm - \frac{1}{z \, tr(T)} \int_M |T(\nabla \eta)|^2 |\nabla f|^2 \, dm. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\lambda^2}{(z+1) \, tr(T)} - (\lambda - c) \int_M |\nabla f|^2 \, dm \leq 0,$$

e por (2.20) temos

$$\frac{\lambda^2}{(z+1) \, tr(T)} - (\lambda - c) \frac{\lambda}{\epsilon} \leq 0.$$

Logo,

$$\lambda \geq \frac{(z+1) c \, tr(T)}{(z+1) \, tr(T) - \epsilon}.$$

$\Box$

Teorema 2.2. *Seja T um $(1,1)$-tensor de Codazzi não-paralelo, simétrico, positivo definido e livre de divergência em uma variedade Riemanniana fechada e orientada $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, dm = e^{-\eta} dM)$. Se*

$$R_{\eta,T}(X,X) + (Ric_\eta \circ T)(X,X) \geq 2 \left(\frac{|T(\nabla \eta)|^2}{z \, tr(T)} + c \right) \langle X, X \rangle,$$

para certos números reais z e c positivos, então

$$\lambda \geq \frac{(z+1) c \, tr(T)}{(z+1) \, tr(T) - \epsilon},$$

onde λ é o primeiro autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$.

Demonstração. Como na prova do Teorema 2.1, tomando $X = \nabla f/|\nabla f|$, obtemos

$$\frac{\lambda}{\delta} \leq \int_M |\nabla f|^2 \, dm \leq \frac{\lambda}{\epsilon}. \tag{2.25}$$

Da fórmula tipo Bochner (2.16) para tensores de Codazzi não-paralelos aplicada a autofunção f temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) &= -\lambda|\nabla f|^2 + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T\rangle - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{(\nabla_{\nabla f}T)}f + \frac{1}{2}R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f)\\ &\quad + \frac{1}{2}(Ric_\eta \circ T)(\nabla f, \nabla f).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Integrando (2.26) sobre M e usando o teorema da divergência, onde $\partial M = \emptyset$, obtemos

$$\begin{aligned}0 = &-\lambda \int_M |\nabla f|^2 \, dm + \int_M tr((\nabla^2 f)^2 \circ T) \, dm + \frac{1}{2}\int_M R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) \, dm\\ &+ \frac{1}{2}\int_M (Ric_\eta \circ T)(\nabla f, \nabla f) \, dm.\end{aligned}$$

Como T é livre de divergência, da mesma conta feita na demostração do Teorema 2.1, segue que

$$tr(T \circ (\nabla^2 f)^2) \geq \frac{1}{tr(T)}\left(\frac{\lambda^2 f^2}{z+1} - \frac{|T(\nabla\eta)|^2|\nabla f|^2}{z}\right).$$

Assim, pelo fato acima e pela hipótese dada no teorema, temos

$$\begin{aligned}0 &\geq -\lambda \int_M |\nabla f|^2 \, dm + \frac{\lambda^2}{(z+1)\, tr(T)}\int_M f^2 \, dm - \frac{1}{z\, tr(T)}\int_M |T(\nabla\eta)|^2|\nabla f|^2 \, dm\\ &\quad + \int_M \left(\frac{|T(\nabla\eta)|^2}{z\, tr(T)} + c\right)|\nabla f|^2 \, dm\\ &= -(\lambda - c)\int_M |\nabla f|^2 \, dm + \frac{\lambda^2}{(z+1)\, tr(T)},\end{aligned}$$

e por (2.25), obtemos

$$\frac{\lambda^2}{(z+1)\, tr(T)} - (\lambda - c)\frac{\lambda}{\epsilon} \leq 0.$$

Logo,

$$\lambda \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon}.$$

□

2.3 Uma fórmula tipo Reilly

Nosso propósito nesta seção é provar o Teorema 2.3 o qual é uma extensão da fórmula de Reilly (3). Como aplicação será dada uma estimativa inferior para o primeiro autovalor positivo de $\mathcal{L}$ em variedades Riemannianas compactas com bordo.

Recordemos que em uma hipersuperfície Σ de uma variedade Riemanniana $(M^{n+1}, \langle,\rangle)$, em que temos $p \in \Sigma$ e ν o campo de vetores unitários normais a Σ em p, o vetor curvatura média $\mathbf{H}$ de Σ em p com relação a ν é dado por $\mathbf{H} := tr\alpha \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$, onde α é a segunda forma fundamental de Σ com relação a ν. Para o que segue, denotaremos com $\sim$ objetos geométricos que se referem a M, ao passo que aqueles sem $\sim$ se referem a Σ. Também denominaremos por segunda forma fundamental de Σ com respeito a ν o $(0,2)$-tensor em Σ dado por $II(X,Y) = \langle A(X), Y\rangle$, onde $A(X) \coloneqq \widetilde{\nabla}_X \nu$ é o operador forma e $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Neste caso, temos $\alpha(X,Y) = -II(X,Y)\nu$. Ademais, a função $H \coloneqq \langle \mathbf{H}, \nu\rangle$ é denominada função curvatura média de Σ na direção de ν. Convém observar que $\mathbf{H}$ é um campo local de vetores diferenciáveis normais a Σ. No entanto, se Σ for orientável podemos definir $\mathbf{H}$ globalmente.

Agora, considere T um $(0,2)$-tensor simétrico em M. Podemos definir um campo de vetores normais que generaliza o vetor curvatura média de Σ por

$$\mathbf{H}_T \coloneqq \sum_{i=1}^{n} T(e_i, e_i)\alpha(e_i, e_i) \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}, \tag{2.27}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em Σ. Se ν é um autovetor de T então $T(e_i) \in T_p\Sigma$, logo podemos escrever (2.27) como segue

$$\mathbf{H}_T = \sum_{i=1}^{n} \alpha(T(e_i), e_i).$$

A definição acima foi considerada recentemente por Gomes e Miranda [21] no estudo de desigualdades universais para autovalores do problema de Dirichlet (2.3) e por Roth [22, 23] para se obter estimativas superiores para o primeiro autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$.

Agora, considere $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = \nu\}$ um referencial ortonormal local adaptado a uma vizinhança $U \subset \Sigma$ de $p \in \Sigma$. Da definição (2.27), para todo $p \in U$ temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_T &= \sum_{i=1}^{n} T(e_i, e_i)\alpha(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} T(e_i, e_i)\langle \alpha(e_i, e_i), \nu\rangle \nu = -\sum_{i=1}^{n} T(e_i, e_i)\langle A(e_i), e_i\rangle \nu \\ &= -\sum_{i=1}^{n} T(e_i, e_i) A(e_i, e_i)\nu = -\sum_{i=1}^{n} T(A(e_i), e_i)\nu.\end{aligned}$$

Denominaremos $\mathbf{H}_T$ por vetor curvatura média generalizado com respeito a ν, e $H_T \coloneqq \langle \mathbf{H}_T, \nu\rangle$ por função curvatura média generalizada.

A seguir, apresentaremos duas definições que ficarão bem entendidas no decorrer da demonstração do Teorema 2.3, pois nela tais objetos surgem naturalmente.

Sejam T um $(0,2)$-tensor em M e A o operador forma. Definimos a função

$$tr_T A \coloneqq \sum_{i=1}^{n} T(A(e_i), e_i). \tag{2.28}$$

Note que é conveniente considerarmos a notação H_T em vez de $tr_T A$ (note que o sinal da função H_T pode mudar, dependendo da orientação escolhida para ν).

Finalmente, ainda podemos definir a função

$$\Delta_T(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} T(\nabla^2 f(e_i), e_i), \tag{2.29}$$

onde $f \in C^\infty(M)$. Observe que se os e_i's forem invariantes por T nas definições acima, então teremos o produto interno de Hilbert-Schmidt, sendo a última definição precisamente o operador visto em (1.14).

Para o que segue, considere $(M, \langle , \rangle, dm = e^{-\eta} dM)$ uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional compacta e orientada com conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$; o bordo ∂M é a variedade com métrica e orientação induzidas pela aplicação inclusão $\iota : \partial M \hookrightarrow M$. Denotaremos por ν o campo normal unitário exterior a M ao longo de ∂M, A o operador forma de ∂M com respeito a ν, dado por $A(X) = \widetilde{\nabla}_X \nu$ com $X \in \mathfrak{X}(\partial M)$. Lembremos que $II(X,Y) = \langle \widetilde{\nabla}_X \nu, Y\rangle$, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial M)$ é a segunda forma fundamental de ∂M. Para não haver perigo de confusão, novamente destacamos que objetos geométricos com $\sim$ se referem a M, ao passo que aqueles sem $\sim$ se referem ao bordo ∂M.

Teorema 2.3 (Fórmula tipo Reilly). *Com as notações do parágrafo acima, se f é uma função suave em M, então*

$$\begin{aligned}
&\int_M \big((\widetilde{\mathcal{L}} f)\widetilde{\Delta}_\eta f - \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f) - \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}^2 f \circ T\rangle + \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla} f} T\rangle \big)\, dm = \\
&\int_{\partial M} \big(\Delta_T(f) + \langle \nabla f_\nu, T(\nu)\rangle + f_\nu H_T + \langle \nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle \big) f_\nu \, d\mu \\
&+ \int_{\partial M} \big(\langle \nabla f, \widetilde{div} T\rangle + f_\nu \langle \nu, \widetilde{div} T\rangle - \langle \widetilde{\nabla} \eta, T(\nabla f)\rangle - f_\nu \langle \widetilde{\nabla} \eta, T(\nu)\rangle \big) f_\nu \, d\mu \\
&+ \int_{\partial M} \big(II(\nabla f, (T(\nabla f))^\top) + \langle \nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T}) \big)\, d\mu, \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

onde $f_\nu = \langle \widetilde{\nabla} f, \nu\rangle$, $f_{\nu_T} = \dfrac{\partial f}{\partial \nu_T} = \langle T(\widetilde{\nabla} f), \nu\rangle$ e $(\ )^\top$ denota a projeção tangencial $(\ )^\top : TM \to T\partial M$.

Demonstração. Integrando sobre M a fórmula tipo Bochner (1.18), a saber,

$$\frac{1}{2}\widetilde{\mathcal{L}}(|\widetilde{\nabla} f|^2) = \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\mathcal{L}} f)\rangle + \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f) + \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}^2 f \circ T\rangle - \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla} f} T\rangle,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_M \widetilde{\mathcal{L}}(|\widetilde{\nabla} f|^2)\, dm = &\int_M \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\mathcal{L}} f)\rangle\, dm + \int_M \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f)\, dm + \int_M \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}^2 f \circ T\rangle\, dm \\
&- \int_M \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla} f} T\rangle\, dm. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Usando o teorema da divergência no primeiro termo de (2.31) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_M \widetilde{\mathcal{L}}(|\widetilde{\nabla} f|^2)\, dm &= \frac{1}{2}\int_M \widetilde{div}_\eta(T(\widetilde{\nabla}(|\widetilde{\nabla} f|^2)))\, dm = \frac{1}{2}\int_{\partial M} T(\widetilde{\nabla}(|\widetilde{\nabla} f|^2), \nu)\, d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial M} \langle \widetilde{\nabla}(|\widetilde{\nabla} f|^2), T(\nu)\rangle\, d\mu = \frac{1}{2}\int_{\partial M} T(\nu)(|\widetilde{\nabla} f|^2)\, d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial M} T(\nu)\langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f\rangle\, d\mu = \int_{\partial M} \langle \widetilde{\nabla}_{T(\nu)} \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f\rangle\, d\mu \\
&= \int_{\partial M} \widetilde{\nabla}^2 f(T(\nu), \widetilde{\nabla} f)\, d\mu. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

E uma vez que

$$\widetilde{div}_\eta((\widetilde{\mathcal{L}}f)\widetilde{\nabla}f) = (\widetilde{\mathcal{L}}f)\widetilde{div}_\eta(\widetilde{\nabla}f) + \langle\widetilde{\nabla}f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\mathcal{L}}f)\rangle = (\widetilde{\mathcal{L}}f)\widetilde{\Delta}_\eta f + \langle\widetilde{\nabla}f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\mathcal{L}}f)\rangle, \tag{2.33}$$

temos como consequência do teorema da divergência que

$$\int_M \langle\widetilde{\nabla}f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\mathcal{L}}f)\rangle\, dm = -\int_M (\widetilde{\mathcal{L}}f)\widetilde{\Delta}_\eta f\, dm + \int_{\partial M}(\widetilde{\mathcal{L}}f)\langle\widetilde{\nabla}f, \nu\rangle\, d\mu. \tag{2.34}$$

De (2.32) e (2.34) podemos reescrever (2.31) como

$$\begin{aligned}\int_{\partial M}\big((\widetilde{\mathcal{L}}f)\langle\widetilde{\nabla}f,\nu\rangle - \widetilde{\nabla}^2 f(T(\nu),\widetilde{\nabla}f)\big)\, d\mu = \int_M (\widetilde{\mathcal{L}}f)\widetilde{\Delta}_\eta f\, dm - \int_M \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla}f,\widetilde{\nabla}f)\, dm&\\ - \int_M \langle\widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}^2 f\circ T\rangle\, dm + \int_M \langle\widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}f}T\rangle\, dm.&\end{aligned} \tag{2.35}$$

Agora considere $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = \nu\}$ um referencial ortonormal local em M tal que ν é o normal unitário exterior a M ao longo de ∂M. Como

$$\widetilde{\mathcal{L}}f = \widetilde{div}_\eta(T(\widetilde{\nabla}f)) = \widetilde{div}(T(\widetilde{\nabla}f)) - \langle\widetilde{\nabla}\eta, T(\widetilde{\nabla}f)\rangle,$$

calculando separadamente o primeiro termo do lado direito da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{div}(T(\widetilde{\nabla}f)) &= \sum_{i=1}^{n+1}\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}T(\widetilde{\nabla}f), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}T(\widetilde{\nabla}f), e_i\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_\nu T(\widetilde{\nabla}f),\nu\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\{e_i\langle T(\widetilde{\nabla}f), e_i\rangle - \langle T(\widetilde{\nabla}f), \widetilde{\nabla}_{e_i}e_i\rangle\} + \nu\langle T(\widetilde{\nabla}f),\nu\rangle - \langle T(\widetilde{\nabla}f), \widetilde{\nabla}_\nu\nu\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i\langle\widetilde{\nabla}f, T(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle\widetilde{\nabla}f, T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle + \nu\langle\widetilde{\nabla}f, T(\nu)\rangle - \langle\widetilde{\nabla}f, T(\widetilde{\nabla}_\nu\nu)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\{\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}\widetilde{\nabla}f, T(e_i)\rangle + \langle\widetilde{\nabla}f, \widetilde{\nabla}_{e_i}T(e_i)\rangle\} - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f + f_\nu\nu, T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle\\
&\quad + \langle\widetilde{\nabla}_\nu\widetilde{\nabla}f, T(\nu)\rangle + \langle\widetilde{\nabla}f, (\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}(\nabla f + f_\nu\nu), T(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f + f_\nu\nu, \widetilde{\nabla}_{e_i}T(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f, T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} f_\nu\langle\nu, T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle + \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, T(\nu)) + \langle\nabla f + f_\nu\nu, (\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}\nabla f, T(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}(f_\nu\nu), T(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f, \widetilde{\nabla}_{e_i}T(e_i)\rangle\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} f_\nu\langle\nu, \widetilde{\nabla}_{e_i}T(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f, T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n} f_\nu\langle\nu, T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle\\
&\quad + \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, T(\nu)) + \langle\nabla f, (\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle + f_\nu\langle\nu, (\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f + \alpha(e_i,\nabla f), T(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle e_i(f_\nu)\nu + f_\nu\widetilde{\nabla}_{e_i}\nu, T(e_i)\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,\widetilde{\nabla}_{e_i}T(e_i)-T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle+\sum_{i=1}^{n}f_\nu\langle\nu,\widetilde{\nabla}_{e_i}T(e_i)-T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)\rangle\\
&+\widetilde{\nabla}^2f(\nu,T(\nu))+\langle\nabla f,(\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle+f_\nu\langle\nu,(\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,T(e_i)\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha(\nabla f,e_i),T(e_i)\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\nu,T(e_i(f_\nu)e_i)\rangle\\
&+\sum_{i=1}^{n}f_\nu\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}\nu,T(e_i)\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,(\widetilde{\nabla}_{e_i}T)(e_i)\rangle+\sum_{i=1}^{n}f_\nu\langle\nu,(\widetilde{\nabla}_{e_i}T)(e_i)\rangle\\
&+\widetilde{\nabla}^2f(\nu,T(\nu))+\langle\nabla f,(\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle+f_\nu\langle\nu,(\widetilde{\nabla}_\nu T)(\nu)\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{n}\langle T(\nabla^2f(e_i)),e_i\rangle-\sum_{i=1}^{n}\big\langle\langle A(\nabla f),e_i\rangle\nu,T(e_i)\big\rangle+\langle\nu,T(\nabla f_\nu)\rangle\\
&+\sum_{i=1}^{n}f_\nu\langle T(A(e_i)),e_i\rangle+\langle\nabla f,\widetilde{div}T\rangle+f_\nu\langle\nu,\widetilde{div}T\rangle+\widetilde{\nabla}^2f(\nu,T(\nu)).
\end{aligned}
$$

Note que é conveniente considerarmos as seguintes definições

$$
\Delta_T(f)\coloneqq\sum_{i=1}^{n}T(\nabla^2f(e_i),e_i)\quad\text{e}\quad tr_TA\coloneqq\sum_{i=1}^{n}T(A(e_i),e_i).
$$

Desta forma, temos que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{div}(T(\widetilde{\nabla}f))&=\Delta_T(f)-\langle\nu,T(A(\nabla f))\rangle+\langle\nabla f_\nu,T(\nu)\rangle+f_\nu tr_TA+\langle\nabla f,\widetilde{div}T\rangle\\
&\quad+f_\nu\langle\nu,\widetilde{div}T\rangle+\widetilde{\nabla}^2f(\nu,T(\nu))\\
&=\Delta_T(f)-\langle A(\nabla f),T(\nu)\rangle+\langle\nabla f_\nu,T(\nu)\rangle+f_\nu tr_TA+\langle\nabla f,\widetilde{div}T\rangle\\
&\quad+f_\nu\langle\nu,\widetilde{div}T\rangle+\widetilde{\nabla}^2f(\nu,T(\nu)).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}f&=\Delta_T(f)-\langle A(\nabla f),T(\nu)\rangle+\langle\nabla f_\nu,T(\nu)\rangle+f_\nu tr_TA+\langle\nabla f,\widetilde{div}T\rangle\\
&\quad+f_\nu\langle\nu,\widetilde{div}T\rangle+\widetilde{\nabla}^2f(\nu,T(\nu))-\langle\widetilde{\nabla}\eta,T(\widetilde{\nabla}f)\rangle.
\end{aligned}\tag{2.36}
$$

Sabendo que (2.35) é obtida integrando $(\widetilde{\mathcal{L}}f)\langle\widetilde{\nabla}f,\nu\rangle-\widetilde{\nabla}^2f(T(\nu),\widetilde{\nabla}f)$, segue que

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\mathcal{L}}f)\langle\widetilde{\nabla}f,\nu\rangle-\widetilde{\nabla}^2f(T(\nu),\widetilde{\nabla}f)&=f_\nu(\widetilde{\mathcal{L}}f)-\widetilde{\nabla}^2f(\widetilde{\nabla}f,T(\nu))\\
&=f_\nu\Delta_T(f)-f_\nu\langle A(\nabla f),T(\nu)\rangle+f_\nu\langle\nabla f_\nu,T(\nu)\rangle\\
&\quad+f_\nu^2tr_TA+f_\nu\langle\nabla f,\widetilde{div}T\rangle+f_\nu^2\langle\nu,\widetilde{div}T\rangle\\
&\quad-f_\nu\langle\widetilde{\nabla}\eta,T(\nabla f)\rangle-f_\nu^2\langle\widetilde{\nabla}\eta,T(\nu)\rangle\\
&\quad+\widetilde{\nabla}^2f(f_\nu\nu,T(\nu))-\widetilde{\nabla}^2f(\widetilde{\nabla}f,T(\nu)).
\end{aligned}\tag{2.37}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^2f(f_\nu\nu,T(\nu))-\widetilde{\nabla}^2f(\widetilde{\nabla}f,T(\nu))&=\widetilde{\nabla}^2f(f_\nu\nu-\widetilde{\nabla}f,T(\nu))\\
&=-\langle\widetilde{\nabla}_{\nabla f}\widetilde{\nabla}f,T(\nu)\rangle\\
&=-\nabla f\langle\widetilde{\nabla}f,T(\nu)\rangle+\langle\widetilde{\nabla}f,\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T(\nu)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\nabla f(f_{\nu_T}) + \langle \widetilde{\nabla} f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle + \langle \widetilde{\nabla} f, T(\widetilde{\nabla}_{\nabla f}\nu)\rangle \\
&= -\nabla f(f_{\nu_T}) + \langle \nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle + f_\nu\langle \nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle \\
&\quad + \langle \nabla f, T(A(\nabla f))\rangle + f_\nu \langle \nu, T(A(\nabla f))\rangle \\
&= -\nabla f(f_{\nu_T}) + \langle \nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle + f_\nu\langle \nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle \\
&\quad + \langle A(\nabla f), T(\nabla f)\rangle + f_\nu \langle A(\nabla f), T(\nu)\rangle \\
&= -\nabla f(f_{\nu_T}) + \langle \nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle + f_\nu\langle \nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle \\
&\quad + II(\nabla f, (T(\nabla f))^\top) + f_\nu \langle A(\nabla f), T(\nu)\rangle. \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Substituindo (2.38) em (2.37) temos que

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\mathcal{L}} f)\langle \widetilde{\nabla} f, \nu\rangle - \widetilde{\nabla}^2 f(T(\nu), \widetilde{\nabla} f) &= f_\nu \Delta_T(f) + f_\nu \langle \nabla f_\nu, T(\nu)\rangle + f_\nu^2 tr_T A \\
&\quad + f_\nu \langle \nabla f, \widetilde{div} T\rangle + f_\nu^2 \langle \nu, \widetilde{div} T\rangle - f_\nu \langle \widetilde{\nabla}\eta, T(\nabla f)\rangle \\
&\quad - f_\nu^2 \langle \widetilde{\nabla}\eta, T(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T}) + \langle \nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle \\
&\quad + f_\nu \langle \nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle + II(\nabla f, (T(\nabla f))^\top). \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

De (2.35) e (2.39) e lembrando que também podemos denotar $tr_T A$ por H_T, finalmente obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_M \left((\widetilde{\mathcal{L}} f)\widetilde{\Delta}_\eta f - \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} f) - \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}^2 f \circ T\rangle + \langle \widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla} f} T\rangle\right) dm = \\
&\int_{\partial M} \left(\Delta_T(f) + \langle \nabla f_\nu, T(\nu)\rangle + f_\nu H_T + \langle \nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle\right) f_\nu \, d\mu \\
&+ \int_{\partial M} \left(\langle \nabla f, \widetilde{div} T\rangle + f_\nu \langle \nu, \widetilde{div} T\rangle - \langle \widetilde{\nabla}\eta, T(\nabla f)\rangle - f_\nu \langle \widetilde{\nabla}\eta, T(\nu)\rangle\right) f_\nu \, d\mu \\
&+ \int_{\partial M} \left(II(\nabla f, (T(\nabla f))^\top) + \langle \nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f} T)(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T})\right) d\mu.
\end{aligned}
$$

□

Observação 2.3. *As estimativas dos Teoremas 2.1 e 2.2 em variedades fechadas também podem ser obtidas como consequência da Fómula tipo Reilly* (2.30), *uma vez que o caminho tradicional para se obter tais estimativas é integrando a Fórmula tipo Bochner.*

2.3.1 Curvatura média com peso generalizada

Seja Σ uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana $(M^{n+1}, \langle , \rangle, dm)$, onde $dm = e^{-\eta} dM$. Podemos considerar uma curvatura média com peso que generaliza naturalmente a curvatura média de Σ. Tal curvatura foi definida por Gromov ([26], p.213) como sendo

$$
H_\eta = H - \langle \widetilde{\nabla}\eta, \nu\rangle, \qquad (2.40)
$$

onde H é a curvatura média de Σ, ν é o campo normal unitário a Σ em M e $\widetilde{\nabla}$ denota o gradiente calculado na métrica de M. Aqui novamente, objetos geométricos com $\sim$ se referem a variedade ambiente M, enquanto que os sem $\sim$ se referem a hipersuperfície Σ.

Nosso objetivo agora é definir uma noção de curvatura média com peso que estenda para o operador (η, T)-divergente resultados obtidos para o operador η-laplaciano. Para esse propósito, primeiro observe que se ν é um autovetor de T e $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = \nu\}$ é um referencial ortonormal local adaptado a Σ, isto é, as restrições $e_1, \dots, e_n$ formam um referencial ortonormal para Σ, então

$$\langle \widetilde{div}T, X\rangle = (\widetilde{div}T)(X) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle (\widetilde{\nabla}_{e_i}T)(\nabla f), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle (\widetilde{\nabla}_{e_i}T)(e_i), \nabla f\rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} (\widetilde{\nabla}_{e_i}T)(e_i) &= \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{\nabla}_{e_i}T)(e_i) + (\widetilde{\nabla}_{\nu}T)(\nu) = \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{\nabla}_{e_i}T(e_i) - T(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i)) + (\widetilde{\nabla}_{\nu}T)(\nu) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(\nabla_{e_i}T(e_i) + \alpha(e_i, T(e_i))) - T(\nabla_{e_i}e_i) - T(\alpha(e_i, e_i)\big) + (\widetilde{\nabla}_{\nu}T)(\nu) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big((\nabla_{e_i}T)(e_i) + \alpha(T(e_i), e_i) - T(\alpha(e_i, e_i))\big) + (\widetilde{\nabla}_{\nu}T)(\nu) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}T)(e_i) + \underbrace{\mathbf{H}_T}_{\in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}} - \underbrace{T(\mathbf{H})}_{\in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}} + \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{\nu}T)(\nu)}_{\in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}}.
\end{aligned}$$

O que resulta em

$$\langle \widetilde{div}T, X\rangle = \langle divT, X\rangle, \text{ para todo } X \in C^{\infty}(M).$$

Usando a igualdade acima, podemos reescrever a equação (2.36) como segue

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}f &= \langle \nabla^2 f, T\rangle + f_\nu H_T + \langle \nabla f, \widetilde{div}T\rangle + f_\nu\langle \nu, \widetilde{div}T\rangle + \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, T(\nu)) - \langle \widetilde{\nabla}\eta, T(\widetilde{\nabla} f)\rangle \\
&= div(T(\nabla f)) - \langle divT, \nabla f\rangle + H_T\langle \widetilde{\nabla} f, \nu\rangle + \langle \nabla f, \widetilde{div}T\rangle + f_\nu\langle \nu, \widetilde{div}T\rangle + \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, T(\nu)) \\
&\quad - \langle \nabla\eta, T(\widetilde{\nabla} f)\rangle - \langle \eta_\nu\nu, T(\widetilde{\nabla} f)\rangle \\
&= div(T(\nabla f)) + \langle \widetilde{div}T - divT, \nabla f\rangle + \langle \widetilde{\nabla} f, H_T\nu\rangle + f_\nu\langle \nu, \widetilde{div}T\rangle + \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, T(\nu)) \\
&\quad - \langle \nabla\eta, T(\nabla f)\rangle - \langle T(\eta_\nu\nu), \widetilde{\nabla} f\rangle \\
&= \mathcal{L}f + \langle \widetilde{\nabla} f, H_T\nu\rangle + f_\nu\langle \nu, \widetilde{div}T\rangle + \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, T(\nu)) - \langle (T(\widetilde{\nabla}\eta))^{\perp}, \widetilde{\nabla} f\rangle \\
&= \mathcal{L}f + \langle \widetilde{\nabla} f, H_T\nu - (T(\widetilde{\nabla}\eta))^{\perp}\rangle + f_\nu\langle \nu, \widetilde{div}T\rangle + \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, T(\nu)).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Observação 2.4. *Quando $T = I$ em (2.41) obtemos a expressão do η-laplaciano em uma hipersuperfície, um caso particular do Lema 2.1 de [11] (relembremos que o sinal da função H pode mudar, dependendo da orientação escolhida para ν). No caso $\eta = cte$ e $T = I$, o laplaciano em uma hipersuperfície, por sua vez, também é recuperado. Denominaremos o vetor $\boldsymbol{H}_{\eta,T} := \boldsymbol{H}_T - (T(\widetilde{\nabla}\eta))^{\perp} \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$ por* ***vetor curvatura média com peso generalizado****. E isso motiva a seguinte definição:*

Definição 2.1. *Sejam Σ uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana com peso $(M, \langle,\rangle, e^{-\eta}dM)$ e T um $(1,1)$-tensor simétrico em M tal que ν é um autovetor de T, onde ν é o campo de vetores unitários normais a Σ. Definimos a* ***curvatura média com peso generalizada*** *de Σ por*

$$H_{\eta,T} := \langle \boldsymbol{H}_{\eta,T}, \nu\rangle = H_T - \langle T(\widetilde{\nabla}\eta), \nu\rangle, \tag{2.42}$$

onde H_T é a curvatura média generalizada de Σ com respeito a ν.

Decorre da Definição 2.1 que a fórmula tipo Reilly (2.30) pode ser escrita em termos da curvatura média com peso generalizada. Para isso, vamos reescrever o integrando sobre ∂M em (2.30), que por simplicidade de notação denotaremos aqui por B, como segue

$$\begin{aligned}
B &= f_\nu\langle\nabla^2 f, T\rangle + f_\nu^2 H_T + f_\nu\langle\nabla f, \widetilde{divT}\rangle + f_\nu^2\langle\nu, \widetilde{divT}\rangle - f_\nu\langle\widetilde{\nabla}\eta, T(\nabla f)\rangle - f_\nu^2\langle\widetilde{\nabla}\eta, T(\nu)\rangle \\
&\quad + f_\nu\langle\nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle + II(T(\nabla f), \nabla f) + \langle\nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T}) \\
&= f_\nu(div(T(\nabla f)) - \langle divT, \nabla f\rangle) + f_\nu^2(H_{\eta,T} + \langle T(\widetilde{\nabla}\eta), \nu\rangle) + f_\nu\langle\nabla f, \widetilde{divT}\rangle + f_\nu^2\langle\nu, \widetilde{divT}\rangle \\
&\quad - f_\nu\langle\nabla\eta, T(\nabla f)\rangle - f_\nu^2\eta_\nu\langle\nu, T(\nu)\rangle + f_\nu\langle\nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle + II(T(\nabla f), \nabla f) \\
&\quad + \langle\nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T}) \\
&= f_\nu\mathcal{L}f + f_\nu\langle\nabla f, \widetilde{divT} - divT\rangle + f_\nu^2 H_{\eta,T} + f_\nu^2\eta_\nu\langle\nu, T(\nu)\rangle + f_\nu^2\langle\nu, \widetilde{divT}\rangle - f_\nu^2\eta_\nu\langle\nu, T(\nu)\rangle \\
&\quad + f_\nu\langle\nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle + II(T(\nabla f), \nabla f) + \langle\nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T}) \\
&= f_\nu\mathcal{L}f + f_\nu^2 H_{\eta,T} + f_\nu^2\langle\nu, \widetilde{divT}\rangle + f_\nu\langle\nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle + II(T(\nabla f), \nabla f) \\
&\quad + \langle\nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T}).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Por fim, substituindo (2.43) em (2.30), obtemos a fórmula tipo Reilly em termos da curvatura média com peso generalizada

$$\begin{aligned}
&\int_M \left((\widetilde{\mathcal{L}}f)\widetilde{\Delta}_\eta f - \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla}f, \widetilde{\nabla}f) - \langle\widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}^2 f\circ T\rangle + \langle\widetilde{\nabla}^2 f, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}f}T\rangle\right) dm = \\
&\int_{\partial M} \left(\mathcal{L}f + f_\nu H_{\eta,T} + f_\nu\langle\nu, \widetilde{divT}\rangle + \langle\nu, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle\right) f_\nu\, d\mu \\
&+ \int_{\partial M} \left(II(T(\nabla f), \nabla f) + \langle\nabla f, (\widetilde{\nabla}_{\nabla f}T)(\nu)\rangle - \nabla f(f_{\nu_T})\right) d\mu.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

2.3.2 Estimativa tipo Lichnerowicz em variedades com bordo

Como aplicação da fórmula tipo Reilly obtemos uma estimativa para o primeiro autovalor não-nulo do operador (η, T)-divergente em uma variedade Riemanniana com peso compacta, orientada e com bordo suave. Para as estimativas abaixo imporemos ou a condição de bordo de Dirichlet ou a condição de Neumann vistas na Seção 2.1. O teorema abaixo estende um resultado obtido por Ma e Du [25]. Algumas partes da demonstração do Teorema 2.4 são consequência imediata de fatos mostrados anteriormente na demonstração do Teorema 2.1, uma vez que estaremos trabalhando aqui com um tensor paralelo, estes fatos serão relembrados no início da prova.

Teorema 2.4. *Sejam $(M^{n+1}, g = \langle\cdot,\cdot\rangle, dm = e^{-\eta}dM)$ uma variedade Riemanniana compacta, orientada e com bordo suave, e T um $(1,1)$-tensor em M, simétrico, paralelo e positivo definido tal que o normal unitário exterior ν seja um autovetor de T. Assuma que*

$$\widetilde{R}_{\eta,T} \geq \left(\frac{|T(\widetilde{\nabla}\eta)|^2}{z\ tr(T)} + c\right) g,$$

para certos números reais z e c positivos. Considere o seguinte problema de autovalores $-\widetilde{\mathcal{L}}u = \lambda u$.

(1) *Com a condição sobre o bordo de Dirichlet* (2.3)*, se a curvatura média com peso generalizada, $H_{\eta,T}$, de ∂M é não-negativa, então*

$$\lambda_D \geq \frac{(z+1)c\ tr(T)}{(z+1)\ tr(T) - \epsilon},$$

onde λ_D é o primeiro autovalor não-nulo do Problema de Dirichlet para o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$.

(2) *Com a condição sobre o bordo de Neumann* (2.5) *ou* (2.6)*, se o bordo ∂M é convexo, isto é, a segunda forma fundamental é não negativa, então*

$$\lambda_N \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon},$$

onde λ_N é o primeiro autovalor não-nulo do Problema de Neumann para o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Por praticidade denotaremos apenas por λ os autovalores λ_D ou λ_N sempre que não houver perigo de confusão.

Demonstração. Sendo $u : M \to \mathbb{R}$ uma autofunção associada a λ, assuma que $\int_M u^2\, dm = 1$. Do Teorema 2.1 recordemos que

(a) T é limitado, donde $\epsilon \leq \langle T(X), X\rangle \leq \delta$, onde $\epsilon = \min_{|X|=1}\langle T(X), X\rangle$ e $\delta = \max_{|X|=1}\langle T(X), X\rangle$.

(b) Tomando $X = \widetilde{\nabla} u/|\widetilde{\nabla} u|$ na desigualdade em (a), integrando sobre M e usando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$\frac{\lambda}{\delta} \leq \int_M |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm \leq \frac{\lambda}{\epsilon}.$$

(c) Como na prova do Teorema 2.1, utilizando os Lemas 2.1 e 2.2, temos que

$$tr((\widetilde{\nabla}^2 u)^2 \circ T) \geq \frac{1}{tr(T)}\left(\frac{\lambda^2 u^2}{z+1} - \frac{|T(\widetilde{\nabla}\eta)|^2|\widetilde{\nabla} u|^2}{z}\right).$$

Relembremos que $\langle \widetilde{\nabla}^2 u, \widetilde{\nabla}^2 u \circ T\rangle = tr((\widetilde{\nabla}^2 u)^2 \circ T)$.

Note que a fórmula tipo-Reilly (2.44) aplicada a autofunção u quando T é um tensor paralelo reduz-se a

$$\begin{aligned}&\int_M \big((\widetilde{\mathcal{L}} u)\widetilde{\Delta}_\eta u - \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla} u, \widetilde{\nabla} u) - \langle \widetilde{\nabla}^2 u, \widetilde{\nabla}^2 u \circ T\rangle\big)\, dm = \\ &\int_{\partial M} \big(u_\nu \mathcal{L} u + u_\nu^2 H_{\eta,T} + II(T(\nabla f), \nabla f) - \nabla u(u_\nu)\big)\, d\mu.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Desde que $-\widetilde{\mathcal{L}} u = \lambda u$ e $div_\eta(\lambda u \widetilde{\nabla} u) = \lambda u \widetilde{\Delta}_\eta u + \lambda|\widetilde{\nabla} u|^2 = -(\widetilde{\mathcal{L}} u)(\widetilde{\Delta}_\eta u) + \lambda|\widetilde{\nabla} u|^2$, pelo teorema da divergência temos que

$$\int_M (\widetilde{\mathcal{L}} u)(\widetilde{\Delta}_\eta u)\, dm = \lambda \int_M |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm. \tag{2.46}$$

Da hipótese sobre $\widetilde{R}_{\eta,T}$ e por (b),(c) e (2.46), vale para o lado esquerdo da igualdade (2.45) que

$$\lambda \int_M |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm - \int_M \widetilde{R}_{\eta,T}(\widetilde{\nabla} u, \widetilde{\nabla} u)\, dm - \int_M tr((\widetilde{\nabla}^2 u)^2 \circ T)\, dm$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \lambda \int_M |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm - \int_M \left(\frac{|T(\widetilde{\nabla}\eta)|^2}{z\, tr(T)} + c \right) |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm - \int_M \left(\frac{\lambda^2 u^2}{(z+1)\, tr(T)} - \frac{|T(\widetilde{\nabla}\eta)|^2 |\widetilde{\nabla} u|^2}{z\, tr(T)} \right) dm \\
&= \lambda \int_M |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm - c \int_M |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm - \frac{\lambda^2}{(z+1)\, tr(T)} \int_M u^2\, dm \\
&= (\lambda - c) \int_M |\widetilde{\nabla} u|^2\, dm - \frac{\lambda^2}{(z+1)\, tr(T)} \\
&\leq (\lambda - c) \frac{\lambda}{\epsilon} - \frac{\lambda^2}{(z+1)\, tr(T)}. \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Observe que os únicos termos da integral sobre o bordo ∂M na fórmula (2.45) que não se anulam com a condição de bordo de Dirichlet e com a condição de Neumann, são respectivamente

$$
\int_{\partial M} u_\nu^2 H_{\eta,T}\, d\mu \qquad \text{e} \qquad \int_{\partial M} II(T(\nabla f), \nabla f)\, d\mu.
$$

Das hipóteses em (1) e (2) sobre a geometria de ∂M segue que ambas as integrais são não negativas. Logo, em ambos os casos (de Dirichlet e de Neumann) temos que

$$
0 \leq (\lambda - c) \frac{\lambda}{\epsilon} - \frac{\lambda^2}{(z+1)\, tr(T)},
$$

Observando que $\lambda \neq 0$, finalmente concluímos que

$$
\lambda \geq \frac{(z+1)c\, tr(T)}{(z+1)\, tr(T) - \epsilon}.
$$

□

Capítulo 3

Teoremas de comparação da curvatura média de esferas geodésicas

Nosso objetivo neste capítulo será provar os Teoremas 3.1 e 3.2 que generalizam teoremas de comparação que envolvem a curvatura média de formas espaciais. A ferramenta básica para isso está na análise da curvatura de Ricci radial. A técnica conhecida para a obtenção da curvatura de Riemann em uma direção radial é a mais natural possível, de fato, se queremos obter $R(\partial r, X)\partial r$, então basta procedermos como na definição da curvatura de Riemann. Manteremos essa mesma naturalidade para obtermos o valor de R_T em uma direção radial qualquer, onde T é um $(1,1)$-tensor simétrico e positivo definido em uma variedade Riemanniana completa e conexa $(M^n, \langle , \rangle)$.

No que segue, denotaremos por $r : M \setminus (Cut(p) \cup \{p\}) \to \mathbb{R}$, $r(x) = d(x,p)$ a função distância a partir de um ponto fixado $p \in M$, que é diferenciável, com $|\nabla r| = 1$ e $\nabla r = \partial r$, onde ∂r é o vetor velocidade das geodésicas radiais dadas pelas curvas $r \mapsto exp_p(rv)$, para um vetor v fixado em T_pM e com exp denotando a aplicação exponencial. Além disso, $\nabla r(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, onde $\gamma'(t)$ é o único segmento geodésico minimizante ligando $\gamma(t)$ a p.

Se $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$(\nabla_X(T \circ \nabla^2 f))(Y) = \nabla_X T(\nabla_Y \nabla f) - T(\nabla_{\nabla_X Y} \nabla f). \tag{3.1}$$

Analogamente,

$$(\nabla_Y(T \circ \nabla^2 f))(X) = \nabla_Y T(\nabla_X \nabla f) - T(\nabla_{\nabla_Y X} \nabla f). \tag{3.2}$$

Subtraindo (3.2) de (3.1), obtemos

$$(\nabla_X(T \circ \nabla^2 f))(Y) - (\nabla_Y(T \circ \nabla^2 f))(X) = \nabla_X T(\nabla_Y \nabla f) - \nabla_Y T(\nabla_X \nabla f) - T(\nabla_{[X,Y]} \nabla f). \tag{3.3}$$

Note que

$$T \circ R(X,Y)\nabla f = T(\nabla_Y \nabla_X \nabla f) - T(\nabla_X \nabla_Y \nabla f) + T(\nabla_{[X,Y]} \nabla f). \tag{3.4}$$

Por (3.3) e (3.4) obtemos a fórmula geral:

$$\begin{aligned}(\nabla_X(T \circ \nabla^2 f))(Y) - (\nabla_Y(T \circ \nabla^2 f))(X) = &-T \circ R(X,Y)\nabla f + \nabla_X T(\nabla_Y \nabla f) \\ &- \nabla_Y T(\nabla_X \nabla f) + T(\nabla_Y \nabla_X \nabla f) \\ &- T(\nabla_X \nabla_Y \nabla f).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Observe que para $X = \partial r$ e $f = r$ em (3.5), temos

$$\begin{aligned}(\nabla_{\partial r}(T \circ \nabla^2 r))(Y) - (\nabla_Y (T \circ \nabla^2 r))(\partial r) &= -T \circ R(\partial r, Y)\partial r + \nabla_{\partial r}(T \circ \nabla^2 r)(Y) \\ &\quad - T(\nabla_{\partial r} \nabla^2 r(Y)) \\ &= -T \circ R(\partial r, Y)\partial r + (\nabla_{\partial r} T)(\nabla^2 r(Y)) \\ &= -T \circ R(\partial r, Y)\partial r + ((\nabla_{\partial r} T) \circ \nabla^2 r)(Y).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Para o segundo termo do lado esquerdo de (3.6) temos

$$(\nabla_Y (T \circ \nabla^2 r))(\partial r) = \nabla_Y (T \circ \nabla^2 r)(\partial r) - (T \circ \nabla^2 r)(\nabla^2 r(Y)) = -(T \circ \nabla^2 r \circ \nabla^2 r)(Y).$$

Desta forma

$$(\nabla_{\partial r}(T \circ \nabla^2 r))(Y) + (T \circ \nabla^2 r \circ \nabla^2 r)(Y) = -T \circ R(\partial r, Y)\partial r + ((\nabla_{\partial r} T) \circ \nabla^2 r)(Y). \tag{3.7}$$

Tomando o traço em (3.7), obtemos a fórmula tipo Bochner para o operador quadrado aplicada à função distância r, a saber

$$0 = tr((\nabla^2 r)^2 \circ T) + \partial r(\Box r) + R_T(\partial r, \partial r) - \langle (\nabla_{\partial r} T), \nabla^2 r \rangle. \tag{3.8}$$

Definição 3.1. *Diremos que um tensor T é radialmente paralelo se ele é paralelo na direção radial, isto é, $\nabla_{\partial r} T = 0$.*

Lema 3.1. *Sejam $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana completa, $r(x) = d(x, p)$ a função distância a partir de $p \in M$ e T um $(1,1)$-tensor em M, simétrico, positivo definido e radialmente paralelo. Então,*

$$0 = tr((\nabla^2 r)^2 \circ T) + \partial r(\Box r) + R_T(\partial r, \partial r). \tag{3.9}$$

Demonstração. Basta aplicar a hipótese de T ser radialmente paralelo a fórmula tipo Bochner (3.8). $\Box$

Para o próximo lema precisaremos da seguinte desigualdade para matrizes

$$\langle I, A \rangle^2 \leq |I_m|^2 |A|^2 = m|A|^2, \quad \text{isto é,} \quad |A|^2 \geq \frac{1}{m} tr(A)^2, \tag{3.10}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se,

$$A = \frac{tr(A)}{m} I_m, \tag{3.11}$$

onde $A = (a_{ij})_{m \times m}$ é uma matriz de ordem m e I_m é a matriz identidade de mesma ordem que A.

Lema 3.2. *Sejam $(M^n, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana completa, $r(x) = d(x, p)$ a função distância a partir de $p \in M$ e T um $(1,1)$-tensor em M, simétrico e positivo definido tal que ∂r é um autovetor de T e $\epsilon \leq \langle T(X(t)), X(t) \rangle \leq \delta$, para todo campo de vetores unitários $X(t)$ ao longo de um segmento geodésico minimizante $\gamma(t)$ partindo de p com $\gamma'(t) = \partial r(\gamma(t))$. Então,*

(i) $tr((\nabla^2 r)^2 \circ T) \geq \dfrac{(\Box r)^2}{(n-1)\delta}$;

(ii) $\Box r = H_T$;

(iii) $R_T(\partial r, \partial r) \leq -\dfrac{H_T^2}{(n-1)\delta} - H_T'$, *sempre que* T *for radialmente paralelo.*

Além disso, a igualdade em (i) *ocorre se, e somente se,* $\nabla^2 r = \dfrac{H_T}{(n-1)\delta} I$. *Em todos os casos* H_T *denota a curvatura média da esfera geodésica de raio* r *centrada em* p *com respeito ao normal unitário exterior* $\nu = \partial r$.

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n = \partial r\}$ um referencial ortonormal local ao longo de $\gamma(t)$ que diagonaliza T, então

$$
\begin{aligned}
tr((\nabla^2 r)^2 \circ T)(\gamma(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \langle ((\nabla^2 r)^2 \circ T)(e_i), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), \nabla^2 r(e_i) \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_j \rangle \; \langle \nabla^2 r(e_i), e_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_j \rangle \; \langle \nabla^2 r(\lambda_i e_i), e_j \rangle.
\end{aligned}
$$

Como $T(e_i) = \lambda_i e_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$, temos

$$
tr((\nabla^2 r)^2 \circ T)(\gamma(t)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_j \rangle \; \langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_j \rangle.
$$

Do fato de ∂r ser um autovetor de T e $\nabla_{\partial r} \partial r = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
tr((\nabla^2 r)^2 \circ T)(\gamma(t)) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\frac{\langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 \\
&\overset{(3.10)}{\geq} \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_i \rangle}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Como $\lambda_i = \langle T(e_i), e_i \rangle \leq \delta$, para cada $i = 1, \ldots, n$, segue que

$$
\begin{aligned}
tr((\nabla^2 r)^2 \circ T)(\gamma(t)) &\geq \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_i \rangle}{\sqrt{\delta}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_i \rangle \right)^2 \\
&= \frac{(\Box r)^2}{(n-1)\delta},
\end{aligned}
$$

o que demonstra o item (i). Para o item (ii), temos

$$
\Box r = \langle \nabla^2 r, T \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla r, T(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} \nabla r, T(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(e_i), T(e_i) \rangle = H_T.
$$

O item (iii) segue diretamente dos itens (i) e (ii) e de (3.9).

Por fim, a igualdade em (i) ocorre se, e somente se, todas as desigualdades na demonstração de (i) são igualdades, ou seja, a igualdade em (i) ocorre se, e somente se,

$$\lambda_i = \delta \quad \text{e} \quad \frac{\langle(\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_i\rangle}{\sqrt{\delta}} \overset{(3.11)}{=} \psi,$$

para cada $i = 1, \ldots, n-1$.

Note que $(\nabla^2 r \circ T)/\sqrt{\delta}$ é o operador cujas entradas da matriz associada a ele na base $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n = \partial r\}$ são exatamente $\langle(\nabla^2 r \circ T)(e_i), e_i\rangle/\sqrt{\delta}$ e que

$$\psi = \frac{\square r}{(n-1)\sqrt{\delta}}.$$

Como $T(e_i) = \delta e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$, a igualdade em (3.12) ocorre se, e somente se,

$$\nabla^2 r(e_i, e_i) = \psi \frac{\sqrt{\delta}}{\delta} = \frac{\square r}{(n-1)\delta} = \frac{H_T}{(n-1)\delta}.$$

□

Observemos que tomando $T = I$ no item (iii) do Lema 3.2 recuperamos uma desigualdade conhecida para a curvatura de Ricci radial, a saber

$$\partial r \Delta r + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \leq \partial r \Delta r + |\nabla^2 r|^2 = -Ric(\partial r, \partial r).$$

Ver, por exemplo, [29, Proposição 7.1.1].

Os teoremas a seguir são generalizações para os teoremas de comparação da curvatura média para o tensor de Bakry-Émery-Ricci que foram obtidos por Wei e Wylie [14]. Nestes teoremas trabalhamos com tensores livres de divergência, onde a naturalidade desta hipótese se justifica pelo fato de neste caso $\mathcal{L}r = H_{\eta,T}$. As demonstrações seguem a mesma técnica usada em [14]. Veja também [13, 33] onde aparecem as ideias principais para resolver problemas desta natureza.

Teorema 3.1. *Sejam $(M, \langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional orientada e completa, $\eta \in C^\infty(M)$ e T um $(1,1)$-tensor em M livre de divergência, simétrico, positivo definido e radialmente paralelo tal que ∂r é um autovetor de T e $\epsilon \leq \langle T(X(t)), X(t)\rangle \leq \delta$, para todo campo de vetores unitários $X(t)$ ao longo de um segmento geodésico minimizante $\gamma(t)$ partindo de p com $\gamma'(t) = \partial r(\gamma(t))$. Se*

$$R_{\eta,T}(\partial r, \partial r) \geq \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

então dado um segmento geodésico minimizante e $r_0 \geq 0$, temos

$$H_{\eta,T}(r) - H_{\eta,T}(r_0) \leq -\lambda(r - r_0), \quad \textit{para} \quad r \geq r_0. \tag{3.13}$$

A igualdade ocorre para algum $r > r_0$ se, e somente se, todas as curvaturas seccionais radiais são zero, $\nabla^2 r = 0$ e $\langle \nabla_{\partial r} T(\nabla \eta), \partial r\rangle = \lambda$, ao longo da geodésica de r_0 a r.

Demonstração. Pelo item (iii) do Lema 3.2, temos

$$\frac{H_T^2}{(n-1)\delta} + H_T' + R_T(\partial r, \partial r) \leq 0. \tag{3.14}$$

Como $H_{\eta,T} = H_T - \langle T(\nabla\eta), \partial r\rangle$, derivando na direção radial temos $H_{\eta,T}' = H_T' - \langle \nabla_{\partial r} T(\nabla\eta), \partial r\rangle$, e assim

$$H_{\eta,T}' \leq -\frac{H_T^2}{(n-1)\delta} - R_T(\partial r, \partial r) - \langle \nabla_{\partial r} T(\nabla\eta), \partial r\rangle. \tag{3.15}$$

Sendo $R_{\eta,T}(\partial r, \partial r) = R_T(\partial r, \partial r) + \langle \nabla_{\partial r} T(\nabla\eta), \partial r\rangle$, obtemos

$$H_{\eta,T}' \leq -\frac{H_T^2}{(n-1)\delta} - R_{\eta,T}(\partial r, \partial r). \tag{3.16}$$

Da hipótese sobre $R_{\eta,T}$, temos

$$H_{\eta,T}' \leq -\frac{H_T^2}{(n-1)\delta} - \lambda, \tag{3.17}$$

donde

$$H_{\eta,T}' \leq -\lambda. \tag{3.18}$$

Integrando (3.18) de r_0 a r com $r_0 \leq r$, isto é,

$$\int_{r_0}^{r} (H_{\eta,T}')(t) + \lambda) \, dt \leq 0 \tag{3.19}$$

obtemos a desigualdade (3.13).

A igualdade em (3.13) ocorre se, e somente se, ela ocorre em (3.19) que por sua vez ocorre se, e somente se, $H_{\eta,T}' = -\lambda$ em um intervalo $[r_0, r]$. Disto e de (3.17) segue que $H_T = 0$ e que $H_{\eta,T}' = -\langle \nabla_{\partial r} T(\nabla\eta), \partial r\rangle$, ou seja, $\langle \nabla_{\partial r} T(\nabla\eta), \partial r\rangle = \lambda$. Por (3.16) e da hipótese sobre $R_{\eta,T}$ podemos concluir que $R_{\eta,T} = \lambda$ e consequentemente $R_T(\partial r, \partial r) = 0$. Além disso, do fato de $H_T = 0$ e $R_T(\partial r, \partial r) = 0$, por (3.9) temos que $tr((\nabla^2 r)^2 \circ T) = 0$ e que vale a igualdade no item (i) do Lema 3.2, donde $\nabla^2 r = 0$.

Agora, escolhendo um referencial ortonormal local ao longo de $\gamma(t)$ que diagonaliza T como no Lema 3.2, e tomando $Y = e_i$ em (3.6), temos

$$0 = -T \circ R(\partial r, e_i)\partial r. \tag{3.20}$$

Fazendo o produto interno de (3.20) com e_i e observando que $T(e_i) = \delta e_i$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$, obtemos

$$0 = -\langle T \circ R(\partial r, e_i)\partial r, e_i\rangle = -\langle R(\partial r, e_i)\partial r, T(e_i)\rangle = -\delta K(\partial r, e_i). \tag{3.21}$$

Como δ é positivo, concluímos que $K(\partial r, e_i) = 0$.

□

Teorema 3.2. *Sejam $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional orientada e completa, $\eta \in C^\infty(M)$ e T um $(1,1)$-tensor em M livre de divergência, simétrico, positivo definido e radialmente paralelo tal que ∂r é um autovetor de T e $\epsilon \leq \langle T(X(t)), X(t)\rangle \leq \delta$, para todo campo de vetores unitários $X(t)$ ao longo de um segmento geodésico minimizante $\gamma(t)$ partindo de p com $\gamma'(t) = \partial r(\gamma(t))$. Assuma que*

$$R_{\eta,T}(\partial r, \partial r) \geq (n-1)c\delta, \quad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

ao longo de um segmento geodésico minimizante $\gamma(t)$ partindo de um ponto fixado $p \in M$. Se $\partial t(\eta) \geq -a$, para alguma constante real $a \geq 0$ (quando $c > 0$ assuma que $r \leq \pi/2\sqrt{c}$), então

$$H_{\eta,T}(r) \leq \delta(H_c(r) + a). \tag{3.22}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, todas as curvaturas seccionais radiais são iguais a c e $\partial t(\eta) = -a$.

Demonstração. Multiplicando (3.14) por $\dfrac{1}{\delta}$ e usando a hipótese sobre $R_{\eta,T}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{H_T'}{\delta} &\leq -\frac{H_T^2}{(n-1)\delta^2} - \frac{1}{\delta}R_T(\partial r, \partial r) \\
&= -\frac{H_T^2}{(n-1)\delta^2} - \frac{1}{\delta}R_{\eta,T}(\partial r, \partial r) + \frac{1}{\delta}\langle \nabla_{\partial r} T(\nabla \eta), \partial r\rangle \\
&\leq -\frac{H_T^2}{(n-1)\delta^2} - (n-1)c + \frac{1}{\delta}\langle \nabla_{\partial r} T(\nabla \eta), \partial r\rangle.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Aplicando a clássica fórmula de Bochner (1.10) à função distância em uma forma espacial M_c^n e denotando por H_c a curvatura média da esfera geodésica nessa forma espacial, obtemos

$$H_c' = -\frac{H_c^2}{n-1} - (n-1)c. \tag{3.24}$$

Subtraindo (3.24) de (3.23) obtemos

$$\left(\frac{H_T}{\delta} - H_c\right)' \leq -\left(\frac{H_T^2}{(n-1)\delta^2} - \frac{H_c^2}{n-1}\right) + \frac{1}{\delta}\langle \nabla_{\partial r} T(\nabla \eta), \partial r\rangle. \tag{3.25}$$

A fim de simplificar a desigualdade (3.25) considere a função

$$sn_c(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c}} sin(\sqrt{c}r), & \text{se } c > 0 \\ r, & \text{se } c = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{c}} sinh(\sqrt{|c|}r), & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

que é solução do seguinte problema

$$sn_c'' + c sn_c = 0 \quad \text{tal que} \quad sn_c(0) = 0 \quad \text{e} \quad sn_c'(0) = 1.$$

Para compararmos a curvatura média de uma variedade Riemanniana arbitrária com a de uma forma espacial, precisaremos de uma fórmula explícita para o caso em que a curvatura seccional é constante. Lembremos que (ver [29, Teorema 5.5.8])

$$H_c = (n-1)\frac{sn_c'}{sn_c}. \tag{3.26}$$

Por (3.25) e (3.26), temos

$$\begin{aligned}
\left[sn_c^2\left(\frac{H_T}{\delta}-H_c\right)\right]' &= 2sn_c sn_c'\left(\frac{H_T}{\delta}-H_c\right)+sn_c^2\left(\frac{H_T}{\delta}-H_c\right)' \\
&\leq \frac{2sn_c^2 H_c}{n-1}\left(\frac{H_T}{\delta}-H_c\right)-sn_c^2\left(\frac{H_T^2}{(n-1)\delta^2}-\frac{H_c^2}{n-1}\right) \\
&\quad+\frac{sn_c^2}{\delta}\langle\nabla_{\partial r}T(\nabla\eta),\partial r\rangle \\
&= sn_c^2\left[\frac{1}{n-1}\left(\frac{2H_TH_c}{\delta}-2H_c^2-\frac{H_T^2}{\delta^2}+H_c^2\right)+\frac{1}{\delta}\langle\nabla_{\partial r}T(\nabla\eta),\partial r\rangle\right] \\
&= sn_c^2\left[-\frac{1}{n-1}\left(\frac{H_T^2}{\delta^2}-\frac{2H_TH_c}{\delta}+H_c^2\right)+\frac{1}{\delta}\langle\nabla_{\partial r}T(\nabla\eta),\partial r\rangle\right] \\
&= sn_c^2\left[-\frac{1}{n-1}\left(\frac{H_T}{\delta}-H_c\right)^2+\frac{1}{\delta}\langle\nabla_{\partial r}T(\nabla\eta),\partial r\rangle\right] \\
&\leq \frac{sn_c^2}{\delta}\langle\nabla_{\partial r}T(\nabla\eta),\partial r\rangle. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Integrando (3.27) de 0 a r, obtemos

$$\frac{1}{\delta}sn_c^2(r)H_T(r)-sn_c^2(r)H_c(r)\leq\frac{1}{\delta}\int_0^r sn_c^2(t)\langle\nabla_{\partial t}T(\nabla\eta),\partial t\rangle\, dt. \qquad (3.28)$$

Uma vez que $\langle\nabla_{\partial t}T(\nabla\eta),\partial t\rangle = \partial t\langle T(\nabla\eta),\partial t\rangle$, aplicando integração por partes ao último termo da desigualdade (3.28), temos

$$\int_0^r sn_c^2(t)\langle\nabla_{\partial t}T(\nabla\eta),\partial t\rangle\, dt = sn_c^2(r)\langle T(\nabla\eta),\partial r\rangle-\int_0^r (sn_c^2(t))'\langle T(\nabla\eta),\partial t\rangle\, dt. \qquad (3.29)$$

Por (3.28) e (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta}sn_c^2(r)H_{\eta,T}(r)-sn_c^2(r)H_c(r) &\leq -\frac{1}{\delta}\int_0^r (sn_c^2(t))'\langle T(\nabla\eta),\partial t\rangle\, dt \\
&\leq -\frac{1}{\delta}\int_0^r (sn_c^2(t))'\langle \nabla\eta, T(\partial t)\rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Como $T(\partial t)=\mu\partial t$ para alguma função $\mu\in C^0(M)$ e $\mu=\langle T(\partial t),\partial t\rangle\leq\delta$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta}sn_c^2(r)H_{\eta,T}(r)-sn_c^2(r)H_c(r) &\leq -\frac{1}{\delta}\int_0^r (sn_c^2(t))'\mu\,\partial t(\eta)(t)\, dt \\
&\leq -\int_0^r (sn_c^2(t))'\,\partial t(\eta)(t)\, dt. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Uma vez que $(sn_c^2(t))'=2sn_c'(t)sn_c(t)\geq 0$ e $\partial t(\eta)(t)\geq -a$, segue que

$$\frac{1}{\delta}sn_c^2(r)H_{\eta,T}(r)-sn_c^2(r)H_c(r)\leq a\int_0^r (sn_c^2(t))'\, dt = asn_c^2(r),$$

e portanto,

$$H_{\eta,T}(r)\leq\delta(H_c(r)+a).$$

Para o caso da igualdade, suponha que $H_{\eta,T}(r) = \delta(H_c(r) + a) = \delta H_c(r) + \delta a$ para algum r e $\partial t(\eta) \geq -a$. Então por (3.30), temos

$$\frac{1}{\delta} sn_c^2(r)(H_{\eta,T}(r) - \delta H_c(r)) \leq -\int_0^r (sn_c^2(t))' \, \partial t(\eta)(t) \, dt,$$

ou seja,

$$asn_c^2(r) \leq -\int_0^r (sn_c^2(t))' \, \partial t(\eta)(t) \, dt. \tag{3.31}$$

Por outro lado,

$$-\int_0^r (sn_c^2(t))' \, \partial t(\eta)(t) \, dt \leq asn_c^2(r). \tag{3.32}$$

De (3.31) e (3.32), obtemos

$$asn_c^2(r) \leq -\int_0^r (sn_c^2(t))' \, \partial t(\eta)(t) \, dt \leq asn_c^2(r), \tag{3.33}$$

logo,

$$\int_0^r (sn_c^2(t))' \, \partial t(\eta)(t) \, dt = -asn_c^2(r). \tag{3.34}$$

Como supomos no início que $\partial t(\eta) \geq -a$, a única possibilidade para que ocorra a igualdade (3.34) é que $\partial t(\eta)(t) = -a$. Da definição de $H_{\eta,T} = H_T - \langle T(\nabla \eta), \partial r \rangle$, segue que

$$H_{\eta,T}(r) = H_T(r) - \mu \partial r(\eta). \tag{3.35}$$

Para que ocorra a igualdade em (3.22) também deve valer a igualdade no item *(iii)* do Lema 3.2 e devemos ter $\mu = \delta$. Assim, $H_T(r) = H_{\eta,T}(r) - \delta a = \delta H_c(r)$ e

$$\nabla^2 r = \frac{H_T(r)}{(n-1)\delta} I = \frac{H_c(r)}{(n-1)} I \overset{(3.26)}{=} \frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)} I. \tag{3.36}$$

Logo, para todo vetor unitário $u \in T_{\gamma(t)}M$ com $u \perp \partial r$, a curvatura seccional radial é calculada como segue

$$\begin{aligned}
-R(\partial r, u)\partial r &= \left(\nabla_{\partial r} \left(\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)} I\right)\right) u + \left(\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)}\right)^2 u \\
&= \left(\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)}\right)' u + \left(\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)}\right)^2 u \\
&= \left[\left(\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)}\right)' + \left(\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)}\right)^2\right] u \\
&= \frac{sn_c''(r)}{sn_c(r)} u,
\end{aligned}$$

e portanto

$$K(\partial r, u) = \langle R(\partial r, u)\partial r, u \rangle = -\frac{sn_c''(r)}{sn_c(r)} = c.$$

□

Bibliografia

[1] A. Barros; G. P. Bessa, *Estimates of the first eigenvalue of minimal hypersurfaces of* $\mathbb{S}^{n+1}$, Matemática Contemporânea, v. 17, p. 42-47, 1999. 1

[2] A. Barros; J. N. Gomes; E. Ribeiro, *A note on rigidity of the almost Ricci soliton*, Arch. Math. (Basel) 100 (2003) 481-490. 9

[3] A. Barros; J.N. Gomes, *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature*, J. Math. Anal. Appl. 401 (2003) 702-705. 9

[4] A. C. Mendes, *Propriedades Genéricas de Autofunções e Autovalores de Operadores Elípticos na Forma Divergente em Variedades Riemannianas*, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2020). 2

[5] A. G. Setti, *Eigenvalue estimates for the weighted laplacian on a riemannian manifold*, Rediconti del Seminario Matematico della Università di Padova tome 100 (1998), p.27-55. 2

[6] A. Lichnerowicz, *Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif*, , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 271 (1970) A650 - A653. 1

[7] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958. 1

[8] A. Ros, *Compact Hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Revista Matemática Iberoamericana, 3, 447-453 (1987). 1

[9] C. L. Cunha, *Propriedades de autovalores para uma classe de operadores elípticos de segunda ordem*, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2016). 2, 7, 14

[10] D. Bakry; M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, In Séminaire de probabilités, XIX, 1983/1984, volume 1123 of Lectures Notes in Math., pages 177-206. Springer, Berlin, 1985. 1

[11] G. Huang; B. Ma, *Eigenvalue estimates for submanifolds with bounded f-mean curvature*, Proc. Math. Sci. 127,375-381(2017). 27

[12] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv: math / 0211159 [math.DG], (2002). 9

[13] G. Wei, *Manifolds with a lower Ricci curvature bound*, Surveys in Differential Geometry, Vol XI, in Surv. Diff. Geom., 11, Int. Press, Somerville, MA, 2007, pp. 203-227. 34

[14] G. Wei; W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Émery Ricci tensor*, J.Differential Geom. 83:2 (2009), 377-405. 4, 34

[15] H. Alencar; G. S. Neto; D. Zhou, *Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators on compact manifolds*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 46 (3) (2015) 491-514. 10

[16] H. D. Cao, *Recent progress on Ricci soliton*, Adv. Lect. Math. (ALM), 11 (2009) 1-38. 9

[17] H. -I. Choi; A. -N. Wang, *A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces*, J. Differential Geom., 18 no. 3, 559-562 (1983). 1

[18] J. Escobar, *Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate*, Comm. Pure Appl. Math. 43 (1990), 857-883. 1

[19] J. F. Miranda, *Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco e estimativas de autovalores para uma classe de operadores diferenciais elípticos*, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2015). 7, 9

[20] J. N. Gomes, *Rigidez de superfícies de contato e caracterização de variedades riemannianas munidas de um campo conforme ou de alguma métrica especial*, Tese de doutorado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2012). 9

[21] J. N. Gomes; J. F. Miranda, *Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form*, Nonlinear Analysis 176 (2018), 1-19. 2, 9, 10, 22

[22] J. Roth, *General Reilly-Type inequalities for submanifolds of weighted Euclidean spaces*, Colloquium Mathematicae 144.1 (2016): 127-136. 2, 22

[23] J. Roth, *Reilly-Type inequalities for Paneitz and Steklov eigenvalues*, Potential Analysis, 2019. 2, 22

[24] L. Ma, *Eigenvalue estimates and L1 energy on closed manifolds*, Acta. Math. Sin.-English Ser. 30, 1729-1734 (2009). 1

[25] L. Ma; S.-H. Du, *Extension of Reilly formula with applications to eigenvalue estimates for drifting laplacians*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348:21-22 (2010), 1203-1206. 2, 14, 28

[26] M. Gromov, *Isoperimetry of waists and concentration of maps*, Geom. Funct. Anal., 13(1):178-215, (2003). 3, 26

[27] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric to the sphere*, J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 333-340. 1

[28] M. P. Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011. 8

[29] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Third Edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer-Verlag, New York, 2016. 34, 36

[30] R. C. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. 26:3 (1977), 459-472. 1

[31] R. R. Mesquita, *Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η-laplaciano e aplicações*, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2014). 7, 9

[32] S. Bochner, *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc 52 (1946), 776-797. 1, 9

[33] S.-H. Zhu, *The comparison geometry of Ricci curvature*. In: Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993-94), volume 30 of Math. Sci. Res. Inst. Publ, pages 221-262. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, MR 1452876, Zbl 0896.53036. 34

[34] S. Pigola; M. Rigoli; A. Setti, *Some applications of integral formulas in Riemannian geometry and PDE's*, Milan J. Math. 71 219-281 (2003). 1

[35] S. Pigola; M. Rigoli; M. Rimoldi; A. Setti, *Ricci almost solitons*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), v.10, 4(2011) 757-799. 9

[36] S. Y. Cheng; S. T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. 225 (1977), no. 3, 195-204. MR0431043(55 #4045). 10